МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Тольяттинский государственный университет»

Институт математики, физики и информационных технологий
(наименование института полностью)

Кафедра «Высшая математика и математическое образование»
(наименование кафедры)

44.03.01 «Педагогическое образование»
(код и наименование направления подготовки, специальности)

«Математика»
(направленность (профиль)/специализация)

БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА

на тему **«МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ КОМБИНАТОРНЫХ ЗАДАЧ С ПРИМЕНЕНИЕМ ГРАФИЧЕСКИХ СПОСОБОВ В КУРСЕ МАТЕМАТИКИ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ »**

Студент В. Д. Горленко ____________________
(И. О. Фамилия) (личная подпись)

Руководитель Н. Н. Кошелева ____________________
(И. О. Фамилия) (личная подпись)

Консультант С. А. Гудкова ____________________
(И. О. Фамилия) (личная подпись)

Допустить к защите

Заведующий кафедрой д.п.н., профессор, Р.А. Утеева ________________
(ученая степень, звание, И.О. Фамилия) (личная подпись)

«_____»__________2018

Тольятти 2018

АННОТАЦИЯ

Целью бакалаврской работы является выявление методических особенностей обучения решению комбинаторных задач с применением графического способа в основной школе и подбор олимпиадных задач по теме исследования.

В науке и практике часто встречаются задачи, решая которые приходится составлять различные комбинации, подчиненные тем или другим условиям, из заданных объектов и подсчитывать число комбинаций. Такие задачи получили название комбинаторных задач. Решение комбинаторных задач таит в себе большие развивающие возможности: на их основе совершенствуются приемы умственной деятельности, формируется важная для человека способность комбинировать.

Бакалаврская работа состоит из введения, двух глав, заключения, списка литературы.

Глава I бакалаврской работы посвящена теоретическим основам обучения решению комбинаторных задач в курсе математики основной школы. Определены основные типы комбинаторных задач; выявлены цели обучения при решении комбинаторных задач; проведен анализ учебников по теме исследования; описан графический способ решения комбинаторных задач.

В Главе II представлены методические аспекты обучения решению комбинаторных задач с применением графического способа в 5-9 классах. Подобраны олимпиадные задачи по теме «Решение комбинаторных задач» с применением графического способа.

Список литературы содержит 46 наименований.

Объем работы составляет 60 страницы.

ABSTRACT

The aim of the bachelor's work is to identify the methodological features of learning to solve textbooks combinatorial control problems with the application using the graphic method in the school and the selection of olympiad problems on the research topic.

Both in the science and practice there are tasks that solution is based on different combinations, subordinated to special subject, reprented conditions, and encouted number of combinations. Such tasks are called combined tasks. The solution of the combined tasks reveals great educational opportunities. The personality mental ability and analytical skills are impotant.

The bachelor's work consists of an introduction, two first chapters, a conclusion, and references.

Chapter I of the bachelor's work reveals the theoretical foundations for learning the solution of combinatorial problems in the course of mathematics of the basic school: the main types of combinatorial tasks, reveals the goals of training, analyzes textbooks, describes a graphical method for solving combinatorial problems.

In Chapter II presents the methodological aspects of learning to solve combinatorial problems with the use of the graphical method in grades 5-9. The olympiad problems on the topic «Solving combinatorial problems» are selected by means of the graphic method.

References contain 46 names.

The amount of work is 60 pages.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность исследования. В сказках, старинных русских сказаниях повествуется, как богатырь или другой добрый молодец, доехав до распутья, читает на камне: «Вперед поедешь – голову сложишь, направо поедешь – коня потеряешь, налево поедешь – меча лишишься». Добрый молодец сталкивается с проблемой выбора дальнейшего пути движения. А дальше уже говорится, как он выходит из того положения, в которое попал в результате выбора. Но выбирать разные пути или варианты приходится и современному человеку. Чтобы принять решение, нам приходится выбирать из множества возможных вариантов, различных способов, комбинаций. И нам всегда хочется, чтобы этот выбор был наилучшим.

Оказывается, существует целый раздел математики, именуемый комбинаторикой, который занят поисками ответов на вопросы: сколько всего есть комбинаций в том или ином случае, как из всех этих комбинаций выбрать оптимальную. Комбинаторика позволяет ответить на вопросы: сколькими способами, сколько вариантов и так далее. Слово «комбинаторика» происходит от латинского слова combinare, которое означает «соединять, сочетать». Комбинаторика формирует такие качества мышления, как системность, вариативность, гибкость. Все эти качества характеризуют комбинаторный стиль мышления.

В науке и практике часто встречаются задачи, решая которые приходится составлять различные комбинации, подчиненные тем или другим условиям, из заданных объектов и подсчитывать число комбинаций. Такие задачи получили название комбинаторных задач. «Статистика и теория вероятностей» является одной из линий, которая входит в примерную основную образовательную программу основного общего образования.

Существуют различные методы решения комбинаторных задач, одним из них является графический способ, который включает в себя составление «дерева возможных вариантов», таблиц и графов. Решение комбинаторных задач таит в себе большие развивающие возможности: на их основе совершенствуются приемы умственной деятельности, формируется важная для человека способность комбинировать. Задачи включены в основной государственный экзамен: задание 19. Задачи по комбинаторике включают в математические олимпиады и конкурсы.

Проблема исследования: выявление методических особенностей обучения решению комбинаторных задач с применением графического способа в курсе математики в 5-9 классах.

Объект исследования: процесс обучения комбинаторным задачам в курсе математики в основной школе.

Предмет исследования: методические особенности обучения решению комбинаторных задач с применением графического способа в курсе математики основной школы.

Цель исследования: выявить методические особенности обучения решению комбинаторных задач с применением графического способа в курсе математики основной школе.

Задачи исследования:

1. Определить основные типы комбинаторных задач.
2. Выявить цели обучения и основные требования к знаниям и умениям решения комбинаторных задач.
3. Провести анализ содержания программы и школьных учебников по теме исследования.
4. Описать графический метод решения комбинаторных задач.
5. Выделить методические рекомендации и особенности обучения решению комбинаторных задач с применением графического способа.
6. Подобрать олимпиадные задачи по теме исследования.

Для решения задач были использованы следующие методы исследования: анализ методической литературы; анализ школьных программ и учебников; изучение опыта работы учителей математики; систематизация и обобщение материала.

Теоретическая значимость исследования состоит в том, что в нем выявлены методические особенности обучения решению комбинаторных задач с применением графического способа в курсе алгебры основной школы.

Практическая значимость исследования работы заключается в том, что в ней представлены решения задач по теме исследования и методические рекомендации по обучению решению комбинаторных задач с применением графического способа в курсе алгебры основной школы.

На защиту выносятся: методические рекомендации по обучению учащихся решению комбинаторных задач с применением графического способа в курсе алгебры основной школы.

Бакалаврская работа состоит из введения, двух глав, заключения, списка литературы.

Во введении сформулированы основные характеристики исследования: актуальность, проблема, объект, предмет, цель, задачи и методы исследования.

Глава I бакалаврской работы посвящена теоретическим основам обучения решению комбинаторных задач в курсе математики основной школы. Определены основные типы комбинаторных задач; выявлены цели обучения при решении комбинаторных задач; проведен анализ учебников по теме исследования; описан графический способ решения комбинаторных задач.

В Главе II представлены методические аспекты обучения решению комбинаторных задач с применением графического способа в 5-9 классах. Подобраны олимпиадные задачи по теме «Решение комбинаторных задач» с применением графического способа.

В заключении сформулированы основные результаты и выводы проведенного исследования.

Список литературы содержит 46 наименований.

ГЛАВА I. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ КОМБИНАТОРНЫХ ЗАДАЧ В КУРСЕ МАТЕМАТИКИ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ

§ 1. Понятие и основные типы комбинаторных задач в курсе математики основной школы

«Область математики, в которой изучается вопрос о том, сколько различных конфигураций, удовлетворяющих тем или иным условиям, можно составить из заданных объектов, называют комбинаторикой.

В повседневной жизни нередко возникают проблемы, которые имеют не один, а несколько вариантов решения. Чтобы сделать правильный выбор, очень важно не упустить ни один из них. Для этого надо уметь осуществлять перебор всех возможных вариантов или хотя бы подсчитывать это их число. Такого рода задачи называют комбинаторными» [4].

Определение 1. «*Комбинаторными задачами*, называются задачи, в которых идет речь о тех или иных комбинациях объектов» [2, С. 141].

«Комбинаторика – важный раздел математики, знание которого необходимо представителям самых разных специальностей. С комбинаторными задачами приходится иметь дело физикам, химикам, биологам, лингвистам, экономистам, специалистам по кодам, компьютерам, информационным технологиям и т.д. Комбинаторные методы лежат в основе решения многих задач теории вероятностей, математической статистики и их приложений» [7].

Выделяют *три основных вида комбинаторных задач* с применением формул.

*1) Перестановки. «*Простейшими комбинациями, которые можно составить из элементов конечного множества, являются перестановки» [15].

Определение 2. «Перестановкой из n элементов называется каждое расположение этих элементов в определенном порядке» [5, С. 198].

Название тут говорит само за себя. Чтобы получить всевозможные перестановки некой совокупности объектов, нужно просто по очереди выставлять их в ряд в любом возможном порядке. Разные порядки предметов в ряду и будут перестановками [11].

В качестве примеров мы возьмём шары для бильярда.

Рис. 1. Набор бильярдных шаров.

Итак, пусть у нас есть n разных шаров. Сколько существует различных способов поставить их в ряд, то есть составить из них упорядоченный набор?

Обозначим это число способов через P_n и начнём думать. Если шаров ноль, то и число способов будем считать нулевым. Если же шар один, то и способ, ясное дело, тоже один. Запишем это математически, используя введённое нами обозначение: $P_1 = 1$.

Если шаров два, то несложно проверить, что и возможных перестановок тоже только две (P_2=2). Но дальше всё, конечно, становится чуть веселее. Так, если шаров три, то возможных перестановок становится шесть.

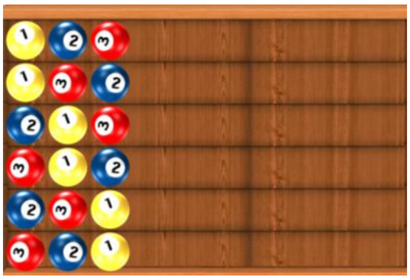

Рис. 2. Перестановки трех шаров.

Яркий жёлтый шар на (Рис.2) подсказывает нам, как получить всевозможные перестановки трёх шаров, зная всевозможные перестановки двух: взять каждую перестановку двух и «впихнуть» третий шар по очереди в каждую доступную позицию: в начало, в середину и в конец. Каждая перестановка из двух шаров таким образом «породит» три перестановки из трёх шаров, и несложно проверить, что получить одну и ту же перестановку несколько раз этим методом не получится. Значит, число перестановок из трёх шаров в три раза больше числа перестановок из двух: $P_3 = 3P_2$.

Однако, теперь, проведя те же рассуждения, мы можем показать, что это свойство выполняется для любого числа шаров! Пусть шаров n, и число перестановок любых (n-1) из них равно P_{n-1}. Возьмём всевозможные перестановки последних (n-1) шаров (то есть всех, кроме первого) и в каждую из них по очереди «впихнём» первый шар во все возможные позиции: в начало, между первым и вторым, между вторым и третьим и так далее. Несложно посчитать, что таких позиций: одна в начале, между разными (n-2) соседними шарами и одна в конце. Таким образом, мы гарантированно получаем все возможные перестановки, включающие последние шары и наш первый шар, то есть все возможные перестановки. Получается, мы пришли к великому открытию: для числа перестановок P_n справедливо равенство:

$$P_n = nP_{n-1}$$

Оно справедливо для любого числа предметов n, а значит, и для (n-1):

$$P_{n-1} = (n-1)P_{n-2}$$

Подставляя эту формулу в предыдущую, получаем

$$P_n = n(n-1)P_{n-1}$$

Теперь раскроем в этой формуле P_{n-2} и так далее, пока не дойдём до P_1. Мы знаем, что $P_1 = 1$; значит, тут можно остановиться. По ходу дела мы домножали ответ на все числа в ряду n, n-1, n-2,…; значит, в итоге число всевозможных перестановок из предметов в точности равно

$$P_n = n\ n-1\ *\ldots*2*1.$$

«Это число, равное произведению первых натуральных чисел, называется *факториалом* и обозначается n!» [15].

2) Размещения. Пусть у нас по-прежнему есть n шаров, только теперь мы хотим рассмотреть всевозможные перестановки не из всех них, а из какого-то меньшего количества m: m ≤ n. Такие всевозможные перестановки называются размещениями из n предметов по m.

Определение 3. «Размещением из n элементов по k (k ≤ n) называется любое множество, состоящее из любых k элементов, взятых в определенном порядке из данных n элементов» [5, С. 200].

Попробуем подсчитать, сколько же их. Всё становится немного сложнее из-за того, что у нас теперь два числа-параметра m и n, а не одно. Обозначим количество размещений из n по m знаком A_n^m. Очевидно, что если m =1, то есть нужно выбрать один шар из n имеющихся, то $A_n^{\mathbf{1}} = \mathbf{n}$, просто можно выбрать любой шар и остановиться на этом. Если два, то $A_n^2 = \mathbf{n}(\mathbf{n}-1)$, выбираем первый шар из вариантов, а потом второй из оставшихся (n-1) вариантов. Вооружившись опытом предыдущего параграфа, мы можем сообразить, что так будет продолжаться и дальше: число вариантов будет уменьшаться, эти уменьшающиеся числа будут перемножаться. Соотношение для числа размещений будет выглядеть так:

$$A_n^m = \mathbf{n} * A_{n-\mathbf{1}}^{m-\mathbf{1}}$$

Озвучить эту формулу можно так: «если, желая выбрать размещение предметов из имеющихся, я достал один (у меня было n разных способов сделать это), то мне остаётся выбрать размещение (m-1) предмета из (n-1) имеющихся».

Повторив с этой рекуррентной (включающей себя же с меньшими значениями параметров) формулой те же логические действия, что и с предыдущей, приходим к итоговому выражению для числа размещений:

$$A_n^m = \mathbf{n}\ \ \mathbf{n}-1\ \ * \ldots * (\mathbf{n}-\mathbf{m}+1).$$

Она отличается от $\mathrm{P_n} = \mathbf{n}\mathrm{P}_{\mathrm{n}-\mathbf{1}}$ потому, что в данном случае нам пришлось остановиться раньше – ведь m не превосходит n! А с факториалами эта формула записывается ещё лаконичнее:

$$A_n^m = \frac{\mathbf{n}!}{\mathbf{n}-\mathbf{m}\ !} = \frac{1*2*\ldots*\ \ \mathbf{n}-\mathbf{m}\ \ *\ \ \mathbf{n}-\mathbf{m}+1\ \ *\ldots*\mathbf{n}}{1*2*\ldots*(\mathbf{n}-\mathbf{m})}$$

«Эта величина называется убывающим факториалом из n по m и обозначается $\mathbf{n}^{\mathrm{m}}$» [42].

В завершение давайте испытаем нашу формулу на практике. Попробуем посчитать число размещений двух шаров из четырёх. Теоретически оно должно быть равно

$$A_4^2 = \frac{4!}{2!} = \frac{1 * 2 * 3 * 4}{1 * 2} = 12$$

Сколько же их на деле, нам подскажут бильярдные шары.

Рис. 3. Размещение двух шаров из четырех.

3) Сочетания. Заключительный тип базовой программы — *сочетания.* Будем всевозможными способами выбирать m предметов из n имеющихся, но теперь, в отличие от размещений, без учёта порядка. Каждый такой неупорядоченный набор из m элементов и будет сочетанием.

Определение 4. «Сочетанием из n элементов по k называется любое множество, составленное из k элементов, выбранных из данных n элементов» [15, С. 185].

Обозначим число сочетаний знаком C_n^m и попробуем сразу же его вычислить. Возьмём всевозможные размещения предметов из m имеющихся. Их, как мы уже знаем, $A_n^m = \frac{\mathrm{n}!}{\mathrm{n-m}\,!}$. Если перестать обращать внимание на порядок (образно выражаясь, сгрести все ряды в отдельные кучки), то мы, конечно же, получим всевозможные сочетания, но опять-таки они будут повторяться. Проверим число повторений. В каждой кучке из m элементов можно ввести порядок m! способов (потому что каждый порядок — не что иное, как перестановка!). Значит, каждое сочетание повторяется среди всех размещений ровно m! раз. Для получения числа сочетаний остаётся поделить число размещений на этот факториал:

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{m!} = \frac{n!}{(n-m)!\,m!}$$

Например, на (Рис. 4) показаны всевозможные способы, выбрать пять шаров из семи. Их ровно двадцать один, как и способов выбрать два из семи.

Рис. 4. Сочетание пяти шаров из семи.

В итоге, можем сказать, что комбинаторные задачи – это задачи выбора и расположения элементов конечного множества, имеющие в качестве исходной некоторую формулировку развлекательного содержания в виде головоломок. В комбинаторных задачах выделяют три типа соединений, которые высчитываются по определенным формулам, к ним относятся: перестановки, размещения, сочетания. Для того чтобы определить к какому типу задачи на применение формулы относится та или иная задача, можно использовать следующую схему:

Рис. 5. Схема выбора формулы соединения.

§ 2. Цели обучения и основные требования к знаниям и умениям при решении задач по теме « Комбинаторные задачи» в курсе математики основной школы

«*Основной целью* курса является формирование у учащихся первоначальных вероятностно-статистических представлений, ознакомление с миром случайного, ознакомление с основными понятиями и методами комбинаторики и теории вероятностей и математической статистики, с помощью которых можно анализировать и решать задачи, развить навыки решения комбинаторных задач путем перебора возможных вариантов» [1].

«*Задачи курса:*

– получение знаний о комбинаторике и основных элементах теории вероятностей;

– рассмотреть решение комбинаторных задач;

– развивать умение анализировать и интерпретировать данные, представленные в различной форме, проверять простейшие статистические гипотезы;

– овладение умениями решать задачи, связанные с конкретной жизненной ситуацией;

– расширение общекультурного кругозора и развитие логического мышления учащихся через межпредметные связи;

– формирование умение определять связь теории вероятностей с практическими потребностями.

После изучения курса учащиеся должны знать:

– знать основные понятия комбинаторики, теории вероятностей и математической статистики.

После изучения курса учащиеся должны уметь:

– уметь вычислять вероятности событий, пользуясь различными определениями вероятности и формулами;

– уметь извлекать информацию, представленную в таблицах, на диаграммах, графиках; составлять таблицы, строить диаграммы и графики;

– решать комбинаторные задачи путем систематического перебора возможных вариантов, а также с использованием правила умножения;

– уметь проводить анализ реальных числовых данных, представление в виде диаграмм, графиков, таблиц;

– уметь представить событие в виде комбинации нескольких элементарных событий;

– видеть в конкретных научных, технических, житейских проблемах вопросы, задачи, допускающие решения методами теории вероятностей, уметь формулировать и решать такие задачи;

– уметь интерпретировать полученные результаты» [38].

«Задачи на реализацию темы « Комбинаторика» в 5 классе:

– выработка умений и навыков работать с таблицей, извлекать из таблиц информацию и анализировать ее;

– выработка умений заполнять в таблице пустые графы (строки, столбцы);

– формирование умений и навыков в составлении, выборе и упорядочении комбинаторных наборов;

– формирование умений подсчета комбинаторных объектов, методом непосредственного перебора;

– показать, что такое дерево возможных вариантов, его использование как один из методов решения комбинаторных задач» [38].

«Задачи на реализацию темы « Комбинаторика» в 6 классе:

– отработка умений и навыков в составлении и подсчете числа комбинаторных наборов;

– показать учащимся как можно решать комбинаторные задачи с помощью рассуждений;

– познакомить учащихся с правилом умножения при подсчете числа возможных вариантов, сформировать умения по его применению;

– формирование умений строить дерево возможных вариантов;

– формирование умений сравнения вероятностей разных событий (более вероятно, менее вероятно)» [38].

«Задачи на реализацию темы « Комбинаторика» в 7 классе:

– выработка умений решения простейших комбинаторных задач основными методами: перебор вариантов, построение дерева вариантов, правило умножения;

– умение применять правило комбинаторного умножения для решения задач на нахождение числа объектов или комбинаций;

– умение проводить организованный перебор вариантов, работать по правилу и образцу;

– формирование умения подсчитывать число вариантов с помощью графов» [38].

«Задачи на реализацию темы « Комбинаторика» в 8 классе:

– формирование умений извлекать статистическую информацию, представленную в таблицах, диаграммах, графиках;

– формирование умений представлять комбинаторную задачу в виде таблиц, диаграмм, схем (метод графов, метод таблиц, дерево решений);

– ознакомление с понятиями перестановки, размещения, сочетания и соответствующими формулами для подсчета их числа» [38].

«Задачи на реализацию темы « Комбинаторика» в 9 классе:

– освоение понятия факториал, умение применять определение факториала в решении комбинаторных задач;

– формирование умений использовать формулы комбинаторики для решения задач;

– умение группировать данные, проводить обработку данных, представлять информацию в виде таблиц, диаграмм, графиков;

– распознавание задач на вычисление числа перестановок, размещений, сочетаний и применять соответствующие формулы» [38].

Рассмотрев, какие задачи ставятся при изучении темы «Комбинаторика» в 5 - 9 классах, можно сделать вывод, что данные задачи являются идентичными в каждом классе и на последующих этапах изучения добавляются новые. Все задачи курса способствуют развитию у учащихся интуиции, логического и вероятностного мышления. Изучение данной темы формирует представление о комбинаторных закономерностей, встречающих в реальном мире.

§ 3. Графический способ решения комбинаторных задач

«Для введения *элементов комбинаторики*, теории вероятности, статистики в практику преподавания математики создаются реальные условия. В общеобразовательных школах имеется учебно-методическое обеспечение, позволяющее включать элементы комбинаторики, статистики и теории вероятностей в учебный процесс» [19].

Уже несколько лет в различных регионах России учащиеся основной школы работают по учебным комплектам «Математика 5 - 6» под ред. Г.В. Дорофеева и И.Ф. Шарыгина [13], «Математика 7 - 9» под ред. Г.В. Дорофеева [9].

В учебниках указанных авторов вероятностно-статистическая линия вводится с 5 по 9 класс. Авторы знакомят учеников с комбинаторным принципом умножения, различными видами соединений (перестановки, размещения, сочетания) и формулами, по которым они высчитываются.

Авторы данных учебников в содержании курса «Комбинаторика» основываются на жизненный опыт учащихся. Так в 5 классе изучаются «случайные, достоверные, невозможные события», а в 6 классе – понятие «эксперимента со случайными исходами, частота и вероятность события». Школьники учатся оценивать наступления несложных случайных событий сначала на качественном уровне, после они начинают уже рассчитывать его наступление по формуле. Также ученики знакомятся с комбинаторными задачами, для их решения в 5 - 6 классах вводится понятие «дерева возможных вариантов», изучают правило комбинаторного умножения.

В «Учебниках-собеседниках» для 5 - 6 классов (авторы Л. Н. Шеврин и др.) стохастическая линия так же внедряется в учебный процесс [31]. Извлекать информацию с таблиц учащиеся начинают в начале 5 классе. Знакомство с теорией вероятности и комбинаторикой начинается в конце 5 классе. Два последних параграфа посвящены «достоверным, невозможным и случайным событиям, совместным и несовместным событиям, сравнению шансов наступления событий», а также первое знакомство с комбинаторными задачами. Учащимся предлагают изучить такой метод решения, как составление дерева возможных вариантов.

В учебниках «Математика 5», «Математика 6» [4,5] (авторы: Н.Я. Виленкин, В.И. Жохов, А.С. Чесноков, С.И. Шварцбурд) представлено большое количество задач. Например, задачи на перебор элементов заданного множества, задачи на составление комбинаций из нескольких элементов, а так же задачи, которыми являются числовые ребусы. Для преподавания вероятностно-статистической линии в 5 – 6 классах по учебникам этих авторов можно использовать рекомендации М.В. Ткачевой «Анализ данных в учебниках Н.Я. Виленкина и других» [29].

Учебники «Арифметика» для 5-6 классов и «Алгебра» для 7-9 классов С.М. Никольского, М.К. Потапова, Н.Н. Решетникова, А.В. Шевкина содержат элементы комбинаторики, статистики, теории вероятностей [27]. В учебниках данных авторов рассмотрен минимальный круг вопросов. В 5 классе изучаются комбинаторные задачи на существование и построение комбинаций, которые удовлетворяют заданному условию. В 6 классе рассматриваются задачи на перебор возможных вариантов, вводится понятие «вероятности события», формируются умения работать с информацией, которая представлена в виде графиков, диаграмм.

Изучение комбинаторных задач начинается в целом в 5-6 классах, школьники рассматривают некоторые *приемы решения:* перебор вариантов, построение дерева возможных вариантов, нахождение числа перестановок из n элементов. Касаемо теории вероятности учащиеся получают первичные сведения, такие как: понятие «невозможного, достоверного и случайного события», «классическое определение вероятности», буквенные обозначения. В конце изучения темы учащиеся пишут контрольную работу.

Дорофеев Г.В., Суворова С.Б., Бунимович Е.А. и др. в учебнике для общеобразовательных учебных заведений «Алгебра. Функции. Анализ данных» [7] уделяет внимание «Теории вероятностей». Изучается классическое определение вероятности, вводится понятие о «генеральной совокупности и выборке». Содержится информация о оценки вероятности события по частоте.

Следующее издание учебник Зубаревой И.И., Мордковича А.Г. «Математика 5(6)» [14]. Элементы комбинаторики, статистики, теории вероятностей включены в учебники под ред. А.Г. Мордковича (Математика 5-6 класс), а к курсу алгебры для 7-9 классов составлен дополнительный вкладыш «События. Вероятность. Статистика» (авторы А.Г. Мордкович, П.В. Семенов) [25]. Каждый параграф начинается с конкретных примеров, где изложены начальные сведения и методы комбинаторики (правило умножения, перестановки, размещения, сочетания), теории вероятности и статистики. Когда рассмотрены практические вопросы и становятся необходимо ввести теоремы и определения, тогда только они формулируется, если такой необходимости нет, то они не вводятся. Вторая часть каждого параграфа содержит задания для классных, домашних, самостоятельных и контрольных работ.

Авторы пособия «Элементы статистики и теории вероятностей» Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк в 7-8 классах рассматривают статистические характеристики, статистические исследования [21]. В курс 9 класса включен параграф об элементах комбинаторики, который состоит из теоретических сведений, вводятся соединения. В пособие представлено большое количество хорошо подобранных упражнений разного уровня сложности.

В учебном пособии «Вероятность и статистика. 5-9 кл.» (авторы Е.А.Бунимович, В.А.Булычев) [2] система изложения схожа с той, которая используется в учебниках под ред. Дорофеева [13]. В пособии содержится дополняющий тему теоретический материал и соответствующие ему блоки задач. Эти блоки задач можно использовать на занятиях в профильных классах, математических кружках, на факультативах.

Задачи разделены на две группы. К *первой группе можно* отнести типовые задачи, которые помогут усвоить основные теоретические положения. *Вторая группа* содержит более сложные задачи, в которых развиваются идеи и методы теоретической части.

Тема «Элементы комбинаторики, статистики и теории вероятностей» в учебниках алгебры для учащихся 7 – 9 классов авторского коллектива Ш.А. Алимова и других рассмотрена поверхностно. Для приобретения школьниками вероятностно – статистической грамотности, при обучении по этим учебникам, было выпущено пособие «Алгебра, 7-9: Элементы статистики и вероятность» (авторы М.В. Ткачева, Н.Е. Федорова) [29].

Анализ учебной литературы по исследуемой теме показал, что разные авторы подошли к реализации нового содержания в учебниках по-разному. Опираясь на государственные стандарты образования, анализ учебной и методической литературы, можно выделить следующие моменты о содержании и последовательности изложения материала по данной линии.

«Необходимо изучать этот материал на протяжении всего курса средней школы. Весь курс условно можно разбить на несколько этапов (5-6 классы (подготовительный); 7-9 классы), причем на каждом этапе формируются одни и те же виды деятельности, но на разных уровнях и различными средствами. На каждом этапе материал усложняется, дополняется, отрабатываются ранее усвоенные и формируются новые умения и навыки» [46].

Особенности структуры и содержания линии.

«Изучение элементов комбинаторики, вероятности, статистики целесообразно начинать в 5 классе и продолжать в течение всего дальнейшего периода обучения (постепенный переход от простого к сложному). На всех ступенях обучения фактически формируются одни и те же виды деятельности, но на разных уровнях и различными средствами.

Рассмотрим примерное содержание обучения для каждого его этапа» [3].

Таблица 1

Примерное количество часов на изучение курса « Комбинаторика» в 5-6 классах

Название учебника	5 класс		6 класс	
	Базовое изучение	Углубленное изучение	Базовое изучение	Углубленное изучение
Н.Я. Виленкин	8	10	6	6
Г.В. Дорофеев	7	9	9	11
А.Г. Мордкович	4	4	6	8
С.М. Никольский	3	4	3	7

Таблица 2

Примерное количество часов на изучение курса « Комбинаторика» в 7-9 классах

Название учебника	7 класс		8 класс		9 класс	
	Базовое изучение	Углубленное изучение	Базовое изучение	Углубленное изучение	Базовое изучение	Углубленное изучение
Г.В.Дорофеев	7	10	9	11	9	13
Ю.М.Колягин	6	7	-	-	14	15
А.Г. Мордкович	6	10	9	16	16	19
С.М. Никольский	-	-	4	6	11	11

Проанализировав учебно-методические пособия можно сделать вывод, что школьникам для решения комбинаторных задач предлагают применять *графические способы решения.* Разберем более подробно данные способы решения комбинаторных задач.

«Нередко в жизни и практике возникают ситуации, когда задача имеет не одно, а несколько решений, которые нужно сравнивать, а затем выбрать наиболее подходящее для конкретной ситуации. Для решения комбинаторных задач существуют различные средства, исключающие возможность потери какой-либо комбинации элементов. Выделяют *три метода решения* этих задач графическими способами:

1. метод построения дерева возможных вариантов решений.
2. метод составления таблиц.
3. метод построения граф-схемы» [12].

Рассмотрим данные методы на примерах решения задач:

Построения дерева возможных вариантов.

«Подбирая различные комбинации при решении задач, можно запутаться. В этом случае приходит на помощь метод построения дерева возможных вариантов решений. Внешне такая схема напоминает дерево, отсюда название – дерево возможных вариантов. При правильном построении дерева ни один из возможных вариантов решения не будет потерян.

Чтобы осуществить перебор, часто приходится вводить условные обозначения. Например, если в задаче идет речь о красных и зеленых шарах, то необязательно рисовать эти шары или писать полностью их цвета. Можно ограничиться только первыми буквами – К и З» [43].

Определение 5. «Замену предметов их условными обозначениями называют *кодированием*» [9, С. 253].

Задача 1. «Сколько двузначных чисел можно составить, используя цифры 1, 4 и 7?» [13, С. 189]

Решение. Нам нужно выписать все двузначные числа, которые мы можем составить из цифр: 1,4 и 7. Будем выписывать числа в порядке возрастания, для того чтобы не пропустить и не повторить ни одно из чисел. Начинаем записывать двузначные числа с цифры 1, потом с цифры 4, затем с цифры 7. В итоге, мы получаем двузначные числа: 11,14,17,41,44,47,71,74,77.

Таким образом, из трех данных цифр можно составить всего 9 различных двузначных чисел.

Вернемся к задаче о составлении двузначных чисел из цифр 1, 4 и 7. Для ее решения можно построить специальную схему.

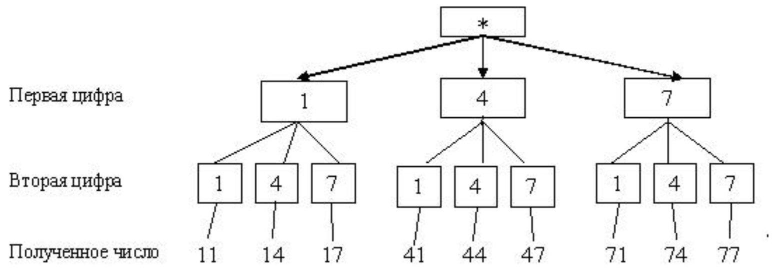

Рис.6. Дерево возможных вариантов решения к задаче 1.

Эта схема на самом деле похожа на дерево, только «вверх ногами» и без ствола. Знак «*» обозначает корень дерева, а различные варианты решения это и есть ветви дерева. Чтобы получить двузначное число, нам необходимо для начала определить первую его цифру. Первой цифрой может быть: 1,4 или 7, то есть у нас есть три варианта. Поэтому из точки «*» проведем три отрезка и на концах расставим цифры 1,4 и 7.

Затем, нам нужно выбрать вторую, и снова у нас существует три варианта выбора: 1,4 или 7. Чтобы показать эти варианты на дереве, мы от первой цифры проведем еще по три отрезка и запишем на концах каждого цифры 1,4 и 7. В итоге, соберем полученные двузначные числа по отрезкам, мы смогли составить 9 двузначных чисел. Следует заметить, что других двузначных чисел составить из данных чисел невозможно.

Ответ: 9

Задача 2. «В классе три человека хорошо поют, двое других играют на гитаре, а еще один умеет показывать фокусы. Сколькими способами можно составить концертную бригаду из певца, гитариста и фокусника?» [15, С. 192]

Решение.

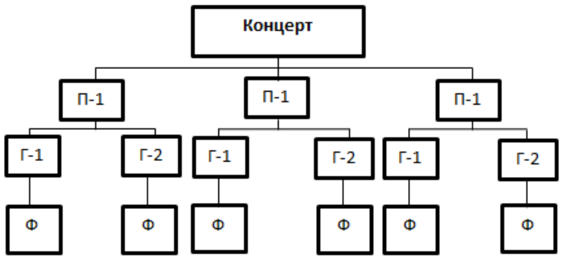

Рис.7.Дерево возможных вариантов к задаче 2.

Значит, есть 6 вариантов составления концерта.

Ответ: 6

Составление таблиц.

Комбинаторные задачи можно решать с помощью таблиц. Таблицы наглядно представляют все варианты решения заданной задачи, так же как и дерево возможных вариантов.

Задача 3. «Сколько нечетных двузначных чисел можно составить из цифр 1,3,4,6,7,8,9?» [15, С. 192]

Решение. Составим таблицу: слева первый столбец - первые цифры искомых чисел, вверху первая строка - вторые цифры.

Таблица 3

Перебор возможных вариантов к задаче 3

	1	**3**	**7**	**9**
1	11	13	17	19
3	31	33	37	39
4	41	43	47	49
6	61	63	67	69
7	71	73	77	79
8	81	83	87	89
9	91	93	97	99

Ответ: 28.

Задача 4. «В школьной столовой приготовили на завтрак плов (П), кашу (К), блины (Б), а из напитков – сок (С), чай (Ч) и молоко (М). Сколько различных вариантов завтрака можно составить?» [13, С.191]

Решение. Составим таблицу вариантов.

Таблица 4

Перебор возможных вариантов к задаче 4

	П	К	Б
С	СП	СК	СБ
Ч	ЧП	ЧК	ЧБ
М	МП	МК	МБ

Ответ: 9

Построения граф-схемы.

Все видели схему станций метрополитена, трамвайных путей или карту железнодорожных сообщений. Точки — города, отрезки или дуги, которые их соединяют — железнодорожные пути. Такие схемы и называют графами.

«Перебрать и подсчитать всевозможные комбинации из данных элементов несложно, когда их количество невелико. В том случае, когда нужно образовывать и подсчитывать комбинации из трех и более элементов, часто пользуются наглядными схемами – графами» [8].

Итак, если произвольные точки пространства соединены между собой отрезками или дугами (не обязательно все), то такое соединение (схема) называется графом.

Определение 6. «Граф – это геометрическая фигура, состоящая из точек (*вершины графа*) и линий, их соединяющих (ребра графа)» [11, С. 237].

«При этом с помощью вершин изображают элементы некоторого множества (предметов, людей и т.д.), а с помощью ребер — определенные связи между элементами. Для удобства иллюстрации условия задачи, вершины графа могут быть заменены кругами или прямоугольниками» [8].

Задача 5. «В парке 4 пруда. Было решено засыпать песком дорожки между ними так, чтобы можно было пройти от одного пруда к другому кратчайшим путем, т.е. не нужно было идти в обход. Задание: покажите, какие дорожки надо сделать?» [9, С. 174]

Решение.

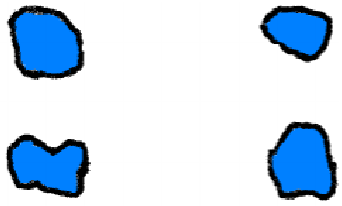

Рис.8. Четыре пруда по условию задачи.

Это пример полного графа.

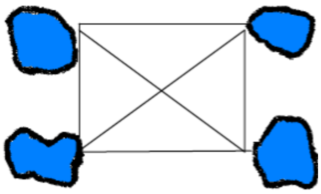

Рис.9. Полный граф к задаче 5.

Ответ: 6

Задача 6. «В спортивном зале собрались Витя, Коля, Петя, Сережа и Максим. Каждый из мальчиков знаком только с двумя другими. Кто с кем знаком?» [15, С. 195]

Решение.

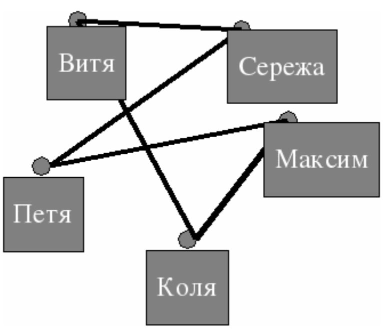

Рис. 10. Полный граф к задаче 6.

Ответ: Витя знает Колю и Сережу, Сережа - Витю и Петю, Петя – Сережу и Максима, Максим - Петю и Колю, Коля – Петю и Максима.

Таким образом, проанализировав различные учебники математики и алгебры разных авторов, отметим, что данной теме отводится небольшое количество часов в программе. Знакомство с темой: «Решение комбинаторных задач с применением графических способов» с разных классов. К графическим способам решения относятся: составление дерева возможных вариантов, составление таблиц, построение граф-схемы. В основном авторы учебниках останавливаются на изучении методе составления дерева возможных вариантов с примерами его применения.

Выводы по первой главе

Сформулируем основные выводы и полученные результаты по первой главе:

1. Рассмотрено определение «комбинаторные задачи – это задачи выбора и расположения элементов конечного множества, имеющие в качестве исходной некоторую формулировку развлекательного содержания в виде головоломок».

2. Выявлены основные типы комбинаторных задач. В комбинаторных задачах выделяют три типа соединений, которые высчитываются по определенным формулам, к ним относятся: перестановки, размещения, сочетания.

3. Рассмотрены задачи курса, которые ставятся при изучении темы «Комбинаторика» в 5- 9 классах. Данные задачи повторяются на всех этапах изучения курса и постепенно добавляются новые задачи в последующих классах. Поставленные задачи курса развивают у учащихся интуицию, логическое и вероятностное мышление. Изучение данной темы формирует представление о комбинаторных закономерностей, встречающих в реальном мире.

4. Проведен анализ учебников математики и алгебры разных авторов. На изучение данной теме отводится небольшое количество часов в программе. Авторы учебников начинают знакомство с темы: «Решение комбинаторных задач с применением графических способов» с разных классов. В графическом способе решения выделяют три метода: составление дерева возможных вариантов, составление таблиц, построение граф-схемы. Большинство авторов учебников предлагают школьникам решать комбинаторные задачи с помощью составления дерева возможных вариантов. В учебниках показаны примеры решения задач данным методом.

ГЛАВА II. МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ КОМБИНАТОРНЫХ ЗАДАЧ В КУРСЕ МАТЕМАТИКИ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ

§ 4. Методика обучения решению комбинаторных задач с применением графических способов в курсе математики 5-6 классов

Школьники в настоящее время умственно развиты больше, чем предыдущее поколение и им не интересно и скучно решать просто задачи на вычисление. Им следует предлагать задания, связанные с логическим мышлением, или даже такие задачи, которые можно решать на примерах жизненных ситуациях. Поэтому задачи на комбинаторику и вероятность – это задачи современных школьников и чтобы предлагать их для решения ученикам, сначала нужно подобрать методы обучения решению таких задач для большей возможности выбора оптимального метода преподавания в школе. Учитывая, что задач по теме «Комбинаторика» в школьной программе 5-6 классов мало, надо постараться свести их решение к интересной игре для детей. Современные программы и стандарты математического образования в основной школе состоят из преподавания основных понятий, знакомства на наглядном интуитивном уровне с вероятностно-стохастическими закономерностями в 5-6 классах.

Построение курса математики 5-6 классов в учебниках «Математика, 5 класс», «Математика, 6 класс» авторов И.И.Зубаревой, А.Г. Мордковича основано на идеях и принципах системно-деятельностного подхода в обучении, разработанных российскими психологами и педагогами: Л.С. Выготским, А.Н. Леонтьевым, В.В. Давыдовым, П.Я. Гальпериным, Л.В. Занковым и др., и заложенных в основу Стандарта (ФГОС 2017), что «обеспечивает обучающимся:

– формирование готовности к саморазвитию и непрерывному образованию;

– активную учебно-познавательную деятельность;

– построение образовательного процесса с учетом индивидуальных возрастных, психологических и физиологических особенностей.

Главная цель при изучении комбинаторных задач: научить выполнять перебор всех возможных вариантов для пересчета объектов или их комбинаций с помощью «дерева вариантов», выделять комбинации, отвечающие заданным условиям» [38].

Методика реализации стохастической линии в 5 классе.

«В 5 классе даются ученикам элементарные комбинаторные задачи, в которых нужно перебрать возможные варианты, расположить в определенном порядке, объединить все варианты (перебрать и расположить по заданному условию). Порой в жизни нам приходится сталкиваться с такими задачами, в которых есть несколько решений данной проблемы, но нам нужно разобрать каждое решение, и понять какое в данном случае будет верным. Чтобы решать такие задачи, следует перебрать все варианты, а для этого необходимо выбрать наиболее удобный способ перебора, при котором мы сможем увидеть все доступные варианты без повторов.

На первом месте перед учителем стоит задача по формированию навыков *систематического перебора.* Начинать нужно с простых задач, где не так много элементов, важна сама суть перебора всех вариантов» [36].

Задача 1. «Три друга, Андрей, Владимир и Дмитрий, приобрели два билета на футбольный матч. Сколько существует различных вариантов похода на футбол?» [17, С. 253]

Решение. Здесь необходимо перебрать всевозможные пары мальчиков:

1)Андрей, Владимир

2)Андрей, Дмитрий

3)Владимир, Дмитрий

Следующая задача может быть составлена на основе задачи, которую мы решали выше. Допустим, добавим условие, чтобы учитывалось место, на котором сидит тот или иной мальчик. Получается, что мы будем учитывать в задаче порядок элементов.

Ответ: 3варианта.

Задача 2. «Три друга, Андрей, Владимир и Дмитрий, приобрели два билета на футбольный матч на 1-е и 2-е места первого ряда стадиона. Сколько существует способов занять эти два места на стадионе? Записать все эти варианты» [17, С. 253].

Решение. Здесь нам помогут результаты первой задачи. В предыдущей задаче нам порядок, как будут сидеть мальчики, был не важен. В данной же задаче следует обращать внимание на порядок мест. Рассмотрим подробно один из вариантов. Пусть на матч пойдут Андрей и Владимир, тогда получаем два варианта как могут сидеть мальчики. Первый вариант: на первом месте может сидеть Андрей, тогда на втором месте сидит Владимир, второй вариант: первое место займет Владимир, а на втором будет сидеть Андрей. Получается, что два элемента мы можем расположить в разном порядке двумя способами. Таким образом, из решения первой задачи мы получили два решения для нашей задачи. Теперь следует, что на каждый вариант предыдущей задачи у нас получается еще по одному варианту решения, в результате имеем 6 вариантов.

Ответ: 6 вариантов.

Задача 3. «Сколько двузначных чисел можно составить, используя цифры 1,2,3?» [17, С. 254]

Решение. «Выпишем все двузначные числа, которые мы можем получить из цифр 1,2,3. Вообще мы можем выписывать числа в любом порядке, но мы договоримся выписывать полученные числа в порядке их возрастания, это нам позволит выписать все числа без повтора и не пропустить числа. В процессе решения этой задачи может возникнуть такой вопрос, можем ли мы использовать одну и ту же цифру два раза (если у учащихся не возникнет такой вопрос, то учителю следует самому обратить на это внимание). Так как в данной задаче это условие не обозначено, то будем решать ее для обоих случаев, и заметим, что число решений в каждом из них будет различно. Отсюда делаем вывод, что данное условие при решении задач необходимо учитывать» [17, С. 254].

12,13,21,23,31,32 – без повтора цифр

11,12,13,21,22,23,31,32,33 – с повторами цифр

Стоит заметить, что нужно уделить внимание такому моменту, как говорится ли в условие задаче про повтор компонентов. В данной задаче про повтор цифр. Если в условие данный момент не выделен, то необходимо рассмотреть все случаи.

Ответ: 6 – без повтора; 9- с повторами.

Задача 4. «В алфавите племени УАУА имеются только две буквы – «а» и «у». Сколько различных слов по три буквы в каждом можно составить, используя алфавит этого племени?» [17, С. 254]

Решение. «Нам нужно составить слово из трех букв, получается, у нас есть три места, чтобы поместить буквы. В этой задаче каждую букву мы можем использовать несколько раз, например: один, два или три раза. Необходимо рассмотреть все варианты слов, которые мы можем получить из букв «а» и «у».

Заметим, что очень удобно процесс перебора осуществлять путем построения специальной схемы, которая называется дерево возможных вариантов. Как построить дерево возможных вариантов рассмотрим на данной задачи: во-первых нужно выбрать первую букву – это могут быть буквы «а» или «у», поэтому в «дереве» из корня проведем две веточки с буквами «а» и «у» на концах. Следующей буквой может быть опять как «а» так и «у», поэтому из каждой веточки опустим еще по две веточки и т.д.

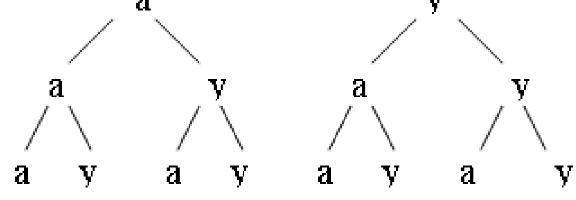

Рис.11. Дерево возможных вариантов к задаче 4.

Теперь, начиная двигаться от корня по веточкам дерева, по порядку выписываем полученные сочетания букв - «слова». Значит, в результате 8 слов из трех букв мы можем составить» [17, С. 254].

*Ответ:*8 вариантов слов.

«Дерево помогает увидеть путь решения, учесть все варианты и избежать повторений. Нужно обратить внимание, что дерево возможных вариантов позволяет нам подсчитывать упорядоченные наборы.

Чтобы нарисовать такое дерево, нужно:

1) отметить точку, которая будет служить его корнем;

2) от этой точки провести все возможные отрезки (ветви), на концах которых отметить первые элементы комбинаций;

3) от каждого из этих концов нарисовать все возможные отрезки (ветви), на концах которых отметить вторые элементы комбинаций;

4) и так далее, пока вся комбинация не будет составлена.

Получится рисунок, который действительно напоминает дерево (правда, лежащее на боку или, вообще, «вниз головой»). Двигаясь от корня по ветвям такого дерева можно последовательно прочитать любую из полученных комбинаций» [4].

Задача 5. «В 5 классе в среду 5 уроков: математика, информатика, русский язык, английский язык, физкультура. Сколько можно составить вариантов расписания на среду, если вторым урокам обязательно должна быть математика?» [17, С. 254]

Решение. «В задаче нам дается 5 предметов и необходимо составить возможные варианты расписания на один день, следует учитывать, что каждый урок из 5 заданных в условии, нужно вставить в расписании, и каждый урок может быть проведен только один раз, а также математика обязательно должна быть вторым уроком в расписании. Заглавной буквой обозначим каждый предмет. Мы должны определить, сколько есть способов, чтобы расположить 5 элементов. У нас есть 4 варианта предметов, которые могут стоять в расписании первым уроком. Предположим, пусть первый урок – русский язык, затем вторым обязательно идет математика, получается, что у нас остается три предмета, которые мы может расположить 6 способами (это нам известно из ранее рассмотренных задач). Далее, действуем аналогично для информатики, английского языка и физкультуры.

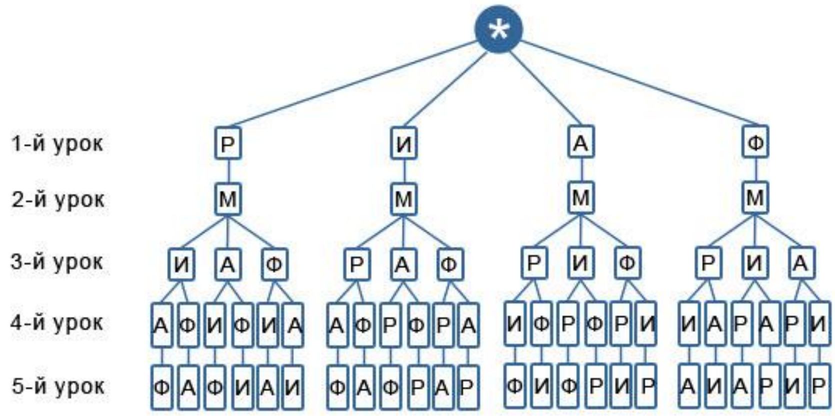

Рис.12. Дерево возможных вариантов к задаче 5.

В итоге, получим 24 способа упорядочить 5 предметов» [17, С. 254].

Ответ: 24 способа.

Методика реализации стохастической линии в 6 классе.

При изучении темы «Комбинаторика» в 6 классе продолжают рассматривать комбинаторные задачи. В основном в содержание данной темы, входят задачи по подсчету числа возможных вариантов. Для удобства решения задач, используется понятие кодирование, но определение ученикам не дается.

Рассмотрим следующую задачу:

Задача 6. «Несколько стран решили использовать для своего государственного флага символику в виде трех горизонтальных полос одинаковой ширины разных цветов – белого, синего, красного. Сколько стран могут использовать такую символику при условии, что у каждой страны – свой флаг?» [18, С. 243]

Решение. «Мы можем записать наше решение следующим образом: 1 вариант: первая полоса – красная, вторая – синяя, третья – белая и т.д. Но это очень долго и неудобно, записывая так, сложно сориентироваться все ли варианты мы записали, и не повторились ли мы где-нибудь. Поэтому очень удобно ввести кодирование, т.е. некоторое условное обозначение перебираемых в задаче объектов. В нашем случае мы заменим первой буквой каждый цвет полосы. Белый соответственно – Б, красный – К и синий – С.

Введя кодирование, запись решения задачи очень упрощается. Мы имеем множество из трех элементов {Б, К, С}. Нужно составить различные комбинации из трех элементов, при этом порядок элементов учитывается.

Например, запись БКС будет обозначать, что первая полоса флага – белая, вторая – красная, третья – синяя. Подобные задачи мы уже решали методом непосредственного перебора и построением дерева возможных вариантов» [18, С. 243].

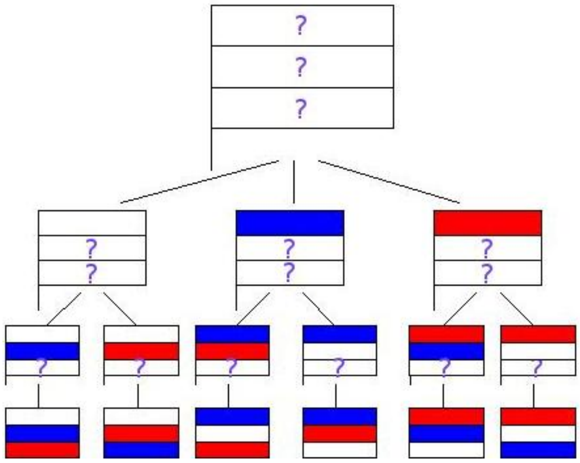

Рис.13. Дерево возможных вариантов к задаче 6.

Ответ на задачу получаем из дерева возможных вариантов, где наглядно видим 6 вариантов составления флага.

Ответ: 6 вариантов.

Задача 7. «От турбазы к горному озеру ведут 4 тропы. Сколькими способами туристы могут отправиться в поход к озеру, если они не хотят спускаться по той же тропе, по которой поднимались?» [18, С. 246]

Решение. «Занумеруем тропы числами от 1 до 4 и построим дерево возможных вариантов:

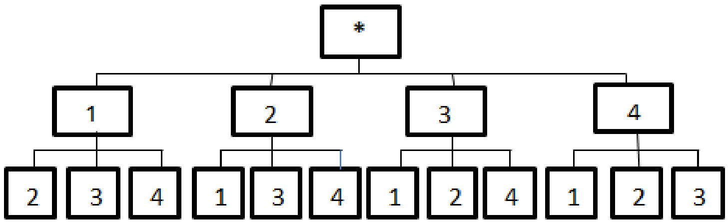

Рис.15. Дерево возможных вариантов к задаче 8.

Подняться к озеру мы можем по 4 тропинкам, а спуститься по 3 другим. Так, если мы поднялись по 1 тропе, то спуститься можем по 2,3 или 4. Аналогично, проводим рассуждение с оставшимися тропами. Получаем 12 вариантов, как мы можем сходить в поход к озеру» [18, С. 246].

Ответ: 12 вариантов маршрутов.

А теперь представим, что к озеру ведут не 4, а 10 троп. Возможных вариантов становится намного больше, и изобразить дерево вариантов полностью очень сложно.

Решение комбинаторных задач с применением графического способа удобно лишь в том случае, когда возможных вариантов небольшое количество.

В учебнике « Математика» 5 класс И.И. Зубарева, А.Г. Мордкович рассматривается целый параграф под названием «Комбинаторные задачи» [17]. В данном параграфе представлены подробно разобранные задачи с решением, в которых используется графический способ. Задачи начинаются с простых и далее уровень сложности задач повышается. В конце параграфа даются контрольные вопросы по данной теме. В учебнике 6 класса тех же авторов комбинаторные задачи уже не представлены, учащиеся начинают изучать вероятность событий.

Задача 8. «Сколько двузначных чисел можно составить из цифр 0, 2, 4, 6, 8?» [17, С. 254]

Задача 9. «У Тани есть розовая, желтая, красная рубашка и черная, зеленая, синяя юбки. Сколько различных нарядов можно составить из них?» [17, С. 257]

Следующий учебник «Математика» 6 класс Е.А. Бунимович, Л.В. Кузнецова, С.С. Минаева [6]. В нем выделена глава «Множества. Комбинаторика». Изучение комбинаторики начинается с параграфа «Решение комбинаторных задач». В данном параграфе есть разобранные задачи, но графический способ не представлен в иллюстрациях. Задачи разбиты на несколько групп, математические модели, такие как: задача о туристических походах, задача о рукопожатиях, задача о театральных прожекторах. Сначала данные задачи представлены с решением, после идет ряд упражнений похожих на них. Задачи есть как среднего уровня сложности, так и повышенной трудности. Всего в данном параграфе 14 задач.

Задача 10. «Туристическая фирма планирует посещение туристами в Италии трех городов: Венеции, Рима и Флоренции. Сколько существует вариантов такого маршрута?» [6, С. 234]

Задача 11. «На районной олимпиаде по математике оказалось 6 победителей. Однако на областную олимпиаду можно отправить только двоих. Сколько существует вариантов выбора двух кандидатов?» [6, С. 235]

В учебниках Г.В. Дорофеев присутствуют задачи по комбинаторике, но они не являются задачами повышенной сложности [13]. В 5 классе перебор возможных вариантов предложен в виде составления дерева возможных вариантов. Разобраны две задачи, на примере которых показывается, как решать задачи на перебор вариантов. После идет небольшое количество задач для самостоятельно решения. В учебнике 6 класса этого же автора выделен параграф «Логический перебор». Решение комбинаторных задач с применением графического способа рассматривается в одном параграфе и на данном методе акцент не сделан. Предлагаются задачи на перебор, правило умножения, но решение не предполагает использование графического способа решения.

Задача 12. «У Васи в тетради нарисован прямоугольник, разделенный на три равные части. Он должен закрасить каждую из этих частей в один из трех цветов: красный, желтый, зеленый. Нельзя окрашивать разные части одинаковым цветом. Сколько вариантов рисунка может получить Вася?» [13, С. 192]

Задача 13. «Имеется ткань двух цветов: голубая и зеленая, и требуется обить диван, стул и кресло. Сколько существует различных вариантов обивки мебели?» [13, С. 193]

Решения задач № 8 – 13 представлены в Приложении А.

При изучении темы «Комбинаторные задачи с применением графического способа» следуют разбирать с учащимися задачи с решением, после давать аналогичные задачи для самостоятельного решения. Содержание задач базового уровня, так как учащиеся только начинают изучать раздел комбинаторики. Учащиеся учатся составлять возможные варианты решения с помощью дерева вариантов, таблиц и графов.

§ 5. Методика обучения решению комбинаторных задач с применением графических способов в курсе математики 7-9 классов

Комбинаторные задачи в школьном курсе математики наиболее часто решаются методом перебора. Для упрощения данного процесса часто используют графы, «деревья» и таблицы. Для этого требуются определенные навыки и умения решения комбинаторных задач. Решая несложные комбинаторные задачи, первым делом, нужно как следует выполнять перебор возможных вариантов. При изучении данной темы происходит развитие наглядно-образного мышления при изображении и использовании различных методов перебора, а распределение элементов по группам и подгруппам формирует у учащихся такую мыслительную операцию как классификация.

Комбинаторные задачи рассматриваются авторами учебников в 9 классе. Обучение решению данных задач происходит на примерах решения задач учителем, так же как и в 5-6 классах. Как и в 5 классе, продолжается решение задач путем систематического перебора возможных вариантов.

Однако теперь учащиеся имеют дело с большим количеством элементов и в более сложных ситуациях. Они знакомятся с кодированием как способом представления информации, упрощение записей [37].

В начале урока учитель может предложить ученикам решить старинную задачу VIII века: «Волк, коза и капуста.

Некий человек должен был перевезти в лодке через реку волка, козу и капусту. В лодке мог поместиться только один человек, а с ним или волк, или коза, или капуста. Но если оставить волка с козой без человека, то волк съест козу, если оставить козу с капустой, то коза съест капусту, а в присутствии человека никто никого не ест. Человек все-таки перевез свой груз через реку. Как он это сделал?» [8]

При решении этой задачи учащиеся комбинируют разные сочетания, оценивают варианты, получают следующее решение:

1) волк, капуста – человек, коза - пустой берег;
2) волк, капуста – человек – коза;
3) волк – человек, капуста – коза;
4) волк – человек, коза – капуста;
5) волк – человек, коза – капуста;
6) коза – человек, волк – капуста;
7) коза – человек – капуста, волк;
8) пустой берег – человек, коза – капуста, волк.

Именно при проведении уроков учитель имеет возможность реализовать различные модели взаимодействия, поскольку тема «Методы решения комбинаторных задач» практически обуславливает возможность использования активных методик взаимодействия и организации на уроке.

В рамках данной темы рассмотрим такую технологию взаимодействия на уроке, как «метод 6 шляп».

«Метод шести шляп позволяет развить у обучающихся гибкость ума, креативность, поможет правильно принять решение и более точно соотносить свой образ мыслей с поставленными целями и стоящими задачами. Особенно хорошо он подходит для оценки необычных и неординарных идей, когда важно учесть любое мнение и рассмотреть ситуацию в различных ее сегментах решения» [45].

Рис.16. Метод шести шляп.

«Так как основной задачей урока является умение применять различные методы решения комбинаторных задач, то в рамках данной методике обучающиеся, находясь в состоянии генерации идей, смогут определить свои идеи, осуществлять в сотрудничестве с другими обучающимися поиск наиболее эффективного способа разрешения задачи и поделится своими идеями с другими» [41].

В контексте данной темы рассмотрим рабочую модель способов организации по формированию универсальных учебных действий в процессе решения определенной задачи.

Принцип работы: обучающиеся делятся на команды согласно жеребьевке или личному желанию каждого (лучше всего деление на команды производить учителю, чтобы качественно распределить обязанности и уровень подготовки).

Рис.17. Метод 6 шляп по теме «Комбинаторные задачи».

После того, как обучающиеся поделены на команды, они занимают соответствующие позиции за столами, обладающими своими характеристиками и названиями. Названия столов: желтая шляпа; зеленая шляпа; белая шляпа; синяя шляпа; красная шляпа.

Каждый стол обладает особенностями согласно распределению по цветам шляп. «Желтая шляпа» решают комбинаторные задачи методом таблиц, «зеленая» - методом графов, «белая шляпа» - перебором различных вариантов, «синяя шляпа» - деревом возможных решений, «красная шляпа» - правилом умножения [41].

Осуществив деление на команды, и рассмотрев свои роли, обучающиеся решают задачи, предложенные в карточке (у каждой из команд одна и та же задача), своим методом, после чего учитель организует урок таким образом, чтобы команды могли участвовать в обсуждении после каждой решенной задачи. Затем команды выбирают по представителю защиты своего метода на определенной задаче, и ведется активный диалог по выбору оптимального метода решения. Решив один пример, двое из участников команд меняются столами, осуществляя переход. Таким образом, каждый использует свои возможности в решении задания тем или иным методом.

Задачи, представленные ниже, можно использовать при изучении темы «Решение комбинаторных задач с применением графических способов» в 9 классе. Данные задачи раскрывают содержание курса «Элементы комбинаторики» по учебнику А.Г. Мордковича [31]. Первую задачу можно рассмотреть на этапе актуализации, так как учащиеся уже изучали данную тему в 5 классе. Далее задачи постепенно усложняются, и кроме задач на составление дерева возможных вариантов, также рассматривают задачи на составление таблиц и графов.

Задача 1. «Сколько четных двузначных чисел можно составить из цифр 0,1,2,4,5,9?» [31, С.124]

Решение. «Составим дерева возможных вариантов. Стоит учесть, что число не может начинаться с 0, поэтому у нас остается 5 вариантов первой цифры: 1,2,4,5,9. Дальше нам нужно, чтобы число было четным, для этого условия нам подходят цифры: 0,2,4. Если число будет оканчиваться на 5 или 9, то оно не будет являться четным, что не удовлетворяет нашему заданию. Сделав анализ решения, приступаем к составлению дерева возможных вариантов.

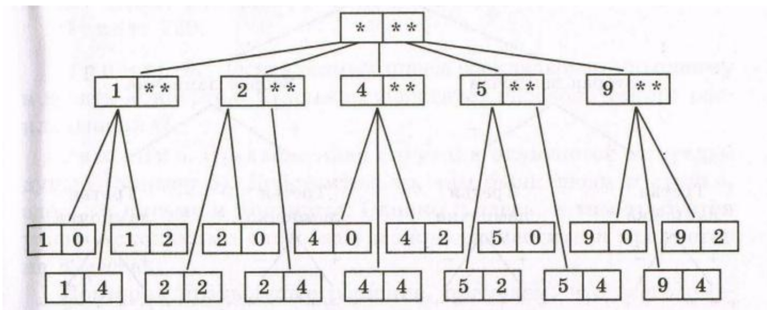

Рис.18. Дерево возможных вариантов к задаче 1.

Теперь на схеме нам видны все нужные варианты составления четного двузначного числа, таких вариантов получилось 15.

Мы составляли дерево возможных вариантов. Этот способ обладает преимуществом, так как все варианты можно увидеть на рисунке. А также видно, как организован перебор всех возможных вариантов» [31, С. 124].

Ответ: 15 вариантов.

Задача 2. «В школьной столовой на первое можно заказать борщ, солянку, грибной суп, на вторые - мясо с макаронами, рыбу с картошкой, курицу с рисом, а на третье - чай и компот. Сколько различных обедов можно составить из указанных блюд?» [31, С. 121]

Решение. Перечислим возможные варианты в таблице.

Таблица 5

Перебор возможных вариантов к задаче 2

Чай (Ч) Компот (К)	Мясо с макаронами (М)		Рыба с картошкой (Р)		Курица с рисом(Кр)	
Борщ (Б)	БМЧ	БМК	БРЧ	БРК	БКрЧ	БКрК
Солянка(С)	СМЧ	СМК	СРЧ	СРК	СКрЧ	СКрК
Грибной суп(Г)	ГМЧ	ГМК	ГРЧ	ГРК	ГКрЧ	ГКрК

«Так как выбор еды и напитка происходит независимо, то в каждой клетке будет стоять один из возможных вариантов обеда. Верно и обратное: любой обед будет расположен в одной из клеток. Значит, всего вариантов столько же, сколько и клеток, то есть 18» [31, С. 121].

Ответ: 18 вариантов.

Задача 3. «В коридоре висят три лампочки. Сколько имеется различных способов освещения коридора?» [31, С. 122]

Решение. Пронумеруем все лампочки. В зависимости от того, горит или не горит очередная лапочка запишем «-» или «+». Далее составим по веточкам *дерево возможных вариантов.*

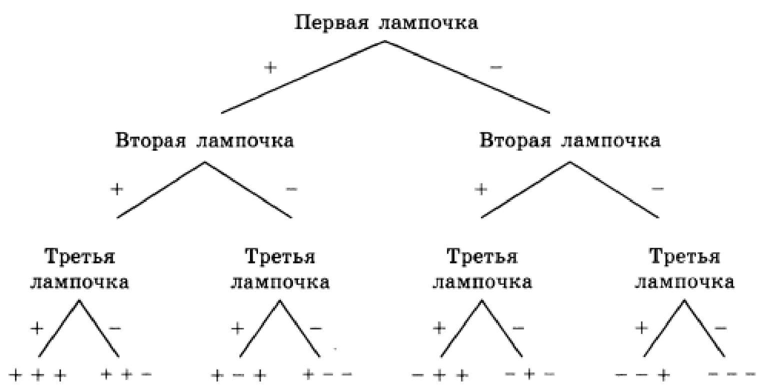

Рис.19. Дерево возможных вариантов к задаче 3.

С его помощью находим, что осветить коридор можно 8 способами. Также учащиеся могли бы записать варианты перебором, но было бы больше вероятности потерять какой-нибудь из вариантов.

Ответ: 8 способов.

Задача 4. «Андрей ходит в школу в брюках или джинсах, к ним надевает рубашки серого, голубого, зеленого цвета или в клетку, а в качестве сменной обуви берет туфли или кроссовки. Вопросы: а) Сколько дней Андрей сможет выглядеть по-новому? б) Сколько дней при этом он будет ходить в кроссовках? в) Сколько дней он будет ходить в рубашке в клетку и джинсах?» [31, С. 122]

Решение. Построим дерево возможных вариантов, обозначив Б - брюки, Д - джинсы, С - серая рубашка, Г - голубая рубашка, З - зеленая рубашка, Р - рубашка в клетку, Т - туфли, К - кроссовки.

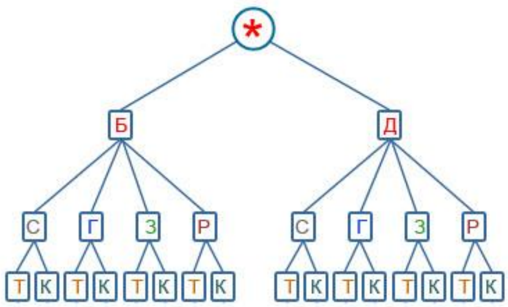

Рис.20. Дерево возможных вариантов к задаче 4.

При решении задачи, можно задавать учащимся вопросы, чтобы облегчить построение схемы вариантов. Например: с чем Андрей может надеть джинсы? Если Андрей наденет брюки и серую рубашку, какие варианты обуви у него есть? И так любой вопрос по определенному комплекту одежды. В итоге получаем, что 16 дней Андрей может выглядеть совершенно по-разному, 8 дней он будет ходить в кроссовках, а так же два дня в рубашке в клетку и джинсах.

Ответ: 16; 8; 2 дня.

Учебник алгебры для 7 класса Ю.М.Колягина содержит материал, изложенный в форме занимательных диалогов [24]. Автор учебника знакомит учащихся с элементами комбинаторики. В нём встречаются все представленные выше графические способы решения задач. Изучение графического способа начинается с метода составления таблиц, затем идет подсчет вариантов с помощью графов, после составление дерева возможных вариантов. В данном учебнике подобрано большое количество комбинаторных задач, в которых можно использовать графический способ решения.

Проанализировав учебник, можно сказать, что он включает в себя как вводные упражнения, так и задачи повышенной сложности, выделенные оранжевым квадратиком. Ю.М. Колягин также разбирает исторические комбинаторные задачи и предлагает учащимся решить практические и прикладные задачи по данной теме. Изучение главы «Элементы комбинаторики» завершается весьма интересным разделом под названием «Проверь себя сам», где предложены задачи по трём уровням сложности.

Задача 5. «У Ирины 5 подруг: Валя, Злата, Маша, Поля и София. Она решила двух из них пригласить в кино. Укажите все возможные варианты выбора подруг. Сколько таких вариантов?» [24, С. 267]

Задача 6. «Сколькими способами можно выбрать два цветка, если есть васильки, маки, ромашки и тюльпаны? Сколько получится таких пар, если их составить из двух разных цветков?» [24, С. 268]

В учебнике «Алгебра» Г.В. Дорофеева 7 класс комбинаторные задачи в учебнике не встречаются. В учебниках 7-9 классов автора изучается уже только «Вероятность и статистика».

Автор учебник «Алгебра» 9 класс А.Г.Мордкович только начинает изучение комбинаторных задач и представляет ученикам один из графических способов: составление дерева возможных вариантов [31]. В учебнике представлены примеры решения комбинаторных задач, а в задачнике подобрано большое количество задач на данную тему. Предлагаются задачи базового уровня, но и также есть задачи повышенной трудности, отмеченные знаком. Рассмотрим задания на составление дерева возможных вариантов.

К учебнику А.Г.Мордкович представлен вкладыш с дополнительными параграфами курса алгебры под названием «События. Вероятности. Статистическая обработка данных» для 7-9 классов [32]. Данное пособие предназначено для ознакомления учащихся с элементами комбинаторики. На большом количестве примеров представлены основные понятия, методы и идеи комбинаторики. В книге также даются задачи с решениями и ответы к ним, встречаются упражнения для самостоятельной работы с возрастающей степенью сложности.

Задача 7. «Сколько различных чисел можно записать с помощью цифр 0, 1, 2, если цифры в числе могут повторяться?» [31, С. 126]

Задача 8. «В закрытом ящике три неразличимых на ощупь шара: два белых и один чёрный. При вытаскивании чёрного шара, его возвращают обратно, а вытащенный белый шар откладывают в сторону. Такую операцию производят 3 раза подряд. а) Нарисовать дерево возможных вариантов. б) в скольких случаях будут вытаскиваться шары одного цвета?» [31, С.126]

Выполним анализ задачного материала по учебнику алгебры для 9-го класса Ю.Н. Макарычева [28].

В данном учебнике после каждого параграфа предлагается ряд упражнений, который разделён на задачи базового уровня сложности и задачи повышенной сложности, обозначенные зелёным квадратиком, а также присутствуют задачи на повторение.

Для данного учебника типичны решения комбинаторных задач по примерам, представленным в начале пункта. Рассмотрим некоторые из них.

Задача 9. «Сколько трёхзначных чисел можно составить из цифр 1,3,5,7, используя в записи числа каждую из них не более одного раза?» [28, С. 172]

Задача 10. «Сколькими различными способами можно образовать пару дежурных, если в классе остались Надя, Вика, Саша и Юра?» [28, С. 174]

Задача 11. «Этот вечер свободный можно так провести… (А. Кушнер): пойти прогуляться к реке, на площадь или в парк и потом пойти в гости к Вите или к Вике. А можно остаться дома, сначала посмотреть телевизор или почитать книжку, потом поиграть с братом или разобрать вещи на столе. Нарисуйте дерево возможных вариантов» [28, С. 174].

Решения задач № 5-11 представлены в Приложении Б.

Введение комбинаторных задач в курс изучения математики в 7-9 классах строится по тому же принципу, что и в 5-6 классах. Учащиеся изучают такие графические способы, как составление дерева возможных вариантов, составление таблиц и составления графов. Графический способ при решении комбинаторных задач удобно использовать, когда в задаче задано небольшое количество элементов для составления возможных вариантов. Если же задача содержит несколько сотен комбинаций, то целиком изобразить графическое решение очень сложно. Так для задач с большим числом вариантов существуют другие методы решения, с которыми учащиеся знакомятся на дальнейших уроках математики.

§ 6. Комбинаторные задачи в содержании олимпиад по математике для 5-9 классов

Важным средством в развитии логического мышления в рамках курса математики являются *задачи*. Отметим, что термин *олимпиадная задача* появился в результате практики применения особых видов задач для составления текстов олимпиадных работ, а вовсе не в результате классификации задач.

«При решении олимпиадных задач от учащихся требуется не только хорошая подготовка в области школьной математики, но и хорошее развитие некоторых качеств мышления, в частности гибкости, осознанности, глубины» [44].

«Олимпиадные задачи в математике — термин для обозначения круга задач, для решения которых обязательно требуется неожиданный и оригинальный подход» [19, С. 73].

Задача 1. «Четыре гостя при входе в ресторан отдали швейцару свои шляпы, а при выходе получили их обратно. Невнимательный швейцар раздал шляпы случайным образом. Сколько существует вариантов, при которых каждый гость получил чужую шляпу?» [3, С. 174]

Решение. Пронумеруем гостей и их шляпы цифрами от 1 до 4 соответственно. Для удобства номер шляпы совпадает с номером гостя. Составим таблицу: жирные цифры в первом столбце примем за номер гостя, далее в каждом столбце расположим комбинации шляп.

Таблица 6

Перебор возможных вариантов к задаче 1

1	2	2	2	3	3	3	4	4	4
2	1	3	4	1	3	4	1	3	3
3	4	4	1	4	1	2	2	1	2
4	3	1	3	2	2	1	3	2	1

Нужно выписать по возрастанию все четырёхзначные числа из чисел 1, 2, 3, 4 так, чтобы ни одна цифра не стояла на позиции со своим номером.

Наглядно видно, что имеется 9 вариантов необходимой раздачи шляп.

Ответ: 9 вариантов.

Задача 2. «Встретились пятеро друзей, здороваясь, они пожали друг другу руки. Сколько всего рукопожатий было сделано?» [8, С. 63]

Решение. Сначала выясним, как можно обозначить каждого человека. Удобнее изображать людей точками. Расположим точки по кругу. Следующий шаг, нам нужно показать людей, которые пожали друг другу руки. Проведем черточки от двух точек навстречу друг другу, эти черточки, они же «руки», образуют одну линию. Будем так обозначать рукопожатия. От одного человека проведем все рукопожатия с другими людьми, затем перейдем к другому человеку. Повторяем эту операцию, пока не получим, что все 5 человек пожали друг другу руки.

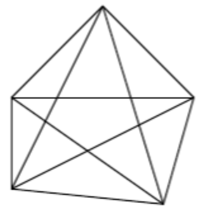

Рис.21. Граф рукопожатий к задаче 2.

По получившемуся графу подсчитывается число рассуждений, их всего 10.

Ответ: 10 рукопожатий

Задача 3. «Проводится игра. Из коробочки, содержащей три белых и два красных шара, наугад вынимают два.

а) Ведущий перед извлечением шаров принимает у зрителей ставки на число вынутых белов шаров. На сколько белых шаров вы поставите?

б) Ведущий принимает ставки на два исхода игры: шары одинакового цвета, шары разного цвета. На какой исход вы поставите?» [27, С.84]

Решение. «Чтобы ответить на поставленные вопросы, нужно или подсчитать число возможных вариантов исхода игры, или перебрать их, а затем подсчитать число. Обозначим белые шары цифрами 1, 2, 3, а красные - буквами а, б, т.е закодируем предметы. Чтобы вынуть два шара, нужно сначала вынуть первый, а для этого есть пять вариантов (1, 2, 3, а, б). Поэтому от звездочки проводим пять отрезков и на их концах ставим обозначения 1, 2, 3, а, б. Затем нужно вынуть второй шар из оставшихся четырех. Поэтому от конца каждого отрезка проводим по четыре отрезка, на концах которых напишем обозначения оставшихся шаров. Получим 20 вариантов извлечения шаров. Но среди них каждый повторяется дважды 12 и 21, 13 и 31, аб и ба и т.д. Итак, различных вариантов 10 и других извлечений шаров нет.

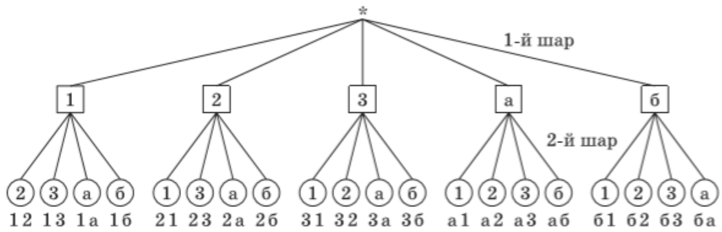

Рис.22. Дерево возможных вариантов к задаче 3.

а) Ясно, что если игру проводить еще много раз, то чаще будут появляться варианты с одним белым шаром. Теперь понятно, что нужно ставить на один белый шар.

б) Из двух исходов – шары одинакового цвета и шары разного цвета – при многократном повторении опыта чаще будет иметь место второй исход. Ставить нужно на шары разного цвета» [27, С.84].

Ответ: 1 белый шар; шары разного цвета

Задача 4. «Сколькими способами можно распределить четыре одинаковых карандаша между тремя детьми?» [37, С.87]

Решение. Представим информацию в таблицу.

Таблица 7

Перебор возможных вариантов к задаче 4

№ ребенка	№ варианта														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	4	0	0	3	3	1	1	0	0	2	2	0	2	1	1
2	0	4	0	1	0	3	0	3	1	2	0	2	1	2	1
3	0	0	4	0	1	0	3	1	3	0	2	2	1	1	2

«Целесообразно заполнять эту таблицу по столбцам. Первый столбец означает, что первый ребенок получил все четыре карандаша, а двум другим карандаши не достались. Обратим внимание на то, что карандаши одинаковые. Поэтому, например, для варианта (3,1,0) стоящего в четвертом столбце, не следует рассматривать различные способы выбора трех карандашей из четырех. Из четырех одинаковых элементов три (и любое другое число) можно выбрать единственным способом» [37, С.87].

Ответ: 15 способов

Задача 5. «Сколькими способами можно распределить два различных карандашами между тремя детьми?» [39, С.185]

Решение. Обозначим карандаши цифрами 1 и 2, можно рассмотреть все варианты распределения карандашей. В клетках таблицы указаны номера карандашей, полученных соответствующим ребенком.

Таблица 8

Перебор возможных вариантов к задаче 5

№ ребенка	№ варианта								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1, 2	—	—	1	1	—	2	2	—
2	—	1, 2	—	2	—	1	1	—	2
3	—	—	1, 2	—	2	2	—	1	1

Обратим внимание на то, что, например, в четвертом и седьмом столбцах стоит различные варианты распределения карандашей: ведь карандаши разные.

Ответ: 9 способов

Задача 6. «Сколькими способами из пяти шахматистов можно выбрать трех для участия в соревнованиях и, кроме того, одного капитана?» [8, С. 62]

Решение. Обозначим шахматистов цифрами 1,2,3,4,5, можно рассмотреть все варианты выбора. В клетках таблицы указываем номера выбранных шахматистов.

Таблица 9

Перебор возможных вариантов к задаче 6

Выбор	№ варианта									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Трех шахматистов	1 2 3	1 2 3	1 2 4	1 2 4	1 2 5	1 2 5	1 3 4	1 3 4	1 3 5	1 3 5
Капитана	4	5	3	5	3	4	2	5	2	4
Выбор	№ варианта									
	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Трех шахматистов	1 4 5	1 4 5	2 3 4	2 3 4	2 3 5	2 3 5	2 4 5	2 4 5	3 4 5	3 4 5
Капитана	2	3	1	5	1	4	1	3	1	2

Получаем 20 способов. Следует обратить внимание, что сначала выбирались три шахматиста для участия в соревнованиях, а потом из двух оставшихся, капитана.

Ответ: 20 способов

В итоге, можем сделать вывод, что «олимпиадные задачи - это задачи повышенной трудности, нестандартные по формулировке или по методам их решения». На олимпиаде по математике встречаются комбинаторные задачи, но графический способ при их решении используется редко. Если же решить задачу можно с применением графического способа, то в основном решение сводится к методу составления таблиц. Обычно олимпиадные комбинаторные задачи решаются другими методами, например, с помощью применения формул соединений.

Выводы по второй главе

1. Выделена методика обучения решению комбинаторных задач с применением графических способов в курсе математики 5-6 классах. Тема «Комбинаторные задачи с применением графических способов» изучается при помощи рассмотрения примеров решения задач учителем с подробным объяснением хода решения. Затем, ученики, после несколько разобранных задач, пробуют решать комбинаторные задачи самостоятельно. При изучении комбинаторных задач с применением графических способов учащиеся учатся составлять возможные варианты с помощью дерева вариантов, таблиц и граф.

2. Выделена методика обучения решению комбинаторных задач с применением графических способов в курсе математики основной школы. Курс изучения комбинаторных задач в 7-9 классах построен тем же образом что в 5-6 классах. Учащимися изучаются такие графические способы, как составление дерева возможных вариантов, составление таблиц и составления

графов. Такие способы решения удобно применять только для сравнительно небольшого числа вариантов, а, например, для сотен комбинаций графический способ изобразить очень сложно. Поэтому при изучении данной темы задачи чаще всего встречаются идентичные друг другу с небольшим количеством заданных условий. А задачи с большим числом вариантов решаются уже другим методом, изучаемым учениками на дальнейших уроках математики.

3. Подобраны задачи по теме исследования, которые могут использоваться в качестве олимпиадных заданий. Комбинаторные задачи с применением графического способа не так часто используются в заданиях олимпиад, так как данные задачи имеют не большой выбор вариантов решения. Часто в олимпиадных задачах по теме «Комбинаторика» используются задачи на применение основных формул соединений либо задачи на логическое мышление. Если же в содержание олимпиады включены комбинаторные задачи, которые можно решить графическим способом, то они решаются в основном методом составления таблиц.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной бакалаврской работе мы рассмотрели методы обучения решению комбинаторных задач с применением графических способов решения. Подводя итоги бакалаврской работы можно сказать, что поставленная цель достигнута.

При выполнении данной бакалаврской работы были решены поставленные задачи и выполнено следующее:

1. Определены основные типы комбинаторных задач.
2. Выявлены цели обучения и основные требования к знаниям и умениям о решении комбинаторных задач.
3. Проведен анализ содержания программы и школьных учебников по теме исследования.
4. Описан графический метод решения комбинаторных задач.
5. Выделены методические особенности обучения решению задач комбинаторных задач с применением графического способа.
6. Подобраны олимпиадные задачи по теме исследования.

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Берикханова, Г.Е. Комбинаторные методы и использование их в обучении комбинаторике в школе. [Электронный ресурс] / Г.Е. Берикханова // – 2010.- №1. – С.291-292. - Режим доступа: https://elibrary.ru/item.asp?id=27808785. - Последнее обновление 21.05.2018.
2. Бунимович Е. А. Вероятность и статистика 5-9 кл. [Текст]: пособие для общеобразовательных учебных заведений / Е. А. Бунимович, В. А. Булычев. – М.: Дрофа, 2002.-196 с.
3. Бунимович Е. А. Основы статистики и вероятность 5-9 кл. [Текст]: пособие для общеобразовательных учреждений / Е. А. Бунимович, В. А. Булычев. - М. : Дрофа, 2004 - 286 с.
4. Буркова, Н. Особенности изучения комбинаторики в курсе математики средней школы [Электронный ресурс] / Н. Буркова // Студенческая наука и XXI век. - 2013. - № 10. – С. 36 – 38. - Режим доступа: https://elibrary.ru/item.asp?id=21437723.- Последнее обновление 20.05.2018.
5. Бурмистрова, Т.А. Алгебра. Сборник рабочих программ. 7 – 9 классы. [Текст]: пособие для учителей общеобразовательных организация/ Т.А. Бурмистрова. – 2-е изд., доп. – М.: Просвещение, 2014. – 96 с.
6. Виленкин Н. Я. Математика. 5 класс. [Текст]: учеб. / Н. Я. Виленкин, В. И. Жохов, А. С. Чесноков, С. И.Шварцбурд.— 34-е изд., стереотип. — Москва : Мнемозина, 2015
7. Виленкин Н. Я. Математика. 6 класс. [Текст] : учеб. / Н. Я. Виленкин, В. И. Жохов, А. С. Чесноков, С. И. Шварцбурд. — 33-е изд., стереотип.— Москва : Мнемозина, 2015
8. Гаваза, Т. А. « Трудные задачи» по терии вероятностей в средней школе. Методический аспект [Электронный ресурс]/ Т.А. Буркова // Вестник Псковского государственого университета. Серия: Естественные и физико-математические науки. – 2015. - №6. – С.61-68. – Режим доступа: https://elibrary.ru/item.asp?id=25664054. – Последнее обновление 15.05.2018.

9. Дорофеев, Г.В. Алгебра. 7 класс. [Текст]: учебник для общеобразовательных организаций/ Г.В. Дорофеев, С.Б. Суворова, Е.А. Бунимович. – 2-е изд. – М.: Просвещение, 2014. – 287 с.

10. Дорофеев, Г.В. Алгебра. 7 класс. Методические рекомендации. [Текст]: пособие для учителей / Г.В. Дорофеев, С.Б. Суворова, Е.А. Бунимович. – М.: Просвещение, 2015. – 185 с.

11. Дорофеев, Г.В. Алгебра. 8 класс. [Текст]: учебник для общеобразовательных организаций/Г.В. Дорофеев, С.Б. Суворова, Е.А. Бунимович. – 3-е изд. – М.: Просвещение, 2016. – 320 с.

12. Дорофеев, Г.В. Алгебра. 8 класс. Методические рекомендации. [Текст]: пособие для учителей / Г.В. Дорофеев, С.Б. Суворова, Е.А. Бунимович. – М.: Просвещение, 2015. – 246 с.

13. Дорофеев, Г.В. Математика. 5 класс. [Текст]: учебник для общеобразовательных организаций/ Г.В. Дорофеев, С.Б. Суворова, Е.А. Бунимович. – 5-е изд. – М.: Просвещение, 2017. – 288 с.

14. Дорофеев, Г.В. Математика. 5 класс. Методические рекомендации. [Текст]: пособие для учителей / Г.В. Дорофеев, С.Б. Суворова, Е.А. Бунимович. – М.: Просвещение, 2013. – 200 с.

15. Дорофеев, Г.В. Математика. 6 класс. [Текст]: учебник для общеобразовательных организаций/ Г.В. Дорофеев, С.Б. Суворова, Е.А. Бунимович. – 4-е изд. – М.: Просвещение, 2016. – 288 с.

16. Дорофеев, Г.В. Математика. 6 класс. Методические рекомендации. [Текст]: пособие для учителей / Г.В. Дорофеев, С.Б. Суворова, Е.А. Бунимович. – М.: Просвещение, 2013. – 157 с.

17. Зубарева, И.И. Математика. 5 кл. [Текст]: учеб. для учащихся общеобразоват. организаций / И. И. Зубарева, А. Г. Мордкович. – 15-е изд. – М.: Мнемозина, 2014. – 270 с.

18. Зубарева, И.И. Математика. 6 кл. [Текст]: учеб. для учащихся общеобразоват. организаций / И. И. Зубарева, А. Г. Морякович. – 15-е изд. – М.: Мнемозина, 2014. – 287 с.

19. Ковпак, И.О. Преемственность в изучении элементов стохастики между начальной и основной школой в соответствии с ФГОС [Электронный ресурс]/ И.О. Ковпак // Начальная школа плюс До и После. - 2013. - № 6. - С. 83-89. – Режим доступа: https://elibrary.ru/item.asp?id=20378152. - Последнее обновление 11.05.2018.

20. Колягин Ю.М. Задачи в обучении математике. [Текст]: Часть I. Математические задачи как средство обучения и развития учащихся. – М.,1977. – 113 с.

21. Колягин, Ю.М. Алгебра. 7 класс [Текст]: учеб. Для общеобразоват. учреждений / Ю.М. Колягин, М.В. Ткачёва, Н.Е. Фёдорова, М.И. Шабунин. – М.: Просвещение, 2012. – 319 с.

22. Колягин, Ю.М. Алгебра. 7 класс. Методические рекомендации. [Текст]: пособие для учителей / Ю.М. Колягин, М.В. Ткачёва, Н.Е. Фёдорова, М.И. Шабунин. – М.: Просвещение, – 2-е изд. - 2017. – 144 с.

23. Колягин, Ю.М. Алгебра. 8 класс. Методические рекомендации. [Текст]: пособие для учителей / Ю.М. Колягин, М.В. Ткачёва, Н.Е. Фёдорова, М.И. Шабунин. – М.: Просвещение, – 2-е изд. - 2017. – 128 с.

24. Колягин, Ю.М. Алгебра. 9 класс [Текст]: учеб. Для общеобразоват. учреждений / Ю.М. Колягин, М.В. Ткачёва, Н.Е. Фёдорова, М.И. Шабунин. – М.: Просвещение, 2014. – 304 с.

25. Крутихина М.В. Изучение элементов комбинаторики в 5-ом классе гуманитарной направленности [Электронный ресурс] / М.В. Крутихина, А.О. Сопот // Научно-методический электронный журнал Концепт. – 2013. - №11. – С. 131-135. - Режим доступа: https://elibrary.ru/item.asp?id=20789523. Последнее обновнение 09.05.2018.

26. Лебедев В.В. Эффективное обучение комбинаторике и теории вероятностей [Электронный ресурс] / В.В. Лебедев // Школьные технологии. – 2012. - №2. - С.126- 134. - https://elibrary.ru/item.asp?id=17743321.- Последнее обновление 17.05.2018.

27. Лейзерман, Ж.Б. Развитие исследовательской активности учащихся при изучении стохастики [Электронный ресурс] / Ж.Б. Лейзерман // Вестник Университета Российской академии образования. - 2010. - № 2. - С. 83-85. – Режим доступа: https://elibrary.ru/item.asp?id=16243591. - Последнее обновление 14.05.2018.

28. Макарычев, Ю.Н. Алгебра. 9 класс. [Текст]: учеб. Для общеобразоват. учреждений/ Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, С.Б. Суворова; под ред. С.А. Теляковского. – 18-е изд. - М.: Просвещение, 2011. – 271 с.

29. Макарычев, Ю.Н. Изучение алгебры в 7 – 9 классах [Текст]: пособие для учителей / Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, С.Б. Суворова, И.С. Шлыкова. – 4-е изд. – М.: Просвещение, 2011. – 304 с.

30. Мордкович, А.Г. Алгебра. 9 класс.[Текст]: методическое пособие для учителя / А.Г. Мордкович, П.В. Семенов. – М.: Мнемозина, 2010. – 72 с.

31. Мордкович, А.Г. Алгебра. 9 класс. В 2 ч. Ч. 1 [Текст]: учебник для учащихся общеобразовательных учреждений / А.Г. Мордкович, П.В. Семенов. – 12-е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2010. – 224 с.

32. Мордкович, А.Г. События. Вероятности. Статистическая обработка данных [Текст]: Доп. параграфы к курсу алгебры 7-9 классов / А.Г. Мордкович, П.В. Семенов. – 12-е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2010. – 224 с.

33. Никольский, С.М. Математика. 5 класс. [Текст]: методическое пособие для учителя / С.М. Никольский, М.К. Потапов. – М.: Просвещение, 2012. – 160 с.

34. Никольский, С.М. Математика. 5 класс. Методические рекомендации [Текст]: учебник для общеобразовательных организаций/ С.М. Никольский, М.К. Потапов. – 14-е изд. – М.: Просвещение, 2015. – 272 с.

35. Никольский, С.М. Математика. 6 класс. [Текст]: учебник для общеобразовательных организаций/ С.М. Никольский, М.К. Потапов. – 14-е изд. – М.: Просвещение, 2015. – 256 с.

36. Осипова, Е.Н. О возможностях формирования стохастической содержательно-методической линии курса математики средней школы [Электронный ресурс]/ Е.Н. Осипова, М.В. Поспелов// Вестник Коми государственного педагогического института. - 2011. - № 9. - С. 153-162. – Режим доступа: https://elibrary.ru/item.asp?id=17909721- Последнее обновление 13.05.2018.

37. Ткачёва, М.В. Элементы статистики и вероятность [Текст]: учеб.для общеобразоват. учреждений для 7-9 классов / М.И. Ткачёва, Н.Е. Фёдорова. – 2-е изд. – М.: Просвещение, 2005. – 112 с.

38. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования: Приказ Мин. образования и науки РФ от 17.12.2017 г. №897. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://минобр-науки.рф/документы/938. – Последнее обновление 15.05.2018.

39. Фридман, Л.М. Как научиться решать задачи [Текст]: книга для учащихся 9-11 кл. / Л.М. Фридман. – М.: Просвещение, 2009. – 255 с.

40. Шеврин Л.Н. Математика. [Текст]: учеб.-собеседник для 5—6 кл. сред. шк. / Л. Н. Шеврин, А. Г. Гейн, , М. В. Волков.— М., 1989.—495 с.

41. Щербатых, С.В. Методические особенности обучения комбинаторике в 5-6 классах с использованием интерактивных методов и средств [Электронный ресурс] / С. В. Щербатых, И.В. Китаева// Психология образования в поликультурном обществе.- 2016.- № 34.- С. 143-149. - Режим доступа: https://elibrary.ru/item.asp?id=25911452. – Последнее обновление 13.05.2018.

42. Bose R.C. Combinatorics, task dependency, 1993. — 356 p.

43. Fisz, Marek. Probability Theory and Mathematical Statistics/ Krieger Pub Co.-1980.- 677 p.

44. Negut, A. Problens for the Mathematical Olympiads. GIL Publishing House, 2005. – 158 p.

45. Sahoo, Prasanna. Probability Theory and Mathematical Statistics/ University of Louisville.- 2013.- 698 p.

46. Vakalyuk, T.A. Mathematical bases decision of combinatorics tasks, 2010. — 144 p.

Приложение А

Решение задач из параграфа § 4. Методика обучения решению комбинаторных задач с применением графических способов в курсе математики 5-6 классов

Решение к задаче 8.

Построим дерево возможных вариантов для решения задачи.

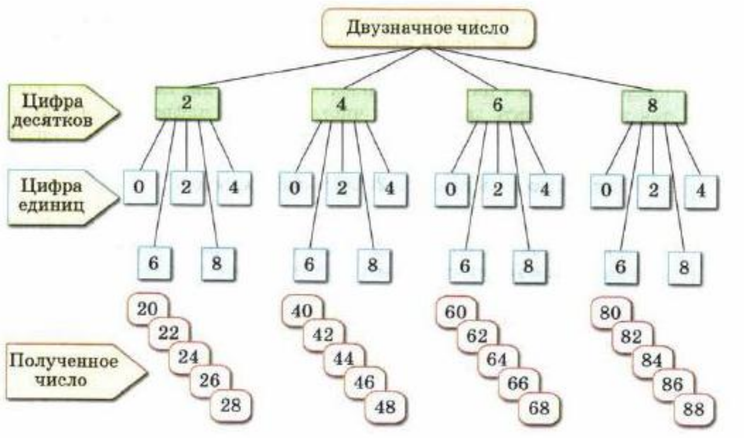

Рис.1. Дерево возможных вариантов к задаче 9.

У интересующих нас двузначных чисел на первом месте (цифра десятков) может находиться любая из заданных цифр, кроме цифры 0 (не существует двузначного числа, начинающегося с цифры 0). Если на первом месте поставим цифру 2, то на втором месте (цифра единиц) может находиться любая из заданных пяти цифр. Получится пять двузначных чисел: 20, 22, 24, 26,28. Точно так же будет пять двузначных чисел с первой цифрой 4, пять двузначных чисел с первой цифрой 4, пять двузначных чисел с первой цифрой 6 и пять двузначных чисел с первой цифрой 8. В итоге получим 20 чисел.

Ответ: 20 вариантов.

Приложение А

Решение к задаче 9.

Обозначим первыми буквами название цветов:

Р – розовая рубашка, Ж – желтая рубашка, К – красная рубашка, Ч – черная рубашка, З – зеленая юбка, С – синяя юбка.

Составим дерево возможных вариантов, используя введенные нами обозначениями.

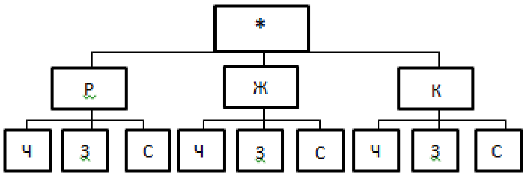

Рис.2. Дерево возможных вариантов к задаче 10.

По дереву возможных вариантов у нас получается 9 различных комплектов одежды для Тани.

Ответ: 9 вариантов.

Решение к задаче 10.

Обозначим города буквами В, Р и Ф. Тогда код каждого маршрута будет состоять из этих трех букв, взятых в разном порядке.

Если сначала посетить Венецию, то затем можно поехать или в Рим, или во Флоренцию. Если вторым посетить Рим, то третьей будет Флоренция; получаем маршрут ВРФ. Если второй будет Флоренция, то третьим будет Рим; получаем маршрут ВФР. Начав маршрут с Рима, получим еще два варианта: РВФ, РФВ. И с Флоренции, получим варианты ФВР, ФРВ.

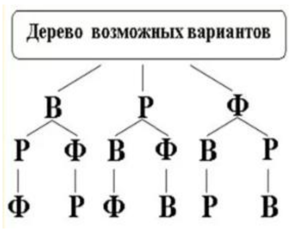

Рис.3. Дерево возможных вариантов к задаче 11.

Таким образом, следуя по каждой веточке дерева возможных вариантов, получаем 6 вариантов маршрутов.

Ответ: 6 вариантов.

Приложение А

Решение к задаче 11.

Дадим каждому победителю номер от 1 до 6. Составим таблицу вариантов, где выбор двух победителей будет являться пересечение строк и столбцов данной таблицы. Вписываем в таблицу номера с 1-6, которые означают победителей.

Таблица 1

Перебор возможных вариантов к задаче 12

	1	2	3	4	5	6
1	-	12	13	14	15	16
2	-	-	23	24	25	26
3	-	-	-	34	35	36
4	-	-	-	-	45	46
5	-	-	-	-	-	56
6	-	-	-	-	-	-

По таблице видны все варианты, чтобы отправить двух победителей. Прочерк в таблице обозначает, что такой вариант уже был и мы не считаем его еще раз, например 14 и 41 означает что на областную олимпиаду едет 1 и 4 победитель. Получаем 15 вариантов распределения двух победителей на областную олимпиаду.

Ответ: 15 вариантов.

Приложение А

Решение к задаче 12.

Введем кодирование слов для удобства составления дерева: красный – к, желтый – ж, зеленый – з. После составим дерево возможных вариантов.

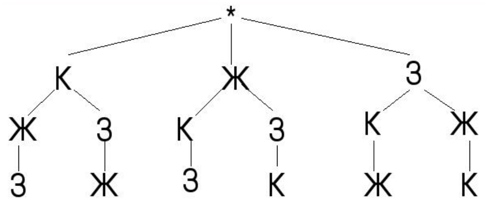

Рис.4. Дерево возможных вариантов к задаче 13.

Получаем 6 вариантов как можно раскрасить прямоугольник, разделенный на три треугольника.

Ответ: 6 вариантов.

Решение к задаче 13.

Обозначим цвета первыми буквами названия цвета. То же самое сделаем и с мебелью. Затем составим таблицу, по которой определим все варианты обивки мебели.

Таблица 2

Перебор возможных вариантов к задаче 14

	Г				З			
Д	+	+	+	+	+	+	+	+
К	+	+	-	-	+	+	-	-
С	+	-	+	-	+	-	+	-

По таблице видим, что получается 8 вариантов обивки мебели.

Ответ: 8 вариантов.

Приложение Б

Решение задач из параграфа §5. Методика обучения решению комбинаторных задач с применением графических способов в курсе алгебры 7-9 классов

Решение к задаче 5.

В этой задаче не учитывается порядок элементов. Можно осуществлять перебор, а можно наглядно переставить в виде графа:

В – Валя, З – Злата, М – Маша, П – Поля, С – София.

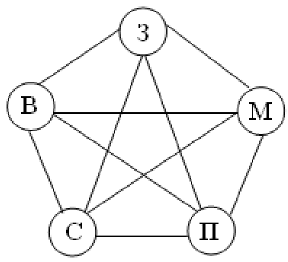

Рис.5. Граф выбора к задаче 5.

Ребра графа показывают связь в парах, таких ребер 10, значит, всего 10 вариантов выбора подруг.

Ответ: 10 вариантов.

Решение к задаче 6.

Данную задачу будет решать с помощью дерева возможных вариантов. Для удобства закодируем слова заглавными буквами названия цветов.

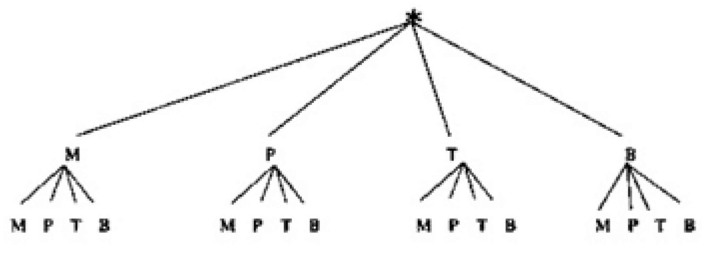

Рис.6. Дерево возможных вариантов к задаче 6.

Получаем: 12 способов без повторений, 16 способов с повторами.

Ответ: 12 – без повтора; 16 – с повторами.

Приложение Б

Решение к задаче 7.

Первой цифрой составляемого трёхзначного числа может быть либо 1, либо 2. Второй цифрой может быть любая из трёх данных цифр; третьей – также любая из цифр 0, 1, 2. Изобразим на рисунке сказанное *с помощью дерева возможных вариантов.*

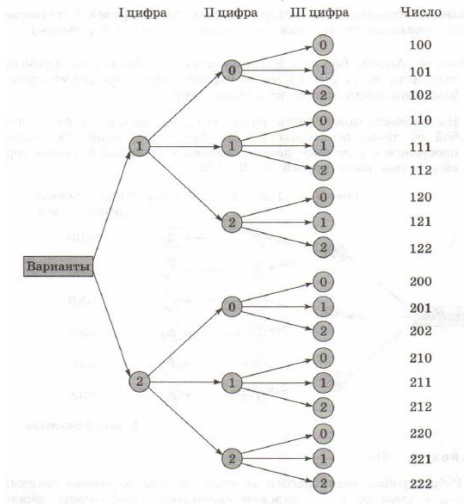

Рис.7. Дерево возможных вариантов к задаче 7.

Ответ: 18 вариантов.

Решение к задаче 8.

а) Строим дерево возможных вариантов.

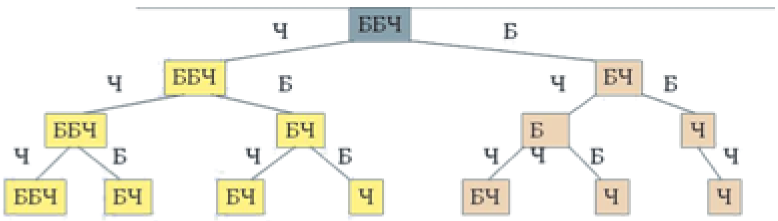

Рис.8. Дерево возможных вариантов к задаче 8.

б) По дереву видно, что это возможно в единственном случае, когда три раза подряд вытаскивается шар черного цвета.

Ответ: 1 вариант.

Приложение Б

Решение к задаче 9.

Проведённый *перебор вариантов* проиллюстрирован на схеме. Такую схему называют деревом всевозможных вариантов.

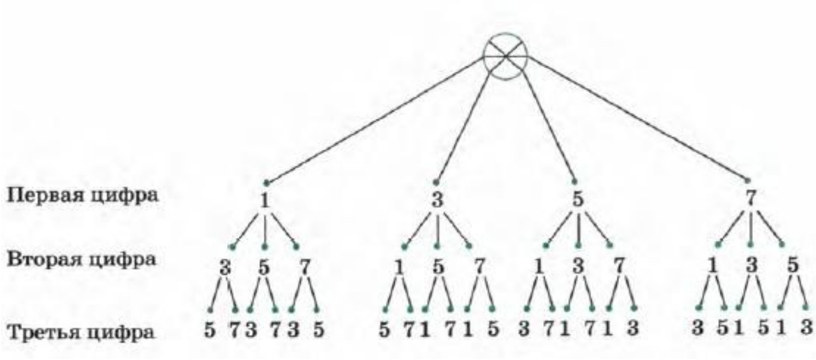

Рис.9. Дерево возможных вариантов к задаче 9.

Ответ: 24 варианта.

Решение к задаче 10.

Составим дерево возможных вариантов. Где изобразим все варианты дежурства.

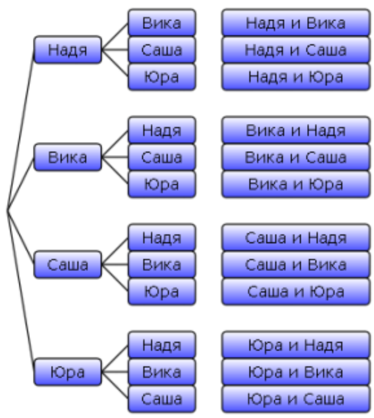

Рис.10. Дерево возможных вариантов к задаче 10.

На древовидной диаграмме видно, что можно образовать только 6 пар дежурных (Надя и Вика, Надя и Саша, Надя и Юра, Вика и Саша, Саша и Юра, Вика и Юра), т.к. каждая пара повторяется 2 раза.

Ответ: 6 вариантов.

Решение к задаче 11.

Проиллюстрируем все варианты, как провести вечер на схеме.

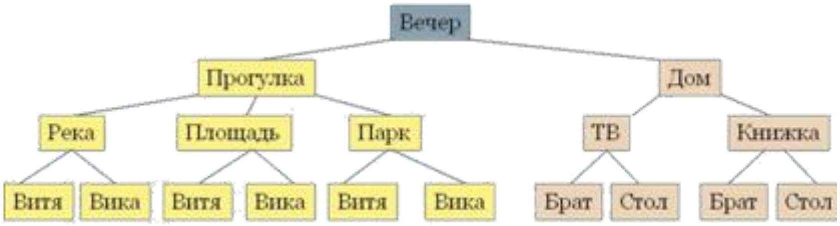

Рис.11. Дерево возможных вариантов к задаче 11.

Ответ: 10 вариантов.