МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

«Тольяттинский государственный университет»

Институт **математики, физики и информационных технологий**

Кафедра **«Прикладная математика и информатика»**

01.03.02 ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

СИСТЕМНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ И КОМПЬЮТЕРНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА

на тему **Реализация игрового подхода в некоторых прикладных задачах**

Студент ______А.М. Закатимов______ ____________

Руководитель ______Г.А. Тырыгина______ ____________

Консультант по аннотации ______Н.В. Ященко______ ____________

Допустить к защите

Заведующий кафедрой ___к.т.н., доцент А.В. Очеповский___ ____________

«_____» ______________________ 2017 г.

Тольятти 2017

АННОТАЦИЯ

Тема: «Реализация игрового подхода в некоторых прикладных задачах».

Цель: Создание программного обеспечения для нахождения оптимальной стратегии поведения конкурирующих фирм.

Задачи работы:

1.Проанализировать математические модели матричных игр.

2.Исследовать методы нахождения решений матричных игр.

3.Построить стратегии и просчитать игры нескольких участников.

4. Создать программу-анализатор на основе полученных алгоритмов.

Объект исследования: матричные игры в прикладных задачах линейного программирования.

Предмет исследования: методы решения матричных игр.

Бакалаврская работа состоит из введения, трех глав и итогового заключения.

Во введении раскрывается актуальность исследования по выбранному направлению, ставится проблема, цель и задачи исследования, определяются объект, предмет научных поисков, формулируется гипотеза, указываются методологическая база исследования и его практическая значимость.

В главе 1 определяется структура игрового подхода в прикладных задачах. В главе 2 приводятся примеры реализации игрового подхода в некоторых задачах на примере антагонистической модели конкуренции. В главе 3 разрабатываются алгоритм и интерфейс программы. В заключении обобщены и систематизированы результаты исследования.

Объем работы составляет 56 страниц, 7 рисунков, 30 формул и 8 таблиц. Использовано 28 источников литературы.

ABSTRACT

The title of the given graduation work is «The Implementation of the Game Approach in Some Applied Tasks».

The goal of the work is to give some information about developing software for finding optimal strategies for the behavior of competing firms.

The object of the graduation work is matrix games in applied tasks of linear programming.

The subject of the graduation work is methods for solving matrix games.

We first investigate methods for finding solutions to matrix games. Next we analyze mathematical models of matrix games. Also we create a strategy and miscalculation of the game a lot of participants. Then we develop an program-analyzer on the basis of developed algorithms.

The graduation work includes the introduction, three chapters, conclusion.

The introduction reveals the relevance of the research in the chosen direction, the problem, the aim and objectives of the research are posed, the object and the subject of scientific research are determined, the hypothesis is formulated, the methodological base of the research and its practical significance are indicated.

In the first chapter it is determined by the structure of the game approach in applied tasks. In the second chapter applications for the gaming approach in some tasks are exemplified by the antagonistic model of competition. In the third chapter the algorithm and interface of the program are developed. In the conclusion of this graduation work the results of researching are summarized and systematized.

The graduation work consists of an explanatory note on 56 pages, including 7 pictures, 30 formulas, and the list of 28 references.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В процессе человеческой деятельности нередко возникают ситуации, когда интересы людей не совпадают или являются прямо противоположными (конфликт). Конфликтом является любая ситуация, в которой затронуты интересы двух и более участников, традиционно называемых игроками. Например, ситуации в спортивных играх, арбитражных спорах, военных учениях, в борьбе кандидатов в выборных компаниях и других. Математической моделью конфликта называется игрой. Игра - это идеализированная модель коллективного поведения, когда интересы участников разные, но все они имеют влияние на исход игры [7].

Существуют различные классификации игр, однако есть основные направления, по которым можно классифицировать игры на категории:

- количество игроков (конечные/ бесконечные);

- количество стратегий;

-характер взаимоотношений;

-характер выигрышей (нулевая сумма/ ненулевая сумма);

-вид функции выигрышей (матричные/ биматричные/ непрерывные/ сепарабельные).

В данной работе исследуется парная игра (два участника). Эффективней всего в подобных случаях пользоваться матричными играми, которые помогают упростить сложившуюся ситуацию и полностью оценить важность каждого фактора.

Актуальность выбранной темы обусловлена широким спектром ее применения. В различных областях: экономика, биология, политология, военное дело и других.

Объект исследования: матричные игры в прикладных задачах.

Предмет исследования: методы решения матричных игр.

Цель работы: создание программного обеспечения для нахождения оптимальной стратегии поведения конкурирующих фирм.

Задачи работы:

1. Изучить игровой подход.

2.Осуществить реализацию игрового подхода на примере антагонистической игры.

3. Создать программу-анализатор на основе полученных алгоритмов.

Бакалаврская работа состоит из введения, трех глав и итогового заключения.

Во введении раскрывается актуальность исследования по выбранному направлению, ставится проблема, цель и задачи исследования, определяются объект, предмет научных поисков, формулируется гипотеза, указываются методологическая база исследования и его практическая значимость.

В главе 1 определяется структура игрового подхода в прикладных задачах. В главе 2 приводятся примеры реализации игрового подхода в некоторых задачах на примере антагонистической модели конкуренции. В главе 3 разрабатываются алгоритм и интерфейс программы. В заключении обобщены и систематизированы результаты исследования.

Объем работы составляет 56 страниц, 12 рисунков, 30 формул и 8 таблиц. Использовано 28 источников литературы.

1. ИГРОВОЙ ПОДХОД В ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧАХ

1.1. Основные понятия игрового подхода

Теория игр — это математическая теория конфликтных ситуаций, в которых сталкиваются интересы двух или более сторон, преследующих различные цели.[11]

В экономике и управлении часто встречаются ситуации, в которых сталкиваются две или более стороны, преследующие различные цели, причем результат, полученный каждой из сторон при реализации определенной стратегии, зависит от действий других сторон. Такие ситуации называются конфликтными.

Простейшим вариантом игры является антагонистическая игра, в которой противодействуют 2 игрока, при этом множества различных альтернатив из которых они выбирают решения конечные. Матричная игра – это конечная игра двух лиц с нулевой суммой.[17]

В общем виде игрой можно назвать процесс, в котором участвуют два или более игроков, ведущих борьбу за некий выигрыш. При этом игроком считается только тот участник, который имеет право вести эту борьбу (принимать решения в игровых ситуациях). Выигрыш в игре – это количественная оценка результата завершенной игры или определенного этапа игры. Выигрыши могут быть оценены в любых единицах измерения, но чаще всего применяются стоимостные оценки. Игроки в процессе игры применяют различные игровые стратегии (иногда может быть только одна стратегия для какого-либо игрока). Реализация стратегий происходит во время ходов игроков, которые можно рассматривать как действие или бездействие в конкретной игровой ситуации.

Таким образом, математически игру можно задать тройкой [6]:

$$I = (N, S, W), \tag{1}$$

где $N = 1, \dots, n$ – множество игроков, участвующих в игре;

$S = (S_1, \ldots, S_n)$ – множество множеств стратегий игроков, где каждое $S_j = (s_1, \ldots, s_m)$ – множество стратегий игрока i (i = 1, …, n);

$W = (W_1, \ldots, W_n)$ – множество функций выигрышей игроков, где каждое $W_i = (w_1, \ldots, w_m)$ – множество функций выигрышей игрока i (i = 1, …, n) в соответствии с выбранной игроком стратегией S_j. При этом $S_j = (s_1, \ldots, s_m)$, j = 1, …, m.

С точки зрения математики теорию игр можно считать составной частью теории оптимизации. Игровые модели предназначены для нахождения оптимальных или близких к ним решений. Кроме того, практически все игры предполагают риск для игроков, а инновационная деятельность осуществляется в условиях повышенного риска.

Игры имеют множество классификаций, важнейшими из которых являются следующие [8]:

- по количеству игроков – два или много игроков;
- по взаимоотношениях игроков – бескоалиционные и кооперативные игры;
- по количеству ходов – одноходовые и многоходовые (позиционные) игры;
- по типу интересов игроков – антагонистические игры (с нулевой суммой выигрышей – для двух игроков это матричные игры) и неантагонистические игры, в том числе с фиксированным общим выигрышем;
- по информированности игроков – с совершенной, несовершенной и неполной информацией.

Кроме того, в теории игр помимо рациональных игроков, стремящихся к выигрышу, могут присутствовать игроки, совершающие свои ходы случайным образом.

Теория игр достаточно успешно применяется для анализа и интерпретации ряда экономических процессов и явлений, к которым, в частности, относятся [9]:

- конкурентный рынок одного товара, на который устанавливается единая (равновесная) цена, и ни один производитель или потребитель не может в индивидуальном порядке на нее повлиять;
- монополизированный рынок, на котором монополия ищет оптимальную стратегию (как правило, оптимизируется цена);
- олигополистический рынок, когда цена единая, а выпуск оптимизируется для достижения максимального эффекта.

В маркетинге инноваций чаще всего можно встретить ситуации, которые соответствуют бескоалиционным играм (как моментальным, так и позиционным), хотя в отдельных случаях могут появляться и коалиции.

Игра считается бескоалиционной, если каждый игрок играет за себя изолированно от других. Игры можно разделить на моментальные, когда все игроки принимают решение по стратегии (делают ход) одновременно, и последовательные, когда игроки делают ходы по очереди с учетом уже сделанных ходов других игроков. Выигрыш (в том числе отрицательный) всех игроков бескоалиционной моментальной игры определяется на множестве S как величина $w_{ij}(h)$, где i – игрок, j – номер выбранной им в данной игре стратегии (j = 1, …, m), h = (h_1, …, h_{i-1}, h_{+1}, …, h_n) – множество выбранных другими игроками стратегий.[21]

Выигрыш (в том числе отрицательный) всех игроков бескоалиционной последовательной игры определяется на множестве S таким же способом, но игроки, делающие свои ходы позже, учитывают уже сделанные ходы предыдущих игроков. В сфере инновационной деятельности игровые подходы встречаются реже, а работ, связанных с игровой интерпретацией маркетинга инноваций, практически нет.[3]

1.2. Игровой подход в маркетинге инноваций

Игровой подход в прикладной математике является одним из методов развития расчета инноваций и применяется в разных сферах деятельности, в том числе и маркетинге. Маркетинг инновационной деятельности является весьма сложной задачей, требующей специальных методов, моделей и подходов к ее успешному решению.

В реальной практике маркетинговые исследования инноваций обычно базируются на традиционных методах и моделях. Эти методы и модели ориентированы на знание рынка и базируются на известных статистических и иных данных (по продажам, рейтингам товаров и поставщиков, динамике цен, емкости рынка и т.д.). Такой подход в случае инноваций весьма ненадежен, так как никаких реальных данных по новым товарам и услугам у маркетинговых специалистов просто нет.

Неопределенность на всех стадиях жизненного цикла инновационных процессов не позволяет использовать жесткие методики планирования маркетинга, основанные на знании рынка. Напротив, здесь нужны методики планирования и результаты оценки в гибких условиях на базе вариантного анализа. В этом отношении представляется перспективным использование методов теории игр. Для маркетинга инноваций в первую очередь представляют интерес игры с несовершенной и неполной информацией, так как совершенная информация в инновационной деятельности практически недостижима.

Проиллюстрируем игровой подход к маркетингу инноваций на некоторых практических задачах. Данные задачи могут быть решены и без теоретико-игрового подхода, но тогда все внешние по отношению к маркетингу лица и структуры рассматриваются в большей степени как пассивные участники, а не как активные игроки, имеющие свои стратегии и свои интересы.

Рассмотрим маркетинговую задачу поиска инновационных идей. Собственно говоря, идеи можно рассматривать как некий товар, который имеет особую специфику. Во-первых, его трудно найти. Во-вторых, его трудно оценить. В-третьих, практически невозможно оценить качество самой идеи до момента ее реализации. Поиск является первым звеном в данной работе.

Задача может быть сформулирована в следующей постановке. Существует N авторов или владельцев подходящих инновационных идей, желающих их продать. Никто из этих авторов ничего не знает о существовании покупателя в виде инновационной структуры, которая эти идеи ищет посредством маркетинга. Цель маркетинга состоит в нахождении группы авторов подходящих идей (в крайнем случае, хотя бы одного автора) по возможности с минимальными затратами.[25]

У маркетинга есть M вариантов поиска идей (например, поиск по открытым источникам, заказ внешнего исследования, реклама, конкурс и т.д., причем допустимы также сочетания различных вариантов в одной стратегии). Авторы или владельцы идей реагируют на предложение, если поиск их достигает. Для простоты будем считать, что каждый найденный подходящий автор дает маркетингу выигрыш K. При этом затраты на каждый вариант маркетинговой стратегии i требует расходов z_i ($i = 1, \ldots, M$).

Тогда функция выигрыша маркетинга от поиска, которую следует оптимизировать, примет вид:

$$F(i, N) = nK - z_i \rightarrow \max, \qquad (2)$$

где i – выбранный вариант стратегии маркетингового поиска ($i = 1, \ldots, M$);

n – число найденных авторов идей ($0 \leq n \leq N$).

В реальной практике бизнеса такой поиск осуществляется либо методами, которые выбираются исходя из интуиции и опыта маркетологов, либо с помощью «частого гребня», когда не жалея средств используют все доступные методы поиска. Однако при наличии определенных обоснованных прогнозов данную задачу удобно интерпретировать как игру.

Представим данную задачу в виде неантагонистической игры N+1 лиц, в которой первым игроком является маркетинг, а все остальные игроки — это владельцы или авторы инновационных идей. Маркетинг (игрок 1) делает ход первым, выбирая из M возможных стратегий какую-то одну. Все остальные игроки отвечают на этот ход: находятся или не находятся.

Таким образом, на каждую стратегию первого игрока i ($i = 1, \ldots, M$) откликнется некоторое количество игроков n ($0 \leq n \leq N$), и выигрыш первого игрока составит разница между произведением выигрыша от отклика одного игрока К на число таких откликов n и стоимостью затрат по выбранной стратегии z_i. В случае так называемой «совершенной» информации в игре выбор лучшей стратегии легко осуществляется путем прямого сравнения результатов применения указанных стратегий. [16]

Однако в реальной жизни такое встречается крайне редко. Чаще всего есть лишь вероятностные оценки реакции авторов или владельцев идей на стратегию маркетинга. В этом случае следует переходить к стохастическим методам оценки выигрыша по каждому конкретному игроку. Это означает следующее.

Для каждого автора идеи j оценивается вероятность его нахождения при каждой маркетинговой стратегии i, обозначаемое соответственно p_{ij}. При этом меняется выигрыш по каждому автору и каждой стратегии маркетинга $K_{ij} = Kp_{ij}$.

Далее, если вероятности заданы точно, игра в принципе сводится к предыдущей.[20]

Однако реальные задачи маркетинга инноваций в аспекте поиска идей значительно сложнее. Во-первых, скорее всего не известны точные вероятности успешного поиска авторов (для каждого автора и для каждой маркетинговой стратегии). В этом случае необходимо рассматривать определенные диапазоны, в которых может находиться вероятность p_{ij} отклика игрока i на усилие j. В таком случае нужно разбивать диапазон возможных вероятностей на интервалы и рассчитывать выигрыши для различных вариантов от пессимистичных сценариев до оптимистичных.

Варианты усложнения могут быть описаны игрой, только с более сложными функциями выигрышей или большим разнообразием ходов игроков. Алгоритмизация и последующая автоматизация таких игр позволит более рационально, чем на основе опыта и интуиции, оценивать выигрыши (а, следовательно, и результаты той или иной стратегии маркетинга по поиску инновационных идей).[18]

Для финансирования инновационного проекта необходимы денежные средства, которые могут быть получены из следующих основных видов источников:[23]

- собственные денежные средства или иные реализуемые материальные и нематериальные ресурсы;
- инвестиционные средства;
- привлеченные средства в виде кредитов или займов с условиями срочности, возвратности и платности.

Первый вариант понятен и не требует дополнительного анализа. Однако собственных средств организации для реализации серьезных инновационных проектов, как правило, не хватает, и поэтому приходится прибегать к внешнему финансированию.

В целом представляется более предпочтительным привлечение инвесторов, чем кредитование, но имеются особенности. Внешние инвесторы достаточно осторожно подходят к финансированию инновационных проектов ввиду существенной неопределенности конечных результатов и инновационных рисков. Поэтому при принятии решений по финансированию инноваций многие инвесторы ориентируются преимущественно на пессимистичные сценарии реализации (позиция осторожного игрока), что в ряде случаев может привести к отказу от инвестирования.[26]

Банки и другие финансовые институты также достаточно осторожно подходят к кредитованию инноваций. При этом доход банка, состоящий из процентов по кредиту, начинает формироваться практически сразу, а не в конце проекта, как в случае с инвестором.

Задача поиска наилучшего решения по финансированию инновационного проекта может быть сформулирована в следующей постановке. Пусть имеется N альтернатив финансирования инновационного проекта – инвестиции и кредиты. Пусть известен прогноз суммарного дохода по проекту D и также известны прогнозы выгоды каждого потенциального участника (инвестора или банка) от проекта d_i ($i = 1, \ldots, N$). Тогда задача сводится к безусловной максимизации выгоды для проекта, которая представляет собой разность между суммарным доходом D и доходом выбранного участника d_i или просто к минимизации d_i. Если внешних участников в проекте несколько, то минимизируется суммарная выгода этих участников.[19]

В этой задаче инновационный проект и источник внешнего финансирования являются антагонистами, так как общий доход фиксирован и делится на часть проекта и часть внешнего участника. При этом каждый стремится увеличить свою часть. При фиксированных предложениях внешних участников это невозможно, но внешние участники могут осуществлять торг с организаторами инновационного проекта. Это выглядит следующим образом.

Пусть каждый альтернативный источник финансирования (инвестор или банк) имеет несколько вариантов участия с разными «выигрышами» для себя. Допустим, что известны или заданы экспертно, выигрыши d_{ij} для каждого потенциального участника финансирования при его участии в инновационном проекте по каждому возможному для него варианту финансирования j_i (j_i = 1, …, M_i; i = 1, …, N). Для строгости предположим, что отказ каждого участника в финансировании инвестиционного проекта окончательный и пересмотр условий невозможен. В случае согласия участника это не означает, что именно данный участник будет выбран маркетингом в качестве внешнего источника финансирования инновационного проекта.[27]

Здесь уже применим теоретико-игровой подход. Представим данную задачу в виде игры N+1 лиц, в которой первым игроком является маркетинг, а все остальные игроки — это потенциальные участники внешнего финансирования. Маркетинг (игрок 1) делает ходы первым, предлагая каждому инвестору i один из возможных вариантов финансирования j_i (j_i = 1, …, M_i). Каждый участник отвечает на этот ход, принимая решение согласиться или отказаться от участия в инновационном проекте. В случае согласия на предложенный инновационной структурой вариант j_i инновационная структура получает «выигрыш» D – d_{ij}, а выбранный участник – выигрыш d_{ij}.

В случае отказа оба игрока не получают выигрыша.

Такая игра при отсутствии коалиций у потенциальных участников финансирования распадается на N биматричных игр, каждая из которых представляет собой для инновационной структуры выбор предложения для данного потенциального участника из числа возможных для него предложений.[24]

Для таких игр можно составить таблицы выигрышей по каждому инвестору, каждая из которых будет представлять собой матрицу, в которой по строкам задаются возможные выигрыши при разных стратегиях (ходах) первого игрока (инновационной структуры), в первом столбце указаны выигрыши по вариантам при согласии этого участника, а второй столбец – весь нулевой.

Очевидно, что в этой постановке по каждому участнику следует выбирать максимальное значение из первого столбца матрицы. В результате проведения всех биматричных игр получается множество выигрышей $D = \{d_{ij}\}$, где для каждого участника i и каждого соответствующего варианта j_i указывается выигрыш первого игрока (инновационной структуры) – положительный или нулевой. Далее следует просто выбрать максимальное значение d_{ij}.

Однако на практике далеко не очевидно, что выбранный оптимальный для маркетинга вариант будет принят участником. В отличие от чисто теоретических рассуждений участник может сделать «нерациональный» ход и отказаться от проекта ввиду того, что его выгода покажется ему недостаточной.

Допустим, что можно оценить вероятность p_{ij} отказа от финансирования потенциальных участников по отдельным вариантам (ходам) ($0 \leq p_{ij} < 1$), $i = 1, \ldots, N$, $j = 1, \ldots, M_i$. Тогда можно «строить игру» с учетом новой информации о вероятностях. Стратегией «смелого» игрока будет по-прежнему выбор максимального d_{ij}. Однако в случае инноваций наиболее выгодное предложение инвестора обычно обладает и высокой вероятностью отказа, при котором выигрыш «смелого» игрока будет равен 0.

Стратегией «осторожного» игрока станет минимизация вероятности отказа инвестора ($\min p_{ij}$, $i = 1, \ldots, N$), $j = 1, \ldots, M_i$). Однако при такой стратегии весьма возможна существенная потеря в конечном выигрыше «осторожного» игрока.

Наиболее рациональной стратегией представляется при данной постановке задачи стратегия максимизации математического ожидания выигрыша инновационной структуры (max $d_{ij}(1 - p_{ij})$, $i = 1, \ldots, N$, $j = 1, \ldots, M_i$). Более сложным представляется случай, когда точные значения вероятностей не известны, но можно указать интервалы, в которых эти вероятности находятся. Тогда возникает много различных игровых стратегий – по наилучшим вероятностям, наихудшим, средним и т.д.

Так как суммарный доход D по инновационному проекту также является прогнозом, здесь тоже возможен переход к некоторому диапазону $[D_{min}, D_{max}]$. Собственно говоря, игровой подход к этой задаче позволяет в имитационном режиме рассмотреть различные результаты при различных стратегиях маркетинга и потенциальных участников. Позитивным аспектом здесь является рассмотрение участников как активных игроков, способных принимать самостоятельные решения (как рациональные, так и нерациональные), что в целом соответствует реальной практике.

Ценообразование – важнейшая составная часть деятельности инновационной структуры на рынке. Следует понимать, что цена на инновационный продукт должна определяться только исходя из потребностей и возможностей рынка.

Рассмотрим сначала задачу с отдельными покупателями инновационного продукта. Имеется M потенциальных покупателей инновационного продукта (игроков), у которых есть предельные цены на покупку, известные маркетингу. Каждый из игроков готов сделать только единичную ставку (купить единицу инновационного продукта). Выигрышем по каждой единичной продаже при каждой установленной цене C является разница между ней и себестоимостью единицы инновационного продукта S. Суммарным выигрышем считается сумма отдельных выигрышей, которая максимизируется.

Маркетинг как первый игрок делает ход, устанавливая цену на единицу инновационного продукта С, которую на данный момент считает оптимальной. Все покупатели (игроки) реагируют на эту цену, покупая или не покупая единицу инновационного продукта. Реакцию покупателей на ценообразование инновационной структуры можно задать бинарной матрицей А:

$$A = \begin{matrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{matrix}, \tag{3}$$

где a_{ij} принимает значение 1, если игрок i покупает при цене С, и принимает значение 0, если игрок не покупает при этой цене (i = 1, …, M). Сумма по любой строке j матрицы означает число покупателей при данной цене C_j (обозначим его k_j). Следовательно, выигрыш инновационной структуры D_j при цене C_j составит:

$$D_j = k_j(C_j - S) \tag{4}$$

С учетом того, что маркетингу известны предельные цены покупателей инновационного продукта, можно предположить, что установленная цена будет оптимальной с позиции максимизации прибыли инновационной структуры. Однако предельные цены отдельных покупателей редко бывают известны маркетингу. Более надежны прогнозы по сегментам рынка.

Приведенная выше простейшая игра имеет несколько вариантов развития. Первый вариант – переход от единичных покупателей к сегментам с однотипным поведением на рынке (агрегирование).

Небольшая разница в предельных ценах покупателей не имеет существенного влияния на конечный результат (прибыль), так как точно задача при неопределенности в отношении предельных цен каждого покупателя на практике все равно не решается. Поэтому можно агрегировать покупателей до определенных групп, по каждой из которых можно установить некую групповую предельную цену на инновационный продукт.

Сущность игры при этом практически не меняется. Единственным отличием является замена бинарной матрицы А на целочисленную матрицу A_s:

$$A_s = \begin{matrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{matrix}, \qquad (5)$$

где a_{ij} принимает значение k_i, если игрок (сегмент) i покупает при цене j, и принимает значение 0, если игрок (сегмент) не покупает при этой цене (i = 1, …, M; j = 1, …, N). Сумма по любой строке j матрицы означает число проданных единиц при данной цене (обозначим его как k_j). Следовательно, выигрыш инновационной структуры D_j при цене C_j составит:

$$D_j = k_j(C_j – S) \qquad (6)$$

В качестве дальнейшего усложнения игры можно рассматривать учет неопределенности и риска при назначении цен на инновационный продукт. Эта неопределенность вполне объективна, так как в реальной практике бизнеса никогда нельзя точно указать размер того или иного сегмента рынка покупателей, а также однозначно указать предельную цену для сегмента. Здесь приходится переходить от точных оценок к интервальным. В общем виде с учетом неопределенности ключевая матрица A принимает вид:

$$A = \begin{matrix} (a_{min})_{11}, (a_{max})_{11} & \cdots & (a_{min})_{1m}, (a_{max})_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_{min})_{n1}, (a_{max})_{n1} & \cdots & (a_{min})_{nm}, (a_{max})_{nm} \end{matrix}, \qquad (7)$$

где $(a_{min})_{ij}$ и $(a_{max})_{ij}$ – соответственно целые неотрицательные значения, характеризующие минимальный и максимальный покупательский спрос на инновационный продукт сегмента i при цене C_j.

В результате исследования теоретико-игрового подхода к имитации управления отдельными элементами маркетинга инновационной деятельности (поиском инновационных идей, организацией финансирования и ценообразованием на инновационные продукты) показано, что игровые модели весьма удобны и полезны при принятии решений по ряду ключевых аспектов маркетинговой деятельности. Главным преимуществом игрового подхода является учет интересов внешних участников маркетинговой деятельности как отдельных игроков, принимающих самостоятельные решения в зависимости от их собственных интересов.

Дальнейшее развитие игрового направления в сфере маркетинга инноваций может быть связано, прежде всего, с построением экономико-математических игр и с разработкой аппарата для их анализа. Большинство игр такого рода либо имеют решения, либо могут быть разбиты на ряд более простых игр (в основном биматричных), которые имеют решения. Такие решения можно получать на базе электронных таблиц или специально разработанного для этих целей несложного программного обеспечения.[13]

Для более сложных игр, в которых получение оптимальных решений невозможно или сильно затруднено, можно разработать автоматизированное средство, рассчитывающее необходимые результаты при заданных условиях. Такого рода автоматизированные системы широко используются в инвестиционном анализе, когда исследователь задает на входе исходные данные по нужному сценарию, а на выходе получает производные показатели, позволяющие изменить сценарий. При этом исследователь имеет возможность менять один или несколько исходных параметров и исследовать чувствительность модели (в нашем случае игры) к тем или иным изменениям. Также обычно предусматривается возможность получения результатов при задании некоторого шага изменения параметра и выбора наилучшего значения.

Итак, на основании первой главы можно сделать ряд выводов:

- Проанализировано использование теории игр в маркетинге инноваций, в частности, поиска новый идей, наилучшего решения по финансированию и ценообразования. игровой подход весьма удачно имитирует инновационную деятельность и ее маркетинг, так как здесь, как и в игре, имеются риски, неопределенность и набор участников (игроков) с различными, но часто не противоположными интересами.

2. РЕАЛИЗАЦИЯ ИГРОВОГО ПОДХОДА НА ПРИМЕРЕ АНТАГОНИСТИЧЕСКОЙ ИГРЫ

2.1. Описание математической модели конкуренции

Математическая модель конфликтной ситуации называется игрой, стороны, участвующие в конфликте, – игроками, а исход конфликта – выигрышем или платежом.

Интересы сторон в потенциально реализуемых ситуациях проявляются в том, что каждому i-му игроку в ситуациях x приписывается число, которое выражает степень удовлетворенности игрока i в данной ситуации.

Это число называют выигрышем и обозначают H_i(x) .

Соответствие H_i :{x}→R называют функцией выигрыша i-го игрока. Каждая функция выигрыша из множества {H_i(x)} задается, таким образом, на множестве ситуаций. В ряде случаев вместо указания выигрыша в той или иной ситуации задают отношение предпочтения (это отношение порядка либо доминирования) на множестве ситуаций для каждого игрока.[22]

Из класса бескоалиционных игр можно выделить подкласс так называемых антагонистических игр.

В таких играх I ={1,2}, x = (x_1, x_2) и $H_1(x_1,\ x_2)$ = – $H_2(x_1,\ x_2)$, то есть выигрыши 1-го и 2-го игрока равны по величине и противоположны по знаку (игра с нулевой суммой).

Функции выигрыша задаются на множестве ситуаций. Тогда если игра конечна и игроков всего 2, то множество ситуаций представляется матрицей, а семейство функций выигрыша – двумя матрицами, так как N = 2. Можно вместо 2 матриц записать одну матрицу с векторными элементами, лежащими в R_2.

Так как в антагонистической игре H_1(x) = – H_2(x), игру достаточно описать с помощью единственной матрицы со скалярными элементами, лежащими в R.[14]

Платежная матрица имеет размер n×m, где n – число возможных стратегий игрока 1, m – число возможных стратегий игрока 2. Элементами этой матрицы являются пара чисел, первое из которых определяет величину выигрыша игрока 1, второе – игрока 2. Игрок 1 (иногда его называют игроком А) выбирает одну из n стратегий, обозначенных символами A_1, A_2,..., A_n; каждой стратегии соответствует строка матрицы. Игрок 2 (игрок В) выбирает одну из m стратегий $B_1, B_2,..., B_m$; каждой стратегии этого игрока соответствует столбец матрицы. Пара чисел на пересечении строки и столбца, которые соответствуют стратегиям, выбранным игроками, показывает величину выигрыша каждого из них. Например, если игрок 1 (игрок А) выбирает стратегию A_i, а игрок 2 (игрок В) – B_j, то выигрыши игроков 1 и 2 равны, соответственно, H_{12} (i= 1,n; j= 1,m). Предполагается, что каждому из игроков известны все элементы платежных матриц.[28]

Конечная игра n×m, описанная в нормальной форме, может быть представлена платежной матрицей. Элементами данной матрицы является пара чисел, первое число W_1 определяет величину выигрыша первого игрока (игрока А) при применении данным игроком i-й стратегии, а вторым игроком (игроком В) – j-й стратегии.

Второе число W_2 определяет выигрыш игрока 2 (игрока В) при применении игроками тех же стратегий.

Для упрощения записи иногда выигрыш игрока А при i-й стратегии игрока А и j-й стратегии игрока В обозначается a_{ij}, выигрыш игрока В при тех же стратегиях – b_{ij}, сами стратегии записывают в виде A_i и B_j, соответственно.

Как было отмечено ранее, существуют игры, в которых общая сумма выигрышей игроков равна нулю, проигрыш одного из игроков равен выигрышу другого, то есть налицо прямой конфликт между игроками.[4]

Такие игры называются антагонистическими играми или играми с нулевой суммой. В этих играх можно записать $a_{ij} + b_{ij} = 0$, то есть $a_{ij} = -b_{ij}$.

В такой ситуации, если игра представлена в нормальной форме, вполне достаточно исследовать платежную матрицу только игрока А, которая может быть представлена в виде, приведенном в табл.2.1. Игра, в которой множества А и В стратегий игроков конечны, т.е. $|A|<\infty$, $|B|<\infty$, называется матричной.

В этом случае функция выигрышей игрока 1 имеет вид матрицы, называемой матрицей игры (матрицей выигрышей, платежной матрицей) $H=\{a_{ij}\}_{mn}$, $i = 1,..., m$; $j = 1,..., n$. Строки этой матрицы соответствуют стратегиям $a_1, a_2, ..., a_m$ игрока 1, столбцы — стратегиям $b_1, b_2, ..., b_n$ игрока 2. Элемент матрицы $a_{ij} = H(a_i, b_j)$ — выигрыш игрока 1 в случае, когда он применит стратегию a_i, а его противник — стратегию b_j, $i = 1, ..., m$; $j = 1, ..., n$. В антагонистических играх (играх с нулевой суммой) данное обозначение платежной матрицы выражается в таком виде, $H_1(x_1, x_2) = -H_2(x_1, x_2)$, как было написано ранее, выигрыш первого игрока равен по модулю проигрышу второго игрока.

Таблица 2.1 - Платежная таблица игры n x m

B_j / A_i	B_1	B_2	...	B_j	...	B_m
A_1	H_{11}	H_{12}	...	H_{1j}	...	H_{1m}
A_2	H_{21}	H_{22}	...	H_{2j}	...	H_{2m}
...	...	...	...	...	...	...
A_i	H_{i1}	H_{i2}	...	H_{ij}	...	H_{im}
...	...	...	...	...	...	...
A_n	H_{n1}	H_{n2}	...	H_{nj}	...	H_{nm}

Таким образом, антагонистическая игра в нормальной форме это тройка

Г=($\{x_1\}$,$\{x_2\}$, H$\{x_1\}\times\{x_2\}$)), где $\{x_1\}$ и $\{x_2\}$- непустые множества, и H:{x}→R, где {x}= $\{x_1\}\times\{x_2\}$.

2.2. Модель антагонистической конкуренции двух фирм

Как было сказано ранее, матричные игры – суть антагонистические игры. Вообще говоря, чисто антагонистические конфликты встречаются в социально-экономических и технико-экономических сферах не так уж и часто. Тем не менее, соображения и результаты, полученные для матричных игр, являются весьма важными при исследовании и решении игр других классов. Так, например, аппарат матричных игр используется при решении задач теории статистических решений, позволяя вырабатывать способ поведения лица принимающего решение в условиях полной или частичной неопределенности внешней обстановки, который будет обеспечивать гарантированные результаты в так называемых “играх с природой” – принятая в статистических играх терминология.

Матричной игровой моделью можно описать антагонистическую конкуренцию двух фирм.

Пример 1. Пусть фирма 1 производит сезонный товар, который имеет спрос в течение n единиц времени. Этот товар может поступать на рынок в дискретные моменты времени i=1,2,...,n. Для конкурентной борьбы с фирмой 1 дочерняя фирма 2 некоего концерна производит аналогичный товар, который может поступать на рынок в дискретные моменты j=1,2,...,n. Фирма 2 не заботится о собственных доходах, ее цель – вытеснить с рынка фирму 1. После этого легко будет наверстать упущенное, опираясь на капитал концерна. Для этой цели видятся два основных пути – продажа товара по пониженной цене либо выбор оптимального момента выброса товара на рынок. Рассмотрим ситуацию, когда 1-й путь исключается из-за некоторого соглашения между фирмами. В этом случае 2-й путь представляется единственным законным инструментом фирмы 2. Следовательно, она должна заблаговременно готовить свое производство к выпуску и продаже товара в выбранный период времени. Для того чтобы вытеснить с рынка 1-ю фирму, 2-я должна минимизировать ее доходы.

Пусть качество конкурирующих товаров зависит от момента времени поступления их на рынок относительно друг друга. Чем позднее товар поступит на рынок, тем его качество выше ввиду дополнительного временного резерва на улучшение технологии и дизайна, а реализуется, главным образом, товар более высокого качества. Тогда, если фирма 1 выбросит на рынок товар в момент i, а фирма 2 – в момент j>i, то фирма 1, не имея конкурента в течение j-i единиц времени, получит доход H_1=C(j-i), где C – доход от продажи в единицу времени. Начиная с момента j, фирма 1 теряет рынок и далее дохода не получает. Если же i>j, то фирма 1, выбросив на рынок более качественный товар, будет получать доход в течение временного интервала n-i+1 (это число оставшихся единиц времени). Доход фирмы 1 в этом случае будет составлять H_1=C(n-i+1). Если i=j, то товары будут иметь одинаковый спрос и доход фирмы 1 составит H_1=C(n-i+1)/2.

Фирма 1 выбирает i-ю единицу времени завоза товара, стремясь максимизировать свой доход, а фирма 2 путем выбора j-й единицы времени преследует прямо противоположную цель – минимизировать H_1, то есть здесь налицо антагонистический конфликт. Множество чистых стратегий {x1}={x2}={1,2,...,n} означает, что матрица [H] будет квадратной. Запишем функцию выигрыша 1-го игрока, то есть фирмы 1:

$$H(i,j) = \begin{cases} C\ j - i & \text{при } i < j \\ \frac{n - i + 1}{2} & \text{при } i = j \\ C(n - i + 1) & \text{при } i > j \end{cases}$$

Пусть { x_1 }={ x_2 }={1, 2, 3, 4}, тогда:

$$H = \begin{matrix} 2C & C & 2C & 3C \\ 3C & \frac{3C}{2} & C & 2C \\ 2C & 2C & C & 3C \\ C & C & C & \frac{C}{2} \end{matrix}, \text{ где } C > 0$$

Сведем эту игру к стратегически эквивалентной игре $Г^{I}$ с матрицей:

$$H^{I} = \begin{matrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & \frac{3}{2} & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \end{matrix}$$

Упростим матрицу. Отбросим 4-ю строку и 1-й столбец:

$$H^{II} = \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{3}{2} & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{matrix}$$

В этой матрице после упрощения игры 1-я строка игры $Г^{II}$ соответствует 1-й стратегии, а 1-й, 2-й и 3-й соответствуют 2-й, 3-й и 4-й стратегиям стратегии первоначальной игры.

$$H^{III} = \begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{matrix}$$

В этой матрице 1-я строка соответствует 1-й стратегии первоначальной игры, а 2-я – 3-й стратегии. Столбцы 1 и 2 соответствуют стратегиям 2-й и 3-й первоначальной игры Г. Матрица $[H^{III}]$ не имеет седловой точки, и игра $Г^{Ш}$ в чистых стратегиях не решается. Заметим также, что эта игра обладает свойством симметрии.

Таким образом, стратегия $X^{*} = (1/2;\ 0;\ 1/2;\ 0)$ оптимальна для 1-й фирмы, а стратегия $X^{*} = (0;\ 1/2;\ 1/2;\ 0)$ – для 2-й фирмы. Следовательно, фирма 1 с равными частотами должна завозить товар на рынок в 1-ю и 3-ю единицы времени, а фирма 2 – с равными частотами – во 2-ю и 3-ю единицы времени. В этом случае математическое ожидание дохода фирмы 1 составит 3С/2.

Пример 2. Этот пример касается планирования выпуска двумя предприятиями однородной продукции, которая сбывается на одном и том же рынке. Себестоимость и продажная цена всех типов продукции одинакова; различие товаров в дизайне, порядке эксплуатации и т.п., а назначение одно и то же – это могут быть утюги, электрочайники и др. Пусть первое предприятие может выпускать товары m типов A_1, A_2,..., A_m, а 2-е – другие товары также типов B_1, B_2,..., B_m. Маркетинговые исследования показали, что на рынке найдет, сбыт N единиц товара всех типов, причем, если 1-е предприятие будет выпускать продукцию A_i, 2-е – продукцию B_j, то будет реализовано $p_{ij}N$ товаров типа A_i и $(1- p_{ij})N$ товаров типа B_j.

Мощности предприятий таковы, что каждое из них в одиночку способно обеспечить рынок. Для простоты (не теряя при этом общности рассуждений) примем доход от продажи единицы товара за 1, а полезность 1-го игрока, то есть 1-го предприятия – равной его общему доходу. Тогда матрицу выигрышей 1-го предприятия можно записать:

$$H^I = \begin{matrix} p_{11}N & p_{12}N & \dots & p_{1m}N \\ p_{11}N & p_{22}N & \dots & p_{2m}N \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{m1}N & p_{m2}N & \dots & p_{mm}N \end{matrix},$$

то есть $(h_{ij})_1=p_{ij}N$. Точно так же можно составить матрицу выигрышей 2-го предприятия, состоящую из элементов $(h_{ij})_2=(1- p_{ij})N$.

Очевидно, что в любой ситуации сумма доходов предприятий 1 и 2 равна $Np_{ij}N+(1- p_{ij})N$. Это означает, что увеличение выигрыша 1-го предприятия ведет к уменьшению выигрыша 2-го предприятия, и игра, заданная матрицей H_1=H, моделирует антагонистический конфликт.

Ранее упоминалось, что антагонистическая игра – суть игра с нулевой суммой, но к такой игре путем аффинно-эквивалентного преобразования может быть сведена любая игра с постоянной суммой.

Таким образом, решение игры Г с матрицей Н определяет в общем случае смешанные оптимальные стратегии X_1^* и X_2^* , а также математическое ожидание выигрыша игрока 1, равное ν. Для игрока 2, то есть 2-го предприятия, математическое ожидание проданных товаров составит N-ν (т.к. общая сумма проданных товаров равна N).

Покажем решение игры на конкретном числовом материале. Пусть предприятие 1 выпускает игрушки типа $A_1, A_2, ..., A_5$, а предприятие 2 – игрушки типа $B_1, B_2, ..., B_5$. Затраты на производство каждого типа одинаковы, и реализуются игрушки по одной цене.

Прогнозируемая доля сбыта игрушек 1-го предприятия в условиях конкуренции со стороны 2-го предприятия задана табл. 2.2.

Таблица 2.2 - Прогнозируемая доля сбыта игрушек

Предприятие 1	Предприятие 2				
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	0,5	0,5	0,4	0,5	0,2
A_2	0,5	0,4	0,6	0,1	0,5
A_3	0,3	0,3	0,4	0,2	0,6
A_4	0,4	0,7	0,6	0,4	0,2
A_5	0,3	0,2	0,4	0,0	0,1

Ожидается, что в течение года будет продано всего 10 000 игрушек. Требуется определить типы игрушек, выпускаемых каждым предприятием и доли выпуска по типам в общей программе выпуска.

Приведем игру Г к стратегически эквивалентной $Г^I$, разделив матрицу Н на число 10^3, с тем, чтобы получить в новой матрице удобные для расчетов целые числа:

$$H^I = \begin{matrix} 5 & 5 & 4 & 5 & 2 \\ 5 & 4 & 6 & 1 & 5 \\ 3 & 3 & 4 & 2 & 6 \\ 4 & 7 & 6 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 0 & 1 \end{matrix}$$

Легко убедиться, что игра $Г^I$ не имеет седловой точки в чистых стратегиях и следует искать решение игры в смешанном расширении.

Вначале упростим игру H^{I}.

Вычеркнем 5-ю строку и 1-й и 2-й столбцы в H^{I}. Получим игру $Г^{II}$ с матрицей H^{II}.

$$H^{II} = \begin{matrix} 4 & 5 & 2 \\ 6 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & 6 \\ 6 & 4 & 2 \end{matrix},$$

i-й строке матрицы H^{II} соответствует i-я строка игрока $Г^{I}$,а j-му столбцу матрицы H^{II}, (j+2)-й столбец игрока $Г^{I}$.

(j+2)-я стратегия. В игре $Г^{II}$ все стратегии обоих игроков оптимальны по Парето. В принципе, можно установить, что в матрице H^{II} 3-я стратегия 2-го игрока (1-й столбец) может доминировать с помощью некоторой смешанной стратегии, составленной из 2-го и 3-го столбцов, например, с вероятностью 1/2 и 1/2. Тогда осуществляется переход к игре $Г^{III}$ с матрицей H^{III}:

$$H^{III} = \begin{matrix} 5 & 2 \\ \cancel{1} & \cancel{5} \\ 2 & 6 \\ \cancel{4} & \cancel{2} \end{matrix}$$

Здесь i-й строке матрицы H^{III} соответствует i-я стратегия игры $Г^{I}$, а j-у столбцу (j+3)-я стратегия.

В итоге, после вычеркивания 2-й и 4-й строк получаем игру $Г^{IV}$ с матрицей $H^{IV} = \begin{matrix} 5 & 2 \\ 2 & 6 \end{matrix}$, которая не имеет седловой точки. В ней 1-я строка соответствует 1-й стратегии игры $Г^{I}$, 2-я строка – 3-й стратегии, а j-й столбец (j+3)-й стратегии.

Следовательно 1-е предприятие должно выпускать игрушки типа A_1 и A_3 с долевыми коэффициентами в объеме выпуска 4/7 и 3/7, 2-е предприятие должно выпускать игрушки типа B_4 и B_5 с долевыми коэффициентами в объеме выпуска 4/7 и 3/7.

Результат: $X_1^* = (4\ 7; 0; 3\ 7; 0; 0)$ и $X_2^* = (0 ;0; 0; 4\ 7; 3\ 7)$.

Таким образом, на основе второй главы делаем следующие выводы:

- математическая модель конфликтной ситуации используется при игре конкурентных сторон, при котором исход конфликта выражается в выигрыше или предпочтении;
- модель антагонистической игры применяется при конкуренции двух фирм, позволяя вырабатывать способ поведения лица принимающего решение в условиях полной или частичной неопределённости внешней обстановки. Примером может послужить вытеснение одной фирмы другой с рынка сбыта или выпуска идентичной продукции.

3. РЕАЛИЗАЦИЯ ПРОГРАММЫ-АНАЛИЗАТОРА

3.1. Алгоритм решения игры, используемый в программе

Решение матричной игры со смешанным расширением - это определение оптимальных смешанных стратегий, то есть нахождение таких значений вероятности выбора чистых стратегий для обоих игроков, при которых они достигают наибольшего выигрыша.

Таблица 3.1 - Общий вид платежной матрицы матричной игры

	1	2	. . .	n
A_1	A_{11}	A_{12}	. . .	A_{1n}
A_2	A_{21}	A_{22}	. . .	A_{2n}
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
A_m	A_{m1}	A_{m2}	. . .	A_{mn}

Обычно каждый из игроков пытается максимизировать свой выигрыш с учетом ходов противодействующего ему игрока. Поэтому для первого игрока в каждой из стратегий нужно определить минимальные значения выигрышей, впоследствии, из этих значений найти максимум, то есть определить величину

$$V_н = \max_i \min_j a_{ij} \tag{10}$$

или в каждой строке платежной матрицы найти минимальные значения, а затем определить максимальное значение. Величина $V_н$ называется нижней ценой игры или максимином матрицы. Максиминной стратегией называется стратегия игрока, которая соответствует максимину $V_н$.

Очевидно, если будем придерживаться максиминной стратегии, то гарантирован выигрыш, в не зависимости от поведения противника, не меньший $V_н$. Поэтому если придерживаться наиболее осторожной стратегии, величина $V_н$ будет тем минимум который гарантирован.

По определению матричной игры, величина выигрыша игрока равна, величине проигрыша игрока. Поэтому для второго игрока, так же, как и для первого, необходимо определить значение

$$V_в = \min_j \max_i a_{ij} \qquad (11)$$

или найти в каждом из столбцов платежной матрицы максимальные значения, а затем определить минимальное из этих значений. Величина $V_в$ называется верхней ценой игры, минимаксным выигрышем или минимаксом матрицы. Стратегия противника соответствующая выигрышу называется его минимаксной стратегией. Противнику гарантировано, что в любом случае он потеряет не больше чем $V_в$ если он будет придерживаться наиболее осторожной стратегии.

В том случае, если при сохранении правил игры (коэффициентов a_{ij}) в длительной перспективе, значения $V_н$ и $V_в$ не равны, то выбор стратегий каждым из игроков оказывается неустойчивым. При равенстве $V_н = V_в = V$ он получает устойчивость. В таком случае говорят, что игра имеет решение в чистых стратегиях, а стратегии, в которых достигается V — оптимальными чистыми стратегиями. Величина V называется чистой ценой игры

Для матричной игры, платежная матрица $V_н \neq V_в$, определим следующие значения вероятности выбора стратегий для игрока A (p_1, p_2, ..., p_m) и для игрока B (q_1, q_2, ..., q_n), при которых игроки достигали бы своего максимально гарантированного выигрыша.

Если один из игроков придерживается своей оптимальной стратегии, то, по условию задачи, его выигрыш не может быть меньше цены игры V.

Поэтому данная задача может быть представлена для игроков в виде следующих систем линейных неравенств.

Для первого игрока:

$$
\begin{gathered}
a_{11}q_1 + a_{12}q_2 + \dots + a_{1n}q_n \le V \\
a_{21}q_1 + a_{22}q_2 + \dots + a_{2n}q_n \le V \\
\dots \\
a_{m1}q_1 + a_{m2}q_2 + \dots + a_{mn}q_n \le V \\
q_1 + q_2 + \dots + q_n = 1 \\
q_1 \ge 0 : q_2 \ge 0 \dots q_n \ge 0
\end{gathered} \tag{12}
$$

Для второго:

$$
\begin{gathered}
a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + \dots + a_{m1}p_m \ge V \\
a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + \dots + a_{m2}p_m \ge V \\
\dots \\
a_{1n}p_1 + a_{2n}p_2 + \dots + a_{mn}p_m \ge V \\
p_1 + p_2 + \dots + p_m = 1 \\
p_1 \ge 0 : p_2 \ge 0 \dots p_m \ge 0
\end{gathered} \tag{13}
$$

Чтобы определить значение V, разделим обе части каждого из уравнений на V. Величину p_i/V обозначим через x_i, а q_j/V – через y_j.

Для игрока 1 получим следующую систему неравенств, из которой найдем значение 1/v:

$$
\begin{gathered}
a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \dots + a_{mi}x_m \ge V \\
a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{m2}x_m \ge V \\
\dots \\
a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \dots + a_{mn}x_m \ge V \\
x_1 + x_2 + \dots + x_m = 1 \\
x_1 \ge 0 : x_2 \ge 0 \dots x_m \ge 0
\end{gathered} \tag{14}
$$

Для игрока 1 необходимо найти максимальную цену игры (V). Следовательно, значение 1/V должно стремиться к минимуму.

Целевая функция задачи будет иметь следующий вид:

$$\min Z = \min 1/V = \min (x_1 + x_2 + \dots + x_m) \tag{15}$$

Для второго игрока будет следующая картина:

$$
\begin{gathered}
a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n \le 1 \\
a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2n}y_n \ge 1 \\
\dots \\
a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + \dots + a_{mn}y_n \le 1 \\
y_1 + y_2 + \dots + y_n \ge 1/V \\
y_1 \ge 0 : y_2 \ge 0 \dots y_n \ge 0
\end{gathered} \tag{16}
$$

Для второго игрока надо найти минимальную цену игры (V). Значит, значение 1/V Должно идти в максимум.

Целевая функция имеет следующий вид:

$$\max Z = \max 1/V = \max (y_1 + y_2 + ... + y_n) \qquad (17)$$

Все переменные в данных системах линейных неравенств должны быть неотрицательными: $x_i = p_i/V$, а $y_i = q_j/V$. Значения p_i и q_j не могут быть отрицательными, так как являются значениями вероятностей выбора стратегий игроков. Поэтому необходимо, чтобы значение цены игры V не было отрицательным. Цена игры вычисляется на основе коэффициентов выигрышей платёжной матрицы. Поэтому, для того, чтобы гарантировать условие неотрицательности для всех переменных, необходимо, чтобы все коэффициенты матрицы были неотрицательными. Этого можно добиться, прибавив перед началом решения задачи к каждому коэффициенту матрицы число K, соответствующее модулю наименьшего отрицательного коэффициента матрицы. Тогда в ходе решения задачи будет определена не цена игры, а величина

$$V^* = V + K \qquad (18)$$

Когда происходит решение задач линейного программирования, из множества вершин которые принадлежат границе множества решений системы неравенств, фактически выбираем такую вершину, в которой значение целевой функции достигало максимума или минимума. Если имеются две переменные, то данный метод совершенно нагляден и позволяет быстро находить решение задачи.

При условии, что в задаче используется более трех переменных, а в реальных экономических задачах как раз такая ситуация, область решений системы ограничений трудно представить наглядно.

Задачей линейного программирования имеет вид:

$$f(X)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max(\min) \qquad (19)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i\,, i \in I\,, I \subseteq M = \{1,2,\ldots,m\} \qquad (20)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_j\,,\ i \in M \qquad (21)$$

$$x_j \ge 0\,,\ j \in J\,,\ J \subseteq N = \{1,2,\ldots,n\} \qquad (22)$$

При этом система линейных уравнений (20) и неравенств (21), (22), определяющая допустимое множество решений задачи W, называется системой ограничений задачи линейного программирования, а линейная функция $f(X)$ называется целевой функцией, или критерием оптимальности.

В частном случае, если $I = \varnothing$, то система (20) – (21) состоит только из линейных неравенств, а если $I = M$, то – из линейных уравнений.

Если математическая модель задачи линейного программирования имеет вид:

$$f(X)=\sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j \to \min \qquad (23)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i\,,\ i = \overline{1,m}\,;\ b_i \ge 0\,; \qquad (24)$$

$$x_j \ge 0\,,\ j = \overline{1,n}\,, \qquad (25)$$

то говорят, что задача представлена в канонической форме.

Правило приведения задачи линейного программирования к каноническому виду состоит в следующем:

1. Если в исходной задаче требуется определить максимум линейной функции, то следует изменить знак и искать минимум этой функции.

2. Если в ограничениях правая часть отрицательна, то следует умножить это ограничение на -1.

3. Если среди ограничений имеются неравенства, то путём введения дополнительных неотрицательных переменных они преобразуются в равенства.

4. Если некоторая переменная x_k не имеет ограничений по знаку, то она заменяется (в целевой функции и во всех ограничениях) разностью между двумя новыми неотрицательными переменными: $x_k = x'_r - x_l$, где l – свободный индекс, $x'_r \geq 0$, $x_l \geq 0$.

Такие задачи решаются с помощью симплекс-метода или методом последовательных улучшений. Идея метода проста и заключается в следующем.

Сначала находится первоначальный план или определенная вершина области ограничений. Затем проверяется план на оптимальность. В случае, если план оптимален, то задача решена, иначе переход к другому плану.

Алгоритм перехода происходит с помощью вычислительного шага, который записывается в виде таблиц (симплекс-таблицы). Число вершин конечное, поэтому через конечное число шагов находится оптимальное решение.

Рассмотрим задачу о плане производства. Для начала построим модель и приведем ее к специальному виду.

Пример.

Склад отпускает сырья не более 80 единиц для изготовления изделий А и В. Для производства изделия А используется две единицы сырья, а для изделия В всего одна единица.

Необходимо составить план производства с наибольшей прибылью. При этом изделий А надо произвести не более 50 шт., а изделий В этом случае не более 40 шт. с учетом, что выручка от продажи одного изделия А - 5 руб., а от В - 3 руб.

При построении математической модели обозначим количество изделий А через x_1, а изделий В – x_2. Математическая модель примет вид:

$$x_1 \leq 50;$$
$$x_2 \leq 40;$$
$$2x_1 + x_2 \leq 80;$$
$$x_1, x_2 \geq 0;$$
$$\mathrm{F} = 5\mathrm{x}_1 + 3\mathrm{x}_2 \rightarrow \max \qquad (26)$$

Вводим дополнительные переменные и приводим задачу к каноническому виду,

$$\mathrm{x}_1 + \mathrm{x}_3 = 50;$$
$$\mathrm{x}_2 + \mathrm{x}_4 = 40;$$
$$2\mathrm{x}_1 + \mathrm{x}_2 + \mathrm{x}_5 = 80;$$
$$\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2 \geq 0;$$
$$-\mathrm{F} = -5\mathrm{x}_1 - 3\mathrm{x}_2 \rightarrow \min \qquad (27)$$

1 этап. Составим симплекс-таблицу. В таблице столько строчек, сколько в системе ограничений равенств, а столбцов такое же количество, сколько и свободных переменных. Заполняем первый столбец базисными переменными, оставшиеся переменные вносим в верхнюю строку таблицы. Строка, которая внизу называется индексной, в нее записываем коэффициенты, которые были получены при переменных в целевой функции. В нижнем правом углу изначально пишется 0, при условии, что нет свободного члена в функции; но если он есть, то нужно записать его с противоположным знаком. значение целевой функции будет в нижнем правом углу.

Система ограничений приведена в таблице 3.2.

Таблица 3.2 - Общий вид платежной матрицы матричной игры

Базисные	$-\mathrm{x}_1$	$-\mathrm{x}_2$	Свободные
x_3	1	0	50
x_4	0	1	40
x_5	2	1	80
-F	-5	-3	0

2 этап. Проверка на оптимальность опорного плана.

Данной опорный план соответствует таблице 3.4:

$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, 0, 50, 40, 80)$.

Переменные x_1, x_2 равны 0; $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ и они являются свободными. А переменные x_3, x_4, x_5, принимающие значения $x_3 = 50$, $x_4 = 40$, $x_5 = 80$ – являются свободными. Значение целевой функции: $-F = - 5x_1 - 3x_2 = -5 \cdot 0 - 3 \cdot 0 = 0$.

Просматриваем строку целевой функции F, которая является индексной, чтобы узнать будет ли данный опорный план оптимальным

Возможные ситуации.

1.Если нет отрицательных элементов в индексной F-строке. Это значит, что данный план оптимален, и решение задачи можно выписать. Число, из нижнего правого угла взятое с противоположным знаком будет оптимальным значением целевой функции. Переходим к этапу номер 4.

2.В индексной строке есть минимум один отрицательный элемент. В столбце этого элемента нет положительных. Следовательно, целевая функция $F \to \infty$ неограниченно убывает.

3. Если в индексной строке имеется отрицательный элемент, в столбце которого в наличии минимум один положительный, то происходит переход к 3 этапу. Пересчитывается таблица, для совершенствования опорного плана.

3 этап. Улучшение опорного плана.

Возьмем наибольший по модулю из элементов с отрицательным знаком индексной F-строки, назовем соответствующий ему столбец разрешающим и пометим его в нашу таблицу. Чтобы выбрать разрешающую строку, вычисляем отношения элементов столбца свободных членов только к положительным элементам разрешающего столбца. Выбрать из полученных отношений минимальное. Соответствующий элемент, на котором достигается минимум, называется разрешающим. Будем выделять его квадратом.

В нашем примере, $\min \frac{50}{1}; \frac{80}{2} = 40$, элемент 2 - разрешающий. Строка, соответствующая этому элементу, тоже называется разрешающей (табл. 3.3).

Таблица 3.3 - Система ограничений

Базисные	$-x_1$	$-x_2$	Свободные
x_3	1	0	50
x_4	0	1	40
x_5	$\boxed{2}$	1	80
-F	-5	-3	0

Выбрав разрешающий элемент, делаем перечет таблицы по правилам:

1. В новой таблице таких же размеров, что и ранее, переменные разрешающей строки и столбца меняются местами, что соответствует переходу к новому базису. В нашем примере: x_1 входит в базис, вместо x_5, которая выходит из базиса и теперь свободная (табл. 3.6).

2. На месте разрешающего элемента 2 записываем обратное ему число $\frac{1}{2}$.

3. Элементы разрешающей строки делим на разрешающий элемент.

4. Элементы разрешающего столбца делим на разрешающий элемент и записываем с противоположным знаком.

5. Чтобы заполнить оставшиеся элементы таблицы 3.4, осуществляем пересчет по правилу прямоугольника (рис. 3.1). Пусть мы хотим посчитать элемент, стоящий на месте 50.

Таблица 3.4 - Система ограничений

Базисные	$-x_1$	$-x_2$	Свободные
x_3	$-\frac{1}{2}$	$-$	$-$
x_4	0	$-$	$-$
x_5	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	40
-F	$\frac{5}{2}$	$-$	$-$

Соединяем этот элемент мысленно с разрешающим, находим произведение, вычитаем произведение элементов, находящихся на другой диагонали получившегося прямоугольника. Разность делим на разрешающий элемент.

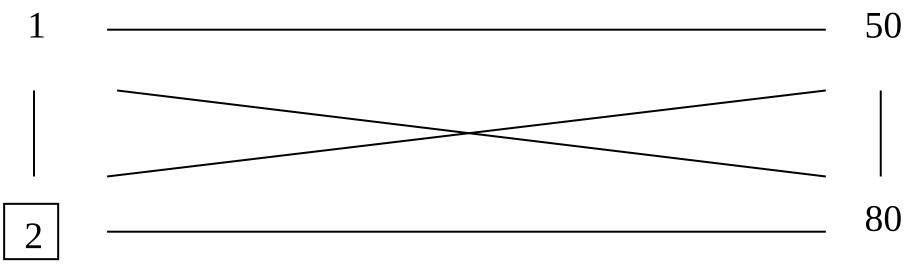

Рисунок 3.1 - Пересчет по правилу прямоугольника

Итак,.$\frac{50-2-80-1}{2} = 10$. Записываем 10 на место, где было 50. Аналогично: $\frac{0-2-1-1}{2} = -\frac{1}{2}$, $\frac{1-2-0-1}{2} = 1$, $\frac{-3-2-1+5}{2} = -\frac{1}{2}$, $\frac{2-40-0-80}{2} = 40$, $\frac{0-2-80+5}{2} = 200$.

Имеем новую таблицу 3.5, базисными переменными теперь являются переменные $\{x_3, x_4, x_1\}$. Значение целевой функции стало равно -200, т.е. уменьшилось. Чтобы проверить данное базисное решение на оптимальность надо перейти опять ко II этапу. Процесс, очевидно, конечен, критерием остановки являются пункт 1 и 2 II этапа.

Таблица 3.5 - Система ограничений

Базисные	$-x_5$	$-x_2$	Свободные
x_3	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	10
x_4	0	$\boxed{1}$	40
x_1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	40
-F	$\frac{5}{2}$	$-\frac{1}{2}$	200

Проверим индексную строку и, увидев в ней отрицательный элемент $-\frac{1}{2}$, назовем соответствующий ему столбец разрешающим и, согласно III этапу, пересчитаем таблицу. Составив отношения и выбрав среди них минимальное min $\frac{40}{1};\frac{40}{1/2} = 40$, определили разрешающий элемент 1. теперь пересчет осуществляем согласно правилам 2-5.

Таблица 3.6 - Система ограничений

Базисные	$-x_5$	$-x_4$	Свободные
x_3	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	30
x_2	0	1	40
x_1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	20
-F	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	220

Так как в индексной строке отсутствуют отрицательные элементы, то базисный план оптимален.

4 этап. Выписывание оптимального решения.

Решение задачи примет следующий вид, если симплекс-метод остановился соответственно 1 пункта 2 этапа. Значения столбца свободных членов принимают базисные переменные. В данном примере $x_3 = 30$, $x_2 = 40$, $x_1 = 20$. Свободные переменные равны 0, $x_5 = 0$, $x_4 = 0$. Целевая функция соответствует последнему элементу столбца свободных членов с противоположным знаком: -F = -220 F = 220. В данном случае функция исследовалась на min, и первоначально F max и, следовательно, знак поменялся дважды. Теперь x* = (20, 40, 30, 0, 0), F* = 220. Итог решения задачи:

Прибыль будет максимальной в размере 220 руб., если в плане производства будет включено 20 изделий типа A и 40 изделий типа B.

В результате определяются значения целевых функций (для обоих игроков эти значения совпадают), а также значения переменных x_i и y_i.

Величина V * определяется по формуле:

$$V^* = 1/z \tag{28}$$

Значение вероятности выбора стратегий определяются

Для игрока А:

$$P_i = x_i V^* \qquad (29)$$

И для игрока В:

$$q_i = y_i V^* \qquad (30)$$

Для определения цены игры V от величины V * необходимо вычесть число K [15].

3.2. Алгоритм работы программы и интерфейс

Написанная программа позволяет определить цену и оптимальные стратегии игроков матричной игры, заданной платежной матрицей m x n.

Входные данные: m - количество строк матрицы, n - количество столбцов матрицы, платежная матрица размерностью m x n. Есть возможность автозаполнение случайными числами от -10 до +10.

Выходные данные: верхняя и нижняя цена игры, общая цена игры v, вероятности применения каждой стратегии игрока А, для получения им максимального выигрыша, вероятности применения каждой стратегии игрока В, для получения им минимального проигрыша.

Алгоритм работы программы:

1. Находим верхнюю и нижнюю цены игры (минимакс и максимин).

2. Если верхняя и нижняя цена игры равны, то существует седловая точка A_{ij}, тогда стратегии A_i и B_i будут чистыми оптимальными стратегиями игры.

3. Если седловой точки не существует, то выполняем исключения невыгодных стратегий, в результате чего уменьшается размерность матрицы.

4. Находим минимальный элемент матрицы. Если он отрицательный, то поочередно добавляем его абсолютное значение к каждому элементу матрицы.

5. Рассматриваем полученную матрицу, как матрицу коэффициентов системы ограничений задачи линейного программирования и находим решение этой задачи и двойственной к ней с помощью симплекс-метода.

6. Находим цену матричной игры и вероятности применения каждой стратегии.

7. Выводим результат.

В разработанной программе используется Model-View-Controller это схема разделения интерфейса и управляющей логики на три отдельных компонента: модель, представление и контроллер — таким образом, что модификация каждого компонента может осуществляться независимо.

- Модель (Model) предоставляет данные и реагирует на команды контроллера, изменяя свое состояние.
- Представление (View) отвечает за отображение данных модели пользователю, реагируя на изменения модели.
- Контроллер (Controller) интерпретирует действия пользователя, оповещая модель о необходимости изменений.

Схема проектируемой программы представлена на рисунке 3.2

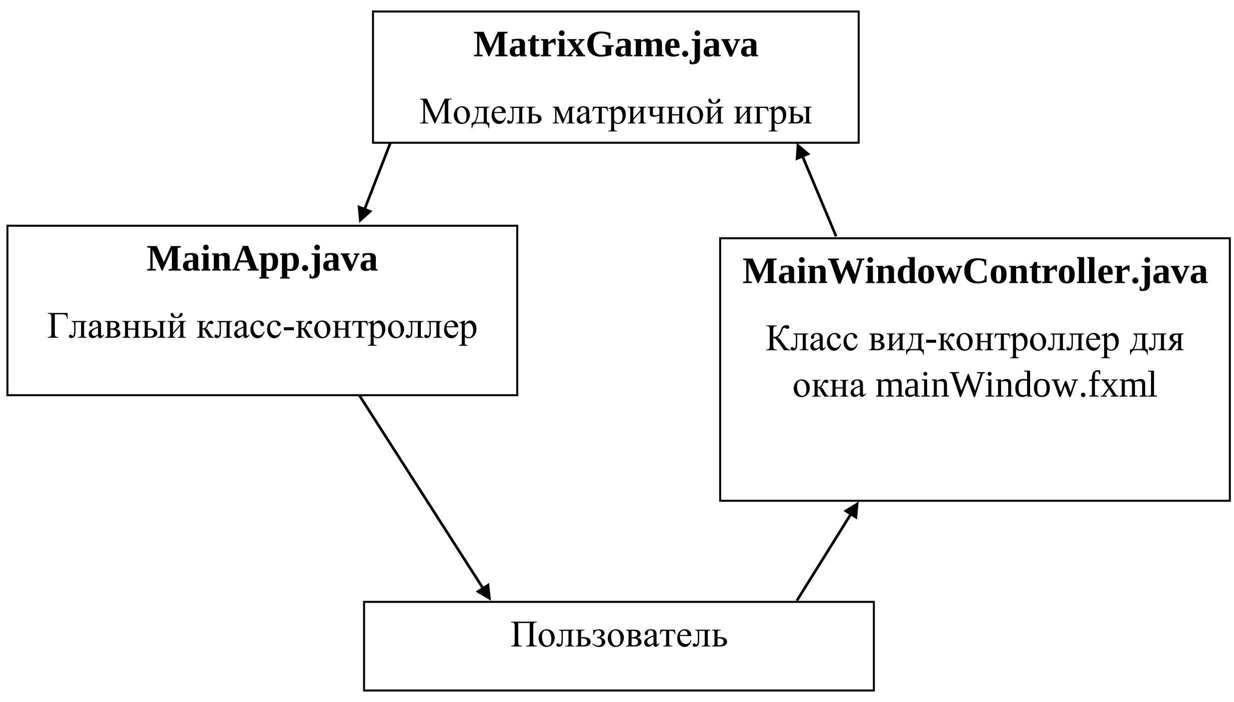

Рисунок 3.2 - Схема проектируемой программы

Интерфейс программы представлен на рисунке 3.3.

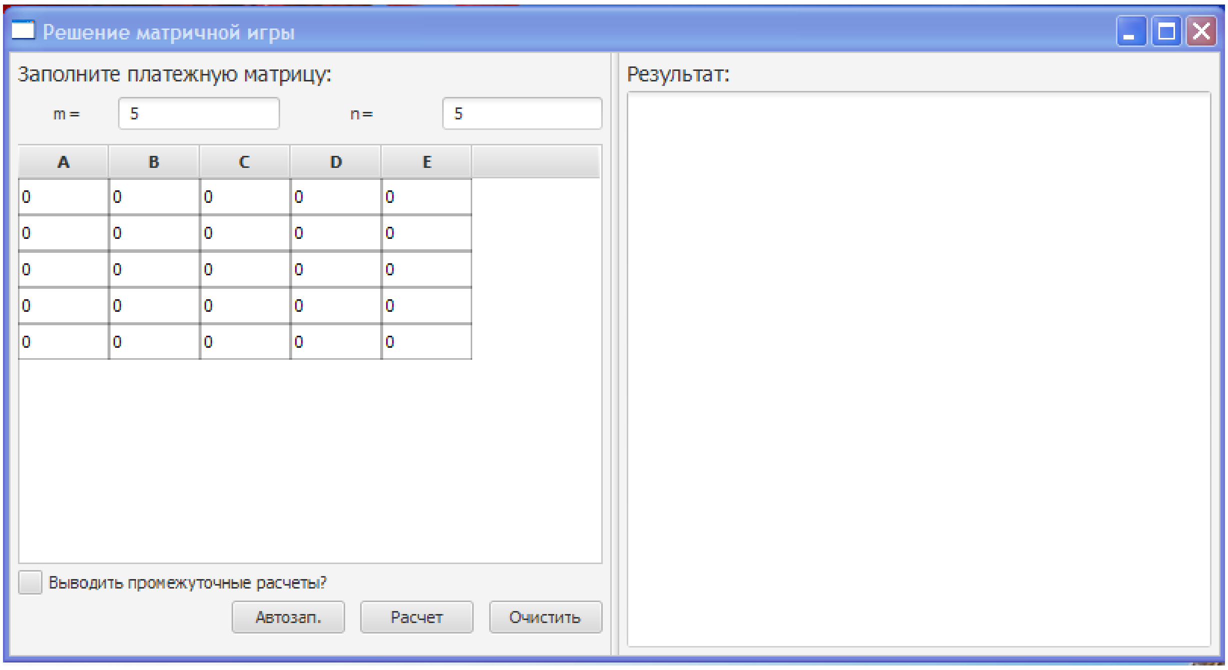

Рисунок 3.3 - Интерфейс программы

При загрузке формируется матрица с размерностью [5], в программе предусмотрена возможность изменять размерность матрицы (рис. 3.4).

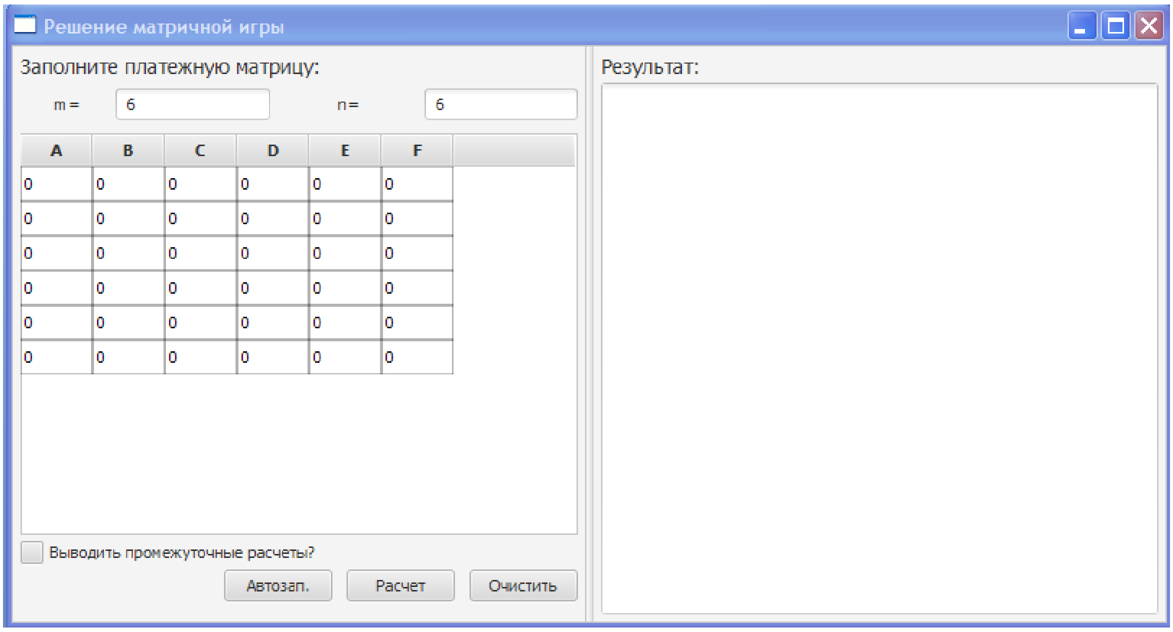

Рисунок 3.4 - Изменение количества элементов матрицы

Заполнять элементы матрицы можно с помощью клавиатуры в ручную, также с помощью кнопки «Автозаполнение» - которая случайным образом заполняет всю таблицу матрицы числовыми значениями (рис. 3.5)

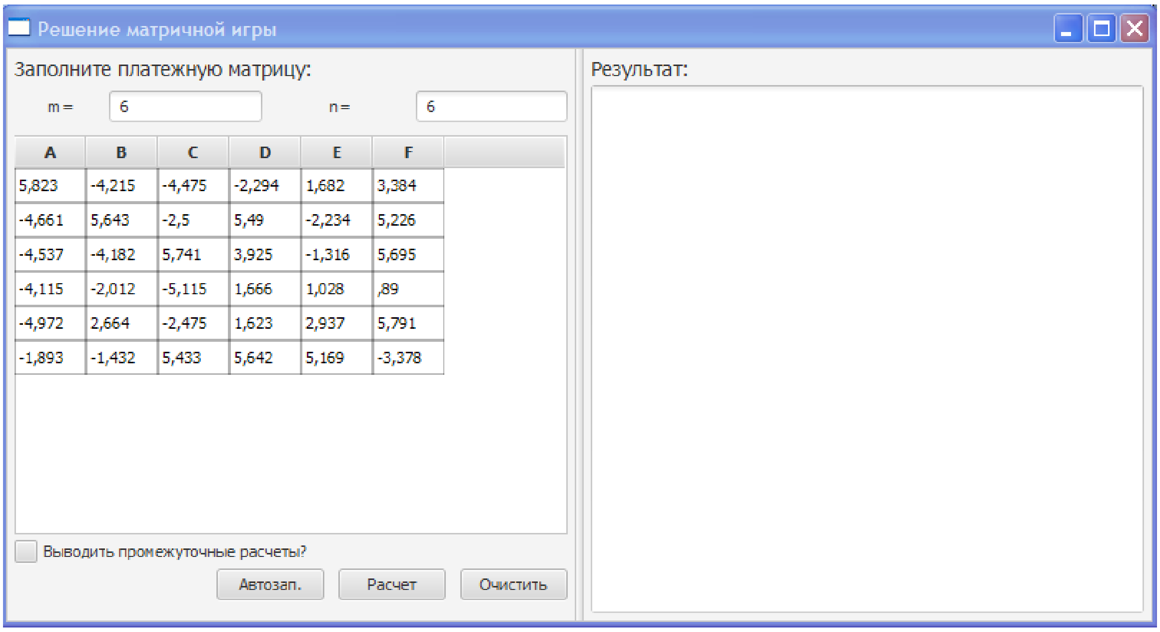

Рисунок 3.5 - Заполнение матрицы числовыми значениями

С помощью кнопки «Расчет» находим цену и оптимальные стратегии игроков матричной игры, заданной платежной матрицей (рис. 3.6)

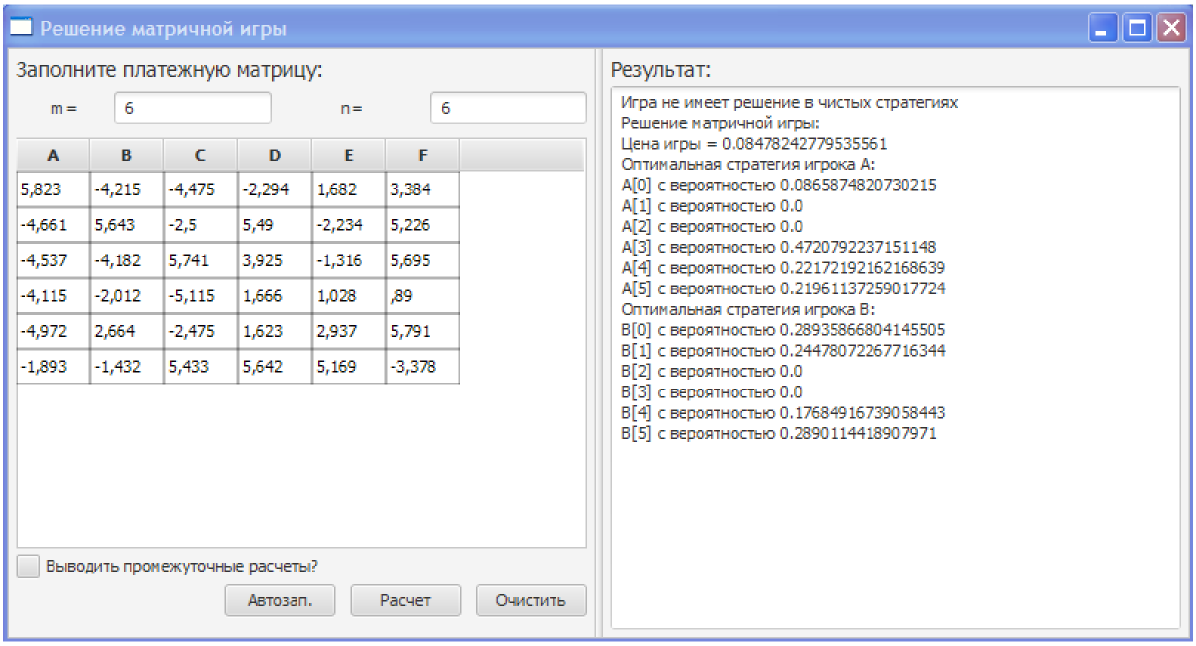

Рисунок 3.6 - Результат выполнения программы

Установив галку «Выводить промежуточные результаты» - выводятся на экран все промежуточные значения вычисления программы (рис. 3.7).

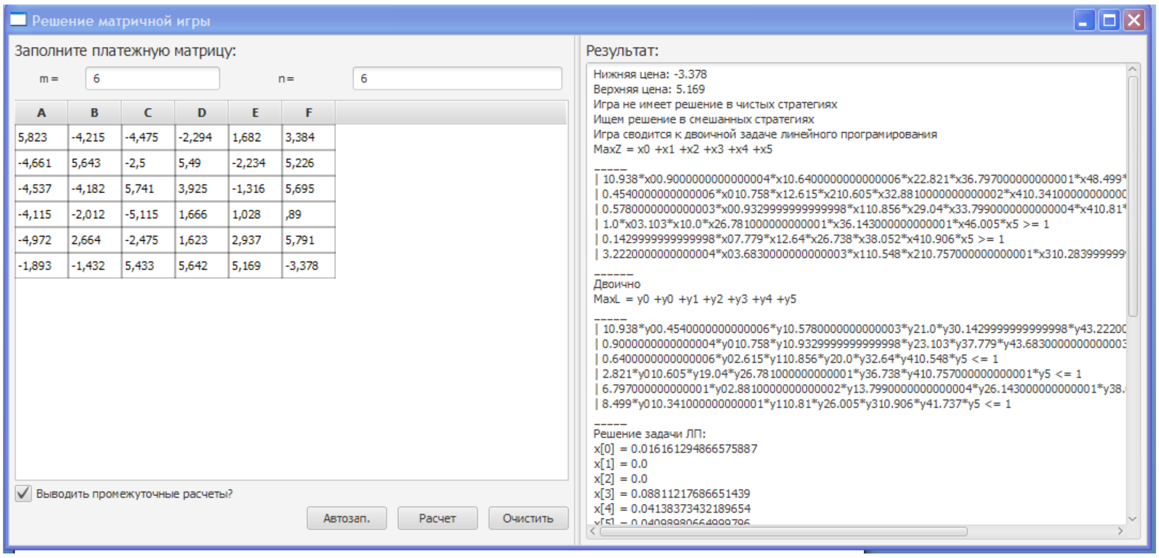

Рисунок 3.7 - Результат выполнения программы с промежуточными результатами.

По итогам третей главы делаем выводы:

- В алгоритме решения игры, реализованного в программе, применяется симплекс метод, так как каждая матричная игра сводится к паре симметричных двойственных задач линейного программирования. Симплекс-метода позволяет найти оптимальную стратегию игроков и цену игры.
- Алгоритм работы программы находит верхнею и нижнею цены игры, общую цену игры. Вероятность применения каждой стратегии первого игрока, для получения им максимального выигрыша. А так же вероятность применения стратегий второго игрока, для получения им минимального проигрыша. Интерфейс программы визуально легок для восприятия и практичен в использовании.
- Данная программа-анализатор находит цену и оптимальные стратегии игроков матричной игры. Она планируется применяться в сфере маркетинга для более быстрого принятия решения при выборе оптимальной стратегии.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Игровой подход достаточно успешно применяется для анализа и интерпретации ряда конфликтных ситуаций в экономических процессах и явлениях.

Игровая модель описывает конфликтную ситуацию конкурентных сторон, при которой исход конфликта выражается в выигрыше или предпочтении. В выпускной квалификационной работе игровой подход использован для решения задачи маркетинга инноваций.

В выпускной квалификационной работе были изучены методы нахождения решений матричных игр и процесс сведения матричной игры к задаче линейного программирования, решаемой симплекс-методом. Использование симплекс-метода позволяет находить оптимальную стратегию игроков и цену игры, так как каждая матричная игра сводится к паре симметричных двойственных задач линейного программирования.

Практическим результатом исследования выбранной темы стало написание программы-анализатора, которая находит цену игры и оптимальные стратегии игроков матричной игры, заданной платежной матрицей n x m. Данная программа-анализатор находит цену и оптимальные стратегии игроков матричной игры. Интерфейс программы визуально легок для восприятия и практичен в использовании. Она планируется применяться в сфере маркетинга для более быстрого принятия решения при выборе оптимальной стратегии.

Итак, в бакалаврской работе был рассмотрен круг вопросов, связанных с реализацией игрового подхода в некоторых игровых задачах. В результате проделанной работы были достигнуты цели посредством решения поставленных задач.

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Научная и методическая литература

1. Васин А. А. Исследование операций./ А. А. Васин, П. С. Краснощеков, В. В. Морозов – М. : Издательский центр «Академия», 2008. – 464 с.

2. Васин А. А. Теория игр и модели математической экономики./ А. А. Васин, В.В. Морозов. – М. : МАКС Пресс, 2005. – 125 с.

3. Воробьев Н. Н. Теория игр для экономистов и кибернетиков. — М. : Наука, 1985. — 272 с.

4. Гадельшина Г. А. Введение в теорию игр: учебное пособие / Г. А. Гадельшина, А.Е. Упшинская, И. С. Владимирова. — КНИТУ, 2014. — 112 с.

5. Доманский В. К. Теоретико-игровая модель биржевых торгов: стратегические аспекты формирования цен на фондовых рынках. Журнал Новой экономический ассоциации. / В. К. Доманский, В. Л. Крепс – 2011. – Т. 11. – С. 39–62.

6. Доманский В. К. Игры торгов несколькими активами / Математическая Теория Игр и её Приложения./ В. К. Доманский, В. Л. Крепс – 2014. – Т. 6, № 3. – С. 32–53.

7. Доманский В. К. Многошаговые торги акциями и повторяющиеся игры N лиц с неполной информацией // Теория вероятностей, случайные процессы, математическая статистика и приложения. Труды международной научной конференции./ В. К. Доманский, В. Л. Крепс – Минск : «Издательский центр БГУ», 2008. – С. 82–88.

8. Дюбин Г. Н. Введение в прикладную теорию игр. / Г. Н. Дюбин, В. Г. Суздаль — М.: Наука, 1981 — 336 с.

9. Карлин С. Математические методы в теории игр, программировании и экономике. — М. : Мир, 1964.

10. Костевич Л. С. Математическое программирование. — М: Новое знание, 2003. — 424 с.

11. Кремер Н. Ш. Высшая математика для экономистов. — М.: Экономика, 2010. — 351 с.

12. Крепс В. Л. Повторяющиеся игры, моделирующие биржевые торги, и возвратные последовательности // Изв. РАН. Теория и системы управления. – 2009. — № 4. – С. 109–120.

13. Кузнецов Ю. Н. Математическое программирование. / Ю. Н. Кузнецов, В. И. Кузубов, А. В. Волощенко. — М.: Высш. шк., 1980. — 302 с.

14. Лемешко Б. Ю. Теория игр и исследование операций. — НГТУ, 2013. — 167 с.

15. Моисеев Н. Н. Математические задачи системного анализа. — М. : Наука, 1981. — 488 с.

16. Протасов И. Д. Теория игр и исследование операций. — М. : Гелиос АРВ, 2003. — 368 с.

17. Петросян Л. А. Теория игр: учебное пособие. / Л.А. Петросян, Н.А. Зенкевич, Е.А. Семина.— М. : Высшая школа, 1998. — 304 с.

18. Сандомирская М. С., Доманский В. К. Решение одношаговой игры биржевых торгов с неполной информацией // Математическая теория игр и её приложения./ М. С., Сандомирская В. К. Доманский. – 2012. – Т. 4, № 1. – С. 32–54.

19. Таха Х. А. Введение в исследование операций. — М. : Вильямс, 2005. — 912 с.

20. Шелехова Л. В. Теория игр в экономике: учебное пособие. — М. : Директ-Медиа, 2015. — 119 с.

Литература на иностранном языке

21. Aumann R. J. Game theoretic of incomplete information: the zero-sum extensive case // Report of the U.S. Arms Control and Disarmament Agency ST-143./ R. J., Aumann M. Maschler – Washington, D.C., 1996. – Chap. III. Pp. 37–116.

22. Aumann R. J.,Repeated games with Incomplete Information. / R. J. Aumann, M. B. Maschler – Cambridge, Mass.: The MIT Press, 2013.

23. Aumann R. J., Repeated games of incomplete information: an approach to the non-zero sum case // Report of the U.S. Arms Control and Disarmament Agency ST-143. / R. J. Aumann, M. B. Maschler, R. E.Stearns– Washington, D.C., 1996. – Chap. IV. Pp. 117–216.

24. Aumann R. J., Hart S. Bi-convexity and bi-martingales // Israel Journal of Mathematics. – 1997. – Vol. 54, no. 2. – Pp. 159–180.

25. Gibson R., Game Theory for Applied Economists. – Princeton : Princeton University Press, 1992. – 288 p.

26. Marino A., De Meyer B. Continuous versus Discrete Market Games // Cowles Foundation Discussion Paper No. 1535. – 2005.

27. Mertens J. F., Solan S., Zamir S. Game theory./ J. F. Mertens, S. Solan S. Zamir. – Cambridge : Cambridge University Press, 2015.

28. Osborne M.J. An Introduction to Game Theory. – Oxford University: Oxford University Press – 2003.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Листинг кода программы

Основной алгоритм программы реализован в модуле MatrixGame.java:

```
package ru.matrixgame.model;
import org.controlsfx.control.spreadsheet.GridBase;
/**
 * Модель матричной игры
 *
 */
public class MatrixGame {
	//Максимальная размерность матрицы
	private static final int nn = 550;
	//Размерность матрицы
	private int n, m;
	//Переменные для вычисления максимиса и минимакса
	private int maxj, mini;
	private double min, max;
	private double[] mins, maxs;
	//Переменные для вычисления минимально значения матрицы
	private double minA;
	//Стоимость игры
	private double v;
	//Неизвестные переменные уравнения
	private double[] xx = new double[nn];
	private double[] yy = new double[nn];
	//Вероятности
	private double[] p = new double[nn];
	private double[] q = new double[nn];
	//Матрица
	private double[][] matrixA = new double[nn][nn];
```

```
//Дополнительная матрица для расчетов
private double[][] matrixAd = new double[nn][nn];
//Главный метод расчета
public String handle(GridBase grid, boolean calculation) {
    StringBuilder str = new StringBuilder();
    //Получаем матрицу из таблицы
    m = grid.getColumnCount();
    n = grid.getRowCount();

    for (int i = 0; i < n; i++) {
        for (int j = 0; j < m; j++) {
            Double number =
Double.valueOf(grid.getRows().get(i).get(j).getText().replace(',', '.'));
            matrixA[i][j] = number;
        }
    }
    //Расчитываем минимакс и максимин
    minimax();
    if (calculation) {
        str.append("Нижняя цена: " + String.valueOf(min) + "\n");
        str.append("Верхняя цена: " + String.valueOf(max) + "\n");
    }
    //Проверяем возможность седловой точки
    if (max == min) {
        v = matrixA[mini][maxj];
        p[mini] = 1;
        q[maxj] = 1;
        str.append("Игра имеет решение в чистых стратегиях:\n");
        str.append("Цена игры = " + String.valueOf(min) + "\n");
        str.append("Оптиальная стратегия игрока A - A" + mini + "\n");
```

```
            str.append("Оптимальная стратегия игрока B - B" + maxj +
"\n");
        }
        //Седловой точки нет
        else {
            str.append("Игра не имеет решение в чистых стратегиях\n");
            if (calculation) str.append("Ищем решение в смешанных
стратегиях\n");

            //Расчитываем минимальные значения матрицы и добавляем
его ко всем елементам
            minA = matrixA[0][0];
            for (int i = 0; i < n; i++) {
                for (int j = 0; j < m; j++) {
                    if (matrixA[i][j] < minA) {
                        minA = matrixA[i][j];
                    }
                }
            }
            for (int i = 0; i < n; i++) {
                for (int j = 0; j < m; j++) {
                    matrixA[i][j] += Math.abs(minA);
                }
            }
            //Решаем X
            for (int i = 0; i < m; i++) {
                for (int j = 0; j < n; j++) {
                    matrixAd[i][j] = matrixA[i][j];
                }
            }
            for (int i = 0; i < m; i++) {
```

```
        matrixAd[i][n] = 1;
    }
    trace(matrixAd, m, n + 1);
    for (int k = 0; k < m; k++) {
        double z = matrixAd[k][k];
        for (int i = 0; i < n + 1; i++) {
            matrixAd[k][i] /= z;
        }
        for (int i = 0; i < m; i++) {
            if (i != k) {
                double x = -matrixAd[i][k];
                for (int j = 0; j < n + 1; j++) {
                    matrixAd[i][j] += matrixAd[k][j] * x;
                }
            }
        }
    }
    //trace(matrixAd, m, n + 1);
    for (int i = 0; i < m; i++) {
        xx[i] = matrixAd[i][n] < 0 ? 0 : matrixAd[i][n];
    }
    //Решаем Y
    for (int i = 0; i < m; i++) {
        for (int j = 0; j < n; j++) {
            matrixAd[i][j] = matrixA[j][i];
        }
    }
    for (int i = 0; i < m; i++) {
        matrixAd[i][n] = 1;
    }
```

```
trace(matrixAd, m, n + 1);
for (int k = 0; k < m; k++) {
	double z = matrixAd[k][k];
	for (int i = 0; i < n + 1; i++) {
		matrixAd[k][i] /= z;
	}
	for (int i = 0; i < m; i++) {
		if (i != k) {
			double x = -matrixAd[i][k];
			for (int j = 0; j < n + 1; j++) {
				matrixAd[i][j] += matrixAd[k][j] * x;
			}
		}
	}
}
//trace(matrixAd, m, n + 1);
for (int i = 0; i < n; i++) {
	yy[i] = matrixAd[i][n] < 0 ? 0 : matrixAd[i][n];
}
double mx = 0;
for (int i = 0; i < m; i++) {
	mx += xx[i];
}
double my = 0;
for (int i = 0; i < n; i++) {
	my += yy[i];
}
//Расчет вероятностей
double maxz = mx > my ? mx : my;
v = Math.abs(mx - my);
```

```
for (int i = 0; i < m; i++) {
    p[i] = xx[i] / mx;
}
for (int i = 0; i < n; i++) {
    q[i] = yy[i] / my;
}
//Вывод результатов
if (calculation) {
    str.append("Игра сводится к двоичной задаче линейного программирования\n");
    str.append("MaxZ = x0 ");
    for (int i = 1; i < m; i++) {
        str.append("+x" + i + " ");
    }
    str.append("\n_____\n");
    for (int i = 0; i < n; i++) {
        str.append("| " + String.valueOf(matrixA[i][0]) + "*x0");
        for (int j = 1; j < m; j++) {
            str.append(String.valueOf(matrixA[i][j]) + "*x" + j);
        }
        str.append(" >= 1\n");
    }

    str.append("______\n");
    str.append("Двоично\n");
    str.append("MaxL = y0 ");
    for (int i = 0; i < n; i++) {
        str.append("+y" + i + " ");
    }
```

```
                str.append("\n_____\n");
                for (int j = 0; j < m; j++) {
                    str.append("| " + String.valueOf(matrixA[0][j]) +
"*y0");
                    for (int i = 1; i < n; i++) {
                        str.append(String.valueOf(matrixA[i][j]) + "*y"
+ i);
                    }
                    str.append(" <= 1 \n");
                }
                str.append("_____\n");

                str.append("Решение задачи ЛП:\n");
                for (int i = 0; i < m; i++) {
                    str.append("x[" + i + "] = " + xx[i] + "\n");
                }
                for (int i = 0; i < n; i++) {
                    str.append("y[" + i + "] = " + yy[i] + " \n");
                }
                str.append("MaxZ = MaxL = " + maxz + "\n");
            }
            str.append("Решение матричной игры:\n");
            str.append("Цена игры = " + String.valueOf(v) + "\n");
            str.append("Оптимальная стратегия игрока A:\n");

            for (int i = 0; i < grid.getRowCount(); i++) {
                str.append("A[" + i + "] с вероятностью " +
String.valueOf(p[i]) + "\n");
            }
            str.append("Оптимальная стратегия игрока B:\n");
            for (int i = 0; i < grid.getColumnCount(); i++) {
```

```
                    str.append("B[" + i + "] с вероятностью " +
String.valueOf(q[i]) + "\n");
                }


            }
            return str.toString();
        }
        //Метод для отладки
        private void trace(double[][] matrix, int m, int n) {
            for (int i = 0; i < m; i++) {
                for (int j = 0; j < n; j++) {
                    System.out.print(matrixAd[i][j]);
                    System.out.print(",");
                }
                System.out.println();
            }
            System.out.println("--------------------");
        }
        //Расчет минимакса и максимина
        private void minimax() {
            mins = new double[n];
            mini = 0;
            for (int i = 0; i < n; i++) {
                mins[i] = matrixA[i][0];
                for (int j = 0; j < m; j++) {
                    if (matrixA[i][j] < mins[i]) {
                        mins[i] = matrixA[i][j];
                    }
                }
                if (mins[i] > mins[mini]) {
```

```
                    mini = i;
                }
            }
            min = mins[mini];

            maxs = new double[m];
            maxj = 0;
            for (int j = 0; j < m; j++) {
                maxs[j] = matrixA[0][j];
                for (int i = 0; i < n; i++) {
                    if (matrixA[i][j] > maxs[j]) {
                        maxs[j] = matrixA[i][j];
                    }
                }
                if (maxs[j] < maxs[maxj]) {
                    maxj = j;
                }
            }
            max = maxs[maxj];
        }
}
```

Программа написана в среде разработке Eclipse.