МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Тольяттинский государственный университет»

Институт математики, физики и информационных технологий
(наименование института полностью)
Кафедра «Высшая математика и математическое образование»
(наименование кафедры)

44.03.01 «Педагогическое образование»
(код и наименование направления подготовки, специальности)
«Математика»
(направленность (профиль)/специализация)

БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА

на тему **«МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ ОЛИМПИАДНЫХ ЗАДАЧ ПО ТЕМЕ «ПЕРЕСТАНОВКИ. РАЗМЕЩЕНИЯ. СОЧЕТАНИЯ» В КУРСЕ МАТЕМАТИКИ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ»**

Студент С.С. Кислякова ____________
(И.О. Фамилия) (личная подпись)

Руководитель Н.Н. Кошелева ____________
(И.О. Фамилия) (личная подпись)

Консультант С.А. Гудкова ____________
(И.О. Фамилия) (личная подпись)

Допустить к защите

Заведующий кафедрой д.п.н., профессор, Р.А. Утеева ____________
(ученая степень, звание, И.О. Фамилия) (личная подпись)

«____»__________2018 г.

Тольятти 2018

АННОТАЦИЯ

Цель бакалаврской работы – выявить методические особенности обучения решению олимпиадных задач по теме «Перестановки. Размещения. Сочетания» в курсе математики основной школы и разработать методические рекомендации по обучению решению олимпиадных задач по математике для учащихся 5-6 классов и алгебре в 7-9 классах по данной теме.

Комбинаторные способы рассуждения в общей структуре мышления очень важны. В настоящее время при изучении школьного курса математики наблюдается низкий уровень овладения комбинаторикой учащимися основной школы. Вместе с этим, математические олимпиады занимают важное место в системе школьного математического образования.

Бакалаврская работа состоит из введения, двух глав, заключения и списка литературы.

Во *введении* обоснована актуальность темы исследования, даны основные характеристики.

Глава I посвящена теоретическим основам обучения решению олимпиадных задач в курсе математики основной школы. В данной главе рассматривается понятие олимпиадных задач и основные критерии к ним. Также раскрываются цели и задачи обучения теме «Перестановки. Размещения. Сочетания», основные требования к знаниям и умениям учащихся по этой теме. Анализируются содержание теоретического и задачного материалов по данной теме в учебниках разных авторов.

В *Главе II* представлены типы олимпиадных задач по теме «Перестановки. Размещения. Сочетания». Раскрыты методические рекомендации по обучению решению олимпиадных задач по математике в 5-6 классах и алгебре в 7-9 классах по данной теме.

В *заключении* приведены основные выводы и результаты исследования.

Список литературы содержит 53 наименования.

Объём работы 67 страниц.

ABSTRACT

The purpose of the bachelor's thesis is to identify methodological specifics of organizing the students teaching to solve the Olympiad tasks on the topic «Permutations. Placement. Combinations» in the algebra course in secondary school. The main task of the bachelor’s thesis is to develop methodological recommendations on organizing the teaching of students to the mathematical Olympiad tasks solving for 5-6grades, and algebra in 7-9grades in secondary school.

Combinatorial ways of reasoning in the general structure of thinking are very important. At present, when studying the school course of mathematics, there is a low level of mastering combinatorics by students of the secondary school. Along with this, mathematical Olympiads occupy an important place in the system of school mathematics education and Olympiad problems often have non-standard methods of solution.

Bachelor's thesis consists of an introduction, two chapters, a conclusion and a list of references.

In the introduction the relevance of the topic is justified, the main characteristics are given.

Chapter I reveals the theory of Olympiad tasks teaching students for solving in algebra course. The concept of Olympiad math problems is described. The goals and objectives of the teaching are described in the topic "Permutation. Placement. Combinations". The text book content of theoretical and problem materials is analyzed.

The second Chapter presents the types of Olympiad problems on the topic "Permutations. Placement. Combinations». The teaching methods for solution of the Olympiad problems in 5-6 grades for mathematics and in 7-9 grades for algebra are revealed.

The conclusion contains the summary and the results of the study.

References in clued 53 items. **The volume of work** is 67 pages.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы исследования. Комбинаторные способы рассуждения в общей структуре мышления очень важны. В настоящее время при изучении школьного курса математики наблюдается низкий уровень овладения комбинаторными навыками учащимися основной школы. В связи с этим имеет место актуализация развития комбинаторики в образовательном пространстве современной школы. Кроме того, согласно постановлению Министерства образования Российской Федерации (от 23.09.2003), начиная с 2006 года, в программу общеобразовательной школы был введен раздел «Комбинаторика, статистика и теория вероятностей».

Важность изучения комбинаторики диктует сама жизнь. Человек в разных житейских ситуациях постоянно сталкивается с задачами, в которых нужно подсчитать число способов осуществления того или иного действия, а также рассмотреть все возможные варианты расположения нескольких предметов. Такие задачи встречаются на каждом шагу: при составлении расписаний сеансов в кино и учебных занятий, при распределении обязанностей между персоналом. Варианты, выбираемые для решения задач, складываются в различные комбинации.

Комбинаторика – раздел математики, который изучает количество комбинаций, подчиненных некоторым условиям. Комбинации составляют из элементов, принадлежащих конечному множеству [52].

Современный ученик должен развивать в себе способность выбирать из нескольких вариантов решения более рациональный, уметь оценивать степень риска и шанс на успех в разных жизненных ситуациях. Усовершенствование учебного процесса в общеобразовательной школе подразумевает ориентацию образования не только на усвоение знаний, но и на разностороннее развитие личности, ее индивидуальных и познавательных способностей. Предметные олимпиады являются лучшим средством развития учащихся, которые выявляют их интересы и способности.

Математические олимпиады занимают важное место в системе школьного математического образования. Олимпиадные задачи чаще всего имеют нестандартные методы решения. К ним имеются определенные требования [42]: они должны соответствовать программе; допускать различные варианты решения; быть нестандартными по своей тематике; быть максимально понятными и иметь краткое условие; должны иметь изящные и оригинальные решения; соответствовать предлагаемому уровню; быть доступными для решения. Для решения олимпиадных задач ученикам необходимо уметь решать стандартные задачи, логически мыслить и творчески применять свои знания.

Проблема исследования состоит в выявлении методических особенностей организации подготовки учащихся к решению олимпиадных задач по теме «Перестановки. Размещения. Сочетания» в курсе математики основной школы.

Объект исследования: процесс обучения решению олимпиадных задач по теме «Перестановки. Размещения. Сочетания» в основной школе.

Предмет исследования: методика организации подготовки учащихся к решению олимпиадных задач по теме «Перестановки. Размещения. Сочетания» в курсе математики основной школы.

Цель бакалаврской работы: выявить методические особенности обучения решению олимпиадных задач по теме «Перестановки. Размещения. Сочетания» в курсе математики основной школы и разработать методические рекомендации по обучению решению олимпиадных задач по математике для учащихся 5-6 классов и алгебре в 7-9 классах по данной теме.

Задачи исследования:

1) рассмотреть понятие олимпиадных задач и раскрыть основные требования к ним;

2) выделить цели и задачи обучения теме «Перестановки. Размещения. Сочетания»;

3) выделить основные требования к знаниям и умениям учащихся

по теме «Перестановки. Размещения. Сочетания»;

4) провести анализ содержания теоретического и задачного материалов по данной теме;

5) выделить основные типы олимпиадных задач по теме «Перестановки. Размещения. Сочетания»;

6) раскрыть методические рекомендации по обучению решению олимпиадных задач по данной теме в курсе математики основной школы.

Решение поставленных задач потребовало привлечения следующих **методов исследования:** анализ учебников и учебных пособий, школьных программ, методической литературы, а также изучение опыта работы отечественной школы, систематизация и обобщение материала.

Теоретическая значимость исследования состоит в выявлении методических особенностей по обучению учащихся теме «Перестановки. Размещения. Сочетания» в курсе алгебры основной школы.

Практическая значимость работы заключается в том, что в ней представлена типология олимпиадных задач по данной теме и методические рекомендации по обучению решению олимпиадных задач, которые могут быть использованы учителями математики и студентами в период педагогической практики в общеобразовательной школе.

На защиту выносятся:

1. Методические рекомендации по обучению решению олимпиадных задач по теме «Перестановки. Размещения. Сочетания» в курсе математики 5-6 классов.

2. Методические рекомендации по обучению решению олимпиадных задач по теме «Перестановки. Размещения. Сочетания» в курсе алгебры 7-9 классов.

Бакалаврская работа состоит из введения, двух глав, заключения и списка литературы и приложения. Во введении обоснована актуальность темы исследования, даны основные характеристики.

Глава I посвящена теоретическим основам обучения решению олимпиадных задач в курсе математики основной школы. В данной главе рассматривается понятие олимпиадных задач и основные требования к ним. Также раскрываются цели и задачи обучения теме «Перестановки. Размещения. Сочетания», основные требования к знаниям и умениям учащихся по данной теме. Анализируются содержание теоретического и задачного материалов по данной теме в учебниках разных авторов.

В Главе II представлены типы олимпиадных задач по данной теме. Раскрыты методические рекомендации по обучению решению олимпиадных задач по математике в 5-6 классах и алгебре в 7-9 классах по данной теме.

В заключении приведены основные выводы и результаты исследования.

Список литературы содержит 53 наименований.

ГЛАВА I. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ ОЛИМПИАДНЫХ ЗАДАЧ В КУРСЕ МАТЕМАТИКИ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ

§1. Понятие олимпиадных задач и основные требования к ним

Важным средством в развитии логического мышления в рамках курса математики являются *задачи*. Отметим, что термин *олимпиадная задача* появился в результате практики применения особых видов задач для составления текстов олимпиадных работ, а вовсе не в результате классификации задач.

Под понятием *олимпиадные задачи по математике* А.В. Фарков понимает [42, С.7]: «задачи повышенной трудности, нестандартные по формулировке или по методам их решения».

При подходе А.Г. Фаркова к определению олимпиадными задачами могут быть как нестандартные задачи по математике, использующие необычные идеи и специальные методы решения, так и стандартные задачи, но допускающие более быстрое, оригинальное решение.

«*Олимпиадные задачи* в математике — термин для обозначения круга задач, для решения которых обязательно требуется неожиданный и оригинальный подход» - говорит Т.В. Романова [33, С. 3]. Из вышесказанного можно сделать вывод о том, что олимпиадные задачи являются нестандартными.

Понятие «*нестандартная задача»* используется многими методистами. Ю.М. Колягин, например, даёт следующее определение данному понятию: «Под нестандартной понимается задача, при предъявлении которой учащиеся не знают заранее ни способа ее решения, ни того, на какой учебный материал опирается решение» [15, С. 36].

Не стоит путать задачи повышенной сложности с нестандартными задачами. Задачи повышенной сложности обладают такими условиями, которые помогают легко выделить способ решения, который поможет найти ответ. Такие задачи лишь закрепляют знания, полученные ранее. Нестандартные задачи, в свою очередь, несут собой исследовательский характер.

Стоит отметить, что понятие «нестандартной задачи» крайне относительно. Поскольку одна и та же задача может быть для одного ученика нестандартной, так как он не знаком с методом решения данной задачи, и одновременно стандартной для другого ученика, ведь он уже решал подобные задачи. Так если в 5 классе задача является нестандартной для учеников, то уже в 6 классе она является обычной.

При решении олимпиадных задач от учащихся требуется не только хорошая подготовка в области школьной математики, но и хорошее развитие некоторых качеств мышления, в частности гибкости, осознанности, глубины.

Так как классификацию олимпиадных задач построить трудно, то на основе определений А.Г. Фарков выделяет следующие *основные типы олимпиадных задач по математике:*

– задачи, повышенной трудности, но использующие программный материал (арифметические задачи, алгебраические и геометрические задачи);

– задачи на применение специальных методов решений (применение метода раскрасок, графов, принципа Дирихле, метода инвариантов);

– комбинированные задачи.

Сложность олимпиадной задачи – это объективная характеристика задачи, определяемая ее структурой.

По мнению В.А. Шеховцова, сложность задачи определяют следующие критерии:

– «объема информации, необходимого для ее решения;

– числа связей между ними;

– числа данных в задаче;

– количества непосредственных выводов, необходимых для решения задачи;

– количества возможных выводов из условия задачи;

– длины рассуждений при решении задачи;

– общего числа шагов решения, привлеченных аргументов» [47].

О.Б. Епишева в своей методичке предлагает для нахождения сложности задачи использовать формулу В.И. Крупича [14, С. 57]:

$$S = m + n + l,$$

Где S — сложность задачи, m — число элементов задачи, n — число явных связей между элементами задачи, l — число видов связи.

Рассчитать сложность задачи достаточно непросто. Учителя, как правило, определяют сложность задач интуитивно, исходя из собственного опыта. Но в олимпиадной работе тексты некоторых заданий нестандартны. Поэтому лучше все же применять *понятие трудности задания.*

Трудность олимпиадной задачи – субъективная характеристика задачи, определяемая взаимоотношениями между задачей и решающим ее учеником.

Трудность задачи зависит от таких критериев, как:

– «сложности задачи (сложные задачи обычно являются более трудными для учащихся);

– времени, прошедшего после изучения материала, который встречается в тексте задачи (задачи, использующие материал, изученный несколько лет назад, который уже успел забыться, трудны для учащихся);

– практики в решении подобного рода задач;

– уровня развития ученика (одна и так же задача, может быть одновременно трудной для среднего ученика общеобразовательного класса и также легкой для обычного ученика физико-математического класса);

– возраста учащегося (задача, легкая для восьмиклассника, может оказаться трудной для пятиклассника)» [41].

Процент учеников, решивших задачу из числа ее решавших, определяет *трудность задачи.*

Существует множество формул для подсчёта трудности задачи. Рассмотрим наиболее простую формулу расчёта трудности задачи:

$$K_T = \frac{n}{p} \cdot 100\%,$$

где K_T — коэффициент трудности, измеряемый в процентах, $\mathbf{n}$ — число учащихся, не решивших задачу, m — общее число участников олимпиады.

Требования к олимпиадным задачам очень высокие: они должны быть красивыми, интересными, формулировки их должны быть яркими и запоминающимися, а решение должно основываться на оригинальных идеях. При этом особую ценность на олимпиадах представляют задачи, в определенной степени, посильные большинству учащихся и в то же время содержащие элементы, которые могут заметить лишь самые наблюдательные учащиеся [43, С. 94].

Таким образом, зачастую авторы методических работ не дают четкого определения понятия *олимпиадной задачи*. Большинство авторов убеждено в том, что данное понятие является общеизвестным. Многие методисты и вовсе относят к олимпиадным задачам те, где есть идея решения и применяются специальные методы решения. *Под олимпиадными задачами* мы будем понимать «задачи, для которых в курсе математики не имеется общих правил и положений, определяющих точную программу их решения» [45].

§2. Цели и задачи обучения теме «Перестановки. Размещения. Сочетания»

Задачи очень важны для организации учебно-воспитательного процесса. В математическом развитии любого школьника они являются и целью, и средством обучения. Отметим, что в процессе решения задач теоретический материал осознается и усваивается легче.

Ознакомившись с рабочими программами, составленными по учебникам Г.К. Муравина, можно рассмотреть такие *цели изучения курса* комбинаторики в 5-6 классах, как: «Это материал необходим, прежде всего, для формирования функциональной грамотности – умений воспринимать и анализировать информацию, представленную в различных формах. Изучение основ комбинаторики позволит учащимся осуществлять рассмотрение случаев, перебор и подсчет числа вариантов, в том числе в простейших прикладных задачах» [11]. Аналогичные цели можно встретить также в пояснительной записке к рабочей программе для учебника 9 класса А.Г.Мордковича [24].

В методическом пособии для учителей к учебнику математики Г.В. Дорофеева для 6 классов можно встретить следующие *основные цели* обучения данной теме: «обучить использованию простейших теоретико-множественных понятий (терминов и символов) как элементов математического языка; развить умение решать комбинаторные задачи перебором возможных вариантов» [13].

Т.А. Бурмистрова в рабочих программах для 7-9 классов рассматривает *основные цели* обучения данной теме в соответствии с Федеральным образовательным стандартом основного общего образования. Автор делит все цели на три направления: личностное, метапредметное и предметное.

Рассмотрим все представленные направления:

1) *«личностного развития:* креативность мышления, инициативы, находчивости, активности при решении арифметических задач.

2) *метапредметного развития:* развитие способности видеть математическую задачу в других дисциплинах, в окружающей жизни; умение понимать и использовать математические средства наглядности (рисунки, чертежи, схемы и другие) для иллюстрации, интерпретации, аргументации.

3) *предметного развития:*

– владение базовым понятийным аппаратом: иметь представление о комбинации, сочетаниях, перестановках, размещениях, методе перебора и графе, формирования представлений о комбинаторных закономерностях в реальном мире и различных способах их изучения;

– умения пользоваться изученными математическими формулами;

– умения применять изученные понятия, результаты и методы при решении задач из различных разделов курса, в том числе задач, не сводящихся к непосредственному применению известных алгоритмов» [2, С.9].

В программе к учебнику Ю.М. Колягина для общеобразовательных школ авторы выделяют следующая цель изучения темы «Перестановки. Сочетания. Размещения»: «обеспечить интеллектуальное развитие, формирование качеств личности, необходимых человеку для полноценной жизни в современном обществе: ясность и точность мысли, критичность мышления, интуиция, логическое мышление, элементы алгоритмической культуры, пространственных представлений, способность к преодолению трудностей» [17].

Автор также *выделяет такие задачи* обучения данной теме, как обеспечение владения символическим языком алгебры, выработка формально-оперативных алгебраических умений и применение их к решению математических и нематематических задач.

По мнению Ю.Н. Макарычева, *основная цель* обучения теме «Перестановки. Размещения. Сочетания» заключается в том, чтобы «ознакомить учащихся с понятиями «перестановка», «размещение», «сочетание» и соответствующим формулами, выработать умение решать несложные комбинаторные задачи» [23].

Далее автор методического пособия выделает *несколько задач*:

– приобретение математических знаний и умений;

– овладение обобщенными способами мыслительной, творческой деятельности;

– развитие логического мышления учащихся.

Проанализировав методические пособия для учителей и программы для учебников разных авторов, можно прийти к выводу, что цели и задачи обучения теме «Перестановки. Размещения. Сочетания» у большинства авторов идентичны. Выделим наиболее общие из них. В первую очередь, при решении задач по данной теме у учащихся происходит интеллектуальное развитие, формирование критичности мысли, а также развивается логическое мышление и интуиция. Такие задачи формируют функциональную грамотность учащихся: они учатся воспринимать и анализировать информацию, представленную в любой форме. Изучение данной темы помогает овладеть базовым понятийным аппаратом и формирует представление о комбинаторных закономерностях в реальном мире.

§3. Основные требования к знаниям и умениям учащихся по теме «Перестановки. Размещения. Сочетания»

В целях реализации ФГОС ООО [44] раздел «Элементы комбинаторики и теории вероятностей» сравнительно недавно появился в учебно-методическом комплексе. *Предметные результаты* освоения основной образовательной программы основного общего образования с учётом общих требований Стандарта и специфики изучаемых предметов, входящих в состав предметных областей, должны обеспечивать успешное обучение на следующей ступени общего образования:

1) формирование представлений о математике как о методе познания действительности, позволяющем описывать и изучать реальные процессы;

2) развитие умений работать с учебным математическим текстом (анализировать, извлекать необходимую информацию), точно и грамотно выражать свои мысли с применением математической терминологии и символики, проводить классификации, логические обоснования, доказательства математических утверждений;

8) развитие умений извлекать информацию, представленную в таблицах, на диаграммах, графиках, описывать и анализировать массивы числовых данных с помощью подходящих статистических характеристик, использовать понимание вероятностных свойств окружающих явлений при принятии решений;

9) развитие умений применять изученные понятия, результаты, методы для решения задач практического характера и задач из смежных дисциплин с использованием при необходимости справочных материалов, компьютера, пользоваться оценкой и прикидкой при практических расчётах.

Планируемые результаты освоения основной образовательной программы основного общего образования (ООП ООО) представляют собой следующие требования к учащимся [32]: «извлекать информацию, представленную в таблицах, на диаграммах, графиках; составлять таблицы, строить диаграммы и графики на основе данных; оперировать понятиями: факториал числа, перестановки и сочетания; применять правило произведения при решении комбинаторных задач; решать задачи на вычисление вероятности с подсчетом количества вариантов с помощью комбинаторики».

Для каждого возраста учащихся требования к математической подготовке различны. Рассмотрим основные требования к знаниям и умениям учащихся по отдельным классам.

Итак, С.М. Никольский [30] утверждает, что в результате изучения темы «Перестановки. Размещения. Сочетания» учащиеся 5-го класса должны знать, как используются математические формулы и уравнения. Ученики должны научиться, как их применять для решения математических и практических задач. Так же, в свою очередь, учащиеся должны уметь решать простейшие комбинаторные задачи.

В рабочей программе Г.В. Дорофеева [12], представлена таблица требований к математической подготовке выпускников 6 класса. Таблица содержит колонки «знать» и «уметь». Это позволяет легко просмотреть и познакомиться с требованиями по конкретным темам. По теме «Перестановки. Размещения. Сочетания» представлены следующие требования к учащимся:

– знать понятие перебор возможных вариантов и логика перебора;

– знать правило умножения в решении комбинаторных задач;

– уметь решать текстовые задачи перебором возможных вариантов;

– уметь применять правило умножения при решении текстовых задач.

Основные требования к знаниям и умениям учащихся по теме «Перестановки. Размещения. Сочетания» в 7-9 классах значительно выше, нежели в 5-6 классах. Это обусловлено тем, что тему наиболее подробно разбирают в 7 и 9-х классах в зависимости от авторов учебников.

Т.А. Бурмистрова в рабочих программах для 7-9 классов [2], говорит о том, что выпускник, изучив данную тему, должен уметь решать комбинаторные задачи на нахождение числа объектов или комбинаций. Также автор отмечает, что выпускник, изучив тему «Перестановки. Сочетания. Размещения» получит возможность научиться некоторым специальным приёмам решения комбинаторных задач.

В рабочей программе Ю.М. Колягина к учебнику алгебры для 7 класса [16] представлены следующие требования к учащимся.

Учащиеся должны знать:

– что такое комбинаторика; комбинаторные задачи;

– способы организованного перебора вариантов;

– средства подсчёта комбинаций из двух и более элементов (таблицы, графы);

– полный граф; граф-дерево;

– комбинаторное правило произведения.

Учащиеся должны уметь:

– рационально и без потери вариантов перебирать и подчитывать комбинации из двух и более элементов (с помощью таблиц и графов);

– применять правило произведения для подсчёта комбинаций из различного числа элементов;

– решать прикладные комбинаторные задачи.

Обратимся к рабочей программе Г.К. Муравина для учащихся 7-х классов. Автор данной программы подчёркивает, что «учащиеся должны уметь выполнять перебор всех возможных вариантов для пересчета объектов или комбинаций, а также выделять комбинации, отвечающие заданным условиям» [37]. Учащиеся 7-х классов должны решать комбинаторные задачи с помощью формул числа перестановок, числа размещений, числа сочетаний, и с использованием правила произведения. Также одним из критериев является умение находить вероятности событий в простейших случаях с использованием формул комбинаторики.

В 8 классе редко изучают данную тему. М.В. Ткачёва в своей рабочей программе [40], выделяет лишь несколько требований к учащимся. Ученики должны уметь работать с математическим текстом (анализировать, извлекать необходимую информацию, грамотно применять математическую терминологию и символику, использовать различные языки математики). Ученикам 8-го класса необходимо научится решать комбинаторные задачи на нахождение числа объектов или комбинаций

Наиболее подробно тема «Перестановки. Размещения. Сочетания» изучается и отрабатывается в 9 классе. Рассмотрим рабочие программы к учебникам алгебры 9-го класса.

А.Г. Мордкович, к примеру, выделяет такие требования к учащимся, как «умение решать текстовые задачи алгебраическим методом, интерпретировать полученный результат, проводить отбор решений, исходя из формулировки задачи» [24], и, конечно же, учащийся должен решать простейшие комбинаторные задачи.

У Ю.Н. Макарычева выделено достаточно большое количество требований к учащимся. По мнению автора, в результате изучения данной темы учащийся должен понимать: комбинаторное правило умножения; определение перестановок, размещений, сочетаний; понятия отношений частоты и вероятности случайного события; формулы для подсчета их числа. Учащиеся должны уметь: различать понятия «размещение» и «сочетания»; определять вид комбинаций, о котором идет речь в задачах; решать задачи, в которых требуется составлять те или иные комбинации элементов и подсчитать их число. Также автор отмечает, что «учащиеся 9-го класса должны использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни для: решения комбинаторных задач» [23].

Изучив методическую разработку открытого урока по теме «Основные понятия комбинаторики. Задачи на подсчет числа размещений, перестановок, сочетаний. Решение задач на перебор вариантов» преподавателя математики Г.И. Бондаренко [1], можно выделить следующие требования к учащимся:

– знать понятие предмета комбинаторика, понятие факториала, понятие размещений, перестановок и сочетаний;

– уметь организовывать поиск, сбор и получение информации об истории развития комбинаторики, ее применении при решении задач, находить связь комбинаторики с окружающим миром, решать простейшие комбинаторные задачи;

– владеть умением анализировать, сравнивать, аргументировать свои ответы.

Таким образом, основные требования к знаниям и умениям учащихся по теме «Перестановки. Размещения. Сочетания» схожи у всех авторов и соответствуют требованиям ФГОС ООО. Учащиеся должны уметь пользоваться определённой терминологией и формулами для решения практических задач по данной теме, а также решать простейшие комбинаторные задачи.

§4. Анализ содержания теоретического материала по теме «Перестановки. Размещения. Сочетания» в учебниках разных авторов

Для изучения комбинаторики в основной школе разработано множество учебно-методических материалов. Серия учебников Ш.А. Алимова, Г.В. Дорофеева, С.М. Никольского, содержат данный раздел как неотъемлемую часть курса. К школьным учебникам математики С.А. Теляковского, А.Г. Мордковича и др. разработаны дополнительные вкладыши с подробным теоретическим материалом и подбором специальных задач. Методика введения основных комбинаторных понятий на данный момент слабо разработана. Основной курс школьной математики включает в себя малую часть крайне обширного материала полезного, как для получения комбинаторных навыков, так и для общего развития мышления школьников.

Базовые знания (известные из школьного курса математики 5-6 классов):

– метод перебора всевозможных вариантов;

– сравнение натуральных чисел;

– представление данных в виде таблиц, диаграмм.

Вводимые (новые) знания:

– понятие комбинаторики, понятие комбинации;

– правило произведения;

– дерево всевозможных вариантов;

– понятие кодирования информации;

– понятие перестановок и их формула;

– понятие факториала;

– правило умножения;

– понятие сочетаний и их формулы;

– понятие размещений и их формулы;

– понятие графа.

Анализ начнём с учебников Г.В. Дорофеева для 5-6 классов средней школы [10], [12]. Автор рассматривает *комбинаторный принцип умножения*, различные виды комбинаций, такие как *перестановки, размещения, сочетания* с повторениями и без повторений и *формулы* для их вычисления.

В учебниках С.М. Никольского “Математика 5-6” [30], [31] автором разработана методика проведения практических занятий по теме "Начала комбинаторики". Основу теоретического материала составляет, так называемая, бесформульная комбинаторика (генерация *перестановок и сочетаний*). Помимо этого, представлены задачи, в которых необходимо выделить из *всех возможных решений*, лишь удовлетворяющие заданному требованию.

Тема «Основы статистики, комбинаторики и теории вероятностей», требует серьёзной дополнительной методической работы, поскольку она включена в ГИА и ЕГЭ. В учебниках Н.Я. Виленкина тема «Перестановки. Размещения. Сочетания» представлена отдельными задачами (которых совсем немного), что недостаточно для формирования у детей ни понятия о теории, ни начальных навыков решения задач по этой теме.

Однако практика показывает, что в 5-6 классах большинство учащихся вполне готовы к восприятию этого материала, если он адаптирован к их возрасту, и выкроить несколько часов для начала изучения этой темы имеет смысл. Пропедевтика изучения «Перестановок. Размещений. Сочетаний» в 5-6 классах значительно упрощает восприятие этой темы в 9 классе уже на более высоком в теоретическом смысле уровне.

Анализ содержания теоретического материала по теме «Перестановки. Размещения. Сочетания» различных учебников алгебры 7 класса представлен в Таблице 1.

Таблица 1

Анализ содержания теоретического материала по теме «Перестановки. Размещения. Сочетания» в различных учебниках алгебры 7 класса

Авторы учебников	Содержание теоретического материала
Г.В. Дорофеев, С.Б. Суворова и др.	Повторение логики перебора и правила умножения. Понятие перестановки. Формула перестановок.
Ю.М. Колягин, М.В. Ткачёва и др.	Понятие комбинаторика и история данного раздела математики. Понятия сочетания, размещения, перестановки и их формулы. Исторические комбинаторные задачи. Таблица вариантов и правило произведения. Комбинаторика и анаграммы. Подсчёт вариантов с помощью графов.
А.Г.Мордкович, П.В. Семёнов	Понятие комбинаторики и её краткая историческая справка. Таблица возможных вариантов. Правило умножения. Понятие перестановок и их формула. Дерево возможных вариантов. Понятие сочетаний и их формулы.
Г.К. Муравин, К.С. Муравин и др.	Правило произведения. Понятия перестановок, размещений, сочетаний и их формулы. Понятие факториала и его практическое применение. Понятие комбинаторики и её история.
М.В. Ткачева, Н.Е. Фёдорова	Исторические комбинаторные задачи о магических и латинских квадратах и др. Понятия сочетания, перестановки и размещения и их формулы. Таблица подсчета вариантов. Правило умножения. Графы.

В учебнике Г.В. Дорофеева «Алгебра 7 класс» [6] автор снова возвращается к решению комбинаторных задач с помощью рассуждений, как это делалось в учебниках «Алгебра 5 класс» и «Алгебра 6 класс». В данной книге довольно подробно рассматриваются *перестановки*. На изучение данной темы выделяется порядка двух часов.

Учебник Ю.М. Колягина [16] представляет развёрнутый и интересный материал. С самого начала вводится *понятие комбинаторики*, как раздела математики и рассказывается об её истории. Далее даны определения таким терминам как *сочетания, размещения и перестановки* и рассматриваются на основе *исторических комбинаторных задач*.

Ю.М. Колягин рассмотрел *правило произведения* для подсчёта комбинаций из различного числа элементов. В учебнике также показано, как рационально и без потери вариантов перебирать и подсчитывать *комбинации* из двух и более элементов *с помощью таблиц и графов.* В данной книге тема «Перестановки. Размещения. Сочетания» рассмотрена подробно, и автор выделяет на её изучение около семи часов.

А.Г. Мордкович в дополнительных параграфах к курсу алгебры 7-9 классов [26] даёт *историческую справку комбинаторике* и сразу на примерах показывает *простейшие комбинаторные задачи*, а также *таблицу возможных вариантов*. На основе *таблицы* рассматривается *правило умножения* и принцип его работы. Позже разобраны *перестановки* и представлены *деревья возможных вариантов*. После рассмотрены *сочетания*, как выбор сразу нескольких элементов. Формулы выводятся постепенно, начиная с двух элементов и заканчивая элементами. Автор данного учебного пособия, как и Ю.М. Колягин, выделяет на изучение темы 7 часов.

У Г.К. Муравина [27] материал изложен лаконично и в своеобразном порядке. Для вычисления общего числа вариантов автор вводит *правило произведения* и рассказывает, в каких случаях его целесообразно применять. Затем даются *определения перестановкам, размещениям и сочетаниям*. Также рассматриваются *формулы* вышеупомянутым понятиям. В заключении подводится итог и выводится *понятие комбинаторики*, которое в свою очередь, подкреплено небольшой *исторической справкой*. Г.К. Муравин предлагает нам ознакомиться с данной темой лишь за 4 часа.

М.В. Ткачева начинает введение в комбинаторику с *исторических задач* по данной теме. Далее выводятся *термины сочетания, перестановки и размещения* на основе разбора комбинаций из трёх элементов. Потом *таблица возможных вариантов* подводит нас к *правилу умножения*. В конце рассматривается средство подсчёта вариантов под названием *графы*. На изучение данной темы автор отводит порядка 5 часов.

Большинство авторов учебников алгебры 7 класса придерживаются одного плана рассмотрения содержания темы «Перестановки. Размещения. Сочетания». Содержание данной темы широко рассмотрено в учебниках

Ю.Г. Колягина и А.Г. Мордковича. В данных учебниках на неё отводится около 7 часов. Тема довольно сжато, представлена в учебнике Г.В. Дорофеева, на которую выделяется лишь 2 часа. У Г.В.Дорофеева комбинаторика берёт своё начало с 5-го класса, поэтому к 7-му классу у детей уже есть определенный багаж знаний по данной теме. Тема «Перестановки. Сочетания. Размещения» довольно глубоко изучается именно в 7 классе, а в остальных классах происходит лишь отработка полученных ранее знаний. Авторы всех учебников придерживаются одной структуры выстраивания своих параграфов и пунктов по данной теме. Данная тема встречается отдельной главе учебника, посвященной комбинаторике.

Анализ содержания теоретического материала по теме «Перестановки. Размещения. Сочетания» различных учебников алгебры 8 класса представлен в Таблице 2.

Таблица 2

Анализ содержания теоретического материала по теме «Перестановки. Размещения. Сочетания» в различных учебниках алгебры 8 класса

Авторы учебников	**Содержание теоретического материала**
Г.В. Дорофеев, С.Б. Суворова и др.	Понятие комбинации. Формулы и определения перестановок, сочетаний.
Г.К. Муравин, К.С. Муравин и др.	Понятие комбинаторики. Правило произведения. Формулы числа размещений, сочетаний и перестановок.
М.В. Ткачева, Н.Е. Фёдорова	Формулы и определения перестановок, сочетаний и размещений.

В учебнике Г.В. Дорофеева [8] есть всего лишь один параграф, посвящённый данной теме под названием «Для тех, кому интересно», то есть не является обязательным. На него отведено около двух часов. В параграфе довольно подробно рассматриваются *размещения и сочетания*. В данном учебнике обучение происходит равномерно, начиная с 5-го класса, поэтому в 8-м классе ученики уже легко справляются с комбинаторными задачами.

Г.К. Муравин [28] в своём учебнике начинает рассмотрение данной темы с определения *понятия комбинаторики*. Далее озвучивается *правило произведения*, и освежаются знания, полученные в 7-м классе. Понятия размещений, сочетаний и перестановок подробно не рассматриваются, а вспоминаются лишь их *формулы*. На обучение перестановкам, сочетаниям и размещениям Г.К. Муравин предлагает уделить 3 часа.

М.В. Ткачёва [40] в своём учебнике делает акцент на отработку знаний, полученных ранее. В книге рассматривается множество задач на вероятность, решённых с *помощью сочетаний, размещений и перестановок*. Теме отведено всего 2 часа.

Рассмотрев несколько учебников 8-го класса по алгебре, могу отметить, что она обширно не рассматривается. Основную базу знаний авторы учебников заложили ещё в 7-м классе. В основном, в 8-м классе происходит повторение ранее изученного материала, отработка задач и лишь усвоение малейших нюансов по данной теме. На тему выделяется не более трёх часов.

Анализ содержания теоретического материала по теме «Перестановки. Размещения. Сочетания» различных учебников алгебры 9 класса представлен в Таблице 3.

Таблица 3

Анализ содержания теоретического материала по теме «Перестановки. Размещения. Сочетания» в различных учебниках алгебры 9 класса

Авторы учебников	**Содержание теоретического материала**
Ю.М. Колягин, М.В. Ткачёва и др.	Правило произведения. Формулы числа размещений, сочетаний и перестановок.
А.Г.Мордкович, П.В. Семёнов	Метод перебора. Дерево возможных вариантов. Правило умножения. Комбинаторное правило умножения. Понятие факториала. Формула и определение перестановок.
Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк и др.	Метод перебора. Дерево возможных вариантов. Правило умножения. Понятия перестановки, сочетания, размещения и их формулы.

Ю.М. Колягин [19] в своём учебнике предоставляет материал для отработки ранее полученных знаний и умений. Повторяется *правило произведений* и вытекающие из него *формулы размещений, сочетаний и перестановок*, которые помогают при решении вероятностных задач. На повторение материала Ю.М. Колягин выделяет 2 часа работы.

В данном учебнике А.Г. Мордкович [25] излагает тот же материал, что и в учебнике «События. Вероятности. Статистическая обработка данных. Доп. параграфы к курсу алгебры 7-9 класс». Хотя отводится меньше часов на изучение данного раздела, всего 6 часов. По-моему мнению, вводить данный материал лишь в 9 классе нецелесообразно. К тому же, в данной книге не рассмотрены сочетания и размещения, которые должны знать ученики, выпускаясь из 9-го класса.

В книге Ю.Н. Макарычева [22] на основе решения простых комбинаторных задач показывается *метод перебора*. Наглядно этот метод работает с помощью *дерева возможных вариантов*. Далее автор рассматривает *правило умножения* и вводит *понятия перестановок, размещений и сочетаний* на конкретном примере. После записываются их *формулы*.

В данном учебнике элементы вводятся, как и в остальных учебниках. Комбинаторика в данном пособии содержит больше теории, чем в других книгах. На её изучение автор отводит целых 9 часов. По моему мнению, комбинаторику предлагают изучать слишком поздно, как и у А.Г. Мордковича. Как говорилось ранее, начинать обучать комбинаторике лучше как можно раньше.

Таким образом, проанализировав различные учебники математики и алгебры разных авторов, отметим, что данной теме отводится небольшое количество часов в программе. В математике 5-6 класса тему «Перестановки. Размещения. Сочетания» изучают не более 3 часов, а в алгебре 7-9 класса на тему отводится не более 10 часов. Во многих учебниках тема «Перестановки. Размещения. Сочетания» отсутствует. Данная тема встречается в ОГЭ. Понятию перестановки уделяется особое внимание в экзаменационных заданиях на определение вероятности, но решение этих задач сводится не к практическому применению формул перестановок, а к методу перебора. Данная тема, безусловно, интересна для учеников. В школьной программе «Перестановки. Размещения. Сочетания» как отдельная тема встречается редко, чаще она встречается внутри параграфов, посвященных разделам комбинаторики или теории вероятностей.

§5. Анализ содержания задачного материала по теме «Перестановки. Размещения. Сочетания» в учебниках разных авторов

В повседневной жизни довольно часто встречаются задачи, решая которые нам приходится составлять всевозможные комбинации, подчиненные различным условиям, из заданных объектов. Также необходимо подсчитывать число полученных комбинаций. Такие задачи называются комбинаторными задачами.

Д. Пойа в своей книге сказал: «*Решение задач* - практическое искусство, подобное плаванию, катанию на лыжах или игре на фортепиано. Научиться ему можно, только подражая хорошим образцам и постоянно практикуясь» [50].

На основе решения таких задач формируется важная для человека способность комбинировать, и совершенствуются приемы умственной деятельности. Комбинаторные задачи включают в математические олимпиады и конкурсы.

Изучив учебники по математике для 5-6 классов, легко заметить, что в учебниках В. Г. Дорофеева присутствуют задачи по комбинаторике, но они не являются задачами повышенной сложности. В учебниках других авторов такие задачи присутствуют в небольшом количестве или вовсе отсутствуют.

Авторы всех учебников по алгебре в 7-9 классах выделяют следующую *типологию методов решения комбинаторных задач:*

– задачи на перебор всевозможных вариантов;

– задачи, решаемые с помощью дерева всевозможных вариантов;

– задачи, решаемые с использованием правила произведения;

– задачи на составление перестановок;

– задачи на составление размещений;

– задачи на составление сочетаний.

Учебник алгебры для 7 класса Ю.М. Колягина содержит материал, изложенный в форме занимательных диалогов. В нём встречаются все представленные выше методы решения задач. Давайте рассмотрим задачи на *метод перебора всевозможных вариантов.* Ответы и указания к решению задач представлены в Приложении 1.

Задача 1 [16, С. 250]: «Три друга – Антон, Борис и Виктор – приобрели два билета на футбольный матч. Сколько существует различных вариантов посещения футбольного матча для троих друзей?»

Задача 2 [16, С. 250]: «Три друга – Антон, Борис и Виктор – приобрели два билета на футбольный матч на 1-е и 2-е места первого ряда стадиона. Сколько у друзей вариантов (способов) занять эти два места на стадионе? Записать все эти варианты».

Задача 3 [16, С. 251]: «Антону, Борису и Виктору повезло, и они купили 3 билета на футбол на 1, 2, 3-е места первого ряда стадиона. Сколькими способами мальчики могут занять эти места?»

Выражаясь математическим языком, в задаче 1 мы встречаем метод *составления всевозможных сочетаний* из трёх элементов по два. Поскольку пары отличаются составом элементов и порядок расположения элементов в паре не учитывается. В задаче 2 пары отличаются друг от друга либо составом, либо их расположением в паре. Такие пары в комбинаторике называют *размещениями* из трёх элементов по два.

В задаче 3 используется метод *составления всевозможных* *перестановок* из трёх элементов: комбинации из трёх элементов, которые отличаются друг от друга лишь порядком расположения элементов в них.

Задача 4 [16, С. 265]: «Сколько различных чисел можно записать с помощью цифр 0, 1, 2, если цифры в числе могут повторяться?»

Проанализировав учебник, можно сказать, что он включает в себя как вводные упражнения, так и задачи повышенной сложности, выделенные оранжевым квадратиком. Ю.М. Колягин также разбирает исторические комбинаторные задачи и предлагает учащимся решить практические и прикладные задачи по данной теме. Изучение главы «Элементы комбинаторики» завершается весьма интересным разделом под названием «Проверь себя сам», где предложены задачи по трём уровням сложности.

В учебнике Г.К. Муравина [27] практический материал построен следующим образом: после теории, насыщенной яркими примерами, следуют упражнения, включающие себя задачи над которыми следует подумать и задачи повышенной трудности. В конце каждого параграфа представлены контрольные вопросы и задания.

Задача 5 [27, С.164]: «Сколько пятизначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4 и 5 так, чтобы цифры в записи числа не повторялись?»

Задача 6 [27, С.165]: «Сколько пятизначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6 и 7 так, чтобы цифры в записи числа не повторялись?»

Задача 7 [27, С.167]: «На плоскости отмечено 5 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Сколько существует треугольников с вершинами в этих точках?»

Подводя итог по данному учебнику, хочется отметить, что Г.К. Муравин не выделяет отдельных примеров и задач на метод перебора всевозможных вариантов. С деревом всевозможных вариантов автор также не знакомит учащихся.

В учебниках алгебры 8-го класса теме «Перестановки. Сочетания. Размещения» не уделяют должного внимания. Например, в учебнике В.Г. Дорофеева данная тема не является обязательным к изучению параграфом. В данной книге нет задач повышенной трудности, а есть всего лишь простейшие задачи на отработку полученных знаний. Далее уделим внимание задачам, разобранным самим автором.

Задача 8 [27, С. 270]: «В турнире участвуют 12 команд. Сколькими способами они могут занять пьедестал победителей?»

Задача 9 [27, С. 271]: «На общем собрании жильцов дома нужно выбрать домовой комитет в составе трёх человек. В списке кандидатов оказалось восемь человек. Сколько есть способов для выбора домового комитета?»

В.Г. Дорофеев приводит примеры задач на нахождение *размещений и сочетаний*, остальные типы задач у автора разобраны в учебниках математики для 5-6 классов.

Обратимся к дополнительным параграфам курса алгебры А.Г. Мордковича [26] под названием «События. Вероятности. Статистическая обработка данных» для 7-9 классов. Данное пособие предназначено для ознакомления учащихся с элементами комбинаторики. На большом количестве примеров представлены основные понятия, методы и идеи комбинаторики. В книге также даются задачи с решениями и ответы к ним, встречаются упражнения для самостоятельной работы с возрастающей степенью сложности.

Итак, рассмотрим некоторые примеры, с которыми нам предлагает ознакомиться автор данного пособия.

Задача 10 [26, С. 7]: «Сколько чётных двузначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 4, 5, 9?»

В данной задаче был осуществлён *перебор всевозможных комбинаций*. Поэтому подобные задачи и называются комбинаторными.

Задача 11 [26, С. 11]: «В коридоре висят три лампочки. Сколько имеется различных способов освещения коридора?»

Задача 12 [26, С. 29]: ««Проказница Мартышка, Осёл, Козёл и косолапый Мишка затеяли сыграть квартет». Мишке поручили принести со склада 8 каких-нибудь инструментов из имеющихся 13 инструментов. Сколько способов выбора есть у Мишки?»

А.Г. Мордкович не приводит примеров задач на *составление перестановок*, а лишь вводит формулу $P_n = n!$ и предлагает множество упражнений на применение данной формулы.

Упражнение 1 [26, С. 18]: «У Вовы на обед – первое, второе, третье блюда и пирожное. Он обязательно начнёт с пирожного, а всё остальное съесть в произвольном порядке. Найдите число всевозможных вариантов обеда».

Упражнение 2 [26, С. 18]: «Одиннадцать футболистов строятся перед началом матча. Первым становится капитан, вторым – вратарь, а остальные – случайным образом. Сколько существует способов построения?»

Также легко заметить, что автор данного пособия вовсе не рассматривает *задачи на составление размещений* и не выделяет их как отдельный тип.

Выполним анализ задачного материала по учебнику алгебры для 9-го класса Ю.Н. Макарычева [22].

В данном учебнике после каждого параграфа предлагается ряд упражнений, который разделён на обязательные задачи и задачи повышенной сложности, обозначенные зелёным квадратиком, а также присутствуют задачи на повторение.

Для данного учебника типичны решения комбинаторных задач по примерам, представленным в начале пункта. Рассмотрим некоторые из них.

Задача 13 [22, С. 171]: «Из группы теннисистов, в которую входят четыре человека – Антонов, Григорьев, Сергеев и Фёдоров, тренер выделяет двоих для участия в соревнованиях пар. Сколько существует вариантов выбора такой пары?»

Способ рассуждений, который мы использовали в Приложении 1 при решении задачи, называют *перебором возможных вариантов.*

Задача 14 [22, С.172]: «Сколько трёхзначных чисел можно составить из цифр 1,3,5,7, используя в записи числа каждую из них не более одного раза?»

Мы нашли ответ на задачу 14, используя так называемое *комбинаторное правило произведения*.

Задача 15 [22, С. 177]: «Сколькими способами можно расставить 8 участниц финального забега на восьми беговых дорожках?»

Задача 16 [22, С. 181]: «Учащиеся 2 класса изучают 9 предметов. Сколькими способами можно составить расписание на один день, чтобы в нём было 4 различных предмета?»

Задача 17 [22, С. 184]: «Из набора, состоящего из 15 красок, надо выбрать 3 краски для окрашивания шкатулки. Сколькими способами можно сделать этот выбор?»

Отметим, что Ю.Н. Макарычев разбирает все шесть методов решения комбинаторных задач на примерах что позволяет учащимся лучше освоить данный материал.

Рассмотрев задачный материал по теме «Перестановки. Размещения. Сочетания» у различных авторов, хочется отметить следующие учебники: «Алгебра 7» Ю.М. Колягина и «Алгебра 9» Ю.Н. Макарычева. В данных книгах задачный материал представлен с большим количеством примеров и множеством интересных и нестандартных задач. Скромнее всего содержание задачного материала в учебнике В.Г. Дорофеева «Алгебра 8». Также как и у В.Г. Дорофеева, А.Г. Мордкович и Г.К. Муравин показывают на примерах не все методы решения комбинаторных задач. Если посмотреть на содержание перечисленных учебников, в общем, то легко заметить, что в них используются одинаковые задачи и разбираются схожие примеры по теме «Перестановки. Размещения. Сочетания».

Выводы по первой главе

1. Рассмотрены различные формулировки понятия олимпиадная (нестандартная) задача. Зачастую авторы методических работ не дают четкого определения для *олимпиадной задачи*. Большинство авторов убеждено в том, что данное понятие является общеизвестным. Многие методисты и вовсе относят к олимпиадным задачам те, где есть идея решения и применяются специальные методы решения. *Олимпиадные задачи* - задачи, для которых в курсе математики не имеется общих правил и положений, определяющих точную программу их решения. Произведён сравнительный анализ отличия нестандартной задачи от задачи повышенной сложности. Разобраны такие понятия как сложность и трудность олимпиадной задачи. Выделены основные типы нестандартных задач по математике и требования к ним.

2. Выявлены основные цели и задачи обучения теме «Перестановки. Размещения. Сочетания» в курсе математики основной школы. Определено, что при изучении данной темы у учащихся происходит:

– интеллектуальное развитие;

– формирование критичности мысли;

– развитие логического мышления и интуиции;

– формирование функциональной грамотности учащихся, то есть учат их воспринимать и анализировать информацию, представленную в любой форме.

– овладение базовым понятийным аппаратом;

– формирование представления о комбинаторных закономерностях в реальном мире.

3. Раскрыты основные требования к знаниям и умениям учащихся по теме «Перестановки. Размещения. Сочетания». Выявлено, что изучение данной теме происходит постепенно.

К основным требованиям относятся следующие:

– учащиеся должны понимать: комбинаторное правило умножения; определение перестановок, размещений, сочетаний; понятия отношений частоты и вероятности случайного события; формулы для подсчета их числа.

– учащиеся должны уметь: различать понятия «размещение» и «сочетания»; определять вид комбинаций, о котором идет речь в задачах; решать задачи, в которых требуется составлять те или иные комбинации элементов и подсчитать их число.

Учащиеся основной школы должны использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни для: решения комбинаторных задач.

3. Выполнен анализ содержания теоретического и задачного материалов по теме «Перестановки. Размещения. Сочетания» в учебниках математики 5-6 классов и в учебниках алгебры 7-9 классов. Установлено, что на изучение данной темы в 5-6 классах отводится не более трёх часов, а в 7-9 классах не более десяти часов. Во многих учебниках тема «Перестановки. Размещения. Сочетания» отсутствует. Данная тема встречается в ОГЭ. Рассмотрев задачный материал по теме «Перестановки. Размещения. Сочетания» у различных авторов, хочется отметить следующие учебники: «Алгебра 7» Ю.М. Колягина и «Алгебра 9» Ю.Н. Макарычева. В данных книгах задачный материал представлен с большим количеством примеров и множеством интересных и нестандартных задач. Проанализировав учебники разных авторов, легко сделать вывод о том, что в содержании учебников содержатся одинаковые задачи и разбираются схожие примеры по данной теме.

ГЛАВА II. МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ ОЛИМПИАДНЫХ ЗАДАЧ В КУРСЕ МАТЕМАТИКИ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ

§6. Типы олимпиадных задач по теме «Перестановки. Размещения. Сочетания»

В повседневной жизни нам часто встречаются задачи, имеющие сразу несколько решений. Важно не упустить ни один из вариантов решения, чтобы сделать верный выбор. Для этого необходимо уметь выполнять поиск всех возможных вариантов. Задачи о различных комбинациях объектов называют комбинаторными. Данный раздел математики довольно быстро развивается в последнее время. Это развитие обусловлено общим увеличением интереса к задачам дискретной математики. Методы комбинаторики применяются для решения житейских задач таких, как составление расписаний, разработка планов реализации, производства Комбинаторные методы также находят широкое применение в различных областях науки: физика, биология, химия, теория вероятностей и экономика.

В настоящее время методисты не выделяет отдельных типов олимпиадных комбинаторных задач. Познакомимся с основными определениями темы «Перестановки. Размещения. Сочетания».

Определение 1 [48, С.21]: «Пусть имеется множество, содержащее n элементов. Произвольный упорядоченный набор, составленный из k различных элементов данного множества, называется *размещением* из n элементов по k элементов».

Определение 2 [48, С.22]: «Пусть имеется множество, содержащее n элементов. Произвольная цепочка длины n, составленная из всех элементов данного множества, называется *перестановкой* этого множества или перестановкой n элементов».

Определение 3 [48, С.23]: «Пусть имеется множество, содержащее n элементов. Произвольный неупорядоченный набор, составленный из k различных элементов данного множества, называется *сочетанием* из n элементов по k элементов».

Анализ работ А.Г. Фаркова [42], Н.В. Горбачёва [3], И.В. Яковлева [48] позволяет выделить лишь *типологию методов решения олимпиадных задач* по теме «Перестановки. Размещения. Сочетания»:

– задачи на метод перебора (систематический перебор, перебор с ограничениями);

– задачи на применение графических моделей (таблицы, графы);

– задачи на использование комбинаторных правил;

– задачи на использование формул комбинаторики.

Обратимся к первому методу решения задач - *методу перебора все возможных вариантов*. В простых случаях можно выписать все необходимые варианты. Однако если не систематизировать выписывание вариантов, то довольно просто ошибиться и подсчитать некую комбинацию дважды или, напротив, потерять необходимую комбинацию. Для того чтобы данных ошибок не произошло желательно придерживаться двух простых правил:

1. Обозначать комбинации цифрами или буквами, так каждая комбинация станет уникальной.

2. Выписывать комбинации стоит по порядку (алфавитному или возрастающему).

Покажем применение данных правил при решении олимпиадных задач по теме исследования.

Задача 18 *(Леонард Эйлер)* [48, С.3]: «Четыре гостя при входе в ресторан отдали швейцару свои шляпы, а при выходе получили их обратно. Невнимательный швейцар раздал шляпы случайным образом. Сколько существует вариантов, при которых каждый гость получил чужую шляпу?»

Решение. Пронумеруем гостей и их шляпы цифрами от 1 до 4 соответственно. Для удобства номер шляпы совпадает с номером гостя.

Нужно выписать по возрастанию все четырёхзначные числа из чисел 1, 2, 3, 4 так, чтобы ни одна цифра не стояла на позиции со своим номером. Составим таблицу (рис.1): красные цифры над чертой примем за номер гостя, под чертой расположим комбинации шляп.

1	2	3	4
2	1	4	3
2	3	4	1
2	4	1	3
3	1	4	2
3	4	1	2
3	4	2	1
4	1	2	3
4	3	1	2
4	3	2	1

Рис. 1. Таблица гостей и шляп.

Наглядно видно, что имеется 9 вариантов необходимой раздачи шляп.

Ответ: 9 вариантов.

Задачи на применение графических моделей отличаются от остальных своей наглядностью. Рассмотрим несколько задач на применение данного метода.

Задача 19 *(«Высшая проба», 2013, 8)* [36]: «Сколько одночленов окажется в многочлене $1 + t^3 + t^6 + \cdots + t^{30}\quad 1 + t^5 + t^{10} + \cdots + t^{30}$ после раскрытия скобок и приведения подобных членов?»

Решение. Для начала раскроем скобки. Далее выпишем в таблицу 5 все получившиеся степени одночленов, не приводя подобных членов. Первая строка в таблице содержит степени, которые получились при умножении первого многочлена-сомножителя на первое слагаемое второго многочлена. Оно равно 1. Вторая строка заполнена соответственно степенями, полученными при умножении первого многочлена на второе слагаемое. По данному принципу заполним всю таблицу.

Таблица 4

Степени одночленов

0	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
5	8	11	14	17	20	23	26	29	32	35
10	13	16	19	22	25	28	31	34	37	40
15	18	21	24	27	30	33	36	39	42	45
20	23	26	29	32	35	38	41	44	47	50
25	28	31	34	37	40	43	46	49	52	55
30	33	36	39	42	45	48	51	54	57	60

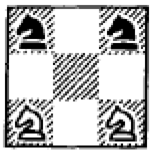
Количество всех степеней одночленов равно 77, из них 24 степени входят в таблицу дважды. Следовательно, после приведения подобных членов останется $77 - 24 = 53$ одночлена.

Ответ: 53 одночлена.

Определение 4 [3, С.56]: «*Графом* называется конечное множество точек, некоторые из которых соединены линиями. Точки называются *вершинами графа*, а соединяющие линии – *рёбрами*».

Любая карта дорог, схема метро и даже чертёж многоугольника могут стать примером графа.

Задача 20 [3, С.57]: «Можно ли, сделав несколько ходов конями из положения на рис. 2.1, расположить их так, как показано на рис. 2.2?»



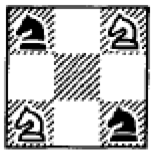


Рис. 2.1. Рис. 2.2. Условие задачи 20.

*Решение.*Пронумеруем клетки доски числами от 1 до 9 (рис. 6.3).

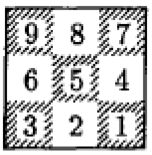


Рис. 2.3. Пронумерованная доска

Сопоставим каждой клетке точку на плоскости. Если из одной клетки можно попасть в другую ходом коня, то соединим данные точки линией и получим (рис 2.4).

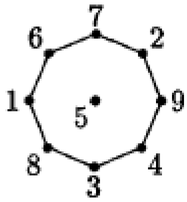


Рис. 6.4. Граф

Посмотрим на необходимую расстановку коней (рис. 2.5).

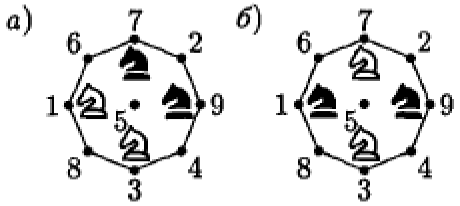


Рис. 2.5. Графы расположения коней.

Порядок следования коней на окружности измениться не может. Следовательно, переставить коней должным образом невозможно.

Ответ: невозможно.

Правило суммы и правило произведения – основные комбинаторные принципы, которые используются в комбинаторике повсеместно.

Правило суммы [48, С.12]: «Пусть объект aможно выбратьm способами, причём выбор одного объекта исключает одновременный выбор другого объекта. Тогда выбор «либо a, либо b» можно сделать $m+n$ способами».

Правило произведения [48, С.13]: «Пусть объект aможно выбрать mспособами, после чего объект b можно выбрать nспособами. Тогда упорядоченную пару a, b можно выбрать mnспособами; иными словами, существует mn различных упорядоченных пар a, b ».

Рассмотрим применение данных принципов на основе решения следующих олимпиадных задач.

Задача 21 [49, С.162]: «Из города А в город Б ведут две дороги, из А в Г – четыре дороги, из Б в В – три дороги, из Г в В – пять дорог. а) Сколько различных дорог ведёт из А в В через Б? б) Сколько вообще различных дорог из А в В?»

Решение. а) По правилу произведения: $2 \cdot 3 = 6$ дорог.

б) Рассмотрим два случая пути через Б и через Г. В первом по правилу произведения: $2 \cdot 3 = 6$, а во втором имеем $4 \cdot 5 = 20$ дорог. Используя правило суммы, получаем $20 + 6 = 26$ дорог.

Ответ: а) 6 дорог; б) 26 дорог.

Задача 22 *(«Высшая проба, 2014, 8)* [36]: «Сколько существует способов расставить на шахматной доске 8×8 белую ладью и чёрного короля так, чтобы ладья била короля, но король не бил ладью? Способы расстановки, получающиеся друг из друга поворотом доски, считаются различными».

Решение. При любом расположении на доске ладья держит под боем 7 клеток по горизонтали и 7 клеток по вертикали, то есть всего 14 клеток.

Если король находится в углу шахматной доски (таких клеток 4), то он бьёт по горизонтали и вертикали две клетки. Следовательно, ладью можно ставить на 12 клеток (рис. 3.1).

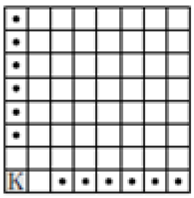


Рис. 3.1.

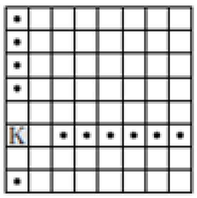


Рис. 3.2.

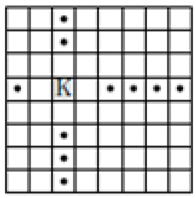


Рис. 3.3.

Если король стоит не в углу, но на краю доски (таких клеток 24), то он бьёт три клетки. Следовательно, ладью можно ставить на 11 клеток (рис. 3.2).

Если король стоит не на краю доски (таких клеток 36), то он бьёт четыре клетки. Следовательно, ладью можно ставить на 10 клеток (рис. 3.3).

Общее количество расстановок короля и ладьи равно:

$$4 \cdot 12 + 24 \cdot 11 + 36 \cdot 10 = 672.$$

Ответ: 672 способа.

Олимпиадные задачи по теме «Перестановки. Размещения.

Сочетания» можно решить также *при помощи использования формул комбинаторики.* Для того чтобы быстро и безошибочно определить необходимую формулу можно предложить учащимся воспользоваться Схемой 1.

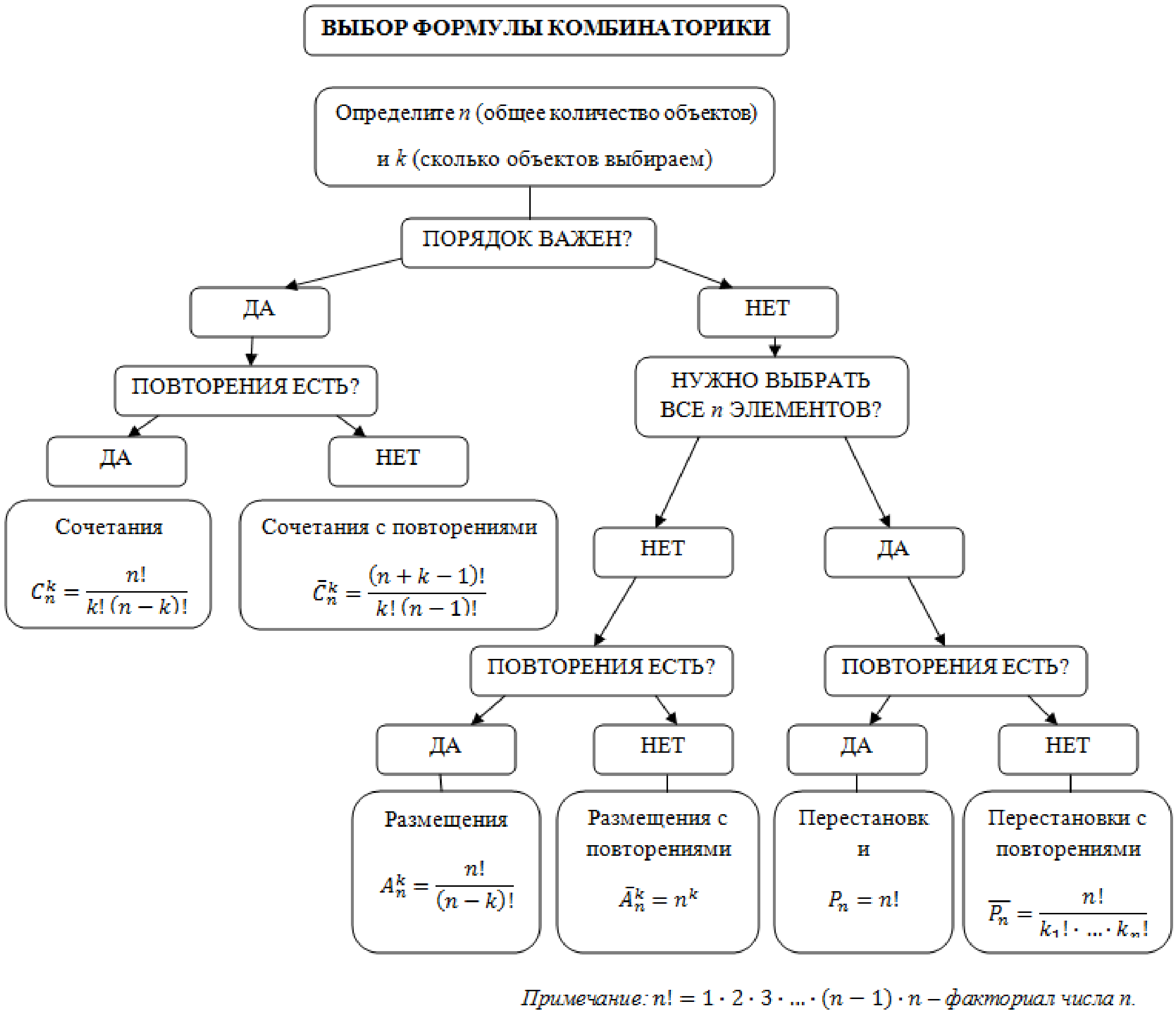


Схема 1. Выбор формулы комбинаторики.

Воспользуемся данной схемой для решения следующих олимпиадных задач.

Задача 23 [21, С. 26]: «Сколькими способами можно расположить на шахматной доске 8 ладей (рис. 4), чтобы они не могли взять друг друга?»

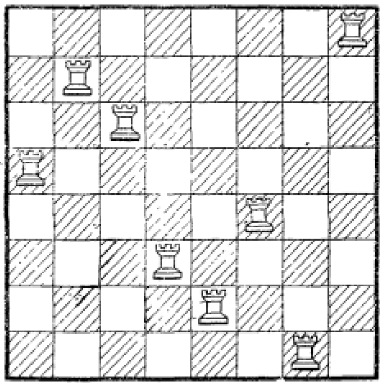


Рис. 4. Шахматная доска.

Решение. Очевидно, что на каждой вертикали и каждой горизонтали шахматной доски может быть только по одно ладье. Следовательно, числом возможных позиций является число перестановок из 8 ладей:

$$P_8 = 8! = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40320.$$

Ответ: 40320 способами.

Задача24 [20, С. 5]: «Если в турнире участвуют 20 команд и дележ мест исключен, то сколькими способами могут распределяться первые 3 места (т.е. золотая, серебряная, бронзовая медали)?»

Решение. Каждая команда хочет победить, поэтому порядок, безусловно, важен. Нам необходимо выбрать всего 3 команды, поэтому используем формулу размещений:

$$A_{20}^{3} = \frac{20!}{20-3\ !} = 20 \cdot 19 \cdot 18 = 6840.$$

Одна команда не может занять сразу два места, поэтому, очевидно, повторения здесь невозможны.

Ответ: 6840 способами.

Задача 25 *(«Физтех, 2011,9)* [35]: «19 депутатов Городского Собрания выбирают Председателя из 5 кандидатов. Каждый голосует ровно за одного из них. После голосования составляется протокол заседания, в котором указывается лишь количество голосов за каждого кандидата (без указания, кто за кого проголосовал). Сколько различных протоколов может получиться?».

Решение. Пусть x_1 – количество голосов за первого кандидата, x_2 – за второго, ... , x_5 – за пятого. Тогда

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 19, \quad (1)$$

так как каждый депутат отдавал лишь один голос. Невооружённым глазом видно, что количество решений уравнения (1) в целых неотрицательных числах равно искомому количеству протоколов. Для решения задачи разложим 19 голосов по пяти различным кандидатурам, а значит, используем формулу сочетаний без повторений:

$$C_{23}^{4} = \frac{23!}{4!\ 23-4\ !} = \frac{23!}{4!\,19!} = \frac{23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 20}{24} = 8855.$$

Ответ: 8855 протоколов

Задача 26 [46, С.290]: «Сколькими способами можно разделить 7 различных конфет между тремя детьми? А 7 одинаковых конфет?»

Решение. Если конфеты различные, то нужно для подбора одного из трёх детей к конфете используем формулу размещений с повторениями:

$$A_7^3 = 3^7 = 2187.$$

Чтобы раздать 7 одинаковых конфет трём ребятам, необходимо использовать формулу сочетаний без повторений:

$$C_9^2 = \frac{9!}{2!\ 9-2\ !} = \frac{9 \cdot 8}{2} = 36.$$

Ответ: 2187 способами; 36 способами.

Задача 27 [21, С.28]: «В гастрономе имеются конфеты трёх наименований. Конфеты упакованы в коробки трёх видов – для каждого наименования своя коробка. Сколькими способами можно заказать набор из 5 коробок?»

Решение. В данной задаче требуется найти число выборок, составляющиеся из 5 элементов и отличающихся друг от друга хотя бы одним элементом. Повторение элементов несомненно будет встречаться в составе каждой выборки.

Сначала зашифруем заказ нулями и единицами. Запишем такое количество единиц, которое соотвествует заказу коробок конфет первого наименования. Затем напишем ноль. По такому же принципу оформим заказы коробок конфет второго и третьего наименования. Если конфеты первого и последнего наименования не заказаны совсем, то мы это отметим нулём. Если не заказаны конфеты второго и третьего наименования, то запишем два нуля.

Рассмотрим следующие варианты событий. Зашифруем событие «заказано 2 коробки первого наименования конфет, второго наименования -1, третьего наименования -2»: 1101011, событие «заказано 2 коробки первого наименования и третьего -3»: 1100111, событие «заказано 4 коробки второго наименования и третьего -1»: 0111101.

Заметим, что каждый шифр имеет одниковый состав: пять единиц и два нуля. Значит, для решения задачи используем формулу перестановок с повторениями:

$$P_{5,2} = \frac{7!}{5!\,2!} = \frac{7 \cdot 6}{2} = 21.$$

Ответ: 21 набор конфет.

Задача 28 [48, С.13]: «Сколькими способами можно разложить mразличных шаров в n различных ящиков? На число шаров в ящике ограничений нет».

Решение. Предположим, что каждый шар – это клетка. Число от 1 до n (номер ящика) можно вписать в каждую клетку. Получается, чтобы расположить шары по ящикам необходимо воспользоваться формулой размещений с повторениями:

$$A_n^m = n^m.$$

Ответ: n^m способами.

Задача 29 [3, С.192]: «Шесть ящиков занумерованы числами от 1 до 6. Сколькими способами можно разложить по этим ящикам 20 одинаковых шаров так, чтобы ни один ящик не оказался пустым?»

Решение. Все шары выложим в ряд. Разделим ряд пятью перегородками, тем самым получим 6 групп. Одна группа шаров соответствует одному из ящиков. Получим, что число вариантов раскладки шаров есть число способов расположения перегородок. На любом из 19 мест могут располагаться перестановки. Поэтому число возможных вариантов найдём по формуле сочетаний с повторениями:

$$C_{19}^{5} = \frac{(19+5-1)!}{5!\,(19-1)!} = \frac{23!}{5!\,18!} = \frac{23\cdot 22\cdot 21\cdot 20\cdot 19}{120} = 33649.$$

Ответ: 33649 способами.

Рассмотрев множество задач, ещё раз отметим, что выделить типы олимпиадных задач по теме «Перестановки. Размещениея. Сочетания» в наше время не представляется возможным. Методисты предлагают работать с комбинаторными задачами используя типологию методов их решения. Решить одну задачу можно сразу несколькими методами. «Человеку, изучающему алгебру, часто полезно решить одну и ту же задачу тремя различными способами, чем решить три или четыре различных задачи. Решая одну задачу различными способами, можно путем сравнения выяснить, какой из них короче и эффективнее. Так вырабатывается опыт», - говорил У.У. Сойер [51].

§7. Методические рекомендации по обучению решению олимпиадных задачпо теме «Перестановки. Размещения. Сочетания» в курсе математики основной школы

Мир постоянно развивается, неизменным остаётся лишь неисчерпаемый потенциал олимпиадных задач. Многие авторы относятся к олимпиадным задачам по-разному. Одни преподносят их как важнейшее средство для повышения логической культуры и расширения математических знаний. Другие напротив, используют нестандартные задачи как некую рекламу различных математических идей, оформленную в виде неожиданных и красивых решений. Польза олимпиадных заданий видна невооружённым взглядом. Такие задания позволяют сделать обыкновенные уроки математики интересными, эффективными и насыщенными различной информацией. Несомненна роль олимпиад в выявлении одарённых детей, в расширении кругозора учащихся и раскрытии их творческого потенциала. Математические олимпиады развивают интерес к изучению данного предмета.

Методика подготовки к олимпиадам по математике выстроена на основе обобщения конкретного опыта, подкреплённого достаточно весомыми реальными результатами.

А. Шенфельд говорит: «На безупречное решение некоторых олимпиадных заданий может уйти довольно большое количество времени, поэтому многие учителя просто не возьмутся за решение подобных задач» [52]. Преподаватели, которые берутся за подготовку учащихся к олимпиадам, должны иметь в своём арсенале собственные решения нестандартных задач, которыми можно было бы гордиться.

Умеют решать данные задачи люди, которые занимаются этим достаточно регулярно, имеют опыт решить ещё несколько таких задач и обладают опытом самостоятельного решения небстандратных задач. «Нет ничего ценнее собственного опыта решений», - отмечал Джордж Пойа [50].

По мнению В.А. Шеховцова, можно выделить семь факторов, которые способствуют успешному решению олимпиадных задач:

– «объём фактических знаний;

– развитые воображение, фантазия и интуиция;

– опыт самостоятельных решений;

– навыки владения основными мыслительными операциями (анализ, синтез, сравнение, сопоставление, обобщение, аналогия и другие);

– знание основных классов нестандартных задач;

– постоянное совершенствование логических навыков (выдвижение гипотез, построение доказательной структуры, примеры и контрпримеры, выводы и умозаключения);

– умения изучать, понимать и оценивать решения, предлагаемые другими» [47, С.4].

Исходя из этих позиций, можно построить полный граф с семью вершинами (рис. 5) и выделить определённую систему подготовки учащихся к олимпиадам.

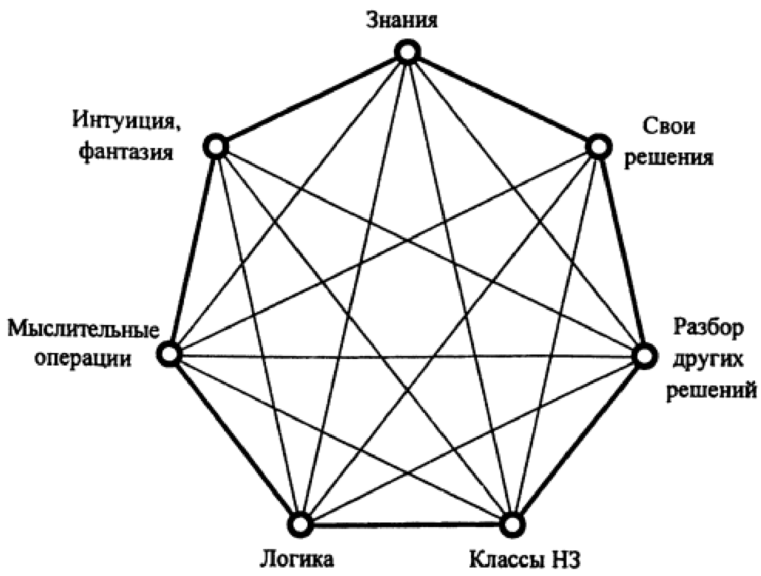


Рис. 5. Полный граф компонентов успешного решения.

На основе графа компонентов успешного решения, В.А. Шеховцов предлагает следующие семь методических рекомендаций [47, С.6]:

1. «Желательно ещё до первого занятия дать учащимся для ознакомления две – три интересных, но не самых сложных задачи, дать список рекомендуемой литературы и на первом занятии обсудить решения предложенных заданий.

2. На первом занятии изучить порядок работы и выдать на достаточно продолжительный срок список из 7 – 10 заданий.

3. На последующих занятиях разбираются известные классы нестандартных заданий, приёмы эвристической деятельности, обязательно иллюстрируемые яркими примерами из опыта решений. Основное внимание

уделяется обсуждению степени продвижения в задачах для самостоятельного исследовательского поиска. Фиксируются любые, даже самые незначительные успехи участников группы.

4. Делом чести всех слушателей, конечно, является участие в любых возможных олимпиадах и турнирах. Тогда всё внимание группы переключается на эти соревнования и на подробный разбор их решений с обобщением на уже изученные классы нестандартных заданий и эвристические приёмы. В то же время — это участие – сугубо добровольное. Нельзя перегружать учеников, которые возможно участвуют и в других предметных олимпиадах.

5. На занятиях в качестве разминки и для настройки интеллектуального тонуса, можно и нужно иногда решать простые задания и головоломки, причём их может предлагать не только руководитель. Полезно любое задание, если оно вызывает искренний интерес и является достаточно поучительным.

6. Перед праздниками или каникулами руководитель может организовать занятие в форме КВН, викторины или конкурса блиц-решений и ответов на вопросы.

7. На заключительном занятии к концу учебного года подводятся итоги деятельности группы и обсуждаются возможные планы на будущее».

А.В. Фарков, в свою очередь, отмечает, что наиболее подходящей формой подготовки к математическим олимпиадам в 5–8 классах является математический кружок. Автор определяет математический кружок, как «самодеятельное объединение учащихся под руководством педагога, в рамках которого проводятся систематические занятия с учащимися во внеурочное время» [42, С.41].

Основными целями проведения кружковых занятий являются:

– подготовка к математическим олимпиадам;

– расширение и углублений знаний;

– развитие интереса к математике, математического мышления и исследовательских умений;

– воспитание инициативности и настойчивости.

Данные цели частично реализуются на уроке, но окончательная их реализация переносится на кружки.

Таким образом, по мнению А.Г. Фаркова, для подготовки кружкового занятия учителю необходимо:

– изучить всю информацию, которая будет рассмотрена на занятии, и решить все подобранные задачи;

– определить наиболее трудную и интересную информацию в подготовленном материале;

– отсортировать задачи по степени сложности или трудности;

– задачи с большими выкладками вносить в структуру занятия не стоит;

– стоит сделать акцент на задачах с интересной идеей;

– необходимо иметь в арсенале подготовительную задачу, чтобы помочь учащимся в случае затруднения решения более сложной задачи;

– для применения дифференцированного подхода целесообразно давать учащимся задачи «двойники» - задачи с одной центральной идеей решения, но разного уровня сложности;

– для домашнего задания первое время стоит задавать не более 2-3 задач, но если учащиеся будут решать их активно, то количество задач следует увеличить.

Необходимо чтобы все ученики готовились к кружку. Для этого можно дать учащимся различные задания: объяснение решения задачи остальным учащимся, подготовка доклада по теме занятия.

Для освещения работы кружа можно опубликовать труды учащихся в математической газете, в которой можно отметить план работы кружка и его задачи.

На итоговом занятии кружка целесообразно провести беседу с учениками о том, чему научились ребята на кружке, что нового узнали и какие новые навыки приобрели. Подытожить работу кружка необходимо олимпиадой по задачам, разобранным на занятиях. Затем следует предложить литературу для самостоятельной работы летом.

Е.В. Городнова в своей статье, также как и А.Г. Фарков, отмечает, что самым комфортным способом для подготовки учащихся к участию в олимпиаде является математический кружок. Автор выделяет пять основных этапов, лежащих в основе данного занятия [3, С. 36]:

1. Мотивационный этап. Это некий исторический экскурс. Учителю необходимо использовать исторический материал: исторические сведения и задачи, занимательную литературу, биографии знаменитых математиков.

2. Ориентировочный этап. На данном этапе учитель показывает ученикам опорную задачу и разбирает её.

3. Исполнительный этап. В ходе этого этапа учитель предлагает ученикам решить аналогичную, но немного усложнённую задачу. В данной задаче необходимо воспроизвести ход действий, аналогично опорной задаче.

4. Контролирующий этап. Данный этап дает возможность ученикам решить парочку развивающих задач, условия которых изменены, но сохраняется идея решения разобранных ранее задач.

5. Мотивационный этап. Пятый этап проводят дети самостоятельно. На этом этапе ученики разбирают занимательные, шутливые математические задачи, которые они подобрали специально для занятия.

К любому кружковому занятию задача учителя подобрать опорную задачу. При работе с различного вида задачами главное поддерживать постоянное сотрудничество с детьми, стимулировать их к выполнению заданий, стараться вникнуть в их рассуждения и направить на верный путь, и несомненно поощрять верные подходы.

Как добиться успеха при участии в различных олимпиадах? Ответ прост. Нужно решать нестандартные задачи. Успех не строится на одних лишь способностях, его достигают со знанием стандартных олимпиадных заданий. Поэтому подготовка к олимпиаде – это серьезный труд. Учителю необходимо вести факультативы и кружки, проводить большую подготовительную работу, подбирать и решать различные задачи олимпиадного типа, детально знакомиться с новинками литературы, а также с различными вопросами, для того чтобы подготовить учащихся к олимпиаде. Ведь олимпиада – это внеклассная, внеурочная форма обучения. Следует отметить, что для подготовки школьников следует применять индивидуальный подход к каждому ученику и делать основной упор на самостоятельную работу учащегося.

Для подготовки учащихся к олимпиадам И.В. Сафонова предлагает следующие рекомендации учителям [38]:

1. Подготовка к успешному участию ученика в предметных олимпиадах определяется индивидуальной работой ученика и учителя. Для начала необходимо определитесь, кто из учащихся проявляет интерес к математике. Не забывайте, что участие в олимпиаде – дело добровольное!

2. Проведите беседу с учеником. Если он не проявляет интереса к участию в олимпиадах, то не настаивайте на этом. Помните о том, что ваш предмет не является единственной сферой его интересов.

3. Если ученик ранее не участвовал в олимпиадах, то начинать подготовку к ним надо заранее. Учащийся должен быть ознакомлен с правилами проведения олимпиады, а также должен знать, что его там ожидает.

4. Подготовьте дидактические материалы для самостоятельной работы ученика, чтобы у учителя ребёнок получал лишь консультации.

5. Составьте план подготовки к олимпиаде. В него должны входить время всех занятий и консультаций, а также последовательность тем и задания к ним. При подготовке к успешному участию в олимпиаде учащийся должен успевать проходить школьную программу и ряд тем, не входящих в программу общеобразовательных школ.

6. Используйте возможности дистанционных олимпиад по предметам

при подготовке к Всероссийской олимпиаде школьников. Это позволит учащимся проверить свои силы, увидеть сильные и слабые стороны при подготовке к олимпиаде, а также поверить в свои силы.

7. Хвалите своих учащихся, даже если они не стали призёрами. Любой результат ученика достоин уважения и должен быть отмечен учителем. Проведите с ребёнком анализ его олимпиадной работы и спланируйте дальнейшую работу. Убедите ребёнка, что знания, полученные по подготовке к олимпиаде, он может применять повсеместно.

8. Занимайтесь саморазвитием. Наука не стоит на месте. Многие олимпиадные задачи оказываются сложными даже для педагогов. Учитель должен обладать глубокими знаниями своего предмета для того, чтобы вырастить достойного участника олимпиадного движения.

Принцип «административного давления» с целью удержать ученика допускать неприемлемо. Заставить его участвовать в олимпиаде по предмету нецелесообразно. Положительного результата это не принесёт.

Решая комбинаторные задачи, ученики учатся беспорядочному перебору всевозможных вариантов. На основе данных умений школьников можно научить системному перебору.

В своей статье М.Г. Сабанашвили выделяет *три шага обучения решению комбинаторных задач учеников 5-го класса* [34, С.180]: подготовительный этап, решение задач с небольшим количеством возможных вариантов, работа с графическими средствами.

На подготовительном шаге улучшается работа мыслительных операций, таких как анализ, синтез и сравнение, являющихся частью процесса решения комбинаторных олимпиадных задач. Особое внимание уделяется сравнению объектов, которые состоят из отдельных компонентов. Производится сравнение по следующим признакам: количество элементов; состав элементов, из которых состоит объект; расположение элементов в объекте.

Можно предложить рассмотреть несколько задач.

Задача 30 [34, С.180]: «Рассмотрите внимательно кольца бусинок. Определите, что меняется от одного колечка к другому?» (рис. 6).

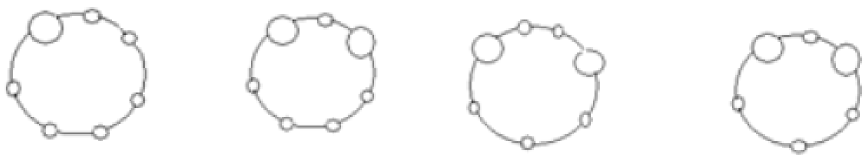


Рис. 6. Кольца бусинок.

Задача 31 [34, С.180]: «Мальчик увеличил число86 на 12, не делая записи. Как это сделано?» (Перевернул число).

На этапе решения задач с небольшим количеством вариантов ученики пробуют перебором по определенной системе определять все возможные варианты для решения комбинаторных задач. Основной целью данного этапа является обучение школьников решению задач с использованием системного перебора всевозможных вариантов.

Как научить школьников системному перебору вариантов? Можно дать им на размышление следующую задачу.

Задача 32 [34, С.181]: «Марина, Софа и Дарья едут в электричке сидя на одной лавке. Они должны проехать 8 остановок и решили менять положение на каждой остановке. Будет ли повторяться положение ребят хотя бы на одной остановке?».

Сначала ученики выполнят перебор случайным образом, то есть беспорядочно. После того, как они определят, что таких вариантов всего 6 необходимо предложить ученикам найти новый вариант решения. Попытки найти седьмой вариант решения ни к чему не приведут. Далее учитель предлагает ученикам изучить найденные варианты и найти им подобные:

МСД, СДМ, ДМС, МДС, СМД, ДСМ.

Посмотрев на предложенные варианты, ученики придут к выводу, что когда одна девочка сидит у окна, то две другие могут расположиться лишь двумя способами и каждая из девочек посидела у окна. Следовательно, возможно лишь 6 вариантов рассадки трёх девочек. Так ученики знакомятся с правилом произведения – перебором по определённой системе.

Прямой перебор всех возможных вариантов зачастую может быть сложен при решении комбинаторных задач. *Этап работы с графическими средствами* должен облегчить процесс нахождения необходимых вариантов. Для этого нужно научить школьников использовать таблицы и графы. Они позволят легко разделить рассуждения и точно перебрать все возможные варианты.

Самое простое средство организации перебора – таблица. С ней необходимо познакомить учеников в первую очередь. Рассматривая таблицу (рис. 7) учащиеся поймут правила ее построения.

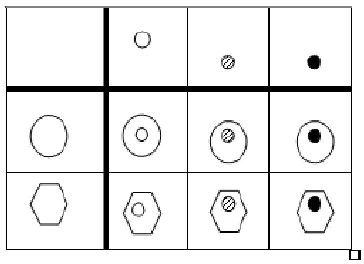


Рис. 7. Пример таблицы всевозможных вариантов.

Тогда учитель предоставит им возможность заполнить другую таблицу (рис. 8).

ед. / дес.	4	5	7
4			
5			
7			

Рис. 8. Таблица всевозможных вариантов для заполнения.

Когда школьники будут уметь строить таблицы можно переходить к решению задач с их использованием.

Обратимся к методической разработке учителя математики И.В. Девкиной. В ней представлены методические рекомендации по обучению основам комбинаторики в средней школе [5, С.10].

Автор указывает, что у учащихся необходимо развивать комбинаторный стиль мышления на основе применения *задач* *существования и построения комбинаций* с какими-либо интересными свойствами. Например, такими задачами могу стать задачи на построение магических и латинских квадратов или на применение ортогональных латинских квадратов.

По мнению И.В. Девкиной, начиная с 5 класса, целесообразно проводить исследовательскую работу. В ходе исследовательской работы учащимся легко продемонстрировать роль таких понятий, как индукция, наблюдение и эксперимент. Что, в свою очередь, привьёт школьникам навыки эвристического мышления и укажет им путь к математическому творчеству.

В средних классах в деятельность учащихся нет необходимости включать исследовательскую работу, можно включить лишь отдельные элементы исследований.

Одной из главных черт комбинаторного стиля мышления является целенаправленный перебор все возможных вариантов.

В 5-6 классах для формирования у учеников навыков, связанных с перебором и подсчетом числа комбинаций разного вида, автор предлагает решать комбинаторные задачи на перечисление. Для решения таких задач существует множество общих приемов. Однако в 5-6 классах они решаются перебором возможных вариантов. В ходе изучения данного раздела математики происходит постепенный переход к использованию других способов перебора: дерева возможных вариантов, таблиц.

В 7-9 классах основное внимание отводится решению комбинаторных задач на применение правил умножения и сложения.

И.В. Девкиной отмечается, что изучение данной темы можно начинать с вопросов: «Зачем вводить какие-то правила? Нельзя ли просто пересчитать?». Субъективность ученика и влияние диалога на интеллектуальное развитие диктует саму необходимость диалога.

Каждый вопрос учителя должен быть мотивирован. Учащиеся должны осознавать, почему именно такой вопрос задаёт сейчас учитель, какая польза будет от участия в ответе на поставленный вопрос.

При изучении комбинаторики в старшей школе вводятся понятия размещений, перестановок, сочетаний. Изучение основных комбинаторных понятий можно проводить на языке множеств или на языке выборок. И.В. Девкина отдаёт предпочтение языку выборок. Поскольку для учеников оказываются сложными понятия кортежа (для размещения с повторениями) и упорядоченного множества (для размещения без повторений). Также язык выборок позволяет опираться на содержание конкретной рассматриваемой задачи.

Процесс обучения учеников решению олимпиадных задач по теме «Перестановки. Размещения. Сочетания» должен происходить постепенно и поэтапно (подготовительный этап, этап решения задач с небольшим количеством вариантов, этап работы с графическими средствами, этап работы с формулами комбинаторики).

Таким образом, можно выделить наиболее общие рекомендации по подготовке учеников к олимпиаде: учащийся должен добровольно согласиться в ней участвовать; учитель должен тщательно распланировать план всех занятий; материал занятий должен быть интересным; на занятие не стоит выносить задачи с большими выкладками; учитель должен подготовить дидактические материалы для самостоятельной работы ученика; для закрепления целесообразно давать ученикам домашнюю работу; учителю необходимо хвалить своих учащихся, даже если они не стали призёрами; на заключительном занятии подводятся итоги.

Для успешной подготовки учеников к олимпиаде учитель должен сам быть образцом для ребёнка. Он должен постоянно расти в профессиональном плане, пользоваться авторитетом у ребят и должен казаться интересным. Учитель не должен жалеть личного времени для конечного результата и, конечно же, должен обладать необходимыми знаниями и умениями для решения олимпиадных задач. Тогда ученик, смотря на своего учителя, постарается не подвести его.

Выводы по второй главе

1. Установлено, что в наше время выделить типы олимпиадных задач по теме «Перестановки. Размещениея. Сочетания» не представляется возможным. Методисты предлагают работать с олимпиадными комбинаторными задачами, используя типологию методов их решения:

– задачи на метод перебора (систематический перебор, перебор с ограничениями);

– задачи на применение графических моделей (таблицы, графы);

– задачи на использование комбинаторных правил;

– задачи на использование формул комбинаторики.

Решить одну задачу можно сразу несколькими методами. Рассмотрены задачи на каждый из представленных выше методов решения.

2. Процесс обучения учеников решению олимпиадных задач по теме «Перестановки. Размещения. Сочетания» должен происходить постепенно и поэтапно (подготовительный этап, этап решения задач с небольшим количеством вариантов, этап работы с графическими средствами, этап работы с формулами комбинаторики).

Выделены наиболее общие рекомендации по подготовке учеников к олимпиаде:

– учащийся должен добровольно согласиться участвовать в олимпиаде;

– учитель должен тщательно распланировать план всех занятий;

– материал занятий должен быть интересным;

– на занятие не стоит выносить задачи с большими выкладками;

– учитель должен подготовить дидактические материалы для самостоятельной работы ученика;

– для закрепления целесообразно давать ученикам домашнюю работу;

– учителю необходимо хвалить своих учащихся, даже если они не стали призёрами;

– на заключительном занятии подводятся итоги.

Для успешной подготовки учеников к олимпиаде учитель должен стать примером для ребёнка. Он должен развиваться в своей профессиональной сфере и быть интересным для учеников. Учитель должен обладать необходимыми знаниями и умениями для решения олимпиадных задач, а также не должен жалеть личного времени для их решения. Тогда, смотря на своего учителя, ученик постарается не подвести его.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сформулируем основные выводы и полученные результаты проведенного исследования.

1. Рассмотрены различные формулировки понятия олимпиадная (нестандартная) задача. Зачастую авторы методических работ не дают четкого определения для *олимпиадной задачи*. Большинство авторов убеждено в том, что данное понятие является общеизвестным. Многие методисты и вовсе относят к олимпиадным задачам те, где есть идея решения и применяются специальные методы решения. *Олимпиадные задачи* - задачи, для которых в курсе математики не имеется общих правил и положений, определяющих точную программу их решения. Произведён сравнительный анализ отличия нестандартной задачи от задачи повышенной сложности. Разобраны понятия сложность и трудность олимпиадной задачи. Выделены основные типы нестандартных задач по математике и требования к ним.

2. Выявлены основные цели и задачи обучения теме «Перестановки. Размещения. Сочетания» в курсе математики основной школы. Определено, что при изучении данной темы у учащихся происходит интеллектуальное развитие; формирование критичности мысли; развитие логического мышления и интуиции; формирование функциональной грамотности учащихся, то есть учат их воспринимать и анализировать информацию, представленную в любой форме; овладение базовым понятийным аппаратом; формирование представления о комбинаторных закономерностях в реальном мире.

3. Раскрыты основные требования к знаниям и умениям учащихся по теме «Перестановки. Размещения. Сочетания». Выявлено, что изучение данной теме происходит постепенно.

К основным требованиям относятся следующие:

– учащиеся должны знать: комбинаторное правило умножения; определение перестановок, размещений, сочетаний; понятия отношений частоты и вероятности случайного события; формулы для подсчета их числа.

– учащиеся должны уметь: различать понятия «размещение» и «сочетания»; определять вид комбинаций, о котором идет речь в задачах; решать задачи, в которых требуется составлять те или иные комбинации элементов и подсчитать их число. Учащиеся основной школы должны использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни для решения комбинаторных задач.

4. Выполнен анализ содержания теоретического и задачного материалов по теме «Перестановки. Размещения. Сочетания» в учебниках математики 5-6 классов и в учебниках алгебры 7-9 классов. Установлено, что на изучение данной темы в 5-6 классах отводится не более трёх часов, а в 7-9 классах не более десяти часов. Во многих учебниках тема «Перестановки. Размещения. Сочетания» отсутствует. Данная тема встречается в ОГЭ. Рассмотрев задачный материал по теме «Перестановки. Размещения. Сочетания» у различных авторов, хочется отметить следующие учебники: «Алгебра 7» Ю.М. Колягина и «Алгебра 9» Ю.Н. Макарычева. В данных книгах задачный материал представлен с большим количеством примеров и множеством интересных и нестандартных задач. Проанализировав учебники разных авторов, легко сделать вывод о том, что в содержании учебников содержатся одинаковые задачи и разбираются схожие примеры по данной теме.

5. Установлено, что в наше время выделить типы олимпиадных задач по теме «Перестановки. Размещениея. Сочетания» не представляется возможным. Методисты предлагают работать с олимпиадными комбинаторными задачами, используя типологию методов их решения:

– задачи на метод перебора (систематический перебор, перебор с ограничениями);

– задачи на применение графических моделей (таблицы, графы);

– задачи на использование комбинаторных правил;

– задачи на использование формул комбинаторики.

Решить одну задачу можно сразу несколькими методами. Рассмотрены задачи на каждый из представленных выше методов решения.

6. Процесс обучения учеников решению олимпиадных задач по теме «Перестановки. Размещения. Сочетания» должен происходить постепенно и поэтапно (подготовительный этап, этап решения задач с небольшим количеством вариантов, этап работы с графическими средствами, этап работы с формулами комбинаторики).

Выделены наиболее общие рекомендации по подготовке учеников к олимпиаде:

– учащийся должен добровольно участвовать в олимпиаде;
– учитель должен тщательно распланировать план всех занятий;
– материал занятий должен быть интересным;
– на занятие не стоит выносить задачи с большими выкладками;
– учитель должен подготовить дидактические материалы для самостоятельной работы ученика;
– для закрепления целесообразно давать ученикам домашнюю работу;
– учителю необходимо хвалить своих учащихся, даже если они не стали призёрами;
– на заключительном занятии подводятся итоги.

Для успешной подготовки учеников к олимпиаде учитель должен стать примером для ребёнка. Он должен развиваться в своей профессиональной сфере и быть интересным для учеников. Учитель должен обладать необходимыми знаниями и умениями для решения олимпиадных задач, а также не должен жалеть личного времени для их решения. Тогда, смотря на своего учителя, ученик постарается не подвести его.

Все это дает основание считать, что задачи, поставленные в исследовании, полностью решены.

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бондаренко, Г.И. Методическая разработка открытого урока по теме «Основные понятия комбинаторики. Задачи на подсчет числа размещений, перестановок, сочетаний. Решение задач на перебор вариантов». – Милеево, 2016. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://nsportal.ru/npo-spo/estestvennye-nauki/library/2017/01/23/metodicheskaya-razrabotka-otkrytogo-uroka-osnovnye.– Последнее обновление 20.03.2018.

2. Бурмистрова, Т.А. Алгебра. Сборник рабочих программ. 7 – 9 классы [Текст]: пособие для учителей общеобразовательных организация/ Т.А. Бурмистрова. – 2-е изд., доп. – М.: Просвещение, 2014. – 96 с.

3. Горбачёв, Н. В. Сборник олимпиадных задач по математике. – М.: МЦНМО, 2004. – 560 с.

4. Городнова, Е.В. Методика обучения школьников решению олимпиадных задач по математике в системе дополнительного образования / Е.В. Городнова// Вопросы образования и науки: теоретический и методический аспекты. - 2015.– С. 36 – 37. Режим доступа: https://elibrary.ru/item.asp?id=23844742. -Последнее обновление 16.05.2018.

5. Девкина, И.В. Методическая разработка «Особенности методики изучения элементов комбинаторики, статистики и теории вероятностей в средней школе». – Рыбинск, 2016. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://old.iro.yar.ru/pnpo/uch09/devkina_ref.doc. – Последнее обновление 19.05.2018.

6. Дорофеев, Г.В. Алгебра. 7 класс [Текст]: учебник для общеобразовательных организаций/ Г.В. Дорофеев, С.Б. Суворова, Е.А. Бунимович. – 2-е изд. – М.: Просвещение, 2014. – 287 с.

7. Дорофеев, Г.В. Алгебра. 7 класс. Методические рекомендации. [Текст]: пособие для учителей / Г.В. Дорофеев, С.Б. Суворова, Е.А. Бунимович. – М.: Просвещение, 2015. – 185 с.

8. Дорофеев, Г.В. Алгебра. 8 класс [Текст]: учебник для

общеобразовательных организаций/ Г.В. Дорофеев, С.Б. Суворова, Е.А. Бунимович. – 3-е изд. – М.: Просвещение, 2016. – 320 с.

9. Дорофеев, Г.В. Алгебра. 8 класс. Методические рекомендации. [Текст]: пособие для учителей / Г.В. Дорофеев, С.Б. Суворова, Е.А. Бунимович. – М.: Просвещение, 2015. – 246 с.

10. Дорофеев, Г.В. Математика. 5 класс [Текст]: учебник для общеобразовательных организаций/ Г.В. Дорофеев, С.Б. Суворова, Е.А. Бунимович. – 5-е изд. – М.: Просвещение, 2017. – 288 с.

11. Дорофеев, Г.В. Математика. 5 класс. Методические рекомендации. [Текст]: пособие для учителей / Г.В. Дорофеев, С.Б. Суворова, Е.А. Бунимович. – М.: Просвещение, 2013. – 200 с.

12. Дорофеев, Г.В. Математика. 6 класс [Текст]: учебник для общеобразовательных организаций/ Г.В. Дорофеев, С.Б. Суворова, Е.А. Бунимович. – 4-е изд. – М.: Просвещение, 2016. – 288 с.

13. Дорофеев, Г.В. Математика. 6 класс. Методические рекомендации. [Текст]: пособие для учителей / Г.В. Дорофеев, С.Б. Суворова, Е.А. Бунимович. – М.: Просвещение, 2013. – 157 с.

14. Епишева, О.Б. Учить школьников учиться математике: формирование приемов учебной деятельности: кн. для учителя / О.Б. Епишева, В.И. Крупич. – М.: Просвещение, 1990. – 128 с.

15. Колягин, Ю.М. Задачи в обучении математике. Часть I. Математические задачи как средство обучения и развития учащихся. – М., 1977. – 113 с.

16. Колягин, Ю.М. Алгебра. 7 класс [Текст]: учеб. для общеобразоват. учреждений / Ю.М. Колягин, М.В. Ткачёва, Н.Е. Фёдорова, М.И. Шабунин. – М.: Просвещение, 2012. – 319 с.

17. Колягин, Ю.М. Алгебра. 7 класс. Методические рекомендации. [Текст]: пособие для учителей / Ю.М. Колягин, М.В. Ткачёва, Н.Е. Фёдорова, М.И. Шабунин. – М.: Просвещение, – 2-е изд. - 2017. – 144 с.

18. Колягин, Ю.М. Алгебра. 8 класс. Методические рекомендации.

[Текст]: пособие для учителей / Ю.М. Колягин, М.В. Ткачёва, Н.Е. Фёдорова, М.И. Шабунин. – М.: Просвещение, – 2-е изд. - 2017. – 128 с.

19. Колягин, Ю.М. Алгебра. 9 класс [Текст]: учеб. для общеобразоват. учреждений / Ю.М. Колягин, М.В. Ткачёва, Н.Е. Фёдорова, М.И. Шабунин. – М.: Просвещение, 2014. – 304 с.

20. Левина, А. Что такое комбинаторика / А. Левина // - Квант. 1999. - №5.

21. Лютикас, В.С. Школьнику о теории вероятностей [Текст]: учеб. пособие по факультативному курсу для учащихся 8-10 классов / В.С. Лютикас – 2-е изд. – М.: Просвещение, 1983. – 127 с.

22. Макарычев, Ю.Н. Алгебра. 9 класс [Текст]: учеб. для общеобразоват. учреждений/ Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, С.Б. Суворова; под ред. С.А. Теляковского. – 18-е изд. - М.: Просвещение, 2011. – 271 с.

23. Макарычев, Ю.Н. Изучение алгебры в 7 – 9 классах [Текст]: пособие для учителей / Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, С.Б. Суворова, И.С. Шлыкова. – 4-е изд. – М.: Просвещение, 2011. – 304 с.

24. Мордкович, А.Г. Алгебра. 9 класс [Текст]: методическое пособие для учителя / А.Г. Мордкович, П.В. Семенов. – М.: Мнемозина, 2010. – 72 с.

25. Мордкович, А.Г. Алгебра. 9 класс. В 2 ч. Ч. 1 [Текст]: учебник для учащихся общеобразовательных учреждений / А.Г. Мордкович, П.В. Семенов. – 12-е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2010. – 224 с.

26. Мордкович, А.Г. События. Вероятности. Статистическая обработка данных [Текст]: Доп. параграфы к курсу алгебры 7-9 классов / А.Г. Мордкович, П.В. Семенов. – 12-е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2010. – 224 с.

27. Муравин, Г.К. Алгебра. 7 класс [Текст]: учеб. для общеобразоват. учреждений / Г.К. Муравин, К.С. Муравин, О.В. Муравина. – 9-е изд., стереотип. – М.: Дрофа, 2013. – 285 с.

28. Муравин, Г.К. Алгебра. 8 класс [Текст]: учеб. для общеобразоват. учреждений / Г.К. Муравин, К.С. Муравин, О.В. Муравина. – 15-е изд.,

стереотип. – М.: Дрофа, 2013. – 254 с.

29. Никольский, С.М. Математика. 5 класс [Текст]: методическое пособие для учителя / С.М. Никольский, М.К. Потапов. – М.: Просвещение, 2012. – 160 с.

30. Никольский, С.М. Математика. 5 класс. Методические рекомендации [Текст]: учебник для общеобразовательных организаций/ С.М. Никольский, М.К. Потапов. – 14-е изд. – М.: Просвещение, 2015. – 272 с.

31. Никольский, С.М. Математика. 6 класс [Текст]: учебник для общеобразовательных организаций/ С.М. Никольский, М.К. Потапов. – 14-е изд. – М.: Просвещение, 2015. – 256 с.

32. Примерная основная образовательная программа основного общего образования. Одобрена решением федерального учебно-методического объединения по общему образованию / М-во образования и науки РФ. – М.: Просвещение, 2015. – 560 с. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://mosmetod.ru/files/dokumenty/primernaja-osnovnaja-obrazovatelnaja-programma-osnovogo-obshchego-obrazovanija.pdf – Последнее обновление 03.04.2018.

33. Романова, Т.В. Из истории становления и развития олимпиадного движения в России. / Т.В. Романова– Москва, 2014. – 8 с.

34. Сабанашвилли, М.Г. Некоторые вопросы методики обучения решению комбинаторных задач в школьном курсе математики / М.Г. Сабанашвилли// Современные проблемы математического образования. - 2017.– С. 180 – 185. Режим доступа: http://elibrary.ru/item.asp?id=30629351. - Последнее обновление 16.05.2018.

35. Сайт олимпиады «Физтех» [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://olymp.mipt.ru. Последнее обновление 17.05.2018.

36. Сайт олимпиады школьников «Высшая проба» [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://olymp.hse.ru/mmo/. Последнее обновление 17.05.2018.

37. Сайт учебно-методических комплексов по математике для 1-11

классов Г.К. Муравина и О.В. Муравиной [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://muravin2007.narod.ru. Последнее обновление 20.03.2017.

38. Сафонова, И.В. Методические рекомендации по подготовке обучающихся к Всеармейской Олимпиаде по математике – пос. Рассвет: Изд-во АДЕККК МО РФ, 2017. - 46 с.

39. Севрюков, П.Ф. Подготовка к решению олимпиадных задач по математике [Текст] / П.Ф. Севрюков. – Изд. 2-е. – М.: Илекса; Народное образование, 2009. – 111 с. 27.

40. Ткачёва, М.В. Элементы статистики и вероятность [Текст]: учеб.для общеобразоват. учреждений для 7-9 классов / М.И. Ткачёва, Н.Е. Фёдорова. – 2-е изд. – М.: Просвещение, 2005. – 112 с.

41. Фарков, А. В. Математические олимпиадные работы. 5-11 классы [Текст] / А.В.Фарков. – СПб.: Питер, 2010. – 192 с.

42. Фарков, А. В. Математические олимпиады: методика подготовки: 5–8 классы. – М.: ВАКО, 2012. – 176 с.

43. Фарков, А. В. Олимпиадные задачи по математике и методы их решения [Текст]/ А.В.Фарков. – М.: Народное образование, 2003. – 112 с.

44. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования: Приказ Мин. образования и науки РФ от 17.12.2010 г. №1897. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://минобр-науки.рф/документы/938. – Последнее обновление 20.12.2017.

45. Фридман, Л.М. Как научиться решать задачи [Текст]: книга для учащихся 9-11 кл. / Л.М. Фридман. – М.: Просвещение, 2009. – 255 с.

46. Шавгулидзе, Н.Е. Комбинаторика в заочной школе СУНЦ МГУ / Н.Е. Шавгулидзе// Задачи в обучении математике, физике и информатике: теория, опыт инновации. - 2017.– С. 288 – 291.Режим доступа: https://elibrary.ru/item.asp?id=28901322. - Последнее обновление 19.05.2018

47. Шеховцов, В. А. Олимпиадные задания по математике. 9-11 классы: решение олимпиадных задач повышенной сложности [Текст] / В. А.

Шеховцов. - Волгоград: Учитель, 2009. – 99 с.

48. Яковлев, И.В. Комбинаторика - олимпиаднику. – МЦНМО, 2016. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://mathus.ru/math/kombinatorika.pdf.– Последнее обновление 19.05.2018.

49. Klamkin, M. USA Mathematical Olympiads 1972-1986. Probles and Solutions. Mathematical Association of America, 1989. – 180 p.

50. Polya, G. Mathematical Discovery. Princeton: Princeton University Press. New York: Wiley, 1981.

51. Sawyer, W.W. Mathematician's Delight. Peguin Books Ltd., 1943. – 327 p.

52. Wilson, R.M. A course in combinatorics, Cambridge University, 1993. — 538 p.

53. Schoenfeld, Alan H, ed. Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-makingin. New York: MacMillan, 1992. – 334 – 370 p.

Приложение 1

Ответы и указания к решению задач
из §5. «Анализ содержания задачного материала по теме «Перестановки. Размещения. Сочетания» в учебниках разных авторов»

1. *Решение.* На матч по двум билетам могут пойти: 1) либо Антон и Виктор; 2) либо Борис и Виктор; 3) либо Антон и Борис.

Ответ: 3 варианта.

2. *Решение.* Для удобного перечисления всех вариантов рассаживания друзей будем записывать лишь первые буквы их имён. Например, запись АБ означает, что на первом месте сидит Антон, а на втором – Борис. По результатам решения задачи 1 три пары мальчиков идут на матч. Будем записывать новую пару, полученную перестановкой в ней букв (обозначающую результат пересаживания мальчиков со своего места на другое): АБ; БА; АВ; ВА; БВ; ВБ. (1)

Ответ: 6 вариантов: АБ; БА; АВ; ВА; БВ; ВБ.

3. *Решение.* Число способов решения данной задаче будет равно числу способов, получившихся в задаче 2. Если к каждой паре мальчиков из записи (1), сидящих на 1-м и 2-м местах, добавить на 3-е место их друга, то будут составлены всевозможные варианты рассаживания мальчиков по трём местам: АБВ; БАВ; АВБ; ВАБ; БВА; ВБА.

Ответ: 6 способами.

4. *Решение 1.* Первой цифрой составляемого трёхзначного числа может быть либо 1, либо 2. Второй цифрой может быть любая из трёх данных цифр; третьей – также любая из цифр 0, 1, 2 (рис. 9).

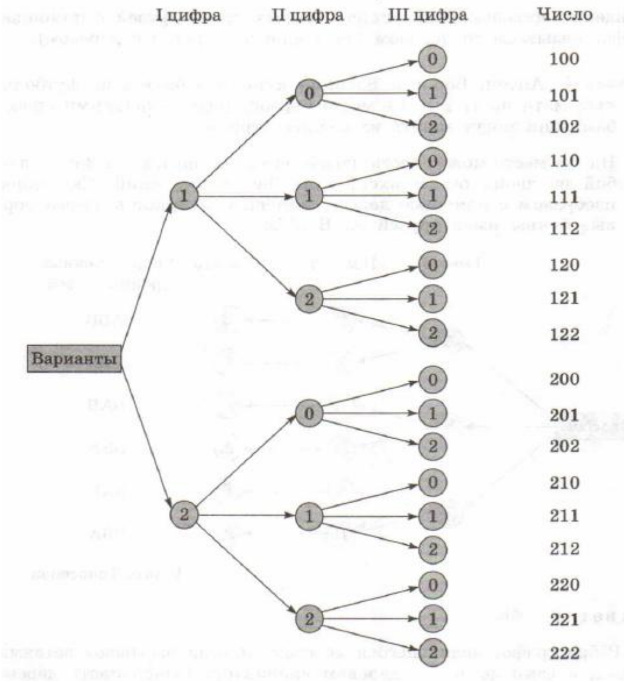


Рис. 9. Дерево всевозможных вариантов для задачи 9.

Ответ: 18 чисел.

Решение 2. Дерево вариантов даёт наглядное представление о том, как применяется *правило произведения* для подсчёта комбинаций из большего, чем 2, числа элементов. Действительно. Например, в задаче 4, согласно правилу произведения, первые две цифры числа можно записать шестью спопосбами $2 \cdot 3 = 6$. Третью цифру к уже двум имеющимся можно было, согласно правилу произведения, приписать $2 \cdot 3 \ \cdot 3 = 18$ способами, то есть существует $2 \cdot 2 \cdot 3 = 18$ всевозможных трёзначных чисел, записанных с помощью цифр 0, 1 и 2.

Ответ: 18 чисел.

5. *Решение.* Первой можно записать любую из данных пяти цифр. В каждом из этих пяти вариантов вторую цифру можно присоединить к первой четырьмя способами, так как одну из данных цифр уже использовали. По правилу произведения выбор первых двух цифр можно осуществить $5 \cdot 4$ способами. Каждому из них соответствует три варианта присоединения третьей цифры, значит, первые три цифры можно записать $5 \cdot 4 \cdot 3$ способами. Четвёртой цифрой может оказаться любая из двух оставшихся, то есть первые четыре цифры можно выбрать $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$ способами. Выбор последней, пятой цифры предопределён выборов предшествующих, - когда из пяти цифр выбрали четыре, осталась единственная цифра. Всего получилось разных пятизначных чисел $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$.

Заметим, что каждое из этих чисел получается, например, из числа 12345 перестановкой его цифр. В нашей задаче $P_5 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$.

Ответ: 120 чисел.

6. *Решение.* Если рассуждать так же, как и в примере 5, то получим всего разных пятизначных чисел $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 2520$.

По сути дела, при записи пятизначного числа мы размещали по определённым местам 5 из 7 элементов. Полученные при этом комбинации элементов так и называют размещениями.

Число всех размещений из 7 различных элементов по 5 обозначают A_7^5.

$$A_7^5 = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \ 2 \cdot 1}{2 \cdot 1} = \frac{7!}{(7-5)!}.$$

Ответ: 2520 чисел.

7. *Решение.* Любые три из данных пяти точек являются вершинами треугольника. Значит, нужно найти число вариантов выбора трёх элементов из данных пяти. Поскольку порядок выбора не важен (например, ΔABC и ΔBAC - это один и тот же треугольник), искомое число находим, как число сочетаний из 5 по 3:

$$C_5^3 = \frac{5!}{3! \cdot (5-3)!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 2 \cdot 2} = 5 \cdot 2 = 10.$$

Ответ: 10 треугольников.

8. *Решение.* Ясно, что для каждой команды очень важно не только войти в призовую тройку, но и занять как можно более высокое место (а ещё лучше стать чемпионом). Конечно, в такой ситуации порядок важен. Поэтому если, например, призерами стали команды A, B и C, то всевозможные тройки, различающиеся только порядком этих команд, то есть

ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA - это разные варианты. Таким образом, для ответа на вопрос задачи нужно найти A_{12}^3 - число размещений из 12 по 3. Воспользовавшись правилом умножения, получим

$$A_{12}^3 = 12 \cdot 11 \cdot 10 = 1320.$$

Ответ: 1320 способами.

9. *Решение.* В задаче ничего не сказано о распределении обязанностей между членами комитета, а значит, их следует считать равноправными. Поэтому нужно найти C_8^3:

$$C_8^3 = \frac{A_8^3}{P_3} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 56.$$

Ответ: 56 способов.

10. *Решение.* Для начала составим таблицу 5. Для этого слева от первого столбца запишем первые цифры искомых чисел, а вторые цифры этих чисел поместим выше первой строки. Поскольку в двузначном числе на первом месте может стоять любая цифра, кроме 0, отметим строки цифрами 1, 2, 4, 5, 9. Получим таблицу, состоящую из пяти строк. У искомого числа на втором месте должна стоять чётная цифра. Следовательно, столбцы будут отмечены цифрами 0, 2, 4. В таблице будет всего три столбца.

Таблица 5.

Таблица перебора всевозможных вариантов для задачи 10.

	0	2	4
1	10	12	14
2	20	22	24
4	40	42	44
5	50	52	54
9	90	92	94

Заполним клетки таблицы следующим образом: первая цифра числа – это метка строки, а вторая цифра равна метке столбца. Таким образом, каждое интересующее нас число попадает в определённую клетку таблицы. Мы перечислили все возможные варианты по строкам и столбцам, следовательно, количество искомых чисел будет равно количеству клеток в таблице, то есть $5 \cdot 3 = 15$.

Ответ: 15.

11. *Решение 1. Дерево возможных* вариантов представлено на рисунке 10. С его помощью находим, что осветить коридор можно 8 способами.

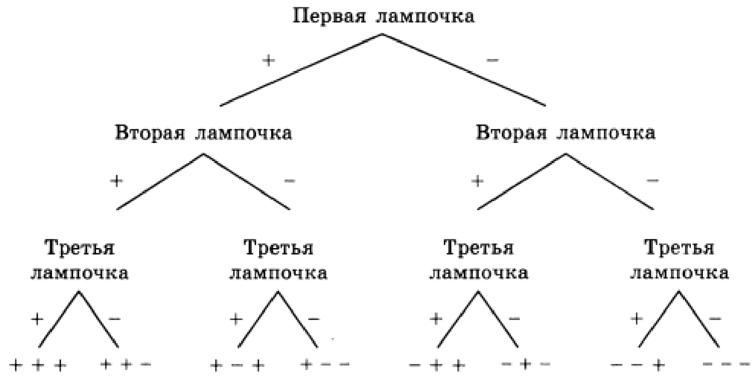


Рис. 10. Дерево возможных вариантов для задачи 11.

Ответ: 8 способов.

Решение 2. Пронумеруем все лампочки. В зависимости от того, горит или не горит очередная лапочка запишем «-» или «+». Тогда все способы освещения можно найти *методом перебора всевозможных вариантов*:

+ + +, + + -, + - +, - + +, + - -, - + -, - - +, - - -.

Ответ: 8 способов.

Решение 3. Первая лампочка может или гореть, или не гореть, то есть имеется два возможных исхода. То же самое относится и ко второй, и к третьей лампочкам. Мы предполагаем, что лампочки горят или нет независимо друг от друга. *По правилу умножения* получаем, что число всех способов освещения равно $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$.

Ответ: 8 способов.

12. *Решение.* Порядок выбора не важен по условию задачи. Следовательно, найдём количество всех выборок 8 элементов из 13 данных без учёта порядка, то есть число сочетаний из 13 элементов по 8:

$$C_{13}^{8} = \frac{13!}{8! \cdot 5!} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 13 \cdot 11 \cdot 9 = 1287.$$

Ответ: 1287.

13. Решение. Для краткости записей будем писать лишь первый буквы фамилий. Сначала все пары, в которые входит Антонов и получим следующие 3 пары:

АГ, АС, АФ.

Теперь выпишем пары, в которые не входит Антонов, но входит Григорьев. Таких всего 2 пары:

ГС, ГФ.

Составим далее пары, в которые не входят Антонов и Григорьев, но входит Сергеев. Такая пара лишь одна: СФ.

Так как все пары, в которые входит Фёдоров, уже составлены, то других вариантов составления пар нет.

Значит, мы получили следующие пары:

АГ, АС, АФ,

ГС, ГФ,

СФ.

Следовательно, существует всего шесть вариантов выбора тренером пары теннисистов из данной группы.

Ответ: 6 вариантов.

14. *Решение 1.* Выпишем всевозможные числа для того, чтобы дать ответ на вопрос задачи. Рассмотрим вариант, когда на первом месте стоит цифра 1. Тогда любая из цифр 3,5,7 может быть записана на втором месте. К примеру, запишем на второе место цифру 3. Итак, можно в качестве третьей цифры взять 5 или 7. Получаем два числа 135 и 137. Если записать на втором месте цифру 5, то в качестве третьей цифрой могут быть 3 или 7. При таком раскладе получим числа 153 и 157. Наконец, если на втором месте записать цифру 7 можно получить числа 173 и 175.

Значит, мы составили все числа, которые начинаются с цифры 1. Их шесть: 135, 137, 153, 157, 173, 175.

Аналогично составляем числа, которые начинаются с цифры 3, с цифры 5 и с цифры 7.

Запишем полученные результаты в четыре строки, в каждой из которых шесть чисел:

135, 137, 153, 157, 173, 175,

315, 317, 351, 357, 371, 375,

513, 517, 531, 537, 571, 573,

713, 715, 731, 735, 751, 753.

Итак, из цифр 1, 3, 5, 7 можно составить 24 трёхзначных числа, в записи которых цифры не повторяются.

Ответ: 24 числа.

Решение 2. Проведённый *перебор вариантов* проиллюстрирован на схеме, изображённой на рисунке 11. Такую схему называют деревом всевозможных вариантов.

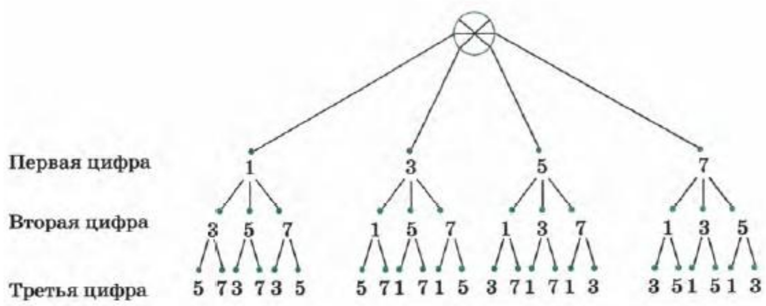


Рис. 11. Дерево всевозможных вариантов для задачи 14.

Отметим, что ответить на вопрос, поставленный в задаче 14, можно не выписывая самих чисел. Порассуждаем следующим образом: первую цифру можно выбрать четырьмя способами. После выбора первой цифры останутся три, следовательно, вторую цифру можно выбрать лишь тремя способами. В заключение, третью цифру, из двух оставшихся, можно выбрать двумя способами. Получим, что общее число искомых трехзначных чисел равно произведению $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$.

Ответ: 24 числа.

15. *Решение.* Число способов - это число перестановок из 8 элементов. По формуле получаем, что

$$P_8 = 8! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 40\,320.$$

Следовательно, существует 40320 расстановок участниц забега по восьми беговых дорожкам.

Ответ: 40320 способами.

16. *Решение.* Расписание на любой один день, составленное из 4 различных предметов, отличается от другого либо порядком следования уроков, либо набором предметов. Это означает, что речь идёт о размещениях из 9 элементов по 4. Имеем

$$A_9^4 = \frac{9!}{5!} = 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 = 3024.$$

Итак, мы нашли, что расписание можно составить 3024 способами.

Ответ: 3024 способами.

17. Решение. Каждый выбор трёх красок отличается от другого хотя бы одной краской. Следовательно, в данной задаче идёт речь о сочетаниях из 15 элементов по 3. Имеем

$$C_{15}^3 = \frac{15!}{3! \cdot 12!} = \frac{13 \cdot 14 \cdot 15}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 455.$$

Следовательно, 3 краски можно выбрать 455 способами.

Ответ: 455 способами.