Министерство образования и науки Российской Федерации
Тольяттинский государственный университет
Гуманитарно-педагогический институт
Кафедра «Педагогика и методики преподавания»

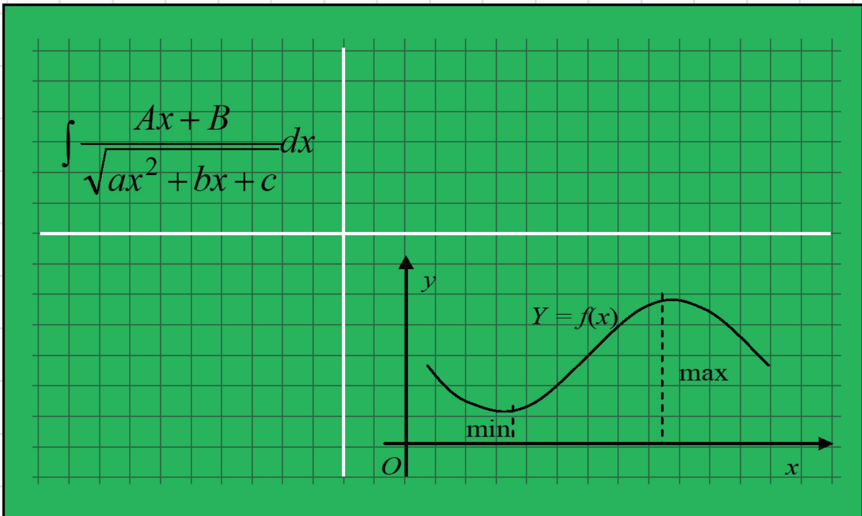
Г.В. Ахметжанова
Е.С. Павлова

МАТЕМАТИКА

Электронное учебное пособие

В трёх частях

Часть 1



ISBN 978-5-8259-1196-0

УДК 517(075.8)
ББК 22.1я73

Рецензенты:
д-р пед. наук, профессор кафедры «Высшая математика
и прикладная информатика» Самарского государственного
технического университета *Е.Н. Рябинова*;
д-р пед. наук, профессор кафедры «Педагогика и методики
преподавания» Тольяттинского государственного университета
Ю.А. Кустов.

Ахметжанова, Г.В. Математика : электронное учебное пособие : в 3 ч. / Г.В. Ахметжанова, Е.С. Павлова. – Тольятти : Изд-во ТГУ, 2018. – Ч. 1. – 1 оптический диск.

Учебное пособие содержит весь необходимый материал для изучения модулей «Неопределенный интеграл», «Определенный интеграл», «Дифференцирование функции одной переменной», «Дифференцирование функции нескольких переменных». В каждом модуле представлен теоретический материал, примеры для практических занятий и самостоятельного решения, а также теоретический и практический тест для проверки уровня знаний студентов.

Предназначено для студентов различных направлений бакалавриата, изучающих дисциплину «Высшая математика».

Текстовое электронное издание.

Рекомендовано к изданию научно-методическим советом Тольяттинского государственного университета.

Минимальные системные требования: IBM PC-совместимый компьютер: Windows XP/Vista/7/8; PIII 500 МГц или эквивалент; 128 Мб ОЗУ; SVGA; CD-ROM; Adobe Acrobat Reader.

Редактор *О.И. Елисеева*
Технический редактор *Н.П. Крюкова*
Компьютерная верстка: *Л.В. Сызганцева*
Художественное оформление,
компьютерное проектирование: *И.И. Шишкина*

Дата подписания к использованию 12.03.2018.
Объем издания 10,4 Мб.
Комплектация издания:
компакт-диск, первичная упаковка.
Заказ № 1-70-16.

Издательство Тольяттинского государственного университета
445020, г. Тольятти, ул. Белорусская, 14,
тел. 8 (8482) 53-91-47, www.tltsu.ru

Содержание

ВВЕДЕНИЕ

Учебное пособие «Математика» по своей структуре и содержанию соответствует ФГОС ВО различных направлений бакалавриата.

Цель учебного пособия – оказать студентам помощь в овладении теоретическим материалом с наименьшей затратой времени, привить им навыки самостоятельного изучения литературы, научить решать задачи.

Материал в учебном пособии излагается доступно, его разделы согласованно и соразмерно наполнены учебной информацией, содержательная сложность отвечает современным требованиям. Изложение теоретического материала сопровождается рассмотрением большого количества примеров, даны задания для самостоятельного решения.

Данное пособие может быть полезно и студентам-заочникам при выполнении индивидуальных домашних заданий. Учебное пособие может быть также использовано начинающими педагогическую деятельность в области преподавания высшей математики для организации аудиторных практических занятий на разных ступенях образования.

В пособии представлен материал, в результате изучения которого студент должен сформировать и продемонстрировать общекультурные и профессиональные компетенции, представленные в ФГОС ВО.

Студенты направления подготовки бакалавра 18.03.02 «Энерго- и ресурсосберегающие процессы в химической технологии, нефтехимии и биотехнологии» должны научиться:

- использованию основных положений и методов социальных, гуманитарных и естественных наук при решении социальных и профессиональных задач (ОК-10);
- использованию основных законов естественно-научных дисциплин в профессиональной деятельности, применению методов математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования (ПК-1);
- использованию основных естественно-научных законов для понимания окружающего мира и явлений природы (ПК-2).

Студенты направления подготовки бакалавра 04.03.01 «Химия» смогут:
- использовать основные законы естественно-научных дисциплин в профессиональной деятельности, применять методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования (ПК-1);
- владеть методами регистрации и обработки результатов химических экспериментов (ПК-8).

Студенты направления подготовки бакалавра 18.03.01 «Химическая технология» выработают способность:
- к саморазвитию, повышению своей квалификации и мастерства, приобретению новых знаний в области техники и технологии, математики, естественных, гуманитарных, социальных и экономических наук (ОК-7);
- составлять математические модели типовых профессиональных задач, находить способы их решений и интерпретировать профессиональный (физический) смысл полученного математического результата (ПК-8);
- и готовность использовать основные законы естественно-научных дисциплин в профессиональной деятельности, применять методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования (ПК-1).

Студенты направления подготовки бакалавра 08.03.01 «Строительство» овладеют:
- способами использования основных законов естественно-научных дисциплин в профессиональной деятельности, применения методов математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования (ПК-1);
- способностью выявить естественно-научную сущность проблем, возникающих в ходе профессиональной деятельности, привлечь для их решения соответствующий физико-математический аппарат (ПК-2);
- основными методами, способами и средствами получения, хранения, переработки информации, навыками работы с компьютером как средством управления информацией (ПК-5);
- навыками математического моделирования на базе стандартных пакетов автоматизации проектирования и исследований, метода-

ми постановки и проведения экспериментов по заданным методикам (ПК-18).

Студенты направления подготовки бакалавра 19.03.01 «Биотехнология» продемонстрируют:

– способность осуществлять технологический процесс в соответствии с регламентом и использовать технические средства для измерения основных параметров биотехнологических процессов, свойств сырья и продукции (ПК-1);
– готовность оценивать технические средства и технологии с учетом экологических последствий их применения (ПК-3).

Студенты направления подготовки бакалавра 44.03.02 «Психолого-педагогическое образование» приобретут способность:

– организовывать на уроках совместную и самостоятельную учебную деятельность, деятельность школьников младших классов, направленную на достижение целей и задач реализуемой образовательной программы (ПК-7);
– проводить диагностику уровня освоения детьми содержания учебных программ с помощью стандартных предметных заданий, внося (совместно с методистами) необходимые изменения в построение образовательной деятельности (ПК-8).

Пособие оснащено примерами и заданиями из смежных наук, позволяющими реализовывать межпредметные связи математики с другими дисциплинами. В данном пособии представлен глоссарий, дающий возможность оптимально использовать математические термины.

Условные обозначения

⇨	Запомнить
$\mathfrak{I}$	Теорема
?	Вопросы
✍	Выполните самостоятельно
$\mathfrak{R}$	Задача
●	Начало и окончание решения задачи или доказательства теоремы
$\wp$	Важно

1. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

1.1. Понятие производной и правила нахождения производных

1.1.1. Определение производной

К вычислению производной данной функции мы приходим всякий раз, когда требуется определить скорость изменения одной величины (функции) в зависимости от изменения другой величины (независимой переменной).

⇨Определение. ***Средней скоростью изменения функции*** $y = f(x)$ при переходе независимой переменной от значения x к значению $x + \Delta x$ называется отношение приращения Δy функции к приращению Δx независимой переменной:

$$V_{\text{ср}} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

⇨Определение. ***Истинной (мгновенной) скоростью изменения*** функции $y = f(x)$ при данном значении x называют предел, к которому стремится средняя скорость изменения функции при стремлении к нулю Δx:

$$V = \lim_{\Delta x \to 0} V_{\text{ср}} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

При вычислении этого предела следует считать x величиной постоянной. Переменной же величиной здесь является Δx (фиксированное значение переменной x может быть выбрано произвольным образом, но при дальнейших вычислениях оно не изменяется). Производную, вычисленную через предел при заданном значении переменной x, можно считать функцией от этой же переменной, причем областью определения этой функции будет всё множество значений переменной x, на котором существует данный предел. Функция $y = V(x)$, полученная в силу определения предела, называется производной от функции $y = f(x)$.

⇨Определение. ***Производной функции*** $y = f(x)$ по независимой переменной x называется предел, к которому стремится отношение приращения функции Δy к приращению аргумента Δx, когда последнее стремится к нулю. Операция нахождения производной называется дифференцированием функции. Производной первого порядка функции $y = f(x)$ по аргументу x называется предел:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=f'(x)=\frac{df}{dx}.$$

Производная функция при частном значении x есть число, если при этом значении x производная имеет конечное значение.

⇨Обозначение производной. Производная функции $y = f(x)$ обозначается одним из символов y'_x, y', $\frac{dy}{dx}$, $f'(x)$; а ее значение при $x = x_0$ обозначается так: $y'_x(x_0)$, $y'(x_0)$, $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}$, $f'(x_0)$.

$\mathfrak{R}$ **Пример**. Найти производную функции $y = x^2$, используя определение:

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^2-x^2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x^2+2x\Delta x+(\Delta x)^2-x^2}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2x\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x)=2x.$$

✍ **Задание.**

Найдите производную, используя определение:

1. $y = x^3$

1	2	3	4
$3x^2$	$\frac{x^2}{3}$	$3x^3$	$\frac{x^3}{3}$

2. $y = c$, $c = \text{const}$

1	2	3	4
c^2	c	1	0

3. $y = \sin x$. *Указание*: использовать формулу

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

1	2	3	4
$\sin x$	$-\sin x$	$\cos x$	$-\cos x$

1.1.2. Основные правила дифференцирования

Если функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ дифференцируемы в точке x, тогда справедливы следующие правила дифференцирования:
1) $(c \cdot u)' = c \cdot u'$, где c – постоянная;
2) $(u \pm v)' = u' \pm v'$;
3) $(u \cdot v)' = u' \cdot v + v' \cdot u$;
4) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2}$.

Пусть функция $y = f(u)$, где $u = u(x)$. Тогда y есть ***сложная функция*** от x: $y = f(u\ (x))$, а u – промежуточный аргумент. Чтобы найти производную этой сложной функции, применяют следующее правило:

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = y'_u \cdot u'_x,\ \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

1.1.3. Таблица основных формул дифференцирования

На практике чаще всего приходится находить производные от сложных функций, поэтому в приведённых ниже формулах дифференцирования используется промежуточный аргумент u.

$$\left(u^n\right)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u' \qquad \left(\sin u\right)' = \cos u \cdot u' \qquad \left(\mathrm{sh}\, u\right)' = \mathrm{ch}\, u \cdot u'$$

$$\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}} \qquad \left(\cos u\right)' = -\sin u \cdot u' \qquad \left(\mathrm{ch}\, u\right)' = -\mathrm{sh}\, u \cdot u'$$

$$\left(e^u\right)' = e^u \cdot u' \qquad \left(\mathrm{tg}\, u\right)' = \frac{u'}{\cos^2 u} \qquad \left(\mathrm{th}\, u\right)' = \frac{u'}{\mathrm{ch}^2 u}$$

$$\left(a^u\right)' = a^u \cdot \ln a \cdot u' \qquad \left(\mathrm{ctg}\, u\right)' = -\frac{u'}{\sin^2 u} \qquad \left(\mathrm{cth}\, u\right)' = -\frac{u'}{\mathrm{sh}^2 u}$$

$$\left(\ln u\right)' = \frac{u'}{u} \qquad \left(\arcsin u\right)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} \qquad \left(\arccos u\right)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$\left(\log_a u\right)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a} \qquad \left(\mathrm{arctg}\, u\right)' = \frac{u'}{1+u^2} \qquad \left(\mathrm{arcctg}\, u\right)' = -\frac{u'}{1+u^2}$$

$\mathfrak{R}$ **Пример**. Найти производную функций:
1. $y = 2x^3 - 5x^2 + 7x + 4$, $y = ?$

$y' = (2x^3)' - (5x^2)' + (7x)' + (4)' = 2(x^3)' - 5(x^2)' + 7(x)' + (4)' =$
$= 2 \cdot 3x^2 - 5 \cdot 2x + 7 \cdot 1 + 0 = 6x^2 - 10x + 7.$

2. $f(x) = (x^4 - x) \cdot (3\,\mathrm{tg}\, x - 1)$.

Воспользуемся формулой для производной произведения:

$$f'(x) = \left[\left(x^4 - x\right)\cdot\left(3\operatorname{tg}x - 1\right)\right]' = \left(x^4 - x\right)'\cdot\left(3\operatorname{tg}x - 1\right) + \left(x^4 - x\right)\cdot\left(3\operatorname{tg}x - 1\right)' =$$

$$= \left(4x^3 - 1\right)\cdot\left(3\operatorname{tg}x - 1\right) + \left(x^4 - x\right)\cdot\frac{3}{\cos^2 x}.$$

✍ **Задание**. Найдите производные функций:

1. $y = x\sqrt{x}\left(3\ln x - 2\right), y' = ?$

Указание: используйте формулу производной произведения.

2. $y = \dfrac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}, y' = ?$

Указание: используйте формулу производной частного.

3. $y' = \dfrac{x - \sqrt{1-x^2}\cdot\arcsin x}{x\cdot\sqrt{1-x^2}}.$

Указание: используйте формулу производной частного и произведения.

ℜ **Пример**. Найти производную функций:

1. $y = (2x^3 + 5)^4$, $y' = ?$

Обозначим $u = 2x^3 + 5$, тогда $y' = (u^4)'$. По правилу дифференцирования сложной функции имеем: $y' = (u^4)' = 4u^3(6x^2) = 24x^2(2x^3 + 5)^3$.

2. $y = \ln(\operatorname{arctg}3x)$.

Функция $\ln(\operatorname{arctg}3x)$ – композиция функций $u = \operatorname{arctg}3x$ и $f(u) = \ln u$, откуда

$$y'(x) = (\ln u)'_x = \frac{1}{u}\cdot u' = \frac{1}{\operatorname{arctg}3x}\cdot(\operatorname{arctg}3x)'.$$

Функция $\operatorname{arctg}3x$, в свою очередь, является композицией двух функций $v = 3x$ и $g(v) = \operatorname{arctg}v$, поэтому для нахождения ее производной нам придется еще раз применить правило дифференцирования сложной функции:

$$(\operatorname{arctg}3x)' = (\operatorname{arctg}v)'_x = \frac{1}{1+v^2}\cdot v' = \frac{1}{1+(3x)^2}\cdot 3 = \frac{3}{1+9x^2}.$$

Отсюда окончательно

$$y' = \frac{1}{\operatorname{arctg}3x}\cdot(\operatorname{arctg}3x)' = \frac{3}{(1+9x^2)\operatorname{arctg}3x}.$$

✍ **Задания**

1. Установите соответствие между функцией и ее производной:

Функция	Ее производная
$y = \cos^2 x$	$-\sin 2x$
$y = \cos 2x$	$\sin 2x$
$y = \cos^2 2x$	$2\sin 4x$
$y = \sin^2 x$	$-2\cos 2x$
$y = \sin 2x$	$-2\sin 4x$
$y = \sin^2 2x$	$-2\sin 2x$

2. Выберите правильный ответ для нахождения производной функции $y = \sin^3 \dfrac{x}{3}$.

1	2	3	4
$\sin^2 \dfrac{x}{3} \cos \dfrac{x}{3}$	$3\sin^2 \dfrac{x}{3} \cos \dfrac{x}{3}$	$3\cos^2 \dfrac{x}{3}$	$3\sin^2 \dfrac{x}{3}$

3. Найдите производную функции $y = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$.

1.1.4. Дифференцирование функций, заданных неявно

Если функция задана уравнением $y = f(x)$, разрешённым относительно y, то функция ***задана в явном виде*** (явная функция).

Под ***неявным заданием*** функции понимают задание функции в виде уравнения $F(x; y) = 0$, не разрешённого относительно y.

Если неявная функция задана уравнением $F(x; y) = 0$, то для нахождения производной от y по x нет необходимости разрешать уравнение относительно y: достаточно продифференцировать это уравнение по x, рассматривая при этом y как функцию от x, и полученное затем уравнение разрешить относительно y'.

Производная неявной функции выражается через аргумент x и функцию y.

$\mathfrak{R}$ **Пример**. Найти производную функции y, заданной уравнением:

$$x^3 + y^3 - 3xy = 0$$

$$\left(x^3 + y^3\right)' - (3xy)' = 0$$

$$3x^2 + 3y^2 y' - 3y - 3xy' = 0$$

$$y'\left(3y^2 - 3x\right) = 3y - 3x^2$$

$$y' = \frac{3y - 3x^2}{3y^2 - 3x}$$

✍ **Задание**. Найдите производные следующих функций:

1) $\sqrt[3]{y^5} - \ln(x+y) = x$; 2) $\frac{x+y^2}{2y} = x^2$;

3) $3^{\frac{x}{y}} - x^2 - y^2 = 0$;   4) $x^2 = y + \operatorname{arctg} y$.

1.1.5. Дифференцирование функций, заданных параметрически

Пусть зависимость между аргументом x и функцией y задана параметрически в виде двух уравнений

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t). \end{cases}$$

Тогда производная находится по формуле $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$.

ℜ **Пример**. Найти производную функции:

$$\begin{cases} x = \dfrac{t^2 - 4}{t}; \\ y = \dfrac{t^2 + 4}{t}; \end{cases}$$

$$x'_t = \left(\frac{t^2 - 4}{t}\right)' = \frac{2t \cdot t - 1 \cdot (t^2 - 4)}{t^2} = \frac{2t^2 - t^2 + 4}{t^2} = \frac{t^2 + 4}{t^2};$$

$$y'_t = \left(\frac{t^2 + 4}{t}\right)' = \frac{2t \cdot t - 1 \cdot (t^2 + 4)}{t^2} = \frac{2t^2 - t^2 - 4}{t^2} = \frac{t^2 - 4}{t^2}.$$

Значит $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{t^2 - 4}{t^2 + 4}$.

✍ **Задание**. Найдите производные функций:

1. $\begin{cases} x = \arcsin(t^2 - 1); \\ y = \arccos 2t. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x = \dfrac{3at}{1+t^2}; \\ y = \dfrac{3at^2}{1+t^2}. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x = 2\ln \operatorname{ctg} t + 1; \\ y = \operatorname{tg} t + \operatorname{ctg} t. \end{cases}$ 4. $\begin{cases} x = \sqrt{t}; \\ y = \sqrt[3]{t}. \end{cases}$

1.1.6. Логарифмическое дифференцирование

В ряде случаев для нахождения производной целесообразно заданную функцию сначала прологарифмировать, а затем результат продифференцировать. Такую операцию называют ***логарифмическим дифференцированием***.

К этому приему удобно прибегать и при дифференцировании выражений, содержащих корни из дробей, сложно-показательных функций вида $y = [f(x)]^{g(x)}$, т. е. когда основание и показатель степени являются функциями от x.

Для нахождения производной от функции $y = u^v$ можно воспользоваться формулой

$$(u^v)' = u^v \cdot \ln u \cdot v' + v \cdot u^{v-1} \cdot u'.$$

ℜ **Пример**. Найти производную функции

Здесь основание и степень зависят от x, логарифмируя, получим

$$\ln y = x^2 \ln x.$$

Продифференцируем обе части последнего равенства по x. Так как y является функцией от x, то $\ln x$ является сложной функцией от x и $(\ln y)' = \frac{1}{y} y'$, следовательно,

$$\frac{1}{y} y' = x^2 \frac{1}{x} + 2x \ln x;$$

$$\frac{y'}{y} = x(1 + 2\ln x),\quad y' = y \cdot x(1 + 2\ln x) = x^{x^2} \cdot x(1 + 2\ln x) = x^{x^2+1}(1 + 2\ln x).$$

✍ **Задание**. Найдите производные функций:

1) $y = \dfrac{(2x-1)^3 \sqrt{3x+2}}{(5x+4)^2 \sqrt[3]{1-x}}$; 2) $y = (\sin x)^{\cos x}$;

3) $y = (\arccos x)^{e^v}$; 4) $y = (\operatorname{tg} x)^x$.

℘ *Указания*

1. Прологарифмируйте заданную функцию.
2. Найдите производную от обеих частей.
3. Запишите ответ.

1.1.7. Производные высших порядков

Функции, заданные явно

Производной n-го порядка функции $f(x)$ называется первая производная от производной $(n-1)$-го порядка:

$$f^{(n)}(x) = [f^{(n-1)}(x)]'.$$

Функции, заданные неявно

Пусть функция задана неявно в виде уравнения $F(x; y) = 0$.

Продифференцировав это уравнение по x и разрешив полученное уравнение относительно y', найдём производную первого порядка. Продифференцировав по x первую производную, получим вторую производную от неявной функции. В неё войдут x, y и y'. Подставляя уже найденное значение y' в выражение второй производной, выразим y'' через x и y.

Аналогично поступаем для нахождения производной третьего (и дальше) порядка.

Функции, заданные параметрически

Пусть функция $y = f(x)$ задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t). \end{cases}$$

Производная второго порядка находится по формуле

$$y''_{xx} = \left(y'_x\right)'_x = \frac{\left(y'_x\right)'_t}{x'_t}.$$

$\mathfrak{R}$ **Пример**. Найдите производную y'', если $x^2 + y^2 = 1$.

Найдем первую производную, если $y = \sqrt{1-x^2}$:

$$y' = \left(\sqrt{1-x^2}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\left(-2x^2\right) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Найдем вторую производную

$$y' = \left(\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\right)' = \frac{-\sqrt{1-x^2} + x\dfrac{1}{2\sqrt{1-x^2}}(-2x)}{1-x^2} = \frac{-\left(1-x^2\right)-x^2}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}} = \frac{-1}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}}.$$

✍ **Задания**

1. Найдите вторую производную функции $\begin{cases} y = \cos t \\ x = \sin t \end{cases}$.
2. Найдите значение пятой производной функции $y = e^{3x+3}$ в точке $x = 0$.
3. Найдите производную второго порядка $y = \ln(\sin x)$.

1.2. Дифференциал функции. Механический и геометрический смысл производной

1.2.1. Механический смысл производной

Скорость в момент времени определяется равенством

$$V_{\text{ср}} = \lim_{\Delta t \to 0} V_{\text{ср}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}.$$

Таким образом, скорость точки в момент времени t есть производная от пути S по времени t.

1.2.2. Геометрический смысл производной

Производная от функции $f(x)$, вычисленная при заданном значении x, образованном положительным направлением оси Ox и положительным направлением касательной (положительным направлением на касательной считается то направление, в котором возрастает абсцисса), проведенной к графику этой функции в точке с абсциссой x, равна угловому коэффициенту касательной к графику данной функции $y = f(x)$ в соответствующей точке x_0.

Таким образом, $y' = f'(x) = \operatorname{tg}\alpha$.

Уравнение касательной

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

Уравнение нормали

$$y - y_0 = \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

$\mathfrak{R}$ **Пример**. Составить уравнение касательной к кривой $y = \sqrt{1-4x}$ в точке, абсцисса которой $x_0 = -2$.

1. Найдем $f(x_0) = \sqrt{1-4(-2)} = 3$.
2. Найдем $f'(x_0) = \dfrac{1}{2\sqrt{1-4x}}(-4) = \dfrac{-2}{\sqrt{1-4x}} = \dfrac{-2}{3}$.

3. Запишем уравнение касательной $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$:

$$y - 3 = -\frac{2}{3}(x + 2)$$

$$y = 3 - \frac{2}{3}x - \frac{4}{3}$$

$$y = \frac{-2}{3}x + 1\frac{2}{3}$$

✍ **Задания**

1. В каких точках угловой коэффициент касательных к графику функции $y = 2x^3 - 2x^2 + x - 1$ равен 3?

2. Угол, на который повернётся колесо за время t,

$$\varphi(t) = 100 + 3t - 0{,}01t^3.$$

Найти ускорение в тот момент времени, когда колесо остановится (φ измеряется в радианах, t — в секундах).

3. Тело массой 4 кг движется прямолинейно по закону

$$x(t) = \frac{5t^2}{3} + \frac{9}{t}.$$

Определить кинетическую энергию этого тела в момент времени $t = 3$ с (x измеряется в метрах).

4. Найти точки, в которых касательная к графику гиперболы $y = \frac{1}{x}$ параллельна прямой $y = -\frac{1}{4}x + 3$.

5. Составить уравнение нормали к кривой $y = \sqrt{1 - 4x}$ в точке $x_0 = -3$.

1.2.3. Дифференциал функции

Понятие дифференциала функции

Дифференциал функции равен произведению производной этой функции на дифференциал независимой переменной: $dy = f'(x)\,dx$.

ℜ **Пример**. Найти дифференциал функции

$$y = \ln\left(1 + e^{10x}\right) + \sqrt{x^2 + 1}.$$

По определению получаем:

$$dy = \left(\frac{1}{1 + e^{10x}}10e^{10x} + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}}\right)dx$$

$$dy = \left(\frac{10e^{10x}}{1+e^{10x}} + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \right) dx.$$

✍ **Задание**. Используя определение дифференциала функции, найдите дифференциал следующей функции:

$$y = x \arcsin \frac{1}{x} + \ln \left| x + \sqrt{x^2 - 1} \right|.$$

Геометрический смысл дифференциала

Дифференциал функции $y = f(x)$ в точке x равен приращению ординаты касательной к графику функции в этой точке, когда x получит приращение Δx (рис. 1).

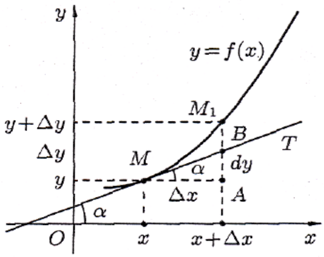


Рис. 1. Понятие дифференциала функции

Основные теоремы о дифференциалах

ℑ **Теорема 1**. Дифференциал суммы, произведения и частного двух дифференцируемых функций определяются следующими формулами:

$$d(u + v) = du + dv,$$

$$d(u \cdot v) = v \cdot du + u \cdot dv,$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du + u\,dv}{v^2} \quad (v \neq 0).$$

ℑ **Теорема 2**. Дифференциал сложной функции равен произведению производной этой функции по промежуточному аргументу на дифференциал этого промежуточного аргумента:

$$dy = y_u' \cdot du.$$

Применение дифференциала к приближенным вычислениям

Формула для вычисления приближенных значений функции

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \times \Delta x.$$

$\mathfrak{R}$ **Пример**. Вычислить приближённо arctg 1,05.

Указание. Рассмотрим функцию $f(x) = \mathrm{arctg}\,x$, где $x_0 = 1$, $\Delta x = 0{,}05$:

$$f(x_0) = f(1) = \mathrm{arctg}1 = \frac{\pi}{4} = 0{,}78$$

$$f'(x_0) = \frac{1}{1 + x^2} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

$$\mathrm{arctg}1{,}05 = 0{,}78 + 0{,}5 \cdot 0{,}05 = 0{,}78 + 0{,}02 = 0{,}8.$$

✍ **Задания**

1. Вычислите приближенно $\sqrt[3]{\dfrac{1-x}{1+x}}$ при $x = 0{,}01$.

℘ *Указания*:

1) укажите x_0 и Δx;
2) запишите функцию $f(x)$;
3) найдите значение функции в точке x_0;
5) найдите производную функции в точке x_0;
5) вычислите значение функции $f(x)$ при $x = 0{,}01$, используя формулу вычисления приближенных значений функций.

2. Вычислить приближенно, используя алгоритм, рассмотренный выше:

а) arccos $(1 - x)$ при $x = 1{,}08$;   б) $e^{0,05}$.

1.3. Правило Лопиталя

Правило Лопиталя применяется для раскрытия неопределённостей вида $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$, которые называются основными.

$\mathfrak{I}$ **Теорема 1** (правило Лопиталя, раскрытие неопределённостей вида $\frac{0}{0}$)

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны и дифференцируемы в окрестности точки x_0 и обращаются в нуль в этой точке:

$$f(x_0) = g(x_0) = 0.$$

Пусть $g'(x) \neq 0$ в окрестности точки x_0. Если существует предел

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=l,$$

то

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=l.$$

ℜ **Пример**. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 6x}{2x^2}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 6x}{2x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{6\sin 6x}{4x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{36\cos 6x}{4}=\frac{36}{4}=9.$$

✍ **Задание**. Найдите $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{x\ln x}$.

ℑ **Теорема 2** (правило Лопиталя, раскрытие неопределённости вида $\frac{\infty}{\infty}$)

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны и дифференцируемы в окрестности точки x_0 (кроме, может быть, точки x_0), в этой окрестности $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\infty$, $g'(x)\neq 0$. Если существует предел $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, то то $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

ℜ **Пример**. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\sin 3x}{\ln x}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\sin 3x}{\ln x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{3}{\sin 3x}\cos 3x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{\operatorname{ctg}3x}=\lim_{x\to 0}\frac{3\sin^2 x}{-3}=0.$$

✍ **Задание**. Найдите $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\operatorname{tg}3x}{\operatorname{tg}5x}$.

℘ Неопределённости вида $[0\cdot\infty]$, $[\infty-\infty]$, $[1^\infty]$, $[\infty^0]$, $[0^0]$ путём тождественных преобразований сводятся к двум основным: $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$.

Пусть $f(x)\to 0$ и $g(x)\to 0$ при $x\to x_0$. Тогда для раскрытия неопределенности $[0\cdot\infty]$ нужно представить выражение, стоящее под знаком предела, в виде: $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

$\mathfrak{R}$ **Пример**:

Найти $\lim\limits_{x\to 0}(x\cdot\operatorname{ctg}\pi x)$.

$$\lim_{x\to 0}(x\cdot\operatorname{ctg}\pi x)=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\operatorname{tg}\pi x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{\pi}{\cos^2\pi x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2\pi x}{\pi}=\frac{1}{\pi}.$$

✍ **Задание**. Найдите $\lim\limits_{x\to 2}\operatorname{tg}\frac{\pi x}{4}(2-x)$.

Пусть $f(x)\to\infty$ и $g(x)\to\infty$ при $x\to x_0$. Тогда для раскрытия неопределенности $[\infty-\infty]$ нужно представить выражение, стоящее под знаком предела, в виде

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)-g(x))=[\infty-\infty]=\lim_{x\to x_0}\left(\frac{1}{\frac{1}{f(x)}}-\frac{1}{\frac{1}{g(x)}}\right)=\lim_{x\to x_0}\frac{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{g(x)}\cdot\frac{1}{f(x)}}=\left(\frac{0}{0}\right).$$

$\mathfrak{R}$ **Пример**. Найти $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)$.

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{x-1-\ln x}{\ln x(x-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}(x-1)-\ln x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x-1}{x-1-x\ln x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{1-\ln x-1}=0.$$

✍ **Задание**. Найдите $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{x}{\operatorname{ctg}x}-\frac{\pi}{2\cos x}\right)$.

Пусть $f(x)\to 1$ и $g(x)\to\infty$, или $f(x)\to\infty$ и $g(x)\to 0$, или $f(x)\to 0$ и $g(x)\to 0$ при $x\to x_0$. Для нахождения предела вида $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)^{g(x)}$ применим основное логарифмическое тождество для преобразования выражения, стоящего под знаком предела: $e^{\ln f(x)^{g(x)}}=f(x)^{g(x)}$.

$\mathfrak{R}$ **Пример**. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg}x}$.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg}x}=\lim_{x\to 0}e^{\left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg}x}}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{\operatorname{tg}x}{x}}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{1}{\cos^2 x}}=e^1=e.$$

✍ **Задания**

1. Найдите $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{x}}$.

2. Определите вид неопределенности: $\lim\limits_{x\to 0+0} x\ln x$.

3. Вычислите пределы, используя правило Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos 2x\right)^{\frac{1}{x^2}}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3}{x-\sin x}$.

1.4. Исследование функций и построение графиков

1.4.1. Возрастание и убывание функций

$\mathfrak{I}$ **Теорема 1** (необходимые условия). Если дифференцируемая на интервале $(a;\, b)$ функция $f(x)$ возрастает (убывает), то $f'(x) \geq 0$ $(f'(x) \leq 0)$ для любого $x \in (a;\, b)$.

$\mathfrak{I}$ **Теорема 2** (достаточные условия). Если функция $f(x)$ дифференцируема на интервале $(a;\, b)$ и $f'(x) > 0$ $(f'(x) < 0)$ для любого $x \in (a;\, b)$, то эта функция возрастает (убывает) на интервале $(a;\, b)$.

$\mathfrak{R}$ **Пример**. Определить интервалы возрастания и убывания функции: $y = x^3 - 12x + 11$.

Область существования данной функции – вся ось Ox. Ее производная $f'(x) = 3x^2 - 12$. Чтобы найти интервалы возрастания функции, решим неравенство $3x^2 - 12 > 0$, $x^2 - 4 > 0$. Таким образом, решением неравенства являются два интервала: $x \in (-\infty;\, -2)$ и $x \in (2;\, +\infty)$, на которых функция возрастает. Для определения интервала убывания решим неравенство $3x^2 - 12 < 0$, $x^2 - 4 < 0$, его решением является интервал $x \in (-2;\, 2)$, на котором функция убывает.

✍ **Задание**. Найдите интервалы возрастания и убывания функции $f(x) = x^3 - 6x^2 + 5$.

1.4.2. Экстремумы функций (максимум и минимум функции)

⇨ Определение. Функция $y = f(x)$ имеет ***максимум*** **(max)** в точке $x = c$, если существует такая окрестность точки $x = c$, что для всех точек $x \neq c$, принадлежащих этой окрестности, выполняется неравенство $f(x) < f(c)$.

⇨ Определение. Функция $y = f(x)$ имеет ***минимум*** **(min)** в точке $x = c$, если существует такая окрестность точки $x = c$, что для всех точек $x \neq c$, принадлежащих этой окрестности, выполняется неравенство $f(x) > f(c)$.

Точки максимума и минимума объединяют под общим названием точки экстремума (рис. 2).

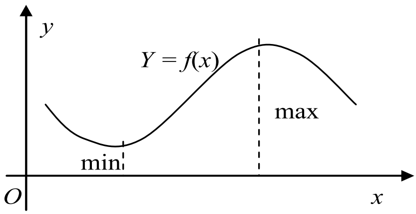
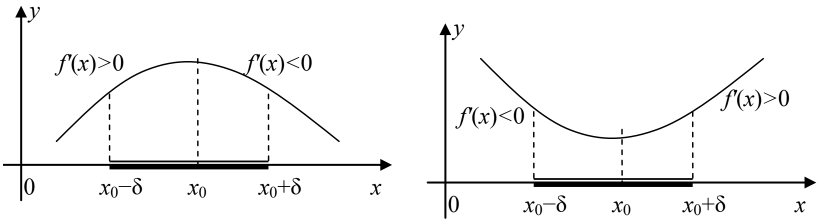


Рис. 2. Экстремумы графика функции

ℑ **Теорема 3** (необходимое условие экстремума). Если дифференцируемая функция $y = f(x)$ имеет экстремум в точке x_0, то ее производная в этой точке равна 0.

⇨ Определение. Точки называются **критическими**, если производная функции в данных точках равна 0.

ℑ **Теорема 4** (достаточное условие экстремума). Если непрерывная функция $y = f(x)$ дифференцируема в некоторой окрестности критической точки x_0 и при переходе через нее (слева направо) производная меняет знак с плюса на минус, то x_0 есть точка максимума, если с минуса на плюс, то x_0 – точка минимума (рис. 3).



x_0 – точка максимума *x_0 – точка минимума*

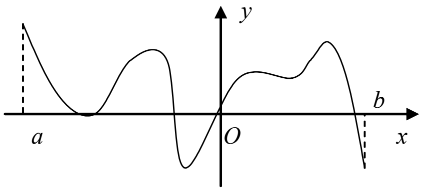
Рис. 3. Достаточное условие экстремума

Для исследования функции на экстремум необходимо:

1) найти производную функции $f'(x)$ и определить интервал ее существования $(a; b)$;
2) решить уравнение $f'(x) = 0$, а также определить те значения x, при которых $f'(x) = \infty$ или не существует (короче: найти критические точки первого рода функции). Пусть эти точки $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ из интервала $(a; b)$;
3) все критические точки расположить в порядке возрастания их абсцисс на интервале $(a; b)$: $a < x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_n < b$;
4) внутри каждого из интервалов $(a; x_1)$, $(x_1; x_2)$, $(x_2; x_3)$, $(x_n; b)$ взять любую точку и установить в этой точке знак производной (производная сохраняет знак на каждом интервале между двумя соседними точками). Если при переходе последовательно слева направо от первого интервала к последующему знаки производной в двух соседних интервалах различны, то экстремум в критической точке есть: это локальный максимум, если знак поменяется с «+» на «–», и локальный минимум, если знак меняется с «–» на «+». Если же знак в двух соседних интервалах сохраняется, то экстремума в критической точке нет;
5) найти значения функции в точках, где она достигает экстремума (экстремальные значения функции).

✍ **Задания**

1. На рисунке изображен график производной функции $y = f(x)$. По графику функции определите:



– промежутки, где функция убывает и возрастает;
– точки минимума и максимума.

2. Найдите экстремумы функции $y=\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+2$.

1.4.3. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке

Чтобы найти наибольшее и наименьшее значения функции, используют следующий алгоритм:

1) находим все критические точки и точки, в которых производная не существует, вычисляем в них значения функции;
2) вычисляем значения функции на концах отрезка;
3) сравнивая между собой вычисленные значения функции, выбираем наибольшее и наименьшее.

✍ **Задание**. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $f(x) = 3x^4 + 4x^3 + 1$ на отрезке $[-2; 1]$.

1.4.4. Выпуклость и вогнутость графика функции. Точки перегиба

График дифференцируемой функции называется ***вогнутым*** в интервале $(a; b)$, если он расположен выше любой своей касательной в этом интервале.

График дифференцируемой функции называют ***выпуклым*** в интервале $(a; b)$, если он расположен ниже любой своей касательной в этом интервале (рис. 4).

Интервалы, в которых дуги кривой выпуклы, определяются из неравенства $f'(x) < 0$, а интервалы, в которых дуги этой кривой вогнуты, – из неравенства $f''(x) > 0$.

Точка кривой, отделяющая ее выпуклую дугу от вогнутой, называется ***точкой перегиба***.

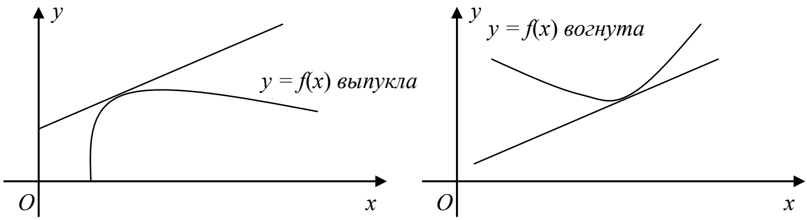


Рис. 4. Выпуклость и вогнутость графика функции

Для определения точек перегиба кривой надо найти все критические точки второго рода и рассмотреть знаки второй производной в каждом из двух соседних интервалов, на которые эти точки делят область существования функции. Если знаки $f''(x)$ в двух соседних интервалах различны, то критическая точка второго рода является точкой перегиба. Если же знаки совпадают, то в рассматриваемой критической точке нет перегиба.

$\underline{\mathfrak{R}}$ **Пример**. Определить точку перегиба кривой $y = x^3 - 12x^2 + x - 1$.

1. Найдем первую производную $y' = 3x^2 - 24x + 1$.
2. Найдем вторую производную $y'' = 6x - 24$.

   $y'' = 6x - 24 = 0$

   $6x = 24$

   $x = 4$.
3. При $x \in (4; \infty)$ $y'' = (6x - 24) > 0$.

   При $x \in (-\infty; 4)$ $y'' = (6x - 24) < 0$. Значит $x = 4$ — точка перегиба.

✍ **Задание**. Сколько точек перегиба может иметь кривая $y = 2x^3 + 3x^2 - 1$? Определите эти точки или точку.

1.4.5. Асимптоты графика функции. Точки разрыва

⇨ Определение. Если расстояние d от точки кривой $y = f(x)$, имеющей бесконечную ветвь, до некоторой определенной прямой стремится к нулю (по мере удаления точки вдоль этой кривой в бесконечность), то прямая называется ***асимптотой кривой***.

Различают асимптоты горизонтальные, вертикальные, наклонные.

1. Кривая $y = f(x)$ имеет ***горизонтальную асимптоту y = b*** в том и только в том случае, когда существует конечный предел функции, то есть $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b$ или $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$.

2. Кривая $y = f(x)$ имеет ***вертикальную асимптоту x = a***, если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, или $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \infty$, или $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = \infty$. То есть для отыскания вертикальных асимптот следует найти те значения x, при которых функция обращается в бесконечность (терпит бесконечный разрыв).

3. Для определения ***наклонной асимптоты y = kx + b*** числа k (угловой коэффициент прямой) и b находят из формул

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}, \; b = \lim_{x\to\infty}\left(f(x) - kx\right).$$

ℜ **Пример**. Найти асимптоты графика функции $y = \dfrac{2}{x^2 - 4}$.

1. Для определения горизонтальных асимптот находим $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{x^2-4} = 0$ и $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2}{x^2-4} = 0$; у графика существует только одна горизонтальная асимптота (ось Ox) и нет наклонных.

2. Для определения вертикальных асимптот находим те значения x, вблизи которых $f(x) = \dfrac{2}{x^2-4}$ неограниченно возрастает по абсолютной величине. Такими значениями являются $x = -2$ и $x = 2$, тогда уравнения вертикальных асимптот $x = -2$ и $x = 2$.

✍ **Задание**. Какие асимптоты может иметь график функции $y = \dfrac{x^2+1}{2x+3}$? Найдите их.

1.4.6. Общая схема исследования функции и построения графика

℘ Для общего исследования функции и построения графика полезно придерживаться следующего плана.

1. Найти область определения функции.
2. Найти (если это возможно) точки пересечения графика с осями координат.
3. Найти интервалы знакопостоянства функции (промежутки, на которых $f(x) > 0$ или $f(x) < 0$).

4. Решить вопрос о чётности, нечётности, симметрии, периодичности функции.
5. С помощью 1-й производной найти точки экстремума и области возрастания и убывания данной функции. Найти экстремальные значения функции.
6. С помощью 2-й производной найти точки перегиба, области выпуклости и вогнутости.
7. Найти точки разрыва функции и интервалы непрерывности.
8. Если есть точки разрыва 2-го рода, найти вертикальные асимптоты.
9. Найти, если они есть, наклонные и горизонтальные асимптоты.
10. Построить график.

✍ **Задание**. Исследуйте функции и постройте их графики:

1) $y = \dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$;

2) $y = \dfrac{1}{125}(x^2-5)^3$;

3) $y = x + \sin x$;

4) $y = \left(\dfrac{x-1}{x+3}\right)^2$.

? Контрольные вопросы

1. Дайте определение производной функции.
2. Каков геометрический и механический смысл производной?
3. Сформулируйте основные правила дифференцирования.
4. Обозначьте суть логарифмического дифференцирования.
5. Приведите алгоритм нахождения производных высших порядков.
6. Как найти промежутки возрастания и убывания функций, экстремумы функций, наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке?
7. Сколько точек перегиба может иметь функция на отрезке?
8. Всегда ли можно найти точки перегиба?
9. Может ли быть асимптотой графика функции кривая линия?

✍ Тест

1. Если $y = (\cos x)^{\sin x}$, то...

1. $y' = (\cos)^{\sin x}(\ln\cos x - \sin x\,\mathrm{tg}\,x)$	2. $y' = (\cos)^{\sin x}(\cos x\ln\cos x - \sin x\,\mathrm{tg}\,x)$
3. $y' = (\cos)^{\sin x}(\cos x\ln\cos x + \sin x\,\mathrm{tg}\,x)$	4. $y' = \cos x\ln\cos x - \sin x\,\mathrm{tg}\,x$

2. Производная функции $y = \mathrm{arctg}\dfrac{x-1}{x+1}$ равна...

1	2	3	4
$\dfrac{1}{x^2+1}$	$\dfrac{1}{2(x^2+1)}$	$\dfrac{(x+1)^2}{2(x^2+1)}$	$\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$

3. Производная второго порядка функции $y = \sin(4x^2 - 1)$ равна...

1. $8\left(\cos(4x^2-1) - 8x^2\sin(4x^2-1)\right)$	2. $8\left(\cos(4x^2-1) + 8x^2\sin(4x^2-1)\right)$
3. $8x\cos\left(4x^2-1\right)$	4. $-64x^2\sin\left(4x^2-1\right)$

4. Касательная к графику функции $f(x) = 2x^2 - 3x + 6$ образует с осью Ox угол, равный 45°, в точке...

1	2	3	4
(1; 5)	(1; 7)	(–1; 11)	(0,5; 5)

5. Наклонная асимптота графика функции $f(x) = x + e^{-2x}$ задается уравнением вида...

1	2	3	4
$y = x$ при $x \to +\infty$	$y = -x$ при $x \to +\infty$	$y = x$ при $x \to -\infty$	$y = -x$ при $x \to -\infty$

6. Дифференциал функции $y = 4^{x^2-x}$ равен...

1	2	3	4
$4^{x^2-x}\ln 4\cdot(2x-1)dx$	$\dfrac{4^{x^2-x}(2x-1)}{\ln 4}dx$	$4^{x^2-x-1}(x^2-x)dx$	$4^{x^2-x}\ln 4\cdot(x^2-x)dx$

7. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = \dfrac{1}{2}t^3 - 3t^2 + t + 7$. Тогда ускорение точки в момент времени $t = 2$ равно...

Ответ:_______________

8. Производная функции $y=\dfrac{2x+5}{\sqrt{x^2-2x+2}}$ равна...

1	2	3	4
$\dfrac{-7x+9}{\left(\sqrt{x^2-2x+2}\right)^3}$	$\dfrac{4x^2-x-1}{\left(\sqrt{x^2-2x+2}\right)^3}$	$\dfrac{2\sqrt{x^2-2x+2}}{x-1}$	$\dfrac{3x-1}{\left(\sqrt{x^2-2x+2}\right)^3}$

9. Уравнение касательной к графику функции $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 2x + 1$ в его точке с абсциссой $x_0 = 2$ имеет вид...

1	2	3	4
$y = -2x + 5$	$y = -2x - 3$	$y = 2x + 5$	$y = 2x - 3$

10. Функция $y = y(x)$ задана в параметрическом виде $\begin{cases} x = 2\sin^2 t \\ y = 6\cos^3 t \end{cases}$. Тогда производная первого порядка функции $y = y(x)$ по переменной x имеет вид...

1	2	3	4
$-\dfrac{9}{2}\cos t$	$\dfrac{9}{2}\cos t$	$-\dfrac{2}{9\cos t}$	$\dfrac{9\cos^2 t}{2\sin t}$

11. Наименьшее значение функции $f(x)=\dfrac{1}{2}x+\cos x$ на отрезке $\left[\dfrac{\pi}{2};\pi\right]$ равно...

1	2	3	4
$\dfrac{5\pi}{12}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\dfrac{\pi}{2}-1$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{\pi}{2}$

12. Вертикальная асимптота графика функции $f(x)=\sqrt{x}\cdot e^{\frac{1}{x^2+3x-4}}$ задается уравнением вида...

1	2	3	4
$x = 1$	$x = -4$	$x = 4$	$x = 0$

13. Производная функции $x^2 - x\,y + y^2 = 1$ равна...

1	2	3	4
$y' = \dfrac{2x-y}{x-2y}$	$y' = \dfrac{x-y}{x-2y}$	$y' = \dfrac{2x+y}{x-2y}$	$y' = \dfrac{2x-y}{x+2y}$

14. Функция $y = y(x)$ задана в параметрическом виде $\begin{cases} x = \operatorname{tg} t; \\ y = \dfrac{1}{\cos t} \end{cases}$.

Тогда производная второго порядка функции $y = y(x)$ по переменной x имеет вид...

1	2	3	4
$y'' = \cos^3 t$	$y'' = \cos^3 t$	$y'' = \cos^2 t$	$y'' = \cos^3 t$

15. Используя правило Лопиталя, вычислите $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\operatorname{ctg} x - 1}{\sin 4x}$.

Ответ:__________________

2. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

2.1. Понятие функции нескольких переменных. Частные производные и дифференциал

2.1.1. Основные понятия

⇨ Определение. Пусть задано множество D упорядоченных пар чисел (x, y). Соответствие $\boldsymbol{f}$, которое каждой паре чисел $(x, y) \in D$ соотносит одно и только одно число $z \in R$, называется ***функцией двух переменных***, определенной на множестве D со значениями в R, и записывается в виде $z = f(x, y)$.

При этом x и y называются *независимыми переменными* (*аргументами*), а z – *зависимой переменной* (*функцией*).

Аналогично определяются функции трех и большего числа аргументов. Множество $D = D(f)$ называется *областью определения* функции. Множество значений, принимаемых z в области определения, называется *областью изменения* этой функции и обозначается $E(f)$ или E.

Функцию $z = f(x, y)$, где $(x, y) \in D$, можно понимать (рассматривать) как функцию точки $M(x, y)$ координатной плоскости Oxy. Значение функции $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ обозначают $z_0 = f(x_0, y_0)$ или $z_0 = f(M_0)$ и называют *частным значением функции*.

Геометрическим изображением функции $z = f(x, y)$ в прямоугольной системе координат $Oxyz$, вообще говоря, является некоторая поверхность.

Функция двух переменных, как и функция одной переменной, может быть задана разными способами: таблицей, аналитически, графиком.

$\underline{\mathfrak{R}}$ **Примером** функции двух переменных может служить площадь S прямоугольника со сторонами, длины которых равны x и y: $S = xy$. Областью определения этой функции является множество $((x, y) \mid x > 0, y > 0)$.

✍ **Задания**

1. Приведите пример функции двух переменных.
2. Сколько аргументов может иметь функция нескольких переменных?
3. Что является геометрическим изображением в прямоугольной системе координат функции двух переменных?
4. Найдите область определения функции нескольких переменных $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

2.1.2. Предел функции

Пусть функция $z = f(x; y)$ определена в некоторой окрестности точки $M_0(x_0; y_0)$, кроме, быть может, самой этой точки. Число A называется ***пределом функции*** $z = f(x; y)$ при $x \to x_0$ и $y \to y_0$ или, что то же самое, при $M(x; y) \to M_0(x_0; y_0)$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех $x \neq x_0$ и $y \neq y_0$ и удовлетворяющих неравенству $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$ выполняется неравенство $|f(x; y) - A| < \varepsilon$.

Записывают: $A = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x; y)$ или $A = \lim\limits_{M \to M_0} f(M)$.

Из определения следует, что если предел существует, то он не зависит от пути, по которому M стремится к M_0 (число таких направлений бесконечно; для функции одной переменной $x \to x_0$ по двум направлениям: справа и слева).

2.1.3. Непрерывность и точки разрыва

Функция $z = f(x; y)$ (или $f(M)$) называется ***непрерывной в точке*** $M_0(x_0; y_0)$, если она:

а) определена в этой точке и некоторой ее окрестности;

б) имеет предел $\lim\limits_{M \to M_0} f(M)$;

в) этот предел равен значению функции z в точке M_0, т. е.

$$\lim_{M \to M_0} f(M) = f(M_0)$$

или

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x; y) = f(x_0; y_0).$$

Функция, непрерывная в каждой точке некоторой области, называется *непрерывной в этой области*.

Точки, в которых непрерывность нарушается (не выполняется хотя бы одно из условий непрерывности функции в точке), называются *точками разрыва* этой функции. Точки разрыва $z = f(x; y)$ могут образовывать целые *линии разрыва*, а иногда и более сложные геометрические образы.

Например, функция $z = \dfrac{2}{y - x}$ имеет линию разрыва $y = x$.

2.1.4. Частные производные

Пусть задана функция $z = f(x; y)$. Так как x и y — независимые переменные, то одна из них может изменяться, а другая — сохранять свое значение. Дадим независимой переменной x приращение Δx, сохраняя значение y неизменным. Тогда z получит приращение, которое называется ***частным приращением z по x*** и обозначается $\Delta_x z$. Итак,

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x; y) - f(x; y).$$

Аналогично получаем частное приращение z по y:

$$\Delta_y z = f(x; y + \Delta y) - f(x; y).$$

Полное приращение Δz функции z определяется равенством

$$\Delta z = f(x + \Delta x; y + \Delta y) - f(x; y).$$

Если существует предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x;\ y) - f(x;\ y)}{\Delta x},$$

то он называется *частной производной* функции $z = f(x; y)$ в точке $M(x; y)$ по переменной x и обозначается одним из символов:

$$z'_x,\ \frac{\partial z}{\partial x},\ \ f'_x,\ \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Частные производные по x в точке $M_0(x_0; y_0)$ обычно обозначают символами

$$f'_x(x_0; y_0).$$

Аналогично определяется и обозначается частная производная от $z = f(x; y)$ по переменной y:

$$z'_y = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x;\ y + \Delta y) - f(x;\ y)}{\Delta y}.$$

Таким образом, частная производная функции нескольких (двух, трех и больше) переменных определяется как производная функции одной из этих переменных при условии постоянства значений остальных независимых переменных. Поэтому частные производные функции $f(x; y)$ находят по формулам и правилам вычисления производных функции одной переменной (при этом соответственно x или y считается постоянной величиной).

$\underline{\mathfrak{R}}$ **Пример**. Найти частные производные функции $z = 2y + e^{x^2-y} + 1$.

$$z'_x = (2y + e^{x^2-y} + 1)'_x = (2y)'_x + (e^{x^2-y})'_x + (1)'_x =$$
$$= 0 + e^{x^2-y} \cdot (x^2 - y)'_x + 0 = e^{x^2-y} \cdot (2x - 0) = 2x \cdot e^{x^2-y};$$
$$z'_y = 2 + e^{x^2-y} \cdot (-1).$$

$\underline{\mathfrak{R}}$ **Пример**. Найти частные производные функции $z = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{y}$.

Рассматривая y как постоянную величину, получим:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{y}} \frac{1}{\cos^2\frac{x}{y}} \frac{1}{y} = \frac{2}{y \sin\frac{2x}{y}}.$$

Аналогично, рассматривая x как постоянную, будем иметь:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{y}} \frac{1}{\cos^2\frac{x}{y}} \left(-\frac{x}{y^2}\right) = \frac{2}{y^2 \sin\frac{2x}{y}}.$$

✍ **Задания**

1. Найдите частные производные функций двух аргументов:
1) $z = x^2 - 2xy + y^3$; 2) $z = x^y$; 3) $z = \ln(x - y)$; 4) $z = \cos^2(x^2 + y^2)$.

2. Найдите частные производные функции трех аргументов:
$u = x^3 y^2 z + 2x - 3y + z + 5$.

2.1.5. Частные производные высших порядков

Частные производные $\frac{\partial f(x; y)}{\partial x}$ и $\frac{\partial f(x; y)}{\partial y}$ называют ***частными производными первого порядка.*** Их можно рассматривать как функции от $(x; y) \in D$. Эти функции могут иметь частные производные, которые называются ***частными производными второго порядка***. Они определяются и обозначаются следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=z''_{xx}=f''_{x^2}(x;\ y);$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=z''_{xy}=f''_{xy}(x;\ y);$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=z''_{yx}=f''_{yx}(x;y);$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=z''_{yy}=f''_{y^2}(x;y).$$

Аналогично определяются частные производные 3-го, 4-го и т. д. порядков.

Так, $z'''_{xxy}=\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)$, $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial^3 z}{\partial x\partial y\partial x}\right)=\dfrac{\partial^4 z}{\partial x\partial y\partial x^2}$ или $(z'''_{xyx})'_x=z^{(4)}_{xyx^2}$.

Частная производная второго или более высокого порядка, взятая по различным переменным, называется ***смешанной частной производной***. Таковыми являются, например, z''_{xy}, $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}$, z'''_{xyx}.

$\mathfrak{R}$ **Пример**. Найти частные производные второго порядка функции $z=x^4-2x^2y^3+y^5+1$.

Найдем производные первого порядка

$$z'_x=4x^3-4xy^3$$
$$z'_y=-6x^2y^2+5y^4.$$

Тогда производные второго порядка имеют вид:

$$z''_{xy}=(4x^3-4xy^3)'_y=-12xy^2,$$
$$z''_{yx}=(-6x^2y^2+5y^4)'_x=-12xy^2.$$

Оказалось, что $z''_{xy}=z''_{yx}$.

Этот результат не случаен. Имеет место теорема, которую приведем без доказательства.

$\mathfrak{I}$ **Теорема Шварца**. Если частные производные высшего порядка непрерывны, то смешанные производные одного порядка, отличающиеся лишь порядком дифференцирования, равны между собой.

В частности, для $z=f(x;y)$ имеем: $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.

✍ **Задание**. Найдите частные производные второго порядка от функций:

1) $z = \operatorname{arctg}\frac{x}{y}$; 2) $z = \sin(x + y)$;

3) $z = \arcsin(xy)$; 4) $z = xe^{\frac{x}{y}}$.

2.1.6. Полный дифференциал функции

Чтобы функция $z = f(x; y)$ была дифференцируема в точке, необходимо, чтобы она имела в ней частные производные, и достаточно, чтобы она имела в точке непрерывные частные производные.

Функция заведомо имеет полный дифференциал в случае непрерывности ее частных производных. Если функция имеет полный дифференциал, то она называется дифференцируемой. Дифференциалы независимых переменных совпадают с их приращениями, т. е. $dx = \Delta x$ и $dy = \Delta y$. Полный дифференциал функции $z = f(x, y)$ вычисляется по формуле

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

Аналогично полный дифференциал функции трех аргументов $u = f(x, y, z)$ вычисляется по формуле

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz.$$

$\underline{\mathfrak{R}}$ **Пример**. Для функции $z = x^2 + xy - y^2$ найти полный дифференциал.

Найдем частные производные

$$\frac{\partial z}{\partial x} = [(2x + y)]$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = [(x - 2y)].$$

Имеем полный дифференциал

$$dz = [(2x + y)\Delta x + (x - 2y)\Delta y].$$

✍ **Задание**. Найдите полный дифференциал от функции

$$z = x^4 - 2x^2y^3 + y^5 + 1.$$

2.1.7. Применение полного дифференциала функции к приближенным вычислениям

При достаточно малых $|\Delta x|$ и $|\Delta y|$ дифференцируемой функции $z = f(x;\, y)$ имеет место приближенное равенство

$$\Delta z \approx dz \quad \text{или} \quad \Delta z \approx \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y.$$

Получаем формулу для приближённых вычислений:

$$f(x+\Delta x;\, y+\Delta y) \approx f(x;y) + f'_x(x;y)\Delta x + f'_y(x;y)\Delta y.$$

$\mathfrak{R}$ **Пример**. Вычислите приближенно $\ln\left(\sqrt[3]{1{,}03} + \sqrt[4]{0{,}98} - 1\right)$.

1. Рассмотрим функцию $y = \ln\left(\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{y} - 1\right)$, где $x = 1{,}03$, $y = 0{,}98$.
2. $x = x_0 + \Delta x = 1 + 0{,}03$
   $x_0 = 1,\ \Delta x = 0{,}03$
   $y = y_0 + \Delta y = 1 - 0{,}02$
   $y_0 = 1\ \ \Delta y = -0{,}02.$
3. $$y'_x = \frac{1}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{y} - 1}\,\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$
   $$y'_x(1;1) = \frac{1}{\sqrt[3]{1} + \sqrt[4]{1} - 1}\,\frac{1}{3\sqrt[3]{1^2}} = \frac{1}{3}$$
   $$y'_y = \frac{1}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{y} - 1}\,\frac{1}{4\sqrt[4]{y^3}}$$
   $$y'_y(1;1) = \frac{1}{\sqrt[3]{1} + \sqrt[4]{1} - 1}\,\frac{1}{4\sqrt[4]{1^3}} = \frac{1}{4}.$$
4. $y(1;1) = \ln\left(\sqrt[3]{1} + \sqrt[4]{1} - 1\right) = 0.$
5. $\ln\left(\sqrt[3]{1{,}03} + \sqrt[4]{0{,}98} - 1\right) = 0 + \frac{1}{3}\cdot 0{,}03 + \frac{1}{4}\cdot(-0{,}02) = 0{,}01 - 0{,}005 = 0{,}005.$

✍ **Задание**. Используя алгоритм решения примера, вычислите приближенно $1{,}02^{3{,}01}$.

2.2. Дифференцирование сложных функций

Случай одной независимой переменной

Если $z = f(x, y)$ есть дифференцируемая функция аргументов x и y, которые в свою очередь являются дифференцируемыми функциями независимой переменной t: $x = \varphi(t)$, $y = \phi(t)$, то производная сложной функции $z = f[\varphi(t), \phi(t)]$ может быть вычислена по формуле

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dz}{dx}.$$

В частности, если t совпадает с одним из аргументов, например x, то «полная» производная функции z по x

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx}.$$

$\Re$ **Пример**. Найти $\dfrac{dz}{dt}$, если $z = e^{3x+2y}$, где $x = \text{const}$, $y = t^2$.

1. Найдем частные производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3e^{3x+2y},\ \frac{\partial z}{\partial y} = 2e^{3x+2y},$$

$$\frac{\partial x}{\partial t} = -\sin t,\ \frac{\partial x}{\partial t} = 2t.$$

2. Получаем

$$\frac{dz}{dt} = e^{3x+2y}\cdot 3(-\sin t) + e^{3x+2y}\cdot 2\cdot 2t = e^{3x+2y}(4t - 3\sin t) = e^{3\cos t + 2t^2}\cdot(4t - 3\sin t).$$

Общий случай

Если $z = f(u; v)$, где $u = u(x; y)$, $v = v(x; y)$.

Тогда $z = f\{u(x; y); v(x; y)\}$ – сложная функция независимых переменных x и y. Ее частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ можно найти по формуле

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Аналогично получаем:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}.$$

Таким образом, производная сложной функции (z) по каждой независимой переменной (x и y) равна сумме произведений частных производных этой функции (z) по ее промежуточным переменным (u и v) на их производные по соответствующей независимой переменной (x и y).

$\mathfrak{R}$ **Пример**. Найти $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$, если $z = f(x, y)$, где $x = uv$, $y = \frac{u}{v}$.

$$\frac{\partial z}{\partial u} = f'_x(x, y)v + f'_y(x, y)\frac{1}{v},$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = f'_x(x, y)u - f'_y(x, y)\frac{u}{v^2}.$$

✍ **Задания**

1. Найдите $\frac{dz}{dt}$ для функции $z = (x^2 + y^2)^{10}$, где $x = \sin^2 t$, $y = \cos^2 t$.
2. Найдите $\frac{dz}{dx}$ и $\frac{dz}{dy}$ для функции $z = \arccos uv$, где $u = \ln x$, $v = \ln\left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)$.
3. Найдите $\frac{dz}{dt}$ для функции $z = e^{x^2 - y^2}$, где $x = \sqrt{1+t}$, $y = \sqrt[3]{1+t}$.

2.3. Производная функции в данном направлении

Производной функции $z = f(x, y)$ ***в данном направлении*** $l = \overrightarrow{PP_1}$ называется

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \lim_{P_1P \to 0} \frac{f(P_1) - f(P)}{P_1P},$$

где $f(P)$ и $f(P_1)$ – значения функции в точках P и P_1. Если функция z дифференцируема, то справедлива формула

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\sin\alpha,$$

где α – угол, образованный вектором l с осью Ox (рис. 5).

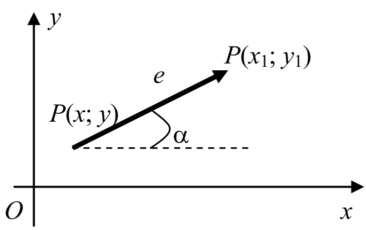


Рис. 5. Производная функции в данном направлении

ℜ **Пример**. Найти производную функции $z = 2x^2 - 3y^2$ в точке $P(1; 0)$ в направлении, составляющем с осью Ox угол в 120°.

Найдем частные производные данной функции и их значения в точке P:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x; \ \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_P = 4;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -6y; \ \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_P = 0.$$

Здесь $\cos\alpha = \cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$, $\sin\alpha = \sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

По формуле

$$\frac{\partial z}{\partial l} = 4\left(-\frac{1}{2}\right) + 0 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -2.$$

Знак «минус» показывает, что функция в данной точке и в данном направлении убывает.

2.4. Градиент функции

Градиентом функции $z = f(x, y)$ называется вектор, проекциями которого на координатные оси являются соответствующие частные производные данной функции:

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, z = \frac{\partial z}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y}\vec{j}.$$

Производная данной функции в направлении l связана с градиентом функции формулой $\frac{\partial z}{\partial l} = \text{пр}_l \operatorname{grad} z$, т. е. производная в данном направлении равна проекции градиента функции на направление дифференцирования.

Градиент функции в каждой точке направлен по нормали к соответствующей линии уровня функции. Направление градиента функции в данной точке есть направление наибольшей скорости возрастания функции в этой точке, т. е. при $l = \operatorname{grad} z$ производная $\frac{\partial z}{\partial l}$ принимает наибольшее значение, равное $\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$.

$\mathfrak{R}$ **Пример**. Найти и построить градиент функции $z = x^2y$ в точке $P(1; 1)$.

Вычислим частные производные и их значения в точке P:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy; \quad \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_P = 2;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^2; \quad \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_P = 1.$$

Следовательно, $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, z = 2\vec{i} + \vec{j}$.

✍ **Задания**. Для функции $z = \ln\dfrac{x+y}{2x+4}$ в точке $A(2; 6)$ найти градиент и производную по направлению $\vec{l} = 2\vec{i} - 28\vec{j}$.

2.5. Дифференцирование неявных функций

2.5.1. Случай одной независимой переменной

Если уравнение $f(x, y) = 0$, где $f(x, y)$ – дифференцируемая функция переменных x и y, определяет y как функцию от x, то производная этой неявно заданной функции, при условии что $f_y'(x, y) \neq 0$, может быть найдена по формуле

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f_x'(x,y)}{f_y'(x,y)}.$$

$\mathfrak{R}$ **Пример**. Найти $\dfrac{dy}{dx}$, если $(x^2 + y^2)^3 - 3(x^2 + y^2) + 1 = 0$.

Обозначив левую часть данного уравнения через $f(x, y)$, найдем частные производные

$$f'x(x, y) = 3(x^2 + y^2)^2 \cdot 2x - 3 \cdot 2x = 6x[(x^2 + y^2) - 1],$$

$$f'y(x, y) = 3(x^2 + y^2)^2 \cdot 2y - 3 \cdot 2y = 6y[(x^2 + y^2) - 1].$$

Получим:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f_x'(x,y)}{f_y'(x,y)} = -\frac{6x\left[\left(x^2+y^2\right)^2 - 1\right]}{6y\left[\left(x^2+y^2\right)^2 - 1\right]} = -\frac{x}{y}.$$

✍ **Задание**. Найдите производные функций:

1) $x - y = \arcsin x - \arcsin y$; 2) $x^4 + y^4 = x^2y^2$;

3) $\log_2(x + y) = x \cdot y$; 4) $y^3 = \dfrac{x+y}{x-y}$.

2.5.2. Случай нескольких независимых переменных

Если уравнение $F(x, y, z) = 0$, где $F(x, y, z)$ – дифференцируемая функция переменных x, y и z, определяет z как функцию независимых переменных x и y и $F_z(x, y, z) \neq 0$, то частные производные этой неявно заданной функции, вообще говоря, могут быть найдены по формулам

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}.$$

<u>$\Re$</u> **Пример**. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, если $x^2 - 2y^2 + 3z^2 - yz + y = 0$.

Обозначая левую часть данного уравнения через $F(x, y, z)$, найдем частные производные $F'_x(x, y, z) = 2x$, $F'_y(x, y, z) = -4y - z + 1$, $F'_z(x, y, z) = 6z - y$.

Получаем

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)} = -\frac{2x}{6z - y};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{F'_y(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)} = -\frac{1 - 4y - z}{6z - y}.$$

✍ **Задания**

1. Найдите $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ для функции $\ln(x^2y^2 - z^2) - xy - z = 0$.

2. Найдите $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ для функции $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - xyz = 0$.

2.6. Касательная плоскость и нормаль к поверхности

Уравнение касательной плоскости имеет вид:

$$z - z_0 = f'_x(x_0; y_0) \cdot (x - x_0) + f'_y(x_0; y_0) \cdot (y - y_0).$$

Уравнение нормали:

$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0; y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0; y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}.$$

✍ **Задание**. Написать уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{9}=1$ в точке $M_0(2;\,0;\,0)$.

2.7. Экстремум функции нескольких переменных

Точка, в которой частные производные первого порядка функции $z=f(x;\,y)$ равны нулю, т. е. $f_x'=0, f_y'=0$, называется ***стационарной точкой*** функции z.

Стационарные точки и точки, в которых хотя бы одна частная производная не существует, называются ***критическими точками***.

Для нахождения экстремумов функций необходимо:

1) найти стационарные точки, т. е. точки, где частные производные первого порядка функции $z=f(x;\,y)$ равны нулю;
2) найти производные второго порядка, если они существуют, т. е. $A=f''_{xx}(a,b), B=f''_{xy}(a,b), C=f''_{yy}(a,b)$;
3) составить выражение $\Delta = AC - B^2$.

Тогда:

а) если $\Delta > 0$, то функция имеет экстремум в стационарной точке, а именно максимум, если $A < 0$ (или $C < 0$), и минимум, если $A > 0$ (или $C > 0$);

б) если $\Delta < 0$, то экстремума в стационарной точке нет;

в) если $\Delta = 0$, то вопрос о наличии экстремума функции в стационарной точке остается открытым (требуется дальнейшее исследование).

$\mathfrak{R}$ **Пример**. Исследовать на экстремум функцию

$$z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y.$$

Найдем частные производные и составим систему уравнений

$$\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2+3y^2-15=0\ ,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=6xy-12=0$$

или

$$\begin{cases} x^2+y^2-5=0, \\ xy-2=0. \end{cases}$$

Решая систему, получим четыре стационарные точки: $P_1(1;\,2)$, $P_2(2;\,1)$, $P_3(-1;\,-2)$, $P_4(-2;\,-1)$.

Найдем производные 2-го порядка

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6,$$

$$B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 6y,$$

$$C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6x$$

и составим дискриминант $\Delta = AC - B^2$ для каждой стационарной точки.

1. Для точки P_1:

$$A = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_{P_1} = 6, \ B = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)_{P_1} = 12, \ C = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)_{P_1} = 6,$$

$$\Delta = AC - B^2 = 36 - 144 < 0.$$

Значит в точке P_1 экстремума нет.

2. Для точки P_2:

$$A = 12, \ B = 6, \ C = 12; \ \Delta = 144 - 36 > 0, \ A > 0.$$

В точке P_2 функция имеет минимум. Минимум этот равен значению функции при $x = 2$, $y = 1$: $z_{\min} = 8 + 6 - 30 - 12 = -28$.

3. Для точки P_3:

$$A = -6, \ B = -12, \ C = -6; \ \Delta = 36 - 144 < 0.$$

Экстремума нет.

4. Для точки P_4:

$$A = -12, \ B = -6, \ C = -12; \ \Delta = 144 - 36 > 0.$$

В точке P_4 функция имеет максимум, равный $Z_{\max} = -8 - 6 + 30 + 12 = 28$.

✍ **Задание**. Найти экстремумы функции $z = 3x^2 - 6xy^2 + 6y^2 + 2$.

2.8. Наибольшее и наименьшее значения функции

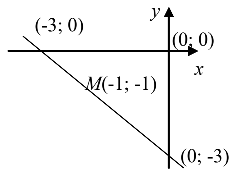
Пусть функция $z = f(x; y)$ определена и непрерывна в ограниченной замкнутой области $\overline{D}$. Тогда она достигает в некоторых точках $\overline{D}$ своего наибольшего M и наименьшего m значений (так называемый *глобальный экстремум*). Эти значения достигаются функцией в точках, расположенных внутри области $\overline{D}$, или в точках, лежащих на границе области.

℘ *Правило нахождения* наибольшего и наименьшего значений дифференцируемой в области $\overline{D}$ функции $z = f(x; y)$ состоит в следующем:

1) найти все критические точки функции, принадлежащие $\overline{D}$, и вычислить значения функции в них;
2) найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = f(x; y)$ на границах области;
3) сравнить все найденные значения функции и выбрать из них наибольшее M и наименьшее m.

ℜ **Пример**. Определить наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + y^2 - xy + x + y$ в области $x \le 0$, $y \le 0$, $x + y \ge -3$.

Решение. Указанная область есть треугольник.



1. Найдем стационарные точки:

$$\begin{cases} z'_x = 2x - y + 1 = 0, \\ z'_y = 2y - x + 1 = 0, \end{cases}$$

отсюда $x = -1$, $y = -1$; получаем точку $M(-1; -1)$.

В точке M значение функции $z_{\text{М}} = -1$.

2. Исследуем функцию на границах области.

При $x = 0$ имеем $z = y^2 + y$, и задача сводится к отысканию наибольшего и наименьшего значений этой функции одного аргумента на отрезке $-3 \le y \le 0$.

$z' = 2y + 1$

$z' = 0$

$2y + 1 = 0$

$y = -\dfrac{1}{2}$

$z\left(0; -\dfrac{1}{2}\right) = x^2 + y^2 - xy + x + y = 0 + \dfrac{1}{4} + 0 + 0 - \dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{4}$

$z(0; -3) = x^2 + y^2 - xy + x + y = 0 + 9 + 0 - 3 = 6$

$z(0; 0) = 0$

$(z_{\text{наиб}})_{x=0} = 6$ в точке $(0; -3)$;

$(z_{\text{наим}})_{x=0} = -\dfrac{1}{4}$ в точке $\left(0; \dfrac{1}{2}\right)$.

При $y = 0$ имеем $z = x^2 + x$, где $-3 \le x \le 0$:

$$z' = 2x + 1$$
$$2x + 1 = 0$$
$$x = -\frac{1}{2}$$
$$z\left(-\frac{1}{2}; 0\right) = x^2 + y^2 - xy + x + y = \frac{1}{4} + 0 - 0 - \frac{1}{2} + 0 = -\frac{1}{4}$$
$$z(-3; 0) = 9 + 0 + 0 - 3 + 0 = 6$$
$$z(0; 0) = 0$$

Получили, что $(z_{\text{наиб}})_{y=0} = 6$ в точке $(-3; 0)$;

$(z_{\text{наим}})_{y=0} = -\frac{1}{4}$ в точке $\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$.

При $x + y = -3$ или $y = -3 - x$ будем иметь $z = 3x^2 + 9x + 6$, где $-3 \le x \le 0$:

$$z' = 6x + 9$$
$$6x + 9 = 0$$
$$x = -\frac{3}{2}$$
$$y = -3 + \frac{3}{2} = -\frac{3}{2}$$
$$z\left(-\frac{3}{2}; -\frac{3}{2}\right) = x^2 + y^2 - xy + x + y = \frac{9}{4} + \frac{9}{4} - \frac{9}{4} - \frac{3}{2} - \frac{3}{2} = -\frac{3}{4}$$
$$z(-3; 0) = 9 + 0 + 0 - 3 + 0 = 6$$
$$z(0; -3) = x^2 + y^2 - xy + x + y = 0 + 9 + 0 - 3 = 6$$

Получаем, что $(z_{\text{наим}})_{x+y=-2} = -\frac{3}{4}$ в точке $\left(-\frac{3}{2}; -\frac{3}{2}\right)$; $(z_{\text{наиб}})_{x+y=-2} = 6$ и совпадает с $(z_{\text{наиб}})_{x=0}$ и $(z_{\text{наиб}})_{y=0}$.

3. Сопоставляя все полученные значения функции z, заключаем, что $z_{\text{наиб}} = 6$ в точках $(0; -3)$ и $(-3; 0)$; $z_{\text{наим}} = -1$ в стационарной точке M.

✍ **Задание**. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = -x^2 - y^2 + 2x + 2y + 3$ в треугольнике с вершинами $A(0; 0)$, $B(3; 0)$, $C(0; 3)$.

❓ Контрольные вопросы

1. Сформулируйте основные понятия функции нескольких переменных.
2. Перечислите основные этапы нахождения частных производных функции нескольких переменных.
3. Дайте определение производной функции нескольких переменных в данном направлении и градиента функции нескольких переменных.
4. По какому алгоритму производится дифференцирование неявных функций нескольких переменных?
5. Перечислите основные понятия, относящиеся к касательной плоскости и нормали к поверхности.

✍ Тест

1. Частная производная $\frac{\partial u}{\partial x}$ функции $u = x^2y^2 + xz - y^2z + 8y$ имеет вид...

1	2	3	4
$2xy^3 + z$	$3x^2y^3 - 2yz + 8$	$x - y^2$	$2xy^3 + z + 8$

2. Частная производная второго порядка $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ функции $z = e^{xy+1}$ имеет вид...

1	2	3	4
y^2e^{xy+1}	x^2e^{xy+1}	$xy(xy + 1)e^{xy-1}$	y^2e^{xy-1}

3. Частная производная $\frac{\partial z}{\partial y}$ функции $z = \arccos\frac{y}{x}$ имеет вид...

1	2	3	4
$-\frac{1}{\sqrt{x^2 - y^2}}$	$\frac{1}{\sqrt{x^2 - y^2}}$	$\frac{y}{x\sqrt{x^2 - y^2}}$	$-\frac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}}$

4. Частная производная второго порядка $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ функции $z = \ln(2x + 3y)$ имеет вид...

1	2	3	4
$-\frac{9}{(2x+3y)^2}$	$-\frac{4}{(2x+3y)^2}$	$-\frac{6}{(2x+3y)^2}$	$-\frac{1}{(2x+3y)^2}$

5. Полный дифференциал функции $z = 4^{x^2-3xy}$ имеет вид...

$dz = 4^{x^2-3xy}\ln 4\cdot\left((2x-3y)dx-3xdy\right)$	$dz = 4^{x^2-3xy}\cdot\left((2x-3y)dx-3xdy\right)$
$dz = -4^{x^2-3xy}\ln 4\cdot\left(3xdx-(2x-3y)dy\right)$	$dz = 4^{x^2-3xy}\ln 4\cdot(dx+dy)$

6. Частная производная $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ функции $z = \cos(2x - 3xy)$ имеет вид...

1. $3x\sin(2x-3xy)$	3. $-(2-3y)\sin(2x-3xy)$
2. $-3x\sin(2x-3xy)$	4. $-(2x-3y)\sin(2x-3xy)$

7. Частная производная $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, функции $z = \sqrt{2xy+y^2+5}$ имеет вид...

1	2	3	4
$\dfrac{x}{\sqrt{2xy+y^2+5}}$	$\dfrac{2y}{\sqrt{2xy+y^2+5}}$	$\dfrac{y}{\sqrt{2xy+y^2+5}}$	$\dfrac{y}{2\sqrt{2xy+y^2+5}}$

8. Частная производная второго порядка $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ функции $z = (x^2 + y^2)^2$ имеет вид...

1	2	3	4
$12x^2 + 4y^2$	$4x^2 + 12y^2$	$8xy$	$4x$

9. Частная производная второго порядка $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ функции $y = \ln\sqrt{x^2+y^2}$ имеет вид...

1	2	3	4
$\dfrac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$	$-\dfrac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}$	$\dfrac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$	$\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

10. Частная производная второго порядка $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ функции $y = \ln\sqrt{x^2+y^2}$ имеет вид...

1	2	3	4
$\dfrac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$	$-\dfrac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}$	$\dfrac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$	$\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

11. Частная производная второго порядка $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ функции $y = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$ имеет вид...

1	2	3	4
$\frac{y^2 - x^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2}$	$-\frac{2xy}{\left(x^2 + y^2\right)^2}$	$\frac{x^2 - y^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2}$	$\frac{2x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

12. Частная производная второго порядка $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ функции $y = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$ имеет вид...

1	2	3	4
$\frac{y^2 - x^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2}$	$-\frac{2xy}{\left(x^2 + y^2\right)^2}$	$\frac{x^2 - y^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2}$	$\frac{2x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

13. Частная производная $\frac{\partial z}{\partial x}$ функции $\arcsin xyz + 2x - 3y + 4z = 0$ имеет вид...

1. $z'_x = -\frac{xy + \sqrt{1 - x^2y^2z^2}}{yz + \sqrt{1 - x^2y^2z^2}}$	2. $z'_x = -\frac{xy + 4\sqrt{1 - x^2y^2z^2}}{yz + 2\sqrt{1 - x^2y^2z^2}}$
3. $z'_x = -\frac{xy - 4\sqrt{1 + x^2y^2z^2}}{yz - 2\sqrt{1 + x^2y^2z^2}}$	4. $z'_x = \frac{xy + 4\sqrt{1 - x^2y^2z^2}}{yz + 2\sqrt{1 - x^2y^2z^2}}$

14. Частная производная $\frac{\partial z}{\partial y}$ функции $\arcsin xyz + 2x - 3y + 4z = 0$ имеет вид...

1. $z'_y = -\frac{xy + 4\sqrt{1 + x^2y^2z^2}}{xz - 3\sqrt{1 + x^2y^2z^2}}$	2. $z'_y = -\frac{xy + 4\sqrt{1 - x^2y^2z^2}}{xz - 3\sqrt{1 - x^2y^2z^2}}$
3. $z'_y = -\frac{xy + 4\sqrt{1 + x^2y^2z^2}}{xz - 3\sqrt{1 + x^2y^2z^2}}$	4. $z'_y = \frac{xy + 4\sqrt{1 - x^2y^2z^2}}{xz - 3\sqrt{1 - x^2y^2z^2}}$

15. Частная производная $\frac{du}{dt}$ функции $u = \ln(x^2 + y^2)$, где $x = t$, $y = t^2$, имеет вид...

1	2	3	4
$\frac{2\left(1 + 2t^2\right)}{t\left(1 + t^2\right)}$	$\ln\left(t^6\right) \cdot 6t^5$	$\frac{1}{t^4 + t^6}$	$\frac{2\left(t + t^2\right)}{t\left(1 + t^2\right)}$

3. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

3.1. Понятие неопределенного интеграла

3.1.1. Определение неопределенного интеграла

Как известно, основной задачей дифференциального исчисления является нахождение для заданной функции $F(x)$ ее производной $F'(x) = f(x)$ или ее дифференциала $dF(x) = F'(x)dx = f(x)dx$. Обратная задача, состоящая в нахождении функции $F(x)$ по известной производной $f(x)$ или дифференциалу $f(x)dx$, представляет собой основную задачу интегрального исчисления. Операции дифференцирования и интегрирования взаимообратны.

⇨ Определение. ***Первообразной функции*** $f(x)$ на $[a, b]$ называется функция $F(x)$, производная которой равна $f(x)$ для $\forall x \in [a, b]$, т. е. $F'(x) = f(x)$ или $dF(x) = f(x)dx$.

$\mathfrak{T}$ **Теорема**. Если есть две первообразные функции $f(x)$, то они отличаются друг от друга на постоянную величину.

⇨ Определение. Множество всех первообразных функций $f(x)$ называется неопределенным интегралом:

$$\int f(x)dx = f(x) + C,$$

где $\int$ – знак интеграла; $f(x)$ – подынтегральная функция; $f(x)dx$ – подынтегральное выражение; C – произвольная постоянная.

⇨ Определение. Процесс нахождения первообразной функции для заданной непрерывной функции $y = f(x) + C$ называется интегрированием.

3.1.2. Геометрический смысл неопределенного интеграла

Геометрически неопределенный интеграл представляет собой семейство «параллельных» кривых (каждому числовому значению С соответствует определенная кривая семейства).

График каждой первообразной называется ***интегральной кривой*** (рис. 6).

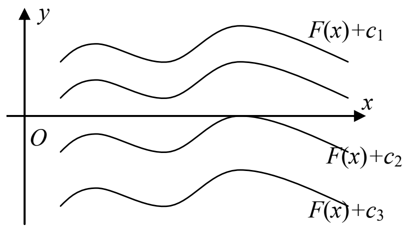


Рис. 6. Геометрический смысл неопределенного интеграла

3.1.3. Свойства неопределенного интеграла

1. $\int dF(x) = F(x) + C$.
2. $d\int f(x)dx = f(x)dx$.
3. $\int \alpha f(x)dx = \alpha \int f(x)dx$.
4. $\int [f_1(x) + f_2(x)]dx = \int f_1(x) + \int f_2(x)dx$.
5. $[\int f(x)dx]' = [F(x) + C]' = f(x)$.
6. Если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то $\int f(u)du = F(u) + C$, где $u = u(x)$ для любой дифференцируемой функции.

3.1.4. Таблица основных неопределенных интегралов

1. $\int dx = x + C$
2. $\int x^{\alpha} dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, (\alpha \neq -1)$
3. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$
4. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C, (a > 0)$
5. $\int e^x dx = e^x + C$
6. $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$
7. $\int \cos x\, dx = \sin x + C$
8. $\int \operatorname{tg} x\, dx = -\ln|\cos x| + C$
9. $\int \operatorname{ctg} x\, dx = \ln|\sin x| + C$
10. $\int \dfrac{dx}{\sin x} = \ln\left|\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right| + C$
11. $\int \dfrac{dx}{\cos x} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)\right| + C$
12. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$
13. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$
14. $\int \operatorname{sh} x\, dx = \operatorname{ch} x + C$
15. $\int \operatorname{ch} x\, dx = \operatorname{sh} x + C$
16. $\int \dfrac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{tg} x + C$
17. $\int \dfrac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$

$$18.\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C,\ a \neq 0$$

$$19.\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C, a \neq 0$$

$$20.\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$$

$$21.\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm k}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2 \pm k}\right| + C$$

3.2. Основные методы интегрирования

3.2.1. Метод непосредственного интегрирования

Интегрирование производится с помощью свойств неопределенного интеграла и таблицы основных интегралов элементарных функций.

$\underline{\mathfrak{R}}$ **Пример**. Найти интеграл $\int 6\sqrt[4]{x^3}\,dx$ и проверить дифференцированием полученный результат.

$$\int 6\sqrt[4]{x^3}\,dx = 6\int x^{\frac{3}{4}}dx = 6\frac{x^{\frac{7}{4}}}{\frac{7}{4}} + C = \frac{24}{7}\sqrt[4]{x^7} + C.$$

$\underline{\mathfrak{R}}$ **Пример**. Вычислить интеграл

$$\int\left(x - 5\sqrt{2x} + 7\sin x + \frac{1}{4x^3} + \frac{6}{2^x} - 8\pi\right)dx \cdot$$

$$\int\left(x - 5\sqrt{2x} + 7\sin x + \frac{1}{4x^3} + \frac{6}{2^x} - 8\pi\right)dx = \int xdx - 5\sqrt{2}\int x^{1/2}dx + 7\int \sin xdx +$$

$$+\frac{1}{4}\int x^{-3}dx + 6\int (1/2)^x dx - 8\pi\int dx = \frac{x^2}{2} - 5\sqrt{2}\frac{x^{3/2}}{3/2} - 7\cos x + \frac{1}{4}\frac{x^{-2}}{-2} + 6\frac{(1/2)^x}{\ln(1/2)} -$$

$$-8\pi x + C = \frac{x^2}{2} - \frac{10\sqrt{2}}{3}x\sqrt{x} - 7\cos x - \frac{1}{8x^2} - \frac{6}{2^x\ln 2} - 8\pi x + C.$$

✍ **Задание**. Найдите интегралы:

1. $\int \frac{x^4 - 3x^2 + 5\sqrt[3]{x^2} - 7x + 6}{\sqrt[3]{x}}dx$

℘ *Указание*. В данном интеграле разделите почленно числитель на знаменатель $\sqrt[3]{x}$ и затем проинтегрируйте.

2. $\int \frac{(1+\sqrt{x})^3}{\sqrt{x}} dx$.

3. $\int \frac{dx}{4x^2+1}$.

4. $\int \frac{dx}{\sqrt{3-5x^2}}$.

3.2.2. Линейные преобразования выражения под знаком дифференциала

Если известен интеграл $\int f(x)dx = F(x)+C$, то следующий интеграл может быть вычислен с помощью линейного преобразования выражения под знаком дифференциала:

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}\int f(ax+b)d(ax+b) = \frac{1}{a}F(ax+b)+C.$$

$\mathfrak{R}$ **Пример**. Найти интеграл $\int \sin(7x-8)dx$.

$$\int \sin(7x-8)dx = \frac{1}{7}\int \sin(7x-8)d(7x-8) = -\frac{1}{7}\cos(7x-8)+C.$$

✍ **Задания**. Найдите интегралы:

1) $\int \frac{1}{2x+b}dx$; 2) $\int \frac{1}{9+(8x-7)^2}dx$; 3) $\int \cos 5x dx$; 4) $\int \frac{dx}{\sin^2(1-2x)}$.

3.2.3. Подведение (внесение) под знак дифференциала

Один из множителей подынтегральной функции можно подвести под знак дифференциала. Для этого необходимо вычислить первообразную этого множителя и записать ее под знаком дифференциала.

В дальнейшем все дополнительные вычисления и рассуждения будем записывать между двумя вертикальными чертами.

$$\int [f(Y'(x)) \cdot Y'(x)]dx = \int [f(Y(x))]dY(x) = F(Y(x))+C.$$

$\mathfrak{R}$ **Пример**. Найти интеграл $\int \sin^5 x \cos x dx$.

$$\int \sin^5 x \cos x dx = \int \sin^5 x d(\sin x) = \frac{\sin^6 x}{6}+C$$

$\mathfrak{R}$ **Пример**. Найти интеграл $\int \frac{\operatorname{arctg}^7 x}{1+x^2}dx$.

$$\int \frac{\operatorname{arctg}^7 x}{1+x^2}dx = \int \operatorname{arctg}^7 x d(\operatorname{arctg} x) = \frac{\operatorname{arctg}^8 x}{8} + C \cdot$$

✍ **Задание**. Найдите интегралы:

1) $\int \frac{\ln^2 x}{x}dx$; 2) $\int \frac{xdx}{x^2+1}dx$; 3) $\int x^3 \cos x^4 dx$; 4) $\int \frac{dx}{2x+3}$.

3.2.4. Метод интегрирования подстановкой (замена переменной)

Если интеграл $J = \int f(x)dx$ не может быть найден непосредственно по указанным выше формулам, то независимую переменную x можно заменить на непрерывно дифференцируемую функцию от другой переменной:

$$J = \int f(x)dx = \left| \begin{array}{l} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t)dt = d(\varphi(t)) \end{array} \right| = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt.$$

При этом интеграл приводится к табличному или к такому, прием вычисления которого уже известен.

Цель подстановки будет достигнута, если окажется, что вычисление этого интеграла проще, чем исходного.

В результате интегрирования получается функция независимой переменной t, а чтобы возвратиться к переменной x, надо определить t через x и подставить это значение вместо t в найденную функцию.

$\mathfrak{R}$ **Пример**. Найти интеграл: $\int \frac{x^2}{(7x^3+8)}dx$.

$$\int \frac{x^2}{(7x^3+8)}dx = \left| \begin{array}{l} t = 7x^3+8; \\ dt = 21x^2dx \\ \frac{1}{21}dt = x^2dx \end{array} \right| = \frac{1}{21}\int t^{-5}dt = -\frac{1}{84}t^{-4} + C = -\frac{1}{84(7x^3+8)} + C.$$

$\mathfrak{R}$ **Пример**. Найти неопределенный интеграл $\int \sqrt{\sin x}\cos x dx$.

Сделаем замену $t = \sin x$, $dt = \cos x dt$.

$$\int \sqrt{t}dt = \int t^{1/2}dt = \frac{2}{3}t^{3/2} + C = \frac{2}{3}\sin^{3/2} x + C.$$

✍ **Задание**. Какую замену нужно выполнить, чтобы найти следующие интегралы:

1) $\int \frac{\sqrt{\arccos x}}{\sqrt{1-x^2}}dx$; 2) $\int 2x^3 \sin 3x^4 dx$; 3) $\int \frac{1}{\sqrt{x}\sin^2\sqrt{x}}dx$; 4) $\int \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}dx$?

3.3. Метод интегрирования по частям

Интегрированием по частям называется нахождение интеграла по формуле:

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du,$$

где $u = u(x)$, $v = v(x)$ – непрерывные дифференцируемые функции, а интеграл вида $\int u \cdot dv$ сводится к более простому интегралу. Укажем некоторые интегралы, которые удобно вычислять данным методом.

1. $$\int P_n(x)\cdot\begin{bmatrix} a^{\alpha x} \\ \sin\beta x \\ \cos\beta x\end{bmatrix}dx = \left| u = P_n(x); \quad dv = \begin{bmatrix} a^{\alpha x} \\ \sin\beta x \\ \cos\beta x\end{bmatrix}dx\right|.$$

ℜ **Пример**. Найти интеграл $\int (2x+1)e^{3x}dx$.

Пусть

$$\begin{bmatrix} u = 2x+1 \Rightarrow du = 2dx \\ dv = e^{3xdx} \Rightarrow v = \int e^{3x}dx = \frac{1}{2}e^{3x}\end{bmatrix}.$$

Следовательно, по формуле интегрирования по частям

$$\int (2x+1)e^{3x}dx = (2x+1)\frac{1}{3}e^{3x} - \int\frac{1}{3}e^{3x}2dx = \frac{1}{3}(2x+1)e^{3x} - \frac{2}{9}e^{3x} + C.$$

2. $$\int P_n(x)\cdot\begin{bmatrix} \log_a x \\ \arcsin\beta x \\ \arccos\beta x \\ \operatorname{arctg}\beta x \\ \operatorname{arcctg}\beta x\end{bmatrix}dx = \left| u = \begin{bmatrix} \log_a x \\ \arcsin\beta x \\ \arccos\beta x \\ \operatorname{arctg}\beta x \\ \operatorname{arcctg}\beta x\end{bmatrix}; \quad dv = P_n(x)dx\right|.$$

ℜ **Пример**. Найти интеграл $\int \ln x dx$.

$$\begin{bmatrix} u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x}dx \\ dv = dx \Rightarrow v = x\end{bmatrix}.$$

Поэтому

$$\int \ln x dx = x\ln x - \int x\frac{1}{x}dx = x\ln x - x + C.$$

3. $\int a^{\alpha x}\cdot\begin{bmatrix}\sin\beta x\\ \cos\beta x\end{bmatrix}dx$ — два раза интегрируем по частям, получаем уравнение относительно исходного материала.

$\underline{\mathfrak{R}}$ **Пример**. Найти интеграл: $\int e^x\cos x dx$.

$$\int e^x\cos x dx = \begin{vmatrix} u = e^x; \quad du = e^x dx \\ dv = \cos x dx; \quad v = \sin x \\ \int u dv = u\cdot v - \int v du \end{vmatrix} = e^x\sin x - \int e^x \sin x dx =$$

$$= \begin{vmatrix} u = e^x; \quad du = e^x dx \\ dv = \sin x dx; \quad v = -\cos x \end{vmatrix} = e^x\sin x + e^x\cos x - \int e^x\cos x dx + C;$$

$$2\int e^x\cos x dx = e^x\sin x + e^x\cos x + C = \frac{1}{2}e^x(\sin x + \cos x) + C.$$

✍ **Задание**. Найдите интегралы:
1) $\int x^2e^x dx$; 2) $\int x\cos x dx$; 3) $\int\sqrt{x}\ln 3x dx$; 4) $\int \operatorname{arctg} 2x dx$.

✍ **Задание**. Каким методом можно вычислить представленные интегралы?

$\int(1-2x)^3dx$	Метод интегрирования по частям
$\int\frac{dx}{2x+3}$	
$\int x^3\cos x^4 dx$	
$\int\sqrt[3]{x}\ln^2 x\,dx$	
$\int\frac{7x^2}{x^3+1}$	Метод интегрирования подстановкой (замена переменной)
$\int\frac{dx}{\sin^2(1-2x)}$	
$\int\frac{\ln^2 x}{x}dx$	
$\int(2x+5)\sin 2x dx$	

$\int \frac{dx}{\ln x}$	Подведение (внесение) под знак дифференциала
$\int \frac{dx}{\sqrt{3+5x^2}}$	
$\int \frac{dx}{4-5x^2}$	
$\int \frac{dx}{\sin^2 x\sqrt{\operatorname{ctg}^2 x+4}}$	Метод непосредственного интегрирования
$\int \sin^2 \frac{x}{6} dx$	
$\int \sqrt{\cos x} \sin x dx$	
$\int e^{-2x+3} dx$	Линейные преобразования выражения под знаком дифференциала
$\int x \arcsin 3x dx$	
$\int \cos x^2 dx$	
$\int \operatorname{arctg} \frac{x}{2} dx$	

3.4. Интегрирование рациональных функций

3.4.1. Интегрирование элементарных дробей

⇨ Определение. Элементарными называются дроби следующих четырех типов:

I. $\frac{1}{ax+b}$; II. $\frac{1}{(ax+b)^m}$; III. $\frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}$; IV. $\frac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^n}$.

Здесь m, n – натуральные числа ($m \geq 2$, $n \geq 2$) и $b^2 - 4ac < 0$.

Первые два типа интегралов от элементарных дробей довольно просто приводятся к табличным подстановкой $t = ax + b$.

I. $$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{a}\ln|t| + C = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C.$$

II. $$\int \frac{dx}{(ax+b)^m} = \frac{1}{a}\int \frac{dt}{t^m} = -\frac{1}{a(m-1)t^{m-1}} + C = -\frac{1}{a(m-1)(ax+b)^{m-1}} + C.$$

При интегрировании выражений, содержащих квадратных трехчлен, главным моментом является выделение полного квадрата:

$$ax^2+bx+c=a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right]=a\left[\left(x^2+2\frac{b}{2a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right)-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right]=$$

$$=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right].$$

После этого необходимо сделать замену: $x+\dfrac{b}{2a}=t$. Данным методом вычисляются интегралы третьего и четвертого типа от дробей $\dfrac{Mx+N}{ax^2+bx+c}$ и $\dfrac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^n}$.

$\underline{\mathfrak{R}}$ **Пример**. Найти интеграл $\displaystyle\int\frac{3x+1}{x^2+2x+10}dx$.

Выделим полный квадрат $x^2+2x+10=(x+1)^2+9$.

Сделаем подстановку $x+1=t$.

Тогда $x=t-1$, $dx=dt$ и

$$\int\frac{3x+1}{x^2+2x+10}dx=\int\frac{3(t-1)+1}{t^2+9}-2\int\frac{dt}{t^2+9}=$$

$$=\frac{3}{2}\ln(t^2+9)-\frac{2}{3}\operatorname{arctg}\frac{t}{3}+C=\frac{3}{2}\ln(x^2+2x+10)-\frac{2}{3}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{3}+C.$$

✍ **Задание**. Найдите интегралы:

1) $\displaystyle\int\frac{x^3dx}{x+1}$; 2) $\displaystyle\int\frac{x-2}{x^2+3x-4}dx$; 3) $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2+3x-10}$; 4) $\displaystyle\int\frac{dx}{5x-4}$.

3.4.2. Интегрирование рациональных дробей

$\underline{\mathfrak{I}}$ **Теорема**. Любую правильную рациональную дробь единственным образом можно разложить на сумму простейших дробей.

В этой сумме каждому множителю вида $(x-a_1)^\alpha$ знаменателя, где $a_1=x_1$ – любой из действительных корней, а α – его кратность, соответствует выражение вида

$$\frac{A_1}{(x-a_1)^\alpha}+\frac{A_2}{(x-a_1)^{\alpha-1}}+\frac{A_3}{(x-a_1)^{\alpha-2}}+\ldots+\frac{A_\alpha}{(x-a_1)},$$

а каждому множителю $(x^2+p_1x+q_1)^{r_n}$ знаменателя соответствует выражение вида

$$\frac{B_1x+C_1}{(x^2+p_1x+q_1)^{r_n}}+\frac{B_2x+C_2}{(x^2+p_1x+q_1)^{r_n-1}}+\frac{B_3x+C_3}{(x^2+p_1x+q_1)^{r_n-2}}+\ldots+\frac{B_{r_n}x+C_{r_n}}{(x^2+p_1x+q_1)},$$

где $A_1, A_2, ..., A_\alpha; B_1, B_2, ..., B_{r_n}; C_1, C_2, ..., C_{r_n}$ – действительные числа, подлежащие определению.

℘ *Алгоритм разложения правильной дроби на сумму простейших дробей*

1. Исходную дробь привести к правильному виду (в дальнейшем будем рассматривать только правильную дробь).

2. Знаменатель дроби разложить на простейшие множители, т. е. представить исходную дробь в виде суммы всевозможных различных простейших дробей, в знаменателях которых стоят всевозможные множители знаменателя, а в числителях – соответствующей степени многочлены с неопределенными коэффициентами. При этом множителю знаменателя кратности α будет соответствовать α простейших дробей, в знаменателях которых будут все степени множителя.

Контроль. Число неопределенных коэффициентов должно равняться степени многочлена в знаменателе исходной дроби.

3. Привести сумму простейших дробей к общему знаменателю. Общим знаменателем является знаменатель исходной дроби.

4. Приравнять числители исходной и получившейся дроби, вычислить коэффициенты. Для этого можно приравнять коэффициенты при одинаковых степенях x в многочленах правой и левой части равенства.

Таким образом, интегрируя правильную дробь, мы сначала раскладываем ее на сумму простейших дробей, а затем интегрируем каждое слагаемое в этом разложении.

$\mathfrak{R}$ **Пример**. Найти интеграл: $\int \frac{x^5+2x^3+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2}dx.$

Под знаком интеграла неправильная дробь; выделим ее целую часть путем деления числителя на знаменатель:

$$\begin{array}{l|l} x^5+2x^3+4x+4 & \underline{x^4+2x^3+2x^2} \\ \underline{x^5+2x^4+2x^3} & x-2 \\ -2x^4+4x+4 & \\ \underline{-2x^4-4x^3-4x^2} & \\ 4x^3+4x^2+4x+4 \text{ (остаток)} & \end{array}$$

Получаем:

$$\frac{x^5+2x^3+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2}=x-2+\frac{4x^3+4x^2+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2}.$$

Разложим правильную рациональную дробь на простейшие:

$$\frac{4x^3+4x^2+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Cx+D}{x^2+2x+2}$$

$$4x^3+4x^2+4x+4=Ax(x^2+2x+2)+B(x^2+2x+2)+(Cx+D)x^2$$

т. е. $4x^3+4x^2+4x+4=(A+C)x^3+(2A+B+D)x^2+(2A+2B)x+2B.$

Отсюда следует, что

$$\begin{cases} A+C=4, \\ 2A+B+D=4, \\ 2A+2B=4, \\ 2B=4. \end{cases}$$

Находим: $B=2$, $A=0$, $C=4$, $D=2$. Стало быть,

$$\frac{4x^3+4x^2+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2}=\frac{2}{x^2}+\frac{4x+2}{x^2+2x+2}$$

и $$\frac{4x^3+4x^2+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2}=x-2+\frac{2}{x^2}+\frac{4x+2}{x^2+2x+2}\ .$$

Интегрируем полученное равенство:

$$\int\frac{x^5+2x^3+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2}dx=$$

$$=\int\left(x-2+\frac{2}{x^2}+\frac{4x+2}{x^2+2x+2}\right)dx=\frac{x^2}{2}-2x-\frac{2}{x}+\int\frac{4x+2}{(x+1)^2+1}dx$$

Обозначим $x+1=t$ и $dx=dt$. Таким образом,

$$\int\frac{4x+2}{(x+1)^2+1}dx=\int\frac{4t-4+2}{t^2+1}dt=$$

$$=4\int\frac{tdt}{t^2+1}-2\int\frac{dt}{t^2+1}=4\cdot\frac{1}{4}\ln(t^2+1)-2\operatorname{arctg}t+C=$$

$$=2\ln(x^2+2x+2)-2\operatorname{arctg}(x+1)+C.$$

Следовательно,

$$\int\frac{x^5+2x^3+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2}dx=\frac{x^2}{2}-2x-\frac{2}{x}+2\ln(x^2+2x+2)-2\operatorname{arctg}(x+1)+C.$$

✍ **Задания**.

1. Найти интегралы:

1) $\int \frac{(2x-1)dx}{x^2+6x+10}$; 2) $\int \frac{x^3-4x^2-2x-3}{x^2-4x-5}dx$; 3) $\int \frac{3x^2+5x+4}{(x-1)^2(x+3)}dx$; 4) $\int \frac{x^2+2x-5}{x^3+x^2+5x}dx$.

2. Какими методами можно вычислить представленные интегралы?

1) $\int \frac{(1+x)dx}{x^2-6}$; 4) $\int \frac{3x^2+5x+4}{(x-1)^2(x+3)}dx$; 7) $\int \frac{5}{(x+2)^5}dx$; 10) $\int \frac{x^2dx}{3-x^2}$;

2) $\int \frac{4-x}{(x-1)^3}dx$; 5) $\int \frac{x-4}{x+2}dx$; 8) $\int \frac{5}{x+2}dx$; 11) $\int \frac{x^4dx}{x^2+1}$;

3) $\int \frac{(2x-1)dx}{x^2+6x+10}$; 6) $\int \frac{x^3dx}{x+1}$; 9) $\int \frac{xdx}{(x-3)^5}$ 12) $\int \frac{x^3-4x^2-2x-3}{x^2-4x-5}dx$.

3.5. Интегрирование тригонометрических функций

3.5.1. Универсальная тригонометрическая подстановка для интеграла вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$

Здесь R – обозначение некоторой рациональной функции от переменных $\sin x$ и $\cos x$.

Интегралы этого вида вычисляются с помощью подстановки $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Эта подстановка позволяет преобразовать тригонометрическую функцию в рациональную:

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2};\ \cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2};\ x = 2\operatorname{arctg} t;\quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Таким образом,

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}dt = \int r(t)dt.$$

$\mathfrak{R}$ **Пример**. Найти интеграл: $\int \frac{dx}{3+\sin x+\cos x}$.

Сделаем универсальную подстановку $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Тогда $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$. Следовательно,

$$\int\frac{dx}{3+\sin x+\cos x}=\int\frac{2dt}{\left(1+t^2\right)\left(3+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}=\int\frac{dt}{t^2+t+2}=\int\frac{d\left(t+\frac{1}{2}\right)}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}}=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{t+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{7}}{2}}+C=\frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{1+2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{7}}+C.$$

Несомненным достоинством этой подстановки является то, что с ее помощью всегда можно преобразовать тригонометрическую функцию в рациональную и вычислить соответствующий интеграл.

✍ **Задание**. Найдите интегралы:

1) $\int\frac{dx}{5+2\sin x+3\cos x}$; 2) $\int\frac{dx}{5-2\sin 2x}$; 3) $\int\frac{dx}{5\sin^2 x+8\cos^2 x}$; 4) $\int\frac{dx}{2-4\cos x}$.

3.5.2. Интеграл вида $\int R(\sin^n x,\cos^m x)dx$, если функция R является нечетной относительно cos x

Упрощается с помощью подстановки

$$t=\sin x,\ \cos x=\sqrt{1-t^2},\ x=\arcsin t,\ dx=\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

$\underline{\mathfrak{R}}$ **Пример**.

$$\int\frac{\cos^7 xdx}{\sin^4 x}=\left\{\begin{aligned}&\sin x=t\\&dt=\cos xdx\\&\cos^2 x=1-\sin^2 x\end{aligned}\right\}=\int\frac{(1-t^2)^3}{t^4}dt=\int\frac{1-3t^2+3t^4-t^6}{t^4}dt=$$

$$=\int\frac{dt}{t^4}-3\int\frac{dt}{t^2}+3\int dt-\int t^2dt=-\frac{1}{3t^3}+\frac{3}{t}+3t-\frac{1}{3}t^3=$$

$$=-\frac{1}{3\sin^3 x}+\frac{3}{\sin x}+3\sin x-\frac{\sin^3 x}{3}+C.$$

Таким образом, для применения этого метода необходима только нечетность функции относительно косинуса, а степень синуса, входящего в функцию может быть любой, как целой, так и дробной.

3.5.3. Интеграл вида $\int R(\sin^n x, \cos^m x)dx$, если функция R является нечетной относительно $\sin x$

По аналогии с рассмотренным выше случаем делается подстановка

$$t = \cos x,\ \sin x = \sqrt{1-t^2},\ x = \arccos t,\ dx = -\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

✍ **Задание**. Найдите интегралы:

1) $\int \frac{\sin^3 2x}{\sqrt[3]{\cos 2x}}dx$; 2) $\int \sin^3 \frac{x}{2} \cos^4 \frac{x}{2} dx$; 3) $\int \frac{\cos^3 2x}{\sqrt[3]{\sin 2x}} dx$; 4) $\int \cos^3 \frac{x}{2} \sin^5 \frac{x}{2} dx$.

3.5.4. Интеграл вида $\int R(\sin^n x, \cos^m x)dx$, где функция R четная относительно $\sin x$ и $\cos x$

Для преобразования функции R в рациональную используется подстановка

$$t = \operatorname{tg} x,\ \cos x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}},\ \sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}},\ x = \operatorname{arctg} t,\ dx = \frac{dt}{1+t^2}.$$

$\mathfrak{R}$ **Пример**. Найти интеграл: $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 6\sin x\cos x - 16\cos^2 x}$.

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x + 6\sin x \cos x - 16\cos^2 x} = \int \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\operatorname{tg}^2 x + 6\operatorname{tg} x - 16} dx = \left\{ \begin{matrix} \operatorname{tg} x = t; \\ \frac{1}{\cos^2 x} dx = d(\operatorname{tg} x) = dt \end{matrix} \right\} =$$

$$= \int \frac{dt}{t^2 + 6t - 16} = \int \frac{dt}{(t+3)^2 - 25} = \frac{1}{10}\ln\left|\frac{\operatorname{tg} x + 3 - 5}{\operatorname{tg} x + 3 + 5}\right| + C = \frac{1}{10}\ln\left|\frac{\operatorname{tg} x - 2}{\operatorname{tg} x + 8}\right| + C.$$

$\mathfrak{R}$ **Пример**. Найти интеграл: $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$.

$$\int \frac{dx}{\cos^4 x} = \left| \begin{matrix} \operatorname{tg} x = t;\ \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2};\ \ dx = \frac{dt}{1+t^2} \\ x = \operatorname{arctg} t \end{matrix} \right| =$$

$$= \int \frac{(1+t^2)^2\ dt}{1+t^2} = \int (1+t^2)dt = t + \frac{t^3}{3} + C = \operatorname{tg} x + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x + C.$$

$\mathfrak{R}$ **Пример**. Найти интеграл: $\int \sin^4 x \cos^5 x dx$.

Применим подстановку $\sin x = t$. Тогда $x = \arcsin x$, $dx = \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt$., $\cos x = \sqrt{1-t^2}$.

$$\int \sin^4 x \cos^5 x dx = \int t^4 (1-t^2)^5 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int t^4 (1-t^2)^2 dt = \int (t^4 - 2t^6 + t^8) dt = \frac{t^5}{5} - 2\frac{t^7}{7} + \frac{t^9}{9} + C =$$

$$= \frac{1}{5}\sin^5 x - \frac{2}{7}\sin^7 x + \frac{1}{9}\sin^9 x + C.$$

✍ **Задание**.

1. Найдите интегралы:

1) $\int \operatorname{ctg}^7 \frac{x}{4} dx$; 2) $\int \dfrac{dx}{3\sin^2 x - 4\cos^2 x}$; 3) $\int \dfrac{dx}{1+\sin^2 x}$.

2. Соотнесите интеграл с заменой, которую нужно выполнить, чтобы найти интеграл.

Интеграл	Замена переменной
$\int \dfrac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos x}} dx$	$t = \sin x$
$\int \dfrac{dx}{2+4\cos x + 6\sin x}$	$t = \cos x$
$\int \operatorname{tg}^7 x dx$	$t = \operatorname{tg} x$
$\int \dfrac{\cos^8 x}{\sin^6 x} dx$	$t = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$
$\int \dfrac{\cos^3 \frac{x}{2}}{\sqrt{\sin \frac{x}{2}}} dx$	

3.5.5. Использование тригонометрических преобразований

В зависимости от типа произведения применятся одна из трех формул:

$$\int \cos mx \cos nx dx = \int \frac{1}{2}[\cos(m+n)x + \cos(m-n)x] dx = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m+n)x}{m+n} + \frac{\sin(m-n)x}{m-n}\right]$$

$$\int \sin mx \cos nx dx = \int \frac{1}{2}[\sin(m+n)x + \sin(m-n)x] dx = \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos(m+n)x}{m+n} - \frac{\cos(m-n)x}{m-n}\right]$$

$$\int \sin mx \sin nx dx = \int \frac{1}{2}[-\cos(m+n)x + \cos(m-n)x] dx = \frac{1}{2}\left[-\frac{\sin(m+n)}{m+n} + \frac{\sin(m-n)}{m-n}\right]$$

Применение формул понижения степени:

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} \qquad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

$$\cos^3 x = \frac{1}{4}(\cos 3x + 3\cos x) \qquad \sin^3 x = \frac{1}{4}(3\sin x - \sin 3x)$$

$\mathfrak{R}$ **Пример**. Найти интеграл $\int \cos 7x \cdot \cos x\, dx$.

$$\int \cos 7x \cdot \cos x\, dx = \frac{1}{2}\int [\cos(7-1)x + \cos(7+1)x]dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \cos 6x dx + \frac{1}{2}\int \cos 8x dx = \frac{1}{12}\int \cos 6x d(6x) +$$

$$+ \frac{1}{16}\int \cos 8x d(8x) = \frac{1}{12}\sin 6x + \frac{1}{16}\sin 8x + C.$$

$\mathfrak{R}$ **Пример**. Найти интеграл:

$$\int \sin^2 x dx = \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x\right)dx = \frac{1}{2}\int (1-\cos 2x)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\sin 2x\right) + \mathrm{C} = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C.$$

✍ **Задания**.

1. Найдите интегралы:

1) $\int \sin 6x \cdot \sin 4x\, dx$; 2) $\int \frac{1}{\cos^2 3x \cdot \sin^2 3x} dx$; 3) $\int \cos^4 x dx$; 4) $\int (1+\sin 3x)^2 dx$.

2. Каким методом можно вычислить представленные интегралы?

1) $\int \cos x \cos 2x \sin 4x dx$;

2) $\int \mathrm{ctg}^7 \frac{x}{4} dx$;

3) $\int \sin^5 2x dx$;

4) $\int \sin^2 \frac{x}{6} dx$;

5) $\int \frac{dx}{2+3\sin x + 4\cos x}$;

6) $\int \frac{\cos^3 \frac{x}{2}}{\sqrt[3]{\sin^2 \frac{x}{2}}} dx$;

7)7) $\int \frac{dx}{9+5\cos x}$;

8) $\int (1-\cos 2x)^2 dx$;

9) $\int \frac{dx}{9+5\cos x}$;

3.6. Интегрирование иррациональных функций

Далеко не каждая иррациональная функция может иметь интеграл, выраженный элементарными функциями. Для нахождения интеграла от иррациональной функции следует применить подстановку, которая позволит преобразовать функцию в рациональную, интеграл от которой может быть найден, как известно, всегда.

Рассмотрим некоторые приемы для интегрирования различных типов иррациональных функций.

3.6.1. Иррациональная функция, в состав которой входят корни различных степеней

В качестве новой переменной рационально взять корень степени, равной наименьшему общему кратному степеней корней, входящих в выражение.

Проиллюстрируем это на примере.

$\mathfrak{R}$ **Пример**. Найти интеграл: $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} = \left| \begin{array}{l} \text{НОК}(2,3)=6; \\ x=t^6; \\ \sqrt{x}=\sqrt{t^6}=t^3; \\ dx=6t^5dt; \quad \sqrt[3]{x}=\sqrt[3]{t^6}=t^2 \end{array} \right| = \int \frac{6t^5dt}{t^3+t^2} = 6\int \frac{t^3dt}{t+1} = 6\int \left[t^2-t+1-\frac{1}{t+1} \right] dt =$$

$$= 6\left[\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}+t-\ln|t+1| \right] + C = 2t^3-3t^2+6t-6\ln|t+1|+\text{C} =$$

$$= 2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-6\ln\left|\sqrt[6]{x}+1\right|+C.$$

✍ **Задание**. Найдите интегралы:

1) $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}dx$; 2) $\int \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}dx$; 3) $\int \frac{\sqrt[4]{x^3}dx}{\sqrt{x}+1}$; 4) $\int \frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x^5}-\sqrt[6]{x^7}}dx$.

3.6.2. Интегрирование биноминальных дифференциалов

⇨ Определение. Биноминальным дифференциалом называется выражение $x^m(a+bx^n)^p dx$, где m, n и p – рациональные числа.

1. Если p – целое число, то интеграл рационализируется с помощью подстановки $t=\sqrt[\lambda]{x}$, где λ – общий знаменатель m и n.

2. Если $\frac{m+1}{n}$ — целое число, то интеграл рационализируется подстановкой $t=\sqrt[s]{a+bx^n}$, где s — знаменатель числа p.

3. Если $\frac{m+1}{n}+p$ — целое число, то используется подстановка $t=\sqrt[s]{\frac{a+bx^n}{x^n}}$, где s — знаменатель числа p.

$\mathfrak{R}$ **Пример**. Найти интеграл: $\int\frac{x^3dx}{\left(4-x^2\right)\sqrt{4-x^2}}$.

$\int\frac{x^3dx}{\left(4-x^2\right)\sqrt{4-x^2}}=\int x^3\left(4-x^2\right)^{-\frac{3}{2}}dx\Rightarrow$ имеем $m=3$, $n=2$, $P=-\frac{3}{2}$, так как $\frac{m+1}{n}=\frac{3+1}{2}=2$ — целое число, то имеем случай 2 интегрируемости дифференциального бинома:

$$\Rightarrow\left|\begin{array}{l}4-x^2=t^2;\quad x^2=4-t^2;\\ -2xdx=2tdt;\\ xdx=-tdt;\\ t=\sqrt{4-x^2}\end{array}\right|=-\int\left(4-t^2\right)\cdot t^{-3}\cdot tdt=-\int\frac{4-t^2}{t^2}dt=\int dt-4\int\frac{dt}{t^2}=t+\frac{4}{t}+C=$$

$$=\frac{t^2+4}{t}+C=\frac{4-x^2+4}{\sqrt{4-x^2}}+C=\frac{8-x^2}{\sqrt{4-x^2}}+C.$$

3.6.3. Интеграл вида $\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$

Приводится к табличным интегралам путем выделения полного квадрата из квадратного трехчлена.

$\mathfrak{R}$ **Пример**. Найти интеграл: $\int\frac{dx}{\sqrt{4x^2+2x+1}}$.

Так как $4x^2+4x+2=4\left(\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{3}{16}\right)$, то

$$\int\frac{dx}{\sqrt{4x^2+2x+1}}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{3}{16}}}.$$

Сделаем подстановку $x+\frac{1}{4}=t$. Тогда $x=t-\frac{1}{4}$, $dx=dt$.

$$\int\frac{dx}{\sqrt{4x^2+2x+1}}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{3}{16}}}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+\frac{3}{16}}}=\frac{1}{2}\ln\left|t+\sqrt{t^2+\frac{3}{16}}\right|+C=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|x+\frac{1}{4}+\sqrt{\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{3}{16}}\right|+C.$$

✍ **Задание**. Найдите интегралы:

1) $\int\frac{dx}{\sqrt{35-2x-x^2}}$; 2) $\int\frac{dx}{\sqrt{48-2x-x^2}}$; 3) $\int\frac{dx}{\sqrt{80-2x+x^2}}$; 4) $\int\frac{dx}{\sqrt{99-2x+x^2}}$.

3.6.4. Интеграл вида $\int\frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$

Приводится к табличным интегралам путем выделения полного квадрата из квадратного трехчлена и введением новой переменной.

$\underline{\mathfrak{R}}$ **Пример**. Найти интеграл: $I=\int\frac{(x+4)dx}{\sqrt{6-2x-x^2}}$.

Так как $6-2x-x^2=7-(x+1)^2$. Сделаем подстановку $x+1=t$, $x=t-1$, $dx=dt$:

$$\int\frac{t-1+4}{\sqrt{7-t^2}}dt=\int\frac{tdt}{\sqrt{7-t^2}}+3\int\frac{dt}{\sqrt{7-t^2}}=-\frac{1}{2}\int(7-t^2)^{-\frac{1}{2}}d(7-t^2)+3\int\frac{dt}{\sqrt{(\sqrt{7})^2-t^2}}=$$

$$=-\sqrt{7-t^2}+3\arcsin\frac{t}{\sqrt{7}}+C=3\arcsin\frac{x+1}{\sqrt{7}}-\sqrt{6-2x-x^2}+C.$$

✍ **Задание**. Найдите интегралы:

1) $\int\frac{(7x+1)dx}{\sqrt{x^2+10x+25}}$; 2) $\int\frac{(4x+1)dx}{\sqrt{15-2x-x^2}}$; 3) $\int\frac{(5x+1)dx}{\sqrt{8-2x-x^2}}$; 4) $\int\frac{(4x-1)dx}{\sqrt{15-2x-x^2}}$.

3.6.5. Интегралы вида $\int\frac{dx}{(x-\lambda)\sqrt{ax^2+bx+c}}$

Приводятся к табличным интегралам с помощью подстановки $x-\lambda=\frac{1}{t}$.

$\mathfrak{R}$ **Пример**. Найти интеграл: $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{1-x^2}}$.

$$\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{1-x^2}} = \left| \begin{matrix} x-1=\frac{1}{t}; & x=1+\frac{1}{t} \\ dx=-\frac{1}{t^2}dt & \end{matrix} \right| = \int \frac{-\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{-\frac{1+2t}{t^2}}} - \int \frac{|t|dt}{t\sqrt{-t-2t}} = \int \frac{dt}{\sqrt{-1-2t}} =$$

$$= -\frac{1}{2}\int(-1-2t)^{-\frac{1}{2}}d(-1-2t) = -(-1-2t)^{\frac{1}{2}} + C = C - \sqrt{-1-2t} = C - \sqrt{-1-\frac{2}{x-1}} = C - \sqrt{\frac{x+1}{1-x}}.$$

Здесь учтено, что $\sqrt{t^2} = |t|$, что подынтегральная функция определена в интервале $-1 < x < 1$, вследствие чего $x - 1 < 0$ и $t < 0$ и поэтому $|t| = -t$.

3.6.6. Подынтегральная функция, содержащая выражение с корнем

Данный корень заменяется новой переменной.

✍ **Задание**. Найдите интегралы:

1) $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x}-x}$; 2) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x+4}-x}$, 3) $\int \frac{dx}{\sqrt{6+x}-x}$; 4) $\int \frac{dx}{x+\sqrt{1+5x}}$.

3.6.7. Интегралы вида $\int R\left(x_1\sqrt{a^2-x^2}\right)dx$

С помощью надлежащих тригонометрических подстановок они сводятся к интегралам от функций, рационально зависящих от тригонометрических функций:

$$\int R\left(x_1\sqrt{a^2-x^2}\right)dx = \left| \begin{matrix} x = a\sin t; & dx = a\cos t dt \\ \sqrt{a^2-x^2} = a\cos t & \end{matrix} \right|.$$

$\mathfrak{R}$ **Пример**. Найти интеграл: $I = \int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2} dx$.

Положим $x = 2\sin t$, $dx = 2\cos t dt$, $t = \arcsin\frac{x}{2}$. Тогда

$$I = \int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}dx = \int \frac{\sqrt{4-4\sin^2 t}}{4\sin^2 t} 2\cos t dt = \int \frac{4\cos^2 t}{4\sin^2 t}dt = \int \frac{1-\sin^2 t}{\sin^2 t}dt = \int \frac{dt}{\sin^2 t} - \int dt =$$

$$= -\operatorname{ctg} t - t + C = C - \arcsin\frac{x}{2} - \operatorname{ctg}\left(\arcsin\frac{x}{2}\right) = C - \arcsin\frac{x}{2} - \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}.$$

✍ **Задание**. Найдите интегралы:

1) $\int \frac{dx}{x\sqrt{9-x^2}}$; 2) $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx$; 3) $\int \frac{\sqrt{49-x^2}}{x^2}dx$; 4) $\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}dx$.

3.6.8. Интегралы вида $\int R\left(x_1\sqrt{a^2+x^2}\right)dx$

С помощью надлежащих тригонометрических подстановок сводятся к интегралам от функций, рационально зависящих от тригонометрических функций:

$$\int R\left(x_1\sqrt{a^2+x^2}\right)dx = \left| \begin{array}{l} x = a\cdot \operatorname{tg} t; \quad dx = \dfrac{a}{\cos^2 t}dt \\ \sqrt{a^2+x^2} = \dfrac{a}{\cos t} \end{array} \right|$$

✍ **Задание**. Найдите интегралы:

1) $\int \frac{dx}{x\sqrt{9+x^2}}$; 2) $\int \frac{dx}{\sqrt{\left(4+x^2\right)^3}}$; 3) $\int \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{x^2}dx$; 4) $\int x^2\sqrt{64+x^2}dx$.

3.6.9. Интегралы вида $\int R\left(x_1\sqrt{x^2-a^2}\right)dx$

С помощью надлежащих тригонометрических подстановок сводятся к интегралам от функций, рационально зависящих от тригонометрических функций:

$$\int R\left(x_1\sqrt{x^2-a^2}\right)dx = \left| \begin{array}{l} x = \dfrac{a}{\cos t}; \quad dx = \dfrac{a\sin t}{\cos^2 t}dt \\ \sqrt{x^2-a^2} = a\operatorname{tg} t \end{array} \right|$$

✍ **Задание**. Найдите интегралы:

1) $\int x^2\sqrt{x^2-4}\,dx$; 2) $\int \frac{\sqrt{x^2-64}}{x}dx$; 3) $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2-1}}$; 4) $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)^3}}$.

3.6.10. Подынтегральная функция, имеющая иррациональный знаменатель

Её преобразование состоит в избавлении от иррациональности.

✍ **Задание.** Найдите интегралы:

1) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+8}-\sqrt{x+1}}$; 2) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+6}+\sqrt{x+8}}$; 3) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x+3}}$; 4) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+7}+\sqrt{x+8}}$.

✍ **Задания**

1. Найти интегралы:

1) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+9}}$; 2) $\int \frac{x+\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}}dx$; 3) $\int \frac{\sqrt{\left(4-x^2\right)^3}}{x^2}dx$; 4) $\int \frac{dx}{\sqrt{\left(4+x^2\right)^3}}$;

5) $\int x^2\sqrt{x^2-4}\,dx$.

2. Каким методом можно вычислить представленные интегралы?

1) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}$;

2) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+8}-\sqrt{x+1}}$;

3) $\int \frac{dx}{\sqrt{2+x}-x}$;

4) $\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^4}dx$;

5) $\int \frac{(x+3)dx}{\sqrt{37+2x-x^2}}$;

6) $\int \frac{\sqrt{9+x^2}}{x^4}dx$;

7) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-9}}$;

8) $\int \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{x^2}dx$;

9) 9) $\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^4}dx$.

? Контрольные вопросы

1. Дайте определение неопределенного интеграла.
2. Перечислите свойства неопределенного интеграла.
3. Укажите основные методы интегрирования.
4. Сформулируйте методы интегрирования тригонометрических функций.
5. С помощью каких подстановок вычисляются интегралы от иррациональных функций?

Тест

1. Множество первообразных функции $f(x)=\frac{\left(\sqrt{x}-2\right)^2}{x}$ имеет вид...

1. $x-8\sqrt{x}+4\ln\lvert x\rvert+C$	2. $x+8\sqrt{x}+4\ln\lvert x\rvert+C$
3. $x-4\sqrt{x}+4\ln\lvert x\rvert+C$	4. $x+\frac{8}{3}\sqrt{x^3}+4\ln\lvert x\rvert+C$

2. Множество первообразных функции $f(x)=\frac{\arccos^2 2x}{\sqrt{1-4x^2}}$ имеет вид...

1	2	3	4
$-\frac{1}{6}\arccos^3 2x+C$	$\frac{1}{6}\arccos^3 2x+C$	$-\frac{1}{3}\arccos^3 2x+C$	$\frac{1}{3}\arccos^3 2x+C$

3. Множество первообразных функции $f(x)=x\ln 2x$ имеет вид...

1	2	3	4
$\frac{x^2}{4}(2\ln 2x-1)+C$	$\frac{x^2}{4}(2\ln 2x+1)+C$	$\frac{x}{2}(x\ln 2x-1)+C$	$\frac{x^2}{2}(\ln 2x-1)+C$

4. Множество первообразных функции $f(x)=\frac{1}{9x^2-6x}$ имеет вид...

1	2	3	4
$\frac{1}{6}\ln\left\lvert\frac{3x-2}{3x}\right\rvert+C$	$\frac{1}{3}\ln\left\lvert\frac{3x-2}{3x}\right\rvert+C$	$\frac{1}{6}\ln\left\lvert\frac{3x}{3x-2}\right\rvert+C$	$\frac{1}{3}\ln\left\lvert\frac{3x}{3x-2}\right\rvert+C$

5. Множество первообразных функции $f(x)\frac{x+1}{\sqrt{1-2x^2}}$ имеет вид...

1. $-\frac{1}{2}\sqrt{1-2x^2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\sqrt{2}x+C$	2. $\frac{1}{2}\sqrt{1-2x^2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\sqrt{2}x+C$
3. $-\frac{1}{2}\sqrt{1-2x^2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\sqrt{2}x+C$	4. $\frac{1}{2}\sqrt{1-2x^2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\sqrt{2}x+C$

6. Множество первообразных функции $f(x)=\dfrac{\sin 2x}{\sqrt{3+\cos^2 x}}$ имеет вид...

1	2	3	4
$-2\sqrt{3+\cos^2 x}+C$	$2\sqrt{3+\cos^2 x}+C$	$-\sqrt{3+\cos^2 x}+C$	$\sqrt{3+\cos^2 x}+C$

7. Множество первообразных функции $f(x)=\dfrac{x^2-2x\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}}$ имеет вид...

1. $\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}-x^2+6\sqrt{x}+C$	2. $\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}+x^2+6\sqrt{x}+C$
3. $\frac{5}{2}x^2\sqrt{x}-x^2+3\sqrt{x}+C$	4. $\frac{5}{2}x^2\sqrt{x}-x^2+6\sqrt{x}+C$

8. Множество первообразных функции $f(x)=\dfrac{\operatorname{arctg} 2x}{1+4x^2}$ имеет вид...

1	2	3	4
$\frac{1}{4}\operatorname{arctg}^2 2x+C$	$\frac{1}{2}\operatorname{arctg}^2 2x+C$	$4\operatorname{arctg}^2 2x+C$	$\frac{1}{4}\operatorname{arctg}^2 x+C$

9. Множество первообразных функции $f(x)=x\cdot e^{\frac{x}{3}}$ имеет вид...

1	2	3	4
$3e^{\frac{x}{3}}(x-3)+C$	$e^{\frac{x}{3}}(x-1)+C$	$3e^{\frac{x}{3}}(x+3)+C$	$e^{\frac{x}{3}}(x+1)+C$

10. Множество первообразных функции $f(x)=\dfrac{1}{2x^2+3}$ имеет вид...

1	2	3	4
$\frac{\sqrt{6}}{6}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{6x}}{3}+C$	$\frac{\sqrt{6}}{2}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{6x}}{3}+C$	$-\frac{\sqrt{6}}{6}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{6x}}{3}+C$	$-\frac{\sqrt{6}}{2}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{6x}}{3}+C$

11. Множество первообразных функции $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{6x-9x^2}}$ имеет вид...

1	2	3	4
$\frac{1}{3}\arcsin(3x-1)+C$	$\frac{1}{9}\arcsin(3x-1)+C$	$-\frac{1}{3}\arcsin(3x-1)+C$	$-\frac{1}{9}\arcsin(3x-1)+C$

12. Множество первообразных функции $f(x)=\sin^3 x\cdot\cos^2 x$ имеет вид...

1. $\frac{1}{5}\cos^5 x-\frac{1}{3}\cos^3 x+C$	2. $\frac{1}{3}\cos^3 x-\frac{1}{5}\cos^5 x+C$
3. $\frac{1}{3}\cos^3 x-\cos x+C$	4. $\frac{1}{4}\cos^4 x+C$

13. Множество первообразных функции $f(x)=\dfrac{x+3}{\sqrt{4-x^2}}$ имеет вид...

1. $-\sqrt{4-x^2}+3\arcsin\frac{x}{2}+C$	2. $\sqrt{4-x^2}+3\arcsin\frac{x}{2}+C$
3. $-\sqrt{4-x^2}-3\arcsin\frac{x}{2}+C$	4. $\sqrt{4-x^2}-3\arcsin\frac{x}{2}+C$

14. Множество первообразных функции $f(x)=\dfrac{x}{\sin^2(1+3x^2)}$ имеет вид...

1	2	3	4
$-\frac{1}{6}\operatorname{ctg}(1+3x^2)+C$	$\frac{1}{6}\operatorname{ctg}(1+3x^2)+C$	$\frac{1}{6}\operatorname{tg}(1+3x^2)+C$	$-\operatorname{ctg}(1+3x^2)+C$

15. Среди нижеперечисленных выражений выберите верные.

1. $\int u^\alpha du=\dfrac{u^{\alpha-1}}{\alpha-1}+c \quad \alpha\neq-1$
2. $\int\dfrac{du}{\cos u}=\ln\left|\operatorname{tg}\left(\dfrac{u}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)\right|+c$
3. $\int\dfrac{du}{\sin u}=\ln\left|\operatorname{tg}\dfrac{u}{2}\right|+c$
4. $\int\dfrac{du}{\sqrt{a^2-u^2}}=\dfrac{1}{a}\arcsin\dfrac{u}{a}+c$
5. $\int\dfrac{du}{\sin^2 u}=-\operatorname{ctg}u+c$

4. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

4.1. Основные понятия определенного интеграла

4.1.1. Основные определения

Пусть функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[a; b]$. Разобьем его произвольно на n частей точками x_0, x_1, ..., x_n, так что $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$. В каждом частичном отрезке $[x_{i-1}; x_i]$ произвольным образом выбрана точка ξ_i, где $i = 1, 2, ..., n$.

⇨ Определение. Сумма вида $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$, где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, называется ***интегральной суммой*** функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$.

⇨ Определение. ***Определенным интегралом*** от функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ называется предел интегральных сумм S_n при условии, что длина наибольшего частичного отрезка Δx_i стремится к нулю:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i,$$

где $\lambda = \max\{\Delta x_i\}$ – шаг разбиения.

Если предел существует и не зависит от способа разбиения отрезка $[a, b]$ и от выбора точек ξ_i, то непрерывная функция $f(x)$ называется интегрируемой на отрезке $[a; b]$.

$\underline{\Im}$ **Теорема (о существовании определенного интеграла)**. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, то она интегрируема на этом отрезке, т. е. для нее существует предел интегральных сумм, который не зависит ни от способа разбиения отрезка $[a; b]$ на части, ни от выбора точек ξ_i.

4.1.2. Свойства определенного интеграла

1) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$;

2) $\int_a^b dx = b - a$;

3) $\int_a^b Cf(x)dx = C\int_a^b f(x)dx$;

4) $\int_a^b [f_1(x)+f_2(x)]dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx$;

5) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$, $a < c < b$;;

6) если $f(x) \geq 0$ на отрезке $[a; b]$, то $\int_a^b f(x)dx \geq 0$;

7) если $f(x) \leq 0$ для всех точек $x \in [a; b]$, то $\int_a^b f(x)dx \leq 0$;

8) если $f(x) \leq g(x)$ на отрезке $[a; b]$, то $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$;

9) если M – наибольшее, m – наименьшее значение $f(x)$ на $[a; b]$, то $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$ (обобщенная теорема об оценке определенного интеграла);

10) $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$, $c \in [a; b]$ (теорема о среднем), где $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ называется средним значением функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$;

11) $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$;

12) $\left(\int_a^x f(t)dt\right)'_x = f(x)$.

4.2. Вычисление определенного интеграла

4.2.1. Формула Ньютона – Лейбница

Если для функции $f(x)$, непрерывной на отрезке $[a; b]$, может быть найдена одна из первообразных $F(x)$, то простым и удобным методом вычисления определенного интеграла является формула Ньютона – Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

где $F'(x) = f(x)$, $a \le x \le b$, т. е. равенство выполняется на всем отрезке $[a, b]$, а первообразная обязана быть непрерывной функцией на всем отрезке $[a; b]$.

Использование в качестве первообразной разрывной функции может привести к неверному результату.

При интегрировании *четных* и *нечетных* функций в симметричных пределах интегрирования полезно использовать формулу

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \begin{cases} 2\int_{0}^{a} f(x)dx, \text{ если } f(x) - \text{четная функция,} \\ 0, \text{ если } f(x) - \text{нечетная функция.} \end{cases}$$

$\mathfrak{R}$ **Пример**. Вычислить интеграл $\int_{1}^{4} x^2 dx$.

Подынтегральная функция $f(x) = x^2$ на отрезке $[1; 4]$ имеет первообразную $F(x) = \frac{x^3}{3}$, тогда по формуле Ньютона – Лейбница имеем:

$$\int_{1}^{1} x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_{1}^{4} = \frac{4^3}{3} - \frac{1^3}{3} = 21.$$

$\mathfrak{R}$ **Пример**. Вычислить интеграл $\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}}$.

$$\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} = \int_{0}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x+1)^2 + 1}} = \int \frac{\mathrm{d}(x+1)}{\sqrt{(x+1)^2 + 1}} = \ln\left|x + 1 + \sqrt{(x+1)^2 + 1}\right|_{1}^{2} =$$

$$= \ln\left|2 + 1 + \sqrt{9+1}\right| - \ln\left|1 + 1 + \sqrt{4+1}\right| = \ln\left|3 + \sqrt{10}\right| - \ln\left|2 + \sqrt{5}\right| = \ln\left|\frac{3 + \sqrt{10}}{2 + \sqrt{5}}\right|.$$

✍ **Задание**. Вычислить интегралы:

1) $\int_{-4}^{-2} \frac{dx}{\sqrt{5 - 4x - x^2}}$; 2) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(\frac{\pi}{6} - x)dx$; 3) $\int_{3}^{4} \frac{dx}{x^2 - 3x + 2}$; 4) $\int_{5}^{6} \frac{dx}{x^2 - 5x + 4}$.

4.2.2. Замена переменной в определенном интеграле

Для любой непрерывной на отрезке $[a; b]$ функции $f(x)$ справедлива формула замены переменной (или подстановки) в определенном интеграле:

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f[(\varphi(t)]\varphi'(t)dt,$$

если функция $x = \varphi(t)$ удовлетворяет следующим условиям:

1) $\varphi(t)$ – непрерывная однозначная функция, заданная на отрезке $[\alpha; \beta]$ и имеющая в нем непрерывную производную $\varphi'(t)$;

2) значения функции $x = \varphi(t)$ при изменении t на отрезке $[\alpha; \beta]$ не выходят за пределы отрезка $[a; b]$;

3) $\varphi(\alpha) = a$ и $\varphi(\beta) = b$.

ℜ **Пример**. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+\cos x}$.

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+\cos x} = \left| \begin{array}{l} t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}; \quad x = \operatorname{arctg} t \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2}; \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ x_1 = 0 \quad t_1 = 0 \\ x_2 = \frac{\pi}{2} \quad t_2 = 1 \end{array} \right| = \int\limits_0^1 \frac{1}{2+\frac{1+t^2}{1-t^2}} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} = 2\int\limits_0^1 \frac{dt}{3+t^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{3}}\Bigg|_0^1 =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} - \operatorname{arctg} 0\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{6} - 0\right) = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

ℜ **Пример**. Вычислить интеграл $\int\limits_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$.

$$\int\limits_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \left\{ \begin{array}{l} x = \sin t; \\ \alpha = 0; \beta = \pi/2 \end{array} \right\} = \int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t dt = \int\limits_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2} (1+\cos 2t) dt =$$

$$= \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}\sin\pi = \frac{\pi}{4}.$$

✍ **Задание**. Вычислить интеграл:

1) $\int\limits_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \sqrt{4-x^2}\,dx$; 2) $\int\limits_2^4 \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^4}\,dx$; 3) $\int\limits_{-1}^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{5-4x}}$; 4) $\int\limits_1^{16} \frac{dx}{x+\sqrt[4]{x}}$.

4.2.3. Интегрирование по частям в определенном интеграле

Если U и V – функции от x, обладающие непрерывными производными, то интегрирование по частям в определенном интеграле проводится по формуле

$$\int\limits_a^b U(x)\cdot V'(x)dx = U(x)\cdot V(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b V(x)\cdot U'(x)dx,$$ или в более краткой

или в более краткой записи:

$$\int\limits_a^b udv = u\cdot v\Big|_a^b - \int\limits_a^b vdu.$$

$\Re$ **Пример**. Вычислить интеграл $\int\limits_0^1 x \operatorname{arctg} x dx$.

$$\int\limits_0^1 x \cdot \operatorname{arctg} x dx = \left| \begin{array}{ll} u = \operatorname{arctg} x; & du = \dfrac{dx}{1+x^2} \\ dv = xdx; & v = \dfrac{x^2}{2} \end{array} \right| = \frac{x^2}{2} \cdot \operatorname{arctg} x \Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \frac{x^2 dx}{1+x^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{arctg} 1 - \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \frac{x^2+1-1}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\int\limits_0^1 dx + \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x \Big|_0^1 =$$

$$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} 1 - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} 0 = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} + \frac{\pi}{8} - 0 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.$$

$\Re$ **Пример**. Вычислить интеграл $\int\limits_0^e (x+2)\ln x dx$.

$$\int\limits_0^e (x+2)\ln x dx = \left| \begin{array}{ll} u = \ln x; & du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = (x+2)dx; & v = \dfrac{x^2}{2} + 2x \end{array} \right| = \ln x \cdot \left(\frac{x^2}{2} + 2x\right)\Bigg|_1^e - \int\limits_1^e \frac{\frac{x^2}{2} + 2\mathrm{x}}{x} dx =$$

$$= \frac{1}{2}e^2 + 2e - \left(\frac{x^2}{4} + 2x\right)\Bigg|_1^e = \frac{e^2}{4} + \frac{9}{4} = \frac{e^2+19}{4}.$$

✍ **Задание**. Вычислить интеграл:

1) $\int\limits_0^1 (x-1)e^x dx$; 2) $\int\limits_0^1 \operatorname{arctg} x\, dx$; 3) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} x^2 \sin 2x\, dx$; 4) $\int\limits_1^e \frac{\ln x}{x^4} dx$.

4.3. Несобственные интегралы

Пусть функция $y = f(x)$ интегрируема на любом отрезке $[a; b]$. Тогда определенный интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ называют еще и ***собственным*** интегралом.

В том случае, когда отрезок интегрирования бесконечный или конечный, но подынтегральная функция на этом отрезке терпит разрыв, такой интеграл называется ***несобственным*** интегралом.

Рассмотрим каждый из двух случаев.

4.3.1. Несобственные интегралы с бесконечными пределами (I рода)

Если функция $f(x)$ определена и непрерывна для всех $a \le x \le +\infty$, то по определению интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ вычисляется по обобщенной формуле Ньютона – Лейбница:

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = F(x)\Big|_a^{+\infty} = F(\infty) - F(a).$$

1. Если результат интегрирования – конечное число, то интеграл сходится.
2. Если результат интегрирования – то интеграл расходится.
3. Если результат интегрирования – неопределенность, то

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)dx, \quad \int\limits_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int\limits_a^b f(x)dx,$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int\limits_a^c f(x)dx + \lim_{b\to+\infty}\int\limits_c^b f(x)dx,$$

где c – произвольное число.

⇨ Определение. Несобственные интегралы I рода называются ***сходящимися***, если существуют конечные пределы, стоящие в правых частях равенства. Если же указанные пределы не существуют или бесконечны, то несобственные интегралы называются ***расходящимися***.

$\mathfrak{R}$ **Пример**. Вычислить несобственный интеграл: $\int\limits_{e^2}^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^4 x}$.

По определению

$$\int\limits_{e^2}^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^4 x} = \int\limits_{e^2}^{+\infty}\frac{d(\ln x)}{\ln^4 x} = -\frac{1}{3\ln^3 x}\Bigg|_{e^2}^{+\infty} = -\frac{1}{3\ln^3(+\infty)} + \frac{1}{3\ln^3 e^2} = 0 + \frac{1}{3\cdot 2^3} = \frac{1}{24},$$

т. е. интеграл сходится.

✍ **Задание**. Исследовать на сходимость несобственные интегралы:

1) $\int\limits_{-\infty}^{0} x\cos x dx$; 2) $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$; 3) $\int\limits_1^{+\infty}\frac{x+2}{\sqrt[3]{x^2}}dx$; 4) $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{xdx}{\left(x^2+1\right)^5}$.

4.3.2. Несобственные интегралы от неограниченных функций (II рода)

Если функция $y = f(x)$ определена и непрерывна при $a \le x \le b$, интегрируема на любом отрезке $[a; b–\varepsilon]$, где $0 < \varepsilon < b–a$, и не ограничена слева от точки b (т. е. $f(x) \to \infty$ при $x \to b$), то определенный интеграл вычисляется по формуле

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$$

и называется ***несобственным интегралом от неограниченной функции*** (II рода).

Если предел в правой части равенства существует, то несобственный интеграл II рода называется сходящимся; в противном случае – расходящимся.

Аналогично, когда функция $y = f(x)$ определена и непрерывна при $a < x \le b$, интегрируема на любом отрезке $[a + \varepsilon; b]$, где $0 < \varepsilon < b–a$ и не ограничена справа от точки a (т. е. $f(x) \to –\infty$ при $x \to a$), то определенный интеграл в этом случае вычисляется по формуле

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$$

и также называется ***несобственным интегралом от неограниченной функции*** (или II рода).

Если функция $y = f(x)$ терпит разрыв II рода во внутренней точке $c \in [a; b]$, то несобственный интеграл II рода определяется формулой

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)dx.$$

$\mathfrak{R}$ **Пример**. Вычислить несобственный интеграл $\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}}$ или доказать его расходимость.

Подынтегральная функция $f(x) = \frac{1}{x\sqrt[3]{\ln x}}$ не ограничена в окрестности точки $x = 1$. На любом же отрезке $[\varepsilon + 1; e]$ она интегрируема, так как является непрерывной функцией.

Поэтому

$$\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}} = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{1+\varepsilon}^{e} \frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}} = \lim_{\varepsilon \to +0} \left[\frac{3}{2}\sqrt[3]{\ln^2 x} \Big|_{1+\varepsilon}^{e} \right] = \lim_{\varepsilon \to +0} \left[\frac{3}{2} - \frac{3}{2}\sqrt[3]{\ln^2 (1+\varepsilon)} \right] = \frac{3}{2}.$$

Интеграл сходится.

✍ **Задание**. Вычислить несобственные интегралы:

1) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos x}$; 2) $\int\limits_0^{+\infty} xe^{-x^2}\,dx$; 3) $\int\limits_{e^2}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$; 4) $\int\limits_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} \frac{dx}{1+\cos x}$.

4.4. Геометрическое приложение определенных интегралов

4.4.1. Вычисление площадей плоских фигур

Прямоугольные координаты

Площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$, прямыми $x = a$ и $x = b$ (при условии $f_2(x) \geq f_1(x)$) (рис. 7), можно найти по формуле

$$S = \int\limits_a^b f_2(x)dx - \int\limits_a^b f_1(x)dx = \int\limits_a^b \left(f_2(x) - f_1(x)\right)dx.$$

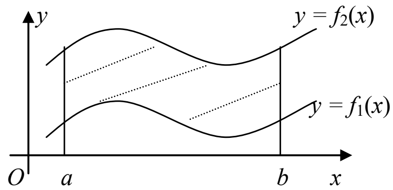


Рис. 7. Площадь фигуры

ℜ **Пример**. Найти площадь фигуры, ограниченной осью Ox и графиком функции $y = x^2 - 2x$ при $x \in [0; 3]$.

$$S = -\int\limits_0^2 \left(x^2 - 2\right)dx + \int\limits_2^3 \left(x^2 - 2x\right)dx = -\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^2 + \left.x^2\right|_0^2 + \left.\frac{x^3}{3}\right|_2^3 - \left.x^2\right|_2^3 =$$

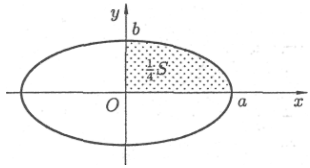
$$= -\frac{8}{3} + 4 + \frac{27}{3} - \frac{8}{3} - 9 + 4 = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}.$$

Параметрические координаты

Если криволинейная трапеция ограничена кривой, заданной параметрически $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$ $t \in [\alpha; \beta]$, прямыми $x = a$ и $x = b$ и осью Ox, то ее площадь находится по формуле

$$S = \left| \int_{\alpha}^{\beta} y(t) \cdot x'(t) dt \right|,$$

где α и β определяются из равенств $x(\alpha) = a$ и $x(\beta) = b$.



$\mathfrak{R}$ **Пример**. Вычислить площадь фигуры, ограниченной эллипсом $x = a\cos t$, $y = b\sin t$.

Найдем сначала $\frac{1}{4}$ площади S. Здесь x изменяется от 0 до a, следовательно, t изменяется от 0 до $\frac{\pi}{2}$.

Находим:

$$\frac{1}{4}S = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} b\sin t \cdot (-a\sin t) dt = -ab\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^2 t\, dt = \frac{ab}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2t) dt =$$

$$= \frac{ab}{2}\left(t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}\sin 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \right) = \frac{\pi ab}{4}.$$

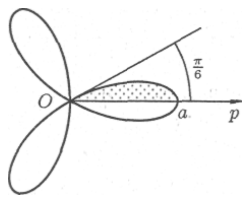
Таким образом, $\frac{1}{4}S = \frac{\pi ab}{4}$.

Значит, $S = \pi ab$.

Полярные координаты

Площадь S криволинейного сектора, т. е. плоской фигуры, ограниченной непрерывной линией $r = r(\varphi)$ и двумя лучами $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$ $(\alpha < \beta)$, где r и φ – полярные координаты,

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi) d\varphi.$$



$\mathfrak{R}$ **Пример**. Найти площадь фигуры, ограниченной «трёхлепестковой розой».

Решение. Найдем сначала площадь половины одного лепестка «розы», т. е. $\frac{1}{6}$ часть всей площади фигуры:

$$\frac{1}{6}S = \int_{0}^{\frac{\pi}{6}} (a\cos 3\varphi)^2 d\varphi = \frac{a^2}{4}\left(\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} + \frac{1}{6}\sin 6\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} \right) = \frac{a^2}{4}\left(\frac{\pi}{6} + 0 \right) = \frac{\pi a^2}{24},$$

т. е. $\frac{1}{6}S = \frac{\pi a^2}{24}$. Следовательно, $S = \frac{\pi a^2}{4}$.

✍ **Задание**. Определите, в какой системе координат заданы функции, и вычислите площади фигур, ограниченных линиями:
1) $y = |\ln x|$, $y = 0$, $x = 1/e$, $x = e$;
2) $r = \sin 2\varphi$, $r \geq \sin \varphi$;
3) $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$, $x \geq \sqrt{2}/4$;
4) $y = 4 - x^2$, $y = 16 - 4x^2$, $y \leq 8x - 5$.

4.4.2. Объем тела вращения

Пусть вокруг оси Ox вращается криволинейная трапеция, ограниченная непрерывной линией $y = f(x) \geq 0$, отрезком $a \leq x \leq b$ и прямыми $x = a$ и $x = b$ (рис. 8). Полученная от вращения фигура называется телом вращения, и ее объем находится по формуле

$$V_x = \pi \int_a^b y^2 dx.$$

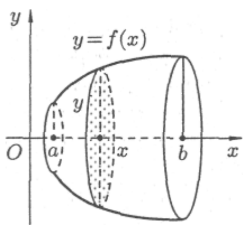
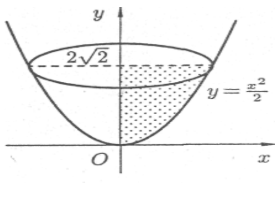


Рис. 8. Тело вращения

Если криволинейная трапеция ограничена графиком непрерывной функции $x = \varphi(y) \geq 0$ и прямыми $x = 0$, $y = c$, $y = d$ ($c < d$), то объем тела, образованного вращением этой трапеции вокруг оси Oy, по аналогии с формулой равен

$$V_y = \pi \int_c^d x^2 dy.$$

$\mathfrak{R}$ **Пример**. Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $y = \dfrac{x^2}{2}$, $x = 0$, $y = 2\sqrt{2}$, вокруг оси Oy.



$$V_y = \pi \int_0^{2\sqrt{2}} 2y\,dy = \pi y^2 \Big|_0^{2\sqrt{2}} = 8\pi.$$

4.4.3. Вычисление объема тела по известным площадям параллельных сечений

Если известны площади S сечений какого-либо тела плоскостями, перпендикулярными некоторой оси, например оси Ox: $S = S(x)$, $a \le x \le b$, то объем V этого тела можно найти по формуле

$$V = \int_a^b S(x)dx.$$

4.4.4. Вычисление площади поверхности вращения

Пусть кривая AB является графиком функции $y = f(x) \ge 0$, где $x \in [a; b]$, а функция $y = f(x)$ и её производная $y' = f'(x)$ непрерывны на этом отрезке.

Тогда площадь S поверхности, образованной вращением кривой AB вокруг оси Ox, вычисляется по формуле

$$S_x = 2\pi \int_a^b y \cdot \sqrt{1 + (y'_x)^2}\, dx.$$

Если кривая AB задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t_1 \le t \le t_2$, то формула для площади поверхности вращения принимает вид

$$S_x = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} y(t) \cdot \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt.$$

$\mathfrak{R}$ **Пример**. Найти площадь поверхности шара радиуса R.

Можно считать, что поверхность шара образована вращением полуокружности $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, $-R \le x \le R$, вокруг оси Ox.

$$S = 2\pi \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2} \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}}\right)^2}\, dx = 2\pi \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2 + x^2}\, dx = 2\pi R x\Big|_{-R}^{R} = 4\pi R^2.$$

4.4.5. Вычисление длины дуги плоской кривой

Если функция $y = f(x)$ и ее производная $y' = f'(x)$ непрерывны на отрезке $[a; b]$, то кривая AB имеет длину, равную

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx,$$

или в сокращённой записи $l = \int_a^b \sqrt{1 + (y'_x)^2}\, dx$.

Если уравнение кривой AB задано в **параметрической форме**

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad \alpha \le t \le \beta,$$

где $x(t)$ и $y(t)$ – непрерывные функции с непрерывными производными и $x(\alpha) = a$, $x(\beta) = b$, то длина l кривой AB находится по формуле

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt .$$

Пусть кривая AB задана уравнением в **полярных координатах** $r = r(\varphi)$, $\alpha \le \varphi \le \beta$. Предположим, что $r(\varphi)$ и $r'(\varphi)$ непрерывны на отрезке $[\alpha; \beta]$.

Если в равенствах $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, связывающих полярные и декартовы координаты, параметром считать угол φ, то кривую AB можно задать параметрически $\begin{cases} x = r(\varphi)\cos\varphi, \\ y = r(\varphi)\sin\varphi. \end{cases}$. Тогда длина кривой

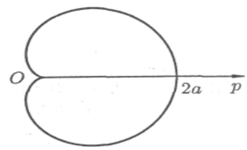
$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + r'^2}\, d\varphi.$$

$\mathfrak{R}$ **Пример**. Найти длину окружности радиуса R.

Найдем $\frac{1}{4}$ часть ее длины от точки $(0; R)$ до точки $(R; 0)$ Так как $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, то

$$\frac{1}{4} l = \int_0^R \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}}\, dx = R \cdot \arcsin \frac{x}{R}\Big|_0^R = R \cdot \frac{\pi}{2}.$$

$\mathfrak{R}$ **Пример**. Найти длину кардиоиды $r = a\,(1 + \cos\varphi)$.



Кардиоида $r = a\,(1 + \cos\varphi)$ имеет вид, изображенный на рисунке. Она симметрична относительно полярной оси. Найдем половину длины кардиоиды:

$$\frac{1}{2} l = \int_0^{\pi} \sqrt{(a(1 + \cos\varphi))^2 + (a(-\sin\varphi))^2}\, d\varphi =$$

$$= a\int_0^{\pi} \sqrt{2 + 2\cos\varphi}\, d\varphi = a\int_0^{\pi} \sqrt{2 \cdot 2\cos^2 \frac{\varphi}{2}}\, d\varphi = 2a\int_0^{\pi} \cos\frac{\varphi}{2}\, d\varphi = 4a \cdot \sin\frac{\varphi}{2}\Big|_0^{\pi} = 4a.$$

Таким образом, $\frac{1}{2} l = 4a$. Значит, $l = 8a$.

✍ **Задания**

1. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = 4 - x^2$; $y = x^2 - 2x$.
2. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной линиями: $x = y^2$, $x = 1$.
3. Вычислить площади фигур, ограниченных линиями: $r = 1 - \cos\varphi$, $r = 1$ (общую часть).
4. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями: $y = 2 - x^2$, $y = 1$.
5. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{4}=1$, $z \geq 1$.

? Контрольные вопросы

1. Дайте определение определенного интеграла.
2. Перечислите основные свойства определенного интеграла.
3. Запишите формулу Ньютона – Лейбница.
4. Сформулируйте понятия несобственных интегралов первого и второго рода.
5. Каковы геометрические приложения определенного интеграла?

✍ Тест

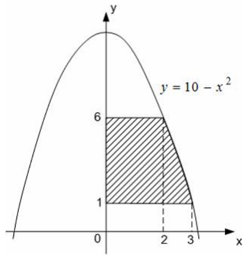
1. Для определенного интеграла $\int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^3}{\cos 2x}dx$ справедливо равенство…

1. $\int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{x^3}{\cos 2x}dx = 0$	2. $\int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{x^3}{\cos 2x}dx = 2\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{6}} \frac{x^3}{\cos 2x}dx$
3. $\int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{x^3}{\cos 2x}dx = 2\int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{x^3}{\cos x}dx$	4. $\int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{x^3}{\cos 2x}dx = \int\limits_{-\frac{\pi}{6}+\pi}^{\frac{\pi}{6}+\pi} \frac{x^3}{\cos 2x}dx$

2. Определенный интеграл $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \frac{x}{2}$ равен...

1	2	3	4
$\frac{\pi}{2}-1$	0	$\frac{\pi}{2}+1$	$\frac{\pi}{2}$

3. Площадь фигуры, изображенной на рисунке, равна



1	2	3	4
$\frac{38}{3}$	$\frac{70}{3}$	$\frac{4(5\sqrt{10}-4)}{3}$	$\frac{2(10\sqrt{10}-27)}{3}$

4. Значение определенного интеграла $\int\limits_{-1}^{3} e^{2x-x^2}dx$ принадлежит промежутку...

1	2	3	4
$\left[\frac{4}{e^3}, 4e\right]$	$\left[0, \frac{4}{e^3}\right]$	[4e, 4e^3]	$\left[-\frac{4}{e^3}, 0\right]$

5. Определенный интеграл $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{e}{2}} \frac{\ln^3 2x}{x}$ равен...

1	2	3	4
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{3}$

6. Площадь фигуры, ограниченной параболой $y = -x^2 + 4x + 5$ и осью Ox, равна...

1	2	3	4
36	38	$\frac{92}{3}$	$\frac{122}{3}$

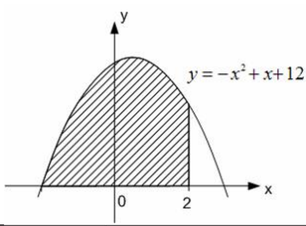
7. Функция $y = f(x)$ задана и непрерывна на всей числовой прямой, a и b – действительные числа. Тогда верно утверждение...

1. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^4 f(x)dx - \int_b^4 f(x)dx$	2. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^4 f(x)dx + \int_b^4 f(x)dx$
3. $\int_a^b f(x)dx = \int_{a+4}^{b+4} f(x)dx$	4. $\int_{4a}^{4b} f(x)dx = 4\int_a^b f(x)dx$

8. Определенный интеграл $\int_{\frac{\pi^2}{9}}^{\pi^2} \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ равен...

1	2	3	4
$-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$2-\sqrt{3}$

9. Площадь фигуры, изображенной на рисунке, равна...

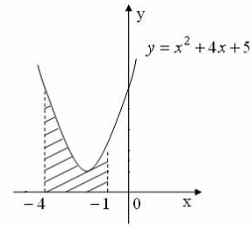


1	2	3	4
$\frac{275}{6}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{135}{6}$	$\frac{70}{3}$

10. Несобственный интеграл $\int_0^{+\infty} x^2 \cdot e^{-x^3} dx$ ...

1	2	3	4
равен $\frac{1}{3}$	равен $-\frac{1}{3}$	расходится	равен 1

11. Площадь фигуры, изображенной на рисунке, равна...



1	2	3	4
6	7	$\frac{20}{3}$	$\frac{28}{3}$

12. Определенный интеграл $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} x \sin 2x dx$ равен...

1	2	3	4
$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{2-\pi}{8}$	0

13. Объем тела, полученного вращением вокруг оси *Ox* криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y^2 = x^3$, $x = 4$, равен...

1	2	3	4
60π	32π	π	4π

14. Объем тела, полученного вращением вокруг оси *Oy* криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y^2 = 4x^2$, $y = 2$, равен...

1	2	3	4
4π	2π	3π	π

15. Длина дуги кривой $y^2 = x^3$ от точки $O(0;\ 0)$ до точки $B(4;\ 8)$ равна...

1	2	3	4
$\frac{8}{27}\left(10\sqrt{10}-1\right)$	$\frac{8}{27}\left(10\sqrt{10}+1\right)$	$\frac{8}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)$	$\frac{8}{3}\left(2\sqrt{2}+1\right)$

Межпредметная связь

Дисциплина «Математика» тесно связана с другими науками. Некоторые задачи различных предметных областей невозможно решить без математических знаний.

Модули «Дифференциальное исчисление функции одной переменной» и «Дифференциальное исчисление функции нескольких переменных» применяются при решении задач в различных науках. В геометрии производная характеризует крутизну графика, в механике – скорость неравномерного прямолинейного движения, в биологии – скорость размножения колонии микроорганизмов, в экономике – отзывчивость производственной функции (выход продукта на единицу затрат), в химии – построение математических моделей химической реакции и описание их свойств.

Физический смысл производной применяется в задачах на нахождение скорости, ускорения, кинетической энергии тела, силы тока и плотности. В экономике задачи на нахождение убытков и прибыли включают в свой алгоритм нахождение минимума и максимума, для которого обязательным умением является нахождение производных.

Приведем примеры задач из различных областей науки.

$\mathfrak{R}$ ***Пример***. Закон изменения количества электричества в проводнике в момент времени t даётся формулой $Q(t) = 8t^3 + 3t^2 + t - 1$. Найти силу тока в момент времени $t = 4$ с (Q измеряется в кулонах, t – в секундах).

Силу тока в момент времени t находим по формуле $q(t) = Q'(t)$, т. е. $q(t) = Q'(t) = (8t^3 + 3t^2 + t - 1)' = 24t^2 + 6t + 1 = 24 \cdot 16 + 6 \cdot 4 + 1 = 409$.

$\mathfrak{R}$ ***Пример***. Количество вещества, получаемое в химической реакции, зависит от времени следующим образом: $Q = a(1 + be^{-kt})$. Определите скорость реакции.

Скорость реакции находится по формуле

$$Q = a(1 + be^{-kt})' = -abke^{-kt}.$$

$\mathfrak{R}$ ***Пример***. Выберем оптимальный объем производства фирмы, функция прибыли которой может быть смоделирована зависимостью

$$\pi(q) = R(q) - C(q) = q^2 - 8q + 10.$$

Применим производную

$$\pi'(q) = R'(q) - C'(q) = 2q - 8 = 0 \to q_{extr} = 4.$$

При $q < 4$ производная $\pi'(q) < 0$ и прибыль убывает.
При $q > q_{extr} = 4$ производная $\pi'(q) > 0$ и прибыль возрастает.
При $q = 4$ прибыль принимает минимальное значение.

✍ **Задания**

1. Канал, ширина которого 27 м, под прямым углом впадает в другой канал шириною 64 м. Какова наибольшая длина брёвен, которые можно сплавлять по этой системе каналов?
2. Проволока длиной l согнута в прямоугольник. Каковы размеры этого прямоугольника, если его площадь наибольшая?
3. Из круга радиусом R вырезан сектор, из оставшейся части склеен конус. Какой угол должен иметь вырезанный сектор, чтобы объём конуса был наибольшим? Найти радиус основания и высоту конуса.

Неопределенные и определённые интегралы применяются для вычисления значений, изменяющихся за конечный промежуток времени. В физике это задачи на перемещение материальной точки, зависимость между работой и силой, о массе тонкого стержня, определение количества электричества (электрический заряд), количества теплоты за время, зависимости магнитного потока и ЭДС. В химии это интегралы перекрывания и приближенные оценки энергий химических связей. В экономике – количество денег, поступивших в банк за определенный промежуток времени; объем продукции, произведенной за определенный промежуток времени; определение дисконтированной стоимости денежного потока; производственная функция Кобба – Дугласа; кривая Лоренца. В биологии – численность и биомасса популяции.

$\mathfrak{R}$ ***Пример***. Какую работу нужно затратить, чтобы растянуть пружину на 0,05 м, если сила 100 Н растягивает пружину на 0,01 м?

По закону Гука упругая сила, растягивающая пружину, пропорциональна этому растяжению x, т. е. $F = kx$, где k – коэффициент пропорциональности. Согласно условию задачи сила $F = 100$ Н растягивает пружину на $x = 0{,}01$ м; следовательно, $100 = k \cdot 0{,}01$, откуда $k = 10000$; следовательно, $F = 10000x$.

Искомая работа на основании формулы $A=\int\limits_a^b F(x)dx$ равна

$$A=\int\limits_a^b F(x)dx=\int\limits_0^{0,05}10000xdx=5000x^2\Big|_0^{0,05}=12,5.$$

$\Re$ ***Пример***. Найти путь, пройденный телом за 4 секунды от начала движения, если скорость тела $v(t) = 10t + 2$ (м/с).

Если $v(t) = 10t + 2$, то путь, пройденный телом от начала движения ($t = 0$) до конца 4-й секунды, вычисляется по формуле $S=\int\limits_{t_1}^{t_2} v(t)dt$, т. е.

$$S=\int\limits_{t_1}^{t_2} v(t)dt=\int\limits_0^4(10t+2)dt=\left(5t^2+2t\right)\Big|_0^4=80+8=88.$$

$\Re$ ***Пример***. Дана функция предельных издержек

$$MC = 3q^2 - 48q + 202,\ 1 \le q \le 20.$$

Найти функцию издержек $C = C(q)$ и вычислить издержки в случае производства 10 единиц товара, если известно, что издержки для производства первой единицы товара составили 50 руб. Функцию издержек находим интегрированием: $C(q)=\int\limits_1^4 MCdq+C_0$, где константа C_0 находится из данного условия $C(1) = 50$, так что $C_0 = 50$, поскольку интеграл обращается в нуль. Интегрируя, получим функцию издержек $C(q) = q^3 - 24q^2 + 202q + 50$. Подставляя $q = 10$ в полученную формулу, находим искомое значение $C(10) = 670$.

✍ **Задания**

1. Найти работу, которую необходимо затратить, чтобы выкачать через край жидкость из вертикального цилиндрического резервуара высотой H (м) и радиусом основания R (м).
2. Определить величину давления воды на полукруг, вертикально погруженный в жидкость, если его радиус R, а центр O находится на свободной поверхности воды.
3. Под строительство гидроэлектростанции задан непрерывный денежный поток со скоростью $I(t) = -t^2 + 20t + 5$ (млрд руб./год) в течение 20 лет с годовой процентной ставкой $p = 5$ %. Найти дисконтированную стоимость этого потока.

Библиографический список

Основная литература

1. Баврин, И.И. Высшая математика : учеб. для студ. естественнонауч. спец. педвузов / И.И. Баврин. – М. : Академия : Высш. шк., 2012. – 611 с.
2. Высшая математика : учеб. пособие для вузов [Электронный ресурс] / Е.А. Ровба [и др.]. – Минск : Вышэйшая школа, 2012. – 391 с.
3. Кремер, Н.Ш. Высшая математика для экономистов : учебник для вузов [Электронный ресурс] / Н.Ш. Кремер, Б.А. Путко, И.М. Тришин. – М. : ЮНИТИ-ДАНА, 2012. – 479 с.
4. http://mathserfer.com/
5. http://ru.onlinemschool.com/

Дополнительная литература

6. Бермант, А.Ф. Краткий курс математического анализа : учебник для вузов / А.Ф. Бермант, И.Г. Араманович. –14-е изд., стер. – СПб. : Лань, 2011. – 736 с.
7. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2 ч. Ч. 1 / П.Е. Данко [и др.]. – 7-е изд., испр. – М. : ОНИКС : Мир и Образование, 2010. – 448 с.
8. Ильин, В.А. Основы математического анализа : учеб. для вузов. Ч. 2 / В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. – 6-е изд., стер. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2011. – 464 с.
9. Камынин, Л.И. Курс математического анализа : учеб. пособие для вузов. Т. 1 [Электронный ресурс] / Л.И. Камынин. – 2-е изд., испр. и доп. – М. : Изд-во МГУ, 2001. – 432 с.
10. Письменный, Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. Ч. 1. Тридцать шесть лекций / Д.Т. Письменный. – 8-е изд., испр. – М. : АЙРИС-пресс, 2010. – 280 с.
11. Письменный, Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. Ч. 2. Тридцать пять лекций / Д.Т. Письменный. – 4-е изд. – М. : АЙРИС-пресс, 2010. – 252 с.
12. Шипачев, В.С. Высшая математика: базовый курс : учеб. пособие для студ. вузов / В.С. Шипачев ; под ред. А.Н. Тихонова. – 8-е изд., перераб. и доп. – М. : Юрайт, 2011. – 447 с.

ГЛОССАРИЙ

Логический символ	Обозначает
$\exists$	существует
$\forall$	для любого, для каждого
$\in$	принадлежит
$\notin$	не принадлежит
N	множество натуральных чисел
Z	множество целых чисел
R	множество рациональных чисел
$\Rightarrow$	следует
ε	бесконечно малая величина
∞	бесконечность
$\cup$	объединение
$\cap$	пересечение
$\rightarrow$	стремится
$D(x)$	область определения функции
$E(y)$	множество значений функции
$\lvert a \rvert$	модуль числа
$(a; b)$	интервал
[a;b) (a; b]	полуинтервал
$[a; b]$	отрезок
$\int$	неопределенный интеграл
$\int_{\grave{a}}^{b}$	определенный интеграл
$(\ )'$	производная