МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
**«Тольяттинский государственный университет»**

институт математики, физики и информационных технологий
кафедра «Алгебра и геометрия»

# МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ УЧАЩИХСЯ РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ НА ПРОЦЕНТЫ В КУРСЕ АЛГЕБРЫ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ

**Б А К А Л А В Р С К А Я   Р А Б О Т А**

Направление подготовки: 44.03.05 *Педагогическое образование*
Направленность (профиль): *Математика и информатика*

Студент Л.Н. Ахтямова __________

Научный
Руководитель:к.п.н., доцент кафедры
алгебры и геометрииИ.В. Антонова __________

**Допустить к защите**
Заведующий кафедрой: д.п.н., проф. Р.А.Утеева __________
«_____»___________2016 г.

Тольятти - 2016

## СОДЕРЖАНИЕ

# ВВЕДЕНИЕ

**Актуальность исследования.** Математика занимает значительное место не только на всех ступенях образования, но и в жизни [1, С. 42]. Поэтому важнейшая задача школы – давать подрастающему поколению прочные знания основ наук, вырабатывать у них навыки и умения, применять их на практике. Одной из основных и главных задач школы является формирование у учащихся прочных знаний по математике. В настоящее время все больше требуются специалисты высокого уровня, которые бы непосредственно связаны были бы с применением математики – это и сфера бизнеса, и банковские «продукты», магазины и др.

Большое практическое значение имеет умение учащимися решать задачи на проценты. Понятие процента широко используется как в реальной жизни, так и в различных областях науки.

В школьном курсе математики тема «Проценты» начинает изучаться в 5-6 классах, но так как данной теме отводится достаточно мало времени на уроках, учащиеся не умеют решать задачи на проценты. Многие учащиеся испытывают трудности, когда встречаются с понятием процента. Так, они не владеют вопросами, связанными с инфляцией, ценообразованием, банковскими вкладами и кредитами. Поэтому к данной теме необходимо обращаться постоянно, учитывая, что проценты тесно связаны с повседневной жизнью и с ними постоянно приходится сталкиваться. Кроме того, при поступлении в различные колледжи и высшие учебные заведения требуются знание понятия процента. При сдаче ОГЭ необходимо уметь решать задачи на проценты различных типов [29, С. 45].

Все вышесказанное определяет актуальность данного исследования.

Кроме того, актуальность темы исследования обусловлена сложившимся к настоящему времени *противоречием* между необходимостью обучения учащихся решению задач на проценты в курсе математики основной школы в соответствии с требованиями ФГОС основного общего образования и фактическим состоянием методики обучения их решения учащихся основной школы.

**Проблема исследования** состоит в определении путей качественного усвоения темы «Проценты» и выявлении методических особенностей обучения учащихся основной школы решению задач на проценты.

**Объект исследования:** процесс обучения математике в основной школе.

**Предмет исследования:** методические особенности обучения учащихся решению задач на проценты в школьном курсе математики основной школы.

**Цель исследования:** разработать методические материалы по обучению учащихся основной школы решению задач на проценты и методические рекомендации по их применению.

**Задачи исследования**:

1. Рассмотреть исторические аспекты развития понятия процента в математике.

2. Представить анализ программы и школьных учебников по теме по теме исследования.

3. Выявить методические особенности обучения решению задач на проценты в курсе алгебры основной школы.

4. Рассмотреть опыт работы учителей математики по теме исследования.

5. Разработать методические материалы (карточки для устного счета, самостоятельные и контрольные работы, наборы задач) по обучению учащихся 5-6-х и 7-9-х классов решению задач на проценты и методические рекомендации по их применению.

Для решения задач были использованы следующие **методы исследования**: анализ учебно-методической литературы, работ по истории математики, школьных программ, учебников и учебных пособий, изучение опыта работы отечественной школы.

**Теоретическая значимость исследования** состоит в том, что в нем: рассмотрены исторические аспекты развития понятия процента в математике; выявлены методические особенности обучения решению задач на проценты в курсе алгебры основной школы.

**Практическая значимость** заключается в том, что в ней представлены методические материалы по обучению учащихся основной школы решению задач на проценты и методические рекомендации по их применению, которые могут быть использованы учителями математики и студентами педагогических направлений подготовки при прохождения ими педагогической практики.

**На защиту** выносятся: методические материалы (карточки для устного счета, самостоятельные и контрольные работы, наборы задач) по обучению учащихся 5-6-х и 7-9-х классов решению задач на проценты и методические рекомендации по их применению.

Бакалаврская работа состоит из введения, двух глав, заключения и списка литературы.

**Во введении** сформулированы основные характеристики исследования: актуальность, противоречие, проблема, объект, предмет, цель, задачи и методы исследования.

**Глава I** посвящена методическим основам обучения учащихся решению задач на проценты. Представлены исторические аспекты развития понятия процента. Выявлены методические особенности обучения решению задач на проценты в курсе алгебры основной школы.

**В Главе II** представлены методические материалы по обучению учащихся 5-6-х и 7-9-х классов решению задач на проценты в курсе алгебры основной школы и методические рекомендации по их применению Приведен анализ задач ОГЭ по теме исследования.

**В заключении** сформулированы основные результаты и выводы проведённого исследования.

Список литературы содержит 31 наименование.

# ГЛАВА I. МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОБУЧЕНИЯ УЧАЩИХСЯ РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ НА ПРОЦЕНТЫ В КУРСЕ АЛГЕБРЫ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ

## §1. Исторические аспекты развития понятия процента в математике

*Проценты* – одно из математических понятий, которые часто встречаются в повседневной жизни. Слово «процент» происходит от латинских слов pro centum, что буквально переводится «за сотню», или «со ста» [28,С.3].

Процентами очень удобно пользоваться на практике, так как они выражают части целых чисел в одних и тех же сотых долях. Это дает возможность упрощать расчеты и легко сравнивать части между собой и с целыми. Идея выражения частей целого постоянно в одних и тех же долях, вызванная практическими представлениями, родилась еще в древности у *вавилонян*, которые пользовались шестидесятеричными дробями. Уже в клинописных таблицах вавилонян содержатся задачи на расчет процентов. До нас дошли составленные вавилонянами таблицы процентов, которые позволяли быстро определить сумму процентных денег[2,С. 337].

Были известны проценты и в *Индии*. Индийские математики вычисляли проценты, применив так называемое тройное правило, то есть пользуясь пропорцией. Они умели производить и более сложные вычисления с применением процентов.

Денежные расчеты с процентами были особенно распространены в *Древнем Риме*. Римляне называли процентами деньги, которые платил должник заимодавцу за каждую сотню. Даже римский сенат вынужден был установить максимально допустимый процент, взимаемый с должника, так как некоторые заимодавцы усердствовали в получении процентных денег. От римлян проценты перешли к другим народам ».

В *средние века в Европе* в связи с широким развитием торговли особо много внимания обращали на умение вычислять проценты. В то время приходилось рассчитывать не только проценты, но и проценты с процентов, то есть сложные проценты, как называют их в наше время. Отдельные конторы и предприятия для облегчения труда при вычислениях процентов разрабатывали свои особые таблицы, которые составляли коммерческий секрет фирмы » [24, С. 58].

Впервые опубликовал *таблицы для расчета процентов* в 1584 году Симон Стевин – инженер из города Брюгге (Нидерланды). Стевин известен замечательным разнообразием научных открытий в том числе – особой записи десятичных дробей.

Долгое время под процентами понимались исключительно прибыль и убыток на каждые 100 рублей. Они применялись только в торговых и денежных сделках. Затем область их применения расширилась, проценты встречаются в хозяйственных и финансовых расчетах, статистике, науке и технике. Нынче процент – это частный вид десятичных дробей, сотая доля целого (принимаемого за единицу).

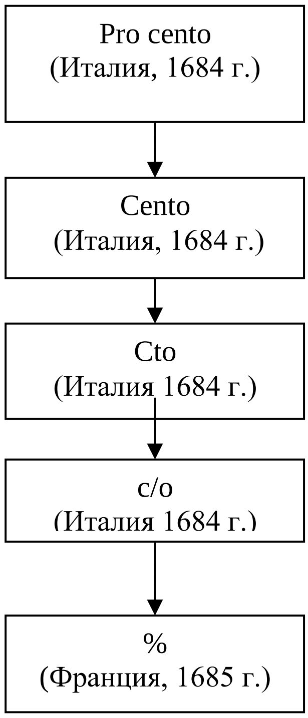
Интересно происхождение *обозначения процента*. Существует версия, что знак % происходит от итальянского pro cento (сто), которое в процентных расчетах часто сокращенно писалось cto. Отсюда путем дальнейшего сокращения в скорописи буква t превратилась в наклонную черту (/), возник современный знак процента. Развитие процента представлено ниже в виде Схемы 1.

В учебнике Н.Я. Виленкина описана другая версия возникновения этого знака. Предполагается, что этот знак произошел в результате нелепой опечатки, совершенной наборщиком. В 1685 году в Париже была опубликована книга – руководство по коммерческой арифметике, где по ошибке наборщик вместо cto напечатал %.

В некоторых вопросах иногда применяют и более мелкие, тысячные доли, так называемые «промилле» (от латинского promille – «с тысячи»), обозначаемые, по аналогии процентов. Изобретение математических знаков и символов значительно облегчило изучение математики и способствовало дальнейшему ее развитию [2, С. 337].

Схема 1

*Развитие понятия знака процента*




В математике также говорили о предметах о некоторой заданной совокупности – деньгах, зарабатываемых в семье, материалах, продуктах питания, то процент, разумеется, 100 сотых частей самого себя. Поэтому обычно говорят, что она «принимается за 100%».

Если речь  идет о проценте от данного числа, то это число принимается за 100%. Например, 1% зарплаты – это сотая часть зарплаты; 100% зарплаты – это 100 сотых частей зарплаты. Т.е. вся зарплата. Подоходный налог с зарплаты берется в размере 13%, т. е. 13 сотых от зарплаты. Надпись «60%» хлопка на этикетке обозначает, что материал содержит 60 сотых хлопка, т. е. более чем на половину состоит их чистого хлопка. 3,2 жира в молоке означает, что 3,2 сотых массы продукта составляет жир (или, другими словами, в каждых 100 граммах этого продукта содержится 3,2 грамма жира) [11, С. 25].

Как известно из практики, с помощью процентов часто показывают изменение той или иной конкретной величины. Такая форма является наглядной числовой характеристикой изменения, характеризующей значимость произошедшего изменения. Например, уровень подростковой преступности повысился на 3%, в этом ничего страшного нет – быть может, эта цифра отражает только естественные колебания уровня. Но если он повысился на 30%, то это уже говорит о серьезности проблемы и необходимости изучения причин такого явления и принятия, соответствующих мер [11, С. 26].

Таким образом, рассмотрев исторические аспекты развития понятия «процента» отметим, что процентные расчеты впервые появились в древности у вавилонян, ими были созданы таблицы для расчета процентов. В Индии математики для расчета процентов применяли тройное правило, так же расчетами процентов занимались в Древнем Риме и в Европе в средние века.

## §2. Задачи на проценты в программе и учебниках математики основной школы

В *федеральном государственном образовательном стандарте* основного общего образования [31] отмечается, что учащиеся должны уметь:

– создавать, применять и преобразовывать знаки и символы, модели и схемы для решения учебных и познавательных задач.

– применять изученные понятия, результаты, методы для решения задач практического характера и задач из смежных дисциплин с использованием при необходимости справочных материалов и компьютера.

Согласно *Примерной программы основного общего образования* по математике учащиеся основной школы должны уметь:

– переходить от одной формы записи чисел к другой, представлять проценты в виде дроби и дробь в виде процентов;

– решать текстовые задачи, включая задачи на проценты;

– решать текстовые задачи алгебраическим методом, интерпретировать полученный результат, проводить отбор решений, исходя из формулировки задач;

– создавать модель условия задачи, в которой даны значения двух из трёх взаимосвязанных величин, с целью поиска решения задачи;

– осуществлять способ поиска решения задачи, в котором рассуждение строится от условия к требованию и наоборот от требования к условию;

– составлять план решения задачи;

– выделять этапы решения задачи;

– интерпретировать вычислительные результаты в задаче, исследовать полученное решение задачи;

– решать задачи на нахождение части числа и числа по его части;

– находить процент от числа, число по его проценту, находить процентное отношение двух чисел, находить процентное снижение или процентное повышение величины [27].

Представим анализ учебников математики 5-х классов по теме исследования (Таблица 1).

Таблица 1

| ***Учебники математики, 5 класс*** | | |
|---|---|---|
| Н.Я. Виленкин,<br>В.И. Жохов | Г.К. Муравин,<br>О.В. Муравина | Г.В. Дорофеев,<br>И.Ф. Шарыгина |
| ***Количество часов и тема*** | | |
| Проценты. Основные задачи на проценты [2, С. 327]<br>6 часов | Процентные расчеты [19, С. 135]<br>6 часов | - |
| ***Последовательность вводимых понятий*** | | |
| – понятие процента<br>– запись процента в виде десятичной дроби<br>– запись десятичной дроби в виде процента<br>– запись обыкновенных дробей в виде процентов | – понятие процента<br>– правило чтения процентов<br>– нахождение процента от числа<br>– нахождение числа по его проценту<br>– нахождение процентного соотношения | - |
| ***Определение понятия процента*** | | |
| Процентом называют одну сотую часть. | Процент означает сотую долю целого | - |
| ***Цель*** | | |
| Сформировать у учащихся умения решать основные виды задач на проценты[10,С.26] | Научить учащихся находить процент от числа, число по его проценту и процентное соотношение, а также сформировать у учащихся умения решать простейшие задачи на проценты | - |

В учебнике математике Н.Я. Виленкина с понятием процента ученики знакомятся в 5 классе. По программе этому понятию отводится шесть часов. За пять уроков нужно дать определение понятия процента, научить записывать проценты в виде обыкновенных и десятичных дробей, наглядно представить число процентов на рисунке как часть целого, научить решать простейшие задачи на проценты, а на шестой урок провести контрольную работу.

В учебнике рассматриваются 3 *типа задач*:

*1тип:* вычисление процента от числа;

*2 тип:* вычисления числа по его процентам;

*3 тип:* какой процент составляет одно число от другого [2, С. 327].

Все эти задачи решаются нахождением числа, соответствующего 1%, после умножением или делением на число процентов. На этом этапе большинство учеников хорошо справляются с поставленной задачей.

По учебнику под редакцией Г.В, Дорофеева и И.Ф. Шарыгина в 5 классе проценты не изучаются.

В учебнике Г. К. Муравина и О.В. Муравиной в 5 классе внимание уделяется задачам на проценты, которые имеют разный сюжет: сборка урожая; вычисление заработной платы; определение количества учащихся, посещающих разные кружки, студии и секции; определение количества монет и марок в собранной коллекции. Также есть задачи на деление фруктов на части [19, С. 135].

Представим анализ учебников математики 6-х классов по теме исследования (Таблица 2).

В 6 классе в учебнике Н.Я. Виленкина школьники встречаются с понятием проценты при решении задач на пропорции.

В учебнике Г.К. Муравина ученики рассматривают задачи, где процентная база по ходу решения изменяется с задачами на «сложные проценты»[20,С. 173].

В учебнике под редакцией Г. В. Дорофеева на тему проценты отводится пять часов. Изучив тему «Нахождение дроби от числа», ученики вместе с учителем, решают задачу на нахождение процента от числа по новому правилу: здесь процент переводится в десятичную или обыкновенную дробь и умножается на число [7, С. 250].

После изучения темы «Нахождение числа по его дроби» так же рассматривают задачу на нахождение числа по его проценту, которая решается переводом процентов в обыкновенную или десятичную дробь и делением числа на полученную дробь.

Таблица 2

| ***Учебники математики, 6 класс*** | | |
|---|---|---|
| Н.Я. Виленкин,<br>В.И. Жохов | Г.К. Муравин,<br>О.В. Муравина | Г. В. Дорофеев<br>И. Ф. Шарыгина |
| ***Количество часов и тема*** | | |
| Пропорции.<br>Задачи на пропорции<br>3 часа | Решение задач на проценты[20, С.173]<br>2 часа | Что такое процент[7, С. 250]<br>5 часов |
| ***Последовательность вводимых понятий*** | | |
| Пропорция | Процентное содержание | Понятие процента.<br>Нахождения процента величины |
| ***Основные понятия*** | | |
| *Пропорция* – это равенство двух отношений | *Процентным содержанием* вещества в сплаве называется отношение массы этого вещества к массе всего сплава, выраженное в процентах.<br>Процентное содержание в растворе называется *концентрацией* | *Процентом* от некоторой величины называется одна сотая ее часть |
| ***Цель*** | | |
| Сформировать понятие пропорции и умение решать задачи на пропорции с помощью процентов[10,с.29] | Сформировать понятие процентного содержания и научить решать более сложные задачи на проценты. | Познакомить учащихся с понятием процента, сформировать часто встречающиеся обороты речи со словом «процент» [10,с.39] |

В теме «Отношения» ученики анализируют задачу на процентное отношение, где частное двух чисел умножается на 100% [7, С. 250].

Представим анализ учебников алгебры 7-9-х классов по теме исследования (Таблица 3).

В учебнике алгебры 7 класса Ю.Н. Макарычева и др. проценты встречаются при решении задач с помощью линейных уравнений[14, С.194].

По учебнику алгебры 7 класса под редакцией Г.В. Дорофеева рассматривается тема «Задачи на проценты», где ученики решают задачи с более сложными процентами на нахождение процента от величины и на нахождение величины от процента [8, С.121].

Таблица 3

| ***Учебники алгебры, 7 класс*** | | |
|---|---|---|
| Ю.Н. Макарычев<br>Н.Г. Миндюк | Г.К. Муравин,<br>К.С. Муравин | Г.В. Дорофеев<br>И.Ф. Шарыгина |
| ***Количество часов, класс и тема*** | | |
| Решение задач с помощью линейных уравнений[14, С.194]<br>3 часа | Математическая модель текстовой задачи[21, С.30]<br>4 часа | Задачи на проценты[8,С. 121]<br>3 часа |
| ***Последовательность вводимых понятий*** | | |
| – понятие «линейное уравнение с двумя переменными»<br>– алгоритм решения систем систем двух линейных уравнений с двумя переменными | – задачи на смеси и сплавы | – нахождение процента от величины<br>– нахождение величины от процента |
| ***Основная цель*** | | |
| Выработать умение решать системы линейных уравнений и применять их при решении задач, в том числе задач на проценты [10, С.82] | Сформировать умение составлять математическую модель текстовой задачи, научить решать задачи на сплавы и смеси [10, С. 93] | Научить учащихся пользоваться эквивалентными представлениями чисел в ходе решения задач, обеспечить дальнейшее развитие вычислительных навыков и умений решать задачи на проценты [10, С.104] |
| **В 8-9 классах задачи на проценты рассматриваются в разделе «ПОВТОРЕНИЕ» и в заданиях ОГЭ.** | | |

В учебнике алгебры 7 класса Г.К. Муравина и др. приводятся задачи на смеси и сплавы, ученики учатся составлять математическую модель к текстовой задаче[18, С.30].

В 8-9 классах задачи на проценты рассматриваются в разделе повторения, в который включены и задачи на проценты. Также ученики сталкиваются с более сложными задачами на проценты при решении заданий ОГЭ.

Таким образом, проанализировав учебники, мы можем сказать, что решение текстовых задач на проценты предусмотрено в 5-6 классах, а в 7-9 классах на данную тему отдана незначительная часть времени, что может сказаться при сдаче учащимися ОГЭ.

## §3. Методические особенности обучения учащихся решению основных видов задач на проценты в курсе алгебры основной школы

### 3.1. Ознакомление с понятием процента через решение задач

Л.В. Виноградова пишет, что процент - есть частный случай десятичной дроби, это дробь. Поэтому на проценты распространяется *теория десятичных дробей*. Проценты получили особое значение сначала при коммерческих расчетах, например при вычислении прибыли и убытка с капитала или капитала по принесенной им прибыли. В дальнейшем область применения процентов расширилась. Проценты стали применяться и в науке (физике, технике, химии, медицине и др.), и в жизненной практике [4, С.26].

Так, Ю.М. Колягин отмечает, что велика также роль процентов в повседневной жизни, очень часто приходится решать задачу типа «Товар стоит а рублей, потом его цену снизили на $p$ %, затем еще на $b$ %. Сколько стал стоить товар? Решение даже этой простейшей задачи на проценты у многих вызывает затруднение [17, С.330].

Основной вопрос темы «Проценты» — это приложение теории дробей к решению задач, никакие новые теоретические вопросы в эту тему не входят. Благодаря различному их применению проценты занимали неодинаковое положение в программах и учебниках школ; давались различные определения процента и в связи с этим разные способы решения задачи на проценты. В дореволюционных учебниках понятие процента связывалось с коммерческими расчетами, например: «Если кто-нибудь занимает деньги, то он платит за это лицу, которое дало эти деньги, определенное количество рублей с 100, эта плата и показывает количество или таксу процентов (pro centum — на сто)». Дальше. «Заметим, что слово «процент» употребляется не только при денежных расчетах, но и вообще для выражения прибыли или убыли на каждую сотню каких-нибудь предметов». «Из предыдущего следует, что один процент с какого-нибудь числа есть сотая часть числа» В связи с *определением процента* как прибыли или убыли со ста применялось *тройное правило* при решении задач на проценты, то есть эти задачи решались при помощи *пропорций* или *приведения к единице*.

Г.В. Дорофеев отмечает, что в ряде задач, где требуется сравнить дроби, находят их приближенные выражения в сотых долях. Сотые доли получают особое значение. Напоминается, что наиболее употребительные доли единицы получили особые названия: одну вторую называют половиной, одну третью долю — третью, одну четвертую — четвертью. Поэтому и сотая доля получила особое название «процент» и особое обозначение %. Полезно рассказать о происхождении слова «процент». Следует сказать, что в некоторых вопросах дроби выражают не в сотых, а в тысячных долях. Тысячные доли в этих случаях тоже получили особое название «промилле» и обозначаются %. Например, в тысячных долях выражают пробу драгоценных металлов: в сплаве золота 825-й пробы содержится чистого золота по весу 0,825 всего сплава или 825%. Так как числа, выраженные в процентах- это дроби с знаменателем сто, никаких новых правил действий над числами, выраженными в процентах, не вводится и задачи на проценты решаются так же, как задачи на дроби [10, С.19].

В теории и методике обучения математике выделяют *три типа задач на проценты*:

- нахождение числа от процента;
- нахождение процента от числа;
- нахождение процентного соотношения.

Решение двух видов задач на проценты в V классе проводилось после изучения всех действий над десятичными дробями и помогает закреплению умножения и деления на десятичную дробь. В курсе VI класса все сведения, полученные учениками о процентах, приводятся в систему, рассматриваются три вида задач на проценты, более сложные случаи применения процентов, например: а) задается дробное число процентов, б) находят проценты от процентов. Задачи полезно использовать не только для закрепления понятия «проценты», но и для повторения соответствующих задач на дроби[17,С.123]

Ю.М. Колягин отмечает, что прежде чем приступить к решению задач на проценты, следует провести *упражнение на запись процентов в виде дробей.* Перед решением задач на нахождение процентного отношения двух чисел следует дать *упражнения на выражение различных чисел в процентах*. В основу системы этих упражнений можно положить следующие случаи: 1)число процентов, получающееся в результате,— целое число процентов; 2)число процентов— конечная десятичная дробь; 3)число процентов — обыкновенная дробь, не выражающаяся конечной десятичной дробью; 4)приближенное выражение в процентах с заданной точностью.

В настоящее время тема «Проценты» изучается в курсе математики 5-6 классов.

По мнению В.С. Крамора, для усвоения данной темы школьникам необходимо иметь достаточный уровень развития абстрактного мышления, но в возрасте 10-11 лет абстрактное мышление еще недостаточно развито, поэтому учащиеся 5, 6 классов усваивают проценты с трудом. В последующих классах в действующих учебниках алгебры проценты встречаются крайне редко, и каждый раз вызывают большие затруднения у школьников. Это особенно становится заметным при организации повторения в процессе подготовки к итоговой аттестации за курс девятого класса: даже стандартные задачи, взятые из «Экзаменационного сборника» вызывают затруднения у большинства учащихся [11, С. 69].

В основном с задачами на проценты учащиеся сталкиваются на уроках химии и решают их с помощью пропорций, поэтому учащиеся не видят универсальность процентов и не могут решать простейшие задачи на проценты, встречающиеся в другой сфере деятельности человека.

Ю.М. Колягин утверждает, что задачи на проценты в действующих учебниках алгебры встречаются редко, и каждый раз вызывают большие затруднения у школьников. Это особенно становится заметным при организации повторения в процессе подготовки к итоговой аттестации за курс девятого и одиннадцатого класса [17, С. 48].

### 3.2. Методика обучения решению задач на проценты в 5-6 классах

В данном параграфе рассмотрим различные подходы к обучению решения задач на проценты в школьных учебниках для общеобразовательных классов и классов с углубленным изучением математики.

*В учебнике «Математика 5» Г.К. Муравина, О.В. Муравиной* перед тем как ввести понятие процента учащимся напоминают, что некоторые доли выражают довольно большие части целого. А в тех случаях, когда нужны маленькие части, обычно используют проценты. После чего, предложено *определение понятия процента:* слово процент происходит от латинских слов *pro centum* (на сто) и *означает сотую долю целого*. Проценты обозначают с помощью специального знака «%»[19, С. 135].

После определения понятия приводятся примеры.

**Пример 1.** 1% - это 0,01 часть целого.

**Пример 2.** 12,5% - это 0,125 целого.

На понятие процента предлагаются следующие виды задач:

**№1.**Верно ли, что: 1) 1% от 1м равен 1см; 2) 1а равен 1% от 1 га.

**№2.**Какое число отличается от других:

1% от 34; 0,01·34; 0,1·34;$\frac{1}{100} \cdot 34$.

Также в учебнике приводится *правило чтения процентов*: в слове «процент» ударение ставится на второй слог во всех падежах в единственном и множественном числе.

Слово «процент» читается в том же падеже, что и числительное.

После правила чтения процентов авторы указывают, что *при сравнении двух величин* за 100% принимается та, с которой проводится сравнение. Во всех задачах на проценты сначала следует понять, какая величина принимается за 100%.

После чего рассматриваются задачи на рассмотрения процента от числа:

**№ 3.** Найдите:1)1% от 435;2) 2% от 111;3) 5% от 125.

**№4.**Найдите число, зная что:1% его равен: а) 3; б) 40; в)2,4; г)0,07 .

Так же в учебнике «Математика 5» Г.К. Муравина, О.В. Муравиной в конце параграфа предложены *задачи на смекалку* на нахождение процента от числа(№840,№842) и числа по его проценту(№841, №843):

**№840.** Что больше: 15,5% от 49 или 49% от 15,5?

**№841.** Найдите наименьшее натуральное число, 20% которого больше, чем 1,2.

**№842**. Мультфильм «Шрек» смотрели все 30 учеников класса. При этом «Шрек -1» посмотрели 90% учеников, а «Шрек - 2» - 70%.

Сколько учеников видели обе части мультфильма – и «Шрек - 1», и «Шрек - 2»?

**№843.**Из пунктов *А* и *В*одновременно навстречу друг другу вышли Миша и Маша. Кто из них пройдет к моменту встречи большее расстояние, если шаг Маши на 30% короче шага Миши, а Миша сделает на 30% меньше шагов, чем Маша [19, С.137].

Кроме того, в данном учебнике после изучения темы «Процентные расчеты» предложены *контрольные задачи, на основные виды задач на проценты*:

1. Найдите 1% от числа : а) 3457; б) 2,45.

2. Из молока получают 12% творога. Сколько творога можно получить из 25 кг молока? Сколько нужно взять молока, чтобы получить 1 кг творога?

3. С понедельника по пятницу чайник «Tefal» в магазине стоит 860 р., а в субботу его цена составляет 817 р. На сколько процентов магазин снижает

цену на чайник по субботам?

*В учебнике Н.Я. Виленкина и В.И.Жохова* «Математика 5» сначала вводится определение понятия «Процента».

***Определение:*** Процентом называют *одну сотую часть*. Для краткости слово «процент» после числа заменяют знаком %[2, С.327].

Далее рассматривается задача на нахождение процента от числа:

**Задача 1.** Швейная фабрика выпустила $1200$ костюмов. Из них $32\%$ составляют костюмы нового фасона. Сколько костюмов нового фасона выпустила фабрика?

Авторы приводят решение данной задачи.

**Решение.** Так как $1200$ костюмов – это $100\%$ выпуска, то, чтобы найти $1\%$ выпуска, надо $1200$ разделить на $100$. Получим, что $1200 : 100 = 12$, значит $1\%$ выпуска равен $12$ костюмам. Чтобы найти, чему равны $32\%$ выпуска, надо умножить $12$ на $32$. Так как $12 \cdot 32 = 384$, то фабрика выпустила $384$ костюма нового фасона.

После этого разбирается задача на нахождение числа по его проценту. Эта задача также, рассматривается с решением.

**Задача 2.** За контрольную работу по математике отметку «5» получили 12 учеников, что составляет 30% всех учеников. Сколько учеников в классе?

**Решение.** Сначала узнаем, чему равен 1% всех учеников. Для этого разделим 12 на 30.

Так как 12:30=0,4, то 1% равен 0,4. Чтобы узнать чему равны 100% учащихся, надо умножить 0,4 на 100. Так как 0,4·100=40, то в классе 40 учеников.

Также авторы приводят задачу на нахождение процентного соотношения.

**Задача 3.** Из 1800 га колхозного поля 558 га засажено картофелем. Какой процент поля засажен картофелем?

Как и в предыдущих задачах, авторы рассматривают решение данной задачи.

**Решение.** Картофелем засажено $\frac{558}{1800}$ всего поля. Обратим дробь $\frac{558}{1800}$в десятичную. Для этого разделим 558 на 1800. Получаем 0,31. Значит, картофелем засажена 31 сотая всего поля. Каждая сотая равна 1% поля, поэтому картофелем засажен31% всего поля.

После авторы учебника вводят теоретические сведения, которые ученики должны знать наизусть:

1) Чтобы *обратить десятичную дробь в проценты*, нужно ее умножить на 100 [2, С. 328].

***Пример 1.***0,982=0,982·100%=98,2%;

2)Чтобы перевести проценты в десятичную дробь, нужно разделить число процентов на 100.

***Пример 2.***38% =38:100=0,38.

После введения теоретических сведений, рассматривается *правило чтения процентов:* Ударение в слове *процент* в единственном и множественном числе во всех падежах сохраняется на втором слоге.

***Пример 3.***Сто один проце́нт; не более восемнадцати проце́нтов.

Так же в учебнике «Математика» для 5 классов Н.Я. Виленкиным и В.И. Жоховым после изучения темы «Проценты» предложены *вопросы для самопроверки:*

1. Что называют процентом?
2. Как называют 1% от центнера, метра, гектара?
3. Как обратить десятичную дробь в проценты?
4. Как перевести проценты в десятичную дробь?

После чего, ученикам предложены задачи по пройденной теме «Проценты» вида:

**№ 1.** Запишите в виде десятичной дроби:

1%; 6%;45%;123%;2,5%;0,4.

**№2.** Запишите в процентах десятичные дроби:

0,87;  0,07; 1,45; 0,035; 2,672; 0,907.

**№3.** Запишите обыкновенные дроби$\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{2}{5}$; $\frac{17}{50}$в виде десятичных, а потом в виде процентов.

*В учебнике Н.Я. Виленкина и В.И. Жохова «Математика 6»* проценты встречаются при изучении темы «Отношения и пропорции».

Прежде чем ввести определение понятия отношения, автор рассматривает задачу:

**Задача 1.**От куска меди длиной 5 м отрезали 2 м. Какую часть куска материи отрезали?

**Решение.** Сначала находится, какую часть всего куска материи составляет 1 м. так как в куске 5 м, то 1 м составляет $\frac{1}{5}$куска. Значит, 2 м составляют $\frac{2}{5}$ всего куска материи. Тот же ответ можно получить, разделив 2 на 5. Действительно, 2:5 =$\frac{2}{5}$. Ответ можно также записать в виде десятичной дроби или в процентах: $\frac{2}{5} = 0{,}4 = 40\%$.

**Ответ:** 40%

После чего Н.Я. Виленкина и В.И. Жохова вводит определение понятия отношения: *Частное двух чисел называют отношением этих чисел. Отношение показывает, во сколько раз первое число больше второго или какую часть первое число составляет от второго* [3,С. 117].

Если значение двух величин выражены одной и той же единицей измерения, то их отношение называют также отношением этих величин(отношением длин, отношением масс, отношением площадей и т. д.).

Далее авторы рассматривают вторую задачу с решением.

**Задача 2.** Длина железной дороги 360 км. Электрифицировано 240 км этой дороги. Какая часть дороги электрифицирована? Во сколько раз вся дорога длиннее ее электрифицированной части?

**Решение.** Чтобы найти, какая часть электрифицирована, берется отношение 240:360. Записывается это отношение в виде дроби и сокращается на

120. Получится $360:240 = \frac{360}{240} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2} = 1{,}5$. Значит, вся дорога в 1,5 длиннее ее электрифицированной части.

**Ответ:** 1,5 .

Авторы пишут, что числа $\frac{2}{3}$ и $\frac{3}{2}$взаимно обратные, поэтому и отношения 2 к 3 и 3 к 2 называются ***взаимно обратными.***

Также авторы отмечают: *еслизначения двух величин выражены разными единицами измерения, то для нахождения отношения этих величин надо предварительно перейти к одной единице измерения*[3,С. 118].

Для примера авторы приводят задачу с решением.

**Задача 3.**Масса станка 9,6 ц., а масса электромотора 36 кг. Найдите отношение массы электромотора к массе станка.

**Решение.**Масса станка выражается в килограммах. Получается 9,6 ц = 960 кг. Значит, отношение электромотора к массе станка равно $\frac{36}{960} = \frac{3}{80} = 0{,}0375$.

Итак, масса электромотора составляет 0,0375 массы станка.

Этот ответ можно выразить в процентах 0,0375 = 3,75 %.

Значит, масса электромотора составляет 3,75 % массы станка.

**Ответ:** 3,75 %.

Кроме того, в учебнике Н.Я. Виленкина рассмотрены разные способы использования термина *отношение* в речи.

Отношение 25 : 27 можно читать:

- отношение числа двадцать пять к числу двадцать семь;
- отношение чисел двадцать пять и двадцать семь;
- отношение двадцати пяти к двадцати семи.

После изучения темы авторами приведены *вопросы для самопроверки* вида:

1. Что называют отношением двух чисел?
2. Что показывают отношение двух чисел?
3. Как узнать, какую часть число $a$ составляет от числа $b$?

4. Как узнать, сколько процентов одно число составляет от другого?

Кроме того, в учебнике Н.Я. Виленкина и В.И. Жохова после темы «Отношения» изучается тема «Пропорции».

Перед тем как ввести определение понятия пропорции авторы рассматривают пример: отношения 3,6 : 1,2 и 6,3 : 2,1 равны, так как после вычисления значения частных равны 3. Поэтому пишется равенство 3,6 : 1,2 = 6,3 : 2,1, или $\frac{3,6}{1,2} = \frac{6,3}{2,1}$.

После чего вводится определение понятия пропорции: равенство двух отношений называют *пропорцией*[3, С.123].

Пропорция с помощью букв записывается в виде: $a : b = c : d$ или $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Эти записи читаются так: «Отношение $a$ к $b$ равно отношению $c$ к $d$» или «$a$ так относится к $b$, как $c$ относится к $d$ ».

В пропорции $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ числа $a$ и $d$ – крайние члены, а числа $b$ и $c$средние члены пропорции. Все члены пропорции должны быть отличны от нуля.

В пропорции $\frac{3,6}{1,2} = \frac{6,3}{2,1}$ находится произведение крайних и произведение средних членов, $3,6 \cdot 2,1 = 7,56$, $6,3 \cdot 1,2 = 7.56$ , получается 7,56 = 7,56.значит $3,6 \cdot 2,1 = 6,3 \cdot 1,2$.

Далее авторы вводят утверждение: *в верной пропорции произведение крайних членов равно произведению средних.*

Так же авторами вводится обратное утверждение*: если произведение крайних членов равно произведению средних членов пропорции, то пропорция верна.*

После утверждений вводится основное свойство пропорции.

Пропорция $20 : 16 = 5 : 4$ верна, так как $20 \cdot 4 = 16 \cdot 5 = 80$.

Поменяв местами в этой пропорции средние члены, получится новая пропорция $20 : 5 = 16 : 4$. Она тоже верна, так как при такой перестановке произведение крайних и произведение средних членов не изменилось. Эти произведения не изменятся, если в пропорции $20 : 5 = 16 : 4$ поменять местами крайние члены.

*Если в верной пропорции поменять местами средние члены или крайние члены, то получившиеся новые пропорции тоже верны.*

*Используя основное свойство пропорции, можно найти неизвестный член пропорции, если все остальные члены известны* [3, С.124]

После рассмотрения основного свойства пропорции авторы рассматривают примеры.

**Пример 1.**Найти в пропорции $0,5 : a = 2 : 13$ неизвестный средний член $a$.

**Решение.** Используя основное свойство пропорции, получится $a \cdot 2 = 0,5 \cdot 13$. Отсюда $a = \frac{0,5 \cdot 13}{2}$, $a = 3,25$.

**Пример 2.**Решите уравнение: $\frac{8,75}{3\frac{3}{4}} = \frac{x}{0,75}$.

**Решение.** Используя основное свойство пропорции, получится

$$8,75 \cdot 0,75 = 3\frac{3}{4}x$$

$$x = \frac{8,75 \cdot 0,75}{3\frac{3}{4}}$$

$$x = \frac{8,75}{5}$$

$$x = 1,75.$$

После изучения темы «Пропорции» авторы приводят задачи для закрепления данной темы.

*П.В. Лещев* в своей статье *«Изучение процентных вычислений в связи с обыкновенными дробями»* пишет, что процент – частный вид дробей, а их изучение в школьном курсе является приложением теории дробей к решению задач. При изучении каждого из разделов темы «Проценты» он рассматривает задачи на проценты как задачи на дроби со знаменателем 100 и изучает их с учащимися параллельно изучению умножения и деления обыкновенных дробей (нахождение дроби от числа, нахождение числа по его дроби и нахождения отношений двух чисел) [13,С.78].

В данной статье он описывает свой опыт изучения процентов в связи с изучением обыкновенных дробей.

Приступая к выяснению понятия «Процент» прежде всего он сообщает учащимся, что проценты имеют широкое практическое применение, например, при определении посещаемости и успеваемости в школе, при выполнении производственных планов на заводе и в сельском хозяйстве, при денежных расчетах в госбанке, сберкассе и т.д.

Затем на конкретных понятиях и задачах, а также при помощи наглядных пособий приступает к выяснению понятия процента.

П.В. Лещев рассуждает, что наиболее употребительные доли единицы получили особые названия, например: одну вторую называем половиной, одну третью долю – третью, одну четвертую – четвертью, точно так же и сотая доля получила название *процент.*

Сотая часть какого-нибудь числа и называется процентом этого числа.

Далее, на квадрате или на круге, а также на метре, изображенных на Рис.1, поясняет, что одна часть круга или одна клетка квадрата составляет $\frac{1}{100}$ часть, а следовательно, 1% каждой из данных фигур; 5 таких частей круга или 5 клеток квадрата составляют $\frac{5}{100}$, или 5 %; 25 секторов или 25 клеток – 25% и т.д.Точно так же сантиметр составляет $\frac{1}{100}$ или 1%, от метра, 5 см - $\frac{5}{100}$ метра, или 5%; 25 см - $\frac{25}{100}$ метра, или 25%.

Найдите: а) 1%, 30 %, 45 % от рубля; б) 1%, 55%, 80% от ара.

Далее следуют упражнения:

**А.** В чтении чисел, обозначающих проценты:

«Прочитайте: 15%, $20\frac{1}{2}$ %, 72%, 95% ».

**Б.** В записи названного учителем числа процентов.

«Запишите: 17%, $10\frac{1}{2}$ %, 62%, 87%».

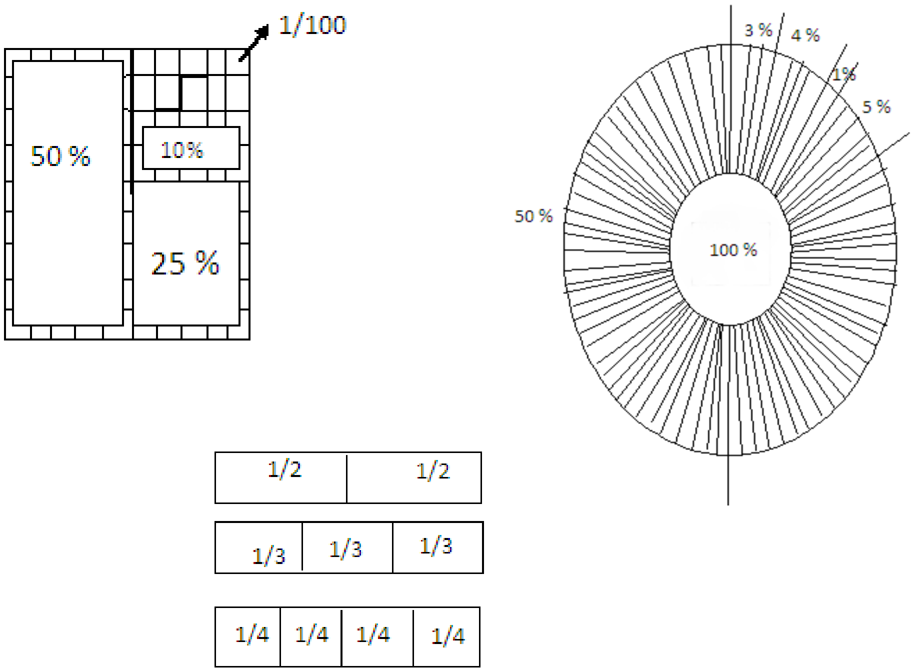



Рис.1.

**В.** В решении простейших задач, связанных с понятием о проценте, например:

Рабочий получил 600 руб. зарплаты, из которых 6 рублей он издержал на гостинцы для дочки. Какую часть и сколько процентов полученных денег рабочий издержал на гостинцы?

Учащиеся из данной задачи устанавливают, что 6 руб. от 600 руб. составляют $\frac{1}{100}$ часть, а следовательно, 1% числа 600.

С понятием о проценте тесно связано понятие о числе, составляющем 100%. Чтобы ознакомить учащихся с этим понятием, автор прибегает к тому же кругу или квадрату, на котором можно показать, что если 1 клетка квадрата составляет 1% его, то весь квадрат имеет 100 таких клеток, или 100%; половина квадрата – это 50%, а весь квадрат содержит 2 раза по 50%, или 100%. Аналогично $\frac{1}{100}$, или 1%, от числа 200 составляет число 2, но в числе 200 по 2 содержится 100 раз, значит, число 200 составляет 100% [13, С. 79].

Автор отмечает, что после проведения такого вида работы учащимся становится ясно, что, то число, от которого находится или найден один или несколько процентов, принимается за 100%.

С понятием процента числа также связана и замена числа процентов дробью и обратно.

Ознакомление учащихся с заменой числа процентов и дроби процентами имеет целью углубить понятие о проценте, как о доле единицы. При этом используется тот же квадрат (или круг) , на котором можно показать, что 50% числа составляют $\frac{1}{2}$ его и, наоборот, $\frac{1}{2}$ числа – это 50%.

Таким учащиеся убеждаются в том, что число процентов можно заменить долями единицы, а последние – процентами. Затем учащимся дается самостоятельная работа.

Пользуясь квадратом (или кругом), найти:

а) сколько процентов составляют $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$ квадрата (или круга)?

б) Какую часть единицы составляют: 40% , 60%, 75% и 80%.

Затем П.В. Лещев рассматривает вид задач на проценты: «Нахождение процентов данного числа». Он пишет, что при решении устных и некоторых письменных задач этого вида, как и при решении подобных задач на нахождение дроби числа, бывает проще разделить данное число на знаменатель дроби и результат умножить на числитель дроби. В задачах на нахождение процентов числа эти два этапа сводятся к следующему:

а) нахождение сначала 1% числа;

б) потом нескольких процентов числа.

С задачами на нахождение одного процента числа учащиеся уже встречались при знакомстве с понятием о проценте, напоминает автор статьи, и поэтому рассмотрение этого вопроса сводится к повторению задач и примеров такого вида:

а) найдите $\frac{1}{100}$ от чисел: 500, 750.

б) найдите 1% от чисел: 400, 450.

в) **Задача.** В нашей школе 200 учащихся, 1% которых на занятиях сегодня отсутствует. Сколько и какая часть всех учащихся отсутствует в школе?

П.В. Лещев пишет, что этих примеров достаточно для следующего вывода: чтобы найти 1% числа, надо данное число разделить на 100 или умножить на $\frac{1}{100}$.

Далее рассматривается нахождение нескольких процентов числа. В качестве пособий для наглядного представления решения примеров и задач при объяснении этого вида процентных вычислений автором используется метр, квадрат или круг, ученический учебник; например:

- Посмотрите, сколько страниц имеет ваш учебник по арифметике?(224 стр.).

- Перелистав 25% страниц учебника, вы найдете задач № 263. На какой странице значится указанная задача?

- Запишем условие задачи:

Найти: 25% от 224 страницы.

- В этой задаче следует найти не 1%, а несколько процентов от числа, и чтобы найти номер требуемой страницы, не смотря нВ учебник, найдем сначала 1% искомого числа страниц учебника.

- Как найти 1% от 224 страниц? (Надо 224 страницы разделить на 100, получится $2\frac{6}{25}$ стр.)

- Если 1% от 224 страниц учебника составляет $2\frac{6}{25}$ страницы, то как найти, сколько страниц составляет 25% числа страниц учебника? ($2\frac{6}{25}$ страницы умножить на 25).

- Почему? (Потому, что 25% составляет число больше 1% в 25 раз).

Запись решения:

1% от 224 стр. = 224:100=$2\frac{6}{25}$ стр.

25% от 224 стр. = $2\frac{6}{25} \cdot 25 = 56$ стр.

**Ответ:** задача №263 находится на 56-й странице учебника.

Далее рассматриваются устные упражнения.

1) В классе 36 учащихся, из них 25% отличников. Сколько в классе отличников?

Какую часть числа составляют 25%?

Сколько учащихся в классе?

Какую часть из них составляют отличники?

Как найти четверть 36?

Аналогично решается еще задача.

2) За день коровы колхозной фермы дали 480 л молока, 75 % которого сдали на сепараторный пункт. Сколько литров молока сдали на сепараторный пункт?

После этого, записав на доске ряд примеров, предлагается учащимся вычислить устно.

1) 50% от 236; $x$ = 236:2=118;

2) 10% от 160; $x = 160 : 10 = 16$;

3) 20% от 105; $x$ =105: 5= 21;

4) 40% от 125; $x$ =125: 5·2=50;

5) 60% от 150; $x$ =150:5· 2=90.

На основе решения рассмотренных задач и примеров делается вывод:

а) Чтобы вычислить 50% , 25%, 10%, 20%, 5% числа, надо данное число соответственно разделить на 2, на 4, на 10, на 20.

б) Вычислить 75%, 40%, 60%, 80% числа – значит найти: $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$ его.

Далее приводятся более сложные задачи на проценты. Рассмотрим одну из них

**Задача.** Сберегательная касса выплачивает вкладчику 2% годового дохода. Сколько выплатит сберкасса процентных денег вкладчику за 9 месяцев, если в вклад составляет 1600 руб.?

Как узнать, сколько процентных денег выплатила сберкасса вкладчику за год? (Надо найти 2% от 1600 руб.).

Запишем условие и решение первой части задачи:

1600 руб. – 100%

$$x = \frac{1600 \cdot 2}{100} = 32 \text{ руб.}$$

Сколько времени был вклад в сберкассе?(9 месяцев).

Какая это часть года?($\frac{3}{4}$).

Как узнать сколько выплатит сберкасса процентных денег за $\frac{3}{4}$ года? (Надо найти $\frac{3}{4}$ от 32 руб.)

Запишем условие и решение второй части задачи:

32 руб. – за 1 год,

$$x \text{ руб.} - \text{за } \frac{3}{4} \text{ года}$$

$$x = \frac{32 \cdot 3}{4} = 24 \text{ руб.}$$

Формула решения задачи:

$$x = \frac{1600 \cdot 2}{1000} \cdot \frac{3}{4} (\text{руб.}).$$

Затем П.В. Лещев рассматривает тему «Нахождение числа по данному его проценту ».

Этот вид процентных вычислений усваивается учащимися труднее, чем предыдущий. Автор практикует следующий порядок изучения этого вопроса [13, С.80].

Сущность вопроса П.В. Лещев выясняет с помощью наглядного примера, на прямоугольнике, состоящем из 200см$^2$, часть которого видна, а другая закрыта бумагой.

По чертежу учащиеся составляют условие задачи и выясняют, что в ней известно, что является искомым.

**Задача.** 1% площади прямоугольника составляет 2 см$^2$ . определить площадь прямоугольника.

**Решение.** За сколько процентов принимаем площадь всего прямоугольника? (за 100%).

Если 1% площади  прямоугольника составляет $2см^2$ , то сколько квадратных сантиметров составляет 100% (В 100 раз больше, то есть $200см^2$).

Запись решения:

$x = 2см^2 \frac{1}{100} = 200см^2$.

Результат проверяется непосредственным подсчитыванием числа квадратных сантиметров в прямоугольнике. Площадь всего прямоугольника действительно равняется $200см^2$.

Решив несколько задач, делается вывод: чтобы найти число по данному значению одного процента, надо это значение умножить на 100 или разделить на $\frac{1}{100}$ .

После этого рассматривается вопрос «Нахождение числа по нескольким его процентам». Автор пишет, что приемы рассмотрения этого вопроса аналогичны описанным выше, относящимся к нахождению числа по одному его проценту.

Колхоз убрал 425 га посева, что составляет 25% всей посевной площади. Определить посевную площадь колхоза.

Условие задачи можно записать так:

25% $x$=425 га.

Представим 25% в виде дроби $\frac{25}{100}$ . как определить посевную площадь колхоза, если $\frac{25}{100}$ ее равны 425 га?

Надо 425 га разделить на $\frac{25}{100}$:$x = 425 : \frac{25}{100} = 1700$ (га).

Далее предлагается учащимся решить самостоятельно один из примеров.

В заключении делается вывод правила решения таких задач: чтобы найти число по значению определенного процента, надо данное значение разделить на число процентов и полученный результат умножить на 100 или же данное значение разделить на дробь, соответствующую числу процентов.

Затем П.В. Лещев пишет, что внимание учащихся следует обратить на приведенные ниже задачи, позволяющие потом перейти к решению других задач этого вида.

**Задача.** Трава при высыхании потеряла 67% своего веса. Сколько накошено травы, если получено 165 ц сена? За сколько процентов следует принять вес травы, из которой получено 165 ц сена? (за 100%). Сколько процентов от веса травы составляют 165 ц сена? (100%-67%=33%)

$$x - 100\%$$

$$165 \text{ ц} - 33\% \ (100\% - 67\%)$$

$$x = \frac{165 \cdot 100}{33} = 500 \text{ (ц)}$$

Формула решения задачи:

$$x = \frac{165 \cdot 100}{100 - 67} \text{(ц)}$$

После этого рассматривается вопрос «Процентное соотношение».

Автор пишет, что данный вопрос с учащимися рассматривается в следующей последовательности.

Сначала повторяются отношение одного числа к другому.

Что называется отношением двух чисел?

Как найти отношение чисел 20 к 5?

Что показывает отношение этих чисел?

Найдите отношение 5 к 20?

Что показывает это последнее отношение?

Как узнать, какую часть 150 кг составляет от 3 т?

Найдите соответствующее отношение.

($\frac{3}{20} m : 3m = \frac{3}{20 \cdot 3} = \frac{1}{20}$.)

Найдите, какой процент число 16 составляет от числа 25.

Сначала находится отношение данных чисел, для чего 16 надо разделить на 25, а затем полученное отношение умножить на 100:

$$\frac{16}{25} \cdot 100 = 64 \ (\%)$$

Из рассмотренного примера видно, что для нахождения процентного отношения двух чисел надо отношение этих чисел умножить на 100.

Затем, приводятся задачи на вычисление процентных отношений, рассмотрим одну из них.

**Задача.** Вещь стоила 15 рублей. После снижения цен она стала стоить 12 рублей. На сколько процентов снижена цена на вещь?

Сначала находится, на сколько рублей снижена цена на вещь:

15-12=3 (руб.)

Как найти, на сколько процентов снижена цена? (Надо процентное отношение разности в цене вещи к ее первоначальной цене, для этого 3 руб. надо разделить на 15 руб. и результат умножить на 100.) [13, С. 83]

**Решение.**

1) $15 - 12 = 3$ (руб.) 2) $x = \frac{3 \cdot 100}{15} = 20$ (%).

Формула решения задачи: $x = \frac{(15-12) \cdot 100}{15}$ (%).

Автор пишет, что из приведенных примеров достаточно, чтобы учащиеся поняли процесс, вычисления процентного отношения.

Таким образом, мы можем сказать, что П.В. Лещев приводит свои методы обучения решению задач на проценты, которых нет в школьных учебниках математики. Одним из удобных методов является обучение решению задач на проценты, с помощью квадрата, круга и сантиметра.

*П.М. Сорокин* в статье «Из опыта преподавания темы «Проценты»», пишет, что пользуется принятым в учебниках арифметики определением процента:

Процентом числа называется сотая часть его. Автор уделяет большое внимание выражению чисел процентами и процентов числами, что часто встречается в практике и при решении задач [30, С.49].

Примеры общеизвестны:

1) рабочий выполнил за день $1\frac{1}{2}$ нормы;

2) ученик выполнил $\frac{3}{4}$ данного ему задания и т.д.

Эти итоговые данные часто выражаются процентами. Если же итоги даны в процентах, то проценты часто приходится заменять числами.

1% - это $\frac{1}{100}$; отсюда 1 - это 100%. Аналогично, 5 – это 500%. С помощью указанных примерных упражнений ученик усваивает следующее положение: чтобы данное число выразить в процентах, нужно его умножить на 100%.

Так: $3{,}25 = 3{,}25 \cdot 100\% = 325\%$ ;$\frac{27}{50} = \frac{27}{50}$. Обратно, чтобы число процентов заменить дробью, нужно это число процентов разделить на 100%.

При решении основных задач на проценты П.М. Сорокиным не вводятся громоздкие записи, а используя запись деления с помощью дробной черты, применяется по существу способ приведения к единице. Это способствует более легкому и прочному усвоению задач на проценты. Показаны несколько примеров простейших задач.

1. *Нахождение процентов данного числа.*

**Задача 1.** В школе в старших классах 220 учеников, из них 80 % комсомольцев. Сколько комсомольцев в школе?

**Решение.** Число всех учащихся 220 учеников составляет 100%. Нужно определить число комсомольцев, то есть 80% числа учащихся.

Находится сначала 1% от 220, то есть $\frac{220}{100}$ ; теперь находится 80%, для чего $\frac{220 \cdot 80}{100}$ вычислив, получится 176. Следовательно, комсомольцев в школе было 176 учеников.

2. *Нахождение числа по процентам.*

**Задача.** Рабочий , получив прибавку к своей зарплате 10%, стал получать 1210 руб. в месяц. Какую зарплату получал он до прибавки?

**Решение.** Зарплата до прибавки составляет 100%. Новая зарплата рабочего 1210 руб. составляет 100%+10%=110%.

Находится 1%, то есть $\frac{1210}{110}$; далее находится 100%, то есть $\frac{1210 \cdot 100}{110}$; вычисли в получится 1100. Следовательно, зарплата до прибавки была 1100 руб.

*3. Нахождение процентного отношения двух чисел.*

**Задача.** В школе 400 учеников, из них 240 мальчиков. Сколько процентов составляет число мальчиков от всех учащихся?

**Решение.** 400 учеников в школе составляет 100%, чтобы определить, сколько процентов составляет число мальчиков, находится 1% , то есть $\frac{400}{100}$(уч.). Если на 1% приходится $\frac{400}{100}$ учеников, то, чтобы узнать, сколько процентов составляют 240 мальчиков, нужно $240 : \frac{400}{100} = \frac{240 \cdot 100}{400}$ . Вычислив получается 60%. Следовательно, число мальчиков от общего числа учащихся школы составляет 60%.

П.М. Сорокин пишет, что выше были показаны способы вычисления и формы решения основных задач на проценты, которой учителя придерживаются в практике работы в школе.

*Н.А. Никольская* в своей статье *«Из опыта изучения темы «Проценты»»* пишет, что изучение в 5 классе темы «Задачи на проценты» сопряжено с рядом трудностей. Возможности их преодоления автор обсуждает в этой заметке.

Автор отмечает, что в объяснительном тексте  учебника даны два типа задач на проценты и образцы решения каждого из них предполагается, что учащиеся должны научиться решать задачи по приведенным в учебнике образцам. Однако, приступая к решению задач на проценты, они часто не знают, к какому типу следует отнести данную задачу. Учитель же не располагает возможностями дать учащимся ориентиры для правильного выбора [25, С. 34].

Н.А. Никольская пишет, что возникающие трудности можно преодолеть. С этой целью учащимся напоминается определение процента, после чего внимание учеников обращается на то, что задачи на проценты можно рассматривать как частный случай задач на дроби, способ решения которых усвоен ими ранее.

Рассматривается решение этим способом двух задач разных типов.

**№1323** (первый тип). Ученик прочитал 138 страниц, что составляет 23% числа всех страниц в книге. Сколько страниц в книге?

За неизвестное принимается то, что спрашивается в задаче.

Пусть $x -$ число страниц в книге – это $\frac{23}{100}$ от $x$, что составляет 138 страниц.

Тогда

$$x : 100 \cdot 23 = 138,$$

$$x : 100 = 138 : 23,$$

$$x = (138 : 23) \cdot 100,$$

$$x = 600.$$

Ответ: в книге было 600 страниц.

**№ 1329** (второй тип). В школе учащихся. Среди них 357 мальчиков. Сколько процентов учащихся этой школы составляют мальчики?

За неизвестное принимается то, что спрашивается в задаче.

Пусть число мальчиков от числа учащихся составляет $x\%$.

Всего 700 учащихся; $x\%$ от числа учащихся – это $\frac{x}{100}$ от 700, что составляет 357 человек.

Отсюда

$$700 : 100 \cdot x = 357,$$

$$700 : 100 = 357 : x,$$

$$7 = 357 : x, \text{или } 357 : x = 7,$$

$$x = 357 : 7,$$

$$x = 51.$$

**Ответ:** мальчики составляют 51% от числа учащихся школы.

Таким образом, Н.А. Никольская отмечает, что задачи обоих типов решаются по единой схеме, хорошо знакомой учащимся. При этом отпадает необходимость определять тип задачи и следовать при решении данному в учебнике образцу.

Так же автор статьи, пишет что после того как учащиеся приобретают навыки решения задач на проценты, они смогут разобраться и в способах, приведенных в учебнике. В дальнейшем ученики при решении задач на проценты будут выбирать те способы решения, которые им кажутся наиболее понятными [25, С.34]

В заключении Н.А.Никольская отмечает, что выделение задач на проценты в отдельную тему создает психологический барьер в сознании учащихся, думающих, что они приступают к изучению совсем нового вопроса. Поэтому следует выявить для учащихся преемственность между решением задач на дроби, темой «Проценты» и темой «Задачи на проценты», чему и помогает опыт, описанный в данной заметке.

### 3.3. Методика обучения учащихся решению задач на проценты в 7-9 классах

*В учебнике «Алгебра 7» Г.К. Муравина и О.В. Муравиной* задачи на проценты встречаются в пункте «Математическая модель текстовой задачи».

Перед тем как рассмотреть типы этих задач, авторы учебника пишут, что математика помогает в решении многих задач в различных видах деятельности. Обычно это происходит так. Сначала задача формулируется на обычном языке и переводится на математический язык – создается *математическая модель задачи*. Затем математическая модель *исследуется*, и, наконец, результаты исследования *интерпретируются*, т.е. снова переводится на обычный язык [21, С.30].

Наибольшие затруднения и в решении реальных, и в решении учебных текстовых задач вызывает первый этап – перевод условия на математический язык.

Далее рассматриваются некоторые часто встречающиеся в текстовых задачах сюжеты вида: задачи на выполнение плановых заданий; задачи на изменение количества; задачи на движение. Одним из видов этих задач являются *задачи на смеси и сплавы.* После каждого типа задач рассматриваются примеры.

### *Задачи на смеси и сплавы*

**Задача.** Сплав золота и серебра массой 36 г содержит 21,6 г золота. Сколько золота нужно добавить в сплав, чтобы содержание серебра в нем стало равным 18%?

Авторы учебника предлагают решение задачи.

**Решение.** Процентное содержание серебра в сплаве равно отношению массы серебра ко всей массе сплава, умноженному на 100(%).

Обозначим буквой $x$(г) искомую массу золота, которое нужно добавить в сплав. Тогда после этой добавки масса сплава станет $36 + x$(г). Поскольку масса серебра равна $36 - 21{,}6$ (г), получим решение $\frac{36-21{,}6}{36+x} \cdot 100 = 18$.

Так же в учебнике Г.К. Муравина и О.В. Муравиной после рассмотрения данного типа задач на проценты, предложены следующие *упражнения*:

**№ 72**. К задаче составлена математическая модель. Объясните, что приняла за $x$, какие величины уравняли.

Хозяйка купила 300 г 70% - й пищевой уксусной кислоты. Сколько граммов воды нужно добавить, чтобы получился 9%-й раствор уксусной кислоты?

$(300 + x) \cdot 9 = 70 \cdot 300$ или $\frac{300+x}{100} \cdot 9 = \frac{70\cdot300}{100}$.

**№ 80.** Определите тип задачи. Переведите условие задачи на математический язык.

Сколько граммов соли надо добавить к 200 г 10% - го раствора соли, чтобы получить 20% - й раствор?

Если при решении этого типа задач у учащихся возникнут сложности, авторы предлагают воспользоваться советами и решениями задач в конце учебника, в разделе *«Практикум по решению текстовых задач»*, где приведены советы:

– при сравнении чисел $a$ и $b$, если известно, что $a$ больше $b$ на $c$, то это условие можно записать в виде равенства $a - b = c$.

– при сравнении чисел $a$ и $b$, если известно, что $a$ больше $b$ в $k$ раз, то это условие можно записать в виде равенства $bk = a$.

– чтобы определить, сколько процентов ( $p$ ) составляет число $a$ от числа $b$, нужно умножить частное $a{:}\,b$ на $100\%$ . $p\% = \frac{a}{b} \cdot 100\%$ [21, С. 300].

*В учебнике под редакцией Г.В.Дорофеева и др. «Алгебра 7»* в разделе «Дроби и проценты» рассматривается тема «Задачи на проценты».

Учащимся напоминают, что при решении задач на проценты нужно уметь свободно переходить от дробей к процентам и наоборот. Это совсем нетрудно, если напомнить, что под процентом понимают $\frac{1}{100}$ часть рассматриваемой величины [8, С.121].

Далее авторы вводят правило *выражения десятичной дроби в процентах*:

Если часть величины, заданную десятичной дробью, надо выразить в процентах, то можно в этой дроби перенести запятую на два знака вправо и к полученному числу приписать знак %.

После введения правила рассматривается пример:

0,48 некоторой величины – это 48% этой величины;

0,325 некоторой величины – это 32,5% этой величины;

0,001 некоторой величины – это 0,1% этой величины;

1,2 некоторой величины – это 120% этой величины.

Автор отмечает, что для *обратного перехода* – от процентов к десятичной дроби запятую переносят в противоположном направлении:

Если часть величины, заданную в процентах, нужно выразить десятичной дробью, то можно в числе, стоящем перед знаком %, перенести запятую на два знака влево.

После введения правила так же рассматривается пример:

48% некоторой величины – это 0,48 этой величины;

32,5% некоторой величины – это 0,325 этой величины;

0,1% некоторой величины – это 0,001 этой величины;

120% некоторой величины – это 1,2 этой величины.

Так же авторы учебника под редакцией Г.В. Дорофеева и др. утверждают: чтобы выразить в процентах часть величины, заданную обыкновенной дробью, нужно сначала эту дробь обратить в десятичную. Поскольку проценты выражаются дробями, отмечает автор, то задачи на проценты, по существу, являются теми же задачами на дроби[8, С. 122].

После этого утверждения авторы рассматривают задачи на проценты следующего типа:

**Задача 1.** По данным социологического исследования, проведенного в этом году, в городе Лукошкино проживает 36 тыс. человек, 29% из них достигли пенсионного возраста, а 24% - дети и подростки дошкольного и школьного возраста. Сколько в городе взрослых жителей, не достигших пенсионного возраста?

Авторы к каждой задаче предлагают решение.

**Решение.** Все население города принимаем за 100%. Выясним, сколько процентов приходится на взрослых, не достигших пенсионного возраста:

$$100\% - (29\% + 24\%) = 47\%$$

Далее находим 47% от 36 тыс. Так как 47% - это 0,47 населения города, то 36000 нужно умножить на 0,47:

$$36000 \cdot 0{,}47 = 16920.$$

Таким образом, в городе Лукошкино живет примерно 17 тыс. взрослых, не достигших пенсионного возраста.

**Задача 2.**Банк предлагает своим клиентам следующие условия вклада: деньги кладутся на счет на 31 день, по истечении которых клиент получает доход, равный 7,5% от вложенной суммы. Какую сумму нужно положить на счет, чтобы доход составил 1500 р.?

**Решение.** 1500 р. составляют 7,5%, или иначе 0,075, от неизвестной суммы. И нам нужно решить знакомую задачу – найти целое по его части [8, с.123] Она решается делением:

$$1500: 0,075 = 20000(\text{р.}).$$

Итак, на счет надо положить 20000 р.

**Задача 3.** январский тираж нового ежемесячного журнала составил 250 экземпляров. В феврале его тираж увеличился на 30%, а в марте – еще на 120%. Каким стал тираж журнала в марте?

**Решение.**

*Способ 1:* Сначала узнаем, на сколько экземпляров вырос тираж в феврале , то есть найдем 30% от 250:

30% тиража – это 0,3 тиража: $250 \cdot 0,3 = 75(\text{экз.})$

Теперь можно определить величину февральского тиража:

$250 + 75 = 325\ (\text{экз.}).$

Чтобы узнать мартовский тираж журнала, нужно найти 120% от февральского тиража и прибавить полученное число к 325:

120% тиража – это 1,2 тиража: $325 \cdot 1,2 = 390\ (\text{экз.});$

$325 + 390 = 715\ (\text{экз.}).$

*Способ 2:* январский тираж журнала принимается за 100%. В феврале тираж журнала увеличился на 30% и составил 100%+30%=130% январского тиража. Так как 130% соответствуют дроби 1,3, то февральский тираж больше январского в 1,3 раза. Найдем его: $250 \cdot 1,3 = 325\ (\text{экз.}).$

Теперь 100% - это февральский тираж. В марте он увеличился на 120% и составил 100%+120%=220% февральского тиража . Так как 220% - это 2,2, то мартовский тираж больше февральского в 2,2 раза, то есть он равен $325 \cdot 2,2 = 715\ (\text{экз.}).$

**Задача 4.** Во время весенней распродажи куртку, стоившую 1500 р., продавали за 900 р. На сколько процентов была снижена цена куртки на распродаже?

**Решение**. Сначала узнаем, на сколько рублей новая цена меньше старой:

$1500 - 900 = 600$ (р.).

Теперь выясним, сколько процентов составляет разница в 600 р. от старой цены куртки. Для этого найдем отношение 600 р. к 1500р. и выразим его в процентах:

$$\frac{600}{1500} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5} = 0{,}4.$$

Так как 0,4 – это 40%, то цена куртки на распродаже была снижена на 40%.

**Задача 5.** К 100 г 30 процентного раствора соли дожили 50 г воды. Какова концентрация получившегося раствора?

**Решение.** Так как исходный раствор был 30 процентный , то в 100 г раствора содержится 30 г соли. После того как к раствору долили 50 г воды, его масса стала равной 150 г, а количество соли в нем изменилось. Чтобы узнать концентрацию получившегося раствора, нужно найти отношение массы соли к массе раствора и выразить его в процентах $\frac{30}{150} = \frac{1}{5} = 0{,}2$.

Значит, концентрация получившегося раствора 20%.

Так же в учебнике «Алгебра 7» Г.В. Дорофеева, С.Б. Суворова в конце параграфа предложены *задачи разных уровней сложности*.

Л.В. Детушева в своей статье «Применение методики компрессивного обучения при решении текстовых задач на проценты» подвергает рассмотрению возможность применения методики компрессивного обучения для решения текстовых задач на проценты. Показывает, что для улучшения качества математического обучения школьников необходима специальная методика – *методика компрессивного обучения*.

Для этого она приводит последовательность этапов усвоения материала:

1) быстрое прочитывание нового материала;

2) выделение в нем смысловых единиц, понятий и отношений;

3) анализ текста на энтропийность, то есть разбиение встречающихся понятий на уже «известные» и «новые» для обучающихся;

4) установление взаимосвязей между новыми и известными понятиями;

5) повторение ранее усвоенных понятий, необходимых для осознания новых понятий;

6) определение отношений между новыми понятиями, построение иерархии новых понятий;

7) оценка возможной значимости новых понятий;

8) формулировка целей запоминания.

После этого вводятся важнейшие алгоритмы задач на проценты, которые известны обучающимся до начала решения задач:

1. Предложение «Число $a$ составляет $x$ % от числа $b$» выражается равенством $a = \frac{x}{100} b$ ;

2. Предложение «Число $a$ увеличивается на $x$ %» выражается равенством $a + \frac{x}{100} a$;

3. Предложение «Число $a$ уменьшили на $x$ %» выражается равенством $a - \frac{x}{100} a$;

4. Предложение «Величина $a$ больше величины $b$ на $x$ %» выражается равенством $b + \frac{x}{100} b = a$;

5. Предложение «Величина $a$ меньше величины $b$ на $x$ %» выражается равенством $b - \frac{x}{100} b = a$;

6. Предложение «Величина $b$ меньше величины $a$ на $x$ %» выражается равенством $a - \frac{x}{100} a = b$;

7. Предложение «Величина $b$ больше величины $a$ на $x$ %» выражается равенством $a + \frac{x}{100} a = b$.

Далее Л.В. Детушева разделяет содержание задачи на «новые» и «известные» понятия. Разбираются решение задачи на проценты [6, С. 170-171].

**Задача № 1.** Брюки дешевле пиджака на 37,5 % . На сколько процентов пиджак дороже брюк?

**Решение.**

I этап. Быстрое прочитывание текста предложенной задачи

II этап. Выделение смысловых единиц, понятий $b$– стоимость брюк, $n$– стоимость пиджака.

III этап. Анализ текста на энтропийность

Известны понятия стоимость брюк и стоимость пиджака, неизвестные соотношение между ценой пиджака и брюк.

IV этап. Установление взаимосвязей между «новыми» и «известными» понятиями. $b < n$ на 37,5% (брюки дешевле пиджака на 37,5 %)

V этап. Повторение ранее изученных понятий, необходимых для уяснения новых понятий.

Ранее известен тот факт, что если одна величина меньше другой величины на $x$%, то $b - \frac{x}{100}b = a$

Применим это выражение для данного примера: $n - \frac{37{,}5}{100}n = b$.

Упростив выражение, имеем следующее соотношение: $0{,}625n = b$.

VI этап. Определение отношений между новыми понятиями, построение иерархии новых понятий: $n > b$ на $x$ %, $x$– требуемое количество процентов $b + \frac{x}{100}b = n$.

VII этап. Оценка возможной значимости новых понятий

Объединяем условия из пункта V с новым из пункта VI в систему уравнений:

$$\begin{cases} b + \frac{x}{100}b = n \\ b = 0{,}625n \end{cases},$$

$$0{,}625n + \frac{x}{100}0{,}625n = n,$$

$$0{,}625 + \frac{x}{100}0{,}625 = 1,$$

$$\frac{0{,}625x}{100} = 1 - 0{,}625,$$

$$\frac{0{,}625x}{100} = 0{,}375.$$

$$x = 60.$$

60% – проценты, характеризующие величину разности стоимости пиджака поотношению к стоимости брюк.

Ответ: 60%.

Л.В. Детушева считает, что использование на занятиях разнообразных методов компрессивного обучения при решении текстовых задач на проценты помогает учителю увеличить уровень знания учащихся по математике, а также активизировать познавательную активность и уменьшить «страх» перед задачами на проценты, ведь, «освоение процентов оказывается» одним из самых проблемных элементов школьного курса математики.

*А.Г. Мордкович* в своем методическом пособии для учителя по алгебре для 7 классов, разбирает методы решения следующих задач на проценты:

**№ 192.** В январе 1999 года на счет в банке была положена некоторая сумма денег. В конце 1999 года проценты по вкладу составили 200 рублей. Добавив в январе 2000 года на свой счет еще 1800 рублей, вкладчик пришел закрыть счет в декабре 2000 года и получил 4400 рублей. Какая сумма была первоначально положена на счет и сколько процентов в год начисляет банк?[18, С.78].

**Решение.** Автор предлагает за $x$ рублей взять первоначальный вклад, а банковский вклад взять за $y$ % ,тогда прирост за год выразится формулой $\frac{y}{100}x$ р., что по условию составляет 200 рублей. Итак, $\frac{xy}{100} = 200$.

В январе 2000 года на счете стало $(x + 200 + 1800)$ р. В конце года с учетом процентов на счете будет $(x + 2000) + \frac{y}{100}(x + 2000)$р., что составляет 4400 р. Итак $(x + 2000) + \frac{y(x+2000)}{100} = 4400.$

А.Г. Мордкович отмечает, что математическая модель задачи – система из двух составленных уравнений. Она имеет два решения: (2000;10) и (200; 200).

Второе решение не подходит по смыслу задачи, поскольку в реальной жизни ни один банк 200% не даст.

**Ответ:** 2000 руб., 10%.

**№ 193.** У старшего брата было в два раза больше денег, чем у младшего. Они положили свои деньги на год на счета в разные банки, причем младший брат нашел банк, который дает на 5% годовых больше, чем банк старшего брата. Сняв свои деньги со счетов через год, старший брат получил 4600 рублей, а младший – 2400 рублей. Сколько денег было бы у братьев в сумме, если бы они с самого начала поменяли свои банки?

**Решение.** Автор берет за $x$ рублей сумму денег, которую положил в банк младший брат. За $2x$ рублей берет сумму денег, которую положил в банк старший брат.

Пусть, далее, банк старшего брата дает $y$ % годовых, тогда банк младшего брата дает $(y + 5)\%$ годовых.

Значит, через год на счету старшего брата будет $(2x + 2x \cdot \frac{y}{100})$ рублей, а на счету младшего брата будет $(x + x \cdot \frac{y+5}{100})$ рублей.

В итоге А.Г. Мордкович приходит к системе уравнений (к математической модели ситуации) $\begin{cases} 2x + \frac{xy}{50} = 4600, \\ x + \frac{x(y+5)}{100} = 2400. \end{cases}$

Решив эту систему, автор получает $x = 2000, y = 15.$ второй этап - работа с составленной моделью – завершен.

Осталось получить ответ на вопрос задачи. Спрашивают, сколько денег было бы у братьев в сумме, если бы они с самого начала поменяли свои банки? В этом случае автор пишет, что младший брат положил бы свои 2000 рублей в банк под 15% годовых, а старший – 4000 рублей в банк под 20% годовых. Младший брат в конце года получил бы 2300 рублей, а старший – 4800 рублей. Всего у них стало бы 7100 рублей.

**Ответ:** 7100 рублей [18, С. 80]

Далее А.Г. Мордкович рассматривает две нестандартные задачи: в каждой из них математическая модель представляет собой одно уравнение с двумя переменными, но найти надо не каждую переменную в отдельности, а некоторое их отношение.

**№ 194.** Суммарный доход двух предприятий возрастает в три раза, если доход первого предприятия останется неизменным, а доход второго увеличится в 4 раза. Во сколько раз надо увеличить доход первого предприятия, оставляя неизменным доход второго, чтобы их суммарный доход вырос в 4 раза?

**Решение.** Автор берет за $x$ (у.е.) – доход первого предприятия, а за $y$ (у.е.) – доход второго предприятия. Из условия задачи следует, что $x + 4y - 3(x + y)$, откуда получается, что $y = 2x$.

Пусть $k -$ искомый коэффициент. Тогда $kx + y = 4(x + y)$. Автор пишет, что подставив в это уравнение $2x$ вместо $y$, получают $kx = 10x$, то есть $k = 10$.

**Ответ**: в 10 раз.

**№ 195.** Торговая фирма получила две партии некоторого товара. Если продавать весь товар по цене 80 рублей за 1 кг, то выручка от продажи будет на 15% ниже той выручки, которую фирма получила бы, продав первую партию по названной цене, а вторую – по цене превышающей ее на 25%. Какую часть (по массе) составляет первая партия товара в общем количестве товара этих двух партий?

**Решение.** А.Г. Мордкович берет за $x$ кг – массу первой партии, а за $y$кг – массу второй партии товара. Продав весь товар по цене 80 рублей за 1 кг, фирма получит выручку, выражающуюся формулой $80x + 80y$. Увеличив цену второй партии товара на 25%, то есть доведя ее до 100 рублей, фирма получит выручку, выражающуюся формулой $80x + 100y$. Согласно условию, $80x + 80y - 0{,}85(80x + 100y)$, откуда после упрощений получается

$12x - 5y$. Значит, первая партия составляет (по массе) $\frac{5}{12}$ от второй и $\frac{5}{17}$от всего товара в целом [18, С.180].

**Ответ:**$\frac{5}{17}$.

После этих задач автор рассматривает задачи на смеси, сплавы и концентрацию.

**№ 197.**Имеются два раствора соли в воде, первый – 40 процентный, второй – 60 процентный. Их смешали, добавили 5 л воды и получили 20 процентный раствор. Если бы вместо 5 л воды добавили 5 л 80 % раствора, то получили бы 70 процентный раствор. Сколько было 40 процентного и сколько 60 процентного раствора?

**Решение.** Автор берет за $x$л - объем 40 – процентного раствора, а за у л – объем 60 % раствора, тогда получается $(x + y + 5)$ л – это объем 20 процентного раствора.

Поскольку в первом растворе было $0{,}4x$ кг соли, во втором – $0{,}6y$ кг соли , а в третьем $0{,}25(x + y + 5)$ кг соли, то получается уравнение $0{,}4x + 0{,}6y = 0{,}2(x + y + 5)$.

Далее, $(x + y + 5)$ л – объем 70 – процентного раствора, соли в нем $0{,}7(x + y + 5)$ кг. Это складывается из трех частей: $0{,}4x$ кг соли из первого раствора; $0{,}6y$ кг соли из второго раствора соли из 5 л 80 процентного раствора. Значит $0{,}4x + 0{,}6y + 4 = 0{,}7(x + y + 5)$.

В итоге получается система двух линейных уравнений с двумя переменными $\begin{cases} 0{,}4x + 0{,}6y = 0{,}2(x + y + 5), \\ 0{,}4x + 0{,}6y + 4 = 0{,}7(x + y + 5). \end{cases}$

**Ответ:** 1 л,2 л.

**№ 198.** Имеется три слитка латуни. Масса первого равна 5 кг, масса второго – 3 кг, и каждый из них содержит 30% меди. Если первый слиток сплавить с третьим, то получится слиток, содержащий 56% меди. Если второй слиток сплавить с третьим, то получится слиток, содержащий 60% меди.каким будет процентное содержание меди в сплаве из трех слитков?

Решение этой задачи автор рассматривает в трех этапах.

**Решение**.

Первый этап.

Первый слиток имеет массу 5 кг, меди в нем 30%, то есть 1,5 кг. Второй слиток имеет массу 3 кг, меди в нем тоже 30%, то есть 0,9 кг. Третий слиток имеет массу $x$ кг, меди в нем $y$% , то есть $\frac{xy}{100}$ кг.

А.Г. Мордкович отмечает, что если сплавить первый и третий слитки и подсчитать количество меди, то получается $1{,}5 + \frac{xy}{100} = 0{,}56(5 + x)$, а если сплавить второй и третий слитки и подсчитать количество меди, то получится $0{,}9 + \frac{xy}{100} = 0{,}6(3 + x)$.

Математическая модель составлена:

$$\begin{cases} 1{,}5 + \dfrac{xc}{100} = 0{,}56(5 + x), \\ 0{,}9 + \dfrac{xy}{100} = 0{,}6(3 + x). \end{cases}$$

Второй этап.

После понятных упрощений получается система $\begin{cases} xy - 56x = 130, \\ xy - 60x = 90. \end{cases}$

Вычитая второе уравнение из первого, находится $x = 10$.

Подставив это значение, например, во второе уравнение системы получится, что $y = 69$.

Третий этап.

Автор предлагает вернутся к исходной задаче и ответить на поставленный вопрос.

Если 1,5 кг меди в 5 кг первого слитка; 0,9 кг меди в 3 кг второго слитка; 6,9 кг меди в 10 кг третьего слитка, то соединив три слитка вместе получится сплав весом 18 кг, в котором меди будет 9,3 кг, что составляет $\frac{9{,}3}{18} \cdot 100\%$ [18, с.81]

**Ответ:**$51\frac{2}{3}$ %.

Таким образом, мы можем сказать, что в теории и методике обучения математике рассматривают три основных типа задач на проценты: на нахождение процента от числа; на нахождение числа по его проценту и задачи на процентное отношение. В параграфе выделены различные приемы обучения решению задач на проценты, которых нет в учебниках математики. Например, нахождение процентов с помощью квадрата, круга и сантиметра.

## ВЫВОДЫ ПО ПЕРВОЙ ГЛАВЕ

1. Рассмотрены исторические аспекты развития понятия процента в математике. Установлено, что процентные расчеты впервые появились в древности у вавилонян, ими были созданы таблицы для расчета процентов. В Индии математики для расчета процентов применяли тройное правило, так же расчетами процентов занимались в Древнем Риме и в Европе в средние века.

2. Представлен анализ программы и школьных учебников по теме исследования. Определено, что решение текстовых задач на проценты предусмотрено в 5-6 классах, а в среднем звене на данную тему отдана незначительная часть времени, что может сказаться при сдаче учащимися ОГЭ.

3. Выявлены методические особенности обучения решению задач на проценты в курсе алгебры основной школы.

4. Рассмотрен опыт работы учителей математики по теме исследования.

5. Рассмотрено введение понятия процента в учебниках разных авторов. Определены три основных вида задач на проценты: нахождение процента от числа, нахождение числа по его проценту и нахождение процентного отношения.

# ГЛАВА II. МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ОБУЧЕНИЮ УЧАЩИХСЯ РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ НА ПРОЦЕНТЫ В КУРСЕ АЛГЕБРЫ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ

## § 4. Методические рекомендации по обучению учащихся решению задач на проценты в курсе математики основной школы

Использовав источники [2; 3;7;19;20], нами были составлены *карточки для устного счета, самостоятельная работа и контрольный срез* для 5-6 классов.

В карточках для устного счета учащимся предлагается выполнить следующие задания:

1. Выразить в виде дроби: 1%; 15%; 77%; 8%; 4,5%; 185%; 61,8%.
2. Представить в виде процентов: 0,78; 0,36; 0,05; 0,325; 0,965; 1,6; 4,26.
3. Найти: 1% от 33; 2% от 30; 16% от 200; 8% от 130; 30% от 260;
4. Найти число $x$, если: 1% от $x$ равен 2; 5% от $x$ равно 12; 20% от $x$ равно 17.
5. Сколько % составляет число 5 от 200; 15 от 200; 20 от 40?

Взяв за основу учебник Н.Я. Виленкина и В.И.Жохова, можно сказать, что учитель может применить данный материал для закрепления, после объяснения темы проценты.

Предлагается также самостоятельная работа в двух вариантах. Ее можно применить на втором уроке изучения понятия процента. Учитель может раздать этот материал, на первом этапе урока и посмотреть усвоили ли учащиеся тему «Проценты». Этой работе отводится 10 минут.

В первом варианте учащимся предлагаются большой объем  простых задач.

1. Найти 15% от числа 90.
2. Найти число если 20 % его составляет 2.
3. Сколько процентов составляет 10 рублей от 50 рублей?

4. На сколько процентов 20 рублей больше 60?
5. Увеличить числа 70 на 33,5%.
6. Дважды увеличить число 200 на 35%.

Во втором варианте учащимся предлагаются усложненные задачи в небольшом объеме.

1. Сколько процентов составляет 100 от 500 рублей?
2. Цена товара сначала снизилась на 15% затем повысилась на 20%. Как изменилась цена товара?
3. Влажность свежих фруктов, массой 12 кг, составляет 99%, а в сушенном виде – 60%. Сколько весят фрукты в сушенном виде?

Контрольный срез обычно проводится после полного изучения темы. Поэтому этот материал может применяться на последнем уроке изучения темы. Результаты этой работы позволят учителю определить уровень усвоения учащимися изученной темы «Проценты».

В контрольном срезе предлагаются два варианта в каждом варианте по четыре задачи.

*Вариант 1*

1. Организм человека на 70% состоит из воды. Какова масса воды в теле человека, если он весит 85 кг?
2. В классе 20 человек, из них мальчиков – 8. Сколько процентов мальчиков в классе?
3. Периметр треугольника равен 70 см. 30% периметра – сумма длин прямоугольника. Чему равна ширина прямоугольника?
4. У Маши в аквариуме 8 меченосцев, что составляет 20% всех рыбок. Сколько рыбок у Маши в аквариуме?

*Вариант 2*

1. В яблоках сладких сортов содержится сахара 25% от их массы. Сколько килограммов сахара будет содержаться в 9 кг яблок?
2. 2 % книги которую прочитал Женя, составляет 8 страниц. Сколько страниц осталось прочитать Жене, если он уже прочитал 25%.

3. Одна из сторон треугольника равна 17 см, длина второй равна 70 % первой , а длина третьей 130% второй. Чему равен периметр треугольника?

4. На олимпиаде команда набрала 82 очка. Сколько очков можно набрать на олимпиаде, если набранные командой очки составляют 60% из всех возможных?

Также нами были составлены самостоятельная работа и контрольный срез для учащихся 7-9 классов.

*Самостоятельная работа* состоит из двух вариантов, в каждом варианте по 3 задачи. Работа предназначена на 15 минут.

Взяв за основу учебник 7 класса Г.К. Муравина и О.В. Муравиной, мы можем отметить, что учитель сможет применить этот материал для закрепления после изучения темы «Математическая модель текстовых задач».

*Вариант 1*

1. В растворе содержится 30% соли. Если добавить 130 г соли, то в растворе будет содержаться 70% соли. Сколько граммов соли было в растворе первоначально?

2. Фабрика должна была сшить 340 костюмов. В первые 8 дней она перевыполняла план на 20%, а в остальные на 25%. Сколько дней работала фабрика, если всего сшито 444 костюма?

3. В одном из городов Украины часть жителей говорит только по-русски, часть только по-украински, часть говорит и по-русски и по-украински. Известно, что 80% жителей говорит по-русски, а 70% по-украински. Какой процент жителей этого города говорит на обоих языках?

*Вариант 2*

1. В сплаве золота с серебром содержится 90 г золота. К сплаву добавили 200 г чистого золота. Содержание золота в сплаве повысилось на 30%. Сколько серебра было в сплаве?

2. В январе завод выполнил 105% месячного плана выпуска готовой продукции, а в феврале дал продукции на 4% больше, чем в январе. На

сколько процентов завод перевыполнил двухмесячный план выпуска продукции?

3. Вычислите массу и пробу сплава серебра с медью, зная, что сплавив его с 3 кг чистого серебра, получим сплав 900-й пробы (т.е. в сплаве 90% серебра), а сплавив с 2 кг сплава 900-й пробы, получим сплав 840-й пробы.

*Контрольная работа* предназначена для контроля усвоения знаний по изученной теме «Математическая модель текстовых задач». Работа будет проходить после полного изучения данной темы. Она состоит из двух вариантов в каждом варианте по четыре задачи.

*Вариант 1*

1. Имеется кусок сплава меди с оловом общей массой 12 кг, содержащий 45% меди. Сколько чистого олова надо прибавить к этому куску сплава, чтобы получившийся новый сплав содержал 40% меди?

2. В бассейн проведена труба. Вследствие её засорения приток воды уменьшился на 60%. На сколько процентов вследствие увеличится время, необходимое для заполнения бассейна?

3. Имеются 2 слитка, содержащие медь. Масса 2 слитка на 3кг. Больше, чем масса 1 слитка. Процентное содержание меди в первом слитке – 10%; во втором – 40%. После сплавления этих двух слитков получился слиток, процентное содержание меди в котором – 30%. Определить массу полученного слитка.

4. В течении года завод дважды увеличивал выпуск продукции на одно и то же число процентов. Найдите это число, если известно, что в начале года завод ежемесячно выпускал 600 изделий, а в конце года стал выпускать ежемесячно 726 изделий.

*Вариант 2*

1. К 20кг. 12%-раствора соли добавили 3кг. соли. Сколько надо долить воды, чтобы концентрация соли в растворе не изменилась.

2. При смешивании первого раствора сахара, концентрация которого 25%, и второго раствора сахара, концентрация которого 35% , получили рас-

твор, содержащий 32,5 % сахара. В каком отношении были взяты первый и второй растворы?

3. Имеются два раствора серной кислоты в воде: первый – 40%-й, второй- 60%-й. Эти два раствора смешали , после чего добавили 5 кг чистой воды и получили 20% раствор. Если бы вместо 5 кг чистой воды добавили 5 кг 80%-го раствора, то получился бы 70%-й раствор. Сколько было 40%-го раствора и 60%-го раствора?

4. Банк выплачивает вкладчикам каждый год 8% от внесённой суммы. Клиент сделал вклад в размере 200000р.Какая сумма будет на его счёте через 5 лет, 10 лет?

Таким образом, мы можем отметить, что разработанные нами методические материалы (карточки для устного счета, самостоятельные и контрольные работы) по обучению учащихся 5-6-х и 7-9-х классов решению задач на проценты могут применяться учителем на разных этапах урока математики.

## §5. Анализ задач ОГЭ по теме исследования

Требование вузов и сузов к математической подготовке с каждым годом возрастают. Уровень требований, предъявляемый к абитуриентам по теме «Проценты», высок. Ежегодно ОГЭ по математике включает задачи на проценты.

Представим основные задачи на проценты, используемые в заданиях ОГЭ. Данные виды задач используются в части 1 – задание 16 и в части 2 – задание 22.

Приведем сначала различные виды *задания 16 части 1 ОГЭ*.

**Пример 1.** [5, С. 80].Спортивный магазин проводит акцию. Любой джемпер стоит 400 рублей. При покупке двух джемперов – скидка на второй джемпер 75%. Сколько рублей придется заплатить за покупку двух джемперов в период акции?

**Решение.** Согласно условию задачи получается, что первый джемпер покупается за $100\,\%$ его исходной стоимости, а второй за $100 - 75 = 25\,(\%)$, т.е. всего покупатель должен заплатить $100 + 25 = 125\,(\%)$ от исходной стоимости. Далее можно рассмотреть решение тремя способами.

**1 способ.**400 рублей принимаем за 100. тогда в 1 % содержится 400:100=4 (руб.), а в 125 % содержится 4·125 = 500 (руб.)

**2 способ**. Процент от числа находится умножением числа на дробь, соответствующую проценту или умножением числа на данный процент и делением на 100. 400·1,25 = 500 или $400 \cdot \frac{125}{100} = 500$.

**3 способ.**

Применение свойства пропорции: 400 руб. – 100 % $x$ руб. – 125 %, получим $x$ =125·$\frac{400}{100} = 500$ (руб.)

Ответ: 500 рублей.

**Пример 2**[5,С.82].Средний вес мальчиков того же возраста, что и Гоша, равен 57 кг. Вес Гоши составляет 150 % среднего веса. Сколько килограммов весит Гоша?

**Решение.** Аналогично примеру, рассмотренному выше можно составить пропорцию: 57 кг – 100 %

$x$кг – 150 %, получим $x = 57 \cdot \frac{150}{100} = 85{,}5$ (кг)

**Ответ:** 85,5 (кг)

**Пример 3**[26, С.25].После уценки телевизора его новая цена составила 0,52 старой. На сколько процентов уменьшилась цена в результате уценки?

**Решение.**

**1 способ.** Найдем сначала долю уменьшения цены. Если исходную цену принять за 1, то 1 – 0,52 = 0,48 составляет доля уменьшения цены. Тогда получаем, 0,48 ·100% = 48%. То есть на 48 % уменьшилась цена в результате уценки.

**2 способ.** Если исходную стоимость принять за А, то после уценки новая цена телевизора будет равняться 0,52А, то есть она уменьшится на А – 0,52А = 0,48А.

Составим пропорцию:

А – 100%

0,48А – $x$ %, получим $x = 0{,}48A \cdot \frac{100}{A} = 48$ (%)

Ответ: на 48% уменьшилась цена в результате уценки.

**Пример 4**[26, С. 35].Товар на распродаже уценили на 15%, при этом он стал стоить 680 рублей. Сколько рублей стоил товар до распродажи?

**Решение.** До понижения цены товар стоил 100%. Цена на товар после распродажи уменьшилась на 15%, т.е. стала 100 – 15 = 85 (%), в рублях эта величина равна 680 рублей.

**1 способ**.

$680 : 85 = 8\,(\text{руб.}) - \text{в } 1\,\%$

$8 \cdot 100 = 800(\text{руб.}) - $ стоил товар до распродажи.

**2 способ.** Это задача на нахождение числа по его проценту, решается делением числа на соответствующий ему процент и путем обращения полученной дроби в проценты, умножением на 100, или действием деления на дробь, полученную при переводе из процентов.

$680{:}\,85 \cdot 100 = 800(\text{руб.})$или $680{:}\,0{,}85 = 800\ (\text{руб.})$

**3 способ.** С помощью пропорции

680 руб. – 85 %

$x$ руб. – 100 %, получим $x = 680 \cdot \frac{100}{85} = 800\ (\text{руб.})$

**Ответ:** 800 рублей стоил товар до распродажи.

Отметим, что в части 1 ОГЭ имеются все типы задач на проценты.

Рассмотрим виды *задач 22 части 2 ОГЭ,* где встречаются более сложные задачи на проценты.

**Пример 1**[26, С. 105].Цена товара была дважды снижена на одно и то же число процентов. На сколько процентов снижалась цена товара каждый раз, если его первоначальная стоимость 5000 рублей, а окончательная 4050 рублей?

**Решение.**

**1 способ.** Так как цена товара снижалась на одно и то же число %, обозначим число % за$x$. Пусть в первый и второй раз цена товара была понижена на $x$ % тогда после первого понижения цена товара стала $(100 - x)$ %.

Составим пропорцию

5000 руб. – 100 %

$y$ руб. – $(100 - x)$%. Получим $y = 5000 \cdot \frac{(100-x)}{100} = 50 \cdot (100 - x)$ рублей – стоимость товара после первого понижения.

Составим новую пропорцию уже по новой цене:

$50 \cdot (100 - x)$руб. – 100 %

$z$ руб. $-(100 - x)$ %, получим $z = 50 \cdot (100 - x)\frac{(100-x)}{100} = 0{,}5 \cdot 2(100 - x)$рублей – стоимость товара после второго понижения.

Получим уравнение $0{,}5 \cdot 2(100 - x) = 4050.$ Решив его, получим, что $x = 10$ %.

**2 способ.** Так как цена товара снижалась на одно и то же число % обозначим число % через $x$, $x$ % $= 0{,}01x$.

Используя понятие коэффициента уменьшения, сразу получим уравнение:

$$5000 \cdot 2(1 - 0{,}01x) = 4050.$$

Решив его, получим, что $x = 10$ %.

**Ответ:** на 10 % снижалась цена товара каждый раз.

**Пример2**[5,С.63].Цена товара была дважды повышена на одно и то же число процентов. На сколько процентов повышалась цена товара каждый раз, если его первоначальная стоимость 3000 рублей, а окончательная 3630 рублей?

**Решение.** Так как цена товара повышалась на одно и то же число %, обозначим число за $x$, $x$ % $= 0.01x$.

Используя понятие коэффициента увеличения, сразу получаем уравнение: $3000 \cdot 2(1 + 0{,}01x) = 3630$.

Решив его, получим, что $x = 10$ %.

**Ответ:** на 10 % повышалась цена товара каждый раз.

**Пример 3**[26, С.58].Сколько граммов 8% серной кислоты можно получить из 200 г жидкости, содержащей 62% серной кислоты?

**Решение.**

1) 200·0.62 = 124 (г) - столько крепкой (100%) серной кислоты содержится в 200 г 62-х процентной кислоты.

2) 124: 0.08 = 1550 (г) - столько 8-ми процентной кислоты можно получить из 200 г 62-х процентной серной кислоты.

**Ответ:** 1550 г

**Пример 4**[5, С.78].Числитель дроби увеличили на 20%. На сколько процентов надо уменьшить ее знаменатель, чтобы в итоге дробь возросла вдвое?

**Решение.** Пусть дана дробь$\frac{a}{b}$ . По условию задачи составляем уравнение:

$$\frac{0{,}2a + a}{b - bx} = \frac{2a}{b}$$

$$\frac{1{,}2a}{b(1 - x)} = \frac{2a}{b}$$

$$\frac{0{,}6}{(1 - x)} = 1$$

$$x = 0{,}4.$$

Значит, знаменатель надо уменьшить на 40%.

**Пример 5**[26, С.42].

Имеется два сплава с разным содержанием меди: в первом содержится 60%, а во втором — 45% меди. В каком отношении надо взять первый и второй сплавы, чтобы получить из них новый сплав, содержащий 55% меди?

**Решение.** Пусть первый сплав взят в количестве $x$ кг, тогда он будет содержать $0{,}6x$ кг меди, а второй сплав взят в количестве $y$ кг, тогда он будет содержать $0{,}45y$ кг меди. Соединив два этих сплава, получим сплав меди массой $x + y$, по условию задачи он должен содержать $0{,}55(x + y)$ меди. Следовательно, можно составить уравнение: $0{,}6x + 0{,}45y = 0{,}55(x + y)$.

Выразим $x$ через $y$: $x = 2y$. Следовательно, отношение в котором нужно взять сплавы: $\frac{x}{y} = \frac{2}{1}$.

**Ответ:** $\frac{2}{1}$.

Таким образом, проанализировав задания ОГЭ, в следующем параграфе мы представим наборы задач для 5-6х и 7-9х классов по теме исследования.

## §6. Наборы задач по обучению учащихся основной школы решению задач на проценты

### 6.1.Наборы задач для 5-6 классов

В данном параграфе представлены три основных типа задач на проценты, рассмотрим их. Каждая задача рассматривается с решением. Задачи были составлены из источников[2; 3; 5; 7; 19; 20; 26].

**Нахождение процента от числа**

**Задача 1.**Предприятие изготовило за квартал 400 насосов, из которых 40% имели высшую категорию качества. Сколько насосов высшей категории качества было изготовлено предприятием?

**Решение.** Найдем 40% от 400, 40 %=0,4. 400· 0,4 = 160 (н.)

**Ответ:** 160 насосов высшей категории было изготовлено предприятием.

**Задача 2.** Медведь волк и лиса нашли в лесу сундук с 5010 золотыми монетами. Они взяли 40% монет, остальные монеты растащили грабители. Сколько монет растащили грабители?

**Решение.** $40\% = 0{,}4$.

1) $5010 \cdot 0{,}4 = 2004$ (м.);

2) $5010 - 2004 = 3006$(м.).

**Ответ:** 3006 монет.

**Задача 3.** Длина волги 3530 км. Корабль проплыл 15% этой реки и сделал остановку. Сколько километров проплыл корабль до первой остановки?

**Решение.** 15% = 0,15. $3530 \cdot 0{,}15 = 529{,}5$ (км)

**Ответ:** 529,5 км.

**Задача 4.** Карлсон купил новый шампунь. После того, как он помылся, от его прежних 460 волосинок осталось 40%. Сколько волосинок исчезло с головы Карлсона?

**Решение.** 40% = 0,4.

1) $460 \cdot 0{,}4 = 184(\text{в.})$; $2)460 - 184 = 276$ (в.).

**Ответ:** 276 волос исчезло.

**Задача 5.** Кощей поспорил с бабой Ягой, что просидит в печке 230 минут, а просидел 52 %. Сколько просидел кощей в печке?

**Решение.** 52% = 0,52. $230 \cdot 0{,}52 = 119{,}6$ (мин)

**Ответ:** 119,6 (мин)

### Нахождение числа по его проценту

**Задача 6.** Вася прочитал 136 страниц, что составляет 25% числа всех страниц. Сколько страниц в книге?

**Решение.** $136 : 25\% = 136 : 0{,}25 = \frac{136 \cdot 100}{25} = 544$ (стр.)

**Ответ:** 544 страницы в книге.

**Задача 7.** Колобок прокатился по лесу 26 км, что составило 15% пути. Каков путь, который должен был проделать колобок?

**Решение.**$26 : 15\ \% = 26 : 0{,}15 = \frac{26 \cdot 100}{15} = 173{,}3$ (км).

**Ответ:** 173,3 км

**Задача 8.** Золотая рыбка построила 14 замков для бедных людей, что составило 70% всех намеченных ею. Сколько всего замков хотела построить золотая рыбка?

**Решение.**$14 : 70\% = 14 : 0{,}7 = \frac{14 \cdot 100}{70} = 20$ (з.).

**Ответ:** 20 замков.

**Задача 9.** Накануне Нового года гномы нашли 52 кг золота , что составляет 20% того, что имелось в пещере. Сколько килограммов золота было в пещере?

**Решение.** $52 : 20\% = 52 : 0{,}2 = \frac{52 \cdot 100}{20} = 260$ (кг).

**Ответ:** 260 кг.

**Задача 10.** Маша съела 20 штук конфет, что составило 40% всех запасов ее родителей. Сколько конфет осталось в запасе?

**Решение.**

1) $20 : 40\% = 20 : 0{,}4 = \frac{20 \cdot 100}{40} = 50$ (шт.). $2)\ 50 - 20 = 30$ (шт.).

**Ответ:** 30 штук конфет осталось в запасе.

### Процентное отношение

**Задача 11.**Из 300 арбузов 15 оказались незрелыми. Сколько процентов всех арбузов составили незрелые арбузы?

**Решение.**$(15{:}\,300) \cdot 100\% = \frac{15}{300} \cdot 100\% = \frac{1}{20} \cdot 100\% = \frac{100\%}{20} = 5$ %.

**Ответ:** 5 %  незрелых арбузов.

**Задача 12.** Папа, мама и дочка поехали навестить бабушку, общее расстояние которое им надо проехать 1200 км. Через 325 км они остановились перекусить в кафе. Какую часть пути им осталось проехать?

**Решение.**$(325 : 1200) \cdot 100\% = 27$ %.

**Ответ:** 27 % осталось проехать.

**Задача 13.** В компьютерной игре «Сталкер» 3 карты. На каждой карте 80 заданий. Мальчик выполнил 149 заданий. Какую часть игры он прошел?

**Решение.**1) $80 \cdot 3 = 240(\text{з.})$. $2)(149 : 240) \cdot 100\% = 62$ %.

**Ответ:** 62 %

**Задача 15.** На данном участке 17 яблонь. Средством от вредителей обработали 7 деревьев. Какая часть деревьев обработана?

**Решение.** $(7 : 17) \cdot 100\ \% = 41$ %.

**Ответ:** 41%

**Задача 16.** В книге 326 страниц. Прочитано 86 страниц. Какую часть книги осталось прочитать?

**Решение.** 1) $(86 : 326) \cdot 100 = 26$ %. 2) 100 % - 26 % = 76 %.

**Ответ:** 76%.

Итак, нами был разработан набор задач на проценты для 5-6х классов, которые могут использоваться при составлении карточек для устного счета, самостоятельных и контрольных работ.

В следующем пункте мы разработаем набор задач для 7-9-х классов.

## 6.2. Наборы задач для 7-9 классов

Для 7- 9 классов вводятся набор более сложных задач на проценты. Задачи были составлены из источников [5; 8; 9; 14-16;21-23; 26].

### Задачи на пропорции

**Задача 1.** На пост главы администрации города претендовало три кандидата: Журавлёв, Зайцев, Иванов. Во время выборов за Иванова было отдано в 2 раза больше голосов, чем за Журавлёва, а за Зайцева — в 3 раза больше, чем за Журавлёва и Иванова вместе. Сколько процентов голосов было отдано за победителя?

**Решение.** Заметим, что победителем на выборах окажется Зайцев. Пусть количество голосов, отданных за Зайцева равно $x$. Тогда за Журавлёва и Иванова вместе отдали $\frac{x}{3}$. Процент голосов, отданных за Зайцева

$$x : \left(x + \frac{x}{3}\right) \cdot 100 = \frac{100x}{\frac{4x}{3}} = 100x \cdot \frac{3}{4x} = 25 \cdot 3 = 75 \text{ \%}..$$

**Ответ:** 75 %.

**Задача 2.** Свежие фрукты содержат 86 % воды, а высушенные — 23 %. Сколько требуется свежих фруктов для приготовления 72 кг высушенных фруктов?

**Решение.** Заметим, что сухая часть свежих фруктов составляет 14%, а высушенных — 77%. Значит, для приготовления 72 кг высушенных фруктов$\frac{77}{14} \cdot 72 = 396$ кг свежих.

**Ответ:** 396 кг.

**Задача 3.** Свежие фрукты содержат 80% воды, а высушенные — 28%. Сколько сухих фруктов получится из 288 кг свежих фруктов?

**Решение.** Свежие фрукты содержат 20% питательного вещества, а высушенные — 72%. В 288 кг свежих фруктов содержится $0{,}2 \cdot 288 = 57{,}6$ кг питательного вещества. Такое количество питательного вещества будет содержаться в $\frac{57{,}6}{0{,}72} = 80$ кг высушенных фруктов.

**Ответ:** 80 кг.

**Задачи на смеси, сплавы и концентрацию**

**Задача 4.** Первый сплав содержит 5% меди, второй — 13% меди. Масса второго сплава больше массы первого на 4 кг. Из этих двух сплавов получили третий сплав, содержащий 10% меди. Найдите массу третьего сплава.

**Решение.** Пусть масса первого сплава $x$ кг. Тогда масса второго сплава $(x + 4)$ кг, а третьего — $(2x + 4)$ кг. В первом сплаве содержится $0{,}05x$ кг меди, а во втором — $0{,}13(x + 4)$ кг. Поскольку в третьем сплаве содержится $0{,}1(2x + 4)$ кг меди, составим и решим уравнение:

$$0{,}05x + 0{,}13(x + 4) = 0{,}1(2x + 4)$$

$$0{,}05x + 0{,}13x - 0{,}2x = 0{,}4 - 0{,}52$$

$$0{,}02x = 0{,}12$$

$$x = 6.$$

Масса третьего сплава равна 16 кг.

**Ответ:** 16 кг.

**Задача 5.** Смешали некоторое количество 10-процентного раствора некоторого вещества с таким же количеством 12-процентного раствора этого же вещества. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора?

**Решение.** Пусть взяли $x$г 10-процентного раствора, тогда взяли и $x$ г 12-процентного раствора. Концентрация раствора — масса вещества, разделённая на массу всего раствора. В первом растворе содержится $0{,}1x$ г, а во втором – $0{,}12x$ г. Концентрация получившегося раствора равна

$$\frac{0,1x+0,12x}{x+x} = \frac{0,22x}{2x} = 0,11 \text{или } 11\%.$$

**Ответ:** 11 %

**Задача 6.** Смешав 60%–ый и 30%–ый растворы кислоты и добавив 5 кг чистой воды, получили 20%–ый раствор кислоты. Если бы вместо 5 кг воды добавили 5 кг 90%–го раствора той же кислоты, то получили бы 70%–ый раствор кислоты. Сколько килограммов 60%–го раствора использовали для получения смеси?

**Решение.** Пусть $x$кг и $y$ кг – массы первого и второго растворов, взятые при смешивании. Тогда $x + y + 5$ кг – масса получившегося раствора, содержащего $0,6x + 0,3y$ кг кислоты. Концентрация кислоты в полученном растворе 20 %, откуда $0,6x + 0,3y = 0,2(x + y + 5)$.

Решим систему двух полученных уравнений:

$$\begin{cases} 0,6x + 0,3y = 0,2(x + y + 5) \\ 0,6x + 0,3y + 0,9 \cdot 5 = 0,7(x + y + 5) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0,4x + 0,1y = 1, \\ 0,1x + 0,4y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 2. \end{cases}$$

**Ответ:** 2 кг.

**Задача 7.** К 120 г раствора, содержащего 80% соли, добавили 480 г раствора, содержащего 20 % той же соли. Сколько процентов соли содержится в получившемся растворе?

**Решение.**

1) $0,8 \cdot 120 = 96$ (г)-соли в первоначальном растворе;

2) $480 \cdot 0,2 = 96$(г) соли во втором растворе;

3) $\frac{(96+96)}{(120+480)} \cdot 100\% = 32\%$ – процентное содержание соли в получившемся растворе.

**Ответ**: 32%.

**Задача 8.** В колбе было 800 г 80% -ного спирта. Провизор отлил из колбы 200 г этого спирта и добавил в нее 200 г воды. Определить концентрацию (в процентах) полученного спирта.

**Решение.** После того, как провизор отлил 200 г раствора, стало 600г, в котором чистого спирта $0,8 \cdot 600 = 480$г, когда добавили 200г воды, то раствор снова 800г, а концентрация чистого спирта в растворе

$$\left(\frac{480}{800}\right) \cdot 100\% = 0,6 \cdot 100\ \% = 60\%.$$

**Ответ:** 60%.

**Задача 9.** Из сосуда, доверху наполненного 94% -м раствором кислоты, отлили 1,5 л жидкости и долили 1,5 л 70% -го раствора этой же кислоты. После этого в сосуде получился 86% раствор кислоты. Сколько литров раствора вмещает сосуд?

**Решение.** Пусть x л вмещает сосуд, тогда из условий задачи следует уравнение

$$0,94(x - 1,5) + 0,7 \cdot 1,5 = 0,86x$$

$$0,94x - 1,41 + 1,05 = 0,86x$$

$$0,08x = 0,36$$

$$x = 4,5\text{л}.$$

**Ответ:** 4,5 л.

**Задача на сложные проценты**

**Задача 10**. Численность населения в городе Таганроге в течение двух лет возрастала на 2 % ежегодно. В результате число жителей возросло на 11312 человек. Сколько жителей было в Таганроге первоначально?

**Решение.** А- первоначальное количество жителей Таганрога.

$$A(1 + 0,02)^2 = A + 11312$$

$$0,0404A = 11312$$

$$A = 280000.$$

**Ответ:** 280000 чел.

**Задача 11.** Найти прибыль от 30000 рублей положенных на депозит на 3 года под 10 % годовых, если в конце каждого года проценты добавлялись к депозитному вкладу.

**Решение.** Используем формулу для вычисления сложных процентов:

$$B = A(1 + \frac{P}{100\ \%})^n.$$

$$B = 30000(1 + \frac{10\%}{100\%})^3 = 30000 \cdot 1{,}1^3 = 39930 \textit{ прибыль равна}$$

$$39930 - 30000 = 9930$$

**Ответ:** прибыль 9930 рублей.

Таким образом, нами был разработан набор более сложных задач на проценты для 7-9-х классов, которые могут использоваться при составлении самостоятельных и контрольных работ.

## ВЫВОДЫ ПО ВТОРОЙ ГЛАВЕ

1. Разработаны методические материалы (математический диктант, карточки для устного счета, самостоятельные и контрольные работы, наборы задач) по обучению учащихся 5-6-х и 7-9-х классов решению задач на проценты и методические рекомендации по их применению.
2. Разработаны наборы задач для учащихся 5-6-х и 7-9-х классов по теме исследования.

# ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключении проведенного исследования можно сделать следующие выводы:

1. В данной работе нами рассмотрены исторические аспекты развития понятия процента в математике. Установлено, что процентные расчеты впервые появились в древности у вавилонян, ими были созданы таблицы для расчета процентов. В Индии математики для расчета процентов применяли тройное правило, так же расчетами процентов занимались в Древнем Риме и в Европе в средние века.

2. Представлен анализ программы и школьных учебников по теме исследования. Определено, что решение текстовых задач на проценты предусмотрено в 5-6 классах, а в среднем звене на данную тему отдана незначительная часть времени, что может сказаться при сдаче учащимися ОГЭ.

3. Выявлены методические особенности обучения решению задач на проценты в курсе алгебры основной школы. Рассмотрен опыт работы учителей математики по теме исследования.

4. Проанализировано введение определения понятия процента в учебниках разных авторов. Определены три основных вида задач на проценты: нахождение процента от числа, нахождение числа по его проценту и нахождение процентного отношения.

5. Так же были разработаны методические материалы (карточки для устного счета, самостоятельные и контрольные работы) по обучению учащихся 5-6-х и 7-9-х классов решению задач на проценты и методические рекомендации по их применению. Разработаны наборы задач для учащихся 5-6-х и 7-9-х классов по теме исследования.

Все это дает основание считать, что задачи, поставленные в исследовании, полностью решены.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Актуальные вопросы теории и методики обучения математике в средней школе: сборник научный статей. Вып. 1. – Киров: Изд-во ВятГГУ, 2011. – 111 с.

2. Виленкин Н.Я. Математика. 5 класс: учебник для общеобразовательных учреждений/Н.Я. Виленкин, В.И. Жохов, А.С. Чесноков. – 8-е изд. – М.: Мнемозина, 2000. – 380 с.

3. Виленкин Н.Я. Математика 6 класс: учебник для общеобразовательных учреждений/Н.Я. Виленкин, В.И. Жохов, А.С. Чесноков – 8-е изд. – М.: Мнемозина, 2001. – 379 с.

4. Виноградова Л.В., Методика преподавания математики в средней школе: учеб.пособ. / Виноградова Л.В. - Ростов н/Д: Феникс, 2005. - 252 с.

5. ГИА – 2013. Математика: типовые экзаменационные варианты: 30 вариантов/под ред. А.Л. Семенова, И.В. Ященко. – М.: «Национальное образование», 2013. – 192 с.

6. Детушева Л.В. Применение методики компрессивного обучения при решении текстовых задач на проценты // Ученые записки. Электронный научный журнал Курского государственного университета. – 2014. – С. 170-177. URL:http://elibrary.ru/download/21150179.pdf(дата обращения: 22.04.16)

7. Дорофеев Г.В., Математика. 6 класс: учебник для общеобразовательных учебных заведений/Г.В. Дорофеев, С.Б. Суворова, Е.А. Бунилович, Л.В. Кузнецова, С.С. Минаева. – М.: Дрофа, 2001. – 288 с.

8. Дорофеев Г.В., Математика. 7 класс: учебник для общеобразовательных учебных заведений/Г.В. Дорофеев, С.Б. Суворова, Е.А. Бунилович, Л.В. Кузнецова, С.С. Минаева. – М.: Дрофа, 2003. – 278 с.

9. Дорофеев Г.В., Математика. 8 класс: учебник для общеобразовательных учебных заведений/Г.В. Дорофеев, С.Б. Суворова, Е.А. Бунилович, Л.В. Кузнецова, С.С. Минаева. – М.: Дрофа, 2000. – 282 с.

10. Дорофеев Г.В., Кузнецова Л.В., Минаева С.С., Суворова С.Б. Изучение процентов в основной школе //Математика в школе. – 2002. – №1 – С. 19 –24.

11. Крамор В.С. Повторяем и систематизируем школьный курс алгебры и начала анализа. - М.: Просвещение, 1990. – 245 с.

12. Кузнецова Г.М., Программы для общеобразовательных школ, гимназий, лицеев: Математика 5-11 кл. / Сост. Г.М. Кузнецова, Н.Г. Миндюк. – 3-е изд., стереотип. – М.: Дрофа, 2002. – 320 с.

13. Лещев П.В. Изучение процентных вычислений в связи с обыкновенными дробями // Математика в школе. - 1957. - № 4. - С. 78-87.

14. Макарычев Ю.Н. Алгебра. 7 класс: учебник для учащихся общеобразовательных учреждений/Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, И.Е. Феоктистов. – 12-е изд., испр.- М.: Мнемозина, 2012. – 336 с.: ил.

15. Макарычев Ю.Н. Алгебра. 8 класс: учебник для учащихся общеобразовательных учреждений/Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, И.Е. Феоктистов. – 12-е изд., испр.- М.: Мнемозина, 2012. – 384 с.

16. Макарычев Ю.Н. Алгебра. 9 класс: учебник для учащихся общеобразовательных учреждений/Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, И.Е. Феоктистов. – 12-е изд., испр.- М.: Мнемозина, 2012. – 383 с.

17. Методика преподавания математики в средней школе: Общая методика: Учеб.пособие для студентов физ.-мат. факультетов пед. вузов / Ю.М. Колягин и др. - М.: Просвещение, 1975. — 462 с.

18. Мордкович А.Г., Алгебра 7-9 класс: методическое пособие для учителя.- 3-е изд. – М.: Мнемозина, 2004. – 144 с.

19. Муравин Г.К., Математика. 5 класс: учебник для общеобразовательных учреждений/Г.К. Муравин, О.В. Муравина. – 3-е изд., стер. – М.: Дрофа, 2008. – 319 с.

20. Муравин Г.К., Математика. 6 класс: учебник для общеобразовательных учреждений/Г.К. Муравин, О.В. Муравина. – 3-е изд., стер. – М.: Дрофа, 2007. – 321 с.

21. Муравин Г.К., Алгебра. 7 класс: учебник для общеобразовательных учреждений/Г.К. Муравин, К.С. Муравина, О.В. Муравина. – 7-е изд., дораб. – М.: Дрофа, 2009. – 286 с.

22. Муравин Г.К., Алгебра. 9 класс: учебник для общеобразовательных учреждений/Г.К. Муравин, К.С. Муравина, О.В. Муравина. – 11-е изд., дораб. – М.: Дрофа, 2010. – 318 с.

23. Муравин Г.К., Алгебра. 9 класс: учебник для общеобразовательных учреждений/Г.К. Муравин, К.С. Муравина, О.В. Муравина. – 11-е изд., дораб. – М.: Дрофа, 2010. – 318 с.

24. Нагибин Ф.Ф. Математическая шкатулка. - М.: Просвещение, 1988. – 253 с.

25. Никольская И.А. Из опыта изучения темы «Задачи на проценты» // Математика в школе. - 1979. - №5. – С. 34.

26. ОГЭ. Математика: типовые варианты: 36 вариантов/ Под.ред. И.В. Ященко. – М.: «Национальное образование», 2016. – 240 с.

27. Примерная программа основного общего образования по учебным предметам. Математика (ОДОБРЕНО Федеральным учебно - методическим объединением по общему образованию. Протокол заседания от 8 апреля 2015 г. № 1/15) URL:http: //muravin2007.narod.ru/ download / Programma_-mat_2015_0.pdf (дата обращения 01.06.2016)

28. Самойлик Г.А. История математики на уроках. Проценты // Математика. – 2002 – № 36 – С. 3.

29. Сервэ В. Математика в образовании и воспитании/ Сост. В.Б. Филлипов. – М.: ФАЗИС, 2000.- 256 с.

30. Сорокин П.М. Из опыта преподавания темы «Проценты» // Математика в школе. - 1958. - № 4. - С. 49-50.

31. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования. Приказ Мин. образования и науки РФ от 17.05.2012г.№413.URL: *http://минобр-науки.рф/документы/543*(дата обращения 25.04.2016).