МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Тольяттинский государственный университет»

институт математики, физики и информационных технологий
кафедра «Алгебра и геометрия»

ФОРМИРОВАНИЕ АЛГОРИТМИЧЕСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ УЧАЩИХСЯ ПРИ ОБУЧЕНИИ УРАВНЕНИЯМ И НЕРАВЕНСТВАМ В КУРСЕ АЛГЕБРЫ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ

БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА

Направление подготовки бакалавра: 44.03.05 Педагогическое *образование*
Направленность (профиль): *Математика и информатика*

Студент С.Г. Абдуллаева ___________

Научный
Руководитель: к.п.н., доцент Н.А. Демченкова ____________

Допустить к защите
Заведующий кафедрой: д.п.н., проф. Р.А. Утеева ___________

«_____»___________2016 г.

Тольятти - 2016

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность исследования. Перед учителем математики всегда стоит вопрос: как учить детей, чтобы они не только получали знания, но и умели думать? Поэтому необходимо стараться формировать у учащихся достаточно общие методы мышления и деятельности, общие способы подхода к любой задаче. Алгоритмическая деятельность является одним из видов общих методов деятельности вообще, а не только деятельности умственной.

Понятие алгоритма пронизывает все области современной математики – от элементарной до высшей. И этот факт не может не влиять на процесс обучения математике в школе. Привычка пользоваться алгоритмическими приёмами в практической работе становится требованием эпохи, мимо которого школа пройти не может. Поэтому применение алгоритмического метода становится актуальной темой сегодняшнего дня [24, с. 85].

В своей практической деятельности люди подмечают аналогичное, повторяющееся в различных явлениях, вещах, поступках, и сознательно придумывают последовательность операций, которые приводят к нужному результату. Эта специфика человеческой деятельности, обучения была подмечена во второй половине XX века. Тогда появились такие понятия как «предписание алгоритмического типа» (Л.Н. Ланда, 1966), «расплывчатые алгоритмы» (Л. Заде, 1968) и целой гаммы других понятий (Б.В. Бирюков, Е.С. Геллер, 1973) [24, с. 85].

Такие методы как алгоритмизация, формализация применены не во всех науках. В образовательном процессе данные методы применимы при изучении прежде всего математики, физики и дисциплин, в которых можно информацию перенести в виде детерминированного предписания – алгоритма (в частности, в методике преподавания математики, физики и т.п.).

Алгоритмы, а именно, алгоритмическая деятельность, нашли широкое применение в процессе обучения.

В настоящее время поток информации, с которым приходится работать на занятиях и в жизни, постоянно растет; наблюдается нехватка времени, отводимого на изучении того или иного материала. Наличие алгоритмической деятельности по различным учебным дисциплинам, отдельным разделам, темам ускорит процесс усвоения [24, с. 85].

В федеральном государственном образовательном стандарте основного общего образования [46] сказано, что личностные результаты освоения основной образовательной программы учащихся основного общего образования по математике должны отражать: развитие алгоритмического мышления; развитие умений составить и записать алгоритм для конкретного исполнителя; формирование знаний, касающихся алгоритмических конструкций; знакомства с основными алгоритмическими структурами – линейной, разветвляющейся и циклической.

Всё выше сказанное подтверждает актуальность данного исследования.

Объект исследования: процесс обучения математике учащихся основной школы.

Предмет исследования: алгоритмическая деятельность учащихся основной школы при изучении математики.

Проблема исследования состоит в выявлении методических аспектов формирования алгоритмической деятельности учащихся основной школы.

Цель исследования: разработать методику формирования алгоритмической деятельности при обучении уравнениям и неравенствам учащихся основной школы.

Основные задачи исследования:

1. Проанализировать подходы к определению понятия алгоритмической деятельности.

2. Выделить основные этапы формирования алгоритмической деятельности.

3. Выявить методические особенности формирования алгоритмической деятельности на уроках математики.

4. Рассмотреть основные понятия алгоритма, классификацию алгоритмов, их свойства.

5. Представить алгоритмические методы решения задач.

6. Составить системы упражнений, направленные на овладение алгоритмической деятельностью по решению уравнений и неравенств учащимися на уроках математики.

7. Рассмотреть задачи, которые предлагаются к проведению Основного государственного экзамена в 2016 году по данной теме.

Для решения поставленных задач были использованы следующие методы исследования: анализ педагогической и методической литературы; изучение опыта работы учителей математики по данной теме исследования; изучение школьных программ, учебников и учебных пособий.

Практическая значимость проведенного исследования состоит в том, что выявленные методические особенности формирования алгоритмической деятельности учащихся на уроке математики общеобразовательной школы и составленные системы упражнений могут быть использованы учителем математики и студентами педагогических специальностей в ходе практики.

Апробация результатов исследования. Теоретические выводы и практические результаты исследования были апробированы на первом этапе научной студенческой конференции “Дни науки” института математики, физики и информационных технологий ТГУ (г. Тольятти, апрель 2014 г.).

На защиту выносятся методические особенности формирования алгоритмической деятельности и системы упражнений при обучении уравнениям и неравенствам, направленные на формирование алгоритмической деятельности учащихся основной школы.

Дипломная работа состоит из введения, двух глав, заключения, списка литературы и приложения.

Во **введении** обоснована актуальность исследования и даны его основные характеристики.

В **первой главе** представлен анализ различных подходов к определению понятия алгоритмической деятельности; выделены основные этапы формирования алгоритмической деятельности; выявлены методические особенности формирования алгоритмической деятельности на уроках математики при работе с определениями, теоремами, правилами и предписаниями; рассмотрена классификация алгоритмов, их свойства; прописаны алгоритмические методы решения задач.

Во **второй главе** представлена система заданий на формирование алгоритмической деятельности при решении уравнений и неравенств в курсе алгебры основной школы; показаны задачи, которые предлагаются для проведения Основного государственного экзамена.

В **заключении** сформулированы основные выводы и результаты проведенного исследования.

Список литературы содержит 47 наименований.

В приложении представлены решения заданий, предлагаемых к проведению Основного государственного экзамена.

ГЛАВА I. МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ФОРМИРОВАНИЯ АЛГОРИТМИЧЕСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ УЧАЩИХСЯ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ

§ 1. Понятие алгоритмической деятельности

В данном параграфе нами будут рассмотрены основные понятия, связанные с алгоритмической деятельностью.

Существуют различные определения понятия деятельности.

Деятельность – активное взаимодействие с окружающей действительностью, в результате которого живое существо выступает как субъект, целенаправленно воздействующий на объект и тем самым удовлетворяющий свои потребности [18, с.135].

Деятельность – специфически человеческая активность, направленная на познание и преобразование окружающей действительности, ориентируемая на образ будущего результата, регулируемая сознанием, а также опосредующая отношение субъекта к реальной действительности, к обществу[4, с. 172].

Составляющими отдельных деятельностей являются действия.

Действие – процесс, который подчиняется определенной цели – представлению о том результате, который необходимо получить[4, с. 173].

Усвоение определенного материала на уровне применения является выделением соответствующего действия, адекватного усваиваемому содержанию, то есть последовательности операций, из которых состоит действие, и возможность его практического использования. Данная последовательность представляет собой ориентировочную основу действия. Сталкиваясь с конкретной задачей, ученик разворачивает общие правила, формулы, тождества в последовательности операций применительно к условиям этой задачи [4, с. 174].

Учебная деятельность – процесс, направленный на решение различных учебных задач, в результате которого обучаемый овладевает знаниями, умениями и навыками [23, с. 176].

Учебная деятельность – один из основных видов деятельности человека, направленный на усвоение теоретических знаний в процессе решения учебных задач [6].

Алгоритмическая деятельность – учебная деятельность, которая предусматривает пошаговое выполнение указаний алгоритма [6].

Алгоритмическая деятельность – деятельность, целью которой является создание, понимание и преобразование алгоритма, который является и предметом, и непосредственным продуктом этой деятельности [27].

Алгоритмическая деятельность – совокупность действий, которые выполняются по алгоритмическому описанию [33].

Таким образом, под алгоритмической деятельностью будем понимать некую совокупность действий, которые выполняются по алгоритмическому описанию.

Связь учебной и алгоритмической деятельности

Схема 1

Для применения теоретических знаний на практике важно учить учеников перестраивать знания (формулировки теорем, правил, тождества) в форме программ по осуществлению действий – последовательности операций. Если в каждом конкретном случае изучения теории ученик стремится построить такую программу, то можно говорить о сформированности алгоритмической деятельности [4, с. 174].

С понятием алгоритмической деятельности тесно связано понятие алгоритмической культуры.

В педагогическом энциклопедическом словаре алгоритмическая культура понимается как совокупность специфических представлений, умений и навыков, связанных с понятием алгоритма, формами и способами его записи [2].

В теории и методике обучения математике под алгоритмической культурой понимают:

– совокупность специфических «алгоритмических» представлений, умений и навыков, которые на современном этапе развития общества должны составлять часть общей культуры каждого человека и, следовательно, определять целенаправленный компонент общего школьного образования [33, с. 2];

– предписание, определяющее последовательность умственных и/или практических операций по решению задач определенного класса. Алгоритм является как самостоятельным средством обучения, так и частью обучающей программы [29, с. 208];

– совокупность специфических представлений, умений и навыков, связанных с понятием алгоритма, формами и способами его задания [1, с. 3];

Целесообразно выделить три уровня развития алгоритмической культуры учащихся. Воспроизводящий (репродуктивный) уровень характеризуется умением применять готовые алгоритмы. Однако учащиеся не могут формулировать и обосновывать алгоритмы даже с помощью преподавателя. Умение обучаемых применять, а также создавать алгоритмы под руководством преподавателя характеризует высокий уровень их алгоритмической культуры. Для этой цели применяются методы обобщения или аналогии и используются установленные при анализе задачи факты, связи и отношения. Творческий уровень характеризуется способностью обучаемых самостоятельно создавать алгоритмы на основе исследования исходных данных, изменения зависимостей между параметрами или путем обобщения известных им алгоритмов, а также самостоятельность в их обосновании [34].

Составление алгоритма самими учащимися может свидетельствовать о повышении его уровня учебной культуры. Умение учащихся оформить свои рассуждения и весь ход решения задачи в виде таблицы или блок–схемы существенно дисциплинирует мышление, становится необходимым практическим качеством, способствует более быстрому и сознательному овладению алгоритмического языка в будущем. Составление алгоритмов активизирует умственную деятельность школьников и развивает их математические способности.

Кроме того, умение «видеть» алгоритм и работать по нему позволяет избегать сопутствующих проблем: не смешивать шаги и их последовательность при запоминании правил или решении задач [35, с 2].

Алгоритмический подход – это обучение учащихся методу решения задания через применение алгоритма, который описывает этот метод [35, с. 2].

Применение определенной последовательности команд и процедур закладывает элементы алгоритмической культуры. Существует два способа алгоритмического подхода к обучению:

– применение конкретных алгоритмов к решению задач;

– создание алгоритмов для решения классов задач.

В школе желательна как та, так и другая реализации, но в различных пропорциях для различных классов и разных учащихся внутри класса. На одном этапе может преобладать первый подход, на другом – второй. Обучаемый должен обладать знанием некоторых алгоритмов в готовом виде, так как известно, что в мышлении в диалектически противоречивом единстве переплетены его творческие и репродуктивные компоненты. Овладение учащимися творческими умениями представляет собой качественный скачок в их умственном развитии и является результатом количественного накопления более простых репродуктивных умений [35, с.2].

§2. Основные этапы формирования алгоритмической деятельности

Можно выделить два *способа обучения* алгоритмической деятельности:

− ознакомление с готовыми алгоритмами;

− создание проблемной ситуации с целью подвести учащихся к самостоятельному открытию необходимых алгоритмов.

Эти пути не исключают друг друга. Более того, формирование алгоритмической деятельности идёт более успешно, если эти два пути сочетаются.

По словам Л.С. Юневой, в общем случае с педагогической точки зрения гораздо более ценно, когда ученик открывает соответствующие алгоритмы сам (если, конечно, задача для него посильна) или с помощью учителя, а не получает их в готовом виде [35].

Автор предлагает следующие этапы формирования алгоритмической деятельности:

1 этап. Введение алгоритма (актуализация знаний, необходимых для введения и обоснования алгоритма. Открытие алгоритма учащимися под руководством учителя. Формулировка алгоритма. Блок – схема, таблица, список).

2 этап. Усвоение (отработка отдельных операций, входящих в алгоритм и усвоение их последовательности).

3 этап. Применение алгоритма (отработка алгоритма в знакомой и незнакомой ситуациях)[35].

Л.А. Атлуханова выделяет четыре *этапа формирования алгоритмической деятельности*:

1 этап. Мотивация «открытия» алгоритма. Основная цель этого этапа –

актуализация у учащихся знаний, необходимых и достаточных для составления рассматриваемого алгоритма, показ необходимости его введения для решения практических задач;

2 этап. Введение алгоритма. Цель этапа – подведение учащихся к «открытию» нужного алгоритма, его формулировка.

3 этап. Усвоение алгоритма. Главная цель этого этапа состоит в отработке операций, входящих в алгоритм, и усвоение их последовательности.

4 этап. Применение алгоритма. Цель – отработка алгоритма в знакомых и незнакомых ситуациях [1].

Н.Л. Стефановой в пособии «Методика и технология обучения математике» выделяются следующие основные этапы работы по введению правил, их применению и по обучению решению алгоритмических задач:

1 этап. Выполнение учителем логико– математического анализа правила;

2 этап. Разработка алгоритмического предписания (в случае необходимости);

3 этап. Разработка и проведение этапа актуализации знаний, необходимых для обоснования необходимости и введения алгоритма;

4 этап. Введение алгоритмического предписания (обучающий этап);

5 этап. Этап закрепления (применение введенного алгоритма при решении типовых задач) [26].

В нашей работе при формировании алгоритмической деятельности мы будем использовать четыре этапа на основании этапов выделенных Л.А. Атлухановой [1]:

1. Этап, направленный на то, чтобы мотивировать учащихся на формирование алгоритмической деятельности.

2. Этап, нацеленный на открытие алгоритма в процессе алгоритмической деятельности.

3. Этап усвоения алгоритма в процессе алгоритмической деятельности.

4. Этап применения алгоритма в процессе алгоритмической деятельности.

§3. Методические особенности формирования алгоритмической деятельности при работе с определениями, теоремами, правилами и предписаниями

Е.И. Лященко пишет, что для того чтобы правильно организовать работу учащихся по овладению алгоритмами школьного курса математики, учителю необходимо овладеть умением выполнять логико – математический анализ алгоритмов (правил).

Математический анализ алгоритмов (правил) состоит в установлении математической основы данного правила, то есть тех базовых математических положений, которые позволяют построить именно такое правило (они обычно называются обосновывающими знаниями).

Логический анализ предполагает:

– проверку наличия характеристических свойств алгоритма;

– выделение последовательностей операций и логических условий;

– установление связей с другими знаниями [15].

Н.Л. Стефанова отмечает, что логико–математический анализ есть установление математической основы, т. е. базовых математических положений. Если в результате логико–математического анализа правила учитель убеждается в том, что правило не является алгоритмом, то целесообразно (с учетом уровня подготовленности учащихся класса) разработать предписание выполнения того или иного действия, понятное каждому ученику. Также целесообразно проводить работу в этом направлении при обучении алгебре, алгебре и началам анализа. Основной разработки предписаний может служить, например, типовая задача темы «Тождественные преобразования», решение уравнения определенного типа и т. д. Если на начальной стадии обучения к составлению алгоритмов желательно привлекать учащихся по мере возможности, то в старших классах это делать необходимо с целью формирования определенного исследовательского умения, именно умения открывать общий метод [26].

Любой алгоритм можно считать правилом, однако не всякое правило является алгоритмом. В начальном курсе математики многие алгоритмы сформулированы в лаконичной форме в виде правил, не выделяя последовательность шагов и операции. Поэтому учащиеся, безошибочно формируя правило, часто затрудняются применять его в различных учебных ситуация [1].

Кроме того, Е.И. Лященко в книге «Лабораторные и практические работы по методике преподавания математики» утверждает, что правило представляет собой «свернутый» алгоритм. Отдельные шаги его являются блоками (системами операций в «сжатом» виде); некоторые операции, необходимые на начальном этапе формирования метода, вообще не содержатся в формулировке правила.

Правила в учебниках выражаются формулами и формулировками на естественном языке. Использование правил имеет ту же цель, что и алгоритмов: формирование общих методов решения класса однотипных задач [15].

Н.В. Садовников в монографии «Методическая подготовка учителя математики в педвузе в контексте фундаментализации образования» [28] пишет, что логико–математический анализ правила позволяет верно осуществить отбор материала для работы с учащимися по овладению правилом. Автор предлагает провести такой анализ для правила умножения десятичных дробей, которые изучаются в пятом классе.

Для того, чтобы умножить одну десятичную дробь на другую, надо выполнить умножение, не обращая внимание на запятые, а затем в результате отделить справа запятой столько цифр, сколько их стоит после запятой в обоих множителях вместе.

Данное правило имеет приписку: если в произведении получается меньше цифр, чем надо отделить запятой, то впереди пишут несколько нулей.

Если проверить это правило на наличие характеристических свойств алгоритма, то можно сделать вывод, что оно явно обладает свойствами массовости и результативности. Из формулировки видна последовательность элементарных шагов при умножении десятичных дробей. Но в явном виде они не выделены, поэтому данное правило не обладает свойством дискретности шагов. Получается, что это правило не является (в данной формулировке) алгоритмом. А для того чтобы сделать это правило алгоритмом, необходимо его сформулировать так, чтобы умножить одну десятичную дробь на другую, надо:

1) подписать их друг под другом также как и при умножении натуральных чисел;

2) выполнить умножение чисел как натуральных, при этом не обращая внимания на запятые;

3) подсчитать общее количество цифр после запятой в обоих множителях вместе (k);

4) сравнить это число с числом цифр, которые получены в произведении (m);

5) если число цифр в произведении больше числа цифр, которые стоят после запятой в обоих множителях вместе ($k< m$), то в произведении справа отделить столько цифр с запятой, сколько их после запятой в обоих множителях вместе (то есть k).

Функциональное назначение алгоритмов и правил одинаковое – формирование общих методов решения класса однотипных задач. Однако методическое назначение различно. Алгоритм разумно использовать на первоначальных этапах формирования действия, так как он дает подробное описание последовательности операций. Правило наиболее удобно применять тогда, когда в основном умение выполнять действие уже сформировано и учащимся не нужно подробное описание операций.

При работе на алгоритмами и правилами в школьном курсе выделяются следующие основные этапы:

1) мотивация изучения алгоритма (правила);

2) введение правила;

3) усвоение правила;

4) применение правила.

М. П. Лапчик в учебном пособии «Обучение алгоритмизации» приводит следующие утверждения:

1. Обучение математике должно строиться так, чтобы, уже начиная с младших звеньев обучения, у учащихся постоянно формировалось представление об алгоритмическом характере методов математики и их приложений к

практике. Это означает, в частности, что в качестве «продукта» решения задачи, в зависимости от ее характера или практического назначения, ученик может получить окончательный результат либо в форме числа, фигуры и пр., либо в форме алгоритмического предписания, которое, в свою очередь, может быть представлено либо на традиционном «аналитическом» языке математики (формула), либо на каком–нибудь другом алгоритмическом языке.

2. Методика преподавания математики в школе должна предусматривать использование там, где это только возможно, наглядных средств описания алгоритмов, в том числе и приближающихся по своим возможностям к реальным алгоритмическим языкам. При этом алгоритмы в обучении могут выступать не только в роли «искомых» результатов обучения математике, но и как вспомогательные средства обучения: схемы решения некоторых типов задач, определение с помощью алгоритмов новых понятий и т. п.

3. В процессе обучения математике у учащихся должно быть сформировано (интуитивное) понятие алгоритма, развиты навыки построения и обоснования алгоритмов. Этой цели могут служить самые разнообразные средства алгоритмических описаний – начиная с примитивных и кончая формализованными языками.

4. Понятие об алгоритме, языках алгоритмических описаний и методах организации таких описаний – не только средства повышения эффективности обучения математике, но и цель обучения. Это положение определяется требованием научно–технической революции к современному образованию.

5. Проведение алгоритмической линии в обучении математике в школе не требует радикального, специально вытекающего из этой педагогической задачи пересмотра содержания обучения математике.

Таким образом, алгоритмическая линия в курсе математики – это определенным образом ориентированный содержательно – методический компонент обучения, пронизывающий все обучение математике и получающий наибольшее развитие при изучении практических методов алгоритмизации [13].

Л.В. Виноградова в пособии «Методика преподавания математики в средней школе» [4] утверждает, что с точки зрения теории деятельности упражнение является задачей и для ее решения имеется ориентировочная основа. Упражнение нужно для усвоения способа действия, отдельных операций действия и доведения действий до свернутой формы – до операции. В таком понимании упражнение является частным случаем задачи, которая используется при закреплении и применении [4, с. 108].

В школьном курсе математики закреплению подлежат определения понятий, теоремы, правила и предписания по выполнению определенных действий.

При закреплении определений необходимо рассчитать упражнения на выделение существенных понятий, на их запоминание, на установление взаимосвязей между существенными свойствами, на усвоение терминологии, на установление объема понятия, на узнавание понятия, на выделение некой «зоны поиска» понятия, на получение следствий из имеющихся свойств понятий, а также раскрытие взаимосвязей с другими понятиями [4, с. 108].

Рассмотрим закрепление на примере определения трапеции в теме «Четырехугольники», который состоит из двух этапов:

Первый этап закрепления определения трапеции происходит в процессе получения и использования следствий из понятия трапеции:

1) Сумма углов, прилежащих к боковой стороне трапеции, равна 180°;
2) Противолежащие углы не равны, но диагональ выделяет в них равные углы;

Второй этап закрепления осуществляется при доказательстве свойств углов и диагоналей равнобедренной трапеции (прямое и обратное утверждения), решения задач, которые связаны с равнобедренной трапецией, а также решение задач на построение трапеции по ее элементам с помощью циркуля и линейки.

При закреплении теорем упражнения способствуют анализу формулировки и ее усвоению, запоминанию, уяснению области применения теоремы, получению следствий из теорем и установлению взаимосвязей с различными теоремами.

Рассмотрим закрепление на примере следующей теоремы: в равнобедренном треугольнике медиана, проведенная к основанию, является биссектрисой и высотой.

На первом этапе происходит усвоение формулировки теоремы.

1) Верно ли сформулирована теорема: «Медиана, проведенная к основанию, является биссектрисой и высотой?» Почему?

2) Вставьте пропущенные слова: «В … треугольнике медиана, проведенная …, является … и …».

На втором этапе идет усвоение доказательства теоремы.

1) Какие понятия используются в формулировке теоремы?

2) Какие следствия использовались в процессе доказательства теоремы, например, из факта: «ΔABC равнобедренный»? Ответ: $AB = BC$, $\angle BAK = \angle BCK$.

3) Назовите теоремы, которые использовались при доказательстве данной теоремы. Какова цель их использования?

На четвертом этапе решаются задачи на применение данной теоремы.

При закреплении правил, предписаний отрабатываются отдельные шаги и действие полностью, выясняется область их применения, а также особые случаи их использования [4, с. 109].

Рассмотрим правило решения линейного уравнения. Итак, для того, чтобы решить линейное уравнение:

1) перенеси слагаемые с неизвестными в левую часть уравнения, при этом меняя их знаки;

2) перенеси слагаемые без неизвестного в правую часть уравнения, меняя знаки;

3) приведи подобные члены в обеих частях уравнения;

4) раздели обе части уравнения на коэффициент при x (если он не равен нулю).

Умения и навыки создаются в процессе выполнения упражнений, однако не всякая система приводит к формированию соответствующих умений и навыков [4, с. 109].

При дальнейшей работе будем учитывать следующие методические особенности формирования алгоритмической деятельности:

1. В процессе обучения алгоритмической деятельности у учащихся должно быть сформировано понятие алгоритма, развиты навыки по построению алгоритмов и проверки правильности выполнения алгоритма.

2. Под алгоритмической деятельностью понимается совокупность действий, которые выполняются по алгоритмическому описанию.

3. Выделяют два способа обучения алгоритмической деятельности:

− ознакомление с готовыми алгоритмами;

− создание проблемной ситуации с целью подвести учащихся к самостоятельному открытию необходимых алгоритмов.

4. Обучение математике должно строиться так, чтобы, уже начиная с ранних лет обучения в школе, у учащихся постоянно формировалось представление об алгоритмическом характере методов математики и их приложений к практике.

5. Алгоритмы делятся на три вида: линейный, разветвляющийся и циклический.

6. Обучать учащихся открытию алгоритмов можно:

– в процессе изучения содержания тех или иных фактов, процессов, явлений;

– путем обобщения способов решения специально подобранных задач;

– путем анализа конкретных ситуаций;

– на основе общих предписаний;

– на основе установления аналогов в сходных ситуациях.

7. Применение заданий алгоритмического характера – не только дидактическое средство повышения эффективности обучения решению уравнений и неравенств, но и важная цель обучения в целом.

8. Проведение алгоритмической линии в обучении математике в школе не требует радикального, специально вытекающего из этой педагогической задачи пересмотра содержания обучения математике.

9. Все алгоритмы характеризуются одним общим свойством, то есть при их выполнении переход от одного указания к следующему независимо от конкретных начальных данных и от получаемых промежуточных результатов всегда происходит в порядке естественного возрастания номеров указаний.

10. Алгоритм может быть задан в виде таблицы, схемы, правила, формулы, определения, описания.

11. Методика преподавания математики в школе должна предусматривать использование там, где это только возможно, наглядных средств описания алгоритмов, в том числе и приближающихся по своим возможностям к реальным алгоритмическим языкам.

12. Понятие об алгоритме, языках алгоритмических описаний и методах организации таких описаний – не только средства повышения эффективности обучения математике, но и цель обучения.

13. Любой алгоритм можно считать правилом, однако не всякое правило является алгоритмом.

§4. Классификация алгоритмов и их свойства

Рассматривать алгоритмическую деятельность невозможно без описания понятия алгоритма и рассмотрения основных видов алгоритмов. Заметим, что все эти виды можно успешно изменять в алгоритмической деятельности (при работе с правилами, теоремами, решениями задач).

Существуют различные трактовки понятия алгоритм.

В толковом словаре С.И. Ожегова сказано, что «алгоритм – это совокупность действий, правил для решения какой – либо задачи» [25].

В толковом словаре Т.Ф. Ефремовой алгоритм понимается как определенная последовательность операций или вычислений [7].

Согласно логическому словарю–справочнику Н.И. Кондакова, «алгоритм– однозначное пошаговое описание (предписание, инструкция, правило, рецепт) чисто механически (в отвлечении от содержательного контроля) выполняемого шаг за шагом, единообразного и опирающегося на конечное множество правил решения любой конкретной задачи данного определенного типа» [11].

В педагогике под алгоритмом понимают:

− предписание, ведущее от варьируемых исходных данных вычислительного процесса (процесса переработки информации) к исходным результатам». Алгоритмизация предполагает использование точного описания на тех или иных искусственных языках [17];

− точное общепринятое описание о выполнении определенной (в каждом конкретном случае) последовательности элементарных операций (из некоторой системы таких операций) для решения любой из задач, принадлежащих к некоторому классу (или типу) [12];

− точное описание последовательности элементарных операций, связанных между собой необходимыми, существенными, устойчивыми и воспроизводимыми причинно – следственными связями, системно обеспечивающими неотвратимое достижение к поставленной цели [32];

В теории и методике обучения математике под алгоритмом понимают:

− понятное предписание, указывающее, какие операции и в какой последовательности необходимо выполнить с данными, чтобы решить задачу определенного типа [26, с. 56];

− правило, последовательность действий (операций), предписание и т.д. (Удовенко Л. Н.) [21].

− совокупность точных указаний о выполнении конечного числа определенных действий для решения любой задачи данного типа (М. П. Лапчик) [13];

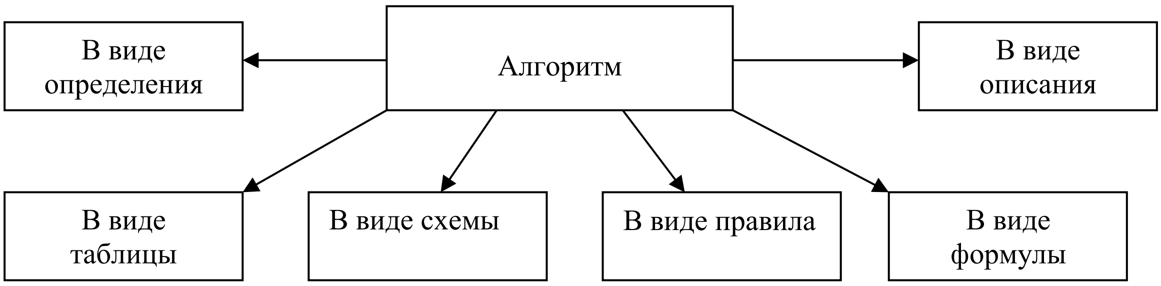
− способ (программа) решения вычислительных и других задач, точно показывающих, как и в какой последовательности получить результат, который однозначно определяется исходными данными (Атлухановой Л. А. и Нурмагомедова Н. М.) [1];

– точное предписание, которое задает вычислительный процесс, называемый в этом случае алгоритмическим (Каратаева Н. Г., Федотова О. Д.) [10];

– способ удержания информации о действиях, обеспечивающих повторяемость процессов перехода от исходного состояния некоторого объекта к конечному, от исходных данных к искомым результатам (Ю. С. Заяц, Щербина) [8].

Способы задания алгоритма

Схема 2



Обучать учащихся открытию алгоритмов можно:

– в процессе изучения содержания тех или иных фактов, процессов, явлений;

– путем обобщения способов решения специально подобранных задач;

– путем анализа конкретных ситуаций;

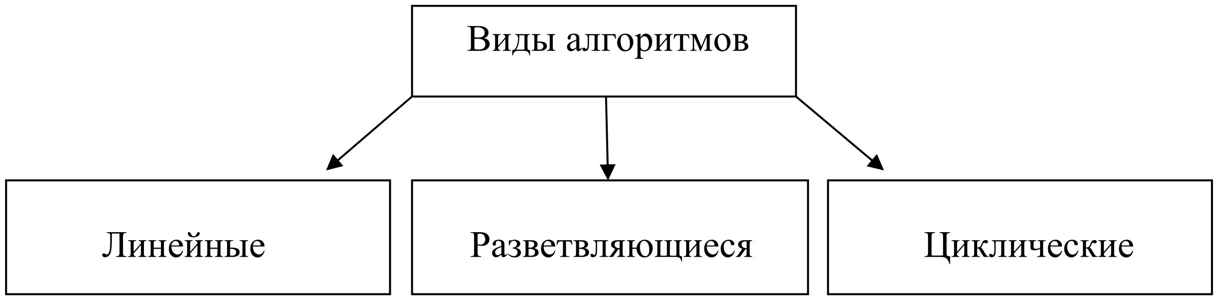
– на основе общих предписаний;

– на основе установления аналогов в сходных ситуациях.

В данном параграфе мы рассмотрим основную классификацию алгоритмов.

Виды алгоритмов

Схема 3

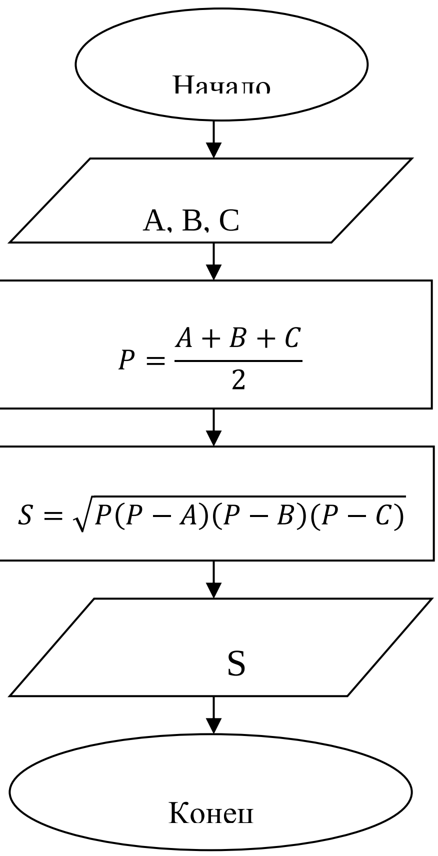


1) *Линейные* алгоритмы (или алгоритмы с простейшей структурой). При выполнении алгоритмов данного типа переход от одного указания к следующему всегда происходит в порядке возрастания номеров данных указаний.

Покажем линейный алгоритм на примере нахождения площади треугольника с помощью формулы Герона (Схема 4):

Структура линейного алгоритма

Схема 4



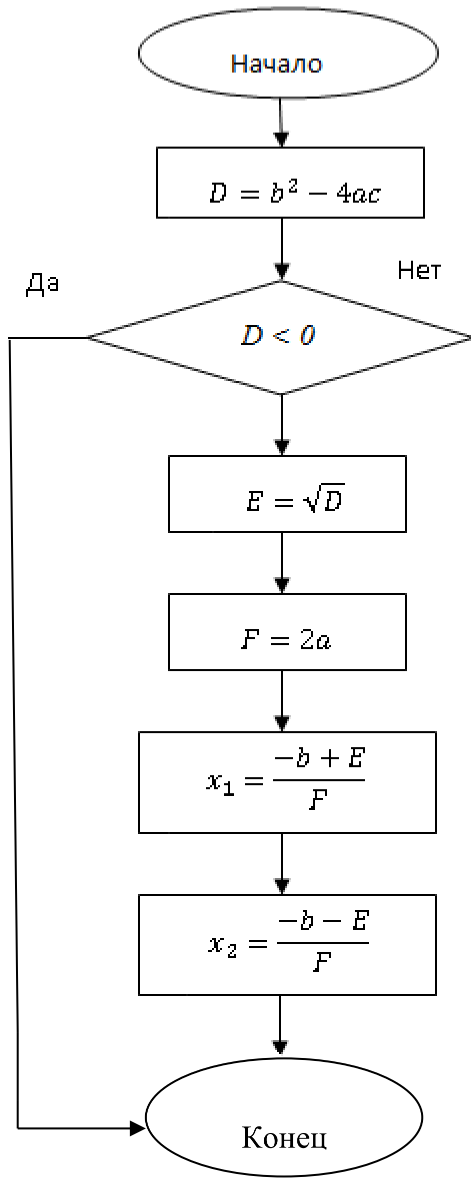
2) *Разветвляющиеся* алгоритмы. В данном типе алгоритмов последовательность выполнения действий является различной в зависимости от начальных данных решаемой задачи [13, с. 47].

Основным признаком данного алгоритма является наличие операций условного перехода, когда происходит проверка истинности некоторого логического выражения (проверяемое условие) и в зависимости от истинности или ложности проверяемого условия для выполнения выбирается та или иная ветвь алгоритма.

Приведем пример данного алгоритма (Схема 5):

Структура разветвляющегося алгоритма

Схема 5

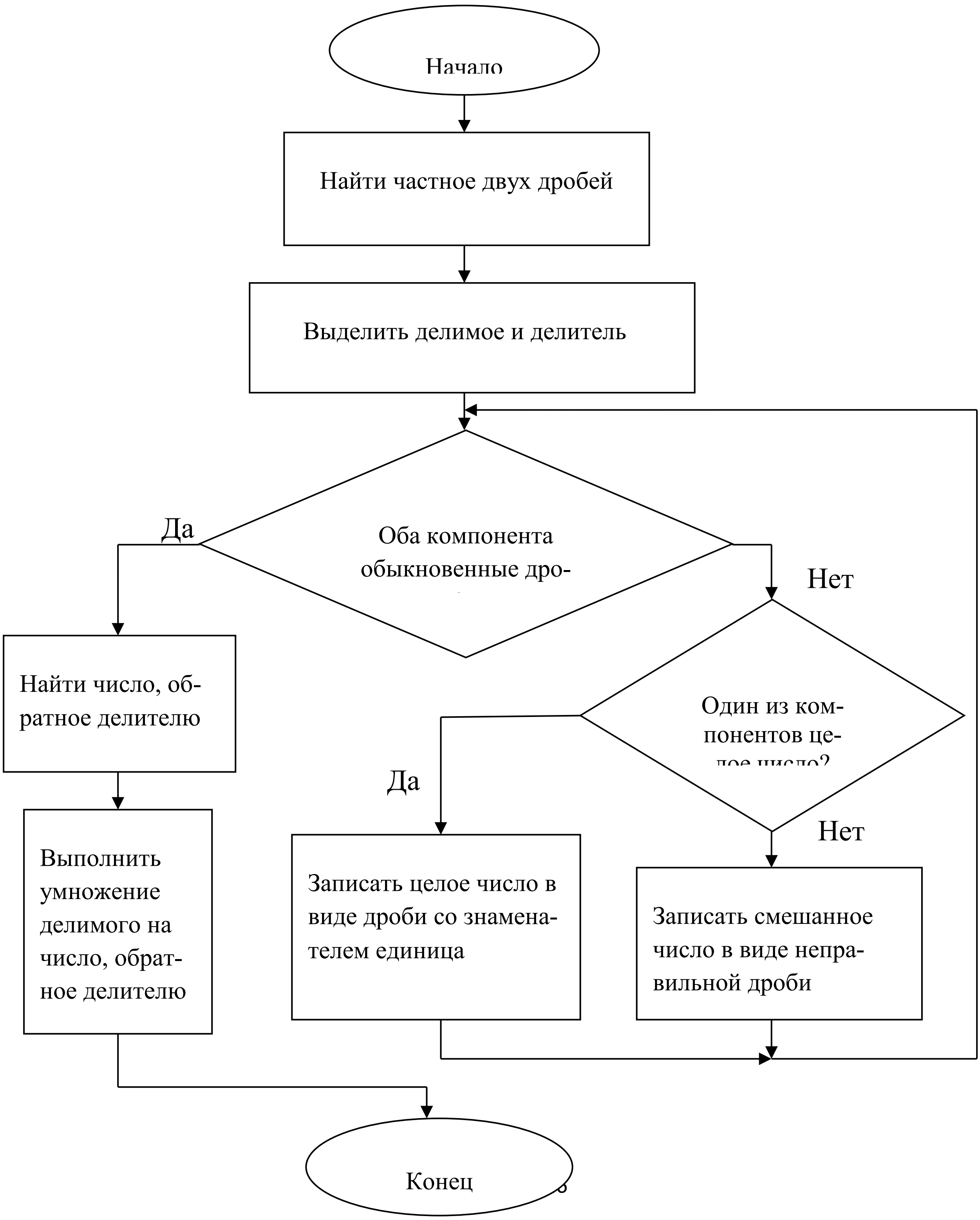


3) *Циклические* алгоритмы. Циклом называется многократно исполняемый участок алгоритма. Соответственно циклическим алгоритмом называется алгоритм, содержащий циклы [47].

Покажем пример циклического алгоритма на основе алгоритмического предписания деления дроби на дробь (Схема 6):

Структура циклического алгоритма

Схема 6



М. П. Лапчик в учебном пособии «Обучение алгоритмизации» выделяет следующие свойства алгоритма[13]:

− Свойство дискретности. Свойство состоит в том, что описываемый процесс должен быть разбит на последовательность отдельных действий. Данное описание в свою очередь делится на указания, образующие определенную прерывную (дискретную) структуру алгоритмического процесса: лишь выполнив требования одного указания, можно начинать выполнение следующего.

− Свойство детерминированности. Данное свойство автор объясняет тем, что одно и то же указание, выполненное разными исполнителями, должно давать одинаковый результат. То есть алгоритмы не должны содержать те указания, смысл которых может восприниматься неоднозначно.

− Свойство массовости. Представляет собой алгоритмические описания, которые обеспечивают решение наиболее широкого класса задач, относящихся к данному типу.

Пример. Решение квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ может быть найдено по формулам:

$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Пользуясь данными формулами, можно описать алгоритм нахождения корней квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$:

1. $D = b^2 - 4ac$

2. $x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$

3. $x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$.

Квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ при условии, что $a = 1$ переходит в уравнение вида $x^2 + bx + c = 0$, решение которого будет вычислено следующим способом:

$$x_{1,2} = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} - c},$$

который приводит к алгоритму вида:

1. $D = \frac{b^2}{4} - c$

2. $x_1 = -\frac{b}{2} - \sqrt{D}$

3. $x_1 = -\frac{b}{2} + \sqrt{D}.$

− Свойство результативности. Смысл данного свойства сводится к тому, что описание только тогда является алгоритмическим, когда, пользуясь этим описанием, исполнитель за определенное число действий в конечном итоге обязательно получит некоторый результат, дающий ответ на поставленный вопрос задания.

Л.А. Атлуханова, Д.М. Нурмагомедов в статье «Проблема формирования алгоритмической культуры у младших школьников средствами УМК «Школа России» [1] рассматривают свойства алгоритма и описывают их следующим образом:

– Дискретность. Алгоритм должен представлять собой процесс решения задачи как последовательности элементарных (или ранее определенных) шагов действий следующих друг за другом. Каждое действие, предусмотренное алгоритмом, исполняется только после того, как закончилось выполнение предыдущего;

– Детерминированность. Каждое действие алгоритма должно быть четким, однозначным и не оставлять исполнителю никакой свободы выбора;

– Результативность. Алгоритм должен приводить к решению любую задачу из данного класса задач за конечное число шагов;

– Массовость. Алгоритм предназначен не для решения одной конкретной задачи, а для решения любой задачи из данного класса однотипных задач [1].

Н. Л. Стефанова и др. в пособии «Методика и технология обучения математике» дают более короткое описание данных свойств [26]:

– Массовость. Допустимость использования для абсолютно любой задачи данного типа.

– Элементарность и дискретность шагов. Отдельные завершенные шаги, которые в состоянии выполнить исполнитель.

– Результативность (пошаговое выполнение указаний при решении заданий всегда приведет к результату).

К основным свойствам алгоритмов И.В. Овчинникова в статье «Алгоритмический подход в обучении: новое – как хорошо забытое старое» [24] относит детерминированность, результативность и массовость. Также отмечает, что алгоритмические предписания наряду с основными свойствами обладают некоторыми особенностями:

– неформализованность действия по нему;

– относительность понятия «элементарная операция». Элементарность той или иной операции устанавливается в результате постоянной диагностики характера и уровня сформированности операций;

– важность выделения в характеристике оптимальности учебного алгоритма дидактических условий;

– основным критерием для предписания алгоритмического типа является надежность его работы;

– назначение предписания алгоритмического типа состоит в управлении с его помощью процессов формирования у обучаемых обобщенных знаний, умений, навыков.

Все алгоритмы характеризуются одним общим свойством: при их выполнении переход от одного указания к следующему независимо от конкретных начальных данных и от получаемых промежуточных результатов всегда происходит в порядке естественного возрастания номеров указаний. После выполнения первого указания обязательно выполняется второе, после второго – третье и т.д. Когда исполнение алгоритма будет закончено, окажется, что все содержащиеся в его описании указания обязательно «участвовали» в работе.

§ 5. Алгоритмические методы решения задач

Огромное количество задач предполагает при своем решении не творческую деятельность, а использование в основном определенного правила, формулы, теоремы, определения [4, с. 49].

К примеру, для решения любого уравнения первой степени нужно известные слагаемые перенести в правую часть, а слагаемые, содержащие неизвестные, в левую часть, привести подобные члены и обе части уравнения разделить на коэффициенты при неизвестном, если он не равен нулю. Если же равен нулю, то поступают известным образом.

Приведенное правило является предписанием алгоритмического типа, или алгоритмом решения линейного уравнения. Правила сравнения чисел, решения линейных, квадратных уравнений, неравенств, действий над числами в различных числовых множествах – все это представляет собой пример алгоритмов [4, с. 49].

Алгоритм может быть задан в виде таблицы, схемы, правила, формулы, определения, описания. Алгоритм может регламентировать действие с различной степенью подробности – свернутости, в зависимости от того, кому он предназначается. Если алгоритм представлен в форме последовательности команд, то это готовая программа действий. Например, для того, чтобы сложить десятичные дроби, нужно: 1) уравнять в этих дробях количество знаков после запятой; 2) записать их друг под другом так, чтобы запятая была записана под запятой; 3) выполнить сложение, не обращая внимание на запятую; 4) поставить в ответ запятую под запятой в данных дробях [3] .

Если алгоритм дан в виде формулы, таблицы, правила или определения, то программы нет. Ее необходимо создать решающему задачу. Возьмем в качестве примера определение решения системы неравенств с переменной как значение переменной, при котором каждое неравенство системы обращается в верное числовое неравенство. Определение представляет следующие шаги решения неравенств: 1) решить каждое неравенство; 2) найти пересечение полученных множеств.

Алгоритмы разделяются на алгоритмы распознавания и преобразования. Признаки делимости, просмотренные ранее алгоритмы подведения под определение и под понятие представляют собой примеры алгоритмов распознавания. Алгоритмы же по применению формул являются алгоритмами преобразования. При применении конкретной формулы, например, квадрата суммы двух чисел, сначала происходит узнавание формулы, доказательство того, что выбор данной формулы сделан правильно, а затем производится преобразование, то есть актуализация формулы и использование ее по шагам. Описанная деятельность состоит из следующих шагов: 1) найти первый член двучлена; 2)найти второй член двучлена; 3)возвести первый член двучлена в квадрат; 4) составить произведение этих членов двучлена; 5) удвоить результат предыдущего шага; 6) возвести второй член двучлена в квадрат; 7) результаты третьего, пятого и шестого шагов сложить.

Большое число различных правил в школьных учебниках математики сообщается учащимся в форме алгоритма в выделенной последовательности шагов.

Проблема составления алгоритмов связана с рядом важнейших проблем обучения математике, а именно применение теоретических знаний на практике и развитие алгоритмического мышления. Алгоритмическим мышлением называется особый аспект культуры мышления, который характеризуется умением составлять и использовать различные алгоритмы.

Составлению и выделению алгоритмов нужно специально обучать.

При использовании готовых алгоритмов разумно пользоваться компактным методом (Я.И. Груденов). Суть метода заключается в том, что алгоритм (правило) произносится по частям, на которые оно разбито по смыслу, и каждая операция выполняется после произнесения соответствующего текста. Таким образом обеспечивается сознательное усвоение соответствующего правила. Компактный метод противопоставляется раздельному, когда произнесение правила полностью и его применение следуют друг за другом.

Вторая рекомендация по пользованию алгоритмов вытекает из положений теории деятельности. А заключается она в требовании проведения всех операций, которые содержатся в алгоритме во внешнем плане и в развернутой форме.

Л.А. Атлуханова и Д.М. Нурмагомедов в статье «Проблема алгоритмической культуры у младших школьников средствами УМК «Школа России» [1] пишут, что кроме алгоритмов для нахождения общего способа решения задачи класса однотипных задач на практике часто используются правила, которые напоминают собой свернутые алгоритмы. Обычно в правилах четко не выделяются шаги алгоритма или же не задается строгая их последовательность, приводящая к решению задачи (в этом смысле они не обладают свойствами детерминированности и дискретности).

Выводы по первой главе

Сформулируем основные выводы и полученные результаты по первой главе:

1. Рассмотрены основные понятия, связанные с алгоритмической деятельностью. По результатам анализа различной методической, а также психолого –педагогической литературы определено, что под алгоритмической деятельностью учащихся понимается совокупность действий, которые выполняются по алгоритмическому описанию.

2. Рассмотрены основные этапы по формированию алгоритмической деятельности. Определено, что в качестве данных этапов выделены: 1) этап, направленный на то, чтобы мотивировать учащихся на формирование алгоритмической деятельности; 2) этап, нацеленный на открытие алгоритма в процессе алгоритмической деятельности; 3) этап усвоения алгоритма в процессе алгоритмической деятельности; 4) этап применения алгоритма в процессе алгоритмической деятельности.

3. Представлены методические особенности формирования алгоритмической деятельности на уроках математики при работе с определениями, тео-

ремами, правилами и предписаниями. Сделан вывод о том, что алгоритмическая линия в курсе математики – это определенным образом ориентированный содержательно – методический компонент обучения, пронизывающий все обучение математике и получающий наибольшее развитие при изучении практических методов алгоритмизации.

4. Выделены основные классификации алгоритмов, свойства алгоритмов. Выявлено, что все алгоритмы характеризуются одним общим свойством, то есть при их выполнении переход от одного указания к следующему независимо от конкретных начальных данных и от получаемых промежуточных результатов всегда происходит в порядке естественного возрастания номеров указаний.

5. Рассмотрены алгоритмические методы решения задач.

ГЛАВА II. ФОРМИРОВАНИЕ АЛГОРИТМИЧЕСКОЙ ДЕЯТЕЛНОСТИ УЧАЩИХСЯ ПРИ ОБУЧЕНИИ УРАВНЕНИЯМ И НЕРАВЕНСТВАМ В КУРСЕ АЛГЕБРЫ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ

§ 6. Система упражнений и требования к системе упражнений

На основе анализа соответствующей литературы, личного педагогического опыта были выделены принципы, которые необходимы при выполнении системы упражнений. По этим принципам разработаны системы упражнений, которые будут применяться при их составлении в следующих параграфах.

1) Принцип систематичности. Проанализировав процесс познания, исходя из этого принципа, можно выделить следующие этапы при изучении нового материала – понятий, теорем, правил: изучение понятия, теоремы, правила как отдельно взятого факта; установление связей между вновь изученным фактов и ранее изученным материалом, включение нового в различные системы изученного; систематизация накопленного материала с учетом вновь изученного факта [4, с. 109].

В соответствии с этими этапами, все упражнения можно разделить на три вида: упражнения на изучение отдельных фактов изолированно от ранее изученного; упражнения, связывающие новый факт с ранее изученным, позволяющие рассматривать новый факт как элемент других систем и, в конечном счете, упражнения на систематизацию изученного материала [4, с. 110].

2) Принцип последовательности. Данный принцип лежит в основе составления программ и написания учебников. При составлении и подборе систем упражнений он проявляется в том, что упражнения располагаются в порядке возрастания сложности, то есть от менее сложного к боле сложному, от менее трудного к более трудному или же от более известного к менее известному. При этом в предлагаемых упражнениях производится различная вариация несущественного. Рассмотрим, к примеру, что может и должно варьироваться при изучении формулы разности квадратов двух выражений: это и обозначение переменных и наличие различных коэффициентов в выражениях, состав каждого выражения, порядок написания компонента вычитания и

т.д. При этом стоит придерживаться традиционной рекомендации: при переходе от одного упражнения к другому добавлять шаги решения следует постепенно, то есть по одному. «По одной трудности за раз», – как говорил К.Д. Ушинский. Это нужно для того, чтобы при выполнении упражнений не требовалось существенных обобщений, значительных скачков мысли, на которые способны не все учащиеся. Система упражнений по отмеченному правилу может быть следующей: *а*) $a^2 - b^2$; *б*) $x^2 - y^2$; *в*) $x^4 - y^2$;

г) $4a^2 - b^2$; *д*) $16a^2 - 36b^2$; *е*) $16a^2 - 36b^6$; *ж*) $a^4b^2 - d^2e^6$; *з*) $16a^4b^2 - 25c^6d^2$ [4, с. 114].

3) Принцип прочности. Принцип состоит в наличии однотипных упражнений. По данным психологов, чтобы у учащихся произошло самостоятельное обобщение, в некоторых случаях нужно более ста однотипных упражнений. У более сильных учащихся такое обобщение может происходить «с места», после решения единственного упражнения [4, с. 115].

4) Педагогический принцип сознательности.

Просмотрим некоторые особо важные психологические аспекты выполнения упражнений, которые влияют на сознательность усвоения изучаемого материала.

В теории поэтапного формирования умственных действий, которые разработаны П.Я. Гальпериным и Н.Ф. Талызиной [Депман И.Я. Рассказы о математиках, Л., 1982] доказывается важность выполнения действий на первичное закрепление определений, правил, теорем развернуто, то есть без пропусков отдельных операций в материализованной и громкоречевой формах, которые должны предшествовать действиям в уме [4, с. 118].

Для того, чтобы помочь учащемуся сознательно усвоить материал, чтобы научить ученика, тем более не очень способного к математической деятельности, учителю необходимо представить себе то умственное действие, которому он хочет научить ученика в полном объеме, без пропусков каких–либо операций, так как пропуски отрицательно сказываются на сознательном восприятии умственных действий. Обратной стороной полноты является свернутость действия, пропуск какой–либо умственной операции. Все указанные операции при закреплении действий необходимо выполнять во внешнем плане, то есть делая записи и в громкоречевой форме, а именно комментируя записи [4, с. 118].

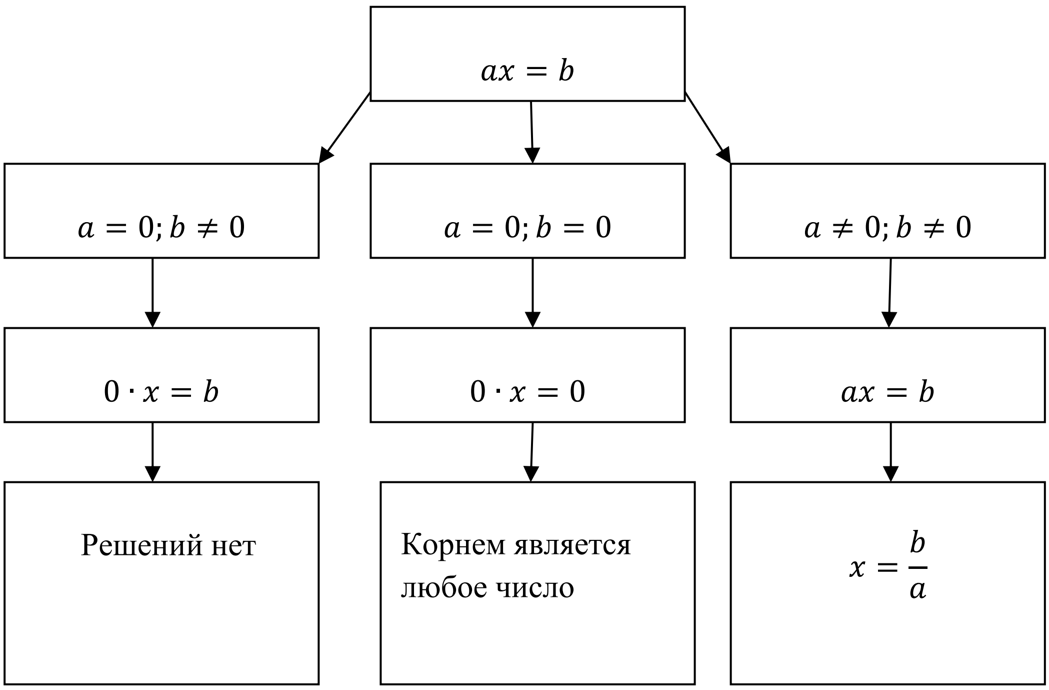
§7. Алгоритмическая деятельность при решении линейных уравнений и неравенств

В данном параграфе мы рассмотрим различные типы линейных уравнений и неравенств, покажем на конкретных примерах. Для каждого примера будем рисовать либо блок–схему алгоритма его решения, либо прописывать шаги алгоритма.

Дадим определение линейного уравнения с одной переменной в виде схемы и приведем алгоритм решения уравнения данного типа:

Схема определения линейного уравнения с одной переменной

Схема 7



1) Линейные уравнения и неравенства с одной переменной.

Основная цель уравнений и неравенств данного типа – систематизировать и обобщить сведения о решении линейных уравнений и неравенств с одной переменной, выработать умение решать их при помощи определенных шагов алгоритма. В примерах 1) – 3) учащиеся знакомятся с некоторыми специальными приемами решения линейных уравнений. Примеры 4) – 6) знакомят учащихся с решением неравенств и систем неравенств методом интервалов.

Пример 1. Найдите корни уравнения $2 - 3(2x + 2) = 5 - 4x$.

Решение.

1. Перенесем слагаемые в левую часть: $2 - 3(2x + 2) - 5 + 4x = 0$;

2. Раскроем скобки: $2 - 6x - 6 - 5 + 4x = 0$;

3. Приведем подобные слагаемые, получим: $-2x - 9 = 0$;

4. Найдем корень уравнения: $x = -4{,}5$;

5. Ответ: $= -4{,}5$ [20].

Пример 2. Решите уравнение $x + 7 - \frac{x}{3} = 3$.

1. Приведем подобные слагаемые, получим: $\frac{2}{3}x = -4$;

2. Домножим обе части на уравнения на 3: $2x = 12$;

3. Найдем корень: $x = -12$;

4. Ответ: –6 [38].

Пример 3. Решите уравнение $x - \frac{x}{12} = \frac{55}{12}$.

Решение.

1. Домножим правую и левую части уравнения на 12: $12x - x = 55$;

2. Приведем подобные слагаемые: $11x = 55$;

3. Разделим обе части уравнения на число 11: $x = 5$;

4. Ответ: 5 [38].

Пример 4. Решить неравенство $5(14x - 2) + \frac{1}{4}(12 - 4x) \geq 3$.

Решение.

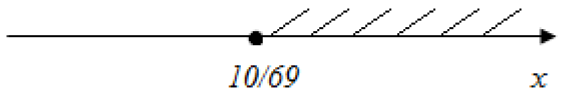
1. Раскроем скобки: $70x - 10 + 3 - x \geq 0$;

2. Приведем подобные слагаемые: $69x - 7 \geq 3$;

3. Преобразуем линейное неравенство, получим: $69x \geq 10$;

4. Разделим обе части неравенства на 10: $x \geq \frac{10}{69}$;

5. Покажем решение неравенства на координатной прямой:



6. Ответ: $x \in \left[\frac{10}{69}; +\infty\right)$ [42].

Пример 5. Решить неравенство $\frac{4x-1}{2} - x \geq 3x + 2$.

Решение.

1. Домножим правую и левую части неравенства на 2, получим:

$2x - 1 \geq 6x + 4$;

2. Перенесем свободные члены уравнения в правую часть, а коэффициенты при неизвестной в правую: $2x - 6x \geq 4 + 1$;

3. Разделим обе части уравнения на (–4): $-4x \geq 5 \ | \div (-4)$;

4. Получим: $x \leq -\frac{5}{4}$;

5. Ответ: $x \in (-\infty; -\frac{5}{4}]$ [37].

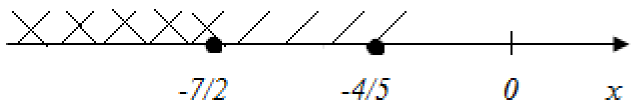
Пример 6. Решить систему неравенств $\begin{cases} 2x - 3 \geq 0, \\ -3x + 11 > 0. \end{cases}$

Решение.

1. Перенесем свободные члены неравенств в правую часть: $\begin{cases} 2x \geq 3 \\ -3x > -11 \end{cases}$;

2. Решим систему неравенств $\begin{cases} x \geq \frac{3}{2}, \\ x < \frac{11}{3} \end{cases}$;

3. Покажем решение системы на координатной прямой:



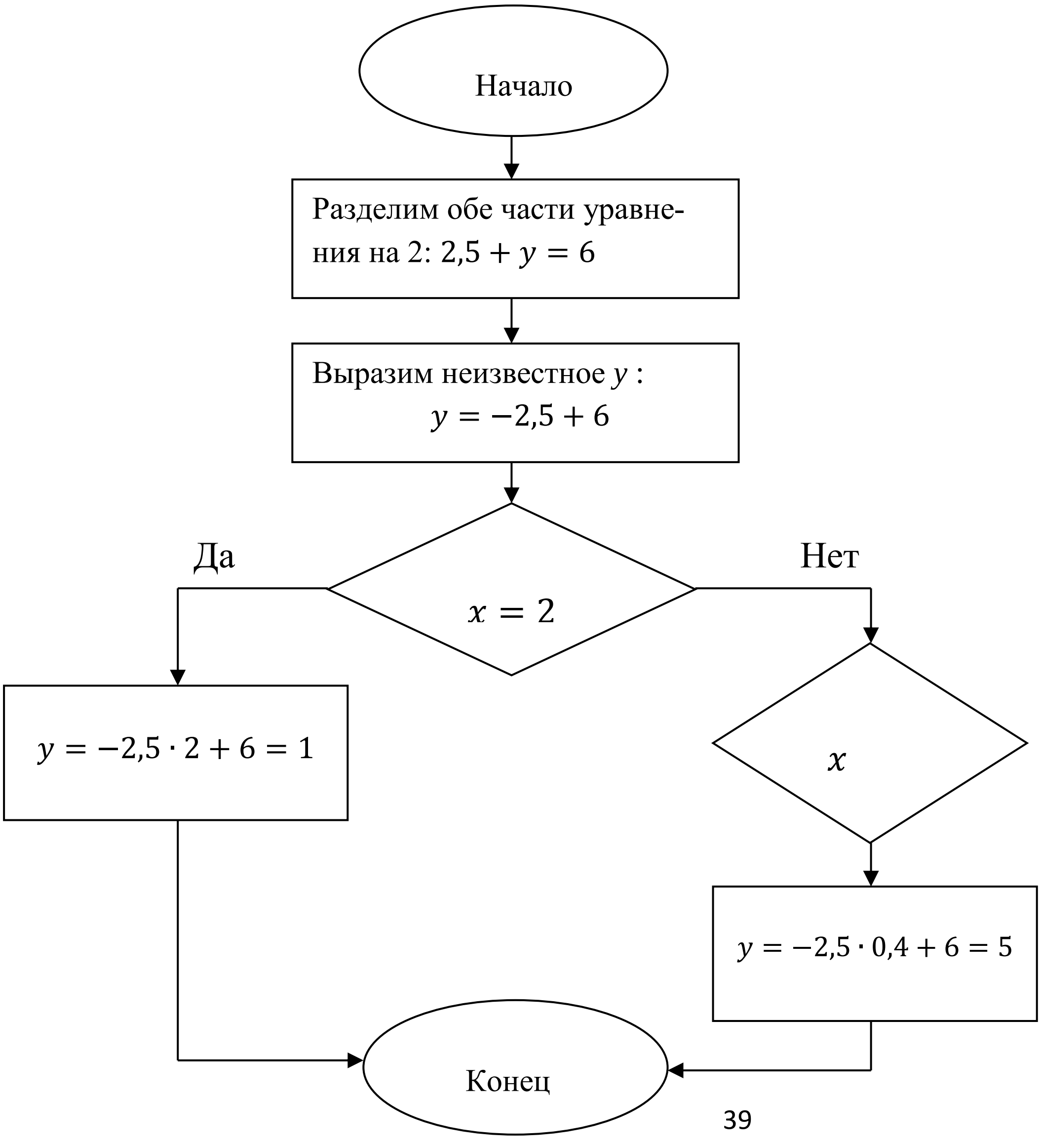
4. Ответ: $x \in (-\infty; -\frac{7}{2}]$ [42].

2) Линейные уравнение и неравенства с двумя переменными.

Основной целью данного типа является систематизация и обобщение сведений о решении рациональных уравнений и неравенств с двумя переменными, выработка умения решать их при помощи определенных шагов алгоритма, а также блок–схем. Пример 7) представляет собой разветвляющийся алгоритм, показывает решение линейного уравнения с двумя переменными. Пример 8) иллюстрирует способ решения систем уравнений с двумя переменными. Решение неравенств с двумя переменными показано на примерах 9), 10). Сведения о графиках с двумя переменными в данных примерах используются при иллюстрации множеств решений некоторых простейших неравенств с двумя переменными и их системы.

Пример 7. Решить уравнение $5x + 2y = 12$.

Решение.



Ответ: пары чисел (2;1), (0,4;5) – решения уравнения $5x + 2y = 12$. Оно имеет бесконечно много решений [41].

Пример 8. Решить систему уравнений способом подстановки $\begin{cases} y - 2x = 1, \\ 6x - y = 7. \end{cases}$

Решение.

1. Выразим из первого уравнения переменную y и подставим во второе:

$\begin{cases} y = 1 + 2x, \\ 6x - 1 - 2x = 7 \end{cases};$

2. Приведем подобные члены во втором уравнении, получим: $\begin{cases} y = 1 + 2x, \\ 4x = 8 \end{cases} => \begin{cases} y = 1 + 2x \\ x = 2 \end{cases};$

3. Подставим полученный корень $x = 2$ в первое уравнение и найдем переменную y: $\begin{cases} x = 5 \\ x = 2 \end{cases};$

4. Ответ: (2;5) [43].

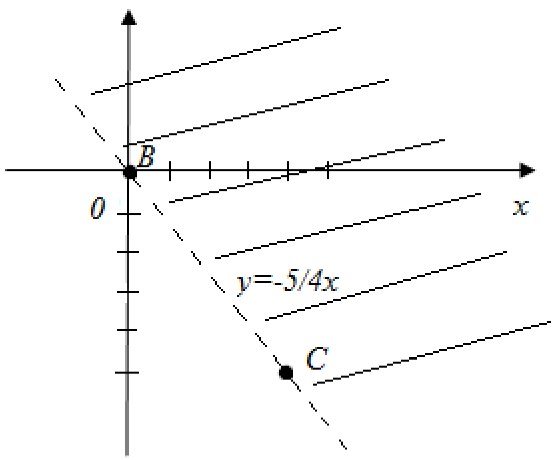
Пример 9. Решить неравенство $5x + 4y > 0$.

Решение.

1. Выразим переменную y: $y = -\frac{5}{4}x$;

2. Построим график по двум точкам, через которые проходит прямая, например, $B(0;0)$ и $C(4;-5)$.

Так как неравенство в этом примере у нас строгое, то координаты точек самого графика прямой не будут являться решением исходного неравенства:



3. Ответ: координаты x и y любой точки из закрашенной области являются решениями данного неравенства [45].

Пример 10. Решить графически систему $\begin{cases} x + y - 1 \leq 0, \\ y - x - 1 \leq 0. \end{cases}$

Решение.

1. Выпишем уравнения, соответствующие неравенствам и найдем координаты:

$x + y - 1 = 0;$

x	0	1
y	1	0

$y - x - 1 = 0;$

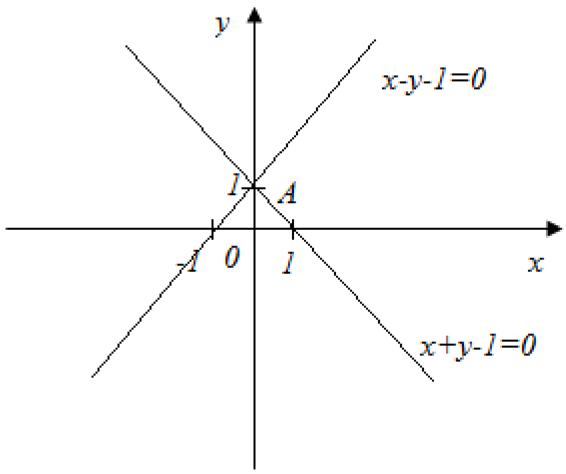
x	0	-1
y	1	0

2. Определим знаки в полуплоскостях. Выберем точку (0;0):

$0 - 0 - 1 \leq 0$, т.е. $y - x - 1 \leq 0$ ниже прямой;

$0 + 0 - 1 \leq 0$, т.е. $x + y - 1 \leq 0$ ниже прямой;

3. Изобразим полученные прямые на координатной плоскости:



4. Ответ: пересечением двух полуплоскостей является угол с вершиной в точке $A(0;1)$. Эта неограниченная область является решением исходной системы неравенства [45].

§ 8. Алгоритмическая деятельность при решении квадратных уравнений и неравенств

В данном параграфе мы рассмотрим различные типы квадратных уравнений и неравенств, покажем на примерах. Для каждого примера будем прописывать шаги алгоритма.

Покажем алгоритм нахождения корней квадратного уравнения в форме таблицы:

Таблица 1

D	Квадратное уравнение	$ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$
$b^2 - 4ac > 0$	Уравнение имеет два различных корня	$b < 0, c > 0$, оба корня положительные; $b > 0, c > 0$, оба корня отрицательные; $b < 0, c < 0$, корни разных знаков; положительный корень больше абсолютной величины отрицательного корня; $b > 0, c < 0$, положительный корень меньше абсолютной величины отрицательного корня;
$b^2 - 4ac = 0$	Уравнение имеет два равных между собой корня	Если $b < 0$, корни положительные; $b > 0$, корни отрицательные; Если $c = 0$, один корень равен 0, другой равен $-b$.
$b^2 - 4ac < 0$	Уравнение не имеет действительных корней	

1) Квадратные уравнения и неравенства с одной переменной.

Основная цель данной типологии – научиться решать квадратные уравнения и неравенства с одной переменной, уравнения и неравенства, приводимые к ним, используя отдельные шаги (действия), формировать при этом алгоритмическую деятельность. Примеры 1), 2) представляют собой уравнения, которые приводятся к квадратным. Примеры 3), 4) – неравенства, приводимые к квадратным. Решения данных неравенств находятся при помощи числовой прямой. Пример 5) – система неравенств с одной переменной.

Пример 1. Решите уравнение $(2x+7)^2 = (2x-1)^2$.

Решение.

1. Раскроем скобки: $4x^2 + 28x + 49 = 4x^2 - 4x + 1$;

2. Приведем подобные слагаемые, получим: $32x = -48$;

3. Найдем корень уравнения: $x = -1{,}5$;

4. Ответ: $-1{,}5$ [44].

Пример 2. Решите уравнение $x^2 + 9 = (x+9)^2$.

Решение.

1. Раскроем скобку: $x^2 + 9 = x^2 + 18x + 81$;

2. Приведем подобные слагаемые, получим $18x = -72$;

3. Найдем корень уравнения $x = -4$;

Ответ: -4 [36].

Пример 3. Решите неравенство $3x^2 - x - \frac{5}{4} \geq 0$.

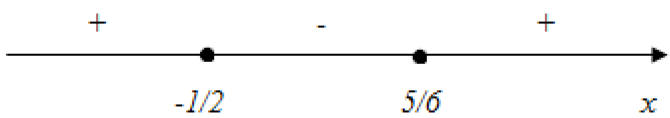
Решение.

1. Найдем дискриминант: $D = 1 + 4 \cdot 3 \cdot \frac{5}{4} = 16$, $D > 0$;

2. Найдем значения, при которых происходит смена знака: $x = \frac{1 \pm 4}{6}$ => $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{5}{6}$;

3. Разложим многочлен на множители, получим: $3\left(x + \frac{1}{2}\right)(x - \frac{5}{6}) \geq 0$;

4. Покажем решение данного неравенства на координатной прямой:



5. Ответ: $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right] \cup [\frac{5}{6}; +\infty)$ [45].

Пример 4. Решить неравенство $x^2(-x^2 - 100) \leq 100(-x^2 - 100)$
Решение.
1. перенесем множители из левой части в правую:
$x^2(-x^2 - 100) - 100(-x^2 - 100) \leq 0$;

2. вынесем за скобки общий множитель, получим

$(-x^2 - 100)(x^2 - 100) \leq 0;$

3. умножим на (-1):

$-(x^2 + 100)(x^2 - 100) \leq 0 \,|\cdot (-1);$

$(x^2 + 100)(x^2 - 100) \geq 0;$

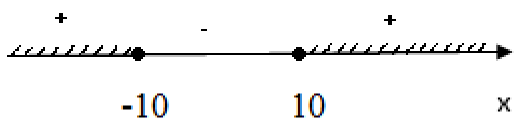
4. найдем корни полученного неравенства:

$x^2 + 100 = 0$ или $x^2 - 100 = 0;$

$x^2 = -100$ => решений нет

$x^2 = 100$ => $x = \pm 10;$

5. отметим полученные корни на числовой прямой:



6. Ответ: $(-\infty; -10) \cup (10; +\infty)$ [45].

Пример 5. Решить систему неравенств $\begin{cases} x^2 > 7, \\ 4x > 16, \\ 2x \leq 10. \end{cases}$

Решение.

1. Разделим второе неравенство данной системы на 4, а третье – на 2, получим: $\begin{cases} x^2 > 7, \\ x > 4, \\ x \leq 5 \end{cases}$;

2. Извлечем квадратный корень из первого неравенства: $\begin{cases} x > \sqrt{7} \\ 4 < x < 5 \end{cases}$;

3. Получим решение: $4 < x \leq 5$;

4. Ответ: $(4; 5]$ [45].

2) Квадратные уравнения и неравенства с двумя переменными.

Основная цель данной типологии – научиться решать квадратные уравнения и неравенства с двумя переменными, уравнения и неравенства, приводимые к ним, используя отдельные шаги (действия), формировать при этом алгоритмическую деятельность. Пример 6) – решение системы уравнений с двумя переменными, одно из которых квадратное. Представляет собой систему уравнений, корни которой находятся методом подстановки. Пример 7)

– система неравенств с двумя переменными, одно из которых квадратное. Область решения данной системы находится графически.

Пример 6. Решить систему уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 16, \\ y - x = 4; \end{cases}$

Решение.

1. Выразим переменную y из второго уравнения:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 16, \\ y = 4 + x; \end{cases}$$

2. Подставим его в первое: $\begin{cases} x^2 + (4 + x)^2 = 16, \\ y = 4 + x; \end{cases}$;

3. Раскроем скобку : $\begin{cases} x^2 + 16 + 8x + x^2 = 16, \\ y = 4 + x; \end{cases}$;

4. Приведем подобные слагаемые: $\begin{cases} 2x^2 + 8x = 0, \\ y = 4 + x; \end{cases}$;

5. Вынесем переменную x за скобку: $\begin{cases} x(x + 4) = 0, \\ y = 4 + x; \end{cases}$;

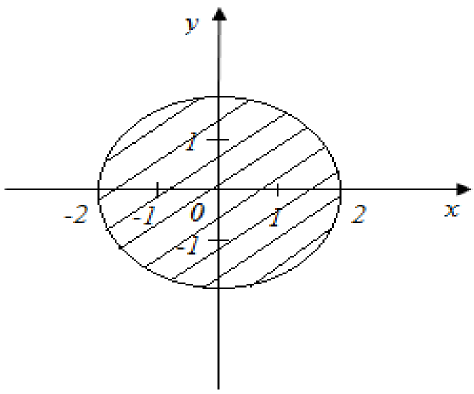
6. Найдем корни уравнения $\begin{cases} x_1 = 0;\ x_2 = -4, \\ y_1 = 4;\ y_2 = 0 \end{cases}$;

7. Ответ: (-4;0), (0;4) [40].

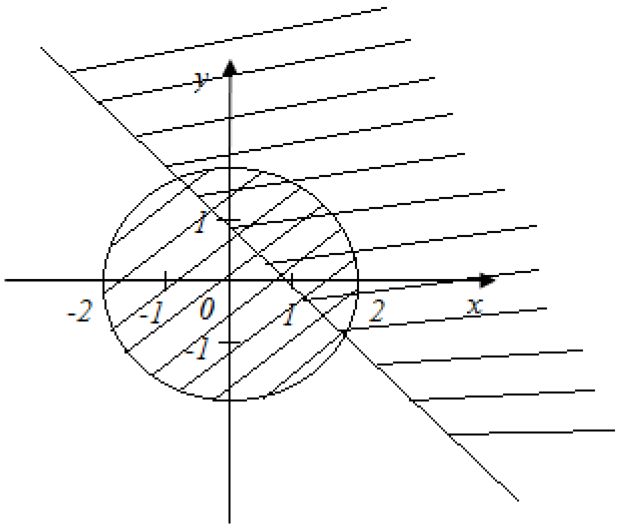
Пример 7. Найти решение системы неравенств: $\begin{cases} x^2 + y^2 \le 4 \\ y < x + 2 \end{cases}$.

Решение.

1. Построим график первого уравнения:



2. Построим график второго уравнения:



3. Ответ: Область пересечения двух неравенств является решением данной системы [43].

§ 9. Алгоритмическая деятельность при решении рациональных уравнений и неравенств

До сих пор мы занимались решением целых уравнений и неравенств, то есть таких, в которых обе части являются целыми выражениями. К целым уравнениям и неравенствам относятся линейные и квадратные уравнения и неравенства. Некоторые же целые уравнения и неравенства можно привести к линейным и квадратным. Примеры таких уравнений и неравенств мы рассматривали в §7 и §8. В данном параграфе мы рассмотрим дробно–рациональные уравнения и неравенства. В таких уравнениях и неравенствах либо одна часть уравнения или неравенства является целым выражением, а другая – дробно–рациональным, либо обе части – дробно–рациональные выражения.

1) Дробно–рациональные уравнения и неравенства, приводимые к линейным.

Пример 1. Решить уравнение $\frac{6}{x+5}=\frac{4}{3-x}$.

Решение.

1. Перенесем все слагаемы в левую часть: $\frac{6}{x+5}-\frac{4}{3-x}=0$;

2. Приведем к общему знаменателю дроби: $\frac{6(3+x)-4(x+5)}{(x+5)(3-x)}=0$;

3. Умножим дробное выражение на $(x+5)(3-x)$ и избавимся от знаменателя: $6(3+x)-4(x+5)=0$;

4. Раскроем скобки и приведем подобные члены уравнения:

$-10x-2=0$;

5. Найдем корень: $x=0{,}2$;

6. Ответ: 0,2 [21].

Пример 2. Решить неравенство $\frac{2x+1}{3x-2}>0$.

Решение.

1. Дробь положительна, когда числитель и знаменатель ее имеют одинаковые знаки, то есть либо оба положительны, либо оба отрицательны. Получим следующую совокупность: $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2x+1>0\\3x-2>0\end{cases}\\ \begin{cases}2x+1<0\\3x-2<0\end{cases}\end{array}\right.$;

2. Решим первую систему, получим: $\begin{cases}x>-\frac{1}{2}\\x>\frac{2}{3}\end{cases}$ => $x>\frac{2}{3}$;

3. Решим вторую систему, получим: $\begin{cases}x<-\frac{1}{2}\\x<\frac{2}{3}\end{cases}$ => $x<-\frac{1}{2}$;

4. В итоге получим следующие решения неравенства: $x<-\frac{1}{2}$, $x>\frac{2}{3}$;

5. Ответ: $x<-\frac{1}{2}$, $x>\frac{2}{3}$ [43].

2) Дробно–рациональные уравнения и неравенства, приводимые к квадратным.

Пример 3. Решить уравнение $\frac{x+1}{x+3}+\frac{10x}{(x-2)(x+3)}=\frac{4}{x-2}$.

Решение.

1. Умножим обе части уравнения на общий знаменатель – выражение $(x-2)(x+3)$, получим целое уравнение вида $(x-2)(x+1)+10x=4(x+3)$;

2. Раскроем скобки и приведем подобные слагаемые: $x^2 + 5x - 14 = 0$;

3. Найдем корень полученного уравнения: $x_1 = 2,\ x_2 = -7$;

4. Число 2 обращает в нуль общий знаменатель $(x-2)(x-3)$, следовательно оно не является корнем исходного уравнения;

5. Ответ: –7 [16].

Пример 4. Решить уравнение $\frac{2x}{x^2+1} > -1$.

Решение.

1. Так как знаменатель дроби в левой части неравенства всегда строго положителен, умножим обе части уравнения на $x^2 + 1$: $2x > -x^2 - 1$;

2. Перенесем все слагаемые в левую часть, получим: $x^2 + 2x + 1 > 0$;

3. Решив квадратное уравнение, получим, что $x = -1$. Полученное число не может быть корнем, так как обращает знаменатель в нуль => $x \neq -1$;

4. Ответ: $x \neq -1$ [43] .

§ 10. Алгоритмическая деятельность при решении иррациональных уравнений и неравенств

Покажем алгоритм решения иррациональных уравнений в неявном виде, путем введения вспомогательных неизвестных.

I. Ввиду решения систем уравнений, которые содержат одно уравнение второй степени и одной первой, можно решать иррациональное уравнение вида $\sqrt{ax^2 + bx + c} = a_1x + b_1$. (1)

1) $y = \sqrt{ax^2 + bx + c}$;

2) решение иррационального уравнения (1) заменяется решением системы

$$\begin{cases} y^2 = ax^2 + bx + c \\ y = a_1x + b_1, \quad y \geq 0, \end{cases}$$

содержащей по одному уравнению первой и второй степени.

Все объясняется на конкретных примерах.

Пример 1. Решить уравнение $\sqrt{x+1} = 5 - x$. (1)

Вводится вспомогательное неизвестное y, положив $y = \sqrt{x+1}$. Уравнение (1) заменяется системой $\begin{cases} y = 5 - x \\ y^2 = x + 1. \end{cases}$ (2)

Исключив из уравнений этой системы неизвестное x, получаем уравнение: $y^2 + y - 6 = 0$, которое имеет корни $y_1 = 2$ и $y_2 = -3$.

Подставив найденные значения y в первое уравнение системы (2), видим, что $x_1 = 3$ и $x_2 = 8$.

Сделав проверку, видим, что данному уравнению удовлетворяет только корень, равный 3, а 8 – посторонний для данного уравнения.

Наличие постороннего корня говорит о том, что решение системы (2) неравносильно решению уравнения (1).

При решении данного уравнения к системе (2) следовало бы добавить неравенство $y \geq 0$, которое указывает на то, что входящий в уравнение квадратный радикал неотрицателен; в таком случае мы бы получили следующую систему: $\begin{cases} y = 5 - x \\ y^2 = x + 1, y \geq 0, \end{cases}$

Относительно этой системы можно утверждать, что ее решение равносильно решению данного уравнения.

Пример 2. Решить уравнение $\sqrt{5-x} + 3 = x$.

Пусть $\sqrt{5-x} = y$, заменим это уравнение системой $\begin{cases} y + 3 = x \\ y^2 = 5 - x,\ y \geq 0, \end{cases}$

в которой решение равносильно решению данного уравнения.

Исключив x из уравнений системы, получаем: $y^2 + y - 2 = 0$.

Отсюда $y_1 = 1$ и $y_2 = -2$.

По требованию, что $y \geq 0$ подходит только корень 1.

Подставив в первое уравнение $y = 1$, получаем, что данное уравнение имеет единственный корень равный $x = 4$.

В качестве полезного применения полученных учащимися навыков по решению систем уравнений, которые содержат одно уравнение первой степени и одно второй, можно решать способом введения вспомогательных неизвестных иррациональные уравнения вида $\sqrt{ax+b}+\sqrt{a_1x+b_1}=c\ \ (a\neq 0, a_1\neq 0)$. (1)

Введением вспомогательных неизвестных u и v, связанных равенствами с неизвестным x $u=\sqrt{ax+b}$ и $v=\sqrt{a_1x+b_1}$, иррациональное уравнение (1) заменяется следующей системой: $\begin{cases} u+v=c \\ u^2=ax+b \\ v^2=a_1x+b_1,\ \ u\geq 0, v\geq 0, \end{cases}$ (2)

Ее решение равносильно решению уравнения (1).

Убрав x из второго и третьего уравнения системы, получаем систему уравнений $\begin{cases} a_1u^2-av^2=a_1b-ab_1 \\ u+v=c, \end{cases}$

которая содержит одно уравнение второй степени и одно первой.

Пример 3. Решить уравнение $\sqrt{2x+5}+\sqrt{x-1}=8$.

Пусть $\sqrt{2x+5}=u, \sqrt{x-1}=v$, тогда $\begin{cases} u+v=8 \\ u^2=2x+5 \\ v^2=x-1, u\geq 0, v\geq 0, \end{cases}$

Где решение данной системы равносильно решению данного уравнения.

Исключив x из второго и третьего уравнений системы, получим систему $\begin{cases} u^2-2v^2=7 \\ u+v=8. \end{cases}$

Далее, подставим u из второго уравнения в первое и получим: $v^2+16v-57=0$, откуда $v_1=3$ и $v_2=-19$.

Значение $v_2=-19$ не удовлетворяет условию $v\geq 0$, следовательно, его мы отбрасываем. А при $v_1=3$ получаем, что $u_1=5$, и условие $u\geq 0$, $v\geq 0$ выполняется. Поэтому $x=v^2+1=10$.

II. Ввиду решения частных случаев систем уравнений, которые содержат два уравнения второй степени, можно решать иррациональные уравнения вида $ax^2+bx+k\sqrt{ax^2+bx+c}=d$. (1)

1) $\sqrt{ax^2+bx+c}=y$;

2) решение уравнения (1) заменяется решением системы $\begin{cases} y^2 + ky = d + c \\ y^2 = ax^2 + bx^2 + c, y \geq 0, \end{cases}$

которая содержит два уравнения второй степени.

Пример 4. Решить уравнение $x^2 - 3x + (x^2 - 3x + 5)^{\frac{1}{2}} = 7$.

Пусть $(x^2 - 3x + 5)^{\frac{1}{2}} = y$, заменим уравнение системой $\begin{cases} y^2 + y - 12 = 0 \\ y^2 = x^2 - 3x + 5, y \geq 0, \end{cases}$

решение которой равносильно решению данного уравнения.

Решаем первое уравнение системы и находим, что $y_1 = 3, y_2 = -4$.

Так как значение $y_2 = -4$ не удовлетворяет условию $y \geq 0$, то его мы отбрасываем.

Подставив первое значение y во второе уравнение системы, получим следующее уравнение: $x^2 - 3x - 4 = 0$, которое имеет корни: 4 и –1.

III. В связи с решением уравнения вида $\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ x \pm y = b \end{cases}$ (1)

Можно решать иррациональные уравнения вида $\sqrt{ax^2 + bx + c} \pm \sqrt{ax^2 + bx + c_1} = d$. (2)

1) вводятся вспомогательные неизвестные u и v, тогда $\sqrt{ax^2 + bx + c} = u$ и $\sqrt{ax^2 + bx + c_1} = v$;

2) уравнение (2) заменяется системой $\begin{cases} u \pm v = d \\ u^2 = ax^2 + bx + c \\ v^2 = ax^2 + bx + c_1, \ u \geq 0, v \geq 0, \end{cases}$

(3), решение которой равносильно решению исходного уравнения.

3) исключаем x из второго и третьего уравнений системы (3) и получаем систему $\begin{cases} u^2 - v^2 = c - c_1 \\ u \pm v = d, \end{cases}$

являющейся системой вида (1).

Данный алгоритм показан на примере.

Пример 5. Решить уравнение $\sqrt{3x^2 + 2x + 3} + \sqrt{3x^2 + 2x + 8} = 5$.

Обозначаем первый радикал через u, а второй через v, получаем систему уравнений $\begin{cases} u+v=5 \\ u^2=3x^2+2x+3 \\ v^2=3x^2+2x+8, u \geq 0, v \geq 0, \end{cases}$

решение которой равносильно решению данного уравнения.

Вычитаем из второго уравнение третье и получаем, что $u^2-v^2=-5$.

Делим это уравнение на первое уравнение системы, получаем: $u-v=-1$.

Решаем полученное уравнение с первым уравнением системы, получаем: $u=2, v=3$.

Условия $u \geq 0$, $v \geq 0$ выполняются, следовательно, подставив значение u во второе уравнение системы, находим корни исходного уравнения: $x_1=\frac{1}{3}$; $x_2=-1$.

IV. Алгоритм решения систем уравнений вида $\begin{cases} x^3 \pm y^3 = a \\ x \pm y = b, \end{cases}$ где знаки берутся одновременно либо верхние, либо нижние, автор показывает на конкретном примере.

Пример 6. Решить уравнение $(8x+4)^{\frac{1}{3}}-(8x-4)^{\frac{1}{3}}=2$.

1) Обозначаем первый радикал через u, а второй через v и получаем систему уравнений $\begin{cases} u-v=2 \\ u^3=8x+4 \\ v^3=8x-4, \end{cases}$

ее решение равносильно решению исходного уравнения;

2) вычтем из второго уравнения третье, получим: $\begin{cases} u-v=2 \\ u^3-v^3=8; \end{cases}$

3) делим полученное уравнение на первое уравнение системы, получим следующее: $u^2+uv+v^2=4$;

4) выражаем из первого уравнения системы радикал u и подставляем в полученное уравнение, имеем $3v^2+6v=0$, откуда

$v_1=0$ и $v_2=-2$;

5) подставив эти значения v в третье уравнение системы, находим корни исходного уравнения: $x_{1,2} = \pm\frac{1}{2}$ [30].

Рассмотрим теперь основные типы иррациональных уравнений и неравенств, изучаемых в основной школе.

1) Иррациональные уравнения и неравенства вида $\sqrt{f(x)} = g(x)$ ($\sqrt{f(x)} < g(x)$).

Пример 1. Решить уравнение $\sqrt{2x^2 + 8x + 7} - 2 = x$ в форме линейного алгоритма.

Решение.

1. Перепишем уравнение следующим образом: $\sqrt{2x^2 + 8x + 7} = x + 2$;

2. Переходим к равносильной данному уравнению системе:

$$\begin{cases} 2x^2 + 8x + 7 = (x+2)^2 \\ x + 2 \geq 0 \end{cases},$$

3. Раскроем скобку в первом уравнении системы:

$$\begin{cases} 2x^2 + 8x + 7 = x^2 + 4x + 4 \\ x + 2 \geq 0 \end{cases};$$

4. Приведем подобные слагаемые, получим $\begin{cases} x^2 + 4x + 3 = 0 \\ x \geq -2 \end{cases}$;

5. Найдем корни уравнения: $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=-3 \end{array}\right. \\ x \geq -2 \end{cases}$,

решение системы–число –1;

6. Ответ: –1 [40].

Пример 2. Найдите корень уравнения $\sqrt{-72 - 17x} = -x$. Если уравнение имеет более одного корня, укажите меньший из них.

Решение.

1. Возведем в квадрат обе части уравнения: $\begin{cases} -72 - 17x = x^2 \\ -x \geq 0 \end{cases}$;

2. Приведем подобные слагаемые в первом уравнении, а второе домножим на (–1): $\begin{cases} x^2 + 17x + 72 = 0 \\ x \leq 0 \end{cases}$;

3. Найдем корни уравнения: $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = -9 \\ x = -8 \end{array}\right. \\ x \leq 0 \end{cases}$ <=> $\left[\begin{array}{l} x = -9; \\ x = -8' \end{array}\right.$

4. Ответ: –9, т.к. данный корень является наименьшим [37].

Иррациональное неравенство вида $\sqrt{f(x)} < g(x)$ равносильно системе неравенств $\begin{cases} f(x) \geq 0, \\ h(x) > 0, \\ f(x) < (g(h))^2. \end{cases}$

Пример 3. Решить неравенство $\sqrt{24 - 10x} < 3 - 4x$ в форме линейного алгоритма.

Решение.

1. Перейдем к равносильной системе:

$\sqrt{24 - 10x} < 3 - 4x$ <=> $\begin{cases} 24 - 10x \geq 0, \\ 3 - 4x > 0, \\ 24 - 10x < (3 - 4x)^2; \end{cases}$

2. Раскроем скобки и приведем подобные слагаемые в третьем уравнении:

$$\begin{cases} x \leq \frac{12}{5}, \\ x < \frac{3}{4}, \\ 16x^2 - 14x - 15 > 0; \end{cases}$$

3. Найдем корни: $\begin{cases} x \leq \frac{12}{5}, \\ x < \frac{3}{4}, \\ x \in \left(-\infty; -\frac{5}{8}\right) \cup \left(\frac{3}{2}; +\infty\right); \end{cases}$

4. Получим решение: $x \in (-\infty; -\frac{5}{8})$;

5. Ответ: $x \in (-\infty; -\frac{5}{8})$ [44].

Пример 4. Решить неравенство $\sqrt{x^2 - 3x - 10} < 8 - x$.

Решение.

1. Возведем обе части в квадрат, перейдем к системе:

$$\begin{cases} x^2 - 3x - 10 < (8 - x)^2, \\ 8 - x \geq 0, \\ x^2 - 3x - 10 \geq 0; \end{cases}$$

2. Раскроем скобку, приведем подобные слагаемые и решим систему: $\begin{cases} x^2 - 3x - 10 < 64 - 16x + x^2, \\ x \leq 8, \\ (x-5)(x+2) \geq 0; \end{cases}$

3. Найдем корни: $\begin{cases} x < \frac{74}{13}, \\ x \leq 8, \\ (x-5)(x+2) \geq 0; \end{cases}$

4. Ответ: $x \in (-\infty; -2] \cup [5; \frac{74}{13})$ [39].

Иррациональное неравенство вида $\sqrt{f(x)} > g(x)$ равносильно совокупности систем неравенств $\begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0, \\ f(x) > (g(x)^2. \end{cases}$

Пример 5. Решите неравенство $\sqrt{x+3} > x + 1$ в форме линейного алгоритма.

Решение.

1. ОДЗ неравенства: $x \geq -3$;

2. Если $x + 1 < 0$ <=> $x < -1$, то все эти $x \in$ ОДЗ, для которых верно $x < -1$, являются решениями. Таким образом, $x \in [-3; -1)$ – первая часть ответа;

3. Если $x + 1 \geq 0$ <=> $x \geq -1$, то обе части неравенства неотрицательны, и его можно возвести в квадрат, получим:

$\begin{cases} x + 3 > (x+1)^2, \\ x \geq -1; \end{cases}$

4. Раскроем скобку в правой части первого неравенства: $\begin{cases} x + 3 > x^2 + 2x + 3, \\ x \geq -1; \end{cases}$

5. Приведем подобные слагаемые, перенесем все в левую часть: $\begin{cases} x^2 + x - 2 < 0, \\ x \geq -1; \end{cases}$

6. Получим следующие корни: $\begin{cases} (x-1)(x+2) < 0 \\ x \geq -1 \end{cases}$ => $x \in [-1; 1)$;

7. Объединяя результаты пунктов 1 и 2, получаем: $x \in [-3; 1)$;

8. Ответ: $x \in [-3; 1)$ [44].

2) Иррациональные уравнения и неравенства вида $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$ ($\sqrt{f(x)} < \sqrt{g(x)}$).

Пример 6. Решить уравнение $\sqrt{x^2 - 8} = \sqrt{-2x}$.

Решение:

1. Уравнение равносильно системе $\begin{cases} x^2 - 8 = -2x, \\ -2x \geq 0. \end{cases}$

2. Перенесем коэффициент при переменной в левую часть, получим: $\begin{cases} x^2 + 2x - 8 = 0, \\ x \leq 0; \end{cases}$

3. Решим квадратное уравнение и получим корни: $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x_1 = -4, \\ x_2 = 2, \end{array} \right. \\ x \leq 0; \end{cases}$

4. Ответ: –4 [42].

Пример 7. Решите неравенство $\sqrt{x^2 - 2x + 1} \geq \sqrt{3 - x}$ в форме линейного алгоритма.

Решение.

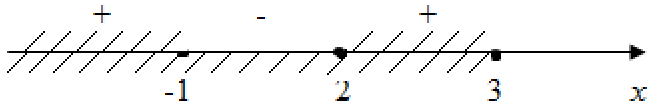
1. Перейдем к равносильной системе и решим ее:

$\sqrt{x^2 - 2x + 1} \geq \sqrt{3 - x}$ <=> $\begin{cases} 3 - x \geq 0, \\ x^2 - 2x + 1 \geq 3 - x; \end{cases}$

2. Приведем подобные слагаемые, получим: $\begin{cases} x \leq 3, \\ x^2 - x - 2 \geq 0; \end{cases}$

3. Решим квадратное уравнение и разложим его на множители: $\begin{cases} x \leq 3, \\ (x + 1)(x - 2) \geq 0 \end{cases}$;

4. Отметим полученные корни на числовой прямой:



5. Ответ: $x \in (-\infty; -1] \cup [2; 3]$ [43].

§ 11. Алгоритмическая деятельность при решении уравнений и неравенств с модулем

Наиболее распространенным методом решения уравнений и систем уравнений, содержащих переменную под знаком модуля, является метод, при котором знак абсолютной величины действительного числа раскрывается на основании ее определения: $|a| = \begin{cases} a, \text{если } a \geq 0 \\ -a, \text{если } a < 0. \end{cases}$

Аналогично определяется и модуль функции $f(x)$ действительного переменного x: $|f(x)\,| = \begin{cases} f(x)\,, \text{если } f(x) \ \geq 0 \\ -, f(x) \ \text{ если } f(x) \ < 0. \end{cases}$

Простейшим из уравнений, содержащих модули, являются уравнения вида $f(x) = a,$ где $a \geq 0$. Данное уравнение равносильно совокупности уравнений $\left[\begin{array}{l} f(x) = a, \ \text{ когда } f(x) \geq 0 \\ f(x) = -a, \text{когда } f(x) < 0. \end{array}\right.$

Если $a < 0$, то множество решений такого уравнения пусто.

Пример 1. Решить уравнение $|x^2 + 3x - 2| = 2$.

Решение. Исходное уравнение при любом $x \in \boldsymbol{R}$ равносильно совокупности $\left[\begin{array}{l} x^2 + 3x - 2 = 2 \\ x^2 + 3x - 2 = -2 \end{array}\right.$ => $\left[\begin{array}{l} x_1 = 1, x_2 = -4 \\ x_3 = 0, x_4 = -3. \end{array}\right.$

Ответ: -4, -3, 0, 1.

Пример 2. Решить уравнение $\left|\log_{\frac{1}{2}}(1 - x)\right| = 2$.

Решение. Если $1 - x > 0$, т.е. $x \in (-\infty; 1)$, то выражение $\left|\log_{\frac{1}{2}}(1 - x)\right|$ существует.

Тогда $\left|\log_{\frac{1}{2}}(1 - x)\right| = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_{\frac{1}{2}}(1 - x) = 2 \\ \log_{\frac{1}{2}}(1 - x) = -2 \end{array}\right.$ => $\left[\begin{array}{l} 1 - x = (\frac{1}{2})^2 \\ 1 - x = (\frac{1}{2})^{-2} \end{array}\right.$ =>

$\left[\begin{array}{l} x_1 = \frac{3}{4} \\ x_2 = -3. \end{array}\right.$

Оба корня принадлежат открытому лучу $(-\infty; 1)$. Проверка показала, что $x_1 = 3/4, x_2 = -3$ являются решениями заданного уравнения.

Ответ: -3, ¾.

Более сложными по сравнению с предыдущими уравнениями являются уравнения вида $|f(x)\ | = g(x)$, где $f(x), g(x) -$ некоторые функции действительного переменного x.

1) При $g(x) < 0$ множество решений такого уравнения пусто.

2) При $g(x) = 0$ заданное уравнение эквивалентно уравнению $f(x) = 0$.

3) При $g(x) > 0$ исходное уравнение равносильно совокупности $\left[\begin{matrix} f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x) \end{matrix}\right.$ [9].

Различают следующие типы уравнений и неравенств с модулем:

1) Уравнения и неравенства вида $|f(x)| = g(x), (|f(x)| < g(x))$;

Пример 1. Решить уравнение $|1 - 2x| = 3x - 2$.

Решение.

1. $3x - 2 \geq 0,$ т. е. $x \geq 2/3$, или $x \in \left[\frac{2}{34} + \infty\right)$;

2. На множестве $x \in \left[\frac{2}{34} + \infty\right)$ заданное уравнение равносильно совокупности двух уравнений $\left[\begin{matrix} 1 - 2x = 3x - 2 \\ 1 - 2x = -(3x - 2) \end{matrix}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{matrix} x_1 = 3/5 \\ x_2 = 1 \end{matrix}\right.$;

3. Поскольку $\frac{3}{5} < \frac{2}{3}$, заключаем, что $\frac{3}{5} \notin x \left[\frac{2}{3}; \infty\right)$, т.е. $x_1 -$ посторонний корень, а $1 \in \left[\frac{2}{3}; +\infty\right)$ и $|1 - 2 \cdot 1| = 3 \cdot 1 - 2$;

4. Ответ: 1 [9].

Пример 2. Решить уравнение $|x^3 - 3x + 1| == x + 1$

Решение.

1. Данное уравнение равносильно совокупности: $\left[\begin{matrix} x^3 - 3x + 1 = 3x + 1 \text{ если } 3x + 1 \geq 0, \\ -(x^3 - 3x + 1) = 3x + 1, \text{если } 3x + 1 < 0 \end{matrix}\right.$;

2. Решим каждое уравнение по отдельности, найдем корни первого уравнения: $\begin{cases} x^3 - 3x + 1 = 3x + 1 \\ 3x + 1 \geq 0 \end{cases}$ => $\begin{cases} x^3 - 6x = 0 \\ 3x \geq -1 \end{cases}$ => $\begin{cases} x(x^2 - 6) = 0 \\ x \geq -\frac{1}{3} \end{cases}$ => $\begin{cases} x = 0; x = \pm\sqrt{6} \\ x \geq -\frac{1}{3} \end{cases}$;

3. Найдем корни второго уравнения: $\begin{cases} -(x^3 - 3x + 1) = 3x + 1 \\ 3x + 1 < 0 \end{cases}$ => $\begin{cases} -x^3 + 3x - 1 = 3x + 1 \\ 3x + 1 < 0 \end{cases}$ => $\begin{cases} -x^3 - 2 = 0 \ |\cdot(-1) \\ 3x < -1 \end{cases}$ => $\begin{cases} x^3 + 2 = 0 \\ x < -\frac{1}{3} \end{cases}$ => $\begin{cases} x^3 = -2 \\ x < -\frac{1}{3} \end{cases}$ => $\begin{cases} x = -\sqrt[3]{2} \\ x < -\frac{1}{3} \end{cases}$ => решений нет;

4. Ответ: $0, \sqrt{6}$ [43].

2) Неравенства вида $|f(x)| > g(x)$.

При $g(x) > 0$ – решением неравенства $|f(x)| > g(x)$ будет решение равносильной совокупности $\left[\begin{array}{l} f(x) > g(x), \\ f(x) < -g(x). \end{array}\right.$

Пример 3. Решить неравенство $|x^2 - 3x + 2| \geq 2x - x^2$.

Решение.

1. Данное неравенство равносильно следующей совокупности: $\left[\begin{array}{l} x^2 - 3x + 2 \geq 2x - x^2 \\ x^2 - 3x + 2 \leq -(2x - x^2) \end{array}\right.$;

2. Решим первое неравенство данной совокупности: $x^2 - 3x + 2 \geq 2x - x^2$;

3. Перенесем правую часть неравенства в левую, получим: $x^2 - 3x + 2 - 2x + x^2 \geq 0$;

4. Приведем подобные слагаемые: $2x^2 - 5x + 2 \geq 0$;

5. Решим неравенство, получим решение: $x \in (-\infty; 0{,}5] \cup [2; +\infty)$;

6. Решим второе неравенство: $x^2 - 3x + 2 \leq -(2x - x^2)$;

7. Приведем подобные слагаемые, получим: $2 - x \leq 0$;

8. получим решение: $x \in [2; +\infty)$;

9. Ответ: $x \in (-\infty; 0{,}5] \cup [2; +\infty)$ [22].

3) Уравнения и неравенства вида $|f(x)| = |g(x)|, (|f(x)| \vee |g(x)|)$;

Пример 4. Решить уравнение $|x^2 - 5x - 4| = |x + 3|$.

Решение.

1. Данное уравнение равносильно следующей совокупности: $\left[\begin{array}{l} x^2 - 5x - 4 = x + 3 \\ x^2 - 5x - 4 = -x - 3 \end{array}\right.$;

2. Решим первое уравнение и найдем корни: $x^2 - 5x - 4 = x + 3$ => $x^2 - 6x - 7 = 0$ => $x_1 = 7, x_2 = -1$;

3. Решим второе уравнение, найдем корни: $x^2 - 5x - 4 = -x - 3$ => $x^2 - 4x - 1 = 0$ => $x_{3,4} = 2 \pm \sqrt{5}$;

4. Ответ: $x_1 = 7, x_2 = -1, x_{3,4} = 2 \pm \sqrt{5}$ [37].

Пример 5. Решить неравенство $|x - 3| > |x + 2|$.

Решение.

1. Возведем обе части неравенства в квадрат: $(x - 3)^2 > (x + 2)^2$;

2. Перенесем все в левую часть: $(x - 3)^2 - (x + 2)^2 > 0$;

3. Раскроем скобки и приведем подобные слагаемые, получим: $-10x + 5$;

4. Решим полученное неравенство и получим решение: $x < \frac{1}{2}$;

5. Ответ: $x \in (-\infty; \frac{1}{2})$ [37].

§12. Алгоритмическая деятельность при решении уравнений и неравенств с параметром

В уравнении $f(a)x^2 + g(a)x + h(a) = 0$ не выше второй степени с параметром a и переменной x всякое частное уравнение принадлежит одному из следующих типов:

1) $\dfrac{\{a \,|f(a) = g(a) = h(a) = 0\}}{\infty}$;

2) $\dfrac{\{a \,|f(a) = g(a) = 0, h(a) \neq 0\}}{\emptyset}$;

3) $\dfrac{\{a|f(a)=0, g(a)\neq 0\}}{\{x|\,x=-\frac{g(a)}{2f(a)}\}}$;

4) $\dfrac{\{a|f(a)\neq 0, D<0\}}{\text{решений нет}}$;

5) $\dfrac{\{a|f(a)\neq 0, D>0\}}{\{x|x=-\frac{-g(a)\pm\sqrt{D}}{2f(a)}\}}$;

Для решения всякого уравнения с параметром предлагается следующий алгоритм:

1. На числовой прямой отмечаются все контрольные значения параметра, для которых соответствующие частные уравнения не определены.

2. На области допустимых значений параметра исходное уравнение при помощи равносильных преобразований приводится к виду $f(a)x^2+g(a)x+h(a)=0$.

3. Выделяется множество контрольных значений параметра, для которых $f(a)=0$.

Если уравнение $f(a)=0$ имеет конечное множество решений, то для каждого найденного контрольного значения параметра соответствующее частное уравнение решается отдельно. Проводится классификация частных уравнений по первым трем типам.

На бесконечном множестве решений уравнения $f(a)=0$ проводится решение уравнения $g(a)=0$, выделяются типы ∞ и $\emptyset$ особых частных уравнений. Множеству $\{a \mid f(a)=0, g(a)\neq 0\}$ соответствует тип 3) неособых частных уравнений.

4. Выделяются контрольные значения параметра, для которых $D=g(a)^2-4f(a)h(a)$ обращается в нуль. Соответствующие неособые частные уравнения имеют двукратный корень $x=-\frac{g(a)}{2f(a)}$.

5. Найденные контрольные значения параметра разбивают область допустимых значений параметра на промежутки. На каждом из промежутков определяется знак дискриминанта D.

Множеству $\{a \mid f(a) \neq 0, D < 0\}$ соответствует тип неособых частных уравнений, не имеющих решений, для значения параметра $\{a \mid f(a) \neq 0,$

$D > 0\}$ частные уравнения имеют два различных действительных корня.

Далее автор приводит некоторые примеры. Вот один из них:

Пример. Решить уравнение $x^2 - x + 1 = \frac{3x - 6x^2 - 1 + a}{a}$.

Решение. В уравнении значение $a = 0$ является контрольным, для него соответствующее частное уравнение не определено.

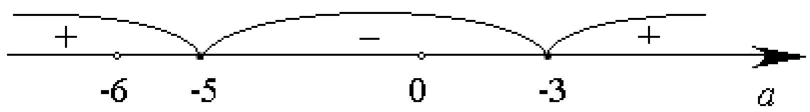
На множестве $\{a \mid a \neq 0\}$ исходное уравнение равносильно $(a+6)x^2 - (a+3)x + 1 = 0$.

$f(a) = a + 6$ обращается в нуль для $a = -6$. Соответствующее частное уравнение $3x + 1 = 0$ имеет единственное решение $x = -\frac{1}{3}$.

На множестве $\{a \mid a \neq -6; 0\}$ частные уравнения являются квадратными с дискриминантом $D = a^2 + 2a - 15$. Дискриминант $D = 0$ для $a = -5$ и $a = 3$.

Пусть $a = -5$, соответствующее частное уравнение $9x^2 - 6x + 1 = 0$ имеет двукратный корень $x = \frac{1}{3}$.

На числовой прямой отмечаются найденные значения параметра и на каждом из полученных промежутков устанавливается знак дискриминанта (рис. 4).



Если $a \in (-5; 0) \cup (0; 3)$, то соответствующие частные уравнения не имеют решений. Для значений параметров из $\{a \mid a \in (-\infty; -6) \cup (-6; -5) \cup (3; +\infty)\}$ частные уравнения имеют два различных корня, их общие решения $x = \frac{a + 3 \pm \sqrt{a^2 + 2a - 15}}{2(a+6)}$.

Ответ: $\frac{\{a|a=0\}}{\text{не определено}}$; $\frac{\{a|a=-6\}}{\{x|x=-\frac{1}{3}\}}$; $\frac{\{a|a=-5\}}{\{x|x=-1\}}$; $\frac{\{a|a=3\}}{\{x|x=\frac{1}{3}\}}$; $\frac{\{a|a\epsilon(5;0)\cup(3;+\infty)\}}{\text{решений нет}}$; $\frac{\{a|a\in(-\infty;-6)\cup(-6:-5)\cup(3;+\infty)\}}{\{x|x=\frac{a+3\pm\sqrt{a^2+2a-15}}{2(a+6)}}$.

В неравенстве $f(a)x^2 + g(a)x + h(a) < 0$ с параметром a и переменной x для допустимых значений параметра совокупность всех частных неравенств разбивается на следующие типы:

1) $\frac{\{a\,|f(a) = g(a) = h(a) < 0\}}{\infty}$;

2) $\frac{\{a\,|f(a) = g(a) = 0, h(a) \geq 0\}}{\emptyset}$;

3) $\frac{\{a|f(a) = 0, g(a) > 0\}}{\{x|\ x\in(-\infty;-\frac{h(a)}{g(a)}\}}$;

4) $\frac{\{a|f(a) = 0, g(a) < 0\}}{\{x|\ x\in(-\frac{h(a)}{g(a)};+\infty)\}}$;

5) $\frac{\{a|f(a) > 0, D \leq 0\}}{\text{решений нет}}$;

6) $\frac{\{a|f(a) < 0, D < 0\}}{\{x|x\in R\}}$;

7) $\frac{\{a|f(a) > 0, D > 0\}}{\{x\ |x\in(\frac{-g(a)-\sqrt{D}}{2f(a)};\frac{-g(a)+\sqrt{D}}{2f(a)})\}}$;

8) $\frac{\{a|f(a) < 0, D \geq 0\}}{\{x\ |x\in(-\infty;\frac{-g(a)+\sqrt{D}}{2f(a)};\frac{-g(a)-\sqrt{D}}{2f(a)};+\infty)\}}$;

На основе данной типологии определяется следующий алгоритм решения неравенств с параметрами не выше второй степени:

1. На числовой прямой отмечаются все контрольные значения параметра, для которых соответствующие частные неравенства не определены. Выделяются промежутки допустимых значений параметра, на каждом из которых решение соответствующих частных неравенств осуществляется отдельно.

2. На выделенном промежутке значений параметра при помощи равносильных преобразований исходное неравенство приводится к виду $f(a)x^2 +$

$g(a)x + h(a) < 0$. Множество $\{a \mid f(a) = 0\}$ определяет новое разбиение выделенных промежутков допустимых значений параметра. Дальнейшее решение неравенства осуществляется отдельно как для значений $\{a \mid f(a) = 0\}$, так и для каждого из промежутков нового разбиения допустимых значений параметра.

3. Множество $\{a \mid f(a) = 0\}$ в зависимости от значений $g(a)$ и $f(a)$ разбивается на четыре подмножества с различными типами частных неравенств 1) – 4).

4. На каждом из выделенных контрольными значениями параметра промежутков коэффициент $f(a)$ сохраняет постоянный знак. Значения параметра, для которых $D = g(a)^2 - 4f(a)h(a)$ обращается в нуль, определяют новое разбиение допустимых значений параметра.

5. На выделенных промежутках полученного разбиения допустимых значений параметра устанавливаются знаки $f(a)$ и D.

В уравнении $f(a)x^2 + g(a)x + h(a) = 0$ для промежутков с неотрицательным дискриминантом находятся общие решения $f_1(a) = \frac{-g(a)-\sqrt{D}}{2f(a)}$ и $f_2(a) = \frac{-g(a)+\sqrt{D}}{2f(a)}$. Определяется их взаимное расположение на промежутках с учетом разности $A_{21}(a) = f_2(a) - f_1(a) = \frac{\sqrt{D}}{f(a)}$, зависящее от знака $f(a)$.

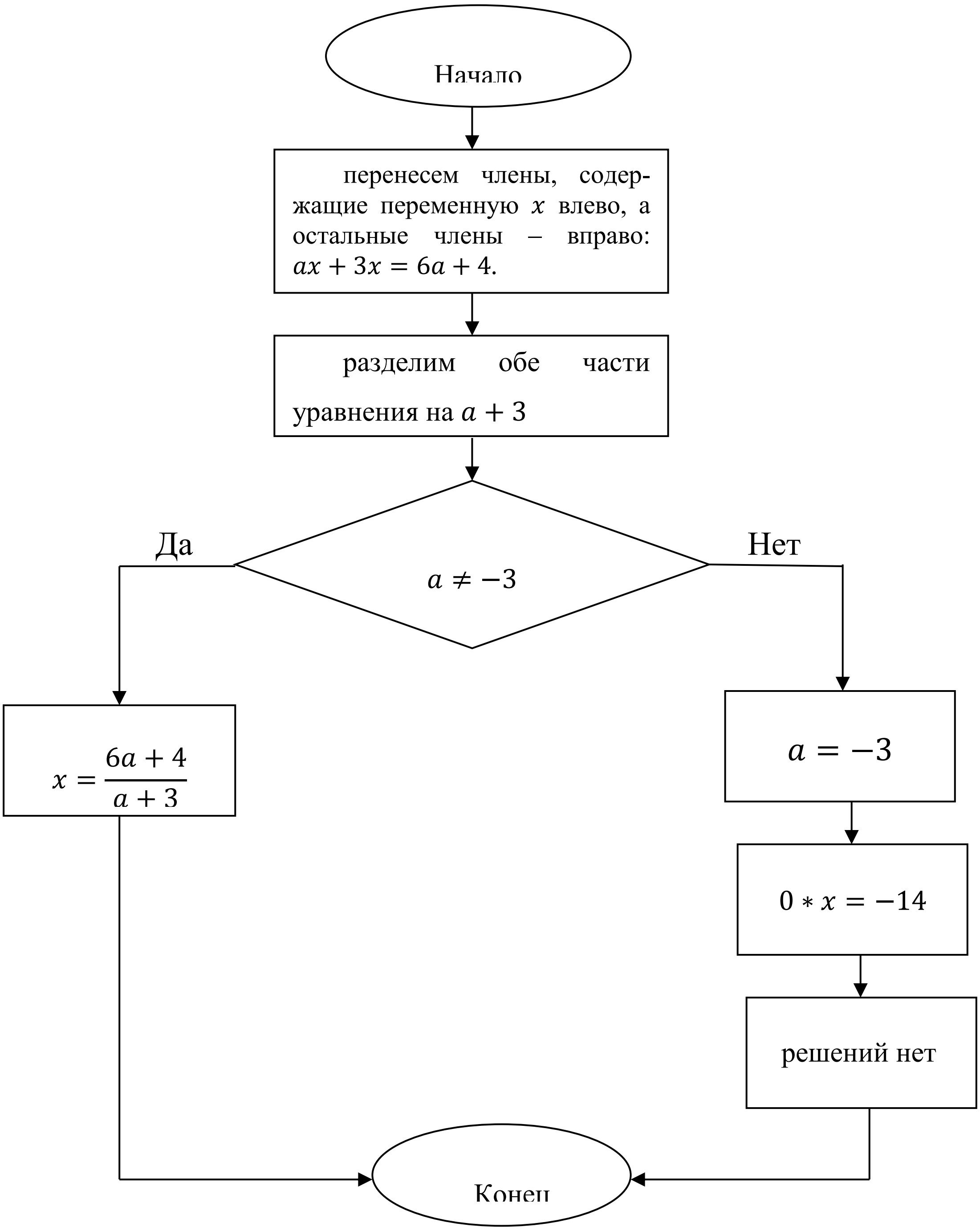
Каждое из множеств $\{a \mid f(a) > 0, D \leq 0\}$, $\{a \mid f(a) > 0, D > 0\}$, $\{a \mid f(a) < 0, D < 0\}$, $\{a \mid f(a) < 0, D \geq 0\}$ значений параметра определяет один из типов 5) – 8) неособых частных неравенств с соответствующими общими решениями [5].

Рассмотрим систему упражнений на решение в школьном курсе математики уравнений и неравенств с параметрами, представленную А.Г. Мордковичем в учебно–методическом пособии «Беседы с учителями математики» [19]. Проиллюстрируем эти упражнения на примере решения уравнений и неравенств, начиная с седьмого класса. Обратим внимание на то, что обучать этому «массового» школьника вряд ли целесообразно, но сильных учащихся, безусловно, необходимо – ведь задачи с параметрами дают прекрасный материал для учебно–исследовательской работы.

1) Линейные уравнения.

Пример 1. Записать решение уравнения $ax - 4 = 6a - 3x$ в форме разветвляющегося алгоритма.

Решение.



Ответ: при $a = -3$ корней нет; при $a \neq -3$ $x = \frac{6a+4}{a+3}$ [45].

2) Простейшие уравнения вида $\frac{p(x)}{q(x)} = 0$.

Пример 2. Решить уравнение $\frac{x^2-9}{x-a} = 0$.

Решение.

1. Найдем корни уравнения $x^2 - 9 = 0$, получим, что $x_1 = 3$; $x_2 = -3$;

2. Ограничение $x \neq a$ означает, что при $a = 3$ $x_1 = 3$ является посторонним корнем, а при $a = -3$ таким корнем является $x_2 = -3$;

3. Ответ: если $a = 3$, то $x = -3$; при $a = -3$, $x = 3$; если $a \neq \pm 3$, то $x_1 = 3$, $x_2 = -3$[19, с. 246].

3) Квадратные уравнения.

Пример 3. Решить уравнение $ax^2 + 2(a+1)x + 2a = 0$.

Решение.

1. Выделим значение $a = 0$, так как при таком a уравнение линейное, а при остальных – квадратное, а также необходимо выяснить, при каких a дискриминант трёхчлена положителен, отрицателен, равен 0;

2. $\frac{D}{4} = (a+1)^2 - 2a = a^2 + 1, a^2 + 1 > 0$ при всех a;

3. При $a = 0$ – одно решение $x = 0$, при $a \neq 0$ – два решения $x_{1,2} = \frac{-(a+1) \pm \sqrt{a^2+1}}{a}$;

4. Ответ: при $a = 0, x = 0$; при $a \neq 0$ –два решения

$x_{1,2} = \frac{-(a+1) \pm \sqrt{a^2+1}}{a}$ [45].

4) Простейшие иррациональные уравнения.

Пример 4. Решить уравнение $(x-1)\sqrt{x-a} = 0$.

Решение.

1. Найдем корни уравнения: $(x-1) = 0$ или $\sqrt{x-a} = 0$: $x_1 = 1$, $x_2 = a$;

2. Если $a < 0$, то $x_1 = 1$ удовлетворяет условию $x \geq a$, то есть является корнем уравнения; а если $a > 1$, то $x_1 = 1$ не удовлетворяет условию $x \geq a$, то есть является посторонним корнем;

3. Ответ: если $a < 1$, то $x_1 = 1$, $x_2 = a$; если $a \geq 1$, то $x = 1$ [19, с. 254].

5) Рациональные неравенства [45].

Пример 5. Решить неравенство $x^2 - ax - \leq 0$.

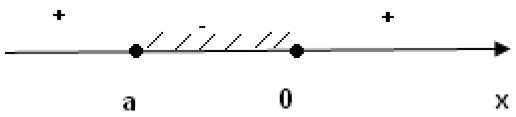
Решение.

1. Разложим левую часть неравенств на множители и воспользуемся методом интервалов: $x(x - a) \leq 0$;

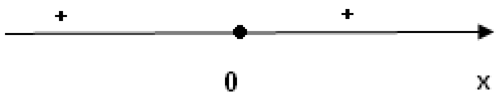
2. на числовой прямой нужно отложить точки $x = 0$ и $x = a$;

При различных значениях a взаимное расположение этих точек будет различным. Рассмотрим все случаи их взаимного расположения:

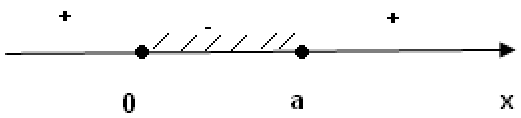
1) При $a < 0$ $a \leq x \leq 0$.



2) При $a = 0$ $x = 0$



3)При $a > 0$ $0 \leq x \leq a$.



Ответ: при $a < 0$ $a \leq x \leq 0$, при $a = 0$ $x = 0$, при $a > 0$ $0 \leq x \leq a$ [45].

§ 13. Задачи, предлагаемые к проведению Основного государственного экзамена в 2016 году по данной теме

В ходе анализа учебных пособий Ф.Ф Лысенко, И.В. Ященко, открытого банка заданий ОГЭ, а также различных демонстрационных вариантов ОГЭ, выделим следующие типы заданий, которые предлагаются для ОГЭ в 2016 году [14, 36, 39]:

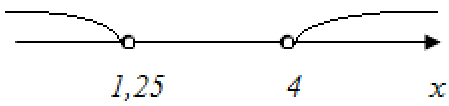
Часть I

1.1. Решите неравенство $13(7 - 2x) - 4x \leq 1$.

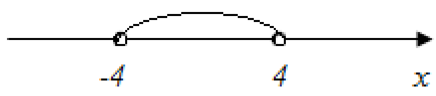
1) $[3; +\infty)$; 2) $(-\infty; -3]$; 3) $(-\infty; 3]$; 4) $[-3; +\infty)$;

1.2. Решите систему неравенств $\begin{cases} 5(x+3) > 7(x+1) \\ -5 - 1{,}25x < 0. \end{cases}$ На какой из координатных прямых изображено множество ее решений?

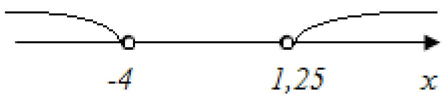
1)



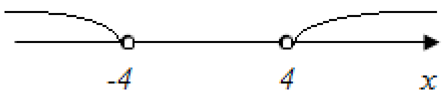
2)



3)



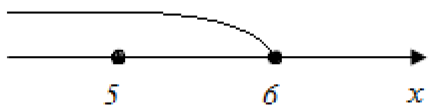
4)



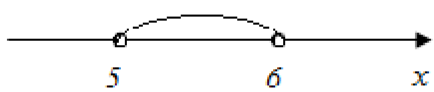
1.3. Решите систему неравенств $\begin{cases} x^2 - 4x + 4 \leq 0 \\ -5x - 10 \leq 0. \end{cases}$

1.4. Решите систему неравенств $\begin{cases} (x-5)^2 > 0 \\ 18 - 3x \geq 0. \end{cases}$ В ответе укажите номер координатной прямой, на которой изображено множество ее решений.

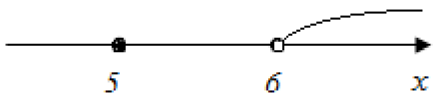
1)



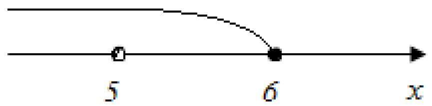
2)



3)



4)



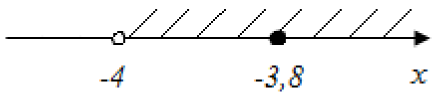
1.5. Укажите неравенство, которое не имеет решения.

1) $x^2 - 11x + 5 > 0$; 2) $x^2 + 4x - 7 < 0$;

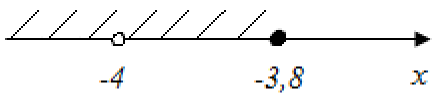
3) $x^2 - 6x + 11 < 0$; 4) $x^2 + 3x - 7 > 0$.

1.6. Решите систему неравенств $\begin{cases} x + 3{,}8 \le 0 \\ x + 6 \ge 0. \end{cases}$ На какой из координатных прямых изображено множество ее решений?

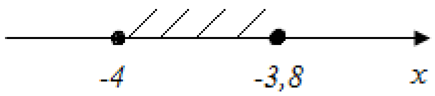
1)



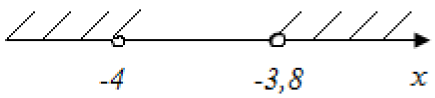
2)



3)



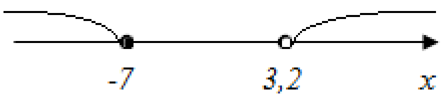
4)



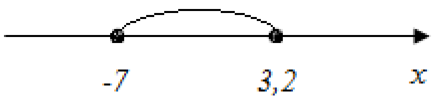
1.7. Решите систему неравенств $\begin{cases} \frac{-5x+4}{12} > -1 \\ \frac{7x-5}{3} > \frac{13x+1}{5} \end{cases}$. Определите, на каком рисунке изображено множество ее решений.

1)

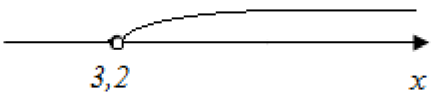
2)



3)



4)



1.8. Решите неравенство $x^2 > 5x$.

1) $(-\infty; 0) \cup (5; +\infty)$; 2) $(-\infty; 0] \cup [5; +\infty)$;

3) $(0; 5)$; 4) $[0; 5]$.

1.9. Укажите решение неравенства $5x - 3(5x - 8) < -7$.

1) $(-\infty; 3{,}1)$; 2) $(-1{,}7; +\infty)$; 3) $(-\infty; -1{,}7)$; 4) $(3{,}1; +\infty)$.

1.10. Укажите неравенство, решением которого является любое число.

1) $x^2 + 70 > 0$; 2) $x^2 - 70 > 0$; 3) $x^2 + 70 < 0$; 4) $x^2 - 70 > 0$.

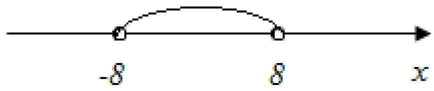
1.11. Укажите решение неравенства $-3 - x \geq x - 6$.

1) $(-\infty; 1{,}5]$; 2) $[1{,}5; +\infty)$; 3) $(-\infty; 4{,}5]$; 4) $[4{,}5; +\infty)$.

1.12. Укажите решение неравенства $3 - 2x \geq 8x - 1$.

1) $[-0{,}2; +\infty)$; 2) $(-\infty; 0{,}4]$; 3) $[0{,}4; +\infty)$; 4) $(-\infty; -0{,}2]$.

1.13. Укажите неравенство, решение которого изображено на рисунке:



1) $x^2 + 64 > 0$; 2) $x^2 - 64 > 0$; 3) $x^2 - 64 < 0$; 4) $x^2 + 64 < 0$.

Часть II

2.1. Уравнения высших степеней:

2.1.1. Решите уравнение: $(x+2)^4 - 4(x+2)^2 - 5 = 0$;

2.1.2. Решите уравнение: $x^4 + x^2 + 2x = 0$;

2.1.3. Решите уравнение: $x^4 = (2x - 15)^2$;

2.1.4. Решите уравнение: $x^3 = x^2 + 6x$;

2.1.5. Решите уравнение: $(x+5)^3 = 25(x+5)$;

2.1.6. Решите уравнение: $x(x^2 - 8x + 15) = 4(3 - x)$;

2.1.7. Решите уравнение: $(x-1)(x^2 + 6x + 9) = 5(x+3)$;

2.1.8. Решите уравнение: $(x^2 - 25)^2 + (x^2 + 3x - 10)^2 = 0$;

2.2. Решите уравнение: $(3x-7)^2(x+5) = (3x-7)(x+5)^2$;

2.2.1. Дробно–рациональные уравнения и неравенства:

2.2.2. Решите уравнение: $\frac{1}{x^2} + \frac{4}{x} - 12 = 0$;

2.2.3. Решите уравнение: $\frac{3x}{2x+5} - \frac{28-53x}{4x^2-25} = \frac{4x}{2x-5}$;

2.2.4. Решите уравнение $\frac{3}{(x-2)^2} + \frac{5}{x-2} - 8 = 0$;

2.2.5. Решите неравенство: $\frac{-14}{(x-5)^2-2} \geq 0$;

2.3. Иррациональные уравнения и неравенства:

2.3.1. Решите уравнение: $x^2 - 2x + \sqrt{3-x} = \sqrt{3-x} + 8$;

2.3.2. Решите неравенство: $(x-3)^2 < \sqrt{5}(x-3)$;

2.3.3. Системы уравнений и неравенств:

2.3.4. Решите систему уравнений $\begin{cases} 2x^2 + 4y^2 = 24 \\ 4x^2 + 8y^2 = 24x \end{cases}$;

2.3.5. Решите систему уравнений: $\begin{cases} 3x - y = 8 \\ (3x+y)(9x^2 - y^2) = 128 \end{cases}$;

2.3.6. Решите систему уравнений: $\begin{cases} x+2y=-8 \\ \frac{x}{4}+\frac{y+6}{3}=-1 \end{cases}$;

2.3.7. Решите систему неравенств: $\begin{cases} 6x+18\leq 0 \\ x+8\geq 2 \end{cases}$;

Выводы по второй главе

Сформулируем основные выводы и полученные результаты по второй главе:

1. При выполнении системы упражнений необходимо пользоваться следующими принципами: принцип систематичности, принцип последовательности, принцип прочности, принцип сознательности.

1. Показана система упражнений по следующим темам: «Алгоритмическая деятельность при решении линейных уравнений и неравенств», «Алгоритмическая деятельность при решении квадратных уравнений и неравенств», «Алгоритмическая деятельность при решении рациональных уравнений и неравенств», «Алгоритмическая деятельность при решении иррациональных уравнений и неравенств», «Алгоритмическая деятельность при решении уравнений и неравенств с модулем», «Алгоритмическая деятельность при решении уравнений и неравенств с параметром». Для каждого упражнения нарисована либо блок–схема, либо прописаны шаги алгоритмической деятельности, действия.

2. Представлена совокупность задач, предлагаемых к проведению Основного государственного экзамена в 2016 году.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сформулируем основные выводы и полученные результаты проведенного исследования:

1. Выполнен анализ методической и психолого–педагогической литературы.

2. Рассмотрены основные понятия, связанные с алгоритмической деятельностью. По результатам анализа различной методической, а также психолого –педагогической литературы определено, что под алгоритмической деятельностью учащихся понимается совокупность действий, которые выполняются по алгоритмическому описанию.

3. Рассмотрены основные этапы по формированию алгоритмической деятельности. Определено, что в качестве данных этапов выделены: 1) этап, направленный на то, чтобы мотивировать учащихся на формирование алгоритмической деятельности; 2) этап, нацеленный на открытие алгоритма в процессе алгоритмической деятельности; 3) этап усвоения алгоритма в процессе алгоритмической деятельности; 4) этап применения алгоритма в процессе алгоритмической деятельности.

4. Представлены методические особенности формирования алгоритмической деятельности на уроках математики при работе с определениями, теоремами, правилами и предписаниями. Сделан вывод о том, что алгоритмическая линия в курсе математики – это определенным образом ориентированный содержательно – методический компонент обучения, пронизывающий все обучение математике и получающий наибольшее развитие при изучении практических методов алгоритмизации.

5. Выделены основные классификации алгоритмов, свойства алгоритмов. Выявлено, что все алгоритмы характеризуются одним общим свойством, то

есть при их выполнении переход от одного указания к следующему независимо от конкретных начальных данных и от получаемых промежуточных результатов всегда происходит в порядке естественного возрастания номеров указаний.

6. Рассмотрены алгоритмические методы решения задач. Отмечено, что алгоритм может быть задан в виде таблицы, схемы, правила, формулы, определения, описания.

7. При выполнении системы упражнений необходимо пользоваться следующими принципами: принцип систематичности, принцип последовательности, принцип прочности, принцип сознательности.

8. Показана система упражнений по следующим темам: «Алгоритмическая деятельность при решении линейных уравнений и неравенств», «Алгоритмическая деятельность при решении квадратных уравнений и неравенств», «Алгоритмическая деятельность при решении рациональных уравнений и неравенств», «Алгоритмическая деятельность при решении иррациональных уравнений и неравенств», «Алгоритмическая деятельность при решении уравнений и неравенств с модулем», «Алгоритмическая деятельность при решении уравнений и неравенств с параметром». Для каждого упражнения нарисована либо блок–схема, либо прописаны шаги алгоритмической деятельности, действия.

9. Представлена совокупность задач, предлагаемых к проведению Основного государственного экзамена в 2016 году.

Все это дает основание считать, что задачи, поставленные в исследовании, полностью решены.

ЛИТЕРАТУРА

1. Атлуханова Л.А., Нурмагомедов Д.М. Проблема формирования алгоритмической культуры у младших школьников средствами УМК «Школа России» // Известия дагестанского государственного университета. - 2013. - №4.-С.41-44. *Режим доступа к журн.:* http://elibrary.ru/download/27855203.pdf

2. Бим – Бад Б.М. Педагогический энциклопедический словарь. – М., 2002 с. 15.

3. Виленкин Н.Я., Жохов В.И., Чесноков А.С., Швацбурд С.И. Математика. 5 класс: учебник. – 31-е изд., стер. – М: Мнемозина, 2013. – 280 с.

4. Виноградова Л.В. Методика преподавания математики в средней школе: учеб. пособие/ Л.В. Виноградова. – Ростов н/Д.: Феникс, 2005. –252 с.: ил. – (Здравствуй, школа!).

5. Горбачев В.И. Общие методы решения уравнений и неравенств с параметрами не выше второй степени // Математика в школе. - 2000. - №2. - С. 61-68.

6. Давыдов В.В.Большая рос. энцикл, М., 1999. –1160 с.

7. Ефремова Т.Ф. Современный толковый словарь русского языка. - М.: АСТ, Астрель, Харвест, 2006. - 1168 с.

8. Заяц Ю.С., Щербина А.С. Приемы формирования у младших школьников познавательных универсальных учебных действий в процессе работы с алгоритмами на уроках математики // Статья в сборнике трудов конференции.-2015.-С.131-134. *Режим доступа к статье:* http://elibrary.ru/download/74000527.pdf

9. Зиновьева Л.А., Щеглова Н.Д., Зиновьев А.И. Уравнения, содержащие неизвестную под знаком модуля // Математика в школе. – 1999. - №5. – С. 65-67.

10. Каратаева Н.Г., Федотова О.Д., Формирование основ алгоритмической культуры обучающихся в процессе выполнения нестандартных учебных заданий: Монография. – Ростов-на-Дону: Издательство Международного исследовательского центра «Научное сотрудничество», 2014. – 195 с.

11. Кондаков Н.И. Логический словарь-справочник. – 2-е изд. - М., 1975. - 720 с.

12. Ланда Л.Н. алгоритмизация в обучении. М., 1966.

13. Лапчик, М.П. Обучение алгоритмизации / М.П. Лапчик. - Омск: Изд-во ОмГПУ, 1977. - 101 с.

14. Лысенко Ф.Ф. Математика. 9-й класс. Подготовка к ОГЭ-2016. 40 тренировочных вариантов по демоверсии на 2016 год: учебно–методическое пособие / Под. Ред. Ф.Ф. Лысенко, С.Ю. Кулабухова. – Ростов на Дону: Легион, 2015. – 400 с. – (ОГЭ).

15. Лященко Е.И. Лабораторные и практические работы по методике преподавания математики: Учеб. пособие для студентов физ.- мат. спец. пед. ин-тов / Е.И. Лященко, К.В. Зобкова, Т.Ф. Кириченко и др.; Под ред. Е.И. Лященко. – М.: Просвещение, 1988. –223 с.: ил.

16. Макарычев Ю.Н., Миндюк Н.Г., Нешков К.И. Алгебра. 8 кл.: Учеб. для шк. и кл. с углубл. изуч. математики. - М.: Мнемозина, 2010. - 384с.

17. Марков А. А., Нагорный Н. М. Теория алгорифмов. — 2-е изд.. — М.: ФАЗИС, 1996.

18. Мещеряков Б. Большой психологический словарь / Сост. и общ. ред. Б. Мещеряков, В. Зинченко, – СПб.: Прайм-ЕВРОЗНАК, 2005. – 672 с. (Проект «Психологиче- ская энциклопедия»).

19. Мордкович А.Г. Беседы с учителем математики: Учеб. – метод. пособие /А.Г. Мордкович. – 2-е изд., доп. И перераб. –М.: ООО «Издательский

дом «Оникс 21 век»: ООО «Издательство «Мир и Образование», 2005. – 336 с.: ил. – (Книга для учителя.).

20. Мордкович А.Г. Алгебра. Углубленное изучение. 7 класс: учебник. – 2-е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2013. – 209 с.

21. Мордкович. А.Г. Алгебра. Углубленное изучение. 8 кл.: учебник. – 3-е изд., стер. – Мнемозина, 2013. – 256 с.

22. Мордкович А.Г., Алгебра. Углубленное изучение. 9 класс: учебник. – 2-е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2013. – 296 с.

23. Новиков А.М. Методология учебной деятельности. М.: Эгвес, 2005. 176 с.

24. Овчинникова И.В. Алгоритмический подход в обучении: новое–как хорошо забытое старое // Фундаментальные исследования. - 2008. - №5. - С. 85-86. *Режим доступа к журн.:* http://elibrary.ru/download/63272378.pdf

25. Ожегов, С.И. Толковый словарь русского языка / Под. ред. С.П. Обнорского. - М.: Оникс, 2008 г. - 736 с.

26. Орлов В.В., Стефанова Н.Л., Подходова Н.С., и др. Методика и технология обучения в математике. Лабораторный практикум: учеб. пособие для студентов матем. факультетов пед. университетов / под науч. ред. В.В. Орлова. - М.: Дрофа, 2007. - 320 с.

27. Остапенко С.И. Формирование алгоритмической культуры будущих учителей в процессе дистанционного обучения: дис. канд. пед. наук: 13.00.08. Белгород, 2013. 175 с.

28. Садовников Н.В. Методическая подготовка учителя математики в педвузе в контексте фундаментализации образования: Монография. – Пенза: Пензенский госпедуниверситет, 2005. – 283 с.

29. Селевко Г.К. Современные образовательные технологии. – М.: Изд-во «Народное образование», 1998.

30. Томашев Б.И. Решение иррациональных уравнений в VIII классе способом введения вспомогательных неизвестных. Сборник статей из опыта преподавания алгебры в средней школе. – 1958. – С. 151-156.

31. Удовенко Л.Н. Уровни сформированности алгоритмических компетенций школьников // Ярославский педагогический вестник. - 2013. - №1. - С. 103-107. *Режим доступа к журн.:* http://elibrary.ru/download/48053567.pdf

32. Фролов А.А., Фролова Ю.Н. Соотношение алгоритмизации и эвристики при формировании и трансляции научного знания // Образование и наука.-2007.-№5.-С.11-21. *Режим доступа к журн.:* http://elibrary.ru/download/25403878.pdf

33. Чада Б. Развивать алгоритмическую культуру учащихся // Математика в школе. – 1983.- № 2. – С. 62

34. Шрайнер. А.А., Шрайнер Е.Г. Алгоритмический подход как фактор формирования учебно-исследовательской деятельности обучаемых // Сибирский педагогический журнал. - 2013. - №5. - С. 110-113. *Режим доступа к журн.:* http://elibrary.ru/download/15693337.pdf

35. Юнева Л.С. О формировании алгоритмической культуры у учащихся// Статья в сборнике трудов конференции. - 2015. - С. 206-209. *Режим доступа к статье:* http://elibrary.ru/download/97095162.pdf

36. Ященко И.В. Математика. 9 класс. ОГЭ. Типовые тестовые задания/ И.Р. Высоцкий, Л.О Рослова, Л.В. Кузнецова и др. под редакцией Ященко И.В., Москва.: Издательство «ЭКЗАМЕН», 2015.–81с.

37. Научная библиотека. – URL: http://edu.alnam.ru/book_dmath.php?id=178

38. Образовательный портал для подготовки к экзаменам. – URL: https://ege.sdamgia.ru/test?theme=10

39. Открытый банк заданий ОГЭ. – URL: http://www.fipi.ru/content/otkrytyy-bank-zadaniy-oge

40. Подготовка к ЕГЭ по математике. – URL: http://egemaximum.ru/irracionalnye-uravneniya/

41. Подготовка к ЕГЭ по математике «Способы решения систем уравнений с двумя неизвестными». – URL: http://egemaximum.ru/sposoby-resheniya-sistem-uravnenij-s-dvumya-neizvestnymi/

42. Подготовка к ОГЭ по математике. – URL: http://dist-tutor.info/course/view.php?id=129&item=1021

43. Решение дробно–рациональных неравенств. – URL : http://new.math.msu.su/dop/school/inequations/theory1.htm

44. Тренировочные варианты ЕГЭ. – URL: http://mathematics.ru/courses/algebra/content/chapter3/section2/paragraph3/theory.html#.VziitPmLTIU

45. Уравнения и неравенства с параметрами. – URL: http://nsportal.ru/shkola/algebra/library/2012/10/14/uravneniya-i-neravenstva-s-parametrom

46. Федеральный государственный образовательный стандарт общего основного образования / М-во образования и науки РФ. – М.: Просвещение, 2011.-48с.

47. Халикова В.Р. Циклические алгоритмы. [Электронный ресурс]/ В.Р. Халикова. – URL: http://festival.1september.ru/articles/598696/

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Решение задач, предлагаемых к проведению Основного государственного экзамена в 2016 году по данной теме

Часть I

1.1. Решите неравенство $13(7-2x)-4x \le 1$.

1) $[3;+\infty)$; 2) $(-\infty;-3]$; 3) $(-\infty;3]$; 4) $[-3;+\infty)$;

Решение.

Раскроем скобку: $91-26x-4x \le 1$;

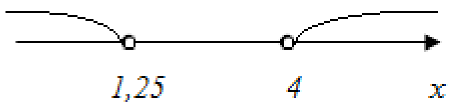
Приведем подобные слагаемые: $-30x \le -90$;

Решим неравенство, получим, что $x \ge 3$;

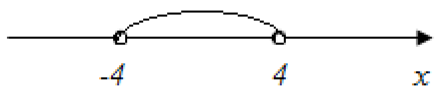
Ответ: 1.

1.2. Решите систему неравенств $\begin{cases} 5(x+3) > 7(x+1) \\ -5-1{,}25x < 0. \end{cases}$ На какой из координатных прямых изображено множество ее решений?

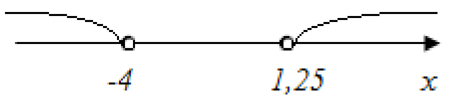
1)



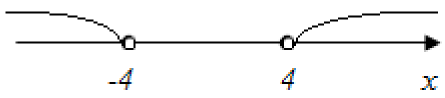
2)



3)



4)



Решение.

$$\begin{cases} 5(x+3) > 7(x+1) \\ -5 - 1{,}25x < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x + 15 > 7x + 7 \\ -1{,}25x < 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x > -8 \\ x > -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 4 \\ x > -4 \end{cases};$$

Ответ: 2.

1.3. Решите систему неравенств $\begin{cases} x^2 - 4x + 4 \le 0 \\ -5x - 10 \le 0. \end{cases}$

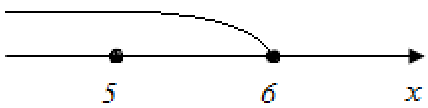
Решение.

$$\begin{cases} x^2 - 4x + 4 \le 0 \\ -5x - 10 \le 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-2)^2 \le 0 \\ -5x \le 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; 2] \cup [2; +\infty) \\ x \ge -2 \end{cases};$$

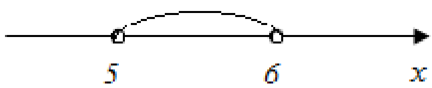
Ответ: $x \in [-2; 2]$.

1.4. Решите систему неравенств $\begin{cases} (x-5)^2 > 0 \\ 18 - 3x \ge 0. \end{cases}$ В ответе укажите номер координатной прямой, на которой изображено множество ее решений.

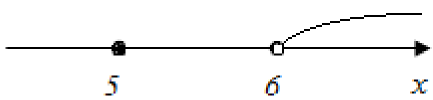
1)



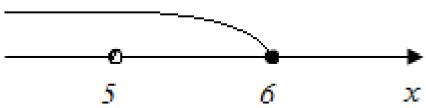
2)



3)



4)



Решение.

$$\begin{cases}(x-5)^2 > 0\\ 18-3x \geq 0\end{cases} => \begin{cases}x \in (-\infty; 5) \cup (5; +\infty)\\ x \leq 6\end{cases};$$

Ответ: 4.

1.5. Укажите неравенство, которое не имеет решения.

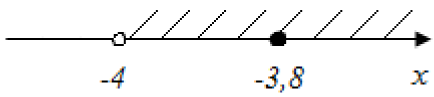
1) $x^2 - 11x + 5 > 0$; 2) $x^2 + 4x - 7 < 0$;

3) $x^2 - 6x + 11 < 0$; 4) $x^2 + 3x - 7 > 0$.

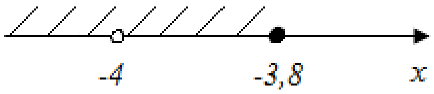
Ответ: 3.

1.6. Решите систему неравенств $\begin{cases}x + 3{,}8 \leq 0\\ x + 4 \geq 0.\end{cases}$ На какой из координатных прямых изображено множество ее решений?

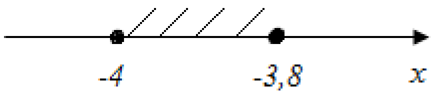
1)



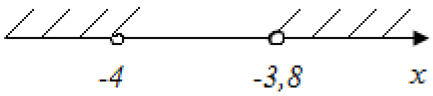
2)



3)



4)



Решение.

$$\begin{cases}x + 3{,}8 \leq 0\\ x + 4 \geq 0\end{cases} => \begin{cases}x \leq -3{,}8\\ x \geq -6\end{cases};$$

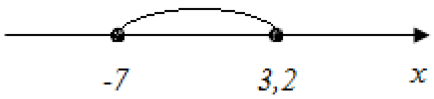
Ответ: 3.

1.7. Решите систему неравенств $\begin{cases}\frac{-5x+4}{12} > -1\\ \frac{7x-5}{3} > \frac{13x+1}{5}.\end{cases}$ Определите, на каком рисунке изображено множество ее решений.

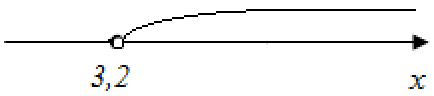
1)

2)

3)



4)



Решение.

$$\begin{cases} \frac{-5x+4}{12} > -1 \\ \frac{7x-5}{3} > \frac{13x+1}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -5x+4 > -12 \\ 5(7x-5) > 3(13x+10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -5x > -16 \\ 35x - 25 > 39x + 3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x < 3{,}2 \\ -4x > 28 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 3{,}2 \\ x < -7 \end{cases};$$

Ответ: 1.

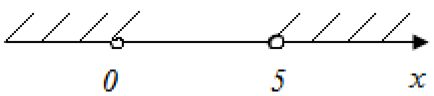
1.8. Решите неравенство $x^2 > 5x$.

1) $(-\infty; 0) \cup (5; +\infty)$; 2) $(-\infty; 0] \cup [5; +\infty)$;

3) $(0; 5)$; 4) $[0; 5]$.

Решение.

$x^2 > 5x \Rightarrow x^2 - 5x > 0 \Rightarrow x(x-5) > 0$



Ответ: 2.

1.9. Укажите решение неравенства $5x - 3(5x - 8) < -7$.

1) $(-\infty; 3{,}1)$;   2) $(-1{,}7; +\infty)$;   3) $(-\infty; -1{,}7)$;   4) $(3{,}1; +\infty)$.

Решение.

$5x - 3(5x - 8) < -7;$

$5x - 15x + 24 < -7;$

$-10x < -31;$

$x > 3{,}1;$

Ответ: 4.

1.10. Укажите неравенство, решением которого является любое число.

1) $x^2 + 70 > 0$; 2) $x^2 - 70 > 0$; 3) $x^2 + 70 < 0$; 4) $x^2 - 70 > 0$.

Решение.

Необходимо выбрать неравенство, при котором $x \in (-\infty; +\infty)$.

Выполним анализ приведенных выражений, имеем $x^2 > -70$ – верно при любом x.

Ответ: 1.

1.11. Укажите решение неравенства $-3 - x \geq x - 6$.

1) $(-\infty; 1{,}5]$; 2) $[1{,}5; +\infty)$; 3) $(-\infty; 4{,}5]$; 4) $[4{,}5; +\infty)$.

Решение.

$-3 - x \geq x - 6$ => $2x \geq -3$ => $x \leq 1{,}5$;

Ответ: 1.

1.12. Укажите решение неравенства $3 - 2x \geq 8x - 1$.

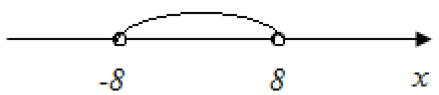
1) $[-0{,}2; +\infty)$; 2) $(-\infty; 0{,}4]$; 3) $[0{,}4; +\infty)$; 4) $(-\infty; -0{,}2]$.

Решение.

$3 - 2x \geq 8x - 1$ => $-10x \geq -4$ => $x \leq 0{,}4$;

Ответ: 2.

1.13. Укажите неравенство, решение которого изображено на рисунке:



1) $x^2 + 64 > 0$; 2) $x^2 - 64 > 0$; 3) $x^2 - 64 < 0$; 4) $x^2 + 64 < 0$.

Решение.

Необходимо найти неравенство, при котором $x \in (-8; 8)$;

$x^2 < 64$ => $|x| \leq 8$;

Ответ: 3.

Часть II

2.1. Уравнения высших степеней:

2.1.1. Решите уравнение: $(x+2)^4 - 4(x+2)^2 - 5 = 0$;

Решение.

Сделаем замену $(x+2)^2 = a$;

$a^2 - 4a - 5 = 0$;

$D = 16 + 20 = 36 = 6^2$;

$a_1 = \frac{4-6}{2} = -1$ – посторонний корень;

$a_2 = \frac{4+6}{2} = 5$;

$(x+2)^2 = 5$;

$x + 2 = \sqrt{5}$ => $x_1 = \sqrt{5} - 2$;

$x + 2 = -\sqrt{5}$ => $x_2 = -\sqrt{5} - 2$;

Ответ: $-\sqrt{5} - 2$; $\sqrt{5} - 2$.

2.1.2. Решите уравнение: $x^4 + x^2 + 2x = 0$;

Решение.

$x^4 + x^2 + 2x = 0$ => $x(x^3 + x + 2) = 0$ => $x = 0$ или $x^3 + x + 2$=0.

$x = -1$ является корнем уравнения $x^3 + x + 2 = 0$. Выделим множитель $x + 1$ в левой части последнего уравнения $x^3 + 1 + x + 1 = 0$.

$(x+1)(x^2 - x + 1) + (x+1) = 0$, $(x+1)(x^2 - x + 2) = 0$. Квадратный трехчлен $x^2 - x + 2$ не имеет корней. Получается, что $x = 0$ и $x = -1$ – корни исходного уравнения.

Ответ: $x_1 = 0$; $x_1 = -1$.

2.1.3. Решите уравнение: $x^4 = (2x - 15)^2$;

Решение.

$x^4 = (2x - 15)^2$ => $x^4 - (2x - 15)^2$=0 => $\left(x^2 - (2x - 15)\right)\left(x^2 + (2x - 15)\right) = 0$ => $(x^2 - 2x + 15)(x^2 + 2x - 15) = 0$. Тогда $x^2 - 2x + 15 = 0$ или $x^2 + 2x - 15 = 0$. Квадратный трехчлен $x^2 - 2x + 15 = 0$ не имеет корней. $x_1 = 3$ и $x_2 = -5$ являются корнями квадратного трехчлена $x^2 + 2x - 15 = 0$.

Ответ: –5; 3.

2.1.4. Решите уравнение: $x^3 = x^2 + 6x$;

Решение.

$x^3 = x^2 + 6x$ => $x^3 - x^2 - 6x = 0$ => $x(x^2 - x - 6) = 0$. Тогда $x = 0$ или $x^2 - x - 6 = 0$. Получается, что $x_1 = -2$ и $x_2 = 3$ – корни исходного уравнения.

Ответ: –2; 0; 3.

2.1.5. Решите уравнение: $(x + 5)^3 = 25(x + 5)$;

Решение.

$(x + 5)^3 = 25(x + 5)$ => $(x + 5)^3 - 25(x + 5) = 0$ => $(x + 5)((x + 5)^2 - 25) = 0$ => $(x + 5)(x^2 + 10x) = 0$ => $x(x + 5)(x + 10) = 0$ => $x_1 = 0$, $x_2 = -5$, $x_3 = -10$.

Ответ: –10, –5, 0.

2.1.6. Решите уравнение: $x(x^2 - 8x + 15) = 4(3 - x)$;

Решение.

$x(x - 3)(x - 5) = 4(3 - x)$;

$x(x - 3)(x - 5) - 4(3 - x) = 0$;

$x(x - 3)(x - 5) + 4(x - 3) = 0$;

$(x - 3)(x(x - 5) + 4) = 0$;

$(x - 3) = 0$ или $(x(x - 5) + 4) = 0$;

$x_1 = 3$, $x_2 = 1$, $x_3 = 4$;

Ответ: 1, 3, 4.

2.1.7. Решите уравнение: $(x - 1)(x^2 + 6x + 9) = 5(x + 3)$;

Решение.

$(x-1)(x+3)^2 = 5(x+3);$

$(x-1)(x+3)^2 - 5(x+3) = 0;$

$(x+3)\big((x-1)(x+3) - 5\big) = 0;$

$(x+3)(x^2 - 2x - 8) = 0;$

$(x+3)(x-2)(x+4) = 0;$

$x_1 = -3, x_2 = 2, x_3 = -4;$

Ответ: –4; –3; 2.

2.1.8. Решите уравнение: $(x^2 - 25)^2 + (x^2 + 3x - 10)^2 = 0;$

Решение.

$(x-5)^2(x+5)^2 + (x-2)^2(x+5)^2 = 0;$

$(x-5)^2((x-5)^2 + (x-2)^2) = 0;$

$(x-5)^2(2x^2 - 14x + 29) = 0;$

$(x-5)^2 = 0$ или $(2x^2 - 14x + 29) = 0;$

Квадратный трехчлен $2x^2 - 14x + 29 = 0$ не имеет решений.

$(x-5)^2 = 0$ => $x_{1,2} = -5;$

Ответ: –5.

2.1.9. Решите уравнение: $(3x-7)^2(x+5) = (3x-7)(x+5)^2;$

Решение.

$(3x-7)^2(x+5) - (3x-7)(x+5)^2 = 0;$

$(3x-7)(x+5)(2x-12) = 0;$

$(3x-7) = 0$ или $(x+5) = 0$ или $(2x-12) = 0;$

$x_1 = \frac{7}{3},\ x_2 = -5,\ x_3 = 6;$

Ответ: –5; $\frac{7}{3}$; 6.

2.2. Дробно–рациональные уравнения и неравенства:

2.2.1. Решите уравнение: $\frac{1}{x^2} + \frac{4}{x} - 12 = 0;$

Решение.

$\frac{1}{x^2} + \frac{4}{x} - 12 = 0 \mid\cdot x^2;$

$1 + 4x - 12x^2 = 0 \mid\cdot (-1);$

$12x^2 - 4x - 1 = 0;$

$D = 16 + 48 = 64 = 8^2;$

$x_1 = \frac{4-8}{24} = -\frac{1}{6};$

$x_2 = \frac{4+8}{24} = \frac{1}{2};$

Ответ: $= -\frac{1}{6}; \frac{1}{2}$.

2.2.2. Решите уравнение: $\frac{3x}{2x+5} - \frac{28-53x}{4x^2-25} = \frac{4x}{2x-5};$

Решение.

$\frac{3x}{2x+5} - \frac{28-53x}{4x^2-25} - \frac{4x}{2x-5} = 0;$

Приведем к общему знаменателю дроби:

$\frac{6x^2-15x-28+53x-8x^2-20x}{(2x-5)(2x+5)} = 0;$

$\frac{-2x^2+18x-28}{(2x-5)(2x+5)} = 0;$

$-2x^2 + 18x - 28 = 0 | \cdot (-1);$

$2x^2 - 18x + 28 = 0 | \div 2;$

$x^2 - 9x + 14 = 0;$

$D = 81 - 56 = 25 = 5^2;$

$x_1 = \frac{9-5}{2} = 2;$

$x_2 = \frac{9+5}{2} = 7;$

Ответ: 2; 7.

2.2.3. Решите уравнение $\frac{3}{(x-2)^2} + \frac{5}{x-2} - 8 = 0;$

Решение.

$\frac{3}{(x-2)^2} + \frac{5}{x-2} - 8 = 0 \; | \cdot (x-2)^2;$

$3 + 5x - 10 - 8x^2 + 32x - 32 = 0;$

$-8x^2 + 37x - 39 = 0 \; | \cdot (-1);$

$8x^2 - 37x + 39 = 0;$

$D = 1369 - 1248 = 121 = (11)^2;$

$x_1 = \frac{37-11}{16} = \frac{13}{8} = 1\frac{5}{8}$;

$x_2 = \frac{37+11}{16} = \frac{48}{16} = 3$;

Ответ: $1\frac{5}{8}$; 3.

2.2.4. Решите неравенство: $\frac{-14}{(x-5)^2-2} \geq 0$;

Решение.

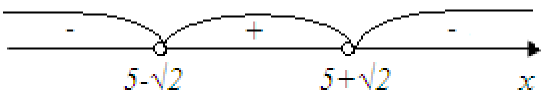
$(x-5)^2 - 2 = 0$;

$x^2 - 10x + 23 = 0$;

$D = 100 - 92 = 8 = 2\sqrt{2}$;

$x_1 = \frac{10-2\sqrt{2}}{2} = 5 - \sqrt{2}$;

$x_2 = \frac{10+2\sqrt{2}}{2} = 5 + \sqrt{2}$;



Ответ: $x \in (5-\sqrt{2}; 5+\sqrt{2})$.

2.3. Иррациональные уравнения и неравенства:

2.3.1. Решите уравнение: $x^2 - 2x + \sqrt{3-x} = \sqrt{3-x} + 8$;

Решение.

$x^2 - 2x + \sqrt{3-x} - \sqrt{3-x} - 8 = 0$; ОДЗ: $\sqrt{3-x} > 0$;

$x^2 - 2x - 8 = 0$; $3 - x > 0 \Rightarrow x < 3$.

$D = 4 + 32 = 36 = 6^2$;

$x_1 = \frac{2+6}{2} = 4 -$ не подходит по ОДЗ;

$x_2 = \frac{2-6}{2} = -2$;

Ответ: 2.

2.3.2. Решите неравенство: $(x-3)^2 < \sqrt{5}(x-3)$;

Решение.

$(x-3)^2 - \sqrt{5}(x-3) < 0$;

$(x-3)(x-3-\sqrt{5}) < 0$;

$(x-3)=0$ или $\left(x-3-\sqrt{5}\right)=0$;

$x_1=3$ $\qquad\qquad$ $x_1=3+\sqrt{5}$;

Ответ: $x\in(3;3+\sqrt{5})$.

2.4. Системы уравнений и неравенств:

2.4.1. Решите систему уравнений $\begin{cases}2x^2+4y^2=24\\4x^2+8y^2=24x\end{cases}$;

Решение.

$$\begin{cases}2x^2+4y^2=24\ |\cdot(-2)\\4x^2+8y^2=24x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x^2+4y^2=24\\24x-48=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x^2+4y^2=24\\24x=48\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}2x^2+4y^2=24\\x=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y^2=4\\x=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y_1=2,y_2=-2\\x=2\end{cases};$$

Ответ: $x=2$; $y=\pm2$.

2.4.2. Решите систему уравнений: $\begin{cases}3x-y=8\\(3x+y)(9x^2-y^2)=128\end{cases}$;

Решение.

$$\begin{cases}3x-y=8\\(3x+y)(9x^2-y^2)=128\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3x-y=8\\(3x+y)(3x-y)(3x+y)=128\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}y=3x-8\\8(3x+y)^2=128\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=3x-8\\(3x+y)^2=16\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=3x-8\\\left[\begin{array}{l}3x+y=4\\3x+y=-4\end{array}\right.\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}y=3x-8\\\left[\begin{array}{l}y=4-3x\\y=-4-3x\end{array}\right.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x_1=2\\x_2=\frac{2}{3}\end{array}\right.\\\left[\begin{array}{l}y_1=-2\\y_2=-6\end{array}\right.\end{cases};$$

Ответ: (2,–2); ($\frac{2}{3}$, –6).

2.3.8. Решите систему уравнений: $\begin{cases}x+2y=-8\\\frac{x}{4}+\frac{y+6}{3}=-1\end{cases}$;

Решение.

$$\begin{cases}x+2y=-8\\\frac{x}{4}+\frac{y+6}{3}=-1\ |\cdot(12)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-8-2y\\3x+4y=-36\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-8-2y\\3(-8-2y)+4y=-36\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}x=-20\\y=6\end{cases};$$

Ответ: (–20, 6).

2.3.9. Решите систему неравенств: $\begin{cases} 6x + 18 \leq 0 \\ x + 8 \geq 2 \end{cases}$;

Решение.

$\begin{cases} 6x + 18 \leq 0 \\ x + 8 \geq 2 \end{cases}$ => $\begin{cases} 6x \leq -18 \\ x \geq -6 \end{cases}$ => $\begin{cases} x \leq -3 \\ x \geq -6 \end{cases}$;

Ответ: $x \in [-6; -3]$.