МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Тольяттинский государственный университет»

институт математики, физики и информационных технологий
кафедра «Алгебра и геометрия»

МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ УЧАЩИХСЯ ТЕМЕ «ПЛОЩАДИ ФИГУР» В КУРСЕ ГЕОМЕТРИИ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ

Б А К А Л А В Р С К А Я   Р А Б О Т А

Направление подготовки бакалавра: 44.03.05 Педагогическое *образование*
Направленность (профиль): *Математика и информатика*

Студент Т.М. Жилкина ___________

Научный
Руководитель: к.п.н., доцент кафедры алгебры и геометрии И.В. Антонова ___________

Допустить к защите
Заведующий кафедрой: д.п.н., проф. Р.А. Утеева ___________

«_____»___________2016 г.

Тольятти - 2016

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность исследования. Курс геометрии занимает большое место и играет важную роль в школьном математическом образовании. На него приходится около 40% учебного времени, отводимого на математику в VI-X классах, причем геометрия изучается на протяжении всего времени обучения в школе.

Основное содержание школьного курса геометрии сохраняется стабильным почти 200 лет и своими истоками имеет «Начала» Евклида. В геометрии на плоскости (планиметрии) изучают взаимное расположение прямых; свойства треугольников, четырехугольников и окружности; отношения равенства (конгруэнтности) и подобия фигур; измерение длин, величин углов и площадей [20, С. 387].

Вместе с этим, согласно ФГОС основного общего образования, который ориентирован на становление личностных характеристик выпускника, владеющего математическими рассуждениями, умениями решения учебных задач; применяющего математические знания при решении задач, изучение ими геометрии должно отражать: 1) формирование систематических знаний о плоских фигурах и их свойствах, представлений о простейших пространственных телах; 2) развитие умений моделирования реальных ситуаций на языке геометрии, исследования построенной модели с использованием геометрических понятий и теорем, решения геометрических и практических задач: решение задач на нахождение геометрических величин (длина и расстояние, величина угла, площадь) по образцам или алгоритмам [39, С. 13-14].

Задачи по теме «Площади фигур» входят в итоговую аттестацию учащихся основной школы: в части первой они встречаются в заданиях № 10-12, во второй части – в заданиях № 24-26.

Следует отметить, что задачи на площадь имеют практическую направленность и могут быть полезны в практической жизни человека.

В теории и методике обучения математики вопросам методики обучения учащихся теме «Площади фигур» в курсе геометрии основной школы посвящены исследования Н.М. Бескина, Р.В. Гангнуса, В.А. Далингера, П.А. Карасева, С.Е. Ляпина, Н.С. Подходовой, Н.Л. Стефановой, Н.М. Рогановского, В.Г. Чичигина и др.

Анализ ранее выполненных *диссертационных работ*, посвященных проблеме обучения учащихся теме «Площади фигур» в курсе геометрии основной школы, показал, что они были рассмотрены в аспекте:

- описания и выделения характеристик метода площадей, разработки классификации задач, решаемых с его применением; разработана методика обучения методу площадей, включающая в себя серии планиметрических задач, направленных на обучение методу [26, С. 7].

- обоснования целесообразности и возможности альтернативного подхода к изучению темы «Площадь», опираясь на понятие «полоса»; выявлены требования к подбору учебных материалов и на их основе разработана система задач на вычисление площадей геометрических фигур, разработана методика изучения темы «Площадь» [12, С. 10].

Все вышесказанное определяет актуальность темы исследования.

Кроме того, актуальность темы исследования обусловлена сложившимся к настоящему времени *противоречием* между необходимостью обучения учащихся теме «Площади фигур» на уроках геометрии в соответствии с требованиями ФГОС основного общего образования и фактическим состоянием методики ее обучении учащихся в курсе геометрии основной школы.

Проблема исследования состоит в выявлении методических особенностей обучения учащихся теме «Площади фигур» в курсе геометрии основной школы.

Объект исследования: процесс обучения геометрии в курсе основной школы.

Предмет исследования: методические особенности обучения учащихся теме «Площади фигур» в курсе геометрии основной школы.

Цель исследования: выявить методические особенности обучения учащихся теме «Площади фигур» в курсе геометрии основной школы и разработать системы упражнений по теме исследования.

Гипотеза исследования основана на предположении о том, что достижение учащимися обязательных результатов освоения программы основного общего образования по математике, повышение качества их математической подготовки могут быть обеспечены, если выявить методические особенности обучения учащихся теме «Площади фигур» в курсе геометрии основной школы и разработать соответствующие системы упражнений по теме исследования, направленные на привитие им умений и навыков, необходимых при вычислении величины площади; применение определенных приемов и методов решения задач по данной теме.

Задачи исследования:

1. Рассмотреть исторические аспекты развития основных понятий, связанных с площадями фигур.

2. Раскрыть методику введения понятия площади.

3. Выявить различные подходы к обучению учащихся теме «Площади фигур» в курсе геометрии основной школы.

4. Рассмотреть приемы и методы решения задач по теме «Площади фигур».

5. Выявить технологии обучения учащихся теме «Площади фигур».

6. Рассмотреть методические особенности обучения данной теме учащихся 7-9-х классов.

7. Выделить основные типы задач, встречающие в ОГЭ, по теме «Площади фигур».

8. Разработать системы задач по теме исследования для учащихся 7-9-х классов.

9. Провести констатирующий эксперимент.

Для решения задач были использованы следующие **методы исследования**: анализ учебно-методической литературы, работ по истории математики, школьных программ, методических пособий, учебников и учебных пособий, изучение опыта работы отечественной школы.

Теоретическая значимость исследования состоит в том, что в нем выявлены методические особенности обучения учащихся теме «Площади фигур» в курсе геометрии основной школы.

Практическую значимость результатов исследования составляют методические рекомендации обучения теме «Площади фигур» учащихся 7-9-х классов и соответствующие системы задач, которые могут быть использованы учителями математики основной школы и студентами педагогических направлений подготовки в ходе педагогической практики.

Апробация результатов исследования. Теоретические выводы и практические результаты исследования были апробированы на первом этапе научной студенческой конференции "Дни науки" института математики, физики и информационных технологий ТГУ (г. Тольятти, апрель 2016 г.).

На защиту выносятся:

1. Методические рекомендации по обучению учащихся теме «Площади фигур» в курсе геометрии основной школы.
2. Системы задач по теме «Площади фигур» в курсе геометрии основной школы.

Бакалаврская работа состоит из введения, двух глав, заключения, списка литературы и Приложений.

Во введении сформулированы основные характеристики исследования: актуальность, противоречие, проблема, объект, предмет, цель, задачи и методы исследования.

Глава I посвящена теоретическим аспектам обучения учащихся теме «Площади фигур» в курсе геометрии основной школы. Рассмотрены исторические аспекты развития основных понятий, связанных с площадью фигур. Раскрыта методика введения понятия площадь. Выявлены различные подходы к обучению учащихся теме «Площади фигур» в курсе геометрии основной школы. Рассмотрены приемы и методы решения геометрических задач по данной теме. Выявлены технологии обучения учащихся теме «Площади фигур».

В Главе II представлены методические аспекты обучения учащихся теме «Площади фигур» в курсе геометрии основной школы. Разработаны методические рекомендации обучения данной теме. Выделены основные типы задач, встречающиеся в ОГЭ по теме «Площади фигур». Разработаны системы задач по теме «Площади фигур» в курсе геометрии основной школы. Представлены результаты констатирующего эксперимента.

В заключении сформулированы основные результаты и выводы проведённого исследования.

Список литературы содержит 48 наименования.

В Приложении представлены анализ программ, таблица для составления упражнений на вычисление площади треугольника, решение заданий варианта контрольной работы для проведения констатирующего эксперимента, ответы и указания к системам задач.

ГЛАВА I. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ОБУЧЕНИЯ УЧАЩИХСЯ ТЕМЕ "ПЛОЩАДИ ФИГУР" В КУРСЕ ГЕОМЕТРИИ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ

§1. Из истории развития понятия площади фигур в математике

Планиметрические знания древних египтян и вавилонян относились к измерению площадей и объемов простых геометрических фигур, встречавшихся при межевании земель, возведении стен и насыпей, строительстве плотин, каналов и др. Сохранились планы земельных участков, разделенных на треугольники, прямоугольники, трапеции. Их площади вычислялись как по *точным правилам*, так и *приближенно* [17, С.6].

Еще 4—5 тыс. лет назад вавилоняне умели определять *площадь прямоугольника* и *трапеции* в квадратных единицах. Эталоном при *измерении площадей* служил квадрат, за свои замечательные свойства: равные стороны, равные и прямые углы, симметричность и общее совершенство формы. 4000 лет назад Древние египтяне для измерения *площади прямоугольника, треугольника* и *трапеции*, пользовались почти теми же приемами, что и мы: основание треугольника делилось пополам и умножалось на высоту; для трапеции же сумма параллельных сторон делилась пополам и умножалась на высоту. *Площадь четырехугольника* вычислялась по формуле: $S=\frac{a+c}{2}\cdot\frac{b+d}{2}$, где a,b,c,d - стороны четырехугольника, то есть умножались полусуммы противоположных сторон (Рис.1). Г.И. Глейзер указывает, что с помощью данной формулы можно точно вычислить лишь площадь прямоугольника, для других же четырехугольников, у которых углы близки к прямым углам, площадь можно вычислить лишь приближенно.

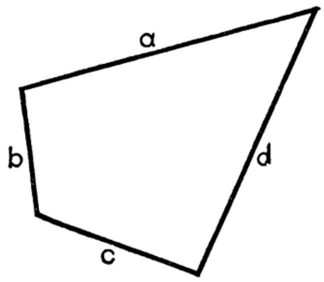


Рис. 1

Для вычисления *площади равнобедренного треугольника* ABC, причем $|AB|=|AC|$, египтяне пользовались приближенной формулой: $S=\frac{|BC|\cdot|AB|}{2}$.

Данная формула была применима лишь для треугольников с малым углом при вершине [7, С. 27-28].

Измерение площадей многоугольников проводилось аналогично измерению длин отрезков. У всех народов единицей измерения площади была площадь квадрата со стороной, равной единице длины. Лишь в Древнем Китае такой единицей служил прямоугольник со сторонами 13 бу и 16 бу (1 бу - около $1\frac{2}{3}$ м) [17, С. 7].

Евклид в «Началах» не употреблял слова «площадь», под словом «фигура» понималась часть плоскости, ограниченная той или иной замкнутой линией. Единица измерения площади у Евклида не подразумевалась числом, он выражал единицу измерения путем *сравнения площади* разных фигур между собой.

Евклид, как и другие ученые древности, занимался вопросами превращения одних фигур в другие, им *равновеликие*. При решении задачи о построении квадрата, равновеликого любому данному Евклид оперировал самими площадями, а не числами, которые выражают эти площади. Извлечение квадратного корня для Евклида происходило не алгебраическим путем, а геометрическим: извлечь квадратный корень из числа означало построить стороны квадрата, площадь которого равна площади данного многоугольника [7, С. 28-29].

Задача на вычисление *площади круга* так же возникла в глубокой древности. В папирусе Ахмеса описано, что за площадь круга S принимали квадрат со сторонами равными $\frac{8}{9} \textit{диметра}^2$, то есть $S = (\frac{8}{9} \cdot 2R)^2 = \frac{256}{81} R^2$. Для соотношения длины окружности к диаметру бралось $\pi = \frac{256}{81} \approx 3{,}1605...$ В древнеегипетских и вавилонских текстах значение $\pi = 3$, римляне принимали $\pi = 3{,}12$. Эти значения были получены путем прямого измерения длины окружности с помощью веревки [7, С. 97].

В древнем и средневековом Китае для нахождения *площади круга* существовало четыре формулы: $S=\frac{c}{2}\cdot\frac{d}{2}$, $S=\frac{c\cdot d}{2}$, $S=\frac{d\cdot d}{4}$, $S=\frac{c\cdot c}{12}$, где $d-$диаметр, $c-$длина окружности. *Площадь частей круга* определялись следующим образом: *площадь сектора* определялась, как четверть произведения диаметра на длину соответствующей дуги; *площадь кругового кольца* – произведение полусуммы внутренней и внешней длин окружностей на полуразность длин диаметров; *площадь сегмента* – заменяли трапецией с тем же основанием, что и у сегмента, равными высотой и верхним основанием, то есть $S=\frac{l\cdot h+h^2}{2}$, где $l-$длина хорды, $h-$высота стрелки [17, С. 71].

Задача Дидоны (или изопериметрическая задача) является одной из древнейших задач, связанных с площадями. Это задача о нахождении фигуры наибольшей площади, ограниченной кривой заданной длины (периметра). «*Изопериметрические фигуры* – фигуры, имеющие одинаковый периметр». Ответ на данную задачу дает теорема: «Среди всех замкнутых кривых данной длины наибольшую площадь охватывает окружность». В школьном курсе геометрии рассматривается доказательство теоремы, приведенное Штейнером [34, С. 249-250].

При решении задач пифагорейцы применяли *метод приложения площадей*, которые сводились к решению линейных и квадратных уравнений. С отрезками, которыми были основными (неопределяемыми) понятиями геометрической алгебры, могли быть осуществлены четыре арифметические операции: сложение, вычитание, умножение и деление. Деление интерпретировалось как эквивалентная задача приложения площадей.

Исторически сложилось так, что существовали *два подхода* к решению геометрических задач, относящихся к вычислению площадей прямолинейных фигур, то есть с помощью:

1) *метода разложения (разбиения),* который основывался на понятии *равновеликости* и *равносоставленности*. Данный метод был

известен уже в Древней Греции и Древнем Китае. Суть метода заключалась в том, что фигуру разбивали на конечное число частей, чтобы из этих частей можно было составить более простую фигуру, площадь которой можно было найти. То есть искомую фигуру приводили к равновеликому квадрату и площадь этой фигуры сравнивали с квадратом. Так же были доказаны в пифагорейской гетерии теоремы о равновеликости параллелограмма (ромба) и прямоугольника, треугольника и параллелограмма, трапеции и треугольника и др. А.Е. Малых и др. отмечают, что в современной школе данные теоремы доказываются аналогично.

2) *метода дополнения* (или позже названого *аналитическим*), представляющего собой последовательность правил для решения задач. Суть метода заключалась в том, что рассматриваемые фигуры дополняли до равных между собой фигур. С помощью данного метода были доказаны многие теоремы, в том числе и теорема Пифагора.

По мнению А.Е. Малых, при изучении пифагорейцами способов вычисления площадей геометрических фигур заметное место занимало преобразование в равновеликие фигуры. Основа его являлась теорема о равновеликости треугольников с одним и тем же основанием и равными высотами, опущенными на это основание [16].

Таким образом, уже 4-5 тысяч лет назад были известны формулы для измерения площадей прямоугольника, треугольника, произвольного четырехугольника, трапеции, круга и его частей. Формулы для вычисления площади фигур в древности отличались от формул, изучаемых сегодня в школьном курсе геометрии. Только древние египтяне для измерения площади прямоугольника, треугольника и трапеции пользовались аналогичными приемами, что и мы. У всех народов, кроме древних китайцев, единицей измерения площади была площадь квадрата со стороной, равной единице длины. До нашего времени дошла древнейшая задача Дидоны, которая до сих пор изучается в школьном курсе геометрии в классах с углубленным изучением математики. Использовались два метода решения геометрических задач – метод разложения и метод дополнения, которыми мы пользуемся и в настоящее время.

§2. Методика введения понятия площади

Среди различных систем величин, изучаемых в школе на различных этапах обучения, с понятием площади плоской фигуры знакомятся учащиеся уже в начальной школе. На первых этапах обучения речь идет об интуитивном представлении, о площади, а не о строгом математическом обосновании этого понятия или об аксиоматическом его введении. Первоначально у учащихся представление о площади плоской фигуры связывается с подсчетом числа единичных квадратов (то есть квадратов, длины сторон которых равны линейной единице измерения) или долей таких квадратов, которые можно разметить на данной фигуре [21, С. 382].

В.Г. Чичигин отмечает, что при изучении данной темы и ученики, и учителя испытывают большие затруднения, так как в учебной и методической литературе к определению понятия площади нет единого подхода. Автор выделяет три *различных подхода* к определению понятия площадь:

1. Площадь фигуры – это часть плоскости, занимаемой этой фигурой.

2. Площадь простого многоугольника – это число, определяющее размер части плоскости, ограниченной этим многоугольником.

3. Площадь замкнутой фигуры – это величина части плоскости, заключенной внутри многоугольника или какой-нибудь другой плоской замкнутой фигуры.

В.Г. Чичигин считает *первый подход*, взятый из учебника А.Ю. Давидова и Н.А. Извольского неудачным, так как под это определение так же подходит и понятие многоугольника; *второй подход,* из учебника Н.А. Глаголева, с точки зрения методики - наиболее простым для учащихся; *третий подход*, взятый так же из учебников А.Ю. Давидова и Н.А.

Извольского, нуждается в дополнительном разъяснении определяющего понятия «величина» [45, С. 365].

Р.В. Гангнус утверждает о том, что понятие площади как о величине относится к числу трудных для учащихся понятий и для того, чтобы подвести учащихся к усвоению данного понятия через понятие величины, им следует показать сопоставления ряда геометрических фактов и примеров, взятых из практической жизни.

Автор приходит к понятию о *величине ограниченной области*, рассмотрев вопросы практического характера, а именно, равны или не равны два участка земли или две стены, подлежащие окраске. Рассматривает шесть аксиом двух фигур, имеющих равные внутренние области. В итоге, внутренняя область фигуры есть понятие категории величины, а площадь есть величина внутренней области фигуры. После того, как дано определение площади, им предлагается найти меру площади [5, С. 235-237].

П.А. Карасев при введении понятия площади использует два вида *измерения*: *прямые* и *косвенные*. Под *прямым* - автор понимает такое измерение, когда нужно измерить границы земельного участка, при этом, мерная лента прямо укладывается на границу и сосчитывается число метров, содержащихся в ней. Под *косвенным измерением* им понимается величина, которая после измерения не измеряется, а вычисляется на основании данных, полученных от измерения. То есть, если нужно измерить площадь треугольного участка, будет измеряться два отрезка: высота и основание, а саму площадь треугольника вычисляют по определенному правилу или, проще говоря, по формуле. В начальной школе учащиеся знакомятся с двумя видами измерения.

Автор отмечает, что очень важно на начальном этапе изучения темы, большое внимание уделить методике изучения площади. Если учитель это не сделает, то у класса проявляются трудности: ученики плохо представляют единицу измерения площади; они представляют, что площадь измеряется линейным метром, в двух направлениях; отсюда получается непонимание, как вычислять площади прямоугольника, могут путать периметр с площадью и так далее. Для того чтобы эти недостатки избежать:

1) у ученика должны быть постоянно перед собой единицы измерения площадей;

2) ученик должен отчетливо осознавать процесс сравнения измеряемой площади с квадратной единицей.

По мнению, П.А. Карасева, учитель должен подвести ученика к тому, чтобы он сам перешел к косвенному измерению площадей, почувствовав сложность и неудобство прямого измерения [13, С. 118].

С.Е. Ляпин и др., аналогично Н.А. Глаголеву, под площадью понимают - некоторое число, определяющее размер части плоскости, ограниченной контуром фигуры, то есть когда площадь определяется как положительно число, которое ставится в соответствие каждому многоугольника и выполняются следующие положения:

1) равным многоугольникам соответствуют равные числа;

2) площадь многоугольника, состоящего из нескольких частей, равна сумме площадей этих частей;

3) некоторому определенному многоугольнику соответствует число 1.

Авторы считают, что такое построение темы, не может быть проведено в восьмилетней школе.

С начальных классов складывается представление о площади фигуры как о величине части плоскости, ограниченной контуром этой фигуры. Далее в 5 классе ученики уже понимают, что найти площадь прямоугольника это значит найти такое число, которое показывает, из скольких квадратных единиц может быть составлен данный прямоугольник. И уже в 6 классе учитель говорит ученикам, что площадь прямоугольника может быть дробным числом.

С.Е. Ляпин и др. отмечают, что в 8 классе, объясняя тему «Площадь многоугольника», учитель должен опираться на знания и представления, которые были получены учениками ранее, только более систематизированные, дополненные и обоснованные [19, С. 711].

Н.М. Бескин пишет о проблеме изложения учения о площадях, которая сводится к доказательству того, что площади образуют *класс геометрических непрерывных величин*.

1. Для того, чтобы множество $\{a\}$ образовало класс величин необходимо, чтобы множество было упорядоченным. *Упорядоченное множество* – это множество, для каждого из элементов которого должно быть установлено понятие «больше» и «меньше» и для любых двух различных элементов a_1 и a_2 должно иметь место одно из двух соотношений: $a_1 < a_2$ или $a_1 > a_2$. Так же должны быть установлены понятия «суммы» и «разности».

2. Для геометрических величин должно быть установлено понятие «части» и аксиома: если a есть часть b, то $a < b$.

3. Для *непрерывного класса* величин должна выполняться аксиома Дедекинда, которая гласит: если все точки разбиты на два непустых класса, причем все точки первого класса расположены левее всех точек второго, то существуют либо самая правая точка первого класса, либо самая левая точка второго.

Автор обращает внимание на важную особенность в теории геометрических величин: возможность установить взаимно однозначное соответствие между данным множеством и множеством действительных чисел с сохранением порядка, это значит, что если элементу a_1 данного множества соответствует действительное число p_1, а элементу a_2 - действительное число p_2, то из $a_1 < a_2$ вытекает $p_1 < p_2$.

Н.М. Бескин утверждает, что если действительно площади образуют класс геометрических величин, то должно быть, возможно, отнести каждой фигуре положительное действительное число, и то соответствие должно обладать свойствами:

1. Каждой плоской фигуре ставится в соответствии положительное число, называемое площадью этой фигуры.

2. Конгруэнтные фигуры имеют равные площади.

3. Если фигура разрезана на несколько частей, то сумма площадей этих частей равна площади всей фигуры [2, С. 188-189].

Таким образом, нами установлено, что в методической литературе понятие *площади* определяют как *величину* части плоскости, заключенной внутри плоской замкнутой фигуры; через площадь фигуры - как *часть плоскости*, занимаемой этой фигурой; через площадь простого многоугольника - как *число*, определяющее размер части плоскости, ограниченной этим многоугольником.

§3. Различные подходы к обучению теме «Площади фигур» в курсе геометрии основной школы

Н.М. Бескин в [2] приводит две схемы изложения теории площадей: с помощью *метода разложения и* с помощью *метода дополнения*.

Суть *метода разложения*, по мнению автора, заключается в том, что если разрезать один из многоугольников (прямыми линиями) на конечное число частей и сложить из этих частей второй многоугольник, то всегда можно доказать их равновеликость. Можно пойти и по другому пути: вывести формулу для измерения площади фигур какого-нибудь определенного вида и тем самым, не ограничиваться сравнением площадей различных фигур, что сделано у Евклида. Вывод формул может строиться следующим порядком:

1) вывод формулу для площади прямоугольника;

2) вывод формулу для площади треугольника;

3) выводить формулу для площадей различных многоугольников, разлагая их на треугольники.

Еще одним методом, который используют при изложении теории площадей многоугольников, является *метод дополнения*. Доказывая равновеликость многоугольников P и Q, к ним добавляют попарно конгруэнтные фигуры, стараясь дополнить их до фигур, равновеликость которых уже известна. Из теоремы Болиаи – Гервина (равновеликие многоугольники являются равносоставленными), равновеликость двух многоугольников всегда может быть доказана методом разложения, то есть метод дополнения не является необходимым. В школьном курсе математики следует использовать оба метода, так как использование метода дополнения иногда дает значительное упрощение доказательств [2, С. 190 - 195]

В.Г. Чичигин, Н.М. Бескин, Р.В. Гангнус, С.Е. Ляпин считают, что в основе теории площадей многоугольника должна лежать формула площади прямоугольника.

3.1. Методика введения понятия площади прямоугольника

В.Г. Чичигин, основываясь на учебниках А.Ю. Давидова, А.П. Киселева и Н.А. Глаголева, приводя три способа обучения *теме площади прямоугольника*.

В основе *первого способа* лежит *сравнение площадей*. Этот способ описан в книгах А.Ю. Давидова, Ж. Адамара, А.Н. Перепелкиной и С.Н. Новоселова и имел широкое распространение в последней четверти XIX в. и в начале XX в.

Сущность способа такова:

1. Вводится *определение площади* плоского многоугольника, как величина, обладающая двумя *свойствами*:

- два равных (конгруэнтных) многоугольника имеют одну и ту же площадь независимо от положения, занимаемого ими в пространстве;

- если многоугольник разбит прямыми линиями на какие - либо части, то за площадь его принимается сумма площадей всех составляющих его частей;

2. Устанавливается *единица измерения площадей* – это площадь квадрата со стороной, равной единице длины и понятие об измерении

площади. Измерить площадь какой-либо фигуры – это, значит, найти отношение этой площади к квадратной единице;

3. Доказываются следующие *теоремы*:

Теорема 1. Площадь двух прямоугольников, имеющих равные основания, относятся между собой как их высоты.

Теорема 2. Отношение площадей двух прямоугольников равно произведению их соответствующих измерений.

Теорема 3. Площадь прямоугольника равна произведению двух его измерений.

В.Г. Чичигин допускает существование данного способа в школьном курсе геометрии, так как учащиеся к 8 классу убеждены, что мерой площади всякого прямоугольника является число.

В основе *второго способа* обучения лежит *понятие предельного перехода*. Этот способ описан в учебнике А.П. Киселева и был господствующим в средней школе в последние десятилетия.

По мнению автора, обучать теме следует следующим образом:

1. Начинать изучение темы следует с «*Основных допущений о площадях*». В данном случае площадь определяется как величина части плоскости, заключенной внутри плоской замкнутой фигуры. Затем в учебнике ставится задача: найти число, измеряющее площадь, чтобы соотношения между площадями фигур и числами, измеряющими их, удовлетворяли условиям:

1) числа, измеряющие площади двух равных фигур, равны между собой;

2) если данная фигура разбита на несколько частей и каждая из них есть замкнутая фигура, то число, измеряющее площадь всей фигуры, должно быть равно сумме чисел, измеряющих площади отдельных ее частей.

2. При помощи сетки квадратов ввести *понятие об измерении площади прямоугольника*. Автором приводится доказательство теоремы, при помощи сетки квадратов: «Площадь прямоугольника равна произведению его

основания на высоту, когда оба измерения прямоугольника являются целыми и дробными числами». Отмечается, что если хотя бы одна из сторон прямоугольника измеряется иррациональным числом, то площадь прямоугольника определяется как предел площадей прямоугольников, длины сторон которых выражаются рациональными числами – приближенными значениями иррациональных чисел - при неограниченном возрастании степени точности их.

По мнению В.Г. Чичигина, понятие предела учащиеся изучают в 9 классе, а изучение площадей прямолинейных фигур – в 8 классе, то такое изложение данной теме не соответствует общему построению программы по математике в средней школе, отмечает В.Г. Чичигин.

В основе *третьего способа* обучения теме лежит *понятие равносоставленности* плоских фигур. Данный способ изложен в учебнике Н.А. Глаголева, автор данного учебника пишет, что «вся теория измерения площадей строится на современной научной основе в постановке, данной Гильбертом и Шуром».

В рассматриваемом способе обучения равносоставленные многоугольники определяются, как, многоугольники, каждый из которых можно разбить на конечное число попарно геометрически равных частей [45, С. 367].

Понятие равносоставленности широко использовалось и в первых двух способах, но там не было обоснования. Суть данного способа обучения заключается в следующем:

1. Автор предлагает начать обучение темы с того, что показать, что два многоугольника могут иметь равные площади, на примере двух равных прямоугольных треугольниках, из которых составляются различные по форме геометрические фигуры;

2. Ввести понятие и определение равносоставленных многоугольников. После определения вводятся две теоремы, через которые

можно показать, что параллелограмм и прямоугольник могут быть равносоставленными.

3. Площадь данного прямоугольника можно определить двумя способами:

А. *Если стороны прямоугольника соизмеримы* (имеют общую меру), вычисление площади производилось еще в курсе арифметики. В 8 классе повторяют случаи, когда смежные стороны прямоугольника измеряются натуральными числами и дробными числами.

Б. Если хотя бы одна из сторон прямоугольника несоизмеримы(не имеют общей меры) с единицей длины, то квадрат, сторона которого равна единице длины, нельзя разрезать на такие равные квадраты, которые укладывались бы целое число раз на данном прямоугольнике, покрывая его полностью. И в этом случае *площадь прямоугольника* – это число, равное произведению двух смежных сторон прямоугольника, измеренных одной единицей. Это утверждение, по мнению автора, является более общим определением для площади прямоугольника, когда стороны прямоугольника измеряются натуральными числами.

Также В.Г. Чичигин рассматривает методику обучения площади прямоугольника по учебнику А.И. Фетисова, где обучение дается в другом изложении:

1) для приближенного измерения площадей любых плоских фигур вводится в употребление палетка;

2) теорема о площади прямоугольника вводится с *применением палетки* (подсчет числа полных клеток-квадратов, долей его и так далее; нахождение приближенных рациональных значений площади по недостатку и по избытку), причем стороны фигуры могут быть соизмеримы и несоизмеримы. В результате получаются две последовательности приближенных рациональных значений, которые и определяют искомое число – *площадь* данного *прямоугольника* как произведения двух его измерений.

Такой же методике обучения придерживается и Н.М. Бескин. Автор рассматривает три случая: 1) стороны треугольника выражаются целыми числами; 2) хотя бы одна сторона выражается дробным числом; 3) хотя бы одна сторона выражается иррациональным числом [2, С. 195].

В.Г. Чичигин отмечает, что в основе каждого из описанных способов обучения теме площади прямоугольников лежат разные идеи, но эти идеи имеют общие условия:

1. За единицу измерения площади принимается площадь квадрата со стороной, равной линейной единице.

2. Мерой площади фигуры является действительно число.

3. Площадь фигуры, как и число – мера этой площади – должна удовлетворять следующим требованиям:

1) геометрически равные (конгруэнтные) фигуры имеют равные площади;

2) если замкнутая фигура состоит из нескольких замкнутых фигур, то за площадь всей фигуры принимается сумма площадей всех составляющих фигур.

Автор утверждает что, *первый способ* имеет слишком формальный характер и не согласуется с известным учащимся способом измерения площади прямоугольника по курсу 5 и 6 классов; во *втором способе* учащимся 8 класса неизвестно понятие предельного перехода, и для того, чтобы этот способ можно было применить при изучении данной темы, потребуется введение понятия о равносоставленности многоугольников и заменить предельный переход таким же заключением, которое вводится в учебнике А.И. Фетисова; в *третьем способе*, с методической точки зрения, нельзя оправдать содержание двух определений понятия площади прямоугольника, но если подробно изложить случай, когда измерения прямоугольника является иррациональное число, то данный способ может существовать. Способ, который описан в учебнике А.И. Фетисова, будет трудным для учащихся: понять определение площади прямоугольника, вводимого с *помощью палетки.*

В.Г. Чичигин считает, что обучать теме «Площадь» целесообразно проводить или вторым или третьим способом. Если обучать вторым способом, то при этом в содержание темы добавить введение понятие равносоставленности многоугольников и заменить предельный переход заключением, представленным в учебнике А.И. Фетисовой, если - третьим способом, то в этом случае нужно более подробно изложить случай, когда стороны прямоугольника выражаются иррациональным числом [45, С. 366-371].

Между тем, Р.В. Гангнус утверждает, что после того, как учащимся дано понятие о площади фигуры как о величине ее внутренней области и рассмотрены понятия равносоставленных и равновеликих фигур, следует перейти к мере площади и к их вычислению.

Начать изучение вопроса о площадях фигур следует с меры площади. *Мера площади фигуры* – это число, которое показывает, во сколько раз площадь данной фигуры больше площади другой фигуры, принятой за единицу (обычно принимают за единицу измерения площадей площадь квадрата).

Автор выделяет *два подхода* к обучению измерению площадей прямолинейных фигур: *Первый подход.*

Вводится три теоремы:

Теорема 1. «Если два прямоугольника имеют по равной стороне, то их площади относятся, как их другие стороны». Рассматриваются два случая: когда стороны прямоугольника соизмеримы и когда несоизмеримы.

Теорема 2. Отношение площадей двух прямоугольников равно отношению произведений смежных сторон в каждом из них.

Теорема 3. Площадь прямоугольника равна произведению двух его смежных сторон или произведению его основания и высоты. Доказательство основано на сравнении прямоугольника и квадрата.

После ввода третьей теоремы дается формула площади прямоугольника, выраженная в квадратных единицах какого либо наименования. *Площадь* равна произведению его смежных сторон, выраженных в линейных единицах того же наименования, то есть $S = a \cdot b$ кв. ед. Закрепление данной формулы следует провести на ряде числовых примеров: 1) a и b – целые числа; 2) a – целое и b – дробное; 3) a и b – дробные числа; 4) a и b – иррациональные числа.

Р.В. Гангнус, как и П.А. Карасев, утверждает, что учащимся необходимо подчеркнуть, что измерение площади прямоугольника выполняется косвенным путем.

С помощью полученного выше вывода получают формулу площади квадрата: $S = a \cdot a$ $ед^2$.

Второй подход. Применяется, если в разделе о площадях рассматривается вопрос о соизмеримости отрезков.

1. Площадь прямоугольника, сторона которого выражена в целых числах. Прямоугольник разбивается прямыми, параллельными сторонами прямоугольника, на квадраты; подсчет числа квадратов, площадь каждого из которых принята за единицу, дает число квадратных единиц, содержащихся в площади прямоугольника.

Отсюда делается вывод: «число, измеряющее площадь прямоугольника в квадратных единицах какого-нибудь наименования, равно произведению чисел, измеряющих две смежных стороны прямоугольника в линейных единицах того же наименования».

Автор подчеркивает, что нужно прежде всего выразить измерения площадь прямоугольника в мерах одного и того же наименования.

Далее вычисляется площадь квадрата, сторона которого равна единице или долям единицы: если каждую сторону квадрата разделить на n равных частей, то площадь всего квадрата будет состоять из n в квадрате равных и равновеликих квадратов, и каждый такой малый квадрат составляет $\frac{1}{n}$ часть всего квадрата. Далее сказанное проверяется на числовом примере: делят сторону квадрата на 8 равных частей и разбивают квадрат параллелями на малые квадраты, тогда площадь малого квадрата равна $\frac{1}{8^2}=\frac{1}{64}$ площади всего квадрата.

2. Обе стороны прямоугольника выражены дробными числами. Дробные числа приводятся к общему знаменателю. Если одна сторона треугольника целое число, а другая выражена дробным числом, то рассматривается частный случай. В итоге, площадь прямоугольника в обоих случаях равна произведению двух смежных его сторон.

3. Стороны прямоугольника - иррациональные числа. Далее автор приводит сложное доказательство, которое ведет к теореме, что площадь прямоугольника равна произведению двух его смежных сторон. И отмечает, что если класс не силен, то доказательство можно опустить и просто дать формулу площади прямоугольника, где стороны выражены иррациональными числами.

Автор приводит понятие изопериметрической фигуры.

Р.В. Гангнус утверждает, что если учащиеся, изучая тему площади фигур, еще не знакомы с подобием фигур, то не следует слишком много решать задачи на вычисление площадей, так как решение задач в данном случае сводится к подстановке числовых данных в соответствующие формулы. Решение задач на вычисление следует решать только тогда, когда учащиеся познакомятся с подобием фигур и метрической зависимостью между их элементами, а задачи на вычисление должны носить лишь иллюстративный характер. Уделять внимание следует по преимуществу задачам на построение и превращение фигур [5, С. 241-246].

Н.М. Бескин рассматривает площади кривых поверхностей [2, С. 198].

3.2. Методика введения понятия площади параллелограмма, треугольника, трапеции и круга

Р.В. Гангнус пишет, о том, что схема обучения площади других многоугольников изучается обычным порядком. Площади фигур приводятся к равносоставленным фигурам и могут быть вычислены: *параллелограмм – к прямоугольнику, треугольник – к половине параллелограмма, трапеция - к треугольнику или параллелограмму или к прямоугольнику* [5, С. 246].

В.Г. Чичигин предлагает использовать понятие *равносоставленности* и *дополнения*, при определении площади простого многоугольника. Понятие *площади параллелограмма* вводить путем преобразования его в равносоставленный с ним прямоугольник [45, С. 378].

А.А. Темербекова в своем учебном пособии [38] пишет о практической направленности геометрии; указывает, что при обучении учащихся свойствам параллелограмма учителю следует обратить внимание, на то, что из всех геометрических фигур наиболее распространённой является прямоугольник, потому что он имеет две оси симметрии. Не зря наиболее удобной формой сельскохозяйственных полей имеет форму прямоугольника [38, С. 153].

В.Г. Чичигин определяет *площадь треугольника* разными путями, наиболее известный способ - *методом дополнения*: дополнить треугольник до параллелограмма, тогда площадь треугольника будет равна половине площади параллелограмма. При обучении учащихся следует так же отметить равновеликость треугольников, имеющие равные основания и равные высоты, это наиболее часто встречается при решении задач.

Автор отмечает, что *площадь ромба* можно определить двумя путями:

1) как площадь параллелограмма, в этом случае нужно будет строить высоту и определять ее длину;

2) при помощи диагоналей, в этом случае находится площадь одного из четырех равных прямоугольных треугольников ($\frac{1}{8}d_1d_2$), а потом умножается на их число, в результате получается формула $S=\frac{1}{2}d_1d_2$ [45, С. 378].

Р.В. Гангнус утверждает, что формулу площади ромба нужно давать учащимся в двух видах: через произведение его основания на высоту и половине произведения его диагоналей. Это обуславливается тем, что последняя формула решает вопрос об удвоении площади квадрата: квадрат, стороною которого служит диагональ данного квадрата, имеет площадь, вдвое больше, нежели данного квадрата [5, С. 246].

По мнению В.Г. Чичигина, п*лощадь трапеции* можно определить тремя способами:

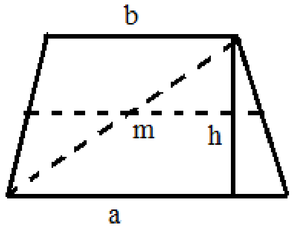


Рис. 2

1. $S=\frac{1}{2}ah+\frac{1}{2}bh=\frac{1}{2}(a+b)h$; $\frac{1}{2}(a+b)=m$; поэтому $S=\frac{1}{2}(a+b)h=mh$ (Рис. 2);

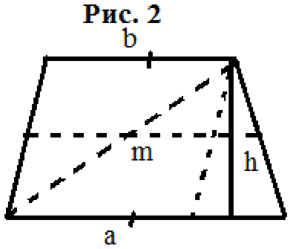


Рис. 3

2. $S=bh+\frac{1}{2}(a-b)h=\frac{1}{2}(2b+a-b)h=\frac{1}{2}(a+b)h=mh$ (Рис. 3);

3. $S=(a+d)h=(b-d)h$; $a+d=b-d$ и $d=\frac{b-a}{2}$;

$S=(a+\frac{b-a}{2})h=\frac{1}{2}(a+b)h-mh$ (Рис. 4) [45, С. 379].

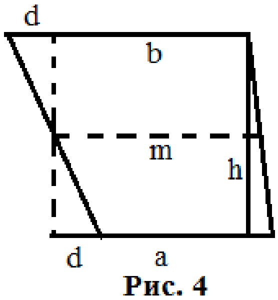


Рис. 4

Р.В. Гангнус подчеркивает, что, так как площадь трапеции равна «произведению среднего арифметического ее основания на высоту», то следует показать учащимся, что площадь треугольника может быть получена как частный случай площади трапеции, тогда площадь треугольника равна произведению средней его линии на соответствующую высоту: $S=m\cdot h$ [5, С. 246].

Для определения *площади произвольного* простого *многоугольника*, В.Г. Чичигин предлагает разбить его каким-то способом на треугольники, далее определить площадь каждого треугольника и найти их сумму: $S = S_{1\Delta} + S_{2\Delta} + S_{3\Delta} + ... + S_{n\Delta}$.

Что касается *площади правильного многоугольника*, то она определяется так же как и площадь произвольного многоугольника, только разбиением его на треугольники одним способом – отрезками, соединяющими центр многоугольника с его вершинами, чтобы получить только равные треугольники. Затем определить площадь каждого треугольника и умножить на их количество: $S_n = n \cdot S_{\Delta} = n \cdot 0,5 a_n r_n = 0,5 p_n r_n$, где p_n – периметр правильного многоугольника, r_n – его апофема [45, С. 379].

В.Г. Чичигин отмечает, что после вывода каждой новой формулы для закрепления полученных знаний и развитие необходимых навыков, следует решить соответствующие задачи, причем видное место, должны занимать задачи, связанные с непосредственными измерениями, которые учащиеся должны выполнять самостоятельно.

Автор для вычисления площади треугольника использует *формулу Герона*, которая имеет широкое применение. При помощи данной формулы можно определить площадь треугольника, зная длины трех его сторон. Учитель может потребовать вывод формулы от учащихся самостоятельно, исходя и основной формулы треугольника $S = \frac{1}{2} a h_a$. У учащихся наиболее затруднение вызовет вывод формулы для определения высоты треугольника по трем сторонам. А уже в 9 классе при решении задач необходимо вывести формулу $S_{\Delta} = 0,5 ab \sin C$, сообщив при этом учащимся, что $\sin C = \sin(180° - C)$ [45, С. 380]

Кроме того, В.Г. Чичигин в [40] описывает методику обучения теме «Площадь круга и его частей», согласно которой в курсе планиметрии тема площади круга и его частей завершает изучение темы «Площадь»; так как тема «Площадь круга» следует за темой «Длина окружности», то она легко усваивается учащимися.

Автор отмечает, что учитель должен обратить внимание учащихся на выяснение особых приемов для определения *площади круга*, которые гласят о том, что круг нельзя разбить на такие фигуры, из которых можно составить какую-нибудь известную прямолинейную фигуру, определение площади которой уже известно. Но учащиеся уже знакомы, площадь – это число, определяющее размер части плоскости, ограниченной окружностью, а также умеют его находить с помощью формулы (умножением половины длины окружности на длину радиуса).

Далее учитель предлагает учащимся построить окружность, затем дает определение окружности и круга, длины окружности и вспоминают предварительную работу, а именно построение вписанных и описанных многоугольников, которую учащиеся проделывали при изучении длины окружности.

Таким же приемом автор предлагает воспользоваться при обучении площади круга, то есть когда надо в круг вписать (или около него описать) правильный многоугольник, площадь которого можно всегда определить. В результате получается бесконечная последовательность чисел, измеряющих площади вписанных или описанных многоугольников:

$q_1 < q_2 < q_3 < ... < q_n < ...$ (площади вписанных многоугольников),

$Q_1 > Q_2 > Q_3 > ... > Q_n > ...$ (площадь описанных многоугольников).

В.Г. Чичигин подчеркивает, что учитель должен предложить учащимся самим выяснить основные свойства каждой числовой последовательности:

- бесконечная;

- монотонно-возрастающая (или убывающая);

ограниченная (сверху площадью любого описанного многоугольника или снизу площадью любого вписанного многоугольника).

Поэтому каждая числовая последовательность имеет один и тот же предел: $\lim\limits_{n\to\infty} q_n = \lim\limits_{n\to\infty} Q_n = L$. Данный предел принимается за площадь круга $\lim\limits_{n\to\infty} q_n = Q$; площадь круга есть предел площадей (правильных) вписанных (или описанных) многоугольников при неограниченном увеличении числа сторон их.

Далее учитель может предложить учащимся вывести формулу для площади круга самостоятельно: $Q = \lim_{n\to\infty} q_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} p_n r_n = \frac{1}{2} CR = \frac{1}{2} \cdot 2\pi RR = \pi R^2$.

Учитель предлагает учащимся самостоятельно вывести формулу *площади сектора* и сегмента круга, либо дома, либо в классе; предварительно учитель должен будет объяснить ученику, что такое сектор и сегмент круга, так как эти понятия ранее не применялись: сегмент встречался один раз в 8 классе при решении известной задачи о построении геометрического места точек [45, С. 387-388].

Если рассматривать более современную методику обучения теме «Площади фигур», то Н.Л. Стефанова и др. отмечают, что начинать обучение темы следует с лабораторной работы по вычислению площади произвольной фигуры, после которой последует выделение свойств площади, на которых строилась работа (аддитивности, положительности и др.). Свойства будут положены в основу выведения формул площади треугольников и четырехугольников.

После данной лабораторной работы Н.Л. Стефанова и др. предлагают учителю показать учащимся идею доказательства формулы площади прямоугольника с помощью покрытие фигуры единичными отрезками, как описано в работах А.И. Фетисовой и Н.М. Бескина.

После доказательства формулы площади прямоугольника, авторы приводят схему обучения площадей четырехугольников, которая основана на методе разбиения:

1) прямоугольник разбивается на два прямоугольных треугольника диагональю (формула площади прямоугольного треугольника);

2) произвольный треугольник разбивается высотой на два прямоугольных треугольника (формула площади треугольника);

3) параллелограмм разбивается на два треугольника;

4) Интересным случаем для организации самостоятельного поиска решения задач является формула площади трапеции. Так учитель просит школьников предложить всевозможные варианты разбиения трапеции, формулы площади которых уже известны. В основном школьники предлагают такие разбиения: на прямоугольник и два прямоугольных треугольника, на два треугольника, на параллелограмм и треугольник (Рис.4).

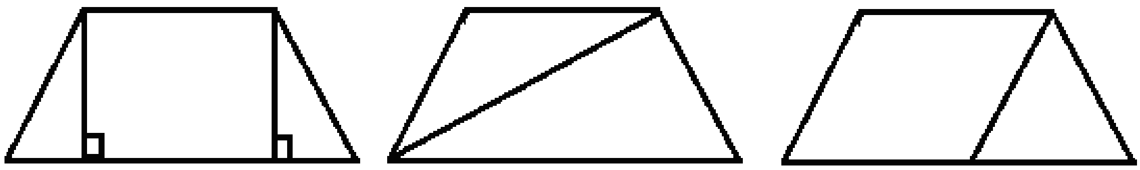


Рис. 4

Н.Л. Стефанова и др. отмечает, что на уроке лучше вывести формулу на основе одного из разбиений, а другие вывести самостоятельно дома с последующей проверкой [18, С. 317].

Таким образом, нами выделены основные *подходы к* обучению теме «Площади фигур»: через метод разложения; через метод дополнения. Вводить понятие площади прямоугольника можно следующими способами, а именно, с помощью: сравнения площадей; понятие предельного перехода; понятие равносоставленности. В основе каждого способа введения понятия площади прямоугольника лежит метод разложения. Так же формулы для площади правильного и произвольного многоугольника выводятся на основе метода разложения, площади параллелограмма, треугольника трапеции – на основе метода дополнения.

§4. Приемы и методы решения геометрических задач по теме «Площади фигур»

Не существует универсального метода для решения всех задач на площади многоугольников, но существуют *приемы*, которые можно применить ко многим задачам. Понятие площади используется при решении тех задач, в формулировках которых отсутствует упоминание площади.

В олимпиадной и конкурсной практике часто встречаются задачи, решаемые методом площадей, но метод площадей редко упоминаются в методической и научно-популярной литературе.

В учебно-методической литературе имеется достаточно большое число работ, связанных с площадями. В основном, эти статьи посвящены *сравнению площадей*, использованию *свойств равновеликости* и *равносоставленности*.

Метод площадей используется при решении задач, в условии которых идет речь о площадях. Но также может использоваться там, где нет упоминания о площади, тогда *площадь* вводится в задачу *в качестве вспомогательного элемента*. В последнем случае метод имеет особенную важность.

Е.Е. Овчинникова в своей диссертационной работе приводит методику обучения учащихся методу площадей, в ходе реализаций которой дается представление о методе площадей; учащиеся знакомятся с возможностью применения *аддитивности площади,* которое означает, что площадь фигуры равна сумме площадей её частей, если этих частей конечное количество и свойств *отношений площадей,* которые помогают свести задачу либо к решению уравнения, либо к прямому вычислению, на примерах использования метода площадей при решении различных видов задач.

Согласно авторской методике, знакомство с методом площадей начинается с первого блока задач, включающего *простейшие* или *подготовительные задачи*. Ученики должны видеть применение метода в динамике от совсем простых задач до достаточно сложных, сложность решаемых задач должна увеличиваться по мере овладения материалом. В работе автора приведены простые задачи, в которых требуется минимальное привлечение теоретического материала, зато хорошо выявляется использование метода площадей.

По мнению Е.Е. Овчинниковой, целесообразно изучать отдельно *возможность применения свойства аддитивности площади и свойств* *отношений площадей* при решении задач методом площадей, останавливаясь на их характерных особенностях и видах задач, решаемых с их помощью; знакомство с *применением аддитивности площади* при решении задачи методом площадей можно начинать сразу *после изучения формулы площади треугольника* через сторону и основание. *Простейшие задачи на метод площадей* сводятся к *вычислению площади треугольника* двумя способами.

Работы И.Ф. Шарыгина, И.Д. Новикова, Э.Г. Готмана, В.В. Прасолова посвящены *практическим вопросам* использования метода площадей. В работах демонстрируется решение некоторых видов задач этим методом, но сам метод практически не описан, нет и системы обучения решению задач методом площадей [26, С. 6].

Так, например, в учебном пособии по геометрии для 7-9 классов И.Ф. Шарыгина разобраны *теоремы*, решаемые с помощью *метода площадей*:

Теорема 1. *О медианах треугольника:* «**Медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся этой точкой в отношении 2:1, считая от вершин треугольника».** Приведем доказательство данной теоремы, описанного автором.

Доказательство:

1) медиана AA_1 треугольника ABC представляет собой геометрическое место точек M внутри треугольника, для которых треугольники ABM и ACM равновелики. Автор ссылается на задачу, рассмотренную в предыдущем параграфе.

2) так как треугольники BAA_1 и CAA_1 равновелики, то равны и их высоты к общей стороне AA_1 (Рис.5). Поэтому для любой точки M на AA_1 также будут равны высоты к AM в треугольниках BAM и CAM, а значит, эти треугольники для всех M равновелики.

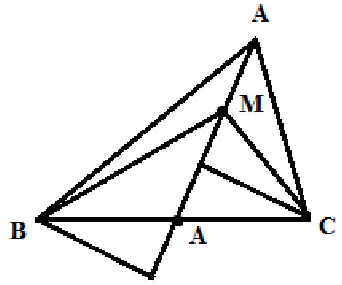


Рис. 5

И.Ф. Шарыгин приводит и обратное рассуждение: если точка M внутри треугольника

ABC такова, что треугольники ABM и ACM равновелики, то равны и высоты этих треугольников к общей стороне AM.

3) пусть AM пересекает BC в точке A_1' (Рис. 6). Треугольники BAA_1' и CAA_1' равновелики, поскольку у них AA_1' общая сторона, а высоты, опущенные на нее, равны. И из равенства площадей треугольников BAA_1' и CAA_1' следует, что A_1' - середина BC, то есть точка A_1' совпадает с A_1.

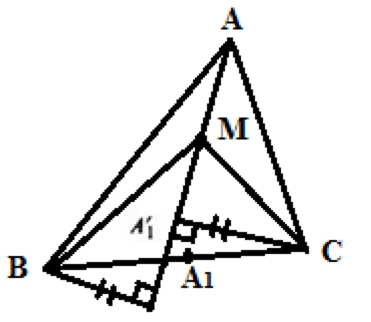


Рис. 6

4) провели теперь в треугольнике ABC медианы AA_1' и BB_1 и обозначили через K точку их пересечения (Рис. 7).

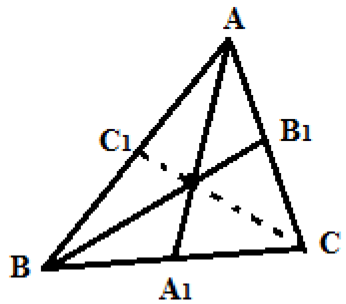


Рис. 7

5) точка K лежит на соответствующих медианах, поэтому равновеликими являются треугольники ABK и ACK, а также BAK и BCK. Значит, треугольники BCK и ACK равновелики и K лежит на медиане CC_1. Таким образом, K - точка пересечения всех трех медиан.

6) автор приводит последнее рассуждение, о том, что площадь треугольника BAC составляет $\frac{1}{3}$ площади всего треугольника, а площадь треугольника ABA_1 равна половине площади всего треугольника. Следовательно, площадь треугольника ABK равна $\frac{2}{3}$ площади треугольника ABA_1, а значит, и AK равно $\frac{2}{3}$ от AA_1, $AK : KA_1 = 2:1$.

Утверждение теоремы доказано полностью.

При доказательстве теоремы И.Ф. Шарыгин, основывался на *понятии геометрического места точек, понятии равновеликости* треугольников, *свойстве отношений площадей* и используемых дополнительных построениях.

Теорема 2. *О биссектрисе внутреннего угла треугольника:* **Если** AA_1 **- биссектриса угла** A **треугольника** ABC**, то** $BA_1 : A_1C = BA : AC$ (Рис. 8). В учебном пособии приводится подробное решение.

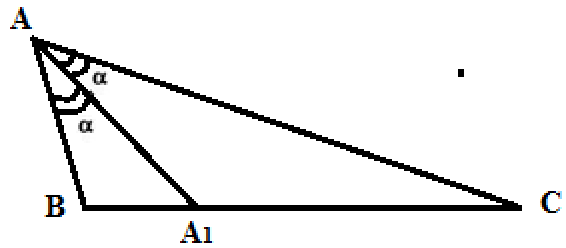


Рис. 8

И.Ф. Шарыгин приводит простой факт, который использовали при доказательстве обеих теорем:

Если два треугольника имеют общую вершину, а противолежащие этой вершине стороны расположены на одной прямой, то площади треугольников относятся как стороны, лежащие на одной прямой.

Автор в учебном пособии приводит *вывод формулы синуса двойного угла методом площадей*, который может быть очень интересен и полезен учащимся, он достаточно прост и нагляден.

Так же автор рассматривает задачи на применение метода площадей:

Задача 1 [46]. Пусть две прямые пересекаются в точке A; B и B_1 — любые две точки на одной прямой, а C и C_1 — на другой. Докажите, что $\frac{S_{AB_1C_1}}{S_{ABC}} = \frac{AB_1 \cdot AC_1}{AB \cdot AC}$ (Рис. 9).

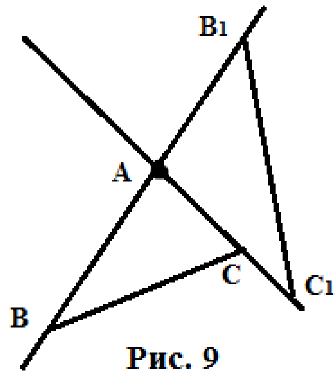


Рис. 9

При решении задачи, автор использовал свойство отношений площадей, которое выражал через формулу $S = \frac{1}{2}ab\sin C$.

Задача 2 [46]. Пусть O — точка пересечения диагоналей четырехугольника. Тогда имеет место равенство $\frac{AO}{CO} = \frac{S_{ABD}}{S_{CBD}}$ (Рис. 10). Задача *об отношение отрезков диагонали четырехугольника.*

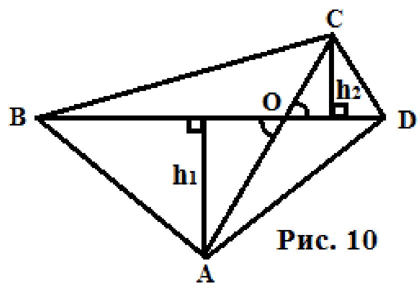


Рис. 10

Задача 3 [46]. В треугольнике ABC на сторонах AB, BC и CA взяты соответственно точки K, M и P так, что $AK:KB=2:3$, $BM:MC=3:4$, $CP:HP=4:5$. В каком отношении отрезок BP делится отрезком KM?

Решение:

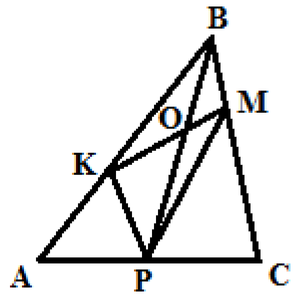


Рис. 11

1) нужно обозначить через O точку пересечения BP и KM (Рис. 11);

2) вводится новое обозначение, $S_{ABC}=S$;

3) применяется формула, которая была получена в задаче 1, имеем

$$S_{KBM}=\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{7}S=\frac{9}{35}S,\ S_{CMP}=\frac{4}{7}\cdot\frac{4}{9}S=\frac{16}{63}S,\ S_{APK}=\frac{5}{9}\cdot\frac{2}{5}S=\frac{2}{9}S;$$

следовательно, $S_{KPM}=S(1-\frac{9}{35}-\frac{16}{63}-\frac{2}{9})=\frac{4}{15}S$.

4) и в соответствии с формулой, полученной в задаче 2, имеем $\frac{BO}{OP}=\frac{S_{KBM}}{S_{KPM}}=\frac{9}{35}\cdot\frac{15}{4}=\frac{27}{28}$.

В задаче И.Ф. Шарыгин использует результаты, полученные в задачах 1 и 2.

После параграфа И.Ф. Шарыгин приводит ряд задач, основанных на предыдущих рассуждениях. Задача 1, 6 основаны на теореме о внутреннем угле треугольника; задачи 3 - 6 - на задаче 8; задачи 11,14 - на свойстве отношении отрезков диагонали четырехугольников [46, С. 367-369].

Метод площадей так же описан в работах Ж.А. Сарвановой [33], И. Вальдмана [4], Т. Ходота [43]. Авторы описывают суть метода с помощью различных *приемов*:

1) сравниваются различные выражения для площади данной фигуры (например, для треугольника), то есть возникает уравнение, содержащее известные и искомые элементы фигуры, разрешая которое мы определяем неизвестное;

2) рассматривается отношение площадей фигур, одна из которых или обе содержит в себе искомые элементы.

Так, например, Ж.А. Сарванова в статье [33] выделяет *действия*, которые используются при *методе площадей*:

1) анализ заданной в задаче конфигурации, включающей в себя анализ ее элементов и их свойств;

2) нахождение площади фигуры с использованием данных и искомых элементов;

3) составление уравнения с использованием различных выражений для площади рассматриваемой фигуры;

4) разбиение фигуры на части;

5) нахождение отношений площадей и соответствующих отрезков.

Автор выделяет *три этапа* обучения учащихся *действиям,* используемым при методе площадей:

1. Подготовительный этап. На данном этапе происходит актуализация знаний о нахождение площадей различных фигур и формирование отдельных действий: анализ элементов конфигурации и их свойств, разбиение фигуры на части, нахождение различными методами площади фигур.
2. Формирование умений решать задачи на составление уравнения, использую различные выражения для площади.
3. Формирование умений находить отношение площадей и соответствующих отрезков, применять сформированные действия в комплексе.

Ж.А. Сарванова отмечает, что при решении практически любой геометрической задачи формируются первые два действия. А объектом особого внимания учителя на втором этапе обучения методу должно быть третье действие, составления уравнения с использованием различных выражений для площади фигуры.

В статье приводится цепочка задач (8 задач), которая, по мнению автора, способствует формированию умений. В первых шести задач для решения используются общеизвестные формулы нахождения площади. Для решения седьмой задачи используются умения выполнять, описанные выше, первых четыре действия. При решении восьмой задачи нужно выполнить комплекс действий: анализ заданной в задачи конфигурации, включающей в себя анализ ее элементов и их свойств, нахождение площади фигуры различными способами, нахождение отношения площадей и соответствующих отрезков.

Научить учащихся в полной мере применять метод площадей можно на элективном курсе, это также способствует и подготовке их к ОГЭ по математике [33].

Приведем еще несколько задач, которые можно решить с помощью метода площадей.

Задача 4 [4]. Найти формулу для площади произвольной фигуры.

Решение:

Пусть S – площадь треугольника ABC (Рис. 12). Проводится высота BD и получаются прямоугольные треугольники ABD и CBD. Видно, что $S = S_{ABD} + S_{BCD}$. Далее пользуется известным правилом нахождения площади прямоугольного треугольника и получается:

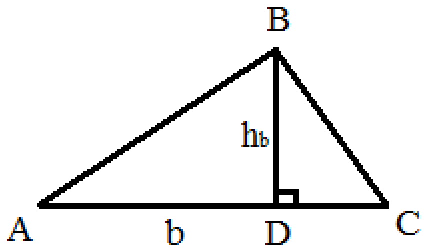


Рис. 12

$$S = \frac{1}{2}AD \cdot BD + \frac{1}{2}CD \cdot BD = \frac{1}{2}BD(AD + CD) = \frac{1}{2}AC \cdot BD = \frac{1}{2}bh_b \Rightarrow S = \frac{1}{2}bh_b.$$

Данное решение проведено для остроугольного треугольника. Если же треугольник тупоугольный результат не изменится, лишь отношение для площадей будет равно: $S = S_{ABD} - S_{BCD}$.

В результате решения задачи мы получили общеизвестную формулу для нахождение площади треугольника через высоту и основание [4].

Задача 5 [43]. Доказать, что для любой точки, принадлежащей правильному треугольнику, сумма ее расстояний до сторон треугольника равна его высоте.

Решение:

1) дан чертеж (Рис. 13), треугольник ABC – правильный, точка М принадлежит треугольнику ABC;

2) длины сторон AB, BC и AC обозначаются через a, а высоту – h, расстояние от сторон треугольников до точки М – h_1, h_2, h_3;

3) площадь треугольника ABC равна сумме площадей треугольников ABM, BMC и AMC, то есть $S = \frac{ah_1}{2} + \frac{ah_2}{2} + \frac{ah_3}{2}$ и получаем, что $h = h_1 + h_2 + h_3$ [43].

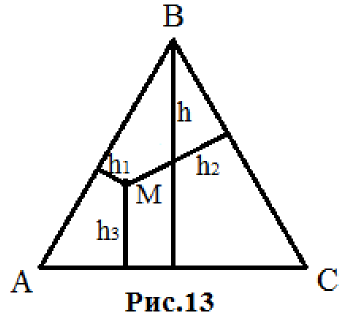


Рис.13

В учебном пособии А.Е. Малых [17, С. 33-41] упоминается о методе площадей и приводится ряд задач с решениями и задач для самостоятельного решения.

Помимо этого И. Вальдман вводит еще один метод – *метод введения вспомогательного элемента*.

Характеристика данного метода, по мнению автора, заключается в следующем: длину некоторого отрезка рассматриваемой в задаче фигуры полагают равной, например, x и затем находит искомую величину. При этом в одних случаях вспомогательная величина в процессе решения задачи «исчезает» (сокращается), а в других ее нужно определить через данные условия и поставить в полученное для искомой величины выражения.

И. Вальдман приводит задачу:

Задача 6 [4]. Найти площадь выпуклого четырехугольника, причем известно, что диагонали перпендикулярны и равны d_1 и d_2.

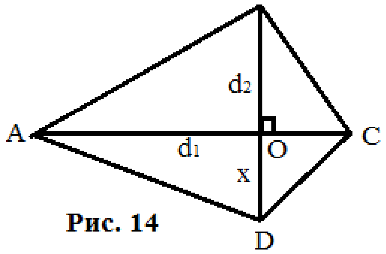


Рис. 14

Решение:

1) площадь четырехугольника представляется в виде суммы двух площадей треугольника на которые диагонали разбивают его (Рис. 14);

2) площадь каждого треугольника вычисляют по формуле $S = \frac{1}{2}ah$: в качестве основания треугольников а берут диагональ d_1, а в качестве высоты треугольников h будут давать в сумме диагональ d_2;

3) вводится вспомогательный отрезок – высота и обозначает его за x, тогда длина высоты другого треугольника будет равна $(d_2 - x)$;

4) площадь четырехугольника равна сумме площадей 2-ух треугольников $S = \frac{1}{2}d_1 x + \frac{1}{2}d_1(d_2 - x) = \frac{1}{2}d_1 d_2$.

Все эти рассуждения приводят к известной формуле для нахождения *площади ромба* через диагонали. То есть данный метод можно использовать учителем в школе при доказательстве формулы нахождения площади ромба.

В.А. Далингер в статье [8] приводит еще один из методов решения задач при обучении теме «Площадь многоугольников». Суть метода состоит в суждении «*Если от равных отнять равные, то получим равные*». Это суждение хоть и расплывчато, но это одно из основных положений элементарной математики и оно может быть применено как для чисел, так и для величин.

Рассмотрим одну из задач, которую можно решить двумя способами.

Задача 7 [8]. Вершина квадрата $ABCD$ соединена с точками M и P, которые являются серединами сторон AB и BC соответственно. Точка M соединена с точкой N – серединой стороны DC. Докажите, что $S_{DMK} = S_{KPCN}$ (рис. 15).

I способ доказательства.

Воспользуемся очевидными равенствами

$$S_{KPCN} = S_{DMBC} - S_{DMN} - S_{KMBP} \quad (1)$$

$$S_{DMK} = S_{ABPD} - S_{AMD} - S_{KMBP} \quad (2)$$

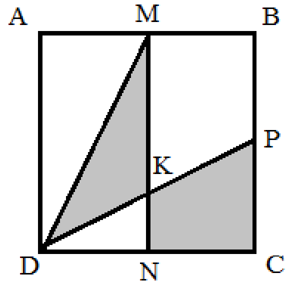


Рис. 15

Вычтем из первого равенства второе и получим:

$$S_{KPCN} - S_{DMK} = S_{DMBC} - S_{DMN} - S_{KMBP} - S_{ABPD} + S_{AMD} + S_{KMBP} \quad (3)$$

Учтем, что $S_{DMBC} = S_{ABPD}$ и приведем равенство (3) к виду $S_{KPCN} - S_{DMK} = S_{AMD} - S_{DMN}$.

Так как прямоугольник $AMND$ разделен диагональю DM на два равных треугольника AMD и NDM, тогда $S_{AMD} = S_{MDN}$, то есть $S_{KPCN} - S_{DMK} = 0$. Отсюда имеем то, что требовалось доказать $S_{DMK} = S_{KPCN}$

II способ доказательства.

Треугольники DMN и DPC равны по построению, тогда равны и их площади, то есть имеет место равенство $S_{DMN} = S_{DPC}$. От его обеих частей отнимем величину S_{DKN}. Получим равенство $S_{DMN} - S_{DKN} = S_{DPC} - S_{DKN}$, из этого следует равенство $S_{DMK} = S_{KPCN}$.

В.А. Далингер отмечает, что подобного рода задачи учитель может составить самостоятельно в достаточном количестве, но если учащиеся сами сконструируют такие задачи, проявляя свое творчество, это принесет гораздо большую пользу [8].

Вместе с этим, Н.Ю. Эрленбуш, учитель математики, на уроке «Приемы решения задач по теме «Площади фигур» рассматривает четыре приема решения задач по данной теме:

1) приём «разрезания и складывания»;

Суть приема заключается в том, что площадь многоугольника, разрезанного на несколько многоугольников, равна сумме площадей этих многоугольников. Н.Ю. Эрленбуш приводит пример задачи, которая решается данным приемом.

Задача 8 [47]. Площадь трапеции равна произведению одной из боковых сторон на перпендикуляр, опущенный на неё из середины другой боковой стороны.

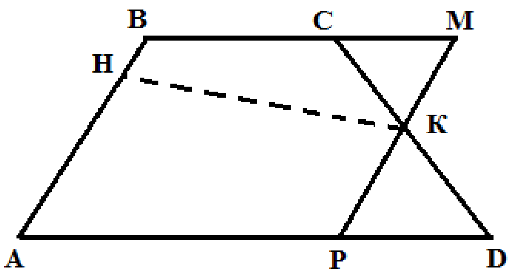


Рис. 16

Решение:

1) пусть $ABCD$ - данная трапеция (Рис. 16); ($AD \parallel BC$), K - середина стороны CD, KH - перпендикуляр, опущенный из точки K на прямую AB;

2) проведём через точку K прямую, параллельную прямой AB. Пусть M и P – точки её пересечения с прямой BC и AD;

3) параллелограмм $ABMP$ равновелик данной трапеции, так как $ABCD = ABCKP + PKD = ABCKP + KCM + ABMP$;

4) так как $DPKD = DMKC$ DPKD (по II признаку): $CK = KD$ (по условию), $\angle PKD = \angle MKC$ (как вертикальные), $\angle KCM = \angle KDP$ (как внутренние накрест лежащие углы при параллельных прямых AD и $BC(BM)$, то есть трапеция и параллелограмм составлены из одинаковых частей;

5) поскольку площадь параллелограмма равна произведению его основания AB на высоту KH, то $S_{ABMP} = S_{ABCKP} + S_{CMK}$, $S_{ABCD} = S_{ABCKP} + S_{KPD}$ (по построению);

6) так как $\Delta KPD = \Delta CMK \Rightarrow S_{KPD} = S_{CMK} \Rightarrow S_{ABCD} = S_{ABMP} = KH \cdot AB$

2) приём эквивалентность отношения длин сторон и площадей;

Суть приема: отношение длин отрезков равно отношению площадей треугольников; отношение площадей двух подобных треугольников с одинаковыми высотами - отношению оснований соответствующих треугольников; отношение площадей двух треугольников с равным углом - отношению длин сторон, заключающих этот угол. После описание приёма рассматривает задачу.

Задача 9 [47]. На сторонах AB и AC треугольника ABC взяты точки C_1, B_1 соответственно. Пусть O – точка пересечения отрезков BB_1 и CC_1. Вычислите $\frac{BO}{B_1 0}$, если $\frac{BC_1}{AC_1} = \alpha$ и $\frac{CB_1}{AB_1} = \beta$.

Решение:

1) $S_{AOC} = \frac{1}{2} AC \cdot H$ (Рис. 17), $S_{B_1OC} = \frac{1}{2} \cdot B_1C \cdot H$ =>

$$\frac{S_{AOC}}{S_{B_1 0C}} = \frac{AC}{B_1C} = \frac{AB_1 + B_1C}{B_1C} = \frac{AB_1}{B_1C} + 1 = \frac{1}{\beta} + 1;$$

так как $\frac{CB_1}{AB_1} = \beta \Rightarrow \frac{AB_1}{B_1C} = \frac{1}{\beta}$;

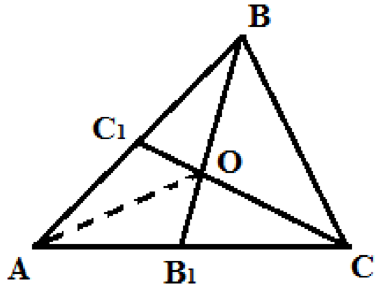


Рис. 17

2) $S_{BOC} = \frac{1}{2} BO \cdot H$, $S_{B_1OC} = \frac{1}{2} B_1O \cdot H_1$, $\frac{S_{BOC}}{S_{B_1OC}} = \frac{BO}{B_1O}$;

3) поскольку ΔBOC и ΔAOC имеют общую сторону OC, отношение их площадей равно отношению длин высот, опущенных на ОС. Отношение высот равно, в свою очередь $\frac{BC_1}{AC_1} \Rightarrow \frac{S_{BOC}}{S_{AOC}} = \frac{BC_1}{AC_1} = \alpha$;

4) в итоге получаем, $\frac{BO}{B_1O} = \frac{S_{BOC}}{S_{B\,OC}} = \frac{S_{BOC}}{S_{AOC}} \cdot \frac{S_{AOC}}{S_{B_1OC} = \alpha(1+\frac{1}{\beta})}$.

Ответ: $\frac{BO}{B_1O} = \frac{S_{BOC}}{S_{AOC}} \cdot \frac{S_{AOC}}{S_{B_1OC} = \alpha(1+\frac{1}{\beta})}$

3) приём инвариантность;

Суть приема: различные формулы для площади позволяют получить соотношения между сторонами, высотами, периметром и т.д.

Задача 10 [47]. Длины сторон треугольника образуют арифметическую прогрессию. Докажите, что радиус вписанной окружности этого треугольника равен $\frac{1}{3}$ одной из высот.

Решение:

1) пусть длины сторон a, b, c образуют арифметическую прогрессию, тогда полупериметр $p = \frac{3}{2} b$;

2) поскольку $\frac{1}{2} h_b \cdot b = S = rp = \frac{3}{2} rb$, получаем $r = \frac{h}{3}$

Ответ: Задача доказана.

4) приём метод остатков;

Суть: если от равных отнять равные, то получим равные.

Задача 11 [47]. Дана произвольная трапеция $ABCD$ и проведены её диагонали. Докажите, что $S_{ABK} = S_{KCD}$.

Решение:

1) рассмотрим треугольник ABD и треугольник ACD (Рис. 18): они имеют равные высоты и одно и то же основание AD, тогда $S_{ABD} = S_{ACD}$;

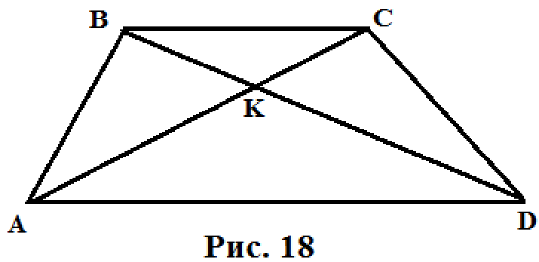


Рис. 18

2) отнимем от обеих частей этого равенства S_{AKD}, получим $S_{ABD} - S_{AKD} = S_{ACD} - S_{AKD} \Rightarrow S_{ABK} = S_{KCD}$.

Ответ: задача доказана.

По мнению учителя, задачи, в которых используется тема «Площади фигур», вызывает большие трудности на вступительных экзаменах в ВУЗы и на олимпиадах различного уровня. Причиной является не столько в сложности подобных задач, сколько в скудности опыта при их решении. Учащиеся не знают каким приёмом воспользоваться при решении задач, т.к. в учебниках недостаточно дано информации по данной теме [45].

Поэтому, Н.Ю. Эрленбуш, считает, что:

1) рассмотренные приёмы дают положительный результат при изучении данной темы;

2) снимаются проблемы при подготовке к ОГЭ;

3) этот метод даёт качественный результат при решении задач.

Таким образом, при решении геометрических задач по теме «Площадь фигур» используются *метод площадей, метод вспомогательного элемента* и др., а так же различные приемы: *разрезания и складывания, эквивалентность отношения длин сторон и площадей, инвариантность и метод остатков.*

Стоит отметить, что суть *приема разрезания и складывания*, которую приводит учитель математики Н.Ю. Эрленбуш, имеет похожий смысл со свойством аддитивности. Приёмом *эквивалентность отношения длин сторон и площадей* пользовался И.Ф. Шарыгин при доказательстве задачи *об отношение отрезков диагонали четырехугольника.* Суть приема *метода остатков* аналогичен методу, о котором писал В.А. Далингер в [8].

§ 5. Технологии обучения теме «Площади фигур» в курсе геометрии основной школы

Напомним, что под *технологией обучения* в методической литературе понимается совокупность средств и методов воспроизведения теоретически обоснованных процессов обучения и воспитания, позволяющих успешно реализовывать поставленные образовательные цели [18].

В теории и методике обучения математике существуют различные технологии обучения: технология развивающего обучения, технология проблемного обучения, технология разноуровневого обучения и др.

В статье [27] Е.Ю**.** Огурцова рассматривает методику обучения теме «Площадь фигуры» на основе *компьютерной технологии*. В статье пишется о проблеме построения компьютерной технологии обучения, которая заключается в определении места персонального компьютера в учебном процессе.

По мнению автора, технология обучения, когда учитель передает готовую учебную информацию, связана с пассивностью обучающихся. Методика, когда ученик включается в работу с учителем, то есть выполняет самостоятельно работу, а учитель контролирует деятельность учащихся и дает необходимые консультации - эффективна, но в практике мало применима, так как учитель не в состоянии с каждым учеником проработать материал. А отсюда и вытекает необходимость педагогического программного средства, позволяющего реализовать самостоятельность учащихся в процессе вывода формул площадей четырехугольников.

Е.Ю. Огурцовой были разработаны на компьютере игры, необходимые для актуализации и корректировки базовых знаний, и диагностики уровня сформированности умений у учащихся составлять различные новые фигуры из частей данных (пользоваться методом разложения и дополнения). После того, как каждый учащийся проходил эти игры, его отправляли в одну из трех групп с целью дифференцирования учебных заданий: А, В, С. В группу «С» входили учащиеся, учащиеся, которые наиболее подготовленные.

Изучение материала темы включает *четыре этапа*.

Первый этап: группа А и В – проверяют домашнее задание, решают задачи на нахождение площади фигур методом разбиения и дополнения; группа С работает с ППС «Площадь». Цель – вывести формулу площади параллелограмма и трапеции.

Второй этап: группа А решает задачи; группа В работает с ППС «Площадь»; группа С оформляет доказательства в тетрадях, самостоятельно ищут другие способы доказательства.

Третий этап: группа А работает с ППС «Площадь»; группа В ищут другие способы доказательства под руководством учителя; группа С решает задачи, изучает дополнительный материал, связанный со способом приближенного определения площадей фигур с произвольным контуром (палетка, способ взвешивания, метод статистических испытаний и так далее).

Четвертый этап: группы А, В, С обсуждают различные варианты доказательств.

На уроках повторение приема решения задач на нахождение площадей фигур, были использованы задачи, которые систематизированы определенным образом. В основе решения задач, представленные Е.Ю. Огурцовой, лежит идея разбиение и дополнение фигуры, развивающая при переходе от одной задачи к другой.

В статье [14] И.Н. Киселевой и др. пишется о коренном переломе в подходах к обучению подрастающего поколения. Авторы отмечают, что ключевым звеном в число требований входит построение *индивидуальной образовательной траектории.* И.Н. Киселева и др. предлагает разделить уровень овладения учащимися программного материала на три уровня:

1) *базовый*: на данном уровне учащиеся изучают предмет, с точки зрения того, что заложено в стандарт. Мотивация учащиеся, которые выбрали данный уровень, сводится к необходимости сдачи ОГЭ («перехода порога») по математике, они не обладают природной склонностью к изучению точных наук;

2) *достаточный*: траектории учащихся предусматривают изучение материала на среднем либо высоком уровне, не выходя за рамки стандарта;

3) *продвинутый*: индивидуальные траектории учащихся предусматривают обязательное изучение материала на высоком уровне, предусмотренным стандартом.

Авторы на примере урока в 9 классе на тему «Подготовка к ГИА – решение задач II части модуля «Геометрия» раскрывают особенности формы работы с помощью данной технологии. Изначально все учащиеся должны пройти базовую траектории, получив задачу, они делятся на тех, кто может решить самостоятельно и кто не сможет решить задачу самостоятельно, в этом случае учащиеся должны заполнить пропуски в готовом решении.

Задача 12 [14]. Найти радиус окружности, описанной около равнобедренного треугольника, если его основание и высота, проведенная к основанию, соответственно равны 3 и 8 см.

Возможны различные способы решения задачи (предлагаются учащимся, если потребуются): с помощью подобие треугольников, с помощью теоремы Пифагора и др.

И.Н. Киселевой и др. разработаны карточки с указанием решения на каждый способ. Если брать во внимание способ, с помощью формулы, которая связывает радиус описанной окружности, стороны треугольника и его площади, то указания такие:

1. Найти боковую сторону треугольника.

2. Найти площадь треугольника.

3. Найти BO, то есть искомый радиус, воспользовавшись формулой для радиуса описанной окружности.

Если ученик решил задачу, то он переходит на следующий уровень или решает ту же задачу, но другим способом. Если ученик затрудняется с решением, то ему выдается карточка для заполнения пропусков в решении задачи.

Дано: окружность $(O;OB)$;

$\Delta ABC -$ равнобедренный;

$BH -$ высота, $BH = 3см$, $AC = 8см$.

Найти: OB

Решение:

1. $\Delta BHC -$ ______________

По теореме Пифагора: $BC^2 =$ ____________ $см^2$

Таким образом: $BC =$ _______ $см$.

2. $S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot$ _____ $=$ _____ $=$ ____ $см$.

3. Радиус описанной окружности можно найти по формуле $R^2 = \frac{abc}{4S}$. Так как по условию $\Delta ABC -$ ________________, то ___=_____ и значит, формулу можно преобразовать к следующему виду: $R^2 = \frac{\quad}{4S}$. Подставляем числовые данные $R =$ ____ $см$.

Базовый уровень считается пройденным, если ученик решил задачу. При желании и возможности ученик может перейти на достаточный и продвинутый уровень. Идея движения по уровням заключается в том, что условия задачи видоизменяют: замена основной фигуры (изменение вида треугольника); исключение некоторых данных из первоначального условия задачи; свой вариант (на практике, отмечают авторы, школьники предлагали заменить треугольник четырехугольник) [14].

И.Н. Киселевой и др. утверждают, что использование указанной технологии в учебном процессе в значительно степени повлияет на улучшение качества подготовки учащихся по математике.

Н.М. Рогановский в статье [31] использует технологию *проблемного обучения* учащихся и делится опытом составления поисковых заданий по геометрии и применение их в работе с учащимися. Автор отмечает, что поисковые задания должны быть ориентированы на всех учащихся и тесно связаны с учебным материалом. В статье сформулированы учебные проблемы и составлены задания по различным темам, в том числе и по теме «Площади фигур».

Проблемы, которые приводит автор:

Проблема 1. Как найти площадь четырехугольника, диагонали которого взаимно перпендикулярны?

Задача. Найдите площадь четырехугольника $ABCD$, диагонали которого взаимно перпендикулярны и равны 6 и 8 см. Указание: рассмотрите данный четырехугольник состоящим из двух треугольников.

Проблема 2. Проблема заключается в том, нельзя ли задачу решить иначе?

2.1. Предлагается решить задачу, рассмотрев четырехугольник, состоящий из четырех прямоугольных треугольников.

2.2. Решить задачу иначе. Заменить данный четырехугольник равновеликим прямоугольником и рассмотреть различные варианты такой замены.

2.3. Найдите еще один способ решения задачи 1.1. Нельзя ли воспользоваться прямоугольником, стороны которого равны диагоналям данного четырехугольника?

2.4. Решите задачу 1.1. иначе. Нельзя ли данный четырехугольник заменить равновеликим треугольником? Рассмотрите различные варианты такой замены.

2.5. Решите задачу 1.1. иначе. Нельзя ли данный четырехугольник заменить равновеликими параллелограммом? Рассмотрите различные варианты такой замены.

Проблема 3. Нельзя ли обобщить задачу 1.1?

3.1. Составьте задачу, аналогичную задаче 1.1., в которой бы длины диагоналей задавались в общем виде. Решите эту задачу. Какие способы решения возможны? Какую геометрическую закономерность вы заметили?

3.2. Составьте задачу, аналогичную задаче 1.1., в которой бы диагонали четырехугольника пересекались под произвольным углом α. Решите эту задачу. Какие способы решения возможны?

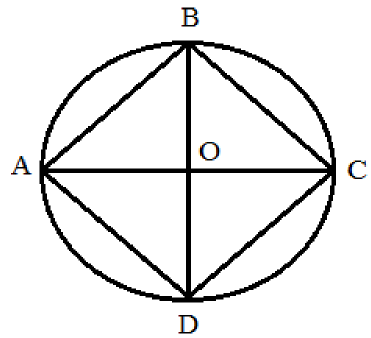


Рис. 19

Проблема 4. Нельзя ли конкретизировать задачу 3.1?

4.1. Составьте задачи, аналогичные задаче 3.1, в которых данный четырехугольник был бы: а) ромбом; б) квадратом; в) трапецией. Решите эти задачи.

4.2. По Рис. 19 составьте задачу, аналогичную предыдущим. Решите ее.

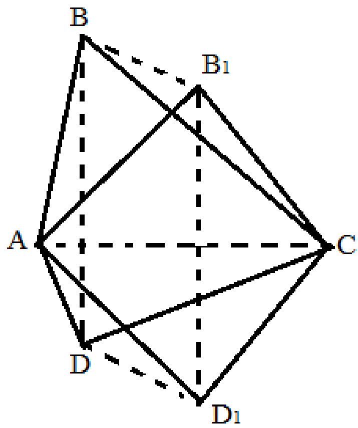


Рис. 20

Проблема 5. нельзя ли применить результат задачи 3.1 в других ситуациях?

5.1. Фиксировалась ли в задачах 1.1 и 3.1 точка пересечения диагоналей четырехугольника? Зависело ли решение этих задач от выбора этой точки?

5.2. $BD \perp AC$ (Рис. 20). Четырехугольник DBB_1D_1 - параллелограмм. Найдите на этом рисунке равновеликие четырехугольники.

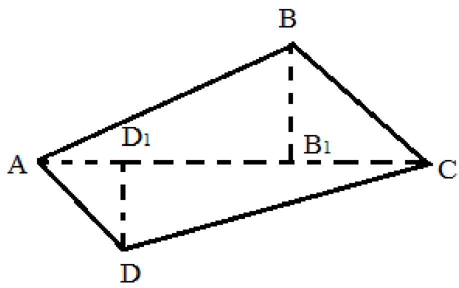


Рис. 21

5.3. Четырехугольник $ABCD$ диагональю AC разбит на дватреугольника (Рис. 21). BB_1 и DD_1 – высоты этих треугольников, проведенные к стороне AC. Известно, что $AC = a$, $BB_1 + DD_1 = b$. Найдите площадь данного четырехугольника. Рассмотрите различные способы.

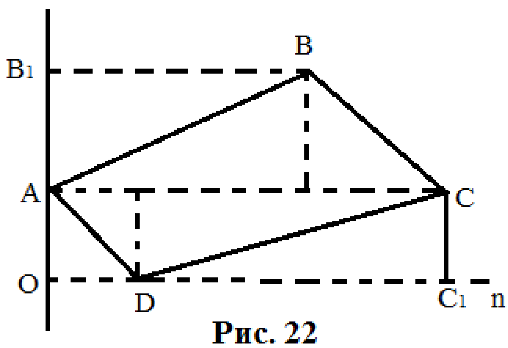


Рис. 22

5.4. Для определения площади четырехугольника $ABCD$ (Рис. 22) проделали следующие построения:

а) через вершину А провели прямую m, перпендикулярную диагонали AC; б) через вершину D провели прямую n, перпендикулярную m; в) провели $BB_1 \perp m$ и $CC_1 \perp n$. Докажите, что площадь четырехугольника равна $\frac{1}{2} OB_1 \cdot OC_1$.

5.5 (задача Герона). Участок заболоченной местности имеет форму четырехугольника. Как измерить его площадь, не вступая на него?

5.6. Составьте задачу обратную задаче 1.1, и решите ее.

По мнению Н.М. Рогановский, развивающие функции этой серии заданий связаны с поиском различных способов решения одной и той же задачи, с возможностью обобщения и конкретизации, применением полученных результатов исследования в измененных условиях [31].

Таким образом, при обучении учащихся теме «Площади фигур» могут быть использованы различные *технологии обучения*, а именно: *компьютерная* технология, технология *индивидуальной образовательной траектории,* технология *проблемного обучения и др.*

ВЫВОДЫ ПО ПЕРВОЙ ГЛАВЕ

Сформулируем основные выводы и полученные результаты по первой главе:

1. Рассмотрена история развития понятия площади. Уже в древности были известны формулы для измерения площадей прямоугольника, треугольника, произвольного четырехугольника, трапеции, круга и его частей, но вычислять площадь по данным формулам можно было лишь приближенно. Задача Дидоны (или изопериметрическая задача) является одной из древнейших задач, связанных с площадями, задача до сих пор изучается в школе в классах с углубленным изучением предмета. В древности были известны два подхода к решению геометрических задач, которые используются и сейчас: метод разложения и метод дополнения.

2. В методической литературе понятие *площади* определяют как *величину* части плоскости, заключенной внутри плоской замкнутой фигуры;

через площадь фигуры - как *часть плоскости*, занимаемой этой фигурой; через площадь простого многоугольника - как *число*, определяющее размер части плоскости, ограниченной этим многоугольником.

3. Выделены основные *подходы к* обучению теме «Площади фигур»: через метод разложения; через метод дополнения. Вводить понятие площади прямоугольника можно следующими способами, а именно, с помощью: сравнения площадей; понятие предельного перехода; понятие равносоставленности. В основе каждого способа введения понятия площади прямоугольника лежит метод разложения. Так же формулы для площади правильного и произвольного многоугольника выводятся на основе метода разложения, площади параллелограмма, треугольника трапеции – на основе метода дополнения.

4. Выявлены основные приемы и методы решения геометрических задач по теме «Площади фигур»: метод площадей (свойство аддитивности и отношение площадей), метод введения вспомогательного элемента; прием эквивалентность отношения длин, сторон и площадей, прием инвариантность, прием метод остатков. Особенную важность имеет метод площадей, когда в формулировке задачи нет упоминания о понятии площади, оно используется в решении задачи в качестве вспомогательного элемента.

5. Рассмотрены различные технологии обучения теме «Площади фигур»: компьютерная технология, технология индивидуальных образовательных траекторий, технология проблемного обучения.

ГЛАВА II. МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ОБУЧЕНИЯ УЧАЩИХСЯ ТЕМЕ "ПЛОЩАДИ ФИГУР" В КУРСЕ ГЕОМЕТРИИ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ

§6. Методические рекомендации по обучению теме «Площади фигур» в курсе геометрии основной школы

Рассмотрев перечень учебников геометрии для учащихся 7-9 классов Л.С. Атанасяна [6], И.Ф. Шарыгина [46], И.М. Смирновой [34] и А.В. Погорелова [28], рекомендованных к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ общего образования, утвержденного приказом Министерства образования и науки Российской Федерации № 253 от 31 марта 2014 г. [41], за основу мы взяли учебник Л.С. Атанасяна.

Вместе с этим, нами были проанализированы учебные программы [3; 22 – 24; 35] к учебным пособиям различных авторов (Приложение 1).

Согласно Примерной основной образовательной программы основного общего образования учащиеся в 7-9 классах по теме «Площади фигур» научатся *на базовом уровне* [29, С. 90]:

- применять формулы площади, площади поверхности отдельных многогранников при вычислениях, когда все данные имеются в условии;

- применять теорему Пифагора, базовые тригонометрические соотношения для вычисления площадей в простейших случаях;

- вычислять площади в простейших случаях, применять формулы в простейших ситуациях в повседневной жизни;

на базовом и углубленном уровнях:

- оперировать представлениями о площади как величинами. Применять теорему Пифагора, формулы площади при решении многошаговых задач, в которых не все данные представлены явно, а требуют вычислений, оперировать более широким количеством формул площади, вычислять характеристики комбинаций фигур (окружностей и многоугольников), применять тригонометрические формулы для вычислений в более сложных случаях, проводить вычисления на основе равновеликости и равносоставленности;

- проводить простые вычисления на объемных телах;

- формулировать задачи на вычисление площадей и решать их;

- проводить вычисления на местности;

- применять формулы при вычислениях в смежных учебных предметах, в окружающей действительности [29, С. 100-101].

Итак, на тему «Площадь» в школьном курсе геометрии по учебнику Л.С. Атанасяна отводится 14 часов. В данную главу не включена тема «Площадь круга», на которую отведено 2 часа, она рассматривается в главе «Длина окружности и площадь круга».

Отметим, что в учебных пособиях И.М. Смирновой и А.В. Погорелова тема «Площадь» изучается в одной главе: у А.В. Погорелова глава называется «Площади фигур», у И.М. Смирновой – «Площадь». У И.Ф. Шарыгина данная тема изучается в разных главах: «Площади многоугольников» и «Длина окружности, площадь круга», но неразрывно друг за другом.

Т.С. Мищенко особенность темы «Площадь» видит в том, что с понятием площади и формулой для вычисления площади прямоугольника и треугольника учащиеся познакомились в 5 - 6 классах.

Назначение данной главы состоит в том, чтобы:

- расширить и углубить представления учащихся об измерении площадей прямоугольника, параллелограмма, треугольника, трапеции;

- доказать теорему Пифагора, используя понятие площади [22, С, 55].

Автор указывает, что в учебнике Л.С. Атанасяна основное внимание уделяется формированию практических навыков вычисления площадей многоугольников в ходе решения задач, так как это является составной частью задач на многогранники в курсе стереометрии; в этой главе доказывается нетрадиционная теорема для курса планиметрии - *теорема об* *отношении площадей треугольников, имеющих по равному углу*, которая играет важное место при изучении подобия треугольников, но умения доказывать теорему от каждого учащегося можно не требовать [22, С, 55].

У И.Ф. Шарыгина в главу «Площади многоугольников» входит *дополнительный материал*, который включает в себя второй способ доказательства теоремы Пифагора, теорема о медианах треугольника, теорема о биссектрисе внутреннего угла треугольника, метод площадей и синус двойного угла; здесь вводится *понятие равновеликости*, с помощью которого упрощается решение многих задач и происходит углубление общих представлений учащихся о методологических основах геометрии; большое внимание уделяется так же решению задач, так как это, по мнению Т.С. Мищенко:

- позволяет расширить представления учащихся об аналитических методах решения геометрических задач;

- подготовить учащихся к решению прямоугольных треугольников;

- играет важную роль в осуществлении внутрипредметных связей [24, С. 255].

Далее рассматривается, как представлено обучение учащихся теме «Площадь». На тему «Площадь многоугольника» у Л.С. Атанасяна отводится 1 час. Содержание параграф рекомендовано дать на одном уроке в виде лекции, а основное внимание следует уделить основным свойствам площади и формуле площади прямоугольника. На данном уроке учащиеся должны научиться:

- иллюстрировать и объяснять основные *свойства площади*, *понятие равновеликости* и *равносоставленности*;

- выводить *формулы площади квадрата* (длина стороны выражается рациональным числом), *прямоугольника*;

- применять все это вышесказанное при решении задач на вычисление и доказательство.

В самом начале урока, отмечает Т.С. Мищенко, учащимся следует провести *аналогию* между *единицей измерения отрезка* и *площадью*: длину отрезка мы можем выразить некоторым положительным числом, а за единицу измерения площади выбирается *площадь квадрата*, сторона которого равна выбранной единицей измерения длины. Так, например, если взять за единицу измерения сантиметр, то измерения площади будет квадратный сантиметр и так далее. *Площадь* каждого *многоугольника* выражается положительным числом [22, С. 57].

Л.С. Атанасян *площадь многоугольника* определяет аксиоматически, как величину той части плоскости, которую занимает многоугольник [6, С. 117].

А.В. Погорелов же вводит вначале определение *простой геометрической фигуры*, а потом - *понятие площади* как положительной величины через три свойства, которые у Л.С. Атанасяна рассмотрены отдельно [28, С. 195-196].

В отличие от учебника Л.С. Атанасяна, И.Ф. Шарыгин вводит вначале неформальное определение понятия площади: «Площадь – это некоторая характеристика геометрической фигуры, расположенной на плоскости или на иной поверхности» [44, С. 340], а потом – определение данного понятия для плоской фигуры: «Площадь – это число, которое ставится в соответствие ограниченной плоскости фигуре» [46, С. 340].

По учебнику И.М. Смирновой: «площадь фигуры – это число, получающееся в результате измерения и показывающее, сколько раз единичный квадрат и его части укладываются в данной фигуре» [34, С. 226].

Л.С. Атанасян в учебнике приводит сложное измерение *площади многоугольников* с помощью метода разбиения фигуру на квадраты (или с помощью укладки квадратов в фигуру). Учащиеся должны сами понять, что измерять площадь данным методом неудобно и прийти к вычислению площади с помощью формул, измеряя лишь, некоторые связанные с многоугольником, отрезки. Т.С. Мищенко подчеркивает, что учащимся следует показать ряд примеров, когда измерение площади необходимо для практического использования, например, нужно знать площадь комнаты, для того, чтобы постелить линолеум [22, С. 57].

Т.С. Мищенко предлагает вводить *свойства измерения площадей* вместе с повторением формулировок *свойств измерения отрезков*, при этом рисунок и записи должны быть на доске. По Рис. 23 учащиеся видят аналогию, что способствует лучшему усвоению изученного материала [22, С. 58].

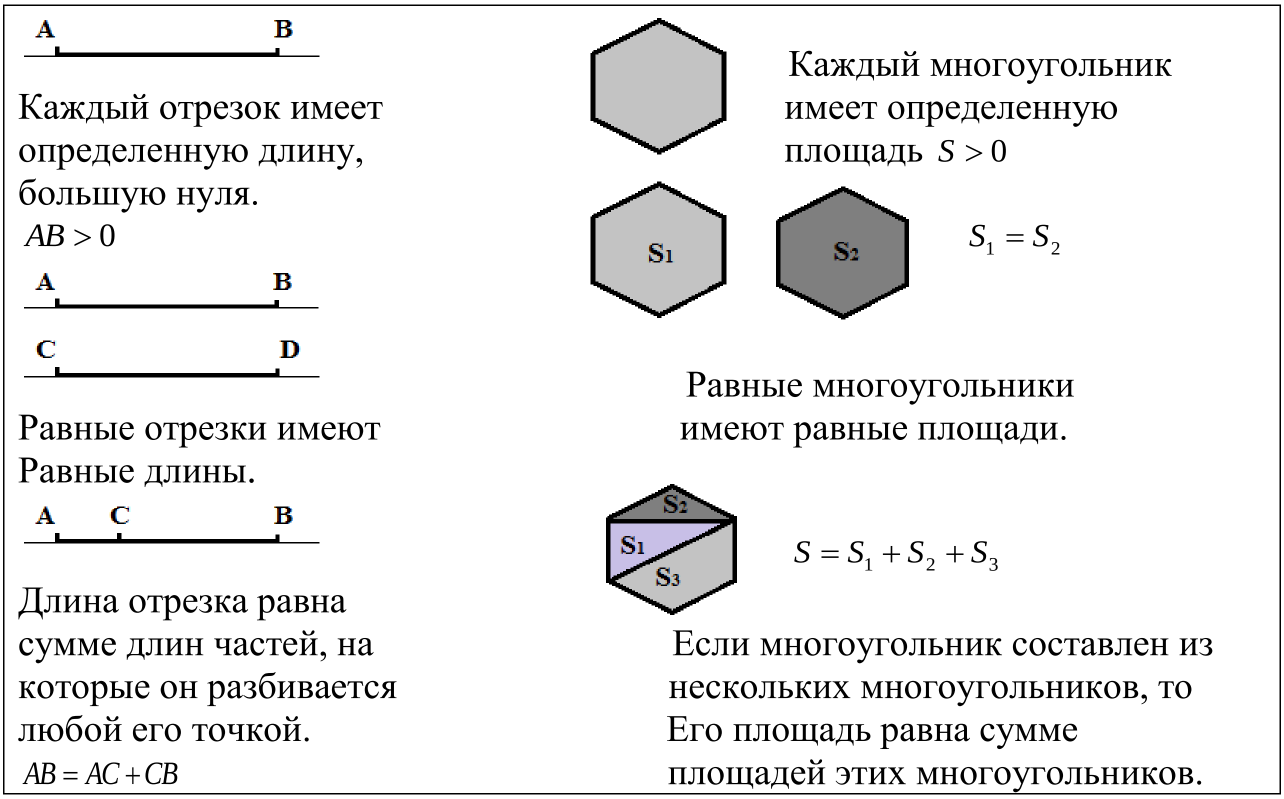


Рис. 23.

Вместе с этим, по учебному пособию А.В. Погорелова свойства площадей рекомендуется вводить таким же методом [23, С. 123].

После того, как определены свойства площади (1. Равные многоугольники имеют равные площади. 2. Если многоугольник составлен из нескольких многоугольников, то его площадь равна сумме площадей этих многоугольников [6, С. 119]), с учащимися полезно решить задачу 447, показав применение свойств площади при ее решении [22, С. 58].

Задача 447 [6, С. 122]. Начертите параллелограмм $ABCD$ и отметьте точку M, симметричную точке D, относительно точки C. Докажите, что $S_{ABCD} = S_{AMD}$.

Так в учебнике И.Ф. Шарыгина приведены несколько иные свойства площади, которые проиллюстрированы соответствующими рисунками:

1. Площадь фигуры является неотрицательным числом.
2. Площади равных фигур равны.
3. Если фигура разделена на две части, то площадь всей фигуры равна сумме площадей образовавшихся частей.
4. За единицу измерения площади принимается площадь квадрата со стороной, равной 1 единице длины [46, С. 340].

Также только в учебнике И.Ф. Шарыгина приведены два следствия из свойств площади:

1. Если одна фигура содержит внутри себя другую фигуру, то площадь первой фигуры, то площадь первой фигуры не меньше площади второй фигуры.

2. Площадь квадрата со стороной, длина которой $\frac{1}{n}$ (ед.дл.), равна $\frac{1}{n^2}$ (кв.ед., или $ед^2$) [46, С. 341].

По мнению Т.С. Мищенко, доказательство данных следствий лучше провести учителю самостоятельно с минимальным вмешательством учащихся в данный процесс. Учителю следует обратить внимание учащихся на применение свойств площади, которые используются при доказательстве Следствия 2 [24, С. 258].

И.М. Смирнова второе свойство площади дает несколько иначе: «Если фигура Φ составлена из двух неперекрывающихся фигур Φ_1 и Φ_2, то площадь фигуры Φ равна сумме площадей фигур Φ_1 и Φ_2, то есть $S(\Phi) = S(\Phi_1) + S(\Phi_2)$» [34, С. 226].

Вместе с этим, по учебнику Л.С. Атанасяна пункт, где приводится доказательство третьего свойства площади («Площадь квадрата равна квадрату его стороны») помечен звездочкой, что говорит о том, что такой уровень сложности не соответствует требованиям образовательного стандарта. При доказательстве данного свойства достаточно ограничиться случаем, когда сторона квадрата выражается обыкновенной и конечной десятичной дробью. Третий случай, когда сторона квадрата выражается бесконечной десятичной дробью, полезно самостоятельно разобрать дома «сильным» учащимся [22, С. 59].

После введения третьего свойства («Площадь квадрата равна квадрату его стороны») нужно разобрать устно два *упражнения*:

1. Как изменится площадь квадрата, сторона которого равна 3 см, если каждую сторону: а) увеличить в два раза; б) уменьшить в два раза?
2. Как изменится сторона квадрата, если его площадь: а) увеличить в 16 раз; б) уменьшить в 9 раз?

При доказательстве формулы для вычисления *площади прямоугольника* используется равенство двух прямоугольников, поэтому перед этим можно учащимся предложить решить задачу: «Докажите, что два прямоугольника с равными сторонами равны». После следует решить задачи на вычисление площади прямоугольника. В качестве домашнего задания можно дать задачи: на вычисление площади, на сравнение площадей, на понятие равновеликости [22, С. 60].

Доказательство формулы для вычисления площади прямоугольника в учебнике А.В. Погорелова, И.Ф. Шарыгина и И.М. Смирновой для общего случая превышает уровень сложности учебного материала, определяющий «примерными программами основного общего образования». Вывод формулы, по мнению Т.С. Мищенко, предлагается дать в образном плане в виде фрагмента лекции на уроке. По учебнику А.В Погорелова доказательство Т.С. Мищенко рекомендует провести по тексту учебника.

Обратимся к опыту учителя математики Ю. Абликсанова, которая предлагает на первом уроке на тему «Понятие площади. Площадь квадрата» следующую схему объяснения нового материала:

1) устный счет, здесь вспоминаются известные ранее единицы измерения площади и их равносильность;

2) проверка домашнего задания, где учащимся на дом было дано узнать из литературы, историю измерения площадей в древности в различных странах и привести примеры необходимости вычисления площадей в настоящее время;

3) объяснение нового материала проходит по учебнику Л.С. Атанасяна, где понятие площади учитель дает через площадь многоугольника как положительное число, которое показывает, сколько раз единица измерения и ее части укладываются в данном многоугольнике. Доказательство формулы квадрата рассматриваются для 3-х случаев: длина стороны выражается целым числом, дробным числом, иррациональным числом или десятичной бесконечной непериодической дробью;

4) задачи рассматриваются практического характера [1].

Вторым параграфом в учебнике Л.С. Атанасяна в главе «Площадь» идет «*Площадь параллелограмма, треугольника и трапеции*», на который отводится 5 часов, в нем выводятся основные формулы для вычисления площади параллелограмма, треугольника и трапеции традиционными способами.

А.В. Погорелов вводит помимо традиционной формулы треугольника еще одну формулу площади треугольника через две стороны и угол между ними: $S = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A$. В этом же параграфе формула Герона $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ доказывается с помощью данной формулы [28, С. 199].

При обучении учащихся формуле Герона, которая позволяет по трем сторонам подсчитать площадь треугольника, учителю приходится подбирать задачи с числовыми данными, которые приводят к «хорошим» числам под знаком радикала, пишет А.Ш. Чавчанидзе в своей статье «Еще один вариант формулы Герона». Ниже будет приведена статья [37], где приведены «хорошие» длины сторон треугольника. Но автор считает, что легче преобразовать формулу к такому виду, чтобы ею было легче пользоваться, когда стороны выражены числами, содержащие квадратные корни, чем подбирать числа к формуле.

Итак, если длины сторон выражены с помощью радикалов, то формула Герона для упрощенного вычисления имеет вид: $S=\frac{1}{4}\sqrt{-(c^4-2c^2(a^2+b^2)+(a^2-b^2)^2)}$ (1)

Вывод формулы можно провести вместе с учащимися, так как он достаточно прост и понятен.

Проверим формулу на практике. Пусть нужно вычислить площадь треугольника, стороны которого равны $a=\sqrt{3}, b=\sqrt{7}, c=\sqrt{2}$.

Подставим данные значения в формулу (1), получаем: $S=\frac{1}{4}\sqrt{-(4-2\cdot 2(3+7)+(3-7)^2)}=\frac{1}{4}\sqrt{-(4-40+16)}=\frac{\sqrt{5}}{2}$ [44]. Данную формулу можно дать на дополнительном занятии, либо на факультативном курсе.

К выше описанным формулам: $S=\frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin A$ и $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ в учебном пособии И.Ф. Шарыгина так же приводится и доказывается формула для вычисления площади треугольника: $S=\frac{abc}{4R}$, $S=\frac{a^2\sin B\cdot\sin C}{2\sin A}$, $S=2R^2\sin A\cdot\sin B\cdot\sin C$, $S=pr$, где A, B, C – величины соответствующих углов треугольника, a, b, c – длины противолежащих им сторон, p – полупериметр треугольника, r и R – радиусы вписанной и описанной окружностей [46, С. 348].

По мнению Т.С. Мищенко, так как при выводе формул используются достаточно сложные алгебраические выкладки, то доказательство от учащихся можно не требовать; им достаточно знать доказательство традиционной формулы площади треугольника и формулы через радиус описанной окружности, а доказательства других формул описанных в учебных пособиях А.В. Погорелова и И.Ф. Шарыгина требовать от учащихся не следует, учителю достаточно в виде фрагмента доказать их у доски.

В результате изучения параграфа «Площадь параллелограмма, треугольника и трапеции», по учебному пособию Л.С. Атанасяна учащиеся должны научиться:

- выводить формулу площади треугольника (традиционную), четырехугольников;

- вычислять площади фигур, применяя свойства и формулы площади;

- применять полученные знания при решении задач [22, С. 59].

Кроме того, учащиеся также познакомятся с *методом площадей* и смогут научиться применять его при решении задач. Следует отметить, что данный метод не описан в учебнике Л.С. Атанасяна, А.В. Погорелова и И.М. Смирновой, он встречается лишь при решении некоторых задач. В учебнике И.Ф. Шарыгина данному методу отводится отдельный параграф («Площадь в теоремах и задачах»), где у учащихся есть возможность наглядно посмотреть, как с помощью него решаются и доказываются задачи. Только часть этой темы является обязательной для обучения учащихся, а остальной материал учитель может дать на свое усмотрение.

По учебному пособию Л.С. Атанасяна в начале урока Т.С. Мищенко предлагает провести самостоятельную работу по теме «Площадь многоугольника» в качестве проверке домашнего задания [22, С. 67].

Параграф «Площадь параллелограмма, треугольника и трапеции» начинается с вывода формулы *площади параллелограмма*. Учителю сначала следует сформулировать свойство теоремы, на доске начертить рисунок и записать формулу, использую общепринятые обозначения: $S = ah_a$. Доказательство следует записать кратко на доске, выделив условие и заключение теоремы.

Дано: $ABCD$ - параллелограмм (Рис. 24)

$BH \perp AD; H \in AD$

Доказать: $S_{ABCD} = AD \cdot BH$

Доказательство:

1. Дополнительные построения: $CK \perp AD$, $ABCK$ – трапеция (Рис. 25).

2. $S_{ABCK} = S_{ABH} + S_{BCKH} = S_{ABCD} + S_{DCK}$

(по второму свойству площади).

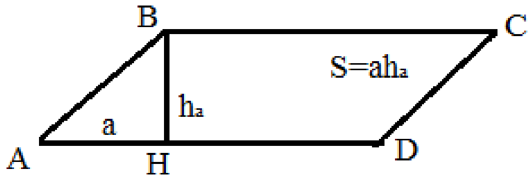


Рис. 24

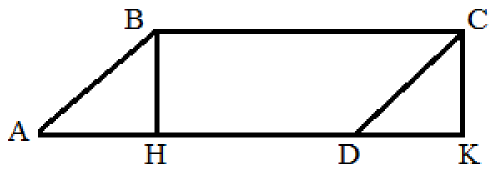


Рис. 25

3. $ABCD$ - параллелограмм: $AD = BC$, $AB = DC$ и $AB \parallel DC$.

4. $\angle BAH = \angle CDK$ как соответственные углы при параллельных прямых AB и DC и секущей AD.

5. $\Delta BAH = \Delta CDK$ как прямоугольные треугольники по острому углу и гипотенузе.

6. $S_{ABH} = S_{DCK}$ (по первому свойству площади).

7. Значит, $S_{ABH} + S_{BCKH} = S_{ABCD} + S_{DCK}$, $S_{BCKH} = S_{ABCD}$.

8. $S_{BCKH} = BH \cdot BC = BH \cdot AD = S_{ABCD}$.

Вывод: $S_{ABCD} = AD \cdot BH$

После доказательства формулы для формирования умения ее применять, с учащимися следует устно выполнить задания:

459 [6, С. 127]. а) Пусть a – основание, b – высота, а S – площадь параллелограмма. Найдите S, если $a = 15$ см, $h = 12$ см.

464 [6, С. 128]. Пусть a и b – смежные стороны параллелограмма, S – площадь, а h_1 и h_2 – его высоты. Найдите h_2, если $a = 18$ см, $b = 30$ см, $h_1 = 6$ см, $h_2 > h_1$.

467 [6, С. 128]. Квадрат и ромб, не являющийся квадратом, имеют одинаковые периметры. Сравните площади этих фигур.

Для того, чтобы учащиеся научились применять формулу в нестандартных ситуация следует решить такую *задачу:*

Дан параллелограмм $ABCD$ *с основанием* AD. *Постройте параллелограмм на том же основании* AD, *равновеликий данному* *параллелограмму, но не равный ему. Сколько таких параллелограммов можно построить?* (Две другие вершины нового параллелограмма будут лежать на прямой, содержащей сторону BC. Как угодно много.) [22, С. 62].

В качестве домашнего задания учащимся рекомендуется задачи следующего характера:

460 [6, С. 127]. Диагональ параллелограмма, равная 13 см, перпендикулярна к стороне параллелограмма, равной 12 см. Найдите площадь параллелограмма.

462 [6, С. 128]. Сторона ромба равна 6 см, а один из углов равен $150°$. Найдите площадь ромба.

Отметим, что в учебном пособии И.М. Смирновой после теоремы о площади параллелограмма приводится следствие, где описана еще одна формула площади параллелограмма: $S = a \cdot b \cdot \sin\varphi$, где $a, b -$ смежные стороны параллелограмма, $\varphi -$ угол между ними [34, С. 231].

На втором уроке по учебнику Л.С. Атанасяну следует приступить к выводу формулы *площади треугольника*, по такому же плану, что и вывод формулы площади параллелограмма. Краткая запись на доске должна иметь вид:

Дано: $ABC -$ треугольник (Рис. 26);

$AC -$ основание;

$BH -$ высота.

Доказать: $S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BH$

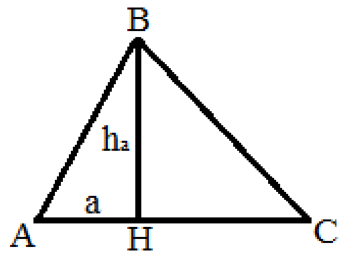


Рис. 26

Доказательство:

1. Дополнительные построения: Дополнительные построения: $BD \parallel AC$ и $AB \parallel DC$. $ABCD -$ параллелограмм (Рис. 27).

2. $ABCD -$ параллелограмм: $AC = BD$, $AB = DC$.

3. $\Delta ABC = \Delta BCD$ по трем сторонам.

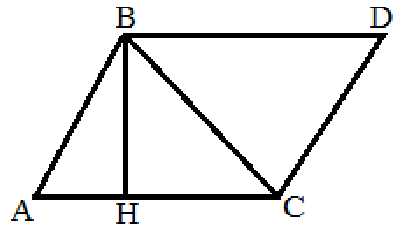


Рис. 27

4. $S_{ABC} = S_{BCD}$ (по первому свойству площади).

5. $S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{BCD}$ (по второму свойству площади).

6. Значит, $S_{ABC} = \frac{1}{2} S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BH$.

Вывод: $S = \frac{1}{2} AC \cdot BH$ [22, С. 63].

По учебному пособию И.Ф. Шарыгина и А.В. Погорелова лучше провести доказательство в форме беседы, с привлечением учащихся, задавая при этом наводящие вопросы.

После доказательства теоремы, по учебному пособию Л.С. Атанасяна, следует решить устно задачу 468 [6, С. 128]. Пусть a – основание, h – высота, а S – площадь треугольника. Найдите: а) S, если $a = 7$ см, $h = 11$см; в) h, если $S = 37{,}8\ см^2$, $a = 14$ см; г) a, если $S = 12\ см^2$, $h = 3\sqrt{2}$ см [22, С. 128].

Для того, чтобы учащиеся лучше усвоили формулу треугольника и научились ее применять в нестандартных задачах, полезно решить *задачу*:

473 [22, С. 63]. Через вершину C треугольника ABC проведена прямая m, параллельная стороне AB. Докажите, что все треугольники с вершинами на прямой m и основанием AB имеют равные площади.

Доказательство следствий 1 и 2 из формулы площади треугольника: «1. Площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения катетов; 2. Если высоты двух треугольников равны, то их площади относятся как основания», лучше обсудить с учащимися по готовым чертежам (Рис. 28), а закрепить их можно с помощью задач 471 и 474 [22, С. 63].

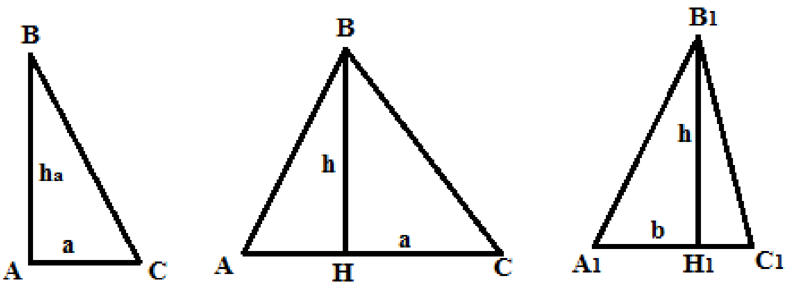


Рис. 28

471 [6, С. 128]. Найдите площадь прямоугольного треугольника, если его катеты равны 4 см и 11 см.

474 [6, С. 128]. Сравните площади двух треугольников, на которые разделяется данный треугольник его медианой.

В качестве домашнего задания следует дать задачи на применение формул площади прямоугольного и произвольного треугольника, а также на понятие равновеликости.

Следует отметить, что И.Ф. Шарыгин рассматривает параграф «Равновеликие фигуры» отдельно, в котором помимо равновеликости треугольников, приводит понятие равносоставленности двух фигур. Площадь трапеции доказывается также с помощью формулы $S = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A$ с использованием методов дополнительного построения. Затем автор приводит формулы для радиуса вписанной и описанной окружности треугольника; имеется параграф площади подобных фигур; в этой же главе рассматривает площадь круга.

На третьем уроке по учебнику Л.С. Атанасяна доказывается теорема об отношении площадей треугольников, имеющих по равному углу. Перед доказательством следует рассмотреть *задачу:* Разделите данный треугольник на два треугольника, площади которых относятся как 1:2 [22, С. 64].

Отметим, что у И.Ф. Шарыгина тема «Подобные треугольники» была изучена в 8 классе, поэтому перед темой «Отношение площадей подобных фигур» следует вспомнить определения подобных фигур и свойства, и решить задачу 1322 [24, С. 265]. На отрезке, соединяющем середины оснований AD и BC трапеции $ABCD$, взята точка M. Докажите, что треугольники AMB и CMD равновелики [46, С. 357].

Так, доказательство *теоремы об отношении площадей треугольников, имеющих по равному углу*, отмечает Т.С. Мищенко, следует начать с её формулировки, далее начертить два треугольника (по условию), выделить условие и заключение и сделать краткую запись на доске.

Дано: ABC и $A_1B_1C_1$ - треугольники (Рис. 29);

S – площадь треугольника ABC;

S_1 – площадь треугольника $A_1B_1C_1$;

$\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$

Доказать: $\frac{S}{S_1} = \frac{AB \cdot AC}{A_1B_1 \cdot A_1C_1}$

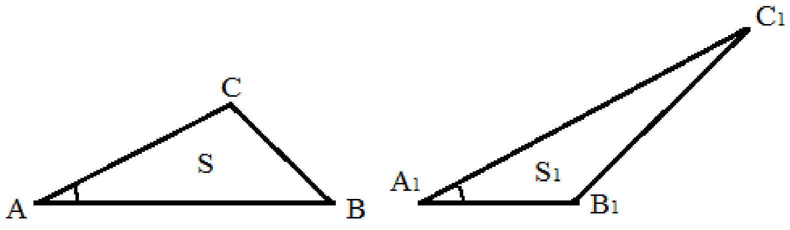


Рис. 29

Доказательство:

1. Дополнительные построения: наложим треугольник $A_1B_1C_1$ на треугольник ABC так, чтобы вершина A_1 треугольника $A_1B_1C_1$ совпало с вершиной A треугольника ABC, а луч A_1B_1 – с лучом AB. Так как углы $B_1A_1C_1$ и BAC равны и отложены от полупрямой A_1B_1 в одну полуплоскость, то луч A_1C_1 совпадает с лучом AC. Значит, точка C_1 лежит на луче AC.

2. Дополнительное построение: соединим вершину C треугольника ABC с вершиной B_1 треугольника AB_1C_1.

3. Рассмотрим треугольники ACB и ACB_1. CH – высота треугольников ACB и AB_1C. Значит, по следствию 2: $\frac{S}{S_{AB_1C}} = \frac{AB}{AB_1}$.

4. Рассмотрим треугольники AB_1C_1 и AB_1C. CH – высота треугольников ACB и AB_1C_1. Значит по следствию 2: $\frac{S_{AB_1C}}{S_{AB_1C_1}} = \frac{AC}{AC_1}$.

5. Отсюда: $\frac{S}{S_{AB_1C}} \cdot \frac{S_{AB_1C}}{S_{AB_1C_1}} = \frac{AB}{AB_1} \cdot \frac{AC}{AC_1}$.

6. $\Delta A_1B_1C_1 = \Delta AB_1C_1$, а значит, $S_1 = S_{AB_1C_1}$.

Вывод: $\frac{S}{S_1} = \frac{AB \cdot AC}{A_1B_1 \cdot A_1C_1}$ [22, С. 65].

Для того чтобы учащиеся лучше усвоили данное свойство площадей рекомендуется решить следующую задачу: 479 а) [6, С. 129]. Точки D и E лежат на сторонах AB и AC. Найдите S_{ADE}, если $AB = 5$ см, $AC = 6$ см, $AD = 3$ см, $AE = 2$ см, $S_{ABC} = 10 см^2$.

В качестве домашнего задания учащимся рекомендуется дать задание решить задачу на повторение темы с прошлого урока и решить *задачу 479 (б)*

[6, С. 129]. Точки D и E лежат на сторонах AB и AC. Найдите AD, если $AB = 8$ см, $AC = 3$ см, $AE = 2$ см, $S_{ABC} = 10\ см^2$, $S_{ADE} = 2\ см^2$.

Учителю часто приходится составлять однотипные задачи, и чаще всего это требует максимального внимания, так как нужно составить такие задачи, которые не перегружали бы учащихся излишними вычислениями. В.И. Тараненко в статье «В помощь составителям задач по теме «Площадь треугольника» предлагает таблицу данных для составления упражнений на вычисление площади треугольника. По данным таблицы можно составить ряд задач: 1) на вычисление площади треугольника по трем сторонам (по формуле Герона); 2) по стороне a и высоте h_a; 3) на вычисление высоты h_a по трем неизвестным сторонам. Данная таблица разбита на 3 графы: в первых трех столбцах каждой графы стоят числа, которыми выражаются длины сторон треугольника ABC, в четвертом – значение S, то есть числовое выражение площади треугольника (Приложение 2) [37].

На *четвертом уроке* по учебнику Л.С. Атанасяна вывод формулы *площади трапеции* произвести по такой же схеме, как и для параллелограмма и треугольника, а поэтому можно дать учащимся самостоятельно разобрать доказательство. После обоснования формулы площади трапеции полезно напомнить учащимся, что полусумма оснований трапеции равна ее средней линии [22, С. 65].

После доказательства устно решить задачу по готовому чертежу.

480 (а) [6, С. 129]. Найдите площадь трапеции $ABCD$ с основаниями AB и CD, если $AB = 21$см, $CD = 17$ см, высота $BH = 7$ см.

Т.С. Мищенко считает целесообразно решить в классе задачи 476, 477, 478, так как при их решении получаются дополнительные формулы для выпуклых четырехугольников, у которых диагонали взаимно перпендикулярны.

476 [6, С. 129]. Докажите, что площадь ромба равна половине произведения его диагоналей. Вычислите площади ромба, если его диагонали равны 3,2 дм и 14 см.

477 [6, С. 129]. Найдите диагонали ромба, если одна из них в 1,5 раза больше другой, а площадь ромба равна $27\,см^2$.

478 [6, С. 129]. В выпуклом четырехугольнике диагонали взаимно перпендикулярны. Докажите, что площадь четырехугольника равна половине произведения его диагоналей.

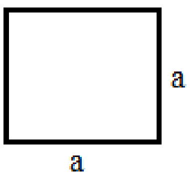
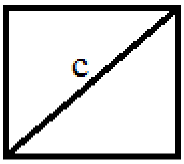
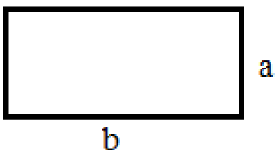
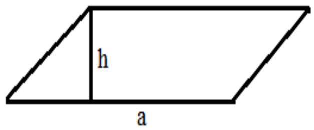
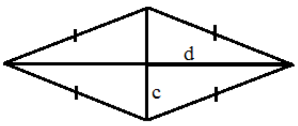
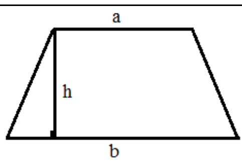
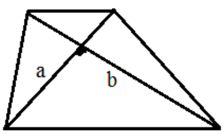
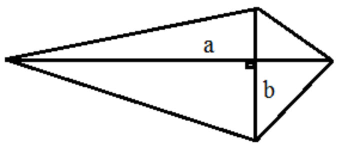
Задача 478 является обобщением задачи 476.

В качестве домашнего задания следует дать задачи на применении формулы для выпуклого четырехугольника, у которого диагонали взаимно перпендикулярны и на нахождении площади трапеции.

По учебному пособию А.В. Погорелова вывод формулы начинается с формулировки определения, далее необходимо начертить чертеж на доске и составить краткую запись условия и заключения, при выводе формулы можно привлечь учащихся [23, С. 138].

На пятом уроке по учебнику Л.С. Атанасяна следует обобщить изученный материал, по теме «Площадь». Мищенко предлагает использовать для этого плакат (Табл. 1), а учащимся предложить перечертить данную таблицу в тетрадь.

Таблица 1

 $S =$ ________	 $S =$ ________	 $S =$ ________	 $S =$ ________
 $S =$ ________	 $S =$ ________	 $S =$ ________	 $S =$ ________

Тема «Теорема Пифагора», на которую отводится 3 часа, включена в главу «Площадь» неслучайно: во-первых, доказательства теоремы Пифагора основано на свойствах площади; во-вторых, в данном параграфе учитель знакомит учащихся с формулой Герона и приводит доказательство формулы (с помощью теоремы Пифагора).

На формулу Герона нет отдельного пункта в параграфе, Л.С. Атанасян приводит лишь задачу с доказательством данной формулы. Между тем И.М. Смирнова и И.Ф. Шарыгин доказательство формулы Герона приводят с помощью теоремы о формуле площади треугольника $S = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A$, поэтому формула Герона изучается после ввода данной формулы. Так как при выводе формулы используются достаточно сложные алгебраические выкладки, то доказательство от учащихся можно не требовать, при этом формулу Герона можно дать в виде фрагмента лекции.

Б.С. Прицкер в статье «Площадь четырехугольника» предлагает материал, в котором рассматривает способ вычисления выпуклых четырехугольников, не являющихся параллелограммом или трапецией. Формула нахождения площади данных выпуклых четырехугольников не упоминается в школьной программе, но применение данной формулы для решения ряда задач было бы удобным.

Формула имеет вид $S = \sqrt{A - abcd \cos^2 \frac{\delta + \beta}{2}}$, где $A = (p-a)(p-b)(p-c)(p-d)$, a, b, c, d – длины сторон, p – полупериметр, δ и β – противолежащие углы четырехугольника. Данную формулу можно назвать аналогом формулы Герона, так как они имеют некоторые сходства. Автор приводит доказательство данной формулы, после которого вытекают три следствия:

1. Площадь произвольного четырехугольника, вписанного в окружность, вычисляется по формуле: $S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$.

2. Площадь произвольного четырехугольника, описанного около окружности, вычисляется по формуле: $S = \sqrt{abcd \sin^2 \frac{\delta + \beta}{2}}$.

3. Площадь четырехугольника, вписанного в окружность и описанного около окружности, может быть вычислена по формуле: $S = \sqrt{abcd}$.

К каждому следствию приведены доказательства [30].

Обучению теме «*Площадь круга*» и «*Площадь многоугольника*» по учебнику Л.С. Атанасяна начинается в 9 классе, они рассматриваются в главе «Длина окружности и площадь круга», на которую отведено 12 часов.

В данной главе рассматривается вывод формулы *площади круга*, который основан на интуитивном представлении о пределе. Если неограниченно увеличивать число сторон правильного многоугольника, который вписан в окружность, то периметр многоугольника будет стремится к длине этой окружности, площадь будет также стремится к площади круга, ограниченного окружностью [3, С. 38].

На тему «Площадь круга» отводится 2 часа. Ранее учащиеся в 6 классе получили наглядное представление о площади круга, но без ее доказательства. В 9 классе после изучения правильных многоугольников можно обосновать данную формулу, так как доказательство приводится через правильный n-угольник вписанный в окружность, ограничивающий круг. При выводе формул площади круга следует обращать внимание на последовательность логических шагов:

1) строиться правильный n- угольник, описанный около данной окружности, с периметром P_n и площадью $S_n = \frac{1}{2} P_n R$. При возрастании n, как известно из предыдущего, P_n убывает и стремится к длине вписанной окружности. А значит, S_n стремится к πR^2.

2) строится правильный n-угольник, вписанный в данную окружность, с периметром P_n и площадью $S_n = \frac{1}{2} P_n R$. При возрастании n, как известно из предыдущего, P_n возрастает и стремится к длине описанной окружности.

3) делается вывод о вычислении площади круга по формуле $S = \pi R^2$.

Так как материал параграфа опирается на понятие предела, то лучше учителю изложить в форме лекции.

Формулы площадей круга, сектора, сегмента используется при решении задач на вычисление, на доказательство, построения. Основное внимание уделяется формированию практических навыков вычисления площадей круга и его частей, так как в курсе стереометрии данные вычисления являются составной частью задач на тела вращения.

Отдельным пунктом дана формула площади кругового сектора, данный пункт учащиеся могут изучить самостоятельно по учебнику.

В конце урока учащимся можно дать проверочную самостоятельную работу на проверку усвоенных знаний.

В учебнике А.В. Погорелова помимо формул площади круга и кругового сектора рассмотрена формула площади сегмента. При рассмотрении формулы площади кругового сегмента, отмечает Т.С. Мищенко, следует обратить внимание учителя на случаи, когда угол $\alpha > 180°$, и когда $\alpha < 180°$. это помогает выводу формулы [23, С. 147].

В контрольно-измерительных материалах итоговой государственной аттестации часто встречаются задания, когда нужно найти площадь фигуры, изображенной на клетчатой бумаге. Решение таких задач можно производить стандартным способом, использование формулы для нахождения площади фигуры, которые школьники и используют, либо непосредственным подсчетом клеток через достраивание фигуры до прямоугольника. Иногда нельзя точно определить длину частей фигуры, для того чтобы подставить в формулу для нахождения площади, для таких случаев существует формула Пика, которая была доказана более 100 лет назад. По мнению Л.К. Сыяповой и А.А. Темербековой, этот прием учащимся нужно знать, так как этот простой прием подсчета площадей многоугольников формирует рациональность мышления, а так же дает возможность проверить правильность решение математической задачи. Формула выглядит следующим образом:

$S = \frac{Г}{2} + В - 1$, где $S -$ площадь многоугольника, с вершинами в узлах квадратной сетки; $Г -$ количество углов сетки, лежащих на границах многоугольника (на сторонах и в вершинах); $В -$ количество узлов сетки, лежащих внутри многоугольника [36].

Рассмотрим пример задачи, применив формулу Пика [25].

Задача 13 [25]. Найдите площадь трапеции, изображённой на Рис. 30.

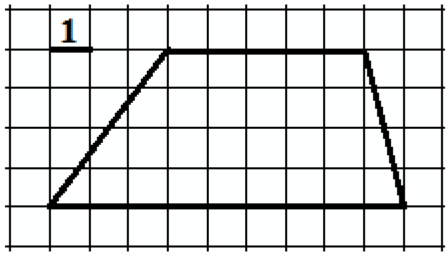


Рис. 30

Решение:

1) $S = \frac{Г}{2} + В - 1$;

2) Подставляем известные данные в формулу: $S = \frac{16}{2} + 21 - 1 = 28$

Ответ: 28

Проверим правильность ответа, решив данное задание стандартным способом:

1) $S = \frac{(a+b)}{2} \cdot h$, где a и $b -$ основания трапеции, $h -$ высота трапеции;

2) Подставляем данные в формулу: $S = \frac{(5+9)}{2} \cdot 4 = 7 \cdot 4 = 28$

Ответ: 28

Б.Ф. Харитонов отмечает, что «Повторение - важное звено учебного процесса, во многом определяющее его результативность». В учебном процессе обучения геометрии повторять нужно не только определения и теоремы, но и общие приемы решения задач. Это объясняется тем, что геометрические задачи менее алгоритмичны, чем алгебраические, и поэтому, обучать учащихся общим приемам решения задач имеет особую важность. В своей статье «Методика повторения приемов и методов решения геометрических задач» автор приводит пример из двух блоков задач, которые могут быть использованы при повторении темы «Площади фигур» в 9 классе.

Б.Ф. Харитонов так же упоминает о вариативности заданий при повторении материала, то есть с постоянное нарастание сложности заданий. По его мнению, это способствует формированию переноса навыков и умений на более высокий уровень и приучает применению полученных знаний в новых для ученика условиях, что является важным качеством учащихся.

Методика работы автора статьи заключается в том, что учащимся на дом предлагается задание – найти свойства и отношения, реализуемые на данной конфигурации, и составить свои задачи, используя найденные свойства. Причем, задачи можно решать либо со всем классом, либо самостоятельно, в результате, происходит математическое соревнование. Рассматриваемые задачи в данной методике, по мнению Б.Ф. Харитонова, помогают учащимся развивать «геометрическое видение», оттачивать интуицию и учащиеся обучаются планомерному, комплексному анализа чертежа.

Автор приводит в статье два блока задач, используемые при повторении темы «Площади фигур» в 9 классе. Все задачи взаимосвязаны друг с другом. В первом блоке представлено шесть задач, в пятой задачи есть указание. Рассматриваются задачи подготовительного характера, которые создают основу для дальнейшей работы, В зависимости от подготовки учащегося, количество задач может быть различным. Вначале учитель показывает учащимся идею решения задач, а потом, оставшиеся задачи учащимся предлагается решить самостоятельно либо в классе, либо дома.

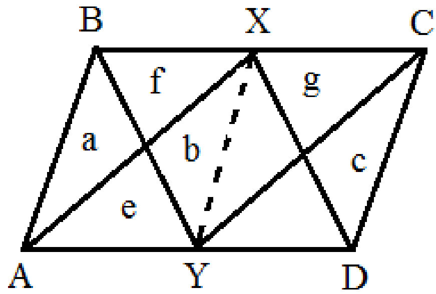


Рис. 31

Рассмотрим задачу 5 из первого блока.

Задача 5 [42]. Параллелограмм при помощи четырех отрезков разбит на несколько частей, площади которых обозначены малыми латинскими буквами a,b,c,d,e,f,g. Проверьте справедливость следующих равенств: 1) $a+c=b$; 2) $f+g=e+d$.

Указание. 1) так как $S_{ABX}+S_{XCD}=S_{BYC}$, то $a+f+g+c=f+g+b \Rightarrow a+c=b$

2) так как $S_{AXD}=S_{BYC}$, то $e+b+d=f+b+g \Rightarrow e+d=f+g$.

Во втором блоке задачи основаны на конфигурации, которая выражает известный геометрический факт: «Если в четырехугольнике $ABCD$ стороны AD и BC параллельны, то треугольники ABO и DCO (O – точка пересечения диагоналей AC и BD четырехугольника) равновелики, и наоборот» (Рис. 31). Второй блок включает четыре задачи с указаниями и чертежами. Рассмотрим задачу 3.

Задача 3 [42]. Дана фигура, ограниченная дугой AC окружности и ломанной ABC, так что дуга и ломаная лежат по разные стороны от прямой AC. Через середину дуги AC провести прямую, делящую площадь фигуры пополам.

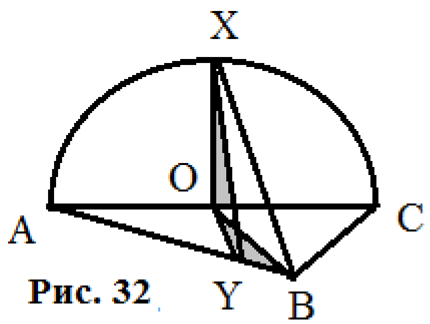


Рис. 32

Указание. Разделим данную фигуру на две равновеликие ломаной XOB, которая поможет найти искомую прямую XY (диагональ трапеции $OYBX$, в которой $OY \parallel XB$) (Рис. 32).

Автор отмечает важность связности двух блоков. Так, например, задача 5 из первого блока может быть использована и во втором блоке. Для ее решения тогда остаточно будет провести прямую XY, это прямая будет разбивать параллелограмм на две трапеции [42].

Таким образом, при обучении учащихся теме «Площади фигур» необходимо уделять внимание формированию у учащихся практических навыков вычисления площадей многоугольников в ходе решения задач, так как это является составной частью задач на многогранники в курсе стереометрии; *понятию равновеликости*, с помощью которого упрощается решение многих задач и происходит углубление общих представлений учащихся о методологических основах геометрии; наглядности объяснения нового материала. Доказательства теорем, свойств учителю следует объяснять самостоятельно, привлекая к ним учащихся, «сильным» ученикам давать на дом самостоятельно разбираться с данными доказательствами.

При обучении учащихся теме «Площадь треугольника» полезно использовать статью В.И. Тараненко [37] для составления задач по теме. Кроме того, в ходе обучения учащихся теме «Площади фигур» не стоит ограничиваться рамками учебных программ: учителю вместе с учащимися можно доказать еще один вариант формулы Герона, когда стороны треугольника выражены числами содержащиеся квадратные корни, про который писал А.Ш. Чавчанидзе [44]; Б.С. Прицкер [30] предлагает использовать для решения задач формулу для нахождения площади произвольных выпуклых четырехугольников; учащимся может быть полезна формула Пика, про которую писали Л.К. Сыяповой и А.А. Темербековой [36] и которая формирует рациональность мышления, а так же дает возможность проверить правильность решение математической задачи. Не стоит забывать о повторении учебного материала при обучении данной теме, как о важном звене учебного процесса, про который отмечал Б.Ф. Харитонов [42].

§7. Задачи в итоговой аттестации учащихся в курсе геометрии основной школы по теме «Площади фигур»

Нами было выделены основные типы задач, которые встречаются в **части 1** в итоговой государственной аттестации по данной теме исследования:

1) задачи на измерение площадей:

Задача 14 [48]. Площадь одной клетки равна 1. Найдите площадь фигуры $ABCD$, изображенной на рисунке 33.

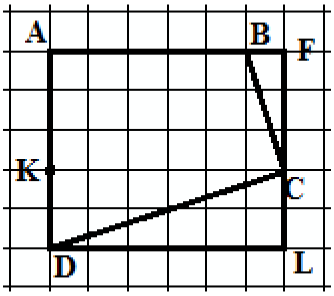


Рис. 33

Решение:

1) дана фигура $ABCD$, достроим эту фигуру до прямоугольника $AFLD$;

2) найдем площадь прямоугольника, $S_{AFLD} = 6 \cdot 5 = 30\ (ед^2)$;

3) ΔBFC - прямоугольный, $S_{BFC} = \frac{1}{2} \cdot BF \cdot FC = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 3 = \frac{3}{2} = 1{,}5\ (ед^2)$;

4) ΔCLD - прямоугольный, $S_{CLD} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 6 = 6\ (ед^2)$;

5) $S_{AKMC} = S_{AFLD} - S_{BFC} - S_{CLD} = 36 - 1{,}5 - 6 = 28{,}5\ (ед^2)$

Ответ: 28,5

2) задачи на вычисление площадей:

Задача 15 [25]. Высота BH параллелограмма $ABCD$ делит его сторону AD на отрезки $AH = 1$ и $HD = 28$. Диагональ параллелограмма BD равна 53. Найдите площадь параллелограмма.

Решение:

1) рассмотрим ΔBHD (Рис. 34), треугольник является прямоугольным, по теореме Пифагора найдём BH:

$BH = \sqrt{53^2 - 28^2} = 45\ (ед)$;

2) найдем площадь параллелограмма $S = BH \cdot AD = BH \cdot (AH + HD) = 45 \cdot 29 = 1305\ (ед^2)$.

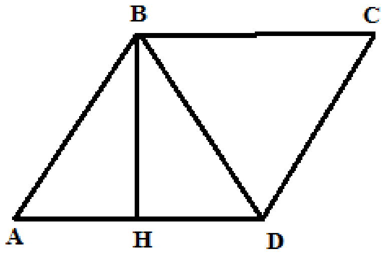


Рис. 34

Ответ: 1305

3) задачи на метод площадей (применение свойства аддитивности площади):

Задача 16 [25]. Из квадрата вырезали прямоугольник (Рис. 35). Найдите площадь получившейся фигуры.

Решение:

1) применим *свойство аддитивности* площади: площадь получившейся фигуры находится по формуле: $S = S_{кв} - S_{прямоуг}$

2) $S_{кв} = 6^2 = 36\ (ед^2)$;

3) $S_{прямоуг} = 4 \cdot 2 = 8\ (ед^2)$;

4) $S = 36 - 8 = 28\ (ед^2)$.

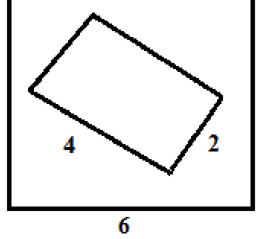


Рис. 35

Ответ: 28

В части первой ОГЭ встречаются все типы задач по теме исследования. Для их решения необходимо знать формулы площади плоских фигур, теорему Пифагора, признаки подобия треугольников.

Выделим основные типы задач **части 2**:

1) задачи на вычисление площадей:

Задача 17 [25]. Боковые стороны AB и CD трапеции $ABCD$ равны соответственно 10 и 26, а основание BC равно 1. Биссектриса угла ADC проходит через середину стороны AB. Найдите площадь трапеции.

Решение:

1) введём обозначения как показано на Рис. 36;

2) дополнительные построения: биссектрису продолжим до пересечения с прямой BC в точке K;

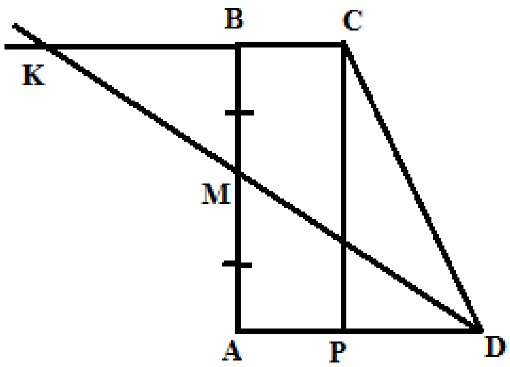


Рис. 36

3) $\angle CDK = \angle ADK$ (как накрест лежащие при параллельных прямых), значит, $\angle CDK = \angle ADK = \angle CKD \Rightarrow \Delta CKD -$ равнобедренный: $KC = CD = 26$;

4) $BK = CK - BC = 26 - 1 = 25$;

5) $\angle KMD = \angle AMD$ (как вертикальные);

6) рассмотрим ΔKMD и ΔAMD: $AM = BM$, $\angle KMD = \angle AMD$ (как вертикальные), $\angle KBM = \angle MAD$ (как накрест лежащие при параллельных прямых) $\Rightarrow$ ΔKMD равен $\Delta AMD \Rightarrow AD = KB = 25$;

7) проведём прямую $CP \parallel AB$;

8) $CP \parallel AB$, $AD \parallel BC \Rightarrow ABCP -$ параллелограмм, откуда $AP = BC = 1$, $CP = AB = 10$;

9) $PD = AD - AP = 25 - 1 = 24$;

10) рассмотрим ΔCPD: $CP^2 + PD^2 = CD^2$, $100 + 576 = 676$, следовательно, по теореме, обратной теореме Пифагора, получаем, что ΔCPD - прямоугольный, следовательно, CP - высота трапеции;

11) найдём площадь трапеции: $S=\frac{BC+AD}{2}\cdot CP=\frac{1+25}{2}\cdot 10=130$.

Ответ: 130.

2) задачи метод площадей (применение свойства аддитивности площади):

- *задачи на доказательство:*

Задача 18 [25]. На средней линии трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC выбрали произвольную точку F. Докажите, что сумма площадей треугольников BFC и AFD равна половине площади трапеции.

Решение:

1) проведём высоту KH через точку E (Рис.37);

2) так как MN – средняя линия, $MN \parallel AD \parallel BC$;

3) $AM=BM \Rightarrow KE=EN$ (по теореме Фаллеса);

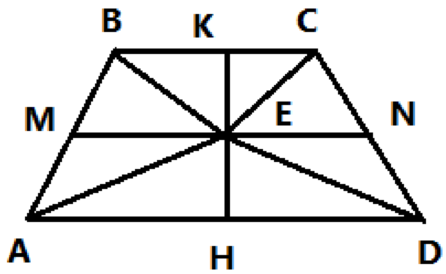


Рис. 37

4) $S_{BCE}=\frac{1}{2}BC\cdot KE$, $S_{AED}=\frac{1}{2}AD\cdot EN$;

5) $S_{BEC}+S_{AED}=\frac{1}{2}BC\cdot KE+\frac{1}{2}AD\cdot EN=\frac{1}{2}BC\cdot EN+\frac{1}{2}AD\cdot EN=\frac{AD+BC}{2}\cdot EN=$

$=\frac{AD+BC}{2}\cdot\frac{KH}{2}=\frac{S_{ABCD}}{2}$. Задача доказана.

3) задачи на метод площадей (применение свойства отношения площадей)

Задача 19 [25]. Медиана BM и биссектриса AP треугольника ABC пересекаются в точке K, длина стороны AC втрое больше длины стороны AB. Найдите отношение площади треугольника ABK к площади четырёхугольника $KPCM$.

Решение:

1) вводим новую переменную: $S_{ABC}=S$;

2) медиана делит треугольник на два равновеликих треугольника, поэтому $S_{ABM}=S_{BMC}=\frac{1}{2}S$ (Рис. 38);

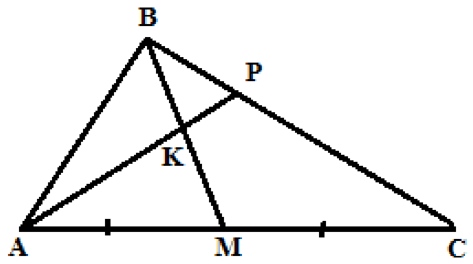


Рис. 38

3) биссектриса делит площадь треугольника пропорционально прилежащим сторонам, то есть: $\frac{S_{ABP}}{S_{APC}}=\frac{AB}{AC}=\frac{1}{3}\Rightarrow S_{ABP}=\frac{1}{4}S$, $S_{APC}=\frac{3}{4}S$;

4) ΔABM : AK – биссектриса $\Rightarrow\frac{S_{ABK}}{S_{AKM}}=\frac{AB}{AM}=\frac{2}{3}$, откуда $S_{ABK}=\frac{2}{3}S_{ABM}=\frac{1}{5}S$, $S_{AKM}=\frac{3}{5}S_{ABM}=\frac{3}{10}S$;

5) $S_{BPK}=S_{ABP}-S_{ABK}=\frac{1}{4}S-\frac{1}{5}S=\frac{1}{20}S$;

6) $\frac{S_{ABK}}{S_{KPCM}}=\frac{S_{AKM}}{S_{BMC}-S_{BPK}}=\frac{\frac{1}{3}S}{\frac{1}{2}S-\frac{1}{20}S}=\frac{1}{5}\cdot\frac{20}{9}=\frac{4}{9}$.

Ответ: $\frac{S_{ABK}}{S_{KPMC}}=\frac{4}{9}$.

Задача 23 [40]. В треугольнике ABC проведены чевианы, которые пересекаются в одной точке и высекают на стороне AB отрезки 5 и 10, а на стороне AC отрезки 12 и 18. Найти длины отрезков, высекаемых на стороне BC, если ее длина 24.

Решение:

1) $S_{ABK}:S_{BKC}=AN:NC=12:18=2:3$ (если треугольники имеют общую сторону, то их площади пропорциональны длинам отрезков, высекаемых продолжением их общей стороны на прямой, соединяющей их вершины) (Рис. 39);

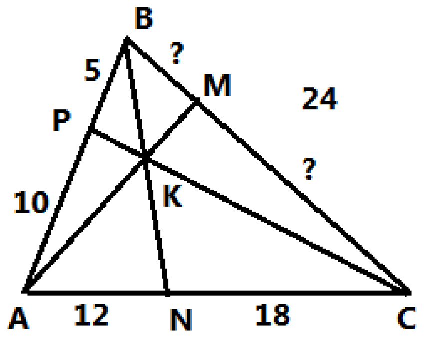


Рис. 39

2) $S_{ACK}:S_{BKC}=AP:PB=10:5=2:1$

3) пусть $S_{ABK} = 2x$, а $S_{BKC} = 3x$, тогда $S_{ACK} = 2 \cdot 3x = 6x$

4) $BM : MC = S_{ABK} : S_{ACK} = 2x : 6x = 1 : 3 \Rightarrow 4x = 24$, $x = 6$

5) $BM = 6$, а $MC = 3 \cdot 6 = 18$

Ответ: $BM = 6, MC = 18$

Во второй части ОГЭ по математике встречаются задачи на вычисление площадей, на метод площадей (применение свойств аддитивности и отношения площадей). Кроме того, в типологии задач на метод площадей имеются задачи на доказательство. Для решения таких задач учащимся требуется особая подготовка. Учащиеся должны знать не только формулы площади фигур, но и понятие равновеликости треугольников, формулы отношений площадей треугольников, понятие чевианы, теорему Фалеса и др.

§8. Системы задач по теме «Площади фигур» в курсе геометрии основной школы

К системам задач существуют различные требования [12; 15; 32 и др.] Так, в учебном пособии Е.И. Лященко [15] выделены требования к системам задач на усвоение понятия и его определения, на усвоение теоремы и ее доказательства, на усвоение правил (алгоритмов). Г.И. Саранцев приводит в [32] требования к системам задач на формирование понятий, на усвоение теоремы и ее доказательства. В результате анализа различных требований к системам упражнений остановимся на следующих требованиях к системам задач по теме «Площадь фигуры»:

1. Задачи по теме должны распределяться по принципу «от простых к сложным».

2. Каждая задача должна адекватно отражать содержание рассматриваемых тем.

3. Предлагаемые задачи должны соответствовать ныне действующим общеобразовательным стандартам.

4. Содержание задач должно быть направлено на привитие умений и навыков, необходимых при вычислении величины площади.

5. Предлагаемые задачи должны быть направлены на применение определенных приемов и методов решения задач по теме «Площадь фигуры», описанный нами выше в §4.

Отметим, что тема «Площадь фигур» включает такие подтемы, как: «Площадь прямоугольника», «Площадь параллелограмма», «Площадь треугольника», «Площадь трапеции», «Площадь правильного многоугольника», «Площадь круга и его частей». Поэтому нами будут составлены системы задач по каждой из указанных тем. Ответы и указания к решению см. Приложение 4.

Система задач на тему «Площадь прямоугольника»

Задача 1 [6, С. 122]. Начертите квадрат и примите его за единицу измерения площадей. Далее начертите: а) квадрат, площадь которого выражается числом 4; б) прямоугольник, отличный от квадрата, площадь которого выражается числом 4.

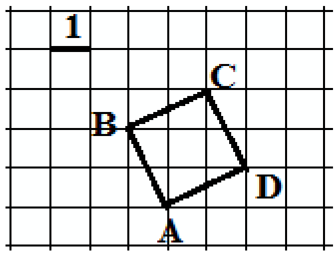


Рис. 40

Задача 2 [25]**.** Площадь одной клетки равна 1. Найдите площадь фигуры $ABCD$, изображенной на рисунке 40.

Задача 3 [34, С. 229]. Как изменится площадь прямоугольника, если его стороны: а) увеличатся в 2 раза; б) уменьшаться в 3 раза; в) изменятся в k раз?

Задача 4 [11, С. 39]**.** В прямоугольнике $ABCD$ сторона $AD = 10$ см. Расстояние от точки пересечения диагоналей до этой стороны равно 3 см. Найдите площадь прямоугольника.

Задача 5 [25]. Найдите площадь прямоугольника, если его периметр равен 60, а отношение соседних сторон равно 4:11.

Задача 6 [34, С. 229]. Найдите площадь фигуры, изображенной на Рис. 41.

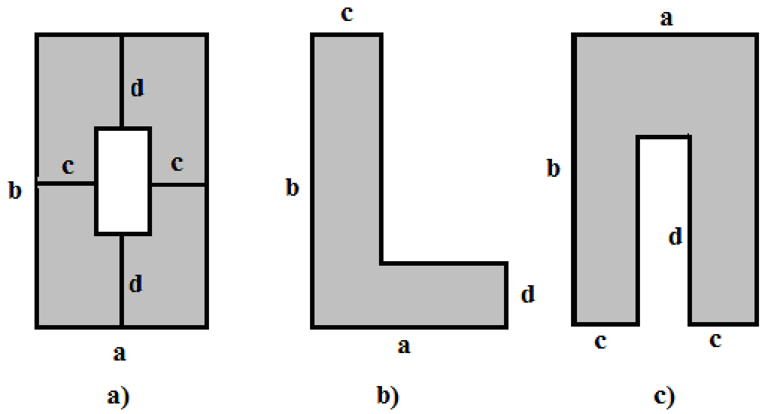


Рис. 41

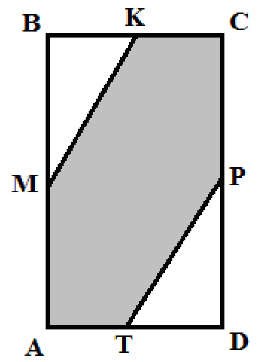


Рис. 42

Задача 7 [11, С. 40]. $ABCD$ – прямоугольник, M, K, P, T – середины сторон, $AB = 16$ см, $AD = 10$ см (Рис. 42).

Задача 8 [28, С. 206]. Во сколько раз площадь квадрата, описанного около окружности, больше площади квадрата, вписанного в ту же окружность?

Задача 9 [6, С. 134]. Докажите, что площадь квадрата, построенного на катете равнобедренного прямоугольного треугольника, вдвое больше площади квадрата, построенного на высоте, проведенной к гипотенузе.

Отметим, что нами представлены такие типы задач по теме «Площадь прямоугольника», как №1, 2 - на измерение; №3-8 – на вычисление, №9 – на доказательство. При решении задач №5 используется метод введения вспомогательного элемента; №6, 7 – метод площадей (свойство аддитивности); №8 – метод площадей (свойство отношения площадей); №9 – прием «инвариантность».

Система задач на тему «Площадь параллелограмма»

Задача 10 [25]. Площадь одной клетки равна 1. Найдите площадь фигуры $ABCD$, изображенной на рисунке 43.

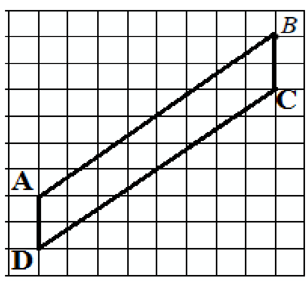


Рис. 43

Задача 11 [25]. Высота BH параллелограмма $ABCD$ делит его сторону AD на отрезки $AH = 1$

и $HD = 28$. Диагональ параллелограмма $BD = 53D$. Найдите площадь параллелограмма.

Задача 12 [11, С. 41]. В параллелограмме одна из сторон равна 10 см, а один из углов $30°$. Найдите площадь параллелограмма, если его периметр равен 56 см.

Задача 13 [9, С. 112]. Площадь параллелограмма равна 70. Найдите периметр этого параллелограмма, если его высоты равны 5 и 7.

Задача 14 [25]. В параллелограмме $ABCD$ проведены высоты BH и BE к сторонам AD и CD соответственно, при этом $BH = BE$. Докажите, что $ABCD$ – ромб.

Задача 15 [28, С. 206]. Квадрат и ромб имеют одинаковые периметры. Какая из фигур имеет большую площадь? Объясните ответ.

Задача 16 [34, С. 232]. Найдите площадь ромба, если его высота равна 12 см, а меньшая диагональ 13 см.

Задача 17 [39]. Каждая диагональ четырехугольника делит его на треугольники одинаковой площади. Докажите, что это параллелограмм.

Отметим, что нами представлены такие типы задач по теме «Площадь параллелограмма», как №10 - на измерение; №11-13, 15, 16 – на вычисление, №14, 17 – на доказательство. При решении задач №14, 16 используется прием «инвариантность»; №15, 17 – метод площадей (свойство отношения площадей).

Система задач на тему «Площадь треугольника»

Задача 18 [34, С. 235]. На Рис. 44 укажите равновеликие треугольники.

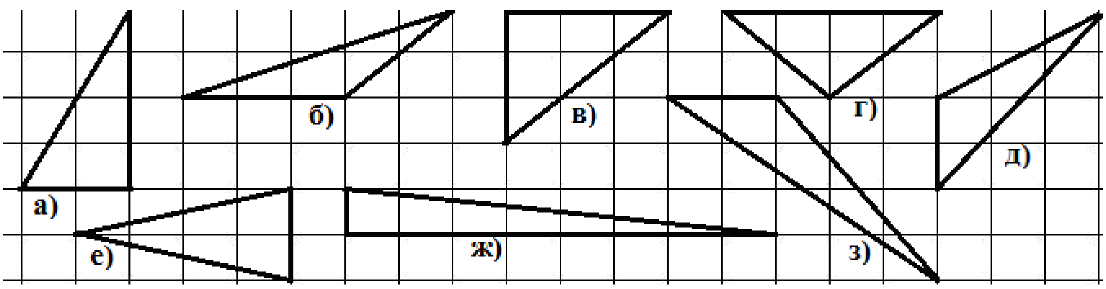


Рис. 44

Задача 19 [25]. В равнобедренном треугольнике боковая сторона равна 10, основание $-10\sqrt{2-\sqrt{2}}$, а угол, лежащий напротив основания, равен $45°$. Найдите площадь треугольника, *деленную на* $\sqrt{2}$.

Задача 20 [25]. Стороны AB и BC треугольника ABC равны 8 и 11, а высота, проведенная к стороне BC, равна 4. Найдите высоту, проведенную к стороне AB.

Задача 21 [34, С. 236]. Докажите, что площадь ромба равна половине произведения его диагоналей.

Задача 22 [28, С. 208]. Найдите радиус r вписанной и радиус R описанной окружностей равнобедренного треугольника с основанием 10 см и боковой стороной 13 см.

Задача 23 [9, С. 100]. Точка M лежит на основании AB равнобедренного треугольника ABC. Найдите площадь этого треугольника, если длины его боковых сторон AC и BC, а расстояние от точки M до этих сторон равны соответственно 2 и 5.

Задача 24 [46, С. 368]. В прямоугольном треугольнике ABC с катетами $BC=a$, $AC=b$ на гипотенузе AC взята точка D так, что $\angle DCA=30°$. Найдите длину отрезка CD.

Задача 25 [28, С. 207]. Найдите высоту треугольника со сторонами $2\frac{1}{12}$, $3\frac{44}{75}$, $1{,}83$, проведенную к стороне $2\frac{1}{12}$.

Задача 26 [9, С. 104]. Найдите площадь прямоугольного треугольника, если сумма длин его катетов равна 11, а сумма их квадратов равна 73.

Задача 27 [11, С. 42]. Площадь параллелограмма $ABCD$ равна Q. Точка M – середина стороны AB, P принадлежит стороне CD. Найдите площадь треугольника AMP.

Задача 28 [9, С. 109]. Высота треугольника ABC и KBC, опущенные на высоту BC, относятся как $7:8$. Найдите площадь треугольника ABC, если она на 13 меньше площади треугольника KBC.

Задача 29 [11, С. 42]. $AO = 3$см, $OB = 6$см, $OC = 5$см, $OD = 4$см. Сумма площадей треугольников AOC и BOD равна 39 $см^2$. Найдите площадь треугольника AOC.

Отметим, что нами представлены такие типы задач по теме «Площадь треугольника», как №18 - на измерение; №19, 20, 22-29 – на вычисление, №21 – на доказательство. При решении задач №20, 25 используется прием «инвариантность»; №21, 23, 24 – метод площадей (свойство аддитивности); №29 – метод площадей (свойство отношения площадей).

Система задач на тему «Площадь трапеции»

Задача 30 [25]. Площадь одной клетки равна 1. Найдите площадь трапеции, изображенной на Рис. 45.

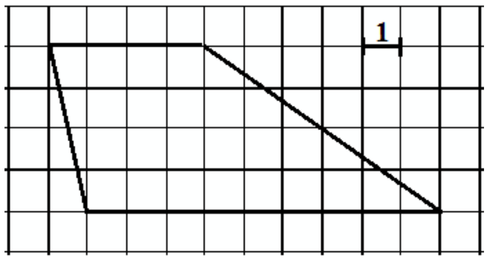


Рис. 45

Задача 31 [34, С. 239]. Основание трапеции равно 26 см, высота 10 см, а площадь 200 см. Найдите второй основание трапеции.

Задача 32 [25; 34, С. 239]. Докажите, что отрезок, соединяющий середины оснований трапеции, делит её на две равные по площади части.

Задача 33 [9, С. 102]. Найдите площадь равнобедренной трапеции $MKPT$, если длина ее высоты KH равна 7, а точка H разбивает большее основание MT на отрезки, длина большего из которых равна 9.

Задача 34 [28, С. 208]. Найдите площадь трапеции, у которой параллельные стороны 60 см и 20 см, а непараллельные – 13 см и 37 см.

Задача 35 [25]. В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC диагонали пересекаются в точке O. Докажите, что площади треугольников AOB и COD равны.

Задача 36 [11, С. 45]. В трапеции $ABCD$ BC и AD- основания. $AD = 10$см, $BC = 5$см, $AC = 9$см, $BD = 12$см. Найдите площадь трапеции.

Задача 37 [25]. В трапеции проведены обе диагонали. Ее основания относятся как 2:3. Площадь всей трапеции равна 75. Найти площади ее кусочков.

Отметим, что нами представлены такие типы задач по теме «Площадь трапеции», как №30 - на измерение; №31, 33, 34, 36, 37 – на вычисление, №32, 35 – на доказательство. При решении задач №32, 35, 36 используется прием «инвариантность»; №33– метод площадей (свойство аддитивности площади); №34, 37 – метод введения вспомогательного элемента; 37 - метод площадей (свойство отношения площадей).

Система задач на тему «Площадь правильного многоугольника»

Задача 38 [6, С. 277]. Найдите площадь правильного $n-$угольника, если $n = 6, r = 9$ см.

Задача 39 [28, С. 193]. В окружность радиусом 4 дм вписан правильный треугольник, на стороне которого построен квадрат. Найдите радиус окружности, описанной около квадрата.

Задача 40 [6, С. 277]. Найдите отношение площадей двух правильных шестиугольников – вписанного в окружность и описанного около неё.

Отметим, что нами описаны такие типы задач по теме «Площадь правильного многоугольника», как №38-40 - на вычисление. При решении задачи №40 используется прием «инвариантность.

Система задач на тему «Площадь круга и его частей»

Задача 41 [34, С. 247]. Найдите площадь сектора круга радиуса R если соответствующий этому сектору центральный угол равен 60 градусов.

Задача 42 [34, С. 247]. Найдите площадь закрашенной фигуры на Рис. 46.

Задача 43 [10, С. 99]. Найдите отношение площади круга, вписанного в квадрат, к площади круга, описанного около этого квадрата.

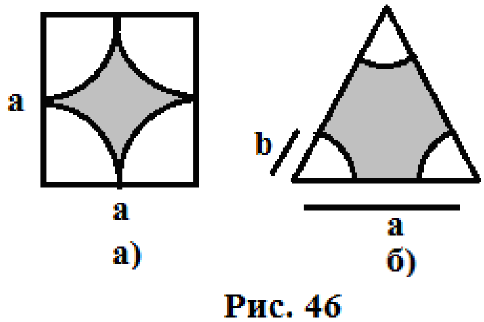


Рис. 46

Задача 44 [6, С. 289]. На сторонах прямоугольного треугольника как на диаметрах построены три полукруга. Докажите, что площадь полукруга, построенного на гипотенузе, равна сумме площадей полукругов, построенных на катетах.

Задача 45 [28, С. 209]. Найдите площадь кругового сегмента с основанием $a\sqrt{3}$ и высотой $\frac{a}{2}$.

Отметим, что нами представлены такие типы задач по теме «Площадь круга и его частей», как №41-43 – на вычисление, №44 – на доказательство. При решении задач №42, 45 используется метод площадей (свойство аддитивности).

§9. Результаты констатирующего эксперимента

Эксперимент проводился на базе МБУ «Школа №21» г.о. Тольятти, в период прохождения преддипломной практики (с 9 по 20 мая 2016 года). В эксперименте участвовало 46 учеников 9-х классов, которые учатся по программе для общеобразовательных классов по учебному пособию Л.С. Атанасяна.

Целью констатирующего эксперимента являлось выявление у учащихся умения решать задачи по теме «Площади фигур», а также умения применять различные методы и приемы решения данных задач. Учащимся была предложена контрольная работа №1 (Приложение 4), в которой представлены следующие *типы задач*:

- на измерение площадей (задача №1);
- на вычисление площадей (задача №2);
- на применение метода площадей (задача №3- 4).

Приведем один из вариантов работы с подробным ходом решения.

1 вариант

Задача 1 [48]. Площадь одной клетки равна 1. Найдите площадь фигуры $AKMC$, изображенной на рисунке 47.

Решение:

1) дана фигура $AKMC$, достроим эту фигуру до квадрата $ABDC$;

2) найдем площадь квадрата, $S_{ABDC} = 6^2 = 36\ (ед^2)$;

3) ΔKBM - прямоугольный, $S_{KBM} = \frac{1}{2} \cdot KB \cdot BM = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 4 = 2\,(ед^2)$;

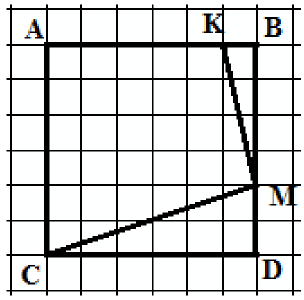


Рис. 47

4) ΔCMD - прямоугольный, $S_{CMD} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 6 = 6\,(ед^2)$;

5) $S_{AKMC} = S_{ABDC} - S_{KBM} - S_{CMD} = 36 - 2 - 6 = 28\,(ед^2)$

Ответ: 28

Задача 2 [40]. Боковая сторона трапеции равна 6, а угол, прилежащий к верхнему основанию равен 120°. Найдите площадь трапеции, если её основания равны 3 и 9.

Решение:

1) $S_{ABCD} = \frac{1}{2}(BC + AD) \cdot CH$;

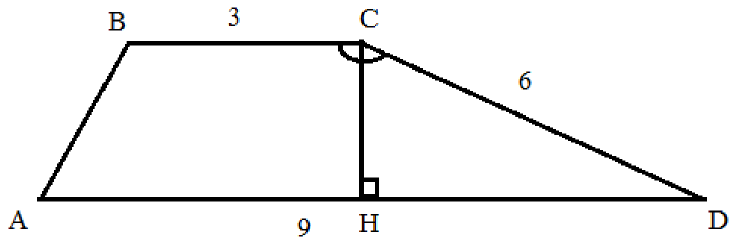


Рис. 48

2) проведем высоту $CH : \Delta CHD -$прямоугольный, так как $\angle CHD = 90°$ (Рис. 48);

3) рассмотрим треугольник CHD: $\angle HCD = \angle BCD - \angle BCH = 120° - 90° = 30°$ $\Rightarrow HD = 3$ как катет лежащий против угла в $30°$;

4) $CH = \sqrt{CD^2 - HD^2} = \sqrt{36 - 9} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$;

5) $S_{ABCD} = \frac{1}{2}(3 + 9) \cdot 3\sqrt{3} = 18\sqrt{3}$.

Ответ: $18\sqrt{3}$

Задача 3 [25]. В треугольнике ABC отмечены середины M и N сторон BC и AC соответственно. Площадь треугольника CNM равна 76. Найдите площадь четырёхугольника $ABMN$.

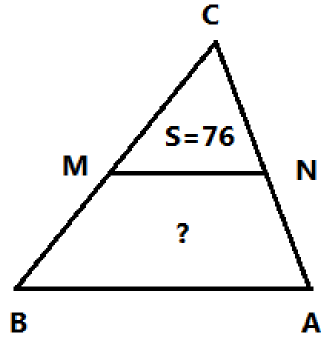


Рис. 49

Решение:

1) MN − средняя линия треугольника ABC (Рис. 49);

2) треугольники ABC и NMC подобны по двум углам;

3) коэффициент подобия $k = 2$, значит

$S_{ABC} = k^2 \cdot S_{NMC} = 4 \cdot 76 = 304$;

4) по свойству аддитивности площади:

$S_{ABMN} = S_{ABC} - S_{NMC} = 304 - 76 = 228$.

Ответ: 228

Задача 4 [25]. Внутри параллелограмма $ABCD$ выбрали произвольную точку E. Докажите, что сумма площадей треугольников BEC и AED равна половине площади параллелограмма.

Решение:

1) проведем отрезок MN перпендикулярный сторонам AD и BC проходящий через точку E (Рис. 50);

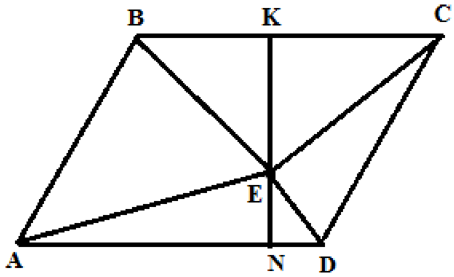


Рис. 50

2) $S_{ABCD} = AD \cdot MN$;

3) $S_{AED} = \frac{1}{2} EN \cdot AD$;

4) $S_{BEC} = \frac{1}{2} ME \cdot BC = \frac{1}{2} ME \cdot AD$;

5) $S_{AED} + S_{BEC} = \frac{1}{2} EN \cdot AD + \frac{1}{2} EK \cdot AD = \frac{1}{2} AD \cdot (EN + EK) = \frac{1}{2} AD \cdot KN = \frac{1}{2} S_{ABCD}$.

Задача доказана.

В задаче 3 и 4 используется свойство аддитивности площади.

Приведем результаты данной контрольной работы (Табл.2).

Таблица 2.

Номер задания	Выполнили верно	Выполнили неверно	Не приступили к заданию
1.	40% (19)	54% (25)	6% (2)
2.	48% (22)	50% (23)	2% (1)
3.	24% (11)	61% (28)	15% (7)
4.	17% (8)	37% (17)	46% (21)

Мы видим, что большие затруднения у учащихся связаны с задачами на применение метода площадей. Так же следует отметить, что задачи на измерение площадей умеют решать лишь 40% учащихся, а на вычисление площадей - 48%; задачи на применение метода площадей решают 24% учащихся; большие затруднения испытывают учащиеся при решении задач на доказательство, решили задачу 17% учащихся, а половину даже не приступили к ее решению.

В результате были выявлены следующие виды ошибок у учащихся.

Задание 1		
Виды ошибок		
Нет подробного объяснения	Вычислительная ошибка	Не правильно записана формула площади
7	1	14
Задание 2		
Виды ошибок		
Нет подробного объяснения	Вычислительная ошибка	Не правильно записана формула площади
1	4	3
Задание 3		
Виды ошибок		
Нет подробного объяснения	Вычислительная ошибка	Не правильно записана формула площади
3	-	1
Задание 4		
Виды ошибок		
Нет подробного объяснения	Вычислительная ошибка	Не правильно записана формула площади
-	-	1

Для более глубокой оценки знаний и умений учащихся на данном этапе эксперимента был применен расчет коэффициента усвоения учебного материала.

Правильный ответ на вопрос оценивался баллом «1», неправильный – «0». Тогда коэффициент усвоения учебного материала, назовем его К, равен:

$$\text{К} = \frac{\textit{Сумма верных ответов}}{4\ (\textit{общее число вопросов})}.$$

При К, равном от 1,00 до 0,90 (или от 100% до 90% правильных ответов), оценка – «5»; при К от 0,80 до 0,70 (или от 80% до 70%), оценка –

«4»; при К от 0,60 до 0,50 (от 60% до 50%), оценка – «3»; наконец, при К ниже 0,50 (50%) – оценка «2». В нашем случае получились следующие результаты (Табл.3):

Таблица 3

Оценка	Количество учеников, получивших данную оценку
«5»	4% (2)
«4»	11% (5)
«3»	24% (11)
«2»	61% (28)

Таким образом, анализ приведенных результатов позволяет сделать вывод о недостаточном уровне умения решать задач по теме «Площади фигур» учащимися. Большие затруднения учащиеся испытывают с задачами на доказательство. Учащиеся плохо знают формулы и основные свойства площадей.

ВЫВОДЫ ПО ВТОРОЙ ГЛАВЕ

1. Разработаны методические рекомендации по обучению теме «Площади фигур». Определено, что при обучении учащихся теме «Площади фигур» необходимо уделять внимание формированию у учащихся практических навыков вычисления площадей многоугольников в ходе решения задач, так как это является составной частью задач на многогранники в курсе стереометрии; *понятию равновеликости*, с помощью которого упрощается решение многих задач и происходит углубление общих представлений учащихся о методологических основах геометрии; наглядности объяснения нового материала.

Доказательства теорем, свойств учителю следует объяснять самостоятельно, привлекая к ним учащихся, «сильным» ученикам давать на дом самостоятельно разбираться с данными доказательствами.

В ходе обучения учащихся теме «Площади фигур» не стоит ограничиваться рамками учебных программ: учителю вместе с учащимися можно доказать еще один вариант формулы Герона, когда стороны треугольника выражены числами содержащиеся квадратные корни; использовать для решения задач с учащимися формулу для нахождения площади произвольных выпуклых четырехугольников, а также формулу Пика, которая формирует рациональность мышления, а так же дает возможность проверить правильность решение математической задачи.

2. Выделены основные типы задач в итоговой аттестации учащихся в курсе геометрии основной школы по теме «Площади фигур». В первой части встречаются задачи: на измерение, на вычисление, на метод площадей (свойство аддитивности). Во второй части встречаются задачи: на вычисление, на доказательство, на метод площадей (свойство аддитивности и отношение площадей).

3. Разработаны системы задач по теме «Площади фигур» в курсе геометрии основной школы. Системы задач представлены по каждой подтеме темы «Площади фигур»: «Площадь прямоугольника», «Площадь параллелограмма», «Площадь треугольника», «Площадь трапеции», «Площадь правильного многоугольника», «Площадь круга и его частей». Каждая система задач подобрана в соответствии с основными знаниями и требованиями, предъявляемые к ученику после окончания изучения темы, а так же рассмотренными приемами и методами, выделенными нами в §4.

4. Проведена контрольная работа у учащихся 9-х классов на базе МБУ «Школа №21», в результате которой можно сделать вывод о недостаточном уровне умения решать задачи по теме «Площади фигур». Так, из 46 человек со всеми заданиями справились только два человека, а не справились – 28 человек, что составляет 61% всех учащихся. Большие затруднения учащиеся испытывают с задачами на доказательство. Учащиеся плохо знают формулы и основные свойства площадей.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сформулируем основные выводы и полученные результаты проведенного исследования.

1. Рассмотрены исторические аспекты развития основных понятий, связанных с площадями фигур. Установлено, что еще 4-5 тысяч лет назад были известны формулы для измерения площадей прямоугольника, треугольника, произвольного четырехугольника, трапеции, круга и его частей. Древние египтяне для измерения площади прямоугольника, треугольника и трапеции пользовались аналогичными приемами, что и мы. У всех народов, кроме древних китайцев, единицей измерения площади была площадь квадрата со стороной равной единице длины; использовались два метода решения задач – методом разложения и методом дополнения.

2. Установлено, что в методической литературе понятие *площади* определяют как *величину* части плоскости, заключенной внутри плоской замкнутой фигуры; через площадь фигуры - как *часть плоскости*, занимаемой этой фигурой; через площадь простого многоугольника - как *число*, определяющее размер части плоскости, ограниченной этим многоугольником.

3. Выделены основные *подходы к* обучению теме «Площади фигур»: через метод разложения; через метод дополнения. Вводить понятие площади прямоугольника можно следующими способами, а именно, с помощью: сравнения площадей; понятие предельного перехода; понятие равносоставленностя. В основе каждого способа введения понятия площади прямоугольника лежит метод разложения. Так же формулы для площади правильного и произвольного многоугольника выводятся на основе метода разложения, площади параллелограмма, треугольника трапеции – на основе метода дополнения.

4. Выделены основные приемы и методы решения геометрических задач по теме «Площади фигур»: метод площадей (свойство аддитивности и отношение площадей), метод введения вспомогательного элемента; прием

эквивалентность отношения длин, сторон и площадей, прием инвариантность, прием метод остатков.

5. Рассмотрены различные технологии обучения теме «Площади фигур»: компьютерная технология, технология индивидуальных образовательных траекторий, технология проблемного обучения.

6. Разработаны методические рекомендации по обучению теме «Площади фигур». Определено, что при обучении учащихся теме «Площади фигур» необходимо уделять внимание формированию у учащихся практических навыков вычисления площадей многоугольников в ходе решения задач, так как это является составной частью задач на многогранники в курсе стереометрии; *понятию равновеликости*, с помощью которого упрощается решение многих задач и происходит углубление общих представлений учащихся о методологических основах геометрии; наглядности объяснения нового материала.

Доказательства теорем, свойств учителю следует объяснять самостоятельно, привлекая к ним учащихся, «сильным» ученикам давать на дом самостоятельно разбираться с данными доказательствами.

В ходе обучения учащихся теме «Площади фигур» не стоит ограничиваться рамками учебных программ: учителю вместе с учащимися можно доказать еще один вариант формулы Герона, когда стороны треугольника выражены числами содержащиеся квадратные корни; использовать для решения задач с учащимися формулу для нахождения площади произвольных выпуклых четырехугольников, а также формулу Пика, которая формирует рациональность мышления, а так же дает возможность проверить правильность решение математической задачи.

7. Выделены основные типы задач, встречающиеся в ОГЭ по теме «Площади фигур». В первой части встречаются задачи: на измерение, на вычисление, на метод площадей (свойство аддитивности). Во второй части встречаются задачи: на вычисление, на доказательство, на метод площадей (свойство аддитивности и отношение площадей).

8. Разработаны системы задач по теме исследования для учащихся 7-9-х классов. Системы задач подобрана для каждой подтемы темы «Площади фигур», согласно порядку изучения темы в курсе геометрии по учебному пособию Л.С. Атанасяна. Системы задач включают в себя: задачи на измерения, задачи на вычисления и задачи, связанные с различными приемами и методами, рассмотренными в параграфе 4.

9. Проведен констатирующий эксперимент, который показал недостаточный уровень умения решать задачи по теме «Площади фигур». Причем наибольшие затруднения испытывают учащиеся с задачами на применения метода площадей.

Все это дает основание считать, что задачи, поставленные в исследовании, полностью решены.

ЛИТЕРАТУРА

1. Абликсанова Ю. Понятие площади. Площадь квадрата // Математика в школе . – 2002 . – № 4 . – С. 23-24.

2. Бескин Н.М. Методика геометрии: учебник для педагогических институтов / Н.М. Бескин. – М.: Государственное учебно-педагогическое издательство Министерства Просвещения РСФСР, 1947. – 278 с.

3. Бурмистрова Т.А. Геометрия. Сборник рабочих программ. 7-9 классы. — М.: 2011. – 95 с.

4. Вальдман И. Методы и приемы решения учебных задач. Геометрия. 8 класс // Математика в школе . – 1999 . – № 39 . – С. 31-32.

5. Геометрия: Методическое пособие для высших педагогических учебных заведений и преподавателей средней школы. Часть 1 / Р.В. Гангнус, Ю.О. Гурвиц (под ред. Проф. Андронова И.К.). – М.: Государственное учено-педагогическое издание, 1934. – 323 с.

6. Геометрия. 7-9 классы: учеб. для общеобразовательных учреждений / [Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев и др.] – 20-е изд. – М. : Просвещение, 2010. – 384 с.

7. Глейзер Г.И. История математики в школе 7-8 кл. Пособие для учителей. – М.: Просвещение, 1982. – 240 с.

8. Далингер В.А. Об одном способе доказательства // Математика в школе . – 1993 . – № 5 . – С. 13-14.

9. Звавич Л.И. Текстовые задачи по геометрии. 8 класс: учебно-методическое пособие / Л.И. Звавич, Е.В. Потоскуев. – М.: Дрофа, 2006. – 253 с.

10. Звавич Л.И. Текстовые задачи по геометрии. 9 класс: учебно-методическое пособие / Л.И. Звавич, Е.В. Потоскуев. – М.: Дрофа, 2006. – 223 с.

11. Зив Б.Г. Задачи по геометрии: Пособие для учащихся 7-11 кл. общеобразоват. учреждений/ Б.Г. Зив, В.М. Мейлер, А.Г. Баханский. – 2-е изд.- М.: Просвещение, 1997. – 271 с.

12. Казакова М.А. Методика изучение площадей геометрических фигур в курсе математики 3-9 классов: Дис. канд. пед. Наук. - Карачаевск, 2006. - 160 с.

13. Карасев П.А. Элементы наглядной геометрии в школе: пособие для учителей / П.А. Карасев. – М.: Государственное учебно-педагогическое издательство Министерства Просвещения РСФСР, 1955. – 212 с.

14. Киселева И.Н., Храмова Н.Н., Родионов М.А. Технология построения индивидуальных образовательных траекторий школьников на уроках математики в условиях введения новых ФГОС // Вестник Пензенского Государственного Университета. – 2014. - №1(5). – С. 7-13. URL: http://elibrary.ru/download/14653756.pdf (дата обращения 11.02.2016).

15. Лабораторные и практические работы по методике преподавания математики: Учеб. пособие для студентов физ.-мат. спец. пед. ин-тов / Е.И. Лященко, К.В. Зобкова, Т.Ф. Кириченко и др.; Под ред. Е.И. Лященко. – М.: Просвещение, 1988. – 223 с.

16. Малых А.Е., Данилова В.И. Влияние геометрической алгебры Древней Греции на развитие математики // Вестник Пермского Университета. Серия: Математика. Механика. Информатика. – 2012. - №2. – С. 76-85. URL: http://elibrary.ru/download/51343972.pdf (дата обращения 11.02.2016).

17. Малых А.Е. Площади геометрических фигур: учеб. пособие / А.Е. Малых, М.И. Глухова: Перм. гос. пед. ун-т. – Пермь, 2011. – 108 с.

18. Методика и технология обучения математике. Курс лекций: пособие для вузов / под научн. Ред. Н.Л. Стефановой, Н.С. Подходовой. – М.: Дрофа, 2005. – 416 с.

19. Методика преподавания математики в восьмилетней школе: Методическое пособие для высших педагогических учебных заведений и преподавателей средней школы / С.А. Гастева, Б.И. Крельштейн, С.Е. Ляпин, М.М. Шидловская. – М.: Просвещение, 1965. – 745 с.

20. Методика преподавания математики в средней школе. Частная методика: Учеб. пособие для студентов пед. ин-тов по физ.-мат. спец. / А.Я. Блох, В. А. Гусев, Г. В. Дорофеев и др.; Сост. В. И. Мишин. - М.: Просвещение, 1987. – 416 с.

21. Методика преподавания математики в средней школе. Частные методики. Учеб пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. ин-тов / Ю. М. Колягин, Г. Л. Луканкин, Е. Л. Мокрушкин, В. А. Оганесян, Л. Ф. Писурин, В. Я. Саннинский. М.: «Просвещение», 1977. – 480 с.

22. Мищенко Т.М. Дидактические материалы и методические рекомендации для учителя по геометрии: 8 класс: к учебнику Л.С. Атанасяна и др. «Геометрия. 7-9 классы». ФГОС (к новому учебнику) / Т.М. Мищенко. – М.: Издательство «Экзамен», 2016. – 174 с.

23. Мищенко Т.М. Дидактические материалы и методические рекомендации для учителя по геометрии: 9 класс: к учебнику Ф.В. Погорелова «Геометрия. 7-9 классы». ФГОС (к новому учебнику) / Т.М. Мищенко. – М.: Издательство «Экзамен», 2015. – 157 с.

24. Мищенко Т.М. Методическое пособие к учебнику И.Ф. Шарыгина «Геометрия. 7-9 классы». ФГОС (к новому учебнику) / Т.М. Мищенко. – М.: Дрофа, 2013. – 368 с.

25. Образовательный портал для подготовки к экзаменам. – URL: https://sdamgia.ru/ (дата обращения 10.04.2016).

26. Овчинникова Е. Е. Использование метода площадей и объемов при решении школьных геометрических задач: Дис. канд. пед. наук. - Москва, 2002. - 133 с.

27. Огурцова Е.Ю. Методические основы построения компьютерной технологии обучения по теме «Площадь» // Научный поиск. – 2011. – №2. – С. 33-35. URL: http://elibrary.ru/download/69986398.pdf (дата обращения 11.02.2016).

28. Погорелов А.В. Геометрия. 7–9 классы : учеб. для общеобразоват. организаций / А. В. Погорелов – 2-е изд. – М. : Просвещение, 2014. – 240 с.

29. Примерная основная образовательная программа основного общего образования. Одобрена решением федерального учебно-методического объединения по общему образованию / М-во образования и науки РФ. – М.: Просвещение, 2015. – 560 с. URL: http://fgosreestr.ru/wp-content/uploads/2015/06.pdf (дата обращения 22.05.2016)

30. Прицкер Б.С. Площадь четырехугольника // Математика в школе. – 1990. – №4. – С. 66-67.

31. Рогановский Н.М. Поисковые задания по геометрии // Математика в школе . – 1990 . – № 5 . – С. 22-26.

32. Саранцев Г.И. Общая методика преподавания математики: Учеб. пособие для студентов мат. спец. пед. вузов и университетов. – Саранск: Тип. «Красс. Окт.», 1999. – 208 с.

33. Сарванова Ж.А. Совокупность задач для обучения учащихся основной школы применению метода площадей при решении геометрических задач // Учебный эксперимент в образовании. – 2015. – №4(76). – С. 34-39. URL: http://elibrary.ru/download/60248391.pdf (дата обращения 8.02.2016).

34. Смирнова И.М. Геометрия. 7-9 классы: учеб. для образоват. учреждений / И. М. Смирнова, В. А. Смирнов. – 3-е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2008. – 376 с.

35. Смирнова И.М. Геометрия. 7-9 классы. Программа и тематическое планирование/ И.М. Смирнова, В.А. Смирнов – Москва, 2012. – 44 с.

36. Сыяпова Л.К. Площадь трапеции – формулой Пика // Информация и образование: Границы коммуникаций. – 2015. - №7. – С. 223-224. URL: http://elibrary.ru/download/15172860.pdf (дата обращения 8.02.2016).

37. Тараненко В.И. В помощь составителям задач по теме «Площадь треугольника» // Математика в школе . – 1993 . – № 3 . – С. 20-22.

38. Темербекова А.А., Чугунов И.В., Байгонакова Г.А. Методика обучения математике: учеб. пособие для студ. высш. учеб. заведений. – Горно-Алтайск: РИО ГАГУ, 2013. – 365 с.

39. Федеральный государственный образовательный стандарт общего основного образования / М-во образования и науки РФ. – М.: Просвещение, 2010. - 50 с. URL: http://минобрнауки.рф/документы/938 (дата обращения 14.04.2016).

40. Федеральный институт педагогических измерений. – URL: http://fipi.ru/ (дата обращения 9.04.2016).

41. Федеральный перечень учебников, рекомендованных к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ начального общего, основного общего, среднего общего образования» / Приказ Министерства образования и науки РФ. – М.: Просвещение, 2014. - 164 с. URL: http://god2015.com/files/Prikaz_253.pdf (дата обращения 01.02.2016).

42. Харитонов Б.Ф. Методика повторения приёмов и методов решения геометрических задач // Математика в школе . – 1990 . – № 4 . – С. 36-38.

43. Ходот Т. Задачи по геометрии. 7-11 классы // Математика в школе . – 1999 . – № 4 . – С. 7.

44. Чавчанидзе А.Ш. Еще один вариант формулы Герона // Математика в школе. – 2000. – №10. – С. 20-21.

45. Чичигин В.Г. Методика преподавания геометрии. Планиметрия: пос. для учителей средн. школы. – М.: Государственное учебн.-педагогич. издательство министерства просвещения РСФСР, 1959. – 392 с.

46. Шарыгин И.Ф. Геометрия. 7-9 кл.: учеб. для общеобразоват. учеб. завед. / И.Ф. Шарыгин. – М. : Дрофа, 2012. – 462 с.

47. Эрленбуш Н.Ю. Приемы решения задач по теме «Площади фигур». 9 класс. [Электронный ресурс]/ Н.Ю. Эрленбруш. – URL: http://festival.1september.ru/articles/553795/ (дата обращения 25.11.2015).

48. Ященко И.В. Математика. 9 класс. ОГЭ. Типовые тестовые задания / И. Р. Высоцкий, Л. О. Рослова, Л. В. Кузнецова и др. под редакцией Ященко И. В., Москва: Издательство «ЭКЗАМЕН», 2015. – 81 с.

Приложение 1

Анализ школьных программ к учебникам по теме «Площади фигур»

А.В. Погорелова, Л.С. Атанасяна, И.М. Смирновой, И.Ф. Шарыгина

Авторы учебников	*Кол-во часов на данную тему*	*Цель изучения темы*	*Содержание темы*
А.В. Погорелов	17 ч	Цель - сформировать у учащихся общее представление о площади и умение вычислять площади фигур. Учащиеся научатся: - иллюстрировать и объяснять основные свойства площади, понятие равновеликости; - выводить формулы площади треугольника и четырехугольников: прямоугольника, у которого длины сторон выражаются рациональными числами, параллелограмма, ромба трапеции; - объяснят формулу площади круга, опираясь на наглядные представления; - формулировать, иллюстрировать и объяснять отношения площадей подобных фигур; - вычислять площади фигур непосредственно применяя формулы площади; - применять при решении задач на вычисления и доказательство: основные свойства площади, понятие равновеликости, формулы площади и треугольника и четырехугольников: прямоугольника, параллелограмма, трапеции, круга, кругового сектора и кругового сегмента, теорему об отношении площадей подобных фигур. Учащиеся получат возможность научиться применять метод площадей при решении задач на вычисления и доказательство.	Понятие площади. Площадь прямоугольника. Площадь параллелограмма. Площадь треугольника. Равновеликие фигуры. Площадь трапеции. Формула для радиусов вписанной и описанной окружностей треугольника. Площади подобных фигур. Площадь круга.
И.М. Смирнова	I - 22 ч II – 20 ч III – 31 ч	I. Учащиеся должны уметь: формулировать определение и иллюстрировать понятие площади фигуры; выводить формулы площадей прямоугольника, параллелограмма, треугольника и трапеции, правильного многоугольника, круга, сектора и сегмента; решать задачи на нахождение площадей плоских фигур. II. Плюс к предыдущим добавляются еще формулировать и решать изопериметрические задачи и задачи на разрезание. III. Ко второму варианту добавляются выполнять проекты, связанные с	I. Понятие площади плоской фигуры. Измерение площадей. Равновеликие и равносоставленные фигуры. Площадь прямоугольника. Площади параллелограмма, треугольника, трапеции. Формула Герона. Площадь многоугольника.

		изопериметрической задачей и решением задач на разрезание.	Площадь правильного многоугольника. Площади круга, сектора и сегмента. Соотношение между площадями подобных фигур. II. Темы, которые изучаются в первом варианте, и еще добавляются *Изопериметрическая задача. *Задачи на разрезание. III. Как и во втором варианте
Л.С. Атанасян	14 ч + 2 ч	Учащиеся должны научиться: - описывать ситуацию, изображенную на рисунке, и наоборот, по описанию ситуации выполнять рисунок, соотносить чертеж и текст; - выделять на чертеже, данном в условии задачи, конфигурации, необходимые для решения задач; - иллюстрировать и объяснять основные свойства площади, понятие равновеликости и равносоставленности; - выводить формулу площади треугольника: традиционную $S=\frac{1}{2}ah_a$ и Герона $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$; - выводить формулу площади четырехугольника: квадрата, у которого длина стороны выражается рациональным числом, прямоугольника, параллелограмма, ромба и трапеции; - иллюстрировать и доказывать Пифагора; - вычислять площади фигур, непосредственно применяя свойства и формулы площади; - применять при решении задач на вычисления и доказательство: основные свойства площади, понятие равновеликости и равносотавленности, формулы площади треугольников и четырехугольников и четырехугольников, теорему Пифагора. Учащиеся получают возможность научиться: - иллюстрировать и доказывать теорему, обратную теорему Пифагора; - применять при решении задач на вычисления и доказательство метод площадей, и теорему, обратную теореме Пифагора.	Изучается в 8 кл. Понятие площади многоугольника. Площади прямоугольника, параллелограмма, треугольника, трапеции. Теорема Пифагора и в 9 классе Площадь круга и его частей.

И.Ф. Шарыгин	18 ч + 2 ч	Учащиеся должны научиться: - формулировать, иллюстрировать и объяснять основные свойства площади, понятие равновеликости; - выводить формулу площади треугольника и четырехугольников: прямоугольника, у которого длины сторон выражаются рациональными числами, параллелограмма, ромба, трапеции; - формулировать, иллюстрировать и объяснять отношения площадей подобных фигур; - применять при решении задач на вычисление и доказательство: основные свойства площади; понятие равновеликости; формулы площади треугольника и четырехугольников: прямоугольника, параллелограмма, ромба, трапеции; теорему об отношении площадей подобных фигур, формулу площади круга, площади кругового сектора и площади кругового сегмента; - вычислять площади круга, кругового сектора кругового сегмента. Учащиеся получат возможность научиться объяснять формулу синуса двойного угла; применять метод площадей при решении задач на вычисление и доказательство.	Изучается в 9 классе. Глава. Площади многоугольников Основные свойства площади. Площадь прямоугольника. Площади треугольника и четырехугольника. Площади в теоремах и задачах. Площадь круга и его частей.

Приложение 2

Таблица для составления упражнений на вычисление площади треугольника

a	b	c	S	h_a	a	b	c	S	h_a	a	b	c	S	h_a
№1					№2					№3				
3	25	26	36	24	4	13	15	24	12	4	53	51	90	45
44	35	75	462	21	95	87	68	2850	60	51	53	100	714	28
10	35	39	168	33,6	50	41	89	420	16,8	95	39	58	456	9,6
№4					№5					№6				
5	5	8	12	3	6	29	25	60	20	7	15	20	42	12
75	73	52	1800	48	77	75	68	2310	60	57	82	89	2280	80
99	89	100	3960	80	65	29	68	936	28,8	28	65	89	546	39
№7					№8					№9				
7	65	68	210	60	8	29	35	84	21	9	10	17	36	8
77	25	74	924	24	84	41	85	1680	40	69	50	73	1656	48
52	51	53	1170	45	25	34	39	420	33,6	100	21	89	840	16,8
№10					№11					№12				
39	41	50	780	40	9	73	80	216	48	10	13	13	60	12
9	65	70	252	56	77	40	51	924	24	92	75	29	966	21
90	17	89	756	16,8	31	68	87	930	60	48	85	91	2016	84
№13					№14					№15				
21	10	17	84	8	11	13	20	66	12	11	25	30	132	24
42	29	29	420	20	52	29	75	546	21	69	29	52	690	20
44	65	87	1386	63	95	97	78	3420	72	88	87	65	2640	60
№16					№17					№18				
12	17	25	90	15	24	13	13	60	5	21	13	20	126	12
48	29	35	504	21	29	60	85	522	36	40	29	29	420	21
76	65	87	2394	63	86	75	97	3096	72	92	85	39	1656	36
№19					№20					№21				
13	40	51	156	24	80	41	41	360	9	30	13	37	180	12
69	61	100	2070	60	13	68	75	390	60	27	29	52	270	20
52	37	39	720	$\approx$27,7	97	73	26	420	$\approx$8,7	74	61	87	2220	60
№22					№23					№24				
14	25	25	168	24	14	61	65	420	60	40	13	37	240	12
35	26	51	420	24	33	34	65	264	16	63	25	52	630	20
26	85	85	1092	84	55	26	51	660	24	96	37	91	1680	35
№25					№26					№27				
28	15	41	126	9	26	15	37	156	12	52	15	41	234	9
75	35	100	1050	28	56	25	39	420	15	63	25	74	756	24
56	61	75	1680	60	35	78	97	1260	72	38	65	87	1140	60
№28					№29					№30				
16	17	17	120	15	44	15	37	264	12	17	25	26	204	24
33	25	52	330	20	24	37	37	420	35	22	85	91	924	84
91	61	100	2730	60	73	51	26	420	$\approx$11,5	57	65	68	1710	60
№31					№32					№33				
28	17	25	210	15	30	17	17	120	8	17	87	100	510	60
25	51	74	300	24	41	50	73	984	48	52	51	25	624	24
66	41	85	1320	40	88	53	75	1980	45	72	37	91	1260	35

№34					№35					№36				
28	17	39	210	15	18	41	41	360	40	19	20	37	114	12
24	35	53	336	28	66	35	53	924	28	39	25	40	468	24
43	61	68	1290	60	78	29	101	780	20	51	41	58	1020	40
№37					№38					№39				
44	17	39	330	15	19	60	73	456	48	51	20	37	306	12
93	34	65	744	16	70	37	37	420	12	12	55	65	198	33
22	61	61	660	60	62	39	85	1116	36	60	17	55	462	15,4
№40					№41					№42				
21	41	50	420	40	51	20	65	408	16	21	61	68	630	60
35	52	73	840	48	38	25	51	456	24	33	41	58	660	40
32	65	65	1008	63	15	61	52	336	44,8	40	17	41	336	16,8
№43					№44					№45				
21	82	89	840	80	48	25	25	168	7	36	25	29	360	20
11	90	97	396	72	33	58	85	660	40	32	53	75	720	45
40	13	45	252	12,6	34	61	75	1020	60	30	5	29	72	4,8

Приложение 3

Решение варианта 2 контрольной работы для проведения констатирующего эксперимента

Задача 1 [25]. Площадь одной клетки равна 1. Найдите площадь фигуры, изображённой на рисунке 1.

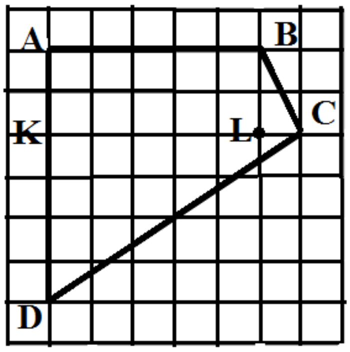


Рис. 1

Решение:

1) $S_{ABCK} = S_{ABLK} + S_{BCL} = 5\cdot 2 + \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 1 = 10 + 1 = 11\,(ед^2)$;

2) $S_{KCD} = \frac{6\cdot 4}{2} = 12\,(ед^2)$;

3) $S_{ABCD} = S_{ABCK} + S_{KCD} = 11 + 12 = 23\,(ед^2)$.

Ответ: $23\,ед^2$

Задача 2 [40]. Боковая сторона трапеции равна 5, а один из прилегающих к ней углов равен $30°$. Найдите площадь трапеции, если её основания равны 3 и 9.

Решение:

1) Рассмотрим ΔABH - равнобедренный: $\angle A = 30°$, $AB = 5 \Rightarrow BH = \frac{1}{2}AB = 2{,}5$ (Рис. 2);

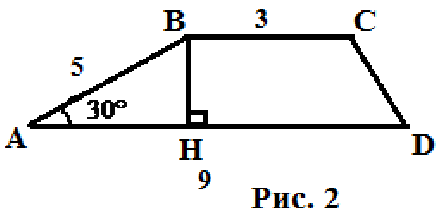


Рис. 2

2) $S_{ABCD} = \frac{1}{2}(3+9)\cdot 2{,}5 = 6\cdot 2{,}5 = 15$.

Ответ: 15.

Задача 3 [25]. В треугольнике ABC проведены медианы, M - точка их пересечения. Найти площадь треугольника ABM, если площадь исходного треугольника ABC равна 9.

Решение:

1) так как треугольники имеют общую вершину A и их основания лежат на одной прямой, то площади треугольников пропорциональны длинам их оснований: $S_{ABA_1} : S_{ACA_1} = 1:1 \Rightarrow S_{ABA_1} = 0{,}5\cdot 9 = 4{,}5$ (Рис. 3);

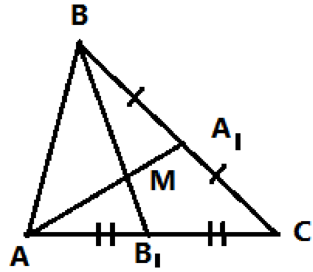


Рис. 3

2) $AM : MA_1 = 2:1$ (по свойству медианы)

$$\Rightarrow S_{ABM} : S_{BMA_1} = 2:1 \Rightarrow S_{ABM} = \frac{2}{3} \cdot 4{,}5 = 3.$$

Ответ: 3

Задача 4 [25]. Внутри параллелограмма *ABCD* выбрали произвольную точку *F*. Докажите, что сумма площадей треугольников *BEC* и *AED* равна половине площади параллелограмма.

Решение:

1) проведем отрезок MN перпендикулярный сторонам AD и BC проходящий через точку F (Рис. 4);

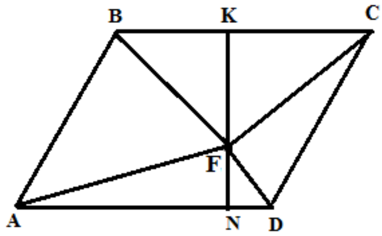


Рис. 4

2) $S_{ABCD} = AD \cdot MN$;

3) $S_{AFD} = \frac{1}{2} FN \cdot AD$;

4) $S_{BFC} = \frac{1}{2} MF \cdot BC = \frac{1}{2} MF \cdot AD$;

5) $S_{AFD} + S_{BFC} = \frac{1}{2} FN \cdot AD + \frac{1}{2} FK \cdot AD = \frac{1}{2} AD \cdot (FN + FK) = \frac{1}{2} AD \cdot KN = \frac{1}{2} S_{ABCD}$.

Задача доказана.

Приложение 4

Ответы и указания решения к системам задач

по теме «Площади фигуры» в курсе геометрии основной школы

Площадь прямоугольника

2. Указание: применить *метод дополнения*. Ответ: $5\,ед^2$.

3. Ответ: а) увеличится в 4 раза; б) уменьшится в 9 раз; в) измениться в k^2 раз.

4. Ответ: 60 $см^2$.

5. 1) найдём стороны прямоугольника. Пусть $AD = x$, тогда $AB = \frac{4}{11}x$;

2) периметр прямоугольника равен $2(x + \frac{4}{11}x) = 60$, $\frac{15}{11}x = 30 \Rightarrow x = 22$;

3) другая сторона равна 8, поэтому $S = 8 \cdot 22 = 176$.

Ответ: 176.

6. а) 1) $S = S_{ABC} - S_{A_1B_1C_1D_1}$ (Рис. 5);

2) $S_{ABCD} = a \cdot b$;

3) $S_{A_1B_1C_1D_1} = A_1D_1 \cdot A_1B_1$, $A_1D_1 = a - 2c$, $A_1B_1 = b - 2d$,

$S_{A_1B_1C_1D_1} = (a-2c)\cdot(b-2d) = ab - 2ad - 2bc + 4cd$;

4) $S = ab - ab + 2ad + 2bc - 4cd = 2ad + 2bc - 4cd$.

Ответ: а) $2ad + 2bc - 4cd$; в) $ac - cd + cb$; с) $ab - ad + 2cd$.

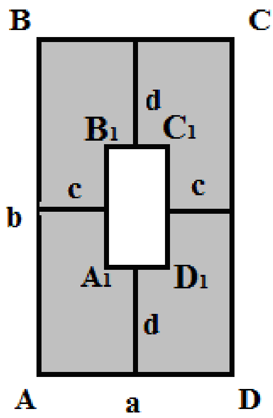


Рис. 5

7. 1) $S_{ABCD} = 10 \cdot 16 = 160$ $см^2$

2) $\Delta MBK = \Delta PDT$ (по двум сторонам и углу между ними), значит $S_{MBK} = S_{PDT} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 5 = 20\ см^2$;

3) $S_{AMKCPT} = S_{ABCD} - 2S_{MBK} = 160 - 40 = 120$ $см^2$

Ответ: 120 $см^2$

8. Ответ: в 2 раза.

9. 1) пусть $CD = a$, тогда $S_{ABCD} = a^2$ (Рис. 6);

2) рассмотрим ΔCDK – равнобедренный и прямоугольный, $CK = a\sqrt{2}$, $S_{CDK} = \frac{1}{2}a^2$, с другой стороны $S_{CDK} = DH \cdot CK = DH \cdot a\sqrt{2}$, тогда $DH \cdot a\sqrt{2} = \frac{a^2}{2}$, $DH = \frac{a}{\sqrt{2}}$;

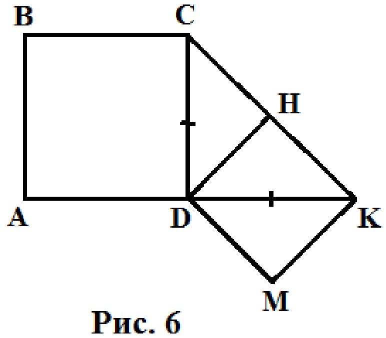


Рис. 6

3) $S_{DHKM} = \frac{a^2}{2}$, $S_{ABCD} = a^2$. Задача доказана.

Площадь параллелограмма

10. Ответ: 16

11. Ответ: 1305

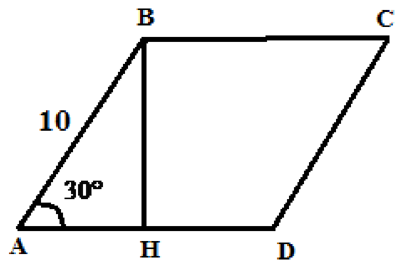


Рис. 7

12. 1) $P = 2 \cdot (AB + AD) = 56$, $AD = 46$ см (Рис. 7);

2) ΔABH – прямоугольный, $BH = 5$ см;

3) $S_{ABCD} = BH \cdot AD = 5 \cdot 46 = 230$ $см^2$.

Ответ: 230

13. 1) $S_{ABCD} = BH \cdot AD = 5 \cdot AD = 70$, $AD = 14$ (Рис. 8);

2) $S_{ABCD} = DE \cdot AB = 7 \cdot AB = 70$, $AB = 10$;

3) $P_{ABCD} = 2 \cdot (AB + AD) = 2 \cdot (10 + 14) = 48$ см.

Ответ: 48

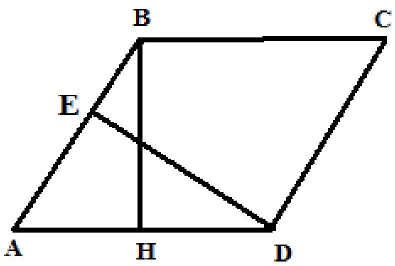


Рис. 8

14. 1) $S_{ABCD} = BH \cdot AD$, $S_{ABCD} = BE \cdot CD$;

2) $BH \cdot AD = BE \cdot CD$, по условию $BH = BE$, значит $AD = CD \Rightarrow ABCD$ – ромб. Задача доказана.

15. 1) $P_{ромба} = P_{квадрата}$, значит сторона ромба равна стороне квадрата, обозначим ее за a;

2) $S_{кв} = a^2$, $S_p = a^2 \cdot \sin\alpha$;

3) $\frac{S}{S} = \frac{a^2}{a^2 \cdot \sin\alpha} = \frac{1}{\sin\alpha}$, $\sin\alpha < 1$, значит $S_{кв} > S_p$.

Ответ: $S_{кв} > S_p$

16. 1) рассмотрим ΔABD (Рис. 9):

$S_{ABD} = BH \cdot AD = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot AD = 6 \cdot AD$,

$S_{ABD} = \frac{1}{2} AO \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot 13 \cdot AO = 6{,}5 \cdot AO$;

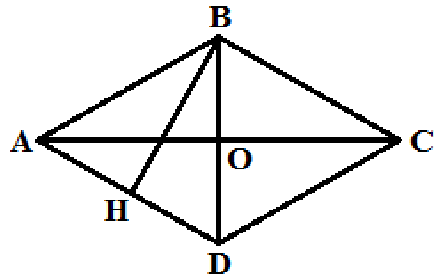


Рис. 9

2) $6 \cdot AD = 6{,}5 \cdot AO$, $AD = \frac{6{,}5AO}{6}$;

3) рассмотрим ΔAOD – прямоугольный: $AD^2 = AO^2 + OD^2$,

$(\frac{6{,}5AO}{6})^2 = AO^2 + 6{,}5^2$, $\frac{42{,}25}{36} AO^2 - \frac{36}{36} AO^2 = 42{,}25$, $\frac{6{,}25}{36} AO^2 = 42{,}25$, $AO = 15{,}6$ см

4) $AD = \frac{6{,}5 \cdot 15{,}6}{6} = 16{,}9$ см;

5) $S_{ABCD} = 12 \cdot 16{,}9 = 202{,}8$ $см^2$

Ответ: 202,8

17. 1) По условию, $S_1 + S_2 = S_3 + S_4$ (Рис. 10);

$S_1 + S_4 = S_3 + S_2 \Rightarrow S_1 = S_3$, $S_2 = S_4$;

2) $\frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{1}{2} AO \cdot OB \cdot \sin \angle AOB}{\frac{1}{2} CO \cdot OB \cdot \sin \angle COB} = \frac{AO \cdot \sin \angle AOB}{CO \cdot \sin(180° - \angle AOB)} = \frac{AO \cdot \sin \angle AOB}{CO \cdot \sin \angle AOB} = \frac{AO}{CO}$;

3) $\frac{S_3}{S_4} = \frac{\frac{1}{2} CO \cdot OD \cdot \sin \angle COD}{\frac{1}{2} AO \cdot OD \cdot \sin \angle AOD} = \frac{CO \cdot \sin \angle COD}{AO \cdot \sin(180° - \angle COD)} = \frac{CO \cdot \sin \angle COD}{AO \cdot \sin \angle COD} = \frac{CO}{AO}$;

4) Так как площади относятся, как длины оснований, то высоты треугольников AOB, BOC, COD, AOD равны;

5) Так как $S_1 = S_3$ и $S_2 = S_4 \Rightarrow \frac{AO}{CO} = \frac{OC}{AO} \Rightarrow AO = OC$;

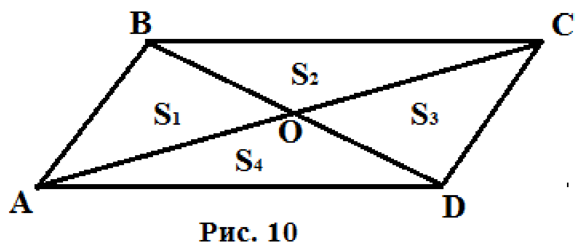


Рис. 10

6) Аналогично доказывается и то, что $BO = OD$;

7) $AO = OC$, $BO = OD$, то есть диагонали четырехугольника точкой пересечения делятся пополам, а это значит, что $ABCD$ – параллелограмм.

Задача доказана.

Площадь треугольника

18. Ответ: а), г), е), ж), з) и б), д).

19. 1) $S = \frac{1}{2}\cdot 10\cdot 10\cdot \sin 45° = 50\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 25\sqrt{2}$, $\frac{S}{\sqrt{2}} = \frac{25\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 25$.

Ответ: 25.

Примечание: Площадь треугольника можно найти по формуле Герона.

20. 1) Выразим площадь треугольника, через высоту AH, $S_{ABC} = \frac{1}{2}AH\cdot BC$ (Рис. 11);

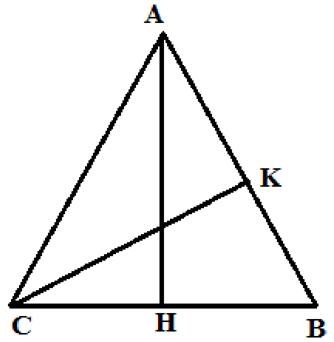


Рис. 11

2) Выразим площадь через высоту CK, $S_{ABC} = \frac{1}{2}\cdot CK\cdot AB$;

3) Приравняем полученные площади: $\frac{1}{2}\cdot AH\cdot BC = \frac{1}{2}\cdot CK\cdot AB$, $22 = CK\cdot 4$, $CK = 5{,}5$

Ответ: 5,5

21. 1) $S_{ABC} = \frac{1}{2}BO\cdot AC$, $S_{ADC} = \frac{1}{2}DO\cdot AC$ (Рис. 12);

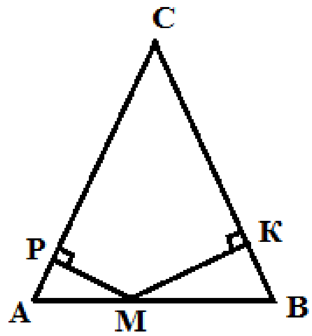


Рис. 12

2) $S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ADC} = \frac{1}{2}BO\cdot AC + \frac{1}{2}OD\cdot AC =$

$= \frac{1}{2}AC\cdot(BO+OD) = \frac{1}{2}AC\cdot BD$. Задача доказана.

22. 1) $p = \frac{10+13+13}{2} = 18$ см;

2) $S_{\Delta} = \sqrt{p(p-a)(p-b)^2} = \sqrt{18\cdot 5\cdot 5\cdot 8} = 60\ см^2$;

3) $R = \frac{abc}{4S} = \frac{13\cdot 13\cdot 10}{4\cdot 60} = \frac{169}{24}$ см, $r = \frac{2S}{a+b+c} = \frac{2\cdot 60}{36} = \frac{10}{3}$ см.

Ответ: $\frac{169}{24}$ см, $\frac{10}{3}$ см

23. 1) Рассмотрим ΔACM: MP – высота, $S_{ACM} = \frac{1}{2}MP\cdot AC$;

2) рассмотрим ΔBMC: MK – высота, $S_{BCM} = \frac{1}{2}MK\cdot CB$;

3) $S_{ABC} = S_{ACM} + S_{BCM} = \frac{1}{2}MP \cdot AC + \frac{1}{2}MK \cdot CB = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 12 + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 12 = 12 + 30 = 42$

Ответ: 42.

24. 1) CD – общая сторона треугольников DAC и BDC (Рис. 13);

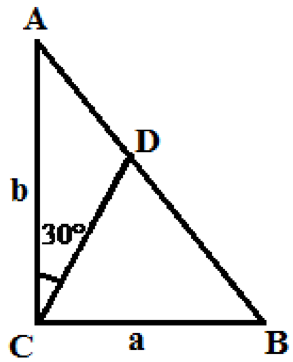


Рис. 13

2) $S_{DAC} = \frac{1}{2}b \cdot CD \cdot \sin\angle 30° = \frac{1}{2}b \cdot CD \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}b \cdot CD$;

3)

$S_{BDC} = \frac{1}{2}a \cdot CD \cdot \sin\angle(90-30)° = \frac{1}{2}a \cdot CD \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{4}a \cdot CD \cdot \sqrt{3}$;

4) $S_{ACB} = \frac{1}{2}ab$;

4) $S_{ACB} = S_{DAC} + S_{BDC} = \frac{1}{4}b \cdot CD + \frac{1}{4}a \cdot CD \cdot \sqrt{3} = \frac{1}{4}CD(b + a\sqrt{3})$;

5) приравниваем формулы площади треугольника ACB, и получаем: $\frac{1}{2}ab = \frac{1}{4}CD \cdot (b + a\sqrt{3})$, выражаем из данного равенства отрезок CD: $CD = \frac{2ab}{b + a\sqrt{3}}$

Ответ: $\frac{2ab}{b + a\sqrt{3}}$

25. 1) $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, $S = \frac{1}{2}ah$;

2) $p = \frac{2\frac{1}{12} + 3\frac{44}{75} + 1{,}83}{2} = \frac{2\frac{25}{300} + 3\frac{176}{300} + 1\frac{249}{300}}{2} = \frac{7\frac{150}{300}}{2} = \frac{15}{4}$;

3) $S = \sqrt{\frac{15}{4} \cdot (\frac{15}{4} - 2\frac{1}{12}) \cdot (\frac{15}{4} - 3\frac{44}{75}) \cdot (\frac{15}{4} - 1\frac{83}{100})} = \sqrt{\frac{15}{4} \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{49}{300} \cdot \frac{192}{100}} = \frac{5 \cdot 7 \cdot 24}{2 \cdot 3 \cdot 100} =$

$= \frac{7}{5} = 1{,}4$;

4) $S = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2} \cdot 2\frac{1}{12} \cdot h = \frac{25}{24} \cdot h$;

5) приравниваем две формулы площади треугольника: $\frac{25}{24}h = \frac{7}{5}$, $h = 1\frac{43}{125} = 1{,}344$.

Ответ: 1,344

26. 1) $\begin{cases} a+b=11 \\ a^2+b^2=73 \end{cases}$; $\begin{cases} a=11-b \\ a^2+b^2=73 \end{cases}$; $\begin{cases} a=11-b \\ (11-b)^2+b^2=73 \end{cases}$; $\begin{cases} a=11-b \\ b^2-11b+24=0 \end{cases}$;

$\begin{cases} a_1=3, a_2=8 \\ b_1=8, b_2=3 \end{cases}$

$b^2-11b+24=0$

$D=121-4\cdot 24=25$

$b_{1,2}=\dfrac{11\pm 5}{2}$

$b_1=8$, $b_2=3$;

2) $S=\dfrac{1}{2}\cdot 8\cdot 3=12$.

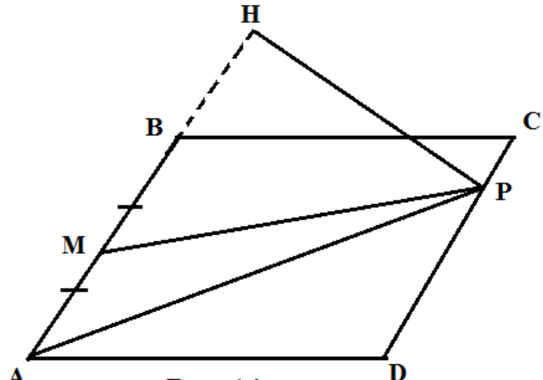


Рис. 14

Ответ: 12

27. 1) Построим высоту PH к стороне AB параллелограмма (Рис. 14);

2) $S_{ABCD}=PH\cdot AB=Q$;

3) $S_{AMP}=\dfrac{1}{2}PH\cdot AM$, а $AM=\dfrac{1}{2}AB \Rightarrow$

$S_{AMP}=\dfrac{1}{2}PH\cdot\dfrac{1}{2}AB=\dfrac{1}{4}PH\cdot AB$;

4) $S_{AMP}=\dfrac{1}{4}S_{ABCD}=\dfrac{1}{4}Q=0{,}25Q$

Ответ: $0{,}25Q$.

28. 1) $S_{KBC}-S_{ABC}=13$, $S_{ABC}=\dfrac{1}{2}AH\cdot BC$,

$S_{KBC}=\dfrac{1}{2}KL\cdot BC$ (Рис. 15);

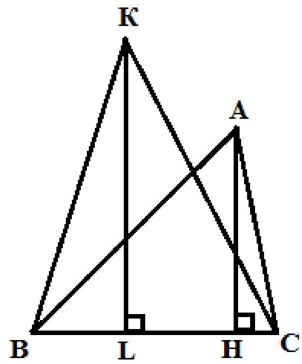


Рис. 15

2) $\dfrac{AH}{KL}=\dfrac{7}{8}\Rightarrow KL=\dfrac{8}{7}AH$;

3) $\dfrac{1}{2}KL\cdot BC-\dfrac{1}{2}AH\cdot BC=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{8}{7}AH\cdot BC-\dfrac{1}{2}AH\cdot BC=\dfrac{4}{7}AH\cdot BC-\dfrac{1}{2}AH\cdot BC=$

$=(\dfrac{8-7}{14})\cdot AH\cdot BC=\dfrac{1}{14}AH\cdot BC=13$, $AH\cdot BC=13\cdot 14$;

4) $S_{ABC}=\dfrac{1}{2}AH\cdot BC=\dfrac{1}{2}\cdot 13\cdot 14=91$.

Ответ: 91

29. 1) $S_{AOC}+S_{BOD}=39см^2$;

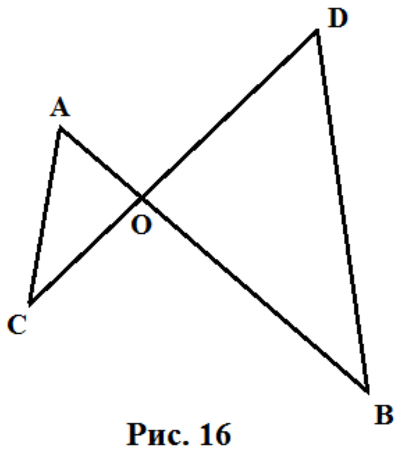


Рис. 16

2) $S_{AOC}=\frac{1}{2}OA\cdot OC$, а $S_{BOD}=\frac{1}{2}OB\cdot OD$ (Рис. 16);

3) $\frac{S_{AOC}}{S_{BOD}}=\frac{\frac{1}{2}OA\cdot OC\cdot}{\frac{1}{2}OB\cdot OD}=\frac{OA\cdot OC}{OB\cdot OD}=\frac{3\cdot 5}{6\cdot 4}=\frac{5}{8}$

$\Rightarrow S_{BOD}=\frac{8}{5}S_{AOC}$;

4) $S_{AOC}+\frac{8}{5}S_{AOC}=39$, $\frac{13}{5}S_{AOC}=39$, $S_{AOC}=39\cdot\frac{5}{13}=15\ см^2$

Ответ: $15см^2$.

Площадь трапеции

30. Ответ: 26

31. Ответ: 14

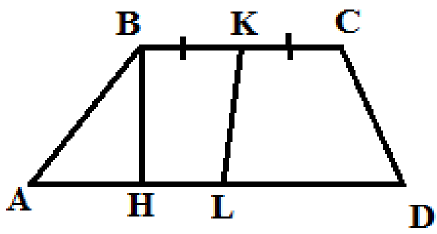


Рис. 17

32. 1) $S_{ABKL}=\frac{1}{2}(BK+AL)\cdot BH$,

$S_{LKCD}=\frac{1}{2}(KC+LD)\cdot BH$ (Рис. 17);

2) $\frac{1}{2}(BK+AL)\cdot BH=\frac{1}{2}(KC+LD)\cdot BH$, $BK=KC$, а $AL=LD$ (по условию) $\Rightarrow S_{ABKL}=S_{LKCD}$. Задача доказана.

33. 1) Проведем прямую $KL\parallel PT$, четырехугольник $KPTL$ – параллелограмм, так как $KP\parallel LT, KL\parallel PT$ (Рис. 18);

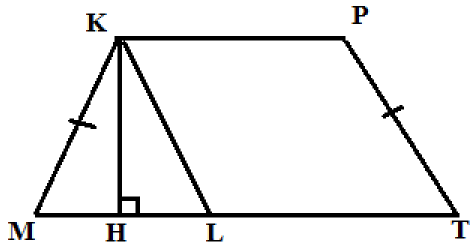


Рис. 18

2) ΔMKL – равнобедренный, так как $MK=PT$, а $PT=KL$;

3) $S_{AKPT}=S_{MKL}+S_{KPTL}=\frac{1}{2}KH\cdot ML+KH\cdot LT=$

$=\frac{1}{2}\cdot 7\cdot ML+7\cdot LT=7\cdot(\frac{1}{2}ML+LT)=7\cdot(HL+LT)=7HT=7\cdot 9=63$

Ответ: 63

34. 1) $S_{ABCD}=\frac{1}{2}(BC+AD)\cdot BH$ (Рис. 19);

2) Пусть $AH = x$, $BC = HK = 20$, тогда $KD = 40 - x$;

3) ΔABH – прямоугольный, $BH^2 = 169 - x^2$;

4) ΔCDK – прямоугольный, $CK^2 = 1369 - (40 - x)^2 = -231 + 80x - x^2$;

5) так как $BH^2 = CK^2$, то $169 - x^2 = -231 + 80x - x^2$, $x = 5$;

6) $BH^2 = 169 - 25 = 144$, $BH = 12$ см;

7) $S_{ABCD} = \frac{1}{2}(20 + 60) \cdot 12 = 480\ см^2$

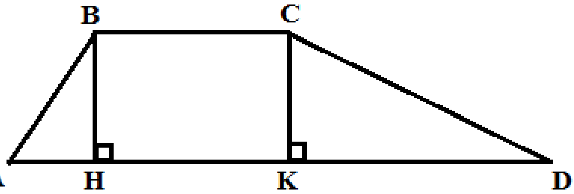


Рис. 19

Ответ: 480

35. 1) рассмотрим ΔABD и ΔACD: высота и основание AD у треугольников общая, значит $S_{ABD} = S_{ACD}$;

2) $S_{ABD} = S_{AOB} + S_{AOD}$, $S_{ACD} = S_{COD} + S_{AOD}$, приравняв площади получим, что $S_{AOB} = S_{COD}$. Задача доказана.

36. 1) Дополнительные построения (рис. 20): проведем прямую $CL \parallel BD$;

2) Рассмотрим четырехугольник $BCLD$: $BC \parallel LD$, а $CL \parallel BD$ $\Rightarrow BCLD$ – параллелограмм, значит $LD = 5$, а $CL = 12$;

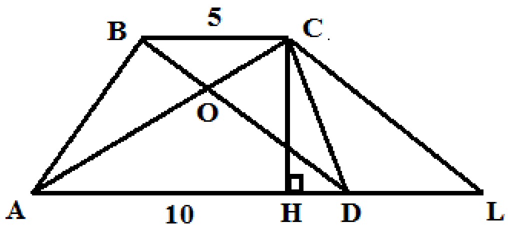


Рис. 20

3) Рассмотрим ΔACL: $AL = AD + LD = 15$, $AL^2 = AC^2 + CL^2$, $15^2 = 9^2 + 12^2$, $225 = 81 + 144$, $225 = 225$, по теореме, обратной теореме Пифагора получаем, что ΔACL – прямоугольный;

4) CH – высота ΔACL и искомой трапеции $ABCD$;

5) $S_{ACL} = \frac{1}{2} CH \cdot AL = \frac{1}{2} AC \cdot CL$, $\frac{1}{2} CH \cdot 15 = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 12$, $CH = 6 \cdot 9 \cdot \frac{2}{15} = \frac{36}{5}$, $CH = \frac{36}{5}$;

6) $S_{ABCD} = \frac{(BC + AD)}{2} \cdot CH = \frac{(5+10)}{2} \cdot \frac{36}{5} = \frac{15}{2} \cdot \frac{36}{5} = 3 \cdot 18 = 54\ см^2$

Ответ: $54 см^2$

37. 1) ΔAOD подобен ΔCOB с коэффициентом 2:3. Отсюда следует, что $S_{BOC} : S_{AOD} = 4:9$ (Рис. 21);

2) Площади ΔABD и ACD одинаковы, ΔAOD их общая часть, поэтому ΔAOB и ΔCOD равны.

3) Вся площадь трапеции равна 74. Из коэффициента подобия $S_{BOC}:S_{AOD}=4:9$ следует взять $S_{BOC}=4y$,а $S_{AOD}=9y$. А площадь ΔAOB и $\Delta COD=z$ соответственно.

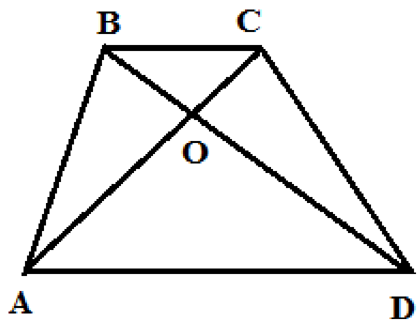


Рис. 21

3) Используем отношение площадей: $\frac{S_{ABO}}{S_{BOC}}=\frac{AO}{OC}=\frac{S_{AOD}}{S_{DOC}}\Rightarrow\frac{z}{4y}=\frac{9y}{z}$, выражаем $z=\sqrt{4y\cdot 9y}=6y$

4) Таким образом, $4y+6y+6y+9y=25y=75$, $y=3\Rightarrow S_{ABO}=S_{COD}=6\cdot 3=18$, $S_{ADO}=9\cdot 3=27$, $S_{COA}=4\cdot 3=12$

Ответ: $S_{ABO}=S_{COD}=18$, $S_{ADO}=27$, $S_{COA}=12$

Площадь правильного многоугольника

38.1) $S=\frac{1}{2}P\cdot r=\frac{1}{2}\cdot n\cdot a_n\cdot r$, $a_n=2R\cdot\sin\frac{180^\circ}{n}$, $r=R\cdot\cos\frac{180^\circ}{n}$;

2) Правильный шестиугольник состоит из шести равносторонних треугольников, значит $a=R$;

3) $r=R\cdot\cos 30^\circ=a\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$, $a\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=9$, $a=6\sqrt{3}$;

4) $S=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 6\sqrt{3}\cdot 9=162\sqrt{3}$.

Ответ: $162\sqrt{3}$

39. $2\sqrt{6}$ дм

40. 1) $S=\frac{1}{2}P\cdot r=\frac{1}{2}\cdot n\cdot a_n\cdot r$;

2) во вписанном многоугольнике $R=a$, $S_\Delta=\frac{1}{2}a^2\cdot\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$, значит $S_{впис}=6\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot a^2=\frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot R^2$;

3) в описанном многоугольнике $R = h_a$, $S_\Delta = \frac{1}{2}a \cdot h = \frac{1}{2}a \cdot R$,

$S_\Delta = \frac{1}{2}a^2 \sin 60° = \frac{\sqrt{3} \cdot a^2}{4}$;

4) $\frac{1}{2}a \cdot R = \frac{\sqrt{3} \cdot a^2}{4}$, $a = \frac{2\sqrt{3}}{3}R$, значит $S_{опис} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot R^2 = 2\sqrt{3}R^2$;

5) $\frac{S}{S} = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}R^2}{2\sqrt{3}R^2} = \frac{3}{4}$

Ответ: $3:4$

Площадь круга и его частей

41. а) $\frac{\pi R^2}{60}$

42. Ответ: а) $a^2(1 - \frac{\pi}{4})$, б) $\frac{a^2\sqrt{3} - 2\pi b^2}{4}$

43. Ответ: $1:2$

44. Доказать: $S_1 = S_2 + S_3$ (Рис. 22).

1) $S_1 = \frac{\pi \cdot c^2}{4}$, $S_2 = \frac{\pi \cdot b^2}{4}$, $S_3 = \frac{\pi \cdot ca^2}{4}$;

2) $\frac{\pi \cdot c^2}{4} = \frac{\pi \cdot b^2}{4} + \frac{\pi \cdot a^2}{4} \mid \cdot \frac{4}{\pi}$

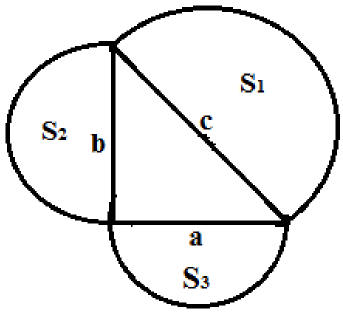


Рис. 22

$c^2 = b^2 + a^2$ (по теореме Пифагора данное равенство верно). Задача доказана.

45. 1) $S_{сегм} = S_{сетора} - S_{AOC} = \frac{\pi R^2 \varphi}{360} - \frac{1}{2}AO \cdot OC \cdot \sin\varphi$;

2) $AC = a\sqrt{3}$, $BD = \frac{a}{2}$, ΔAOC – равнобедренный, так как $AO = OC = R$, OB – высота, $AB = BC$ (Рис. 23);

3) рассмотрим ΔAOB: $AO = R$, $AB = \frac{a\sqrt{3}}{2}$,

$OB = OD - BD = R - \frac{a}{2}$; $AO^2 = AB^2 + OB^2$,

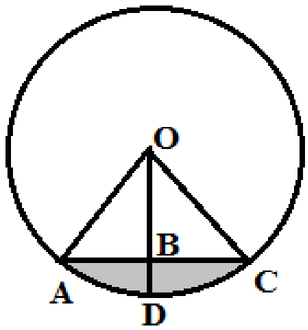


Рис. 23

$R^2 = (\frac{a\sqrt{3}}{2})^2 + (R - \frac{a}{2})^2$, $R^2 = \frac{3a^2}{4} + R^2 - aR + \frac{a^2}{4}$, $aR = a^2$, $R = a$;

4) по теореме косинусов: $AC^2 = AO^2 + OC^2 - 2AO \cdot OC \cdot \cos\angle AOC$, подставляем значения в формулу и получаем, $3a^2 = a^2 + a^2 - 2a^2 \cos\angle AOC$, $\cos\angle AOC = \frac{a^2}{-2a^2} = -\frac{1}{2}$, $\angle AOC = 120°$;

5) $S_{сегм} = \frac{\pi R^2 \varphi}{360} - \frac{1}{2} AO \cdot OC \cdot \sin\varphi = \frac{\pi a^2 \cdot 120°}{360°} - \frac{1}{2} a^2 \cdot \sin 120° = \frac{\pi a^2}{3} - \frac{a^2}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} =$

$= (\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}) \cdot a^2$.

Ответ: $(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}) \cdot a^2$