МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Тольяттинский государственный университет»

Институт математики, физики и информационных технологий
(наименование института полностью)

Кафедра «Алгебра и геометрия»
(наименование кафедры)

44.04.01 «Педагогическое образование»
(код и наименование направления подготовки, специальности)

«Математическое образование»
(направленность (профиль)/специальность)

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

на тему **«ПРОЕКТИРОВАНИЕ ЧИСЛОВОЙ СОДЕРЖАТЕЛЬНО-МЕТОДИЧЕСКОЙ ЛИНИИ В УГЛУБЛЁННОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ШКОЛЫ»**

Студент А.Ю. Шемякина ____________

Научный руководитель д.п.н., профессор Р.А. Утеева ____________

Руководитель программы д.п.н., профессор Р.А. Утеева ____________

«_____»________ 2017 г.

Допустить к защите

Заведующий кафедрой д.п.н., профессор Р.А. Утеева ____________

«_____»___________2017 г.

Тольятти 2017

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Концепция развития математического образования в Российской Федерации [41] предполагает, что математическое образование должно: дать возможность каждому обучающемуся получить такой уровень математической подготовки, который будет соответствовать его образовательным запросам.

На наш взгляд, дифференциация как внешняя, так и внутренняя, может помочь реализовать тезисы Концепции. *Внутренняя дифференциация* предполагает деление класса обучающихся на группы, в зависимости от уровня подготовки. *Внешняя дифференциация* – углубленное изучение курса математики внутри одного класса всеми обучающимися. За счет изменения акцентов содержания углубленное изучение наиболее полно учитывает интересы, склонности и способности обучающихся, что позволяет им выстроить собственную профессиональную траекторию.

Углубленный курс математики предполагает расширение и углубление содержательно-методических линий школьного курса математики. В настоящий момент выделяют *следующие линии*: числовую, функциональную (функционально-графическую), тождественных преобразований, уравнений и неравенств, измерения величин, геометрических фигур, геометрических преобразований, векторов и др. Естественно, каждая из этих линий связана с другими, но *числовая линия* является основой для всех остальных содержательно-методических линий ввиду того, что связана с основополагающим понятием математики – числом.

Однако числовая линия в школьном курсе математики не представлена в полном объёме, что делает невозможным обоснование некоторых понятий школьного курса математики (показательной функции, непрерывности функций, площади прямоугольника и др.).

В свою очередь, числовая линия содержит в себе множество интересных фактов, изучение которых способствует развитию математического мышления.

Анализ предшествующих диссертационных работ, посвященных проектированию содержательно-методических линий, показал, что они были рассмотрены в аспекте:

- методических особенностей формирования функционально-графической линии курса алгебры в условиях личностно-ориентированного обучения (Тихонова Л.В., 2002);

- интеграции курсов алгебры и геометрии посредством содержательно-методической линии неравенств в классах с углубленным изучением математики (Янущик О.В., 2002);

- построения методологической схемы изучения числовой линии курса математики 5-6 классов (Зубарева И.И., 2008), автор предлагает в качестве основы обучения использовать принцип систематичности и последовательности с позиций психологической теории деятельности;

- методики формирования системы знаний об алгебраических структурах у учащихся общеобразовательных учреждений в процессе углубленного изучения математики (Кочетова И.В., 2008);

- формирования содержательно-методической линии задач с параметрами в курсе математики общеобразовательной школы (Мирошин В.В., 2008);

- визуализации иррациональных чисел в курсе алгебры (Емелин А.В, 2012).

Поднимался вопрос и углубленного изучения математики в работах Кочетовой И.В. (2008), Красникова П.М. (2009), Волковской О.П. (2013), Шулежко О.В. (2013), Барабановой С.Ю. (2014).

Итак, можно констатировать, что вопросы числовой линии в курсе углубленного изучения математики актуальны; рассмотрены различные аспекты числовой содержательно-методической линии, проведен ряд исследований. Однако проектирование числовой содержательно-методической линии в углубленном курсе математики не являлось предметом специальных исследований.

Таким образом, **актуальность** темы исследования обусловлена сложившимися к настоящему времени *противоречиями между необходимостью*: 1) научно-обоснованного изучения числовой линии в углубленном курсе математики и недостаточной разработанностью теоретических основ проектирования содержательно-методической линии; 2) изучения большого объёма теоретического материала, связанного с числовой линией, на углубленном уровне и недостаточной разработанностью системы задач по данной теме.

Указанные противоречия позволили сформулировать **проблему диссертационного исследования:** выявление методических основ проектирования числовой содержательно-методической линии в углубленном курсе математики общеобразовательной школы.

Объект исследования: содержательно-методические линии курса математики общеобразовательной школы.

Предмет исследования: проектирование содержательного компонента методической системы обучения числовой линии в углубленном курсе математики общеобразовательной школы.

Цель исследования заключается в выявлении методических основ проектирования числовой содержательно-методической линии и разработке методики её реализации в условиях углубленного изучения курса математики общеобразовательной школы.

Гипотеза исследования основана на предположении о том, что если при проектировании содержательного компонента методической системы обучения числовой линии в углубленном курсе математики общеобразовательной школы взять за основу технологию организации усвоения понятия действительного числа с помощью соотнесения каждому его этапу соответствующих задач, дифференцированных по трем уровням (базовый, продвинутый и высокий), то она будет способствовать повышению качества математической подготовки старшеклассников.

В соответствии с целью исследования были поставлены следующие **задачи**:

1. Проанализировать место числовой линии в углубленном курсе математики общеобразовательной школы.
2. Рассмотреть содержание числовой содержательно-методической линии в углубленном курсе математики общеобразовательной школы.
3. Проанализировать проведённые исследования и опыт работы учителей по данной теме.
4. Разработать технологию организации усвоения математических понятий и теорем (на примере понятия действительного числа).
5. Составить программу элективного курса «Действительные числа в задачах» для старших классов (профильный уровень).
6. Описать проведение педагогического эксперимента.

Теоретико-методологическую основу исследования составили основные положения теории формирования математических понятий Г.И. Саранцева [66] и концепции уровневой дифференциации обучения математике Р.А. Утеевой [78].

Методы исследования, использованные для решения поставленных задач**:** анализ психолого-педагогической, научной и учебно-методической литературы; изучение, наблюдение и обобщение школьной практики; анализ собственного опыта работы в школе; тестирование школьников; констатирующий и поисковый эксперимент по проверке основных положений исследования.

Основные этапы исследования:

1 семестр (2015/16 уч.г.): анализ педагогических исследований, проведённых по теме диссертации, анализ школьных учебников, нормативных документов (стандартов, образовательных и рабочих программ), анализ опыта работы школы по данной теме.

2 семестр (2015/16 уч.г.): определение методических основ исследования по теме диссертации; выделение схемы изучения понятия действительного числа.

3 семестр (2016/17 уч.г.): разработка технологии организации усвоения математических понятий (на примере понятия действительного числа), разработка элективного курса «Действительные числа в задачах».

4 семестр (2016/17 уч.г.): оформление диссертации, корректировка ранее представленного материала, уточнение аппарата исследования, проведение эксперимента, описание результатов экспериментальной работы, формулирование выводов.

Новизна исследования заключается в том, что нем осуществлен подход к проектированию числовой содержательно-методической линии на основе разработки технологии организации усвоения понятия действительного числа с помощью соотнесения каждому его этапу соответствующих задач, дифференцированных по трем уровням (базовый, продвинутый и высокий).

Теоретическая значимость исследования определяется тем, что в диссертации спроектирован содержательный компонент методической системы обучения числовой линии в углубленном курсе математики общеобразовательной школы.

Практическую значимость составляют:

- технология организации усвоения понятия действительного числа и система задач к ней;

- элективный курс «Действительные числа в задачах».

На защиту выносятся:

1. Содержательный компонент методической системы обучения числовой линии в углубленном курсе математики общеобразовательной школы.

2. Элективный курс «Действительные числа в задачах».

Апробация результатов исследования осуществлялась путём выступлений на: научно-методическом семинаре преподавателей, аспирантов и студентов кафедры (декабрь 2015, июнь 2016, декабрь 2016, май 2017); научной студенческой конференции «Дни науки» Тольяттинского государственного университета (2016, 2017 диплом за 1 место на первом этапе); VIII Международной научной конференции «Математика. Образование. Культура», посвященной 240-летию со дня рождения К.Ф Гаусса (диплом за II место в конкурсе «Моя магистерская диссертация»).

Экспериментальная проверка предлагаемой технологии, программы элективного курса была осуществлена в период производственной, педагогической и преддипломной практик на базе кафедры алгебры и геометрии, НИЛ «Школа математического развития и образования -5+» Тольяттинского государственного университета, а также в период работы учителем математики на базе МБОУ «Гимназия №9» г.о. Тольятти.

Основные результаты исследования отражены в *8 публикациях*, в том числе в 1 статье из журналов, рекомендованных ВАК Министерства образования и науки РФ (в соавторстве) [70, 79, 87, 88, 89, 90, 91, 92].

Магистерская диссертация состоит из введения, двух глав и заключения.

Первая глава, включающая четыре параграфа, посвящена методическим основам проектирования числовой содержательно-методической линии углубленного курса математики общеобразовательной школы. Проведён анализ школьных учебников с точки зрения представления в них темы «Действительные числа»: учебники основного общего образования (для общеобразовательной и углублённой программы) и среднего образования для углублённой программы. Некоторые вопросы в школьных учебниках рассмотрены подробно, например, изучение квадратных корней, иррациональных чисел. Кроме того, в диссертации приведены типы задач, представленные в учебниках. На основании анализа ранее проведенных исследований, учебно-методической литературы, опыта работы учителей математики сделан вывод о том, что тема «Действительные числа» должна изучаться по определённой схеме.

Вторая глава состоит из пяти параграфов, в которых описано проектирование числовой содержательно-методической линии в углубленном курсе математики общеобразовательной школы. В исторической справке о развитии понятия числа приводится три подхода к построению теории действительного числа (Вейерштрасса, Дедекинда, Кантора). Обоснована эффективность применения технологии организации усвоения понятия действительного числа, где каждому выделенному этапу усвоения понятия (за основу взята технология Г.И. Саранцева) поставлена в соответствие трёхуровневая система задач. Представлен разработанный элективный курс «Действительные числа в задачах». Приведено описание педагогического эксперимента и его результатов.

В заключении сформулированы выводы по теме исследования.

Список литературы состоит из 94 наименований.

ГЛАВА I. МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ПРОЕКТИРОВАНИЯ ЧИСЛОВОЙ СОДЕРЖАТЕЛЬНО-МЕТОДИЧЕСКОЙ ЛИНИИ УГЛУБЛЕННОГО ШКОЛЬНОГО КУРСА МАТЕМАТИКИ

§1. Понятие содержательно-методической линии школьного курса математики

Идея построения школьного курса математики на основе содержательно-методических линий была высказана в 50-60 гг. прошлого века В.Л. Гончаровым [21].

С тех пор она успешно реализуются на практике авторами школьных учебников математики с опорой на исторически сложившиеся ведущие линии: *числовую; функциональную; тождественных преобразований; уравнений и неравенств; геометрических величин.* Перечисленные линии в той или иной мере присутствуют в современных учебниках математики (алгебры, геометрии, алгебры и начал математического анализа) 5-11 классов. Так, например, приоритетной в учебниках А.Г. Мордковича [53] является *функционально-графическая линия.* Структура курса математики по УМК Ю.М. Макарычева [62] предполагает сбалансированное развитие основных содержательно-методических линий, их взаимопроникновение и взаимодействие. В УМК С.М. Никольского и др. 5-6 классов [60] выделена как ведущая *арифметическая линия*, предполагающая, что особое внимание обращается на вычислительные действия учеников.

Ю.М. Колягин и др. в книге для учителя [34] рассматривают особенности курса алгебры по учебникам Ш.А. Алимова и др., в котором ведущей линией является *числовая.* С опорой на неё реализуются все остальные содержательно-методические линии: при изложении материала об элементарных функциях рассматриваются только числовые функции; уравнения и неравенства рассматриваются как особого вида числовые соотношения, содержащие неизвестное число; алгоритмы и алгебраические преобразования основываются на известных законах арифметических действий.

Несмотря на то, что понятие содержательно-методической линии является одной из важных категорий методической науки, авторы большинства учебно-методических пособий по теории и методике обучения математике оставляют за их рамками трактовку данного понятия, ограничившись перечислением традиционных линий и раскрытием методических особенностей реализации каждой линии на практике. Исключением является пособие для студентов под редакцией Е.И. Лященко [46], в котором сформулированы методические указания по анализу реализации содержательно-методической линии в школьных учебниках математики:

- определение целей и мотивов изучения линии в каждом классе;
- выделение понятийного аппарата линии;
- указание математических методов реализации линии;
- раскрытие приложений понятий и методов линии;
- определение средств формирования понятий и методов линии;
- разработка системы оценок достигнутых результатов по изучению линии.

Обратимся также к анализу научной литературы с целью выделения различных подходов исследователей к трактовке понятия «содержательно-методические линии» и к проблеме обоснования состава линий.

Большой вклад в дальнейшее развитие идеи о содержательно-методических линиях, высказанной В.Л. Гончаровым, внесли ученые-методисты А.Я. Блох, Е.И. Лященко.

В работе А.Я. Блоха выделен *признак* понятия «содержательно-методическая линия». Это «крупные блоки математического знания и те фрагменты учебного материала, к которым эти блоки особенно удачно применимы с целью их методического изучения» [15].

Е.И. Лященко [47] определила структуру каждой линии, выделив следующие элементы:

а) содержание учебного материала линии (понятия и их определения, утверждения и их обоснование, правила и алгоритмы);

б) формулировка некоторых методических требований к содержанию и последовательности расположения учебного материала (избранная в учебнике трактовка понятий, структура расположения материала и др.);

в) набор математических заданий (характеристика их познавательной и обучающей функции).

Кроме того, Е.И. Лященко также ввела понятие *«содержательно-методологические линии»*, которые в отличие от содержательно-методических, включают в себя фундаментальные понятия и методы. Автор относит к ним линию *математического языка и линию доказательств* [47].

Развитие идей Е.И. Лященко можно увидеть в работе О.И. Плакатиной, в которой обращается внимание на тот факт, что с каждой содержательно-методической линией связаны *специальные методы.* Можно согласиться с автором о том, что «наличие собственного метода может служить критерием для выделения того или иного содержания в соответствующую линию программы» [59]. Автор предлагает также рассмотреть дополнительно две содержательно-методические линии: *линию доказательств и линию математических задач*.

Обзор научно-методической литературы свидетельствует о том, что на современном этапе развития методической науки основное внимание исследователей направлено на обоснование «новых» содержательно-методических линий школьного курса математики, введение которых продиктовано запросами практики. Так, например, Н.М Рогановский [64] на основе критерия знаний, умений и навыков учащихся предлагает другие содержательные линии школьного курса математики:

- *логическую* (формирование системы понятий и фактов путем построения определений и доказательств);

- *формально-оперативную* (выработка навыков тождественных преобразований, решения уравнений и неравенств, исследования свойств функции и т.п.);

- *содержательно - прикладную* (решение текстовых задач, задач с практическим содержанием);

- *вычислительно - графическую* (составление таблиц; построение диаграмм, графиков, использование микрокалькуляторов и т.д.).

Авторы пособия [22], раскрывая гуманитарный потенциал школьного курса математики, выделяют *содержательно-эстетические линии.* В работах А.Г. Мордковича [54], В.В. Мирошина [51], С.И. Дяченко [26] и др. обосновывается целесообразность и необходимость выделения *линии задач с параметрами.*

В исследованиях М.В. Егуповой дано обоснование еще одной содержательно-методологической линии – *линии практических приложений математике в школе* [27]. Автор отмечает, что базовым понятием линии является понятие *математической модели*, а основным методом – *метод математического моделиров*ания.

Интересным, на наш взгляд, является обоснование иной содержательно-методологической линии – *линии экспериментальной математики*, предложенной авторским коллективом под руководством М.В. Шабановой. Базовым понятием линии выбрано понятие *математического эксперимента*, основным методом – *исследовательский* [96].

Можно сделать выводы, что при существующей потребности в обновлении содержания школьного курса математики многие исследователи составляют «новый» перечень содержательно-методических линий, диктуемых потербностями практики, с учетом накопленного отечественного и мирового опыта преподавания математики в школе, делают попытки соотнесения базовых понятий этих линий и основных методов.

§2. Анализ числовой линии в школьных учебниках математики

Рассмотрим, как некоторые вопросы изучения понятия действительного числа представлены в школьных учебниках для общеобразовательных школ.

Понятие квадратного корня

Понятие квадратного корня из числа в учебниках А.Г. Мордковича [52], С.М. Никольского [1] и в учебнике под редакцией С.А. Теляковского [4] определяются одинаково: квадратным корнем из данного числа называют такое число, квадрат которого равен данному числу.

Г.К. Муравин [3] дает следующее **определение**: *корни уравнения* $x^2 = a$ *называются квадратными корнями из числа а.*

В учебных пособиях [1,3,4] разделяются понятия квадратного корня и арифметического квадратного корня. В учебнике Ш.А. Алимова дается только понятие *арифметического квадратного корня.* А.Г. Мордкович [52] вводит понятие *кубического корня.*

Упражнения, связанные с нахождением приближенного значения корня в учебниках [1, 3] представлены заданиями типа:

1. Найдите приближенное значение квадратного корня из числа с точностью до 0,01; 7.

2. Округлите до тысячных значение выражений: $\sqrt{69}$.

В учебных пособиях [6, 17] упражнений связанных с данным вопросом нет.

В учебнике Ш.А. Алимова представлены **задания** такого типа:

Вычислите на микрокалькуляторе с точностью до 0,1:

$$\sqrt{57}+\sqrt{31}-\sqrt{23},\ \sqrt{687+\sqrt{123}},\ \sqrt{\sqrt{35604-\sqrt{28}}},\ \frac{34}{\sqrt{28^2-17^2}}.$$

Понятие иррационального числа

Иррациональное число все авторы определяют одинаково как бесконечную десятичную непериодическую дробь.

Но есть и отличия. С.М. Никольский [1] вводит понятие иррационального числа в 7 классе. Введение основано на сравнении бесконечных периодических десятичных дробей и бесконечных непериодических десятичных дробей, т.е. здесь приводится как факт, что *бесконечная непериодическая десятичная дробь* – иррациональное число. Такого же подхода придерживается Ш.А. Алимов.

А.Г. Мордкович [52] вводит иррациональные числа *на основе неразрешимости уравнения* $x^2 = 5$ *в рациональных числах.*

Каковы источники получения иррациональных чисел? Известно, что рациональные числа изображаются десятичными бесконечными периодическими дробями, иррациональные же могут быть представлены в виде бесконечной непериодической дроби. «Разбиение периодичности» дробей, изображающих рациональные числа, - один из способов построения иррациональных чисел. Другой способ следует из упражнений - извлечение квадратных (кубических) корней из рациональных чисел, не являющихся квадратами (кубами) других рациональных чисел. Первый из способов наводит на мысль, что иррациональных чисел значительно больше, чем рациональных: «разбить периодичность» одной дроби можно многими способами [13, С.9].

В учебниках Г.К. Муравина [3] и под редакцией С.А. Теляковского [4] основой для введения иррациональных чисел служит несоизмеримость длин отрезков (несоизмеримость стороны и диагонали квадрата).

Иррациональность различных чисел доказывается в учебниках [3,4,52] на примерах ($\sqrt{5}$, $\sqrt{2}$ не являются рациональными). Других примеров доказательства иррациональности не приводится.

С.М. Никольский [1] доказательство иррациональности числа $\sqrt{N}$ (где N – натуральное, не являющееся квадратом натурального числа) приводит в 8 классе при изучении темы «Квадратный корень». В учебнике Ш.А. Алимова доказательство иррациональности числа $\sqrt{N}$ не приводится.

В задачнике А.Г. Мордковича [52] приводятся такие **задания**:

1. Докажите, что сумма (произведение) иррациональных чисел $3+2\sqrt{5}$ и $3-\sqrt{20}$ является рациональным числом.

2. Докажите, что сумма (произведение) рационального (отличного от нуля) и иррационального числа есть число иррациональное.

3. Докажите, что на графике функции $y=\sqrt{2}\cdot x$ имеется только одна точка, у которой и абсцисса и ордината – целые числа. Постройте график этой функции.

В учебниках:

- Г.К. Муравина [3] приводятся **упражнения** такого типа:

1. Докажите, что число, квадрат которого равен 5, не является рациональным числом.

2. Известно, что число π, входящие в формулу длины окружности $C=\pi R^2$ и площади круга $S=\pi R^2$, где R – радиус окружности, является иррациональным числом. Докажите, что числа $\sqrt{\pi}$ и $3\sqrt{\pi}$ иррациональные.

- под редакцией С.А. Теляковского [4] и Ш.А. Алимова упражнения на доказательство иррациональности числа отсутствуют.

- в учебном пособии С.М. Никольского [1] представлены **задания** следующего вида:

1. Докажите, что не существует рационального числа, квадрат которого равен $\frac{1}{3}$.

2. Докажите иррациональность числа $\sqrt{12}$.

Понятие действительного числа

Действительные числа во всех учебниках [1,3,4,52] рассматриваются как объединение множества рациональных чисел с множеством иррациональных чисел.

В учебниках А.Г. Мордковича [52] и С.М. Никольского [1] добавляется, что всякое действительное число можно записать в виде десятичной дроби (конечной или бесконечной).

Взаимно однозначное соответствие между множеством действительных чисел и множеством точек координатной прямой рассматривается в учебниках А.Г. Мордковича [52], Ш.А. Алимова и С.М. Никольского.

В задачнике А.Г. Мордковича [52] приводятся следующие **упражнения**:

1. На числовой прямой точками A и B отмечены два из следующих чисел: 1; 3; 2,5; π; $\frac{1}{\pi}$. Какое число соответствует точке A, а какое точке B?

2. На числовой прямой точками C и D отмечены два из следующих чисел: $\sqrt{8}$; $-1{,}2$; $0{,}5\pi$; $-\frac{\pi}{4}$. Какое число обозначено точкой C, а какое – точкой D?

С.М. Никольский предлагает следующие **задания**:

1. Начертите в тетради координатную ось с единичным отрезком в 10 клеток. Укажите на этой оси числа: 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9; -0,1; -0,2; -0,3; -0,4; -0,5; -0,6; -0,7; -0,8; -0,9.

2. Начертите координатную ось и укажите на ней данные числа, выбрав удобный единичный отрезок и положение начала координатной оси:

$$-1\frac{2}{3};\ -2{,}25;\ -1\frac{3}{4};\ -1{,}75;\ -1\frac{5}{12};\ -1\frac{5}{6}.$$

Этапы развития представления о числе в общем виде никто из авторов не приводит.

Итак, определение действительного числа во всех учебниках дается одинаково, но есть существенные различия в способах введения данного понятия. Это связано с различными способами введения *иррациональных чисел.*

Можно выделить два различных подхода к введению понятия иррационального числа:

- *первый* основанный на задаче об извлечении корня (неразрешимость уравнения $x^2 = 5$ в рациональных числах).

- *второй* - на задаче об измерении отрезка (несоизмеримость диагонали квадрата с его стороной)

Первого подхода придерживается А. Г. Мордкович [52], а второй подход характерен для учебников Ю.Н. Макарычева [4] и Г.К. Муравина [3].

До введения понятия действительного числа необходимо систематизировать знания по рациональным числам, а именно, убедиться в том, что учащиеся хорошо усвоили, что каждое рациональное число представимо или в виде конечной десятичной дроби или в виде бесконечной периодической десятичной дроби.

А.Г.Мордкович [52, С.79-80] отмечает, что не всегда различные по записи бесконечные периодические десятичные дроби приводят к разным обыкновенным дробям. Это относится, например, к дробям с девяткой в периоде. Например, для дроби 1,2(9) имеем

$x = 1{,}2999\ldots$

$10x = 12{,}999\ldots$

$100x = 129{,}999$

―――――――――

$90\,x = 129 - 12 = 117;\ \ x = 117/90 = 1{,}3 = 1{,}3000\ldots$.

Итак, 1,2(9) = 1,3 (0).

Аналогично можно сказать, что 2,35(9)=2,36(0); 3,(9) = 4,(0) и т.д.

Другими словами, дробь с девяткой в периоде – это конечная десятичная дробь (или бесконечная с нулем в периоде); для её записи достаточно отбросить всю периодическую часть бесконечной дроби, увеличив при этом на 1 цифру, предшествующую периодической части.

Результаты анализа некоторых школьных учебников приведены в таблицах 1-3.

Таблица 1

Учебники для школ и классов общеобразовательного уровня

	Учебник для 8 класса «Алгебра» под ред. С.А. Теляковского [4]	*Учебное пособие для 8 класса «Алгебра» под ред. А.Н. Тихонова [6]*	*Учебное пособие «Алгебра» для 8 класса автор А.Г. Мордкович [52]*	*Учебник для 8 класса «Алгебра»Г.В. Дорофеев, С.Б. Суворова, Е.А. Бунимович [25]*	*Учебник для 8 класса «Алгебра» Г.К. Муравин, К.С. Муравин, О.В. Муравина [3]*
Рациональные числа и действия над ними:					
Определение	Как обыкновенная дробь	Как обыкновенная дробь	Как обыкновенная дробь	Нет	Как отношение мер двух отрезков
Геометрическое изображение рационального числа	Нет	Нет	Нет	Показано на примере, как изображают (вместе с иррациональными числами)	Нет
Связь обыкновенной и десятичной дроби	Показано на примерах, что обыкновенную дробь можно представить в виде десятичной конечной или бесконечной, сделано замечание, что дробь с периодом 9 получиться не может	Показано на примерах, что обыкновенную дробь можно представить в виде десятичной конечной или бесконечной	Показано на примерах, что обыкновенную дробь можно представить в виде десятичной конечной или бесконечной, отмечается, что десятичные дроби с периодом 9 заменяют дробями с периодом 0	Нет	Показано на примерах, что обыкновенную дробь можно представить в виде десятичной конечной или бесконечной
Правила перевода обыкновенных дробей в десятичные и наоборот	Правила не сформулированы, показано на примерах	Правила не сформулированы, показано на примерах	Правила не сформулированы, показано на примерах	Нет	Правила не сформулированы, показано на примерах

Таблица 1 (продолжение)

	Учебник для 8 класса «Алгебра» под ред. С.А. Теляковского [4]	*Учебное пособие для 8 класса «Алгебра» под ред. А.Н. Тихонова [6]*	*Учебное пособие «Алгебра» для 8 класса автор А.Г. Мордкович [52]*	*Учебник для 8 класса «Алгебра»Г.В. Дорофеев, С.Б. Суворова, Е.А. Бунимович [25]*	*Учебник для 8 класса «Алгебра» Г.К. Муравин, К.С. Муравин, О.В. Муравина [3]*
Иррациональные числа и действия над ними:					
Выполнимость операции, обратной возведению в квадрат	Нет	Нет	Нет	Задача о нахождении стороны квадрата по известной его площади	Нет
Решение уравнения $x^2=a$, где a – рациональное число	Нет	Нет	Графическая интерпретация решения уравнения	Вопрос о нахождении абсцисс графика функции, ордината которых равна a - найденные значения – корни уравнения.	Нет
Определение соизмеримости и несоизмеримости отрезков	Определения нет, с помощью числовой прямой показывают, что отрезки могут быть измерены с помощью данного отрезка	Нет	Нет	Нет	Нет
Соизмеримость диагонали квадрата с его стороной	Геометрически показано, что существует квадрат, стороной которого является диагональ данного единичного квадрата	Нет	Нет	Геометрически показано, что существует квадрат, стороной которого является диагональ данного единичного квадрата	Геометрически показано, что существует квадрат, стороной которого является диагональ данного единичного квадрата

Таблица 1 (продолжение)

	Учебник для 8 класса «Алгебра» под ред. С.А. Теляковского [4]	*Учебное пособие для 8 класса «Алгебра» под ред. А.Н. Тихонова [6]*	*Учебное пособие «Алгебра» для 8 класса автор А.Г. Мордкович [52]*	*Учебник для 8 класса «Алгебра»Г.В. Дорофеев, С.Б. Суворова, Е.А. Бунимович [25]*	*Учебник для 8 класса «Алгебра» Г.К. Муравин, К.С. Муравин, О.В. Муравина [3]*
Отыскание абсциссы точки графика $y=x^2$, ордината которой равна a	Нет	Нет	Нет	Описано нахождение абсцисс после введения понятия иррационального и действительного числа (для введения понятия квадратного корня)	Нет
Определение периодических и непериодических дробей	Определение не сформулировано, на примерах показано, что такое периодическая дробь, что такое период дроби	Определение не приводится, показано на примерах	Определена периодическая дробь, период дроби	нет	Дано определение периодической дроби, периода, показано как такие числа получаются геометрически
Доказательство иррациональности определённого числа	Доказано, что не существует рационального числа, квадрат которого равен 2 (доказательство на основании несократимости дроби)	Нет	Приводится доказательство того, что нет такой обыкновенной дроби, квадрат которой был бы равен 5 как дополнительные сведения	Доказано, что не существует рационального числа, квадрат которого равен 2 (доказательство на основании несократимости дроби)	Доказано, что не существует рационального числа, квадрат которого равен 2 (доказательство на основании несократимости дроби)

Таблица 1 (продолжение)

	Учебник для 8 класса «Алгебра» под ред. С.А. Теляковского [4]	*Учебное пособие для 8 класса «Алгебра» под ред. А.Н. Тихонова [6]*	*Учебное пособие «Алгебра» для 8 класса автор А.Г. Мордкович [52]*	*Учебник для 8 класса «Алгебра»Г.В. Дорофеев, С.Б. Суворова, Е.А. Бунимович [25]*	*Учебник для 8 класса «Алгебра» Г.К. Муравин, К.С. Муравин, О.В. Муравина [3]*
Определение иррационального числа	Нет	Как бесконечная непериодическая дробь	Как бесконечная непериодическая дробь после введения понятия квадратного корня	Определение не приводится, но отмечается, что $\sqrt{2}$ – точное значение числа, а для вычислений используются приближения этого числа	Определения нет, приводится утверждение, что любое иррациональное число записывается в виде бесконечной непериодической десятичной дроби
Геометрическое изображение иррационального числа	Нет	Нет	На координатной прямой отмечают гипотенузу треугольника с катетами 1 и 2	Показано приближенное изображение иррациональных чисел, на примере показано построение на координатной прямой числа $\sqrt{n}$	Нет
Определение арифметических операций	Нет	Нет, отмечается, что практические действия заменяются действиями над их десятичными приближениями	Операции не определяются, делается акцент на то, что любая арифметическая операция с рациональными числами приводит к рациональному числу, а операции с иррациональными числами нет	Нет	Нет

Таблица 1 (продолжение)

	Учебник для 8 класса «Алгебра» под ред. С.А. Теляковского [4]	*Учебное пособие для 8 класса «Алгебра» под ред. А.Н. Тихонова [6]*	*Учебное пособие «Алгебра» для 8 класса автор А.Г. Мордкович [52]*	*Учебник для 8 класса «Алгебра»Г.В. Дорофеев, С.Б. Суворова, Е.А. Бунимович [25]*	*Учебник для 8 класса «Алгебра» Г.К. Муравин, К.С. Муравин, О.В. Муравина [3]*
Действительные числа и действия над ними					
Определение действительного числа	Даётся описание множества действительных чисел: к положительным бесконечным десятичным дробям присоединяют противоположные им числа и нуль	Определение не приводится	Определение не приводится	Нет	Определение не приводится, однако утверждается, что бесконечная десятичная дробь является действительным числом
Множество действительных чисел как объединение множеств рациональных и иррациональных чисел	После описания множества действительных чисел отмечается, что бесконечные десятичные дроби могут быть периодическими или непериодическими, то есть множество действительных чисел – объединение рациональных и иррациональных чисел	Утверждается, что множество рациональных и иррациональных чисел образуют множество действительных чисел	Множество рациональных чисел дополняют множеством иррациональных чисел, получают множество действительных чисел. Множество описывают как объединение множеств периодических и непериодических десятичных дробей	Утверждается, то рациональные и иррациональные числа вместе образуют множество действительных чисел	Утверждается, то рациональные и иррациональные числа вместе составляют множество действительных чисел
Определение равенства действительных чисел	Да, как равенство десятичных дробей	Определения не приводятся	Нет	Нет	Нет

Таблица 1 (продолжение)

	Учебник для 8 класса «Алгебра» под ред. С.А. Теляковского [4]	*Учебное пособие для 8 класса «Алгебра» под ред. А.Н. Тихонова [6]*	*Учебное пособие «Алгебра» для 8 класса автор А.Г. Мордкович [52]*	*Учебник для 8 класса «Алгебра»Г.В. Дорофеев, С.Б. Суворова, Е.А. Бунимович [25]*	*Учебник для 8 класса «Алгебра» Г.К. Муравин, К.С. Муравин, О.В. Муравина [3]*
Определение прямых и обратных арифметических операций	Определения нет, отмечается, что можно приближенно выполнять арифметические действия, в практических задачах	Определения не приводятся, но отмечается, что арифметические действия и правила сравнения определяются так, что их свойства оказываются такими же, как и для рациональных чисел	Нет	Определения не даются, но утверждается, что эти действия можно выполнять	Определения не даются, но утверждается, что выполнение этих операций возможно
Свойства арифметических операций действительных чисел	Отмечается, что действия обладают теми же свойствами, что и действия над рациональными числами		Законы арифметических операций	Не формулируются, но утверждается, что законы арифметических действий выполняются	Отмечается, что действия обладают теми же свойствами, что и действия над рациональными числами
Определение сравнения действительных чисел	Определение не даётся, отмечается, что действительные числа сравниваются как десятичные дроби		Отношение $a > b$ определяется с помощью разности чисел, с помощью координатной прямой	Нет	Нет
Взаимно однозначное соответствие между множеством действительных чисел и множеством точек на координатной прямой	Свойство сформулировано, доказательство не приводится, обоснование демонстрируется на примерах		Свойство сформулировано, особое внимание уделяется факту, что множество рациональных чисел заполняет не всю прямую – с помощью геометрической интерпретации	Свойство сформулировано, никакого пояснения к нему не приводится	Нет

Таблица 2

Учебники для школ и классов с углублённым изучением математики в основной школе

	Учебное пособие «Алгебра» для 8 класса автор А.Г. Мордкович, Н.П. Николаев [55]	*Учебник «Алгебра» 7 класс С.М. Никольский и др [1]*	*Учебник «Алгебра» 8 класс Н.Я. Виленкин и др. [2]*
Рациональные числа и действия над ними			
Определение	Как обыкновенная дробь	Как обыкновенная дробь	Как отношение мер двух отрезков
Определение равенства чисел	Нет	Нет	Равенство обыкновенных дробей определяется через произведение
Геометрическое изображение рационального числа	Показано, что обыкновенную дробь можно представить в виде десятичной конечной или бесконечной, отмечается, что десятичные дроби с периодом 9 заменяют дробями с периодом 0	Приводятся примеры изображения	Нет
Геометрическое изображение рационального числа	Показано, что обыкновенную дробь можно представить в виде десятичной конечной или бесконечной, отмечается, что десятичные дроби с периодом 9 заменяют дробями с периодом 0	Приводятся примеры изображения	Нет
Связь обыкновенной и десятичной дроби	Правила не сформулированы, показано на примерах	Уточняется, что разложение в конечную десятичную дробь возможно, если знаменатель комбинация 2 и 5	Доказывается утверждение о том, что обыкновенная дробь может быть записана десятичной периодической дробью
Правила перевода обыкновенных дробей в десятичные и наоборот	Показано на примерах, что обыкновенную дробь можно представить в виде десятичной конечной или бесконечной, отмечается, что десятичные дроби с периодом 9 заменяют дробями с периодом 0	Правила не формулируются, показано на примерах, уточняется, что дробь с периодом 9 можно записать в виде конечной дроби	Сформулированы правила обращения
Выполнимость операции, обратной возведению в квадрат	Нет	Нет	Площадь квадрата, построенного на гипотенузе единичного прямоугольного треугольника, ставится вопрос о нахождении стороны этого квадрата

Таблица 2 (продолжение)

	Учебное пособие «Алгебра» для 8 класса автор А.Г. Мордкович, Н.П. Николаев [55]	*Учебник «Алгебра» 7 класс С.М. Никольский и др [1]*	*Учебник «Алгебра» 8 класс Н.Я. Виленкин и др. [2]*
Иррациональные числа и действия над ними:			
Выполнимость операции, обратной возведению в квадрат	Нет	Нет	Площадь квадрата, построенного на гипотенузе единичного прямоугольного треугольника, ставится вопрос о нахождении стороны этого квадрата
Решение уравнения $x^2=a$, где a – рациональное число	Графическая интерпретация решения уравнения	Нет	Нет
Определение соизмеримости и несоизмеримости отрезков	Нет	Нет (на примерах показано, что существуют отрезки, длину которых можно вычислить только приближенно)	Приведено определение несоизмеримого с единичным отрезка как такого, длину которого нельзя выразить рациональным числом
Соизмеримость диагонали квадрата с его стороной	Нет	В дополнении Главе 1 показано, что диагональ квадрата несоизмерима с его стороной	Доказано, что не существует рационального числа, квадрат которого равен 2 (доказательство на основании несократимости дроби)
Определение периодических и непериодических дробей	Определена периодическая дробь, период дроби	Определена периодическая дробь, период дроби	Определена периодическая дробь, период дроби, длина периода
Доказательство иррациональности определённого числа	Приводится доказательство того, что нет такой обыкновенной дроби, квадрат которой был бы равен 5 как дополнительные сведения	В дополнении к Главе 1 доказано, что не существует рационального числа, квадрат которого равен 2 (доказательство на основании несократимости дроби)	Нет
Определение иррационального числа	Как бесконечная непериодическая дробь после введения понятия квадратного корня	Дробь, которая не может быть десятичным разложением какого-нибудь рационального числа, Как бесконечная непериодическая дробь	Как число, не являющееся рациональным

Таблица 2 (продолжение)

	Учебное пособие «Алгебра» для 8 класса автор А.Г. Мордкович, Н.П. Николаев [55]	*Учебник «Алгебра» 7 класс С.М. Никольский и др [1]*	*Учебник «Алгебра» 8 класс Н.Я. Виленкин и др. [2]*
Геометрическое изображение иррационального числа	На координатной прямой отмечают гипотенузу треугольника с катетами 1 и 2	Нет	Нет
Определение арифметических операций	Операции не определяются, делается акцент на то, что любая арифметическая операция с рациональными числами приводит к рациональному числу, а операции с иррациональными числами нет	Нет	Нет
Действительные числа и действия над ними			
Определение действительного числа	Нет	Нет	Действительное число определено как бесконечная десятичная дробь, не оканчивающаяся последовательностью девяток (сделано замечание, что это лишь запись числа)
Множество действительных чисел как объединение множеств рац. и иррациональных чисел	Утверждается, то рациональные и иррациональные числа вместе образуют множество действительных чисел	Сказано, что рациональные и иррациональные числа называют действительными числами	Нет
Определение равенства действительных чисел	Нет	Как равенство соответствующих цифр разрядов	Определено сравнение действительных чисел как способ сравнения десятичных дробей
Свойства арифметических операций действительных чисел	Не формулируются, но утверждается, что законы арифметических действий выполняются	Приведены свойства арифметических операций аналогичные свойствам арифметических операций над рациональными числами	Приведены свойства арифметических операций аналогичные свойствам арифметических операций над рациональными числами
Определение сравнения действительных чисел	Нет	Определено сравнение действительных чисел как сравнение бесконечных десятичных дробей (поразрядно)	Определено сравнение действительных чисел как способ сравнения десятичных дробей

Таблица 2 (продолжение)

	Учебное пособие «Алгебра» для 8 класса автор А.Г. Мордкович, Н.П. Николаев [55]	*Учебник «Алгебра» 7 класс С.М. Никольский и др [1]*	*Учебник «Алгебра» 8 класс Н.Я. Виленкин и др. [2]*
Взаимно однозначное соответствие между множеством действительных чисел и множеством точек на координатной прямой	Свойство сформулировано, никакого пояснения к нему не приводится	Приводятся примеры, формулируется утверждение	Установлено взаимно однозначное соответствие между множеством действительных чисел и множеством длин отрезков
Счетность и несчетность множеств	нет	нет	Определяется мощность множества, его счетность (как множество эквивалентное множеству натуральных чисел)

Таблица 3

Учебники для школ и классов с углублённым изучением математики в средней школе

	Алгебра и начала математического анализа. 1 часть. 10 класс. Профильный уровень. А.Г.Мордкович, П.В. Семёнов [56]	*Алгебра и начала математического анализа. 10 класс. Базовый и профильный уровни. С.М. Никольский и др.[50]*	*Математика: алгебра и начала математического анализа. 10 класс. Углубленный уровень. М.Я. Пратусевич и др [61]*	*Алгебра и начала математического анализа. 10 класс (базовый и профильный уровни) Ю.М. Колягин и др. [49]*
Рациональные числа и действия над ними:				
Определение	Рациональные числа определены как обыкновенные дроби	Рациональные числа определены как обыкновенные дроби	Нет	Нет
Связь обыкновенной и десятичной дроби	Показано, что обыкновенную дробь можно представить в виде десятичной и наоборот	Сформулировано утверждение, что обыкновенную дробь можно представить в виде десятичной и наоборот, отмечено, что десятичные дроби с периодом 9 не рассматриваются	Нет	Нет
Правила перевода обыкновенных дробей в десятичные и наоборот	Правило не даётся, показано на примерах	Нет	Нет	Нет

Таблица 3 (продолжение)

	Алгебра и начала математического анализа. 1 часть. 10 класс. Профильный уровень. А.Г.Мордкович, П.В. Семёнов [56]	*Алгебра и начала математического анализа. 10 класс. Базовый и профильный уровни. С.М. Никольский и др.[50]*	*Математика: алгебра и начала математического анализа. 10 класс. Углубленный уровень. М.Я. Пратусевич и др [61]*	*Алгебра и начала математического анализа. 10 класс (базовый и профильный уровни) Ю.М. Колягин и др. [49]*
Правила перевода обыкновенных дробей в десятичные и наоборот	Правило не даётся, показано на примерах	Нет	Нет	Нет
Иррациональные числа и действия над ними				
Определение периодических и непериодических дробей	Даётся определение периодической дроби, периода	Сформулировано определение периодической дроби, периода	Нет	Нет
Доказательство иррациональности определённого числа	Приведено как пример	Нет	Нет	Нет
Определение иррационального числа	Как бесконечная непериодическая дробь	Да (бесконечная непериодическая дробь)	Нет	Нет
Геометрическое изображение иррационального числа	Нет	Сформулировано взаимно однозначное соответствие, доказательство не приводится	Нет	Нет
Определение арифметических операций	Определения операций нет, однако уточняется, что результат операции с иррациональными числами может быть не иррациональным числом	Нет	Нет	Нет

Таблица 3 (продолжение)

	Алгебра и начала математического анализа. 1 часть. 10 класс. Профильный уровень. А.Г.Мордкович, П.В. Семёнов [56]	*Алгебра и начала математического анализа. 10 класс. Базовый и профильный уровни. С.М. Никольский и др.[50]*	*Математика: алгебра и начала математического анализа. 10 класс. Углубленный уровень. М.Я. Пратусевич и др [61]*	*Алгебра и начала математического анализа. 10 класс (базовый и профильный уровни) Ю.М. Колягин и др. [49]*
Действительные числа и действия над ними				
Определение действительного числа	Нет	Утверждается, что действительное число – это число, которое можно записать в виде бесконечной десятичной дроби	Нет	Действительное число определяется как бесконечная десятичная дробь
Множество действительных чисел как объединение множеств рациональных и иррациональных чисел	Утверждается, что если множества рациональных чисел и иррациональных чисел объединить, то получится множество действительных чисел; уточняется, что это объединение периодических и непериодических дробей	Рациональные и иррациональные числа составляют множество действительных чисел	Нет	Нет
Свойства арифметических операций действительных чисел	Дана аксиоматика	Дана аксиоматика	Нет	Отмечено, что арифметические операции обладают теми же свойствами, что и для рациональных чисел
Определение сравнения действительных чисел	Сравнение определено как разность чисел, уточняется, что можно сравнить как десятичные дроби или с помощью координатной прямой	Нет	Нет	Нет

Таблица 3 (продолжение)

	Алгебра и начала математического анализа. 1 часть. 10 класс. Профильный уровень. А.Г.Мордкович, П.В. Семёнов [56]	*Алгебра и начала математического анализа. 10 класс. Базовый и профильный уровни. С.М. Никольский и др.[50]*	*Математика: алгебра и начала математического анализа. 10 класс. Углубленный уровень. М.Я. Пратусевич и др [61]*	*Алгебра и начала математического анализа. 10 класс (базовый и профильный уровни) Ю.М. Колягин и др. [49]*
Взаимно однозначное соответствие между множеством действительных чисел и множеством точек на координатной прямой	Утверждается взаимно однозначное соответствие и доказывается	Утверждается взаимно однозначное соответствие без доказательства	Нет	Нет
Аксиоматика действительных чисел	Сформулировано несколько групп аксиом (сложения, умножения, порядка, непрерывности), формулируется принцип разделяющего числа	Сформулированы свойства (аксиомами не называются) - порядка, сложения и вычитания, умножения и деления, архимедово свойство; свойство непрерывности	Формулируется аксиома полноты как аксиома супремума	Нет
Счетность/несчетность множеств, мощность множеств	нет	Даётся определение равномощных множеств через установление взаимно однозначного соответствия	Даётся определение равномощных множеств через установление взаимно однозначного соответствия; определяется счётное множество как равномощное множеству натуральных чисел; формулируется теорема Кантора о несчетноси множества отрезка	нет

§ 3. Содержание числовой содержательно-методической линии в углубленном курсе математики общеобразовательной школы

Федеральный государственный образовательный стандарт общего образования [80, 81] предполагает, что в *результате изучения математики в основной школе ученик должен знать/понимать:*

- потребности практической жизни привели к необходимости расширения понятия числа.

В результате изучения математики на профильном уровне ученик должен знать/понимать:

- значение математической науки для решения задач, возникающих в теории и практике; широту и ограниченность применения математических методов к анализу и исследованию процессов и явлений в природе и обществе;

- значение практики и вопросов, возникающих в самой математике, для формирования и развития математической науки;

- идеи расширения числовых множеств как способа построения нового математического аппарата для решения практических задач и внутренних задач математики;

- различие требований, предъявляемых к доказательствам в математике, естественных, социально-экономических и гуманитарных науках, на практике;

- роль аксиоматики в математике; возможность построения математических теорий на аксиоматической основе; значение аксиоматики для других областей знания и для практики.

В результате изучения *арифметики основного общего образования* обучающийся должен *уметь*:

- переходить от одной формы записи чисел к другой,

- представлять десятичную дробь в виде обыкновенной и, в простейших случаях, обыкновенную - в виде десятичной,

- выполнять арифметические действия с рациональными числами,

- сравнивать рациональные и действительные числа;

- округлять целые числа и десятичные дроби,

- находить приближения чисел с недостатком и с избытком, выполнять оценку числовых выражений.

В результате изучения *числовых и буквенных выражений* в средней школе обучающийся *уметь:*

- выполнять арифметические действия, сочетая устные и письменные приемы, применение вычислительных устройств;

- находить значения корня натуральной степени, степени с рациональным показателем, логарифма, используя при необходимости вычислительные устройства;

- пользоваться оценкой и прикидкой при практических расчетах.

В результате изучения темы *«Действительные числа»* в основной школе выпускник *научится*:

- использовать начальные представления о множестве действительных чисел;

- оперировать понятием квадратного корня, применять его в вычислениях.

Выпускник *получит возможность*:

- развить представление о числе и числовых системах от натуральных до действительных чисел; о роли вычислений в практике;

- развить и углубить знания о десятичной записи действительных чисел (периодические и непериодические дроби).

При проведении государственной итоговой аттестации за курс основной школы (основной государственный экзамен по математике - ОГЭ) предполагается, что выпускники умеют сравнивать различные действительные числа, выполняя **задания** типа: № 3. Значение, какого из данных выражений, является наибольшим?

Варианты ответа: 1) $\overline{2{,}6}$ 2) 3 $\overline{0{,}3}$ 3) $\frac{\overline{12}}{2}$ 4) $\frac{\overline{15}}{7} \cdot \frac{\overline{7}}{6}$ [36]

Рассмотрим кодификатор основного государственного экзамена (ОГЭ) по математике 2017 года [24] с точки зрения требований, предъявляемых к уровню освоения темы «Действительные числа».

Раздел 1 предполагает следующие *элементы содержания*:

1.4. Действительные числа

1.4.1. Квадратный корень из числа.

1.4.2. Корень третьей степени.

1.4.3. Нахождение приближённого значения корня.

1.4.4. Запись корней с помощью степени с дробным показателем.

1.4.5. Понятие об иррациональном числе. Десятичные приближения иррациональных чисел. Действительные числа как бесконечные десятичные дроби.

1.4.6. Сравнение действительных чисел.

Спецификация ОГЭ 2017 года [24] включает в себя основные *требования* к математической подготовке выпускников. Отметим, что количество заданий КИМ по математике, связанных с числами и вычислениями составляет 4 задания (№ 1, 2, 3, 14)

Рассмотрим также кодификатор единого государственного экзамена (ЕГЭ) по математике 2017 года [23] с точки зрения требований, предъявляемых к уровню освоения темы «Действительные числа».

Раздел 1.1. предполагает следующие *элементы содержания*:

1.1. Числа корни и степени

1.1.3. Дроби, проценты, рациональные числа.

1.1.5. Корень степени $n > 1$ и его свойства.

1.1.7. Свойства степени с действительным показателем.

Спецификация ЕГЭ 2017 года [23] включает в себя основные требования к математической подготовке выпускников базового и профильного уровня. Отметим, что количество заданий КИМ по математике базового уровня, связанных с числами и вычислениями составляет 3 задания (№ 1, 2, 19), а КИМ профильного уровня включает в себя 4 задания (№ 1 – базовый уровень, № 9 – продвинутый уровень, № 17, 19 – высокий уровень)

Например, содержатся **задачи** следующего содержания:

1) Бесконечная десятичная дробь устроена следующим образом. Перед десятичной запятой стоит нуль. После запятой подряд выписаны члены возрастающей последовательности натуральных чисел a_n. В результате получилось рациональное число, которое выражается несократимой дробью, знаменатель которой меньше 100. Найдите наименьшее возможное значение a_3 .

2) Дано иррациональное число α, такое, что $0 < \alpha < 1/2$. По нему определяется новое число α_1 как меньшее из двух чисел 2α и $1 - 2\alpha$. По этому числу аналогично определяется α_2, и так далее.

а) Докажите, что для некоторого n выполнено неравенство $\alpha_n < 3/16$

б) Может ли случиться, что $\alpha_n < 7/40$ при всех натуральных n?

3) Найдите все целые значения n, для каждого из которых число $\log_{2n-1}(n^2+2)$ будет рациональным.

Рабочие программы по алгебре и началам математического анализа определяют обязательный минимум содержания образовательной области математика из раздела «Числа и вычисления»: Действительные числа. Свойства арифметических действий с действительными числами. Сравнение действительных чисел. Бесконечно-убывающая геометрическая прогрессия. Обращение периодической десятичной дроби в обыкновенную. Арифметический корень натуральной степени. Свойства арифметического корня натуральной степени. Преобразование выражений, содержащих арифметический корень. Степень с рациональным и действительным показателем. Свойства степени.

На основе требований ФГОС общего образования и рабочих программ, определим базовый, продвинутый и высокий уровни подготовки обучающихся по числовой содержательной линии в старших классах.

Б*азовый уровень:*

- иметь представление о расширении множества чисел, свойствах чисел;

- уметь выполнять арифметические действия с действительными числами;

- иметь представление об обращении периодической десятичной дроби в обыкновенную с помощью бесконечно-убывающей геометрической прогрессии;

- знать свойства арифметического корня натуральной степени;

- уметь выполнять простые преобразования выражений, содержащих арифметический корень;

- знать определение степени с рациональным и действительным показателем;

- уметь вычислять степень с рациональным и действительным показателем.

Продвинутый и высокий уровни:

- иметь представление о расширении множества чисел;

- знать свойства чисел и уметь применять их при выполнении арифметических действий с действительными числами;

- уметь выполнять обращение периодической десятичной дроби в обыкновенную с помощью бесконечно-убывающей геометрической прогрессии;

- иметь представление о пределе последовательности;

- знать свойства арифметического корня натуральной степени;

- уметь выполнять преобразования выражений, содержащих арифметический корень;

- знать определение степени с рациональным и действительным показателем;

- уметь вычислять степень с рациональным и действительным показателем;

- уметь выполнять преобразования выражений, применяя свойства степеней.

Выполним методический анализ темы «Действительные числа».

Для этого выделим те знания, на основании которых строится изучение темы, назовём их *базовыми*:

- обыкновенная дробь, несократимая обыкновенная дробь;

- десятичная дробь, конечная десятичная дробь, бесконечная десятичная дробь;

- множество;

- множества чисел: натуральных, целых, рациональных чисел.

Сформулируем *сведения*, которые необходимо рассмотреть при изучении данной темы:

- понятие соизмеримости и несоизмеримости отрезков;

- правила обращения десятичных дробей в обыкновенные и обратно;

- понятие бесконечных непериодических дробей;

- понятие иррационального числа;

- правила сравнения иррациональных чисел;

- арифметические операции на множестве иррациональных чисел и их свойства;

- понятие действительного числа;

- правила сравнения иррациональных чисел;

- арифметические операции на множестве действительных чисел.

Чаще всего, в методической литературе действительные числа вводятся *по схеме:*

1. Решается уравнение $x^2 - 2 = 0$. Это ведёт к необходимости доказательства теоремы: «Не существует ни целого, ни дробного числа, квадрат которого равнялся бы числу 2»

2. Ставится задача отыскания числа, квадрат которого был бы близок числу 2.

3. Рассматриваются геометрические задачи на: нахождение длины диагонали квадрата со стороной 1; отыскание абсциссы точки графика $y = x^2$, ордината которой равна 2.

4. Ставится проблема измерения отрезков, их соизмеримости и несоизмеримости, десятичных приближений длины отрезков.

5. Вводятся понятия бесконечных периодических и непериодических дробей.

6. Устанавливаются правила обращения обыкновенных дробей в десятичные и обратно.

7. Вводится понятие иррационального числа.

8. Вводится множество действительных чисел.

9. Устанавливаются правила сравнения действительных чисел.

10. Рассматриваются операции над действительными числами.

§4. Анализ проведённых исследований и опыта работы учителей математики по проектированию числовой линии

В данном параграфе, прежде всего, рассмотрим, как понятие *проектирование* определяется в различной литературе.

Можно увидеть, что в различных словарях русского языка проектированием *называют действие*, связанное с одним из значений слова «проект» – готовый план сооружения, постройки, изготовления или реконструкции чего-либо. Это слово употребляется в русском языке с начала XVIII века и связано с его значением в латинском языке: «проект» означает брошенный вперед, то есть замысел в виде прообраза объекта. Можно утверждать, что термин «проектирование» был принесён в педагогику из строительной области, где он означает создание макета (опережающей проекции) того, что затем будет материализовано.

Первое исследование В.П.Беспалько [13], связанное с понятием «педагогическое проектирование», появилось в конце восьмидесятых годов

XX века, это привело к тому, что проектирование было признано самостоятельным видом педагогической деятельности.

В современной трактовке слово «проектирование» означает процесс создания проекта - прототипа, прообраза предполагаемого или возможного объекта, его состояния.

Согласно словарным источникам, слово «проектирование» нередко приравнивается к слову - «планирование», имеющее несколько значений:

- заранее намеченный порядок, последовательность выполнения каких-либо действий;

- замысел, проект, основные черты какой-либо работы;

- способ рассмотрения, подходы к чему-либо.

Однако следует отличать проектирование от планирования:

- общие черты - ориентация на будущее, конкретное решение перспективных проблем, гибкость, многовариантность;

- различия – проект меньше допускает неоднозначности, в нём прописаны строение, вид, элементы объекта проектирования, план – это форма представления проекта, предписания по переходу объекта из одного состояния в другое.

В педагогической литературе нет общего мнения касательно определения понятия *«педагогическое проектирование»*.

Н. О. Яковлева определяет педагогическое проектирование, положив в основу классическое представление о сущности проектирования, сохраняя его особенности: «Под педагогическим проектированием мы понимаем целенаправленную деятельность по созданию проекта как инновационной модели образовательно-воспитательной системы, ориентированной на массовое использование» [97].

В. С. Безрукова определяет проектирование как предварительную разработку деталей предстоящей деятельности детей и педагогов [11, С. 88].

В. А. Сластенин, И. Ф. Исаев, А. И. Мищенко, Е. Н. Шиянов: считают проектирование содержательным, организационно-методическим, материально-техническим и социально-психологическим оформлением замысла реализации целостного решения педагогической задачи [71].

В современной педагогике также можно выделить различные позиции изучения понятия проектирования:

- определённый компонент деятельности;
- прогнозирование, программирование и т.п.
- особый элемент управления.

Под педагогическим проектированием понимается деятельность по определению условий реализации определенной педагогической системы.

Педагогическое проектирование и его приложения исследовались многими учёными и практиками. На данный момент, несмотря на интенсивные поиски ученых, вопрос создания единой терминологии открыт.

Несмотря на все различия, общим для всех определений проектирования образовательной деятельности является составление определённых планов, нацеленных на решение конкретных образовательных задач и практическое преобразование сложившейся образовательной ситуации силами педагогов, педагогических сообществ за определенный период времени.

Ниже представим анализ диссертационных исследований, посвящённых *вопросам изучения чисел в школьном курсе математики.*

Так И.И. Зубарева [31] останавливается на принципе систематичности и последовательности при изучении числовой линии курса математики 5-6 класса. Автор считает, что знания обучающихся будут системными, если применять при изучении нового материала деятельностный подход.

А.В. Емелин [28] в диссертационном исследовании рассматривает изучение нового множества чисел с помощью визуализации, утверждая, что подобное рассмотрение позволяет учащимся преодолеть сложности при изучении множества иррациональных чисел и их свойств.

Содержание математического образования предполагает изучение математики в историческом развитии, но исторического материала в основных учебниках математики немного. В то же время, история математики может заинтересовать как тех обучающихся, кто увлечен ею как наукой, так как обеспечивает необходимыми основами научных знаний, методами действия и т.п., так и тех, кто математику рассматривает как средство общего развития кругозора, так как показывает красоту научного знания и логику построения теорий. Кардаильская О.С. [38] показывает большую значимость исторических фактов для эффективного повышения мотивации учащихся к изучению математики: «одно дело поставить ученика в тупик невозможностью решить в рациональных числах квадратное уравнение $x^2 = 2$ … Но совсем другое дело – сформулировать древнегреческую задачу о выкладывании пола плиткой по диагонали, которая приводит к тому же уравнению».

Л.В. Гладкий, Ю.Н.Козиоров в статье [19] предлагают вводить действительное число как последовательность обыкновенных дробей, то есть делить единичный отрезок на 2, 3 и т.д. части. Такой способ измерения отрезков представляет собой модификацию процедуры, описанной в десятой книге «Начал» Евклида и получивший впоследствии название «метод исчерпывания». Эта статья посвящена систематическому построению теории действительных чисел на основе этой конструкции.

Е.С. Смирнова [72] приводит подборку литературы по теме «Действительные числа», ориентированную на построение темы в классах с углубленным изучением математики.

Н.А. Хитрина [83] предлагает с помощью контрпримеров показать, что множество иррациональных чисел не замкнуто относительно операций сложения, вычитания, умножения и деления. Б.А. Кордемский [42] приводит занимательные задачи и примеры, направленные на введение понятия иррационального числа, в частности чисел $\sqrt{2}$ и π. Для числа π автор предлагает приближенные значения, которыми можно пользоваться при вычислениях, а также игровые способы запоминания нескольких цифр этого числа.

Е.С. Канин, Е.М. Канина [37] предлагают подборку упражнений, способствующих лучшему усвоению темы «Действительные числа». Задачи распределены по тематическим группам:

- повторение сведений об известных числовых множествах;
- введение иррациональных чисел, множество действительных чисел;
- рассмотрение некоторых свойств множества действительных чисел.

В более поздней работе Е.С. Канин [36] рассматривает проблему изучения темы «Действительные числа» в классах с углублённым изучением математики. Основное внимание акцентируется на следующих вопросах: как появляются иррациональные числа, в каких видах и формах они могут быть представлены; какими свойствами характеризуются множества иррациональных и действительных чисел. Автор предлагает ознакомить учащихся с действиями над действительными числами и их свойствами. В статье приводятся задачи, поясняется, для каких классов они предназначены.

И.А. Марнянский [48] посвящает исследование задачам и упражнениям, способствующих глубокому пониманию некоторых понятий школьной программы, в том числе понятия действительного числа.

В.Ф. Чаплыгин [86] рассматривает проблему формирования понятия числа. В предлагаемых задачах автор затрагивает свойство замкнутости множества рациональных чисел относительно арифметических операций. Также обращается внимание, что иррациональные числа таким свойством не обладает. Автор показывает, как доказать иррациональность конкретных чисел (с помощью теоремы о корне многочлена, с помощью алгебраических и тригонометрических преобразованиях).

Л.А. Штейнгард [94] приводит доказательство того, что любое натуральное число можно выразить с помощью одного произвольного действительного числа. Р.И. Смирнова [58] останавливается на умении определять принадлежность данного числа одному из подмножеств множества действительных чисел.

Н.Б. Гусева и Г.В. Сычёва [57] рассматривают отдельные вопросы школьного курса математики, в том числе, вопрос сравнения действительных чисел. Авторы предлагают несколько способов сравнения величин: по определению, с помощью сравнения с единицей, с помощью сравнения степеней, сравнение с промежуточным числом, сравнение с помощью исследования введённой функции на монотонность, сравнение с помощью неравенства Коши.

М.Ю. Шонин [93] связывает понятие действительного числа с понятием непрерывности и предлагает рассматривать его в классах с углублённым изучением математики.

В.В. Цукерман [85] останавливается на представимости действительных чисел в виде десятичных дробей без цифры 9 в периоде.

Т.В. Ульянова [76] рассматривает методические особенности преподавания темы «Действительные числа» на профильном уровне в соответствии с учебником по алгебре и началам математического анализа для 10 класса под ред. С.М. Никольского, останавливаясь на проблемах изучения одноименной главы.

Л.И. Боженкова [16] приводит планируемые результаты изучения числовой линии.

На основании проведённого анализа научно-методической литературы можно сделать следующие выводы:

- накоплен значительный опыт, имеющий практическую ценность для учителей средней школы при подготовке уроков по теме «Действительные числа»;

- проблема введения действительных чисел и операций над ними на данный момент недостаточна решена в теории и методике обучения математике;

- проектирование содержательного компонента числовой линии для углубленного уровня в школьных учебниках алгебры и начал математического анализа старших классов на данном этапе развития математического образования требует уточнения.

Выводы по первой главе

В первой главе рассмотрены методические основы проектирования числовой содержательно-методической линии углубленного курса математики общеобразовательной школы. Проведён анализ школьных учебников основного общего образования (для общеобразовательной и углублённой программы) и среднего образования для углублённой программы с точки зрения представления в них темы «Действительные числа». Некоторые вопросы в школьных учебниках рассмотрены подробно, например, изучение квадратных корней, иррациональных чисел.

На основании анализа учебников и методической литературы сделан вывод о том, что рассматриваемая тема изучается по определённой схеме. В этой же главе приводится анализ исследований, посвящённых теме «Действительные числа».

Стоит отметить, что сформулированные требования федерального государственного образовательного стандарта общего образования к изучению вопросов темы «Действительные числа» находят своё отражение в заданиях государственной итоговой аттестации по математике (ОГЭ и ЕГЭ). В связи с этим необходимо разработать такую методику изучения темы «Действительные числа», которая позволит учащимся усвоить понятие действительного числа.

Актуальным также остается вопрос о том, как реализовать числовую содержательно-методическую линию в углубленном школьном курсе математики.

ГЛАВА II. РЕАЛИЗАЦИЯ ЧИСЛОВОЙ СОДЕРЖАТЕЛЬНО-МЕТОДИЧЕСКОЙ ЛИНИИ В УГЛУБЛЁННОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ШКОЛЫ

§5. Историческая справка о развитии понятия числа

Как было отмечено выше, знакомство учащихся с историей возникновения и развития математических понятий способствует осознанному их усвоению, повышает мотивацию учащихся к изучению математики, что немаловажно. Приведем краткую историческую справку, которая может быть использована учителями на уроках математики при реализации числовой линии.

Термин «рациональное» (число) происходит от латинского слова rattio – отношение, которое в свою очередь, является переводом греческого слова «логос» (логичное), в свою очередь, термин «иррациональное» получен с помощью отрицательной приставки «ир», поэтому его понимают как нерациональное («алогос» - нелогичное).

Древнегреческие математики классической эпохи не пользовались другими числами, кроме рациональных (точнее, целых и дробных положительных). Евклид (ок. 365 — 300 до н. э.) в «Началах» излагает учение об иррациональностях геометрически, опираясь на соизмеримость отрезков.

С начала нашей эры в Греции и странах Востока в противовес громоздкой геометрической алгебре, начинает развиваться алгебра, опирающаяся на арифметику, развитие вычислительных методов, необходимых для астрономии, тригонометрии.

Математики, развивая алгебру, тригонометрию и астрономию, не могли обойтись без иррациональных величин, которые, однако, длительное время не признавали за числа.

Впервые этот термин встречается в Европе в середине XII века у переводчика математических произведений с арабского на латынь Герарда Кремонского (1114 – 1187), затем у итальянского математика Леонардо Фибоначчи (ок. 1170 – 1250).

В XVI веке отдельные учёные, в первую очередь, итальянский математик Рафаэль Бомбелли (ок. 1526 – 1572) и голландский Симон Стевин (1548 – 1620), считали иррациональное число равноправным с рациональным.

Однако ещё до Бомбелли и Стевина ученые Востока употребляли иррациональные числа как полноправные объекты алгебры. Например, Омар Хайям (1048 – 1131) в начале XII века теоретически расширяет понятие числа до положительного действительного. В этом же направлении много сделано персидским математиком XIII века Насиром ад-Дином Туси (1201-1274).

Десятичные дроби были введены самаркандским ученым XV века Жамшидом ал-Каши (1380 – 1429) в работе «Ключ арифметики», они использовались и для повышения точности извлечения корней.

Симон Стевин шёл тем же путём. Он в «Приложениях к алгебре» показал, что десятичные дроби можно использовать для бесконечно близкого приближения к действительному числу.

В XVI – XVII веках появляется критика европейскими учёными евклидова противопоставления величины – числу, и как следствие, расширение последнего до действительного числа. Рене Декарт (1596 – 1650) рассмотрел каждое действительное число как отрезок, используя единичный отрезок как единицу исчисления, дал наглядную интерпретацию отрицательных чисел. Таким образом, был заполнен разрыв между понятием числа и геометрической величины. Произошло полное признание, как иррациональных чисел, так и отрицательных чисел, что привело к обобщению понятия числа.

Новое определение числа было сформулировано Исааком Ньютоном (1642 – 1727) во «Всеобщей арифметике»: «Под числом мы понимаем не столько множество единиц, сколько отвлечённое отношение какой-нибудь величины к другой величине того же ряда, принятой за единицу. Число бывает трёх видов: целое, дробное и иррациональное»

Введение Джоном Валлисом (1616 – 1703) и Ньютоном понятия предела открыло путь к определению иррациональных чисел как пределов последовательностей рациональных чисел. В XVIII веке Леонард Эйлер (1707 – 1783) и Иоганн Ламберт (1728 – 1777) доказали, что если десятичная дробь является периодической, то она представляет собой рациональное число, что привело к отождествлению непериодической дроби с иррациональным числом.

Таким образом, к началу XVIII века вошедшее во всеобщее употребление иррациональное число определялось одними как не извлекаемые точно корни рациональных чисел, другими – как последовательности рациональных приближений с любой степенью точности, третьи пользовались определением Ньютона.

Дальнейшее развитие и обоснование понятия *действительного числа* произошло лишь в XIX веке после того, как математики Бернард Больцано (1781– 1848), Огюстен Коши (1789 – 1857) и Карл Вейерштрасс (1815 – 1897) независимо друг от друга сформулировали строгое определение предела и других основных понятий математического анализа. В это время же время, Вейерштрасс, Георг Кантор (1845–1918) и Рихард Дедекинд (1831–1916) создали три оригинальные теории действительного числа. Остановимся на некоторых положениях этих теорий.

1. *Теория действительных чисел Вейерштрасса как бесконечных десятичных рядов*

Определение 1. *Ряд* - это сумма $C_0 + C_1 + \ldots + C_n + + \ldots$, где любое C_i – рациональное число, его называют i-тым членом ряда, не существует и последнего члена ряда; если, начиная с C_k, все члены ряда равны 0, то ряд называется *конечным*.

Определение 2. *Действительное число* – это десятичный ряд вида $a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} \ldots$, где $a_0 \in \boldsymbol{Z}^+, a_i \in \boldsymbol{Z}, 0 \le a_i \le 9$, при этом повторение цифры 9 бесконечное множество раз исключается. Тогда $a_0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$ - десятичная запись числа, a_i – цифры.

Определение 3. Действительное число называется *заданным,* если все его цифры известны.

Вейерштрасс сформулировал и доказал **теорему**, являющуюся свойством непрерывности множества действительных чисел: Если имеются два множества R_1 и R_2 рациональных чисел, обладающих двумя свойствами:

1) каждое число множества R_1 не больше каждого числа множества R_2;

2) для любого данного действительного положительного числа ε найдутся числа q в множестве R_2 и p в множестве R_1 такие, что $q - p < \varepsilon$,

то можно сконструировать действительное число A, и при том единственное, которое не меньше каждого числа множества R_1 и не больше каждого числа множества R_2.

Существуют два вида действительных чисел:

1) $a_0, a_1 a_2 \ldots a_k \ldots b_1 b_2 \ldots b_n b_1 b_2 \ldots b_n \ldots = a_0, a_1 a_2 \ldots a_k \ldots\ b_1 b_2 \ldots b_n$;

2) Иррациональное число - особый вид действительного числа, где нет набора цифр, периодически повторяющихся, это число можно обозначить ω – произвольное иррациональное число.

2. *Теория Кантора как теория фундаментальных последовательностей*

Определение 1. *Последовательность рациональных чисел* - это бесконечное множество рациональных чисел, обладающее свойствами: определено, как рациональное число входят (или не входят) в данное множество, каждое такое число является элементом такой последовательности; относительно каждого элемента последовательности можно сказать, какой из них следует до или следует после данного элемента, определён начальный элемент, у которого нет предшествующего элемента.

Определение 2. *Фундаментальная* последовательность рациональных чисел a_1, a_2, ..., a_n... - это последовательность, которая обладает свойством, что для всякого положительного рационального числа ε можно указать номер элемента этой последовательности, начиная с которого, все последующие элементы будут попарно отличаться друг от друга по модулю меньше, чем на ε, то есть $\exists\, m \in \boldsymbol{N}$: $a_\varphi - a_\mu < \varepsilon, \varphi > m,\ \mu > m,\ \varphi, \mu \in \boldsymbol{N}$**.**

Кантором была сформулирована и доказана **теорема:** Существуют фундаментальные последовательности, не имеющие рационального предела.

Таким образом, существует два вида последовательностей: имеющие рациональный предел, имеющие нерациональный предел.

Определение 3. *Действительное число* – это любая фундаментальная последовательность рациональных чисел (то есть имеющая рациональный предел и имеющая иррациональный предел)

3. *Теория действительного числа Дедекинда как сечений в множестве рациональных чисел*

Определение 1. *Сечение D* в поле рациональных чисел - это разбиение всего множества $\boldsymbol{Q}$ на два непустых подмножества так, что каждое число, вошедшее в первое подмножество R_1, меньше каждого числа, вошедшего во второе подмножество R_2. Каждое рациональное число должно войти в одно из этих подмножеств.

На множестве $\boldsymbol{Q}$ существует три вида сечений:

- в R_1 имеется наибольшее число, в R_2 отсутствует наименьшее число;
- в R_1 отсутствует наибольшее число, в R_2 имеется наименьшее число;
- в R_1 отсутствует наибольшее число, в R_2 - наименьшее число.

В первых двух видах сечений есть пограничные числа, поэтому каждое из них определяет некоторое рациональное число. В третьем виде сечений пограничного числа нет, то есть сечение не задаёт никакого рационального числа. Таким образом, сечением третьего вида можно задать некоторое иррациональное число.

Определение 2. *Действительное числом* - это всякое из трёх видов сечений Дедекинда в поле рациональных чисел. Наличие в $\boldsymbol{Q}$ сечений третьего вида говорит о том, что на координатной прямой существуют точки, которым не соответствуют никакие числа из $\boldsymbol{Q}$, но множество действительных чисел $\boldsymbol{R}$ непрерывно, что следует непосредственно из определения действительных чисел.

Была доказана основная **теорема** Дедекинда: Если произвести сечение в множестве действительных чисел $\boldsymbol{R}$, то найдётся число β, производящее это сечение, причём β будет либо наибольшим в нижнем сечении, либо наименьшим в верхнем сечении. Таким образом, в множестве действительных чисел $\boldsymbol{R}$ существует только два вида сечения. [24, С.123-130]

Ни одна из теорий действительного числа не рассматривается в школьном курсе математики. Это обусловлено, прежде всего, сложностью теоретических положений, необходимостью вводить дополнительные понятия, выходящие за рамки школьной программы.

В.Ф. Чаплыгин [86, С.26-27] отмечает, что создать пусть неполное, но неискаженное представление о действительном числе необходимо. Г.М. Фихтенгольц [82, С.133-149] говорит о том, что сформировать ясное представление о действительном числе вполне возможно, и в тоже время, вполне достаточно целей, которые может поставить перед собой средняя школа.

§6. Проектирование содержания числовой линии в условиях уровневой дифференциации

В основу данной магистерской диссертации положена концепция уровневой дифференциации Р.А. Утеевой [78], согласно которой при проектировании числовой содержательно-методической линии в углублённом курсе математики будем рассматривать следующие уровни:

- *базовый уровень* – минимальный уровень знаний и умений обучающихся, которые определены федеральным государственным образовательным стандартом, образовательной программой учебного заведения, рабочей программой по математике;
- *продвинутый уровень* – уровень знаний и умений обучающихся, обеспечивающий качественное усвоение школьного курса математики;
- *высокий уровень* – уровень знаний и умений обучающихся, выходящий за рамки программы и учебника, предусматривающий решение задач повышенной сложности.

Сформулируем условия, которые могут способствовать осуществлению уровневой дифференциации в классах с углублённым изучением математики:

1) Определённые уровни усвоения материала (базовый, продвинутый, высокий) и обязательные результаты обучения на каждом уровне должны быть открыты для всех учеников, это может активизировать познавательную активность, так как цели известны и достижимы.

2) Должен быть разрыв между уровнем требований и уровнем обучения: при одинаковом объёме предлагаемого материала устанавливаются различные требования к его усвоению.

3) Должна быть последовательность в продвижении ученика по уровням усвоения: так как темп усвоения материала у всех разным, то не следует торопить тех, кто не достиг базового уровня, но и не стоит задерживать «сильных» на этапе усвоения базовых знаний по теме.

4) Должен быть элемент добровольности в выборе уровня усвоения и контроля.

Примерная программа по алгебре и началам анализа [63] к учебнику С.М. Никольского [23] по теме «Действительные числа» для углублённого уровня предполагает 12-13 часов в зависимости от варианта планирования (4 или 5 часов в неделю). Предполагается изучение следующих вопросов:

Понятие действительного числа – 2 ч.

Множества чисел. Свойства действительных чисел – 2 ч.

Метод математической индукции – 1 ч.

Перестановки – 1 ч.

Размещения – 1 ч.

Сочетания – 1 ч.

Доказательство числовых неравенств – 1(2) ч.

Делимость целых чисел – 1 ч.

Сравнения по модулю m – 1 ч.

Задачи с целочисленными неизвестными – 1 ч.

Остановимся на вопросах темы «Действительные числа» (без включения вопросов комбинаторики и свойств делимости). Таким образом, вопросы темы, которые попадают в зону нашего внимания, предполагают 6(7) часов:

Понятие действительного числа – 2 ч.

Множества чисел. Свойства действительных чисел – 2 ч.

Метод математической индукции – 1 ч.

Доказательство числовых неравенств – 1(2) ч.

Представим, как материал данной темы может быть представлен на разных уровнях усвоения.

Базовый уровень: Рациональное число определяют как целые и дробные числа (положительные, отрицательные), которые образуют множество рациональных чисел (Дорофеев Г.В**)** или как число, представляемое обыкновенной дробью m/n, где числитель m — целое число, а знаменатель n — натуральное число (Виленкин Н.Я, Никольский С. М**.)**.

Некоторые свойства рациональных чисел выделенные в школьных учебниках:

1. *Свойства замкнутости*. Действия сложения и вычитания, умножения и деления, кроме деления на ноль всегда выполнимы.

2. *Свойство плотности*. Между любыми двумя рациональными числами всегда можно вставить число, которое больше одного и меньше другого из них, а значит, можно вставить и бесконечно много чисел.

В практике оно позволяет проводить измерения с любой степенью точности, поэтому множество рациональных чисел удовлетворяет потребностям практики в измерениях.

3. *Любое рациональное число* можно записать либо в виде десятичной дроби (в частности целого числа), либо в виде периодической дроби.

Иррациональное число определяют как бесконечную десятичную непериодическую дробь. Здесь нужно показать, что множество иррациональных чисел в отличие от множества рациональных чисел не обладает свойством замкнутости, но обладает свойством плотности.

Действительные числа определяются как объединение множества рациональных и иррациональных чисел. Необходимо обратить внимание на то, что всякое действительное число изображается бесконечной десятичной дробью, и на то, что множество действительных чисел полностью покрывает числовую прямую в отличие от множества рациональных и иррациональных чисел.

Продвинутый уровень. На данном уровне изучение темы начинается с рассмотрения вопроса о возможности расширения множества рациональных чисел, показав необходимость появления новых (иррациональных) чисел. Далее следует остановиться на доказательстве иррациональности различных чисел.

При изучении действительных чисел можно познакомить обучающихся с такими важными свойствами как, непрерывность и плотность действительных чисел, без которых невозможно построение математического анализа.

Базовый и продвинутый уровни полностью исчерпывают вопрос, связанный с действительными числами в общеобразовательной школе.

Высокий уровень. Вопросы, связанные с топологией дадут обучающимся, как отмечает Г.В. Дорофеев [14], возможность «повозиться» с множеством на числовой прямой, что чрезвычайно полезно для будущего изучения начал анализа, а так же поработать с новыми понятиями. Это поможет обучающимся не «растеряться» в будущем, когда в кратчайшее время должно быть освоено большое число определений и теорем основ математического анализа. Тем более некоторые изложенные понятия понадобятся уже в школьном курсе – открытые и замкнутые числовые промежутки, окрестности и ε- окрестности, верхние и нижние границы множества и функции. В частности, обучающиеся могут «прочувствовать» разницу между интервалом и отрезком, которая позволит им сознательно воспринимать формулировки соответствующих теорем начал анализа.

Включение темы «Метод математической индукции» обусловлено тем, что сам метод, являясь по форме индуктивным (на основании частного случая – базиса индукции - при $n = 1$, вывод делается для любого натурального n), по содержанию дедуктивен. Заметим, что индуктивное рассуждение происходит от частного к общему и может привести к ошибочным выводам, дедуктивное же – от общего к частному, основано на строгих обоснованиях.

В таблицах 4-6 представлено содержание каждого уровня, блоки задач соответствуют учебнику по алгебре и началам математического анализа С.М. Никольского и др [50], сформулированы дополнительные задачи.

Таблица 4

Содержание базового уровня

Содержание	*Основные знания.* *Знать:*	*Основные умения.* *Уметь:*	*Блоки задач:*
Рациональные числа	Понятие рационального числа: рациональное число выражается обыкновенной несократимой дробью; рациональное число выражается конечной десятичной дробью; рациональное число выражается бесконечной периодической десятичной дробью; свойства рациональных чисел.	Правильно употреблять термины, связанные с рациональными числами, и способы их записи; приводить примеры рациональных чисел, опознавать среди данных чисел рациональное число; переходить от одной формы записи рациональных чисел к другой.	№ 1.1 (а, б, в), № 1.2 (а), № 1.3, № 1.4, № 1.21 (а, б, в),
Иррациональные числа	Понятие иррационального числа (иррациональное число выражается бесконечной непериодической десятичной дробью).	Приводить пример иррационального числа; опознавать среди данных чисел иррациональное число.	№ 1.1 (г), № 1.2 (б, в)
Действительные числа	Определение действительного числа (действительное число выражается бесконечной десятичной дробью, конечной или бесконечной); Классификация множества действительных чисел Взаимно однозначное соответствие между множеством действительных чисел и числовой прямой; правила сравнения действительных чисел; представление о десятичных приближениях действительного числа по недостатку (избытку);	Устанавливать отношения между множествами натуральных, целых, рациональных, иррациональных и действительных чисел Изображать действительное число на числовой прямой; определять большее и меньшее число из данных чисел (сравнивать, упорядочивать наборы рациональных чисел; сравнивать и упорядочивать иррациональные числа.); находить десятичные приближения по недостатку (избытку) с нужной точностью.	№ 1.1 (д), № 1.6, № 1.8, № 1.9, № 1.10, № 1.11, № 1.12, № 1.13, № 1.14 № 1.21 (г), № 1.22, 1.23, 1.24, № 1.75 – 1.78

Таблица 5

Содержание продвинутого уровня

Содержание	*Основные знания. Знать:*	*Основные умения. Уметь:*	*Блоки задач:*
Рациональные числа	Доказательство утверждения о несуществовании рационального числа, квадрат которого равен 2; Доказательство равенства дроби с периодом 9 дроби с периодом 0.	Доказывать утверждение, что не существует такого рационального числа, квадрат которого равен 2; Доказывать утверждение о равенстве дроби с периодом 9 дроби с периодом 0.	№ 1.5, № 1.20
Иррациональные числа	Основные способы доказательства иррациональности числа; понятие о соизмеримых и несоизмеримых отрезках.	Доказывать иррациональность различных чисел; приводить примеры соизмеримых и несоизмеримых отрезков, доказывать что два отрезка соизмеримы или несоизмеримы.	№ 1.19
Действительные числа	Свойства действительных чисел; правила арифметических действий с действительными числами	Применять свойства действительных чисел при решении задач; выполнять действия с действительными числами.	№ 1.15, № 1.16, № 1.17, № 1.18, № 1.25, № 1.26, № 1.27, № 1.28, № 1.30, № 1.79 – 1.83
Квадратные и кубические корни	Извлечение квадратных и кубических корней без калькулятора	Извлекать квадратные и кубические корни без калькулятора	

Таблица 6

Содержание высокого уровня

Содержание	*Основные знания. Знать:*	*Основные умения. Уметь:*	*Блоки задач:*
Топология	Понятие ε - окрестности точки, верхней и нижней границы множества.	Находить ε - окрестность точки, верхнюю и нижнюю границу множества.	№ 1.29 (вложенные отрезки)
Метод математической индукции	Схему доказательства методом математической индукции.	Доказывать равенства, неравенства и утверждения методом математической индукции.	№ 1.31-1.35
Числовые кольца, поля.	Понятие числового кольца, поля.	Приводить пример числового кольца, поля; доказывать, что заданное множество является или не является числовым кольцом, полем.	

Дополнительные задания, для организации повторения, устной работы, которые можно использовать на каждом уровне

Базовый уровень:

1) Какие из данных чисел являются рациональными, какие иррациональными: 0,275; 0,(2); 1,323232…; 2,7(1828); 3,0123456…; 1,15(45)?

2) Приведите примеры рациональных и иррациональных чисел.

3) Любое ли иррациональное число является действительным? Каждое ли действительное число является иррациональным?

4) В каком виде можно записать рациональное число? В каком виде можно записать иррациональное число?

5) Существует ли рациональное число, обращающееся в бесконечную непериодическую дробь?

6) Определите, какое из чисел 0,252; 0,252252225…; 0,(252) ближе к нулю. Ответ поясните.

7) Найдите приближенное значение каждого числа 127,(23); -1,34(8); 0,1(27); -0,5678910…

а) с недостатком; б) с избытком; в) с точностью до 0,01.

8) Укажите на координатной оси число $\sqrt{3}$. Где оно будет расположено по отношению к числу 1,73?

Продвинутый уровень:

1) Приведите примеры несоизмеримых отрезков.

2) Всегда ли при сложении (умножении) двух иррациональных чисел получается иррациональное число?

3) Вычислите приближенно (с точностью до 0,01):

а) 0,101001… + 3,(42); б) 5,(7) – 2,(15);

в) – 0,56 · 0,(2); г) 45,6(12) : 10,(2).

4) Найдите сумму, произведение, разность и частное чисел 5,(1) и 2,1234567890… с точностью до 0,001.

Высокий уровень:

1) Есть ли наибольший и наименьший элемент в множестве:

а) [-3;3]; б) [0;0,01); в) [-1, $+\infty$); г) (0;0,01]; д) (-3;2); е) ($-\infty$,10].

2) а) Докажите, что в интервале (8;9) нет ни наименьшего ни наибольшего числа;

б) Докажите что среди чисел, удовлетворяющих неравенству $x^2 < 5$, нет ни наименьшего ни наибольшего числа.

3) Пусть ε>0. Множество всех точек ***x*** числовой прямой, удовлетворяющих неравенству $a-\varepsilon < x < a+\varepsilon$, называют ε–окрестностью точки ***a***, при этом точки $a-\varepsilon$ и $a+\varepsilon$ называют граничными точками ε–окрестности точки ***a***. Задайте ε–окрестность точки ***a***.

а) $a=5, \varepsilon=0{,}1$; б) $a=0, \varepsilon=0{,}01$; в) $a=-2, \varepsilon=\frac{1}{2}$; г) $a=-10, \varepsilon=\frac{1}{3}$.

4) Точки x и y являются граничными точками некоторой ε-окрестности. Найдите ε, если:

а) x=12,5, y=12,7; б) x=32,31, y=31,32;

в) x=-2,9, y=3,3; г) x=-31, y=-29,8.

5) Точка $a \in A$ называется внутренней точкой множества A, если некоторая ее окрестность содержится в A.

а) Какие точки у множеств (a,b), [a,b], ***N, R, Q*** являются внутренними?

б) Имеет ли внутренние точки конечное множество? Сформулируйте полученный результат в виде следствия и выясните, истинно ли обратное утверждение.

6) Найдите все предельные точки множеств: ***N, R, Q, I.***

7) Найдите верхнюю и нижнюю грани множеств:

а) $\{x \in Q \mid x^2 < 17\} \cap [-2,3]$;

б) $\{x \in R \mid x^2 < 1\} \cap [-5,0)$;

в) $\{x \in R \mid x^3 - 5x + 2 = 0\} \cap Z$;

г) $\{x \in R \mid x^3 - 5x + 1 = 0\} \cap Q$.

8) Число m называют точной верхней границей числового множества X, если для любого числа $x \in X$ справедливо неравенство $x \le m$, и для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $x_\varepsilon \in X$, что $x_\varepsilon > m - \varepsilon$. найдите точную

верхнюю границу множества, если: а) $X=[0;1]$; б) $X=[0;1)$; в) $X=\left\{x \mid x=\frac{1}{n}, n \in N\right\}$; г) $X=\left\{x \mid x=\frac{1+5n}{n}, n \in N\right\}$.

9) Число m называют точной нижней границей числового множества X, если для любого числа $x \in X$ справедливо неравенство $x \geq m$ и для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $x_\varepsilon \in X$, что $x_\varepsilon > m+\varepsilon$. найдите точную верхнюю границу множества, если:

а) $X=[0;1]$; б) $X=[0;1)$; в) $X=\left\{x \mid x=\frac{1}{n}, n \in N\right\}$; г) $X=\left\{x \mid x=\frac{1+5n}{n}, n \in N\right\}$.

10) Какие из арифметических операций всегда выполнимы и какие не всегда выполнимы в следующих числовых множествах:

а) $\boldsymbol{N}$ б) $\boldsymbol{Z}$ в) $\boldsymbol{Q}$ г) $\boldsymbol{I}$ д) $\boldsymbol{R}$

е) $\boldsymbol{A}=\{a+b\sqrt{3} \mid a,b \in Q\}$ ё) $\boldsymbol{B}=\{a+b\sqrt{3} \mid a,b \in Z\}$

ж) $\boldsymbol{C}=\{a+b\pi \mid a,b \in Q\}$ з) $\boldsymbol{D}=\{a+b\sqrt[3]{2} \mid a,b \in Q\}$

и) $\boldsymbol{E}=\{a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4} \mid a,b,c \in Q\}$ й) $\boldsymbol{F}=\{a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}+d\sqrt{6} \mid a,b,c,d \in Q\}$

11) Числовое множество $\boldsymbol{P}$ называется кольцом, если сумма, разность и произведение любых двух его элементов также принадлежат этому множеству и называют полем, если, кроме того, ему принадлежит и частное любых двух его элементов (естественно, с делителем, не равным 0).

а) Чем поле отличается от кольца?

б) Является ли поле кольцом?

в) Является ли любое кольцо поем?

г) Какие из множеств предыдущей задачи являются кольцами, но не являются полями, и какие являются полями?

12) Приведите пример числового кольца, поля.

В рамках применения технологии уровневой дифференциации, обучающиеся должны чётко представлять себе, требования, предъявляемые к уровню знаний на каждом уровне, потому считаем целесообразным, проведение дифференцированной домашней работы с выдачей заданий в начале изучения темы. В этом случае, требование открытости будет соблюдено.

Каждая задача оценивается в зависимости от уровня:

базовый уровень – 3 балла/зад. – максимум 30 баллов;

продвинутый уровень – 4 балла/зад. – максимум 40 баллов;

высокий уровень – 5 баллов/зад. – максимум 50 баллов.

Перевод набранных баллов в отметку:

0-24 баллов – 2 (неудовлетворительно);

25-28 баллов – 3 (удовлетворительно);

29-36 баллов – 4 (хорошо);

37-40 баллов – 5 (отлично).

Свыше 40 баллов дополнительная отметка 5 за каждые 5 баллов (таким образом, обучающиеся на высоком уровне могут получить три отличные отметки, при условии верного выполнения всех заданий).

Рекомендуется при оценивании дифференцированной домашней работы воспользоваться принципом обязательной пересдачи при неуспешном её выполнении. После необходимых консультаций, обучающиеся переделывают невыполненные задания.

Приведём примерный текст *дифференцированной домашней работы.*

Базовый уровень (задачи, каждая из которых оценивается в 3 балла):

1. Являются ли периодическими следующие дроби:

$$\frac{2}{7};\ 0,\ \ 8\ ;\ 0,444\ldots;\ 0,3;\ 0,12345\ldots 91011\ldots 99\ldots?$$

2. Существует ли наименьшее число, большее 0,52? Почему? [6, № 12]

3. *α, β* – иррациональны, *r* – рационально. Какие из следующих чисел могут принимать рациональные значения:

а) $\alpha + \beta$; б) $\alpha \cdot \beta$; в) $\alpha + r$; г) $\alpha \cdot r$ [6, № 30]?

4. $\alpha + \beta$, $\alpha - \beta$ – рациональные числа. Рациональны ли числа α и β? Докажите [16, № 345].

5. Постройте отрезки длиной $\overline{2}$, $\overline{3}$.

6. Данные вычислений представьте в виде десятичных дробей, указывая не менее трёх верных знаков после запятой:

а) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$; б) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}$; в) $\sqrt{7}-\sqrt{3}$.

7. Какое из двух иррациональных чисел больше: $\sqrt[3]{3}$ или $\sqrt{2}$? Докажите.

8. Каким является число α (рациональным или иррациональным), если, начиная с некоторого номера, все его десятичные приближения по недостатку представляют собой равные дроби? [12, № 206]

9. Говоря о числах 2, $\sqrt{2}$ и π, ученик назвал число 2 точным, а числа $\sqrt{2}$ и π - приближёнными. Верно ли это утверждение? [12]

10. Обратите:

а) в обыкновенную дробь: 0,(4); 12,(501);

б) в десятичную дробь: 2; $\frac{13}{12}$.

Продвинутый уровень (задачи, каждая из которых оценивается в 4 балла):

1. Каково наибольшее действительное число, меньшее 0,9, в десятичную запись которого не входит цифра 9? [6, № 13]

2. α, β – иррациональны, r – рационально. Какие из следующих чисел могут принимать рациональные значения:

а) $\sqrt{r}$; б) $\sqrt{\alpha}$; в) $\sqrt{\alpha+\beta}$; г) $\sqrt{\alpha+r}$ [6, № 30].

3. Известно, что числа x, y и $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ рациональны. Докажите, что $\sqrt{x}$ и $\sqrt{y}$ рациональны.

4. Докажите рациональность чисел:

а) $p=\sqrt{57-40\sqrt{2}}-\sqrt{57+40\sqrt{2}}$; б) $q=\sqrt[3]{1-27\sqrt[3]{26}+9\sqrt[3]{676}}+\sqrt[3]{26}$.

5. Изобразите на координатной прямой числовой промежуток $[\sqrt{3};4]$ [16, № 69]

6. Вычислите:

а) 0,(2) + 0,(37); б) 0,(73) – 0,(487);

в) $\frac{0,8\;5\;+0,17(1)}{0,8\;5\;-0,17(1)}+\frac{0,8\;3\;+0,1(6)}{0,8\;3\;-0,1(6)}$ [6, № 35].

7. Разность между действительным числом α и одним из его десятичных приближений есть число рациональное. Каким является число α? [16, № 340]

8. Сравните числа $\sqrt{2}+\sqrt{11}$ и $\sqrt{3}+3$.

9. Найдите ошибку в рассуждениях: «Пусть $n, p, q \in \mathbb{N}$, $q \neq 1$ и $\frac{p}{q} \in \boldsymbol{Q}$. Докажем, что $\sqrt{n}=\frac{p}{q}$. Тогда $n=\frac{p^2}{q^2}$, что невозможно, так как при $n \in \mathbb{N}$, $q \neq 1$ не может равняться несократимой дроби. Значит, при любом натуральном n число $\sqrt{n}$ есть иррациональное число».

10. Какой наибольший диаметр может иметь круг, вырезанный из квадрата с диагональю 30 мм? [7]

Высокий уровень (задачи, каждая из которых оценивается в 5 баллов):

1. Каково наименьшее действительное число, которое больше, чем 7,6, причём в его десятичную запись не входят цифры 0, 1, 2? [6, № 14]

2. α, β – иррациональны, r – рационально. Какие из следующих чисел могут принимать рациональные значения:

а) $\sqrt{\alpha+\beta}$; б) $\sqrt{\alpha+r}$; в) $\sqrt{\alpha}+\sqrt{r}$; г) $\sqrt{\alpha}-\sqrt{r}$. [6, № 30]

3. Докажите, что период десятичной дроби, выраженной числом $\frac{m}{n}$ не может быть длиннее, чем n – 1. [6, № 17]

4. Докажите рациональность числа $r=\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}-\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$.

5. Изобразите на координатной прямой числовой промежуток $\sqrt{7};\ \sqrt{7}+\sqrt{5}$. [16, № 69]

6. Вычислите:

а) $\frac{\left(\frac{2}{3}+0,(3)\right):0,25}{0,12(3):0,0925}+12,5\cdot 0,32$; б) $\frac{0,725+\frac{3}{5}+0,175+0,42(6)+0,12(3)}{0,128\cdot 6,25-(0,0345:0,12)}$. [6, № 35]

7. Может ли частное от деления иррационального числа на какое-нибудь его десятичное приближение быть рациональным числом? [16, № 340]

8. Докажите иррациональность числа $\sqrt[3]{4}-\sqrt{3}$.

9. Приведите примеры иррационального и рационального чисел, отличающихся от числа $\overline{2}$ на 0,003. [12]

10. Докажите, что система (Z^+; 0, 1; +, ·; ≤) не является полем.

§7. Технология усвоения понятия действительного числа

Сформулируем *требования* к технологии обучения математике:

1. В основу построения технологии положены результаты научных исследований, связанных с осуществлением процесса обучения;

2. Последовательность шагов подробно описана;

3. Обязательное проведение диагностики достигнутых результатов реализации каждого шага, коррекция;

4. Необходимо предусмотреть обратную связь между учениками и учителем;

5. Любая технология должна гарантировать достижение определённого результата;

6. Применение технологии предполагает, что её может воспроизвести любой учитель, при этом достижение результата гарантировано.

Следует обратить внимание, что *технология существенно отличается от методики* именно требованием гарантии достижения результата и возможностью воспроизводить её любым учителем.

Выделяются *критерии технологичности* процесса обучения математике:

- заданная цель должна быть диагностичной, определены методы диагностики её достижения;

- учебный материал представлен в виде системы задач с ориентирами и способами их решения;

- логика этапов усвоения учебного материала определена без возможности варьирования;

- определены способы взаимодействия участников учебного процесса друг с другом и с информационной техникой на каждом этапе;

- границы допустимого отступления от определённых технологией этапов;

- в учебном процессе предусмотрено применение новейших средств и способов предоставления информации.

Остановимся на некоторых *методиках и технологиях организации усвоения математических понятий.*

Е.И. Лященко в учебном пособии по методике преподавания математике [46, С. 46] выделяет следующие *этапы раскрытия содержания* математического объекта (формирование определения):

1. Логический анализ структуры определения объекта (выделение термина, рода, видовых отличий и логической связи свойств).

2. Выполнение действия подведение под понятие (приведение примеров).

3. Выполнение действия получения следствий из факта, что конкретный объект принадлежит к классу объектов, охарактеризованных определением.

4. Если требует педагогическая ситуация, замена определения ему эквивалентным.

Т.А. Иванова в учебном пособии по теории и методике обучения математике [32] рассматривает теорию Л.С. Выгодского о зоне ближайшего развития ученика как основу технологии развивающего обучения. Опираясь на таксономию целей обучения Б. Блума, предложенную им в 1956 году, автор описывает диагностируемые учебные цели на уровнях «знание», «понимание», «применение». Предполагается, что учитель должен прогнозировать типичные ошибки учащихся в работе с определением, подбирать для их устранения соответствующую систему упражнений.

В.М. Монахов предлагает воспользоваться технологией проектирования учебного процесса на основе параметрической модели, в котором учебный процесс проектируется на всех уровнях содержания и форм учебной деятельности. Особенность данной технологии состоит в том, что указываются не только знания, которые формируются, но и какие искажения и деформации могут возникнуть, как их скорректировать, как предотвратить возможные затруднения. При использовании данной технологии формируется *технологическая карта*, включающая в себя:

- целеполагание;
- диагностику;
- дозирование (внеучебная деятельность учащихся);
- логическую структуру;
- коррекцию.

Технология, предложенная Г.И. Саранцевым [65], на наш взгляд, наиболее полно удовлетворяет требованиям современной школы. Она включает в себя: мотивацию введения понятия; выделение существенных свойств понятия; синтез выделенных свойств, формулировка определения понятия; понимание смысла слов в определении понятия; усвоение логической структуры определения понятия; запоминание определения понятия; применение понятия; установление связей данного понятия с другими понятиями.

Поскольку изучение той или иной научной теории действительного числа (Вейерштрасса, Кантора, Дедекинда) в школе не представляется возможным, то в формировании необходимых знаний и представлений учащихся о действительных числах решающее значение имеет система задач и упражнений, отмечают Е.С. Канин, Е.М Канина, и М.Д. Чернявский [35, С.4]. Потому целесообразно для формирования понятий применить систему задач и упражнений, удовлетворяющей предложенной схеме.

Е.И. Лященко выделяет следующие *требования к системе задач* на усвоение понятий:

1. Показ практической значимости нового понятия или с его значимостью для дальнейшего продвижения в изучении математики;
2. Актуализацию знаний и умений, необходимых при формировании данного понятия;
3. Выделение существенных признаков понятия;
4. Распознавание формируемого понятия;

5. Усвоение текста определения понятия;

6. Использование символики, связанной с понятием;

7. Установление свойств понятия;

8. Применение понятия [46, С. 68-69].

Один из возможных системных подходов к конструированию систем задач осуществлен *Г.И. Саранцевым* [67].

В предложенной автором концепции (схема 1) каждому этапу формирования понятия сопоставляются соответствующие задачи. В диссертации именно этот подход взят за основу, практическая реализация которого представлена ниже (таблицы 7-11).

Схема 1

Технология формирования понятия с помощью системы задач

Этапы формирования понятия | **Задачи, реализующие их**

Таблица 7

1 этап. Мотивация введения понятия

Задачи на применение изученных понятий и теорем (направление 1 по схеме)		
Базовый уровень (3 б.)	Продвинутый уровень (4 б.)	Высокий уровень (5 б.)
Найти для следующих чисел их целые и дробные части, а также приближения по недостатку и по избытку с точностью до 0,01 и 0,0001: 1) $\pi = 3{,}1415926$, 2) $-\pi$.	Расположите в порядке возрастания числа: -1,5; $\frac{6}{7}$; $5\frac{4}{11}$; $-3\frac{1}{3}$; $\frac{7}{8}$; 5,(34).	Существует ли обыкновенная дробь со знаменателем 20 принадлежащая промежутку $\left(\frac{4}{13};\frac{5}{13}\right)$?
Следующие рациональные числа запишите в виде конечных или периодических десятичных дробей: а) $\frac{1}{4}$, б) $\frac{3}{7}$, в) $\dfrac{\left(1{,}24-\frac{1}{25}\right)\cdot 2{,}5-\frac{1}{3}:\frac{1}{18}}{1{,}4:0{,}1-9}$.	Какому числовому множеству принадлежит корень уравнения $x^2-8=0$?	Существует ли рациональное число, обращающееся в бесконечную непериодическую дробь?
Представьте число в виде бесконечной десятичной дроби: а) $\frac{1}{7}$; б) $\frac{9}{11}$; в) $\frac{5}{12}$; г) $\frac{4}{15}$.	Каким из нижеследующих множеств принадлежит число $\frac{8}{11}$: R; Z; N; Q; $Q \cap R_+$; $Q \cap R_-$; R_+; R_-? [12, №44 на С.9]	Существует ли наименьшее число, большее 0,52? Почему? [12, № 12]
Представьте в виде обыкновенной периодическую десятичную дробь: а) 0,(13); б) 1,2(3); в) 0,(857142).	Какие из чисел $\frac{3}{8}$; -1; 7; $\sqrt{2}$; -12; $\sqrt{3}$; 9; π; $\frac{\pi}{4}$ содержит множество $Q \cap$ [-1; 7) ? [16, №45 на С.9]	Пусть $n \in N$. Укажите хотя бы по одному иррациональному числу, принадлежащему интервалам $0; 10^{-n}$, $n; n+1$ соответственно [16, №38 на С.8]
Какие из данных чисел являются рациональными, какие иррациональными: 0,275; 0,(2); 1,323232…; 2,7(1828); 3,0123456…; 1,15(045)	Докажите, что если числа x, y, $(\sqrt{x}+\sqrt{y})$ рациональные и $x \neq y$, то и число $(\sqrt{x}-\sqrt{y})$ - рациональное. [16, №20 на С.7]	Используя результаты предыдущей задачи, установите: а) Существует ли наименьшее число среди всех положительных иррациональных чисел; б) Существует ли наибольшее иррациональное число? [16, №39 на С.8-9]
Задачи практического характера (направление 2 по схеме)		
Докажите, что не существует рационального числа, квадрат которого равен: а) 3; б) 5.	Постройте отрезки длиной $\overline{2}$, $\overline{5}$.	Приведите примеры несоизмеримых отрезков
Докажите, что не существует рационального числа, куб которого равен: 2.	Изобразите на координатной прямой промежуток $\overline{3}$; 4 [12, № 69-С.11].	Какой наибольший диаметр может иметь круг, вырезанный из квадрата с диагональю 30 мм.

Таблица 7 (продолжение)

Задачи практического характера (направление 2 по схеме)		
Базовый уровень (3 б.)	Продвинутый уровень (4 б.)	Высокий уровень (5 б.)
Найдите гипотенузу равнобедренного прямоугольного треугольника, если его площадь равна 4,5.	Вычислите координаты центров и длины следующих интервалов: а) $]-\pi;\ 2\pi\ [$; б) $]\ 0;\ \sqrt{\pi}\ [$. [13, № 56 - С15]).	Изобразите в координатной плоскости множество точек $(x;y)\ \vert\ 2 < x < \sqrt{5}$ и $\sqrt{3} < y < \sqrt{6}$ [16, № 63 – С. 16]

Таблица 8

2 этап. Выделение существенных свойств понятия

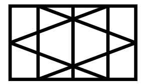
Задачи практического характера (направление 1 по схеме)		
Базовый уровень (3 б.)	Продвинутый уровень (4 б.)	Высокий уровень (5 б.)
Определите, какое из чисел 0,252; 0,252252225…; 0,(252) ближе к нулю. Почему?	Укажите на координатной прямой число $\sqrt{3}$. Где оно будет расположено по отношению к числу 1,73?	Говоря о числах 2, $\sqrt{2}$, π, ученик назвал число 2 точным, а числа $\sqrt{2}$ и π – приближенными. Верно ли это утверждение?
Задачи на построение объектов, удовлетворяющих указанным свойствам (направление 2 по схеме)		
Базовый уровень (3 б.)	Продвинутый уровень (4 б.)	Высокий уровень (5 б.)
Укажите два иррациональных числа, сумма (разность, произведение, частное) которых иррационально.	Всегда ли при сложении (умножении) двух иррациональных чисел получается иррациональное число? Ответ поясните примерами	Докажите, что отрезки $\left[\sqrt{2}-\frac{1}{n};\sqrt{2}+\frac{1}{n}\right]$ $(n \in \mathrm{N}, n \to +\infty)$, вложенные. Имеют ли они общую точку? Если да, то какому числу она соответствует – рациональному или иррациональному? (эта задача показывает что множество рациональных чисел не обладает свойством непрерывности)
Задачи с моделями фигур (направление 3 по схеме)		
Докажите, что длина диагонали прямоугольника со сторонами 1 и 2 несоизмерима с длинами его сторон. [16, №73 - С.12]	Существует ли на координатной плоскости прямая, обе координаты всех точек которой : а) рациональны, б) иррациональны? [16, №75 - С.12]	В равнобедренном треугольнике, угол при основании которого равен 72^0, длина биссектрисы этого угла несоизмерима с длинами боковых сторон треугольника. Докажите. [16, №74 - С.12]
Укажите два различных способа построения отрезка, длина которого есть число: а) $\sqrt{5}$; б) $\sqrt{6}$; в) $\sqrt{7}$; г) $\sqrt{10}$.[16, №67 - С.11]	Докажите что длина диагонали квадрата, сторона которого равна 1, выражается иррациональным числом.	Дан прямоугольник со сторонами 2 и $\sqrt{3}$, в него вписаны два треугольника, как показано на рисунке.  $\sqrt{3}$ Выясните, каким числом (рациональным или иррациональным) выражается отношение площадей треугольника и прямоугольника.

Таблица 9

3 этап. Усвоение логической структуры определения понятия

Задачи на построение объектов, удовлетворяющих указанным свойствам (направление 1 по схеме)		
Базовый уровень (3 б.)	Продвинутый уровень (4 б.)	Высокий уровень (5 б.)
Существует ли рациональное число, обращающееся в бесконечную непериодическую дробь?	Каким является число α: рациональным или иррациональным, если, начиная с некоторого номера, все его десятичные приближения по недостатку представляют собой равные дроби? [39, № 206]	Может ли степень a^b быть рациональным числом, если: а) a, b – рациональные числа; б) число a – рациональное, а число b - иррациональное; в) число a – иррациональное, число же b - рациональное; г) a, b – иррациональные числа? Приведите примеры. [16, №86 - С.13]
Задачи с моделями фигур (направление 2 по схеме)		
Пусть дан квадрат $ABCD$. Может ли его периметр быть иррациональным числом? В каком случае?	Пусть дан квадрат $ABCD$. Может ли периметр треугольника ABC быть рациональным числом?	Пусть дан квадрат $ABCD$. Может ли отношение периметра квадрата к сумме длин его диагоналей быть рациональным числом?
Задачи на распознавание объектов, принадлежащих объему понятия (направление 3 по схеме)		
Пусть дан квадрат $ABCD$. Может ли его периметр быть иррациональным числом? В каком случае?	Пусть дан квадрат $ABCD$. Может ли периметр треугольника ABC быть рациональным числом?	Пусть дан квадрат $ABCD$. Может ли отношение периметра квадрата к сумме длин его диагоналей быть рациональным числом?
кажите, какие из перечисленных исел являются рациональными, а акие иррациональными: а) 2,1; б) $\sqrt{15}$; в) $\sqrt{1,44}$; г) $6\sqrt{3}-3\sqrt{12}$;)3,012345…; е) $\sqrt{1+\sqrt{3}}+\sqrt{2}$; ж) $\sqrt{0,144}$; з) 0,(2); о) $\sqrt{0,049}$; л) π;) $\sqrt{2+2\sqrt{3}}-\sqrt{3}$; к) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}-\sqrt{15}$;) $\sqrt{6,25}$; н) $\sqrt{111}$; п) $\sqrt[3]{8}$; р) $\sqrt[3]{16}$.	Докажите, что дробь 0,1234567…, в которой после запятой выписаны подряд все натуральные числа, не задает рациональное число.	Пусть $a^3+4a-\frac{7}{a}$ является иррациональным числом. Докажите, что a - также иррациональное число.

Таблица 9 (продолжение)

3 этап. Усвоение логической структуры определения понятия

Задачи на распознавание объектов, принадлежащих объему понятия (направление 3 по схеме)		
Базовый уровень (3 б.)	Продвинутый уровень (4 б.)	Высокий уровень (5 б.)
Докажите, что следующие числа $\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt[3]{12}$, $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ - иррациональные.	α, β – иррациональны, r – рационально. Какие из данных чисел могут принимать рациональные значения: а) $\overline{r}$; б) $\overline{\alpha}$; в) $\overline{\alpha+\beta}$; г) $\overline{\alpha+r}$? [16, 30]	Приведите примеры иррационального и рационального чисел, отличных от числа $\overline{2}$ на 0,003 [42]
Задачи на выделение следствий из определения понятия (направление 4 по схеме)		
Числа a, b – иррациональны, r – рационально. Может ли принимать рациональное значение число $r\cdot\ \overline{a+b}$?	Докажите, что число α рационально, если рациональны числа α^{11} и α^{3}. (Указание: представьте число $\alpha=\frac{\alpha^{3}{}^{4}}{\alpha^{11}}$)	Докажите, что период десятичной дроби, выраженной числом $\frac{m}{n}$, не может быть длиннее, чем n-1. [16, № 17].
Задачи на дополнение условий (направление 5 по схеме)		
Покажите, что между любыми двумя рациональными числами содержится хотя бы одно рациональное число. [16, №16 - С.6]	Разность между действительным числом α и одним из его десятичных приближений есть число рациональное. Каким числом является α? [39, № 340].	Объясните эквивалентность двух высказываний: 1) Между любыми двумя рациональными числами заключено хотя бы одно другое рациональное число; 2) Между любыми двумя рациональными числами заключено бесконечно много других рациональных чисел [16, №17 на С.6]

Таблица 10

4 этап. Применение понятия

Задачи на составление родословной понятий (направление 1 по схеме)		
Базовый уровень (3 б.)	Продвинутый уровень (4 б.)	Высокий уровень (5 б.)
α, β – иррациональны, r – рационально. Какие из данных чисел могут принимать рациональные значения: а) $\alpha+\beta$; в) $\alpha+r$; б) $\alpha\cdot\beta$; г) $\alpha\cdot r$? [16, № 30]	Может ли произведение двух периодических дробей быть дробью непериодической?	Покажите, что найдутся такие иррациональные числа a и b, что: a^{b} – рациональное число; a^{b} – натуральное число [16, №35* - С.8]
Задачи на применение понятия в различных ситуациях (направление 2 по схеме)		
Докажите, что корнями уравнения $x^2-13x-11=0$ являются два иррациональных числа, сумма и произведение которых не только рациональные, но даже целые.	Докажите, что на прямой $y=7x-3$ координаты любой точки либо обе рациональные, либо обе иррациональные.	Дано уравнение $x^2+3x+a=0$, a - иррациональное число. Докажите, что это уравнение либо не имеет корней, либо имеет два различных иррациональных корня.

Таблица 11

5 этап. Установление связей изучаемого понятия с другими понятиями

Задачи на составление родословной понятий (направление 1 по схеме)		
Базовый уровень (3 б.)	Продвинутый уровень (4 б.)	Высокий уровень (5 б.)
Известно, что $\alpha+\beta$, $\alpha-\beta$ - рациональные числа. Рациональны ли числа α и β? Докажите. [40, № 345]	Известно, что числа x, y, $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ – рациональны. Докажите, что число $\sqrt{x}-\sqrt{y}$ рационально	Известно, что числа x, y, $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ – рациональны. Докажите, что числа $\sqrt{x}$ *и* $\sqrt{y}$ рациональны
Задачи на применение понятия в различных ситуациях (направление 2 по схеме)		
Расположите в порядке возрастания следующие значения функций: 1) $\sin 4^0$, $\cos 2^0$, $tg 3^0$; 2) $\sin 10^0$, $\cos 275^0$, $tg 190^0$	Докажите что следующие числа иррациональны: а) $\cos 40^0$ б) $\sin 20^0$ в) $\cos 10^0$ г) $\sin 50^0$ д) $\lg\frac{3}{2}$ е) $\log 15$ ж) $\log_2 3$	Пусть дан квадрат $ABCD$. Может ли периметр квадрата быть числом рациональным, а площадь – иррациональным;
Сравните значения логарифмических функций: 1) $\log_2 3$ и $\log_5 8$ 2) $\log_2 5$ и $\log_3 8$	Докажите, что числа $\sqrt{5}+\sqrt{2}$, $\sqrt{5}-\sqrt{2}$, $\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}$, $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$ - являются иррациональными. [13, № 43* на С12]	Могут ли периметр и площадь равностороннего треугольника быть одновременно рациональными числами.
Задачи на систематизацию понятия (направление 3 по схеме)		
Базовый уровень (3 б.)	Продвинутый уровень (4 б.)	Высокий уровень (5 б.)
На числовой прямой точками C и D отмечены два из следующих чисел $\sqrt{8},\ -1{,}2,\ 0{,}5\pi,\ -\frac{\pi}{4}$. Какое число обозначено точкой C, а какое – точкой D?	На числовой прямой отмечены точки K,L,M. Укажите координаты каждой из отмеченных точек , если известно, что имя являются числа: а) $-\sqrt{3},\ -2,\ -\frac{\pi}{2}$; б) $\sqrt{3},\ \frac{1}{\sqrt{3}},\ 1$; в) $\sqrt{5},\ 2{,}5,\ \frac{\sqrt{21}}{2}$; г) $\sqrt{20},\ 4{,}5,\ \frac{3\pi}{2}$	На числовой прямой отмечены точки -3 и 1. При помощи циркуля и линейки постройте точки 0 и 5.
	Доказать, что следующие числа являются алгебраическими: а) $\sqrt{3}$, б) $\sqrt[3]{5}$, в) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$, г) $\cos 20^0$, д) $\sin 10^0$ [16,№1 - С.101]	На числовой прямой отмечены точки $-\sqrt{2}$ и 3. При помощи циркуля и линейки постройте точку 0.
		Установите взаимно-однозначное соответствие между элементами множеств ***N*** и ***Z, N*** и ***Q.***

§8. Элективный курс «Действительные числа в задачах»

Одной из составляющих профильного обучения старшеклассников являются курсы по выбору обучающихся – *элективные курсы.* Выбор предметного элективного курса в рамках определённого профиля позволяет каждому из них спроектировать индивидуальную образовательную траекторию.

Предлагаемая программа элективного курса «*Действительные числа в задачах»* предназначена для обучающихся 11 класса математического профиля. Для её реализации достаточно знаний и умений по математике, полученных в основной школе.

Цель элективного курса: *обобщение у обучающихся системы знаний о понятии действительного числа.*

Задачи элективного курса: 1) знакомство обучающихся с историей развития математической мысли и научных представлений о числе; 2) формирование системных знаний о понятии действительного числа и умений применять его при решении задач разного уровня трудности; 3) развитие мыслительных, творческих способностей обучающихся; 4) активизация познавательной и творческой деятельности обучающихся.

Теоретический материал по данному курсу разнообразен, является *новым* для обучающихся, освоение его предполагается при решении системы задач.

Программа элективного курса рассчитана на первый модуль 11 класса (I полугодие) и предполагает 34 часа (2 ч. в неделю).

Форма занятий: комбинированные уроки, на которых предполагается изучение теоретического материала и решение задач. Виды уроков: урок – лекция, урок – практикум, урок самостоятельного решения задач (по выбору преподавателя с учетом подготовленности класса).

В результате изучения программы данного элективного курса обучающиеся должны:

- правильно употреблять уже знакомые понятия числа и *новые термины*: числовые полукольцо, кольцо, поле, упорядоченное полукольцо; счетные и несчетные множества; мощность множества; алгебраические и трансцендентные числа; конечная и бесконечная непрерывная (цепная) дробь;

- уметь определять является ли: *множество счетным или несчетным*; *число алгебраическим или трансцендентным;*

- уметь представлять: обыкновенную дробь в виде *конечной цепной* (непрерывной) дроби, а квадратичную иррациональность в виде *бесконечной цепной дроби;*

- уметь *доказывать свойства и теоремы,* относящиеся к основным понятиям и решать типовые задачи, иллюстрирующие основные положения элективного курса;

- знать *историю развития понятия числа и вклад ученых* непосредственно связанных с этим понятием.

Учебно – тематическое планирование

№	*Содержание темы*	*Кол-во часов*
1	Свойства числовых систем $\langle N; ' \rangle$, $\langle N; + \rangle, \langle N; \cdot \rangle$	2
2	Свойства числовых систем $\langle N; < \rangle, \langle N; +, \cdot, < \rangle$	2
3	Строение элементов кольца целых чисел	2
4	Алгебраические и порядковые свойства целых чисел	2
5	Рациональные числа как обыкновенные дроби	2
6	Рациональные числа как десятичные дроби	2
7	Иррациональные числа	2
8	Алгебраические (А) и трансцендентные (Т) числа	2
9	Счетные множества	2
10	Несчетные множества	2
11	Действительные числа как объединение множеств (рациональных и иррациональных; алгебраических и трансцендентных чисел)	4
12	Рациональные числа и конечные цепные дроби	4
13	Квадратичные иррациональности и бесконечные периодические цепные дроби	4
14	Итоговая зачётная работа	2
	Всего:	34 ч.

Данный элективный курс включает в себя *13 тем* (16 занятий). К каждой из них предложено 10 упражнений (задач), распределённых по уровням в соответствии с концепцией уровневой дифференциации: *4 задания* базового; *2* -продвинутого; *4 задания* высокого уровня. Содержание элективного курса представлено в таблицах 10-22. Не предполагается, что все упражнения, представленные по каждой теме, должны быть решены на занятии. В зависимости от уровня подготовки обучающихся, можно выбрать из них те, которые будут разобраны на уроке, а остальные - предложить для домашней работы. Эти домашние задания, вопросы и гипотезы могут стать темами мини-исследований старшеклассников.

Раскроем содержание занятий.

Занятие №1. *Свойства числовых систем* $\langle N; ' \rangle$, $\langle N; + \rangle, \langle N; \cdot \rangle$

Основная цель – обобщить понятие о множестве натуральных чисел, об аксиоматической теории натуральных чисел.

Для изучения предлагаются следующие вопросы: аксиоматика Пеано, бесконечность множества натуральных чисел; определение сложения и умножения через отношение «непосредственно следовать за», доказательство свойств операций сложения и умножения, вводится понятие полукольца натуральных чисел.

План занятия №1

1.1. Аксиомы Пеано – определение натурального ряда

1.2. Бесконечность множества натуральных чисел

1.3. Определение сложения через отношение «непосредственно следовать за»

1.4. Доказательство свойств операции сложения

1.5. Определение умножения через отношение «непосредственно следовать за»

1.6. Доказательство свойств операции умножения

1.7. Понятие полукольца натуральных чисел

Таблица 12

Занятие № 1

<table>
<tr><td colspan="3">Содержательно-методическая линия натуральных чисел - Свойства числовых систем $\langle N;'\rangle$, $\langle N;+\rangle$, $\langle N;\cdot\rangle$</td></tr>
<tr><td>Базовый уровень (3 б.)</td><td>Продвинутый уровень (4 б.)</td><td>Высокий уровень (5 б.)</td></tr>
<tr><td>Упр.1.1. Доказать бесконечность множества натуральных чисел.</td><td rowspan="2">*Упр.1.5. Доказать следующие свойства сложения натуральных чисел:
1) коммутативность;
2) сократимость.</td><td>**Упр.1.7. Доказать теорему: сложение (умножение) натуральных чисел существует и единственно.</td></tr>
<tr><td>Упр.1.2. 1) Введите символы 2, 3, …, 7 и, пользуясь определением сложения натуральных чисел, найдите $3+4$ и $4+3$.
2) Введите символы 2, 3, …, 12 и, пользуясь определением умножения натуральных чисел, найдите $3\cdot4$ и $4\cdot3$.
3) Пользуясь аксиомами сложения и умножения натуральных чисел, вычислите $2\cdot(3+1)$ и $2\cdot3+2\cdot1$.</td><td>**Упр.1.8. Доказать теорему, утверждение которой лежит в основе определения отношения “меньше” для натуральных чисел. Для любых натуральных чисел c и d имеет место одно и только одно из соотношений:
1) существует $k\in$N такое, что d = c + k;
2) c = d;
3) существует $m\in$ N такое, что c = d + m.</td></tr>
<tr><td>Упр.1.3. Доказать ассоциативность сложения натуральных чисел.</td><td rowspan="2">*Упр.1.6. Доказать следующие свойства умножения натуральных чисел:
1) ассоциативность;
2) коммутативность.</td><td>**Упр.1.9. Дано трёхзначное натуральное число (число не может начинаться с нуля), не кратное 100.
а) Может ли частное этого числа и суммы его цифр быть равным 90? б) Может ли частное этого числа и суммы его цифр быть равным 88?
в) Какое наибольшее натуральное значение может иметь частное данного числа и суммы его цифр?</td></tr>
<tr><td>Упр.1.4. Доказать дистрибутивность умножения относительно сложения для натуральных чисел.</td><td>**Упр.1.10. Доказать, что аксиоматика, основанная на сложении эквивалентна аксиоматике Пеано.</td></tr>
</table>

Таблица 13

Занятие № 2

<table>
<tr><td colspan="3">Содержательно-методическая линия натуральных чисел - Свойства числовых систем $\langle N;<\rangle$, $\langle N;+,\cdot,<\rangle$</td></tr>
<tr><td>Базовый уровень (3 б.)</td><td>Продвинутый уровень (4 б.)</td><td>Высокий уровень (5 б.)</td></tr>
<tr><td>Упр.2.1. 1) Введите символы 2, 3, …, 7 и, пользуясь определением сложения натуральных чисел, найдите $2+5$, $5+2$ и $2+2$.</td><td>*Упр.2.5. Доказать, что неравенства одинакового смысла можно почленно складывать и перемножать</td><td>**Упр.2.7. Доказать, что в N выполняется аксиома Архимеда</td></tr>
</table>

Таблица 13 (продолжение)

Занятие № 2

Содержательно-методическая линия натуральных чисел - Свойства числовых систем $\langle N;<\rangle, \langle N;+,\cdot,<\rangle$		
Базовый уровень (3 б.)	Продвинутый уровень (4 б.)	Высокий уровень (5 б.)
2) Введите символы 2, 3, …, 10 и, пользуясь определением умножения натуральных чисел, найдите $2\cdot 5,\ 5\cdot 2$ и $2\cdot 2,\ 4\cdot 2$. 3) Пользуясь аксиомами сложения и умножения натуральных чисел, вычислите $2\cdot(4+1)$ и $2\cdot 4+2\cdot 1$.	* Упр.2.6. Доказать, что единица – наименьший элемент в N.	**Упр.2.8. Доказать, что N – дискретно.
Упр.2.2. а) Пользуясь свойствами натуральных чисел, поясняя каждый шаг, решите уравнение $2\cdot x+4=6$. б) Пользуясь аксиомами Пеано и определением сложения натуральных чисел, докажите, что уравнение $x+3=2$ не разрешимо в натуральных числах.		**Упр.2.9. Доказать следующее свойство линейно упорядоченного множества натуральных чисел: N – вполне упорядочено.
Упр.2.3. Доказать, что система $\langle N,<\rangle$ является линейно упорядоченным множеством.		**Упр.2.10 Простые примеры показывают, что из того, что $a\geq b$ еще не следует существование частного $a:b$. Так, определяя числа $2=1',\ 3=2',\ 4=3'$ покажите, что не существует числа a, для которого $2\cdot a=3$. Пользуясь аксиомами Пеано, определениями, свойствами сложения и умножения натуральных чисел, докажите, что в полукольце натуральных чисел уравнение $3\cdot x=2$ не разрешимо.
Упр.2.4. Доказать, что сложение и умножение натуральных чисел - монотонны.		

Таблица 14

Занятие № 3

Содержательно-методическая линия целых чисел - строение элементов кольца целых чисел		
Базовый уровень (3 б.)	Продвинутый уровень (4 б.)	Высокий уровень (5 б.)
Упр. 3.1. Найти сумму, разность и произведение матриц А и В. Найти произведение матрицы А на число. Проверить на нескольких примерах, что произведение зависит от порядка сомножителей.	* Упр. 3.5. а) Доказать свойства операции сложения матриц. б)Доказать свойства операции умножения матриц.	** Упр. 3.7. Доказать теорему: Отношение сравнимости обладает тремя свойствами: рефлексивности, симметричности и транзитивности.

Таблица 14 (продолжение)

Занятие № 3

Содержательно-методическая линия целых чисел - строение элементов кольца целых чисел		
Базовый уровень (3 б.)	Продвинутый уровень (4 б.)	Высокий уровень (5 б.)
Упр. 3.2. Вычислить следующие линейные комбинации матриц A и B: 1) $3\cdot A + 2\cdot B$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$; 2) $5\cdot A - 3\cdot B$.	* Упр. 3.6. Решите уравнения (m = 5), где x обозначает неизвестный класс вычетов: 6) $x^3 + 3x^2 + 1 = 0$, 7) $x^3 = 3$, 8) $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$, 9) $x^5 + 4x = 0$.	** Упр. 3.8. Доказать, что каждое целое число сравнимо по модулю m с одним из чисел ряда 0, 1, 2, …, m – 1 .
Упр. 3.3. Показать на примерах, что каждое целое число сравнимо по модулю m с одним из чисел ряда 0, 1, 2, …, m – 1 .		** Упр. 3.9. Доказать, что классы вычетов по модулю m образуют кольцо.
Упр. 3.4. Составить «таблицу сложения и умножения» классов по модулю m = 5. а) Для каждого класса a, кроме нулевого, найдите обратный ему класс, т.е. такой класс b, чтобы $a \cdot b = 1$. б) С помощью перебора найдите все классы, являющиеся квадратами других классов. То же проделайте для кубов. в) Решите уравнения, где x обозначает неизвестный класс вычетов: 1) $3x = 2$, 2) $4\ x - 1\ = 3$, 3) $x^2 = -1$, 4) $x^2 + 2x + 2 = 0$, 5) $x^2 + x + 1 = 0$.		** Упр. 3.10. Доказать теорему о строении элементов кольца целых чисел

Таблица 15

Занятие № 4

Содержательно-методическая линия целых чисел - Алгебраические и порядковые свойства целых чисел		
Базовый уровень (3 б.)	Продвинутый уровень (4 б.)	Высокий уровень (5 б.)
Упр.4.1.Доказать свойство нуля $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$.	*Упр.4.5. Доказать, что система $(Z, <)$ является линейно упорядоченным множеством.	**Упр.4.7. Доказать, что если произведение двух целых чисел равно нулю, то хотя бы один из сомножителей равен нулю.
Упр.4.2. Доказать правила знаков $(-a)b = a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$, $(-a)(-b) = a \cdot b$.		**Упр.4.8. Доказать, что кольцо целых чисел не содержит делителей нуля.
Упр.4.3. Доказать дистрибутивность умножения относительно вычитания $a \cdot (b-c) = a \cdot b - a \cdot c$, $(b-c)a = b \cdot a - c \cdot a$.	*Упр.4.6. Доказать, что в упорядоченном кольце $(K, +, \cdot, <)$ если $a \in K$ и $a \neq 0$, то $a^2 > 0$ и если e – единица кольца, то для любого n натурального $n \cdot e > 0$.	**Упр.4.9. Доказать, что в упорядоченном кольце целых чисел всякое непустое ограниченное сверху (снизу) подмножество содержит наибольший (соответственно, наименьший) элемент.
Упр.4.4. Доказать, что умножение целых чисел коммутативно, т.е. $\forall\, x, y \in Z \quad x \cdot y = y \cdot x$.		**Упр.4.10. Доказать, что в упорядоченном кольце целых чисел $(Z, +, \cdot, <)$ выполняется аксиома Архимеда: для любых целых чисел $a > 0$ и b существует натуральное число n такое, что $n \cdot a > b$.

Таблица 16

Занятие № 5

Содержательно-методическая линия рациональных чисел - Рациональные числа как обыкновенные дроби		
Базовый уровень (3 б.)	Продвинутый уровень (4 б.)	Высокий уровень (5 б.)
Упр.5.1. а) Найдите обыкновенную дробь со знаменателем 21, заключённую между дробями 5/14 и 5/12. б) Покажите, что между любыми двумя рациональными числами содержится еще хотя бы одно рациональное число.	*Упр.5.5. Даны два множества: $M = \left\{ \frac{m}{n} : m \in Z, n \in N \right\}$ и $L = \left\{ \frac{m}{n} : m \in Z, n \in N, D(\lvert m \rvert, n = 1) \right\}$. а) Что общего и что различного у этих множеств? б) Какое из высказываний: 1) $L \subset M$; 2) $M \subset L$ - является истинным?	**Упр. 5.7. Решите в натуральных числах уравнение $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{25}$, где m > n (двумя способами).
Упр.5.2. Верно ли, что: $а)\ \frac{4}{7} \cdot \frac{14}{5} : \frac{2}{5} \in N;$ $б)\ \left(\frac{1}{2} - \frac{5}{8}\right) : \frac{1}{8} \in Z;$ $в)\ \left(\frac{3}{4} - \frac{2}{3}\right) \cdot \frac{6}{5} \in Q$ $г)\ \frac{7}{15} \cdot \frac{5}{7} - 3 : 9 \in N;$ $д)\ \frac{2}{3} \cdot \left(1 - \frac{5}{6}\right) : \frac{1}{3} \in Q;$ $е)\ \frac{6}{7} : \left(2 - \frac{5}{7}\right) \cdot \frac{1}{2} \in Z$		**Упр.5.8. Четыре натуральных числа a, b,.c, d таковы, что $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = 1$. а) Могут ли все числа быть попарно различны? б) Может ли одно из этих чисел равняться 9? в) Найдите все возможные наборы чисел, среди которых ровно два числа равны.

Таблица 16 (продолжение)

Занятие № 5

Содержательно-методическая линия рациональных чисел - Рациональные числа как обыкновенные дроби		
Базовый уровень (3 б.)	Продвинутый уровень (4 б.)	Высокий уровень (5 б.)
Упр.5.3. Найдите такое значение a, при котором один из корней уравнения $x^2 - \frac{15}{4}x + a^3 = 0$ является квадратом другого. Найдите эти корни.	в) Охарактеризуйте словесно каждое из множеств M и L. г) Какое из этих множеств является множеством всех рациональных чисел Q?	**Упр.5.9. Про три различных натуральных числа известно, что они являются длинами сторон некоторого тупоугольного треугольника. а) Могло ли отношение большего из этих чисел к меньшему из них быть равно 13/7? б) Могло ли отношение большего из этих чисел к меньшему из них быть равно 8/7 ? в) Какое наименьшее значение может принимать отношение большего из этих чисел к меньшему из них, если известно, что среднее по величине из этих чисел равно 25?
Упр.5.4. Найдите значения параметра m, при которых уравнения $x^2 - (m+1)x + m + 1 = 0$ и $2x^2 - (m-1)x + 1 = 0$ имеют хотя бы один корень. Найдите этот корень.	*Упр.5.6. Докажите эквивалентность двух высказываний: а) между любыми двумя рациональными числами заключено хотя бы одно другое рациональное число; б) между любыми двумя рациональными числами заключено бесконечно много других рациональных чисел.	**Упр.5.10. Рассмотрим частное трёхзначного числа, в записи которого нет нулей, и произведения его цифр. а) Приведите пример числа, для которого это частное равно 113/27. б) Может ли это частное равняться 125/27? в) Какое наибольшее значение может принимать это частное, если оно равно несократимой дроби со знаменателем 27?

Таблица 17

Занятие № 6

Содержательно-методическая линия рациональных чисел - Рациональные числа как десятичные дроби		
Базовый уровень (3 б.)	Продвинутый уровень (4 б.)	Высокий уровень (5 б.)
Упр. 6.1. Следующие рациональные дроби представить в виде конечных десятичных дробей: а) $\frac{1}{4}$; б) $\frac{3}{200}$; в) $\frac{321}{400}$; г) $\frac{7}{625}$; д) $\frac{352}{125}$; .	*Упр.6.5. Бесконечная десятичная дробь устроена следующим образом. Перед десятичной запятой стоит нуль. После запятой подряд выписаны члены возрастающей последовательности натуральных чисел a_n. В результате получилось рациональное число, которое выражается несократимой дробью, знаменатель которой меньше 100. Найдите наименьшее возможное значение a_3.	**Упр. 6.7. Бесконечная десятичная дробь устроена следующим образом. Перед десятичной запятой стоит нуль. После запятой подряд выписаны члены возрастающей последовательности натуральных чисел a_n. В результате получилось рациональное число, которое выражается несократимой дробью, знаменатель которой меньше 100. Найдите наименьшее возможное значение a_3.

Таблица 17 (продолжение)

Занятие № 6

Содержательно-методическая линия рациональных чисел - Рациональные числа как десятичные дроби		
Базовый уровень (3 б.)	Продвинутый уровень (4 б.)	Высокий уровень (5 б.)
Упр. 6.2. Найти рациональные дроби, равные следующим десятичным дробям: а) $0{,}111\ldots$; б)$5{,}6666\ldots$; в) $0{,}37\ 43$; г) $0{,}9(987)$; д) $0{,}00(01)$; е) $0,(9)$.	*Упр.6.6. а) Какие рациональные числа *a/b* имеют два существенно различных представления в виде десятичной дроби? б) Какие рациональные числа *a / b* имеют три существенно различных представления в виде десятичной дроби?	**Упр. 6.8. Найдите все такие пары натуральных чисел a и b, что если к десятичной записи числа a приписать справа десятичную запись числа b, то получится число, большее произведения чисел a и b на 32.
Упр. 6.3. Запишите в виде бесконечной десятичной дроби:) $\frac{2}{3}$; 2) $-\frac{12}{11}$; 3) $\frac{5}{12}$; 4) $\frac{3}{4}$; 5) -15; 6) $\frac{9}{14}$.		**Упр. 6.9. Найдутся ли хотя бы три десятизначных числа, делящиеся на 11, в записи каждого из которых использованы все цифры от 0 до 9?
Упр. 6.4. Выпишите бесконечные десятичные дроби по следующему правилу и укажите, какие из выписанных чисел рациональные, а какие – иррациональные: 1) первая цифра после запятой равна нулю, вторая – единице, после чего следует один нуль и две единицы, один нуль и три единицы и т.д.; 2) после запятой располагаются четные числа в порядке возрастания; 3) первая цифра после запятой равна трем, вторая – семи, третья – трем, четвертая – семи и т.д.		**Упр. 6.10. Будем называть четырёхзначное число очень счастливым, если все цифры в его десятичной записи различны, а сумма первых двух из этих цифр равна сумме последних двух из них. Например, очень счастливым является число 3140. а) Существуют ли двадцать последовательных четырёхзначных чисел, среди которых есть три очень счастливых? б) Может ли разность двух очень счастливых четырёхзначных чисел равняться 2016? в) Найдите наименьшее простое число, для которого не существует кратного ему очень счастливого четырёхзначного числа.

Таблица 18

Занятие № 7

Содержательно-методическая линия иррациональных чисел		
Базовый уровень (3 б.)	Продвинутый уровень (4 б.)	Высокий уровень (5 б.)
Упр.7.1. Доказать иррациональность чисел а) $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$ и $\sqrt{2}+\sqrt{3}$; б) $\sqrt{5}$, $\sqrt{15}$ и $\sqrt{5}+\sqrt{3}$.	*Упр.7.5. 1) Доказать, что число а) $\sqrt{7}$, б) $\sqrt[3]{5}$; в) $\sqrt[3]{6}$; г) $\frac{1}{3}$ $(2\sqrt[3]{6}+7)$ иррационально. (теорема 2).	**Упр. 7.7. Пусть c и d - два *различных* неотрицательных целых числа. Доказать, что число $\log(2^c 5^d)$ иррационально.

Таблица 18 (продолжение)

Занятие № 7

Содержательно-методическая линия иррациональных чисел		
Базовый уровень (3 б.)	Продвинутый уровень (4 б.)	Высокий уровень (5 б.)
Упр.7.2. Доказать, что число а) $\sqrt{3}(\sqrt{6}-3)$; б) $(4\sqrt{13}-3)/6$ иррационально (см. теорему 1).	2) Пусть $n\epsilon N$. Укажите хотя бы по одному иррациональному числу, принадлежащему интервалам $(0;10^{-n})$, $(n;n+1)$ соответственно.	**Упр.7.8. Дано иррациональное число α, такое, что $0<\alpha<\frac{1}{2}$. По нему определяется новое число α_1 как меньшее из двух чисел 2α и 1 - 2α. По этому числу аналогично определяется α_2, и так далее. а) Докажите, что для некоторого n выполнено неравенство $\alpha_n<\frac{3}{16}$. б) Может ли случиться, что $\alpha_n<\frac{7}{40}$ при всех натуральных n?
Упр.7.3. Доказать, что следующие числа иррациональны: 1) $\cos 20^\circ$; б) $\sin 10^\circ$; (теорема 2 и другие способы); 2) $\cos 40^\circ$; б) $\sin 20^\circ$; в) $\cos 10^\circ$; г) $\sin 50^\circ$.	*Упр.7.6. Доказать, что следующие числа иррациональны: г) $\cos 35^\circ$, $\sin 35^\circ$, $tg\ 35^\circ$, д) $\cos 25^\circ$, $\sin 25^\circ$, $tg\ 25^\circ$. (теорема 3)	**Упр.7.9. Может ли степень a^b быть рациональным числом, если: а) a, b – рациональные числа; б) число a – рациональное, а число b - иррациональное; в) число a – иррациональное, число же b - рациональное; г) a, b – иррациональные числа? Приведите примеры.
Упр.7.4. Доказать, что число а) lg 2; б) lg 21 иррационально (основная теорема арифметики)		**Упр.7.10. В равнобедренном треугольнике, угол при основании которого равен 72° , длина биссектрисы этого угла несоизмерима с длинами боковых сторон треугольника. Докажите.

Таблица 19

Занятие № 8

Содержательно-методическая линия рациональных чисел - Алгебраические и трансцендентные числа		
Базовый уровень (3 б.)	Продвинутый уровень (4 б.)	Высокий уровень (5 б.)
Упр. 8.1. Доказать, что следующие числа являются алгебраическими: *а*) $\sqrt{3}$; *б*) $\sqrt[3]{5}$; *в*) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$; *г*) $\cos 20^\circ$; *д*) $\sin 10^\circ$.	*Упр. 8.5. Показать, что корни алгебраического уравнения $x^3+2\sqrt{2}x^2+2=0$ являются алгебраическими числами.	**Упр. 8.7. Показать, что следующие числа являются трансцендентными: e^2 и $e^{\sqrt{2}}$.

Таблица 19 (продолжение)

Занятие № 8

<table>
<tr><td colspan="3">Содержательно-методическая линия рациональных чисел - Алгебраические и трансцендентные числа</td></tr>
<tr><td>Базовый уровень (3 б.)</td><td>Продвинутый уровень (4 б.)</td><td>Высокий уровень (5 б.)</td></tr>
<tr><td>Упр. 8.2. Доказать, что $\sqrt{2}$ есть алгебраическое число степени 2.</td><td rowspan="3">*Упр. 8.6. Доказать, что корни уравнения $x^5 - 3x^2 + 12x - 6 = 0$ являются алгебраическими числами пятой степени.</td><td>**Упр. 8.8. Определить степень алгебраических чисел: $\sqrt{2}-\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{11}$, $\sqrt[3]{1+\sqrt{3}}$.</td></tr>
<tr><td>Упр. 8.3. Доказать, что $\sqrt[3]{3}$ есть алгебраическое число степени 3.</td><td>**Упр. 8.9. Доказать, что корни уравнения $x^5 - 2x^4 + 10x^2 + 6x + 2 = 0$ являются алгебраическими числами пятой степени.</td></tr>
<tr><td>Упр. 8.4. Показать, что следующие числа являются трансцендентными:
1) $3^{\sqrt{2}}$; 2) $5^{\sqrt{3}}$; 3) $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$.</td><td>**Упр. 8.10. Доказать счетность множества алгебраических чисел.</td></tr>
</table>

Таблица 20

Занятие № 9

<table>
<tr><td colspan="3">Содержательно-методическая линия натуральных, целых и рациональных чисел - счетные множества</td></tr>
<tr><td>Базовый уровень (3 б.)</td><td>Продвинутый уровень (4 б.)</td><td>Высокий уровень (5 б.)</td></tr>
<tr><td>Упр. 9.1. Найти прямое произведение:
а) двух конечных множеств;
б) бесконечных множеств N и N, N и Z, Z и N, Z и Z, и Z и Z/{0}.</td><td rowspan="3">*Упр. 9.5. Доказать теорему: Мощность множества всех чисел натурального ряда есть наименьшая мощность бесконечного множества.</td><td>**Упр. 9.7. Доказать: 1 признак равномощности множества. Если некоторое множество является промежуточным для двух равномощных множеств, то все три множества равномощны;
2 признак равномощности множеств. Если каждое из двух данных множеств равномощно части другого, то данные множества равномощны.</td></tr>
<tr><td>Упр. 9.2. Перечислите все элементы бинарного отношения ρ: 1) $x \ \rho \ y \Leftrightarrow x < y$ на множестве A = {1, 2, 3, 4}; 2) $x \ \rho \ y \Leftrightarrow x$ делится на y на множестве A = {5, 6, 7, 8, …, 15}.</td><td>**Упр. 9.8. Доказать, что отрезок $[0,1]$ и множество натуральных чисел N не являются количественно эквивалентными множествами (теорема Кантора).</td></tr>
<tr><td>Упр. 9.3. Выясните, какими свойствами (рефлексивности, симметричности, антисимметричности и транзитивности) обладает и какими не обладает отношение ρ на множествах N, Z, Q, R:
а) $x \ \rho \ y \Leftrightarrow x^2 = y^2$; б) $x \ \rho \ y \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$.</td><td>**Упр. 9.9. Доказать теорему о существовании сколь угодно высоких мощностей. Мощность множества всех подмножеств любого непустого множества A больше, чем мощность данного множества A.</td></tr>
</table>

Таблица 20 (продолжение)

Занятие № 9

Содержательно-методическая линия натуральных, целых и рациональных чисел - счетные множества		
Базовый уровень (3 б.)	Продвинутый уровень (4 б.)	Высокий уровень (5 б.)
Упр. 9.4. Доказать, что множество всех натуральных чисел равномощно с множеством: а) всех четных чисел; б) всех целых чисел.	*Упр. 9.6. Доказать, разными способами, счетность множества Q всех рациональных чисел.	**Упр. 9.10. Доказать основные свойства счетных множеств: А) Всякое бесконечное подмножество счетного множества есть счетное множество. Б) Если бесконечное множество А состоит из элементов a_{ij}, различаемых двумя идексами i, j , принимающими в качестве своих значений любое натуральное число, то множество $A = \ a_{ij}$ счетное. В) Из любого бесконечного множества А можно удалить его собственное счетное или конечное подмножество A' так, что оставшееся множество $A|\mathrm{A}'$ эквивалентно множеству А.

Таблица 21

Занятие № 10

Содержательно-методическая линия действительных чисел - несчетные множества		
Базовый уровень (3 б.)	Продвинутый уровень (4 б.)	Высокий уровень (5 б.)
Упр. 10.1. Показать, как на прямой *l* с помощью циркуля и линейки можно отыскать точки, соответствующие действительным числам $\overline{2}$, $\overline{3}$, $\overline{4}$, $\overline{5}$ и т.д.	*Упр.10.5. Множество всех действительных чисел, содержащихся между 0 и 1, несчетное множество. Доказать.	**Упр. 10.7. Доказать, что множество N натуральных чисел и множество R действительных чисел не равномощны.
Упр. 10.2. Укажите два различных способа построения отрезка, длина которого: а) $\overline{5}$; б) $\overline{6}$; в) $\overline{7}$; г) $\overline{10}$.		**Упр.10.8. Множество I всех иррациональных чисел есть множество мощности континуума. Доказать.
Упр. 10.3. Доказать, что множество точек любого отрезка несчетно.		**Упр.10.9. Доказать несчетность множества всех действительных чисел методом от противного.
Упр. 10.4. Доказать, что множество всех бесконечных последовательностей, составленных из нулей и единиц, несчетно.		**Упр.10.10. Множество всех действительных чисел и множество всех точек числовой прямой находятся во взаимно однозначном соответствии. Доказать.

Занятие № 11

Содержательно-методическая линия действительных чисел- $R = Q \cup I,\ R = A \cup T$		
Базовый уровень (3 б.)	Продвинутый уровень (4 б.)	Высокий уровень (5 б.)
Упр. 11.1. Верно ли утверждение: 1) $2,\ 4\ \in I$; 2) $-2,\ 4\ \in Q$; 3) $2,\ 4\ \in R$; 4) $\sqrt{2} \in I$; 5) $-\sqrt{2} \in R$; 6) $\log_2 3 \in I$; 7) $-lg10 \in Q$; 8) $\sin 30^{\circ} \in I$?	*Упр. 11.5. а) Установите, верно ли заданное утверждение; для неверного утверждения составьте отрицание: 1) $\forall x \epsilon R\ \ x < x$; 2) $\forall x, y \epsilon R\ \ x - y < 3$; 3) $\forall a \epsilon R\ \ \exists b \in R\ \ ab = 1$; 4) $\forall a \epsilon R\ \ \exists b \in R\ \ a = b^2$. б) Найдите все целые значения n, для каждого из которых число $\log_{2n-1} n^2 + 2$ будет рациональным.	**Упр. 11.7. Наибольшее целое число, не превосходящее число x, равно $\frac{x^2+6}{7}$. Найдите все такие значения x.
Упр. 11.2. Верно ли утверждение: 1) $\forall a \epsilon N\ \ \exists b \in N\ \ b > a$; 2) $\exists b \in N\ \ \forall a \epsilon N\ \ b > a$; 3) $\forall a \epsilon N\ \ \exists b \in N\ \ b \le a$; 4) $\exists b \in N\ \ \forall a \epsilon N\ \ b \le a$; 5) $\forall a, b \epsilon Q\ \ \exists c \in Q\ \ ac = b$;		**Упр. 11.8. Найдите все пары x, y целых чисел, удовлетворяющие системе неравенств: $x^2 + y^2 < 18x - 20y - 166$, $32x - y^2 > x^2 + 12y + 271$.
Упр. 11.3. Доказать, что множество A действительных решений уравнения $x^2 - 4x + 3 = 0$ является собственным подмножеством множества B действительных решений уравнения $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$.	*Упр.11.6. а) Найти область определения функций: 1) $f(x) = \sqrt{3+x} + \sqrt{3-x}$; 2) $f(x) = \sqrt[3]{\frac{x}{1-\lvert x \rvert}}$; 3) $f(x) = \sqrt{2^x - 3^x}$ 4) $f(x) = \log_{3+x}(x^2 - 1)$.	**Упр. 11.9. Винтики можно разложить в пакетики, а пакетики упаковать в коробки, по 3 пакетика в одну коробку. Можно эти же винтики разложить в пакетики так, что в каждом пакетике будет на 3 винтика больше, чем раньше, но тогда в каждой коробке будет лежать по 2 пакетика, а коробок потребуется на 2 больше. Какое наибольшее число винтиков может быть при таких условиях
Упр. 11.4. Какое, из двух следующих множеств целых чисел A = $\{x \mid x$ *делится на* $a\}$, B = $\{x \mid x$ *делится на* $b\}$, является подмножеством другого: 1) при $a = 9$, $b = 15$; 2) при $a = 9$, $b = 18$; 3) при $a = 8$, $b = 2$?	б) Найти множество значений функций: 1) $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 2}$; 2) $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$.	**Упр. 11.10. Каждое из чисел 2, 3, …, 7 умножают на каждое из чисел 13, 14, …, 21 и перед каждым из полученных произведений произвольным образом ставят знак плюс или минус, после чего все 54 полученных результата складывают. Какую наименьшую по модулю и какую наибольшую сумму можно получить в итоге?

Таблица 23

Занятие № 12

<table>
<tr><td colspan="3">Содержательно-методическая линия рациональных чисел - рациональные числа и конечные цепные дроби</td></tr>
<tr><td>Базовый уровень (3 б.)</td><td>Продвинутый уровень (4 б.)</td><td>Высокий уровень (5 б.)</td></tr>
<tr><td>Упр. 12.1. Разложить данную обыкновенную дробь в непрерывную, заменить её подходящей дробью $\frac{P_4}{Q_4}$, найти погрешность замены, записать замену приближенным равенством с указанием погрешности: 1) $\frac{29}{37}$; 2) $\frac{163}{159}$; 3) $\frac{648}{385}$.</td><td>*Упр. 12.5. Рассмотрим календарный год, приблизительно равный 365 суткам, 5 часам, 48 минутам и 46 секундам. Это число приблизительно равно 365,2422 суткам. Записать дробную часть числа цепной дробью</td><td>**Упр. 12.7. Найти способ решения неопределенных уравнений первой степени с двумя неизвестными при помощи непрерывных дробей.</td></tr>
<tr><td>Упр. 12.2. По данным конечным непрерывным дробям найти соответствующие им обыкновенные несократимые дроби:
1) $\frac{a}{b} = 2, 1, 1, 3, 1, 2$; 2) $\frac{a}{b} = 1, 1, 2, 3, 4$;
3) $\frac{a}{b} = 1, 3, 2, 4, 3, 1, 1, 1, 5$.</td><td rowspan="3">*Упр.12.6. Найти все целые решения уравнений 1) $127x - 52y + 1 = 0$;
2) $38x + 117y = 209$;
3) $119x - 68y = 34$;
4) $41x + 114y = 5$ с помощью цепных дробей.</td><td>**Упр. 12.8. Доказать теорему: любое рациональное число равно некоторой конечной цепной дроби.</td></tr>
<tr><td>Упр. 12.3. Сократить с помощью разложения в непрерывную дробь следующие обыкновенные дроби: 1) $\frac{3587}{2743}$; 2) $\frac{3653}{3107}$; 3) $\frac{1043}{3427}$.</td><td>**Упр. 12.9. Доказать теорему: существует одна и только одна конечная цепная дробь, равная данному рациональному числу.</td></tr>
<tr><td>Упр. 12.4. Разложить дроби
1) $\frac{108}{38}$; 2) $\frac{11}{50}$
и вычислить все подходящие дроби</td><td>**Упр. 12.10. Требуется построить зубчатую передачу при помощи двух шестерен с количеством зубцов, равным отношению $\frac{587}{113}$. Можно ли техническое осуществление передачи выполнить заменой заданного отношения количества зубцов шестерен отношением с меньшим числителем и знаменателем, но с погрешностью, не превосходящей 0,001?</td></tr>
</table>

Таблица 24

Занятие № 13

Содержательно-методическая линия действительных чисел - квадратичные иррациональности и периодические цепные дроби		
Базовый уровень (3 б.)	Продвинутый уровень (4 б.)	Высокий уровень (5 б.)
Упр. 13.1. Следующие квадратичные иррациональности представить непрерывными дробями, заменить каждую подходящей дробью $\frac{P_3}{Q_3}$, найти погрешность замены и записать замену приближенным равенством с указанием погрешности 1) $\sqrt{11}$; 2) $\sqrt{10}$; 3) $\sqrt{12}$.	*Упр. 13.5. Большим корнем какого квадратного уравнения с целыми коэффициентами является каждая из следующих периодичеких непрерывных дробей: 1) [(1, 1, 2, 2, 1)]; 2) [2, (1, 1, 3)].	**Упр. 13.7. С помощью аппарата цепных дробей найти наилучшее рациональное приближение к $\sqrt{5}$ со знаменателем, не превышающим 72.
Упр. 13.2. Следующие иррациональности представить непрерывными дробями, заменить каждую подходящей дробью с погрешностью не больше 0,0001 и записать замену приближенным равенством с указанием погрешности: 1) $\sqrt{3}$; 2) $\sqrt{5}$; 3) $\sqrt{6}$; 4) $\frac{2+\sqrt{5}}{3}$; 5) $\frac{2+\sqrt{14}}{4}$.		**Упр. 13.8. С помощью аппарата цепных дробей найти наилучшее рациональное приближение к числу $\frac{971}{773}$ со знаменателем, не превышающим 82, и оценить погрешность.
Упр. 13.3. Следующие иррациональности представить непрерывными дробями, заменить каждую подходящей дробью с погрешностью не больше 0,0001 и записать замену приближенным равенством с указанием погрешности: 1) $5-\sqrt{15}$; 2) $\frac{3-\sqrt{7}}{5}$; 3) $\frac{-4-\sqrt{46}}{5}$; 4) $-2-\sqrt{17}$.	*Упр. 13.6. При помощи непрерывных дробей вычислить с точностью до 0,0001 оба корня каждого из следующих уравнений: 1) $2x^2-15x+26=0$; 2) $x^2+9x+6=0$; 3) $2x^2-3x-6=0$.	**Упр.13.9. Показать, что $\frac{P_2}{Q_2}=\frac{2a+1}{2}$ при разложении иррациональности $\sqrt{a^2+a+1}$ в непрерывную дробь.
Упр. 13.4. Найти квадратичные иррациональности по их разложениям в периодические непрерывные дроби: 1) [(1, 2, 4, 6)]; 2) [(2, 2, 1, 1)]; 3) [2, (1, 1, 1, 4)].		**Упр. 13.10. Разложить $\sqrt{x^2+1}$ в непрерывную дробь и найти $\frac{P_2}{Q_2}$.

Вопросы к занятию №1:

1.Какую пару множеств называют формулировкой данной аксиоматической теории?

2. Какого математика считают математиком-энциклопедистом?

3. Кто первым заметил значение аксиомы в науке?

4. В работах каких ученых, была построена аксиоматическая теория натуральных чисел?

5. В каком веке и в трудах какого ученого, появился термин «натуральные числа»?

6. В чем заключается особая роль в математике числа 1?

7. Каким ученым была предложена вошедшая во всеобщее употребление система аксиом натуральных чисел?

8. Аксиоматическая теория с какой формулировкой, называется содержательной аксиоматической теорией натуральных чисел?

Занятие №2. *Свойства числовых систем* $\langle N; <\rangle, \langle N; +, \cdot, <\rangle$

Основная цель – обобщить понятие о множестве натуральных чисел, об отношении порядка во множестве натуральных чисел.

Для изучения предлагаются следующие вопросы: отношение «меньше» на множестве натуральных чисел, доказательство упорядоченности множества натуральных чисел, аксиома Архимеда, вводится понятие дискретности множества, упорядоченного полукольца натуральных чисел.

План занятия №2

2.1. Неразрешимость уравнений во множестве натуральных чисел

2.2. Отношение «меньше» на множестве натуральных чисел

2.3. Линейная упорядоченность множества натуральных чисел

2.4. Неравенства на множестве натуральных чисел

2.5. Наименьший элемент, Аксиома Архимеда, дискретность множества

2.6. Множество натуральных чисел - вполне упорядоченное множество

2.7. Система $\langle N,+,\cdot,<\rangle$ - упорядоченное полукольцо

Вопросы к занятию №2:

1.Как определяется натуральный ряд через аксиомы Пеано?

2. Как доказывается бесконечность множества натуральных чисел?

3. Как определяется сложение натуральных чисел?

4. Какими свойствами обладает сложение натуральных чисел?

5. Как определяется умножение натуральных чисел?

6. Какими свойствами обладает умножение натуральных чисел?

7. Как определяется понятие полукольца натуральных чисел?

8. Какие виды уравнений неразрешимы во множестве натуральных чисел?

9. Как определяется отношение «меньше» на множестве натуральных чисел?

10. Система какого вида и с какими условиями называется линейно упорядоченным множеством?

11. Как определяется отношение «больше» на множестве натуральных чисел?

12. Как определяется монотонность сложения (умножения) натуральных чисел?

13. Какой элемент множества называют наименьшим?

14. Как формулируется аксиома Архимеда?

15. Как определяется свойство дискретности множества?

16. В каком случае линейно упорядоченное множество называют вполне упорядоченным?

17. Система какого вида и с какими условиями называется упорядоченным полукольцом?

Занятие №3. *Строение элементов кольца целых чисел*

Основная цель – обобщить понятие о множестве целых чисел, ввести понятие кольца целых чисел.

Для изучения предлагаются следующие вопросы: операции над матрицами и их свойства, понятие кольца целых чисел, кольца квадратных матриц, кольца классов вычетов, свойства сравнимости целых чисел по модулю.

План занятия №3

3.1. Полукольцо натуральных чисел

3.2. Кольцо целых чисел

3.3. Операции над матрицами и их свойства

3.4. Кольцо квадратных матриц

3.5. Отношение сравнимости на множестве целых чисел

3.6. Кольцо классов вычетов

3.7. Строение элементов кольца целых чисел как разности натуральных чисел

Вопросы к занятию №3:

1. С какими условиями система $\langle A,+,\cdot\rangle$ называется полукольцом?

2. Как определяется полукольцо натуральных чисел?

3. С какими условиями система $\langle K,+,\cdot\rangle$ называется кольцом?

4. Как определяется кольцо целых чисел?

5. Какую систему чисел мы называем прямоугольной матрицей?

6. Как определяются операции сложения и умножения матриц?

7. Какими свойствами обладают операции сложения и умножения матриц?

8. Почему мы говорим, что квадратные матрицы образуют кольцо?

9. Чем кольцо квадратных матриц отличается от кольца целых чисел?

10. Когда два целых числа сравнимы по модулю m, $m \in N$?

11. Какими свойствами обладает отношение сравнимости на множестве Z?

12. С каким числом сравнимо по модулю m каждое целое число ?

13. Каждое целое число попадает в один и только один класс попарно сравнимых между собой элементов (целых чисел). Как называются такие классы?

14. Как определяются операции сложения и умножения над классами вычетов?

15. Почему мы говорим, что классы вычетов образуют кольцо?

16. Как элементы кольца целых чисел можно представить с помощью натуральных чисел?

Занятие №4. *Алгебраические и порядковые свойства целых чисел*

Основная цель – обобщить понятие о свойствах множества целых чисел, ввести понятие упорядоченного кольца, сформировать представление об аксиоме Архимеда.

Для изучения предлагаются следующие вопросы: общие свойства колец, свойство отношения порядка, аксиома Архимеда.

План занятия №4

4.1. Общие свойства колец

4.2. Делители нуля

4.3. Область целостности

4.4. Отношение «<» на Z.

4.5. Понятие упорядоченного кольца.

4.6. Свойства упорядоченного кольца.

4.7. Аксиома Архимеда в кольце целых чисел

Вопросы к занятию №4:

1. Какое кольцо мы называем системой целых чисел?

2. Как доказывается свойство нуля $a\cdot 0 = 0\cdot a = 0$?

3. Как доказываются правила знаков $(-a)\cdot b = a\cdot(-b) = -(a\cdot b)$, $(-a)\cdot(-b) = a\cdot b$?

4. Как доказывается дистрибутивность умножения относительно вычитания, $a\cdot(b-c) = a\cdot b - a\cdot c$, $(b-c)\cdot a = b\cdot a - c\cdot a$?

5. Какие элементы кольца мы называем делителями нуля?

6. Какое кольцо мы называем областью целостности?

7. Как определяется отношение «меньше» на множестве целых чисел?

8. Система $\langle Z, < \rangle$ является линейно упорядоченным множеством. Что это значит?

9. Система $\langle Z, +, \cdot, < \rangle$ является упорядоченным кольцом целых чисел. Почему мы так говорим?

10. В упорядоченном кольце $\langle K, +, \cdot, < \rangle$ если $a \in K$ и $a \neq 0$, то $a^2 > 0$ и если e – единица кольца, то для любого n натурального $n \cdot e > 0$. Как это доказывается?

11. В упорядоченном кольце целых чисел всякое непустое ограниченное сверху (снизу) подмножество содержит наибольший (соответственно, наименьший) элемент. Как это доказывается?

12. Как определяется и доказывается аксиома Архимеда?

Занятие №5. *Рациональные числа как обыкновенные дроби*

Основная цель – обобщить понятие о множестве рациональных чисел как обыкновенной дроби, рассмотреть свойства системы рациональных чисел.

Для изучения предлагаются следующие вопросы: рациональное число как обыкновенная дробь, различные интерпретации рационального числа, действия над рациональными числами, свойства системы рациональных чисел, аксиома Архимеда и аксиома Кантора на множестве рациональных чисел.

План занятия №5

5.1. Определение рационального числа как обыкновенной дроби и его особенности.

5.2. Различные виды интерпретаций для пояснения рациональных чисел и действий над ними.

5.3. Определение системы рациональных чисел.

5.4. Свойства системы рациональных чисел.

5.5. Аксиома Архимеда в N. Z, Q.

5.6. Аксиома Кантора.

5.7. Задачи высокого уровня, связанные с рациональными числами, в ЕГЭ.

Вопросы к занятию №5:

1. Число 1 используется при расширении множества натуральных чисел. Как именно? Какие дроби называют аликвотными?

2. Рациональное число (рациональная дробь) есть такое число, которое можно представить в виде *a/d*. Какими могут быть числа *a, d*?

3. Почему мы требуем, чтобы *d* было отлично от нуля?

4. Слово дробь используется для обозначения любого алгебраического выражения, состоящего из числителя и знаменателя. Можете ли вы привести примеры?

5. В определение рационального числа входит выражение «число, которое можно представить в виде *a/d*, где *a* и *d* – целые числа, причем $d \neq 0$». Почему его нельзя заменить выражением «число вида *a/d*, где *a* и *d* – целые числа, причем $d \neq 0$»?

6. Являются ли числа $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}$ *и* $\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{3}}$ рациональной дробью?

7. Является ли всякое целое число рациональным?

8. Как определяют систему рациональных чисел $Q = \langle Q, +, \cdot, 0, 1\rangle$?

9. Множество рациональных чисел есть архимедово множество. Что это значит?

10. Множество рациональных чисел всюду плотно. Что это значит?

11. Любые два рациональных числа соизмеримы. Что это значит?

12. В области рациональных чисел действие деления всегда выполнимо за исключением, конечно, деления на нуль. Но при этом происходит удивительная вещь: действие деления перестает быть самостоятельным действием. Почему так говорят?

13. Введя отрицательные числа и нуль, действие вычитания в расширенной области целых чисел становится неограниченно выполнимым. Но при этом действие теряет свою самостоятельность. Почему так говорят?

14. Как формулируется аксиома Кантора?

15. Зачем нужны аксиомы Архимеда и Кантора?

16. Выполняется ли в упорядоченном поле рациональных чисел аксиома Кантора?

Занятие №6. *Рациональные числа как десятичные дроби*

Основная цель – обобщить понятие о множестве рациональных чисел как десятичной дроби, рассмотреть свойства системы рациональных чисел.

Для изучения предлагаются следующие вопросы: рациональное число как десятичная дробь, перевод обыкновенных дробей в десятичные и наоборот, конечные и периодические десятичные дроби.

План занятия №6

6.1. Конечные десятичные дроби.

6.2. Периодические десятичные дроби

6.3. Различные представления рационального числа в виде десятичной дроби

6.4. Перевод рациональной дроби в десятичную.

6.5. Перевод десятичной дроби в рациональную дробь.

6.6. Кванторные утверждения.

6.7. Задачи высокого уровня, связанные с рациональными числами, в ЕГЭ.

Вопросы к занятию №6:

1. Когда десятичные дроби начали распространяться в Европе?

2. Какое толкование числа было предложено в XIX веке?

3. Какие рациональные дроби a/b имеют конечные десятичные представления?

4. Какую группу цифр называют периодом?

5. Можно ли всякую конечную десятичную дробь представить в виде периодической десятичной дроби?

6. Способы получения бесконечной десятичной дроби?

7. Как перевести рациональную дробь в десятичную?

8. Как перевести десятичную дробь в рациональную?

9. Какие кванторы мы используем для записи утверждений о числах?

Занятие №7. *Иррациональные числа.*

Основная цель – обобщить понятие о множестве иррациональных чисел, обобщить методы доказательства иррациональности чисел.

Для изучения предлагаются следующие вопросы: естественные пути появления иррациональных чисел, методы доказательства иррациональности чисел, построение бесконечного множества иррациональных чисел, основная теорема арифметики.

План занятия №7

7.1. Естественные пути появления иррациональных чисел.

7.2. Традиционное доказательство иррациональности некоторых чисел.

7.3. Построение бесконечного множества иррациональных чисел, исходя из одного данного иррационального числа.

7.4. Метод определения, является или нет данное число k иррациональным.

7.5. Иррациональные значения тригонометрических функций

7.6 Иррациональные значения десятичных логарифмов.

Вопросы к занятию №7:

1. Какие пути появления иррациональных чисел мы называем естественными?
2. Схема традиционного доказательства иррациональности некоторых чисел?
3. Как можно построить бесконечно много иррациональных чисел, исходя из одного данного иррационального числа?
4. В чем суть метода определения, является или нет данное число k иррациональным?
5. Основная теорема арифметики. Как она формулируется?

Занятие №8. *Алгебраические и трансцендентные числа*

Основная цель – обобщить понятие о множестве алгебраических и трансцендентных чисел.

Для изучения предлагаются следующие вопросы: понятие алгебраических и трансцендентных чисел, теорема Гельфонда, счетность множества алгебраических чисел.

План занятия №8

8.1.Понятие алгебраических чисел

8.2. Примеры алгебраических чисел

8.3. Алгебраические числа n-ой степени

8.4. Понятие трансцендентных чисел

8.5. Примеры трансцендентных чисел

8.6. Теорема Гельфонда

8.7. Счетность множества алгебраических чисел

Вопросы к занятию №8:

1. Корни какого уравнения называются алгебраическими числами?
2. Как определяется алгебраическое число n-ой степени?
3. Как определяются трансцендентные числа?
4. Как формулируется теорема Гельфонда?
5. Как доказывается счетность множества алгебраических чисел?

Занятие №9. *Счетные множества*

Основная цель – сформировать понятие бинарного отношения и их свойств, понятие эквивалентных множеств, мощности множества, счётности множества, сформировать представление о свойствах счётных множеств.

Для изучения предлагаются следующие вопросы: прямое произведение множеств, бинарное отношение и его свойства, виды отображений (сюръективное, инъективное, биективное), эквивалентные или равномощные множества, понятие счётности и свойства счётных множеств.

План занятия №9

9.1. Прямое произведение множеств

9.2. Понятие бинарного отношения

9.3. Свойства бинарного отношения

9.4. Виды отображений

9.5. Эквивалентные или равномощные множества.

9.6. Понятие мощности – обобщение понятия натурального числа

9.7. Свойства счетных множеств

Вопросы к занятию №9:

1. Как определяется прямое произведение множеств А и В?
2. Что называется бинарным отношением на упорядоченной паре множеств (А,В)?
3. Какими свойствами может обладать бинарное отношение?
4. Какое бинарное отношение φ, определенное на паре множеств (А, В), называется отображением из А в В?
5. Как определяется сюръективное отображение $\varphi: A \to B$?
6. Как определяется инъективное отображение $\varphi: A \to B$?
7. Как определяется биективное отображение $\varphi: A \to B$?
8. Какие множества называются эквивалентными?
9. Какие множества называются счетными?
10. Какими свойствами обладают счетные множества?

Занятие №10. *Несчетные множества*

Основная цель – сформировать представление о несчётности множеств и неравномощности множеств натуральных и действительных чисел, сформировать представление о свойствах несчётных множеств.

Для изучения предлагаются следующие вопросы: несчётные множества, доказательство несчетности некоторых объектов, мощность континуума.

План занятия №10

10.1. Определение и примеры несчетных множеств

10.2. Неравномощность множеств натуральных и действительных чисел.

10.3. Свойства несчетных множеств

Вопросы к занятию №10:

1. Как с помощью циркуля и линейки можно отыскать на прямой точки, соответствующие действительным числам $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{5}$ и т.д.?

2. Какими способами можно построить отрезок, длина которого: а) $\sqrt{5}$; б) $\sqrt{6}$; в) $\sqrt{7}$; г) $\sqrt{10}$?

3. Как доказать, что множество точек любого отрезка несчетно?

4. Как доказать, что множество всех бесконечных последовательностей, составленных из нулей и единиц, несчетно?

5. Как доказать, что множество всех вещественных чисел, содержащихся между 0 и 1, несчетное множество?

6. Как доказать, что множество всех вещественных чисел эквивалентно множеству вещественных чисел, расположенных между 0 и 1?

7. Как доказать, что множество N натуральных чисел и множество R действительных чисел неравномощны?

8. Как доказать, что множество *I* всех иррациональных чисел есть множество мощности континуума?

9. Доказать несчетность множества всех действительных чисел методом от противного. Что это значит?

10. Как доказать, что множество всех действительных чисел и множество всех точек числовой прямой находятся во взаимно однозначном соответствии?

Занятие №11. *Действительные числа как объединение множеств (рациональных и иррациональных чисел, алгебраических и трансцендентных)*

Основная цель – обобщить представление о множествах и их свойствах, операциями над множествами.

Для изучения предлагаются следующие вопросы: множества и операции над ними, свойства операций

План занятия №11

11.1. Понятие множества

11.2. Объединение и пересечение множеств

11.3. Разность множеств

11.4. Свойства операций над множествами

11.5. Отношения между множествами

11.6. Способы задания множеств

11.7. Задачи высокого уровня, связанные с действительными числами, в ЕГЭ.

Вопросы к занятию №11:

1. Кто является основателем теории множеств?
2. Способы задания множеств?
3. Как определяется объединение и пересечение множеств?
4. Как определяется разность множеств?
5. Какими свойствами обладают операции над множествами?
6. Какие отношения определяются для множеств?
7. В.В.Зорин отмечает (стр.44) довольно часто встречающиеся ошибки в ответах абитуриентов, связанные с неправильным пониманием отношений между числовыми множествами, с отсутствием привычки рассматривать числа как элементы множества. О чем идет речь?
8. На какие классы чисел можно разделить все действительные числа?

Занятие №12. *Рациональные числа и конечные цепные дроби*

Основная цель – сформировать представление о цепной дроби, подходящих дробях, связи между обыкновенными и цепными дробями.

Для изучения предлагаются следующие вопросы: понятие и свойства цепных дробей, разложение обыкновенных дробей в цепные дроби, нахождение обыкновенных дробей по данным цепным дробям.

План занятия №12

12.1. Понятие цепной дроби или конечной непрерывной дроби

12.2. Подходящие дроби

12.3. Схема нахождения всех подходящих дробей.

12.4. Свойства подходящих дробей

12.5. Разложение обыкновенной дроби в цепную (непрерывную)

12.6. Нахождение обыкновенных несократимых дробей по данным конечным непрерывным дробям

12.7. Сокращение дробей

Вопросы к занятию № 12:

1. Что такое цепная (непрерывная) дробь?

2. Дроби какого вида называются подходящими дробями?

3. Чем объясняется название «подходящие» дроби?

4. Какая зависимость имеется между числителями и знаменателями трех последовательных подходящих дробей?

5.Как выглядит схема нахождения всех подходящих дробей?

6. По какой формуле можно найти разность между двумя соседними подходящими дробями?

7. Какую формулу применяют для оценки погрешности при замене дроби $\frac{a}{b}$ подходящей дробью $\frac{\mathrm{P_k}}{\mathrm{Q_k}}$?

8. Можно ли установить взаимно однозначное соответствие между рациональными числами и конечными цепными дробями?

Занятие №13. *Квадратичные иррациональности и бесконечные периодические цепные дроби*

Основная цель – сформировать представление о бесконечных периодических непрерывных дробях, о смешанных периодических бесконечных непрерывных дробях, связи между бесконечными периодическими непрерывными дробями и квадратичными иррациональностями.

Для изучения предлагаются следующие вопросы: понятие и свойства о бесконечных периодических непрерывных дробях, разложение квадратичных иррациональностей в бесконечные периодические непрерывные дроби, геометрическая теория цепных дробей.

План занятия №13

13.1. Чисто периодические бесконечные непрерывные дроби

13.2. Смешанные периодические бесконечные непрерывные дроби

13.3. Связь бесконечных периодических непрерывных дробей с квадратичными иррациональностями

13.4. Геометрическая теория цепных дробей.

13.5. Золотое сечение

13.6. Сокращение дробей

13.7. Применение дробей.

Вопросы к занятию №13:

1. Что такое цепная дробь?

2. Как можно представить разложение иррационального числа ω через полное частное? По какой формуле?

3. В каком случае бесконечная непрерывная дробь называется чистой периодической?

4. В каком случае бесконечная непрерывная дробь называется смешанной периодической?

5. Какими двумя теоремами выражается связь бесконечных периодических непрерывных дробей с квадратичными иррациональностями?

6. Как выглядит цепная дробь для числа π?

7.Какую цепную дробь представляет золотое сечение - число $\frac{\overline{5}+1}{2}$?

§9. Описание педагогического эксперимента

В рамках исследования была проведена экспериментальная работа, состоящая из двух этапов: констатирующего и поискового, на базе МБОУ «Гимназия № 9» в 2014-2017 годах.

Целью констатирующего этапа эксперимента явилось выявление уровня подготовки старшеклассников по теме «Действительные числа».

В проведении эксперимента приняли участие старшеклассники, изучающие математику на углубленном уровне: группы 10Б, 10У2 и 10У3 (всего 88 человек)

На этапе констатирующего эксперимента предлагалось за 40 минут ответить на 15 вопросов теста (Приложение 1). Результаты тестирования были прогнозируемы: уровень знаний не всех учащихся достиг базового уровня.

Стоит пояснить, что три группы изучения математики на разных уровнях были сформированы в зависимости от познавательных запросов обучающихся: 10Б (базовый уровень) – обучающиеся 10а и 10б классов, кто не связывает свое дальнейшее образование с математикой; 10У2 (углублённый уровень) – обучающиеся 10а, 10б и 10м классов, чьё дальнейшее образование может быть связано с математикой, при этом основное общее образование было получено на базовом уровне; 10У3 (углубленный уровень) – обучающиеся 10а, 10б, 10 м классов, их дальнейшее образование точно будет связано с математикой, при этом у большинства обучающихся основное общее образование получено в классе с углублённым изучением математики.

Отметим, что группа 10У3 справилась с заданиями лучше остальных испытуемых, однако наибольшее затруднение вызвало задание № 9 (выполнение 31%), с этим же заданием плохо справились и остальные учащиеся (0% в группе 10Б и 14 % в группе 10У2).

Можно отметить, что старшеклассники утверждают, что все иррациональные числа – это корни, и что каждое действительное число является рациональным (№ 1), что иррациональные числа являются приближенными (№ 2). Не могут ответить на вопрос, каким числом выражается длина любого отрезка (№ 3). Плохо ориентируются они и в вопросах, касающихся арифметических действий с действительными числами (№ 13 – 15).

Однако задания, связанные с приближенными вычислениями, десятиклассники выполнили относительно неплохо (№ 5, 7, 10).

Анализ проведенного тестирования приведен в таблице 23 (результаты показаны в процентах).

Таблица 23

Результаты тестирования

№	Группа			Всего (88 чел.)
	10Б (34 чел.)	10У2 (28 чел.)	10У3 (26 чел)	
1.	35%	36%	50%	40%
2.	18%	29%	38%	27%
3.	15%	36%	65%	36%
4.	9%	18%	58%	26%
5.	53%	71%	88%	69%
6.	3%	11%	38%	16%
7.	38%	57%	92%	60%
8.	6%	29%	58%	28%
9.	0%	14%	31%	14%
10.	56%	75%	100%	75%
11.	0%	7%	54%	18%
12.	15%	21%	42%	25%
13.	21%	29%	65%	36%
14.	9%	57%	81%	45%
15.	3%	36%	65%	32%
всего	**19%**	**35%**	**62%**	**37%**

Констатирующий эксперимент показал, что, не смотря на специальную математическую подготовку, большинство десятиклассников владеют знаниями по теме «Действительные числа» на низком уровне.

Потому был проведен *поисковый эксперимент*. В соответствии с предложенной технологией формирования понятия «действительное число» в группе 10У3 (экспериментальная группа) были проведены уроки. На каждом этапе усвоения понятия учащимся предлагались задачи соответствующего уровня. Для проверки результатов освоения темы обучающимся была предложена представленная в § 6 дифференцированная домашняя работа. В качестве контрольной группы выступала группа 10У2, изучавшая тему по классической методической схеме. На рисунке 1 представлена диаграмма изменения уровня знаний старшеклассников по теме «Действительные числа» экспериментальной и контрольной групп на каждом уровне усвоения материала.

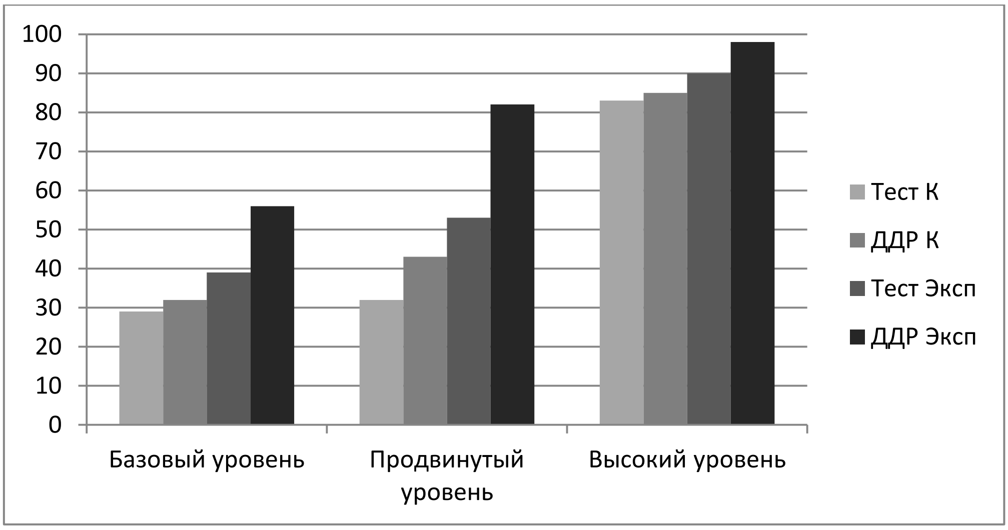


Рис. 1. Изменение уровня знаний экспериментальной и контрольной групп

Диаграмма показывает, что уровень знаний экспериментальной группы по теме «Действительные числа» повысился значительно, тогда как повышение уровня знаний контрольной группы незначительно на всех уровнях усвоения материала.

Выводы по второй главе

Во второй главе представлено проектирование числовой содержательно-методической линии в углубленном курсе математики общеобразовательной школы.

В исторической справке о развитии понятия числа кратко изложены три подхода к построению теории действительного числа (Вейерштрасс, Дедекинд, Кантор), ни один из которых не может быть реализован в школьном курсе математики.

Подробно раскрыта технология организации усвоения математических понятий (на примере понятия действительного числа), где каждому выделенному этапу усвоения понятия (за основу взята технология Г.И. Саранцева) поставлена в соответствие трёхуровневая система задач.

Представлен разработанный элективный курс «Действительные числа в задачах» для старшеклассников.

Приведено описание констатирующего и поискового этапов педагогического эксперимента.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе проведенного исследования были получены следующие результаты:

1. Рассмотрены различные трактовки понятия «содержательно-методическая линия», современные подходы к рассмотрению вопросов, связанных с этим понятием. Сделан вывод, что в настоящий момент выделяются новые содержательно-методические линии школьного курса математики и различные подходы к их реализации.

2. Проведен анализ содержания темы «Действительные числа» в школьных учебниках алгебры и начал математического анализа старших классов, который показал, что проектирование содержательного компонента числовой линии для углубленного уровня на данном этапе развития математического образования требует уточнения.

3. Проанализированы исследования связанные с понятием действительного числа, их анализ показал, что проблема введения действительных чисел и операций над ними на данный момент недостаточна решена в теории и методике обучения математике.

4. Выделено содержание трех уровней (базовый, продвинутый и высокий) усвоения понятия действительного числа, на основании которого для каждого уровня составлена система задач и упражнений.

5. Разработана программа элективного курса «Действительные числа в задачах». Домашние задания, вопросы и гипотезы, представленные в нем, могут стать темами мини-исследований старшеклассников.

6. Проведен констатирующий и поисковый этапы педагогического эксперимента, результаты которого позволяют утверждать, что гипотеза исследования нашла подтверждение. В дальнейшем требуется её уточнение и проведение обучающего этапа эксперимента.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алгебра 7 / С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин. – М.: Просвещение, 2012.
2. Алгебра 8 класс. Для классов с углубленным изучением математики / Н.Я. Виленкин, Г.С. Сурвилло, А.И. Симонов, А.И. Кудрявцев; Под ред. Н.Я. Виленкина. – М. Просвещение, 2010.
3. Алгебра. 8 кл.: учеб. для общеобразоват. учреждений / Г.К. Муравин, К.С. Муравин, О.В. Муравина. – 9-е изд., стереотип. – М.: Дрофа, 2006. – 255 с.
4. Алгебра. 8 класс / Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К. И. Нешков, С.Б. Суворова; под ред. С.А. Теляковского. – М.: Просвещение, 2012.
5. Алгебра. Сборник рабочих программ. 7-9 классы: пособие для учителей общеобразоват. организаций / сост. Т.А. Бурмистрова. – М.: Просвещение, 2014. – 96 с.
6. Алгебра: Учебник для 8 класса средней школы / Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин и др.; Под ред. А.Н. Тихонова. – М.: Просвещение, 2010.
7. Антонова И.В., Демченкова Н.А., Аблеева А.А. О различных технологиях формирования понятий у учащихся при обучении математике в общеобразовательной школе// Балтийский гуманитарный журнал. - 2016. - Т. 5. № 1(14). – С. 47-50. URL: http://elibrary.ru/download/elibrary_25589748_22351052.pdf
8. Арнольд В.И. Цепные дроби.- М.: МЦНМО, 2001.-40 с.
9. Барабанова С.Ю. Творческий подход на уроках математики при дифференцированном обучении // Эксперимент и инновации в школе. – 2014. – Т. 4. – С.25-29.
10. Барабанова С.Ю. Творческий подход на уроках математики при дифференцированном обучении // Эксперимент и инновации в школе. – 2014. – Т5. – С.31-34.

11. Безрукова В.С. Педагогика. Проективная педагогика: учебник для индустриально-педагог.техникумов и для студентов инженерно-педагогических специальностей . -- Екатеринбург : Деловая книга, 1999.

12. Берник В.И. и др. Сборник олимпиадных задач по математике. – Мн.: Нар. Асвета, 1980.

13. Беспалько В.П. Основы теории педагогических систем. — Воронеж: Изд-во Воронеж. ун-та, 1977. — 304 с.

14. Блох А.Я. О соотношении школьного курса алгебры и базисных математических дисциплин/ Современные проблемы методики преподавания математики: Сб. статей. Учеб. пос. для студ. мат. и физ.-мат. спец. пед. ин-тов / сост. Н.С. Антонов, В.А. Гусев. – М.: Просвещение, 1985.– С.48-54.

15. Блох А.Я., Гусев В.А., Дорофеев Г.В. Методика преподавания математики в средней школе: Частная методика / Сост. В.И. Мишин. – М.: Просвещение, 1987. – С.63-74

16. Боженкова Л.И. Планируемые результаты изучения числовой линии школьного курса алгебры. Конференциум АСОУ: сборник научных трудов и материалов научно-практических конференций. - 2015. - № 1. - С. 2937-2949. Режим доступа : http://elibrary.ru

17. Виленкин Н.Я., Ивашев-Мусатов О.С., Шварцбурд С.И. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. 10 класс. Алгебра и начала математического анализа (углубленный уровень) / Под ред. Н.Я. Виленкина. – М. Мнемозина, 2014.

18. Выготский Л.С. Избранные психологические исследования. – М.:Просвещение, 1991. – 519 с.

19. Гладкий А.В., Козиоров Ю.Н. Действительные числа как последовательности обыкновенных дробей // Математика в школе, 1996. - № 6. – С. 39-47

20. Глейзер Г.И. История математики в школе, 7-8 класс. Пособие для учителя. – М.: Просвещение, 1982 – С.18-21, 126-137

21. Гончаров В.Л.Математика как учебный предмет // Известия Академии педагогической науки РСФСР. Вопросы общей методики. Вып. 92. М., 1958. С. 37–66.

22. Гусева Н.В., Менькова С.В., Баранова Е.В. Гуманитарный потенциал школьного курса математики и его реализация в обучении. Учебно-метод. пособие к дисциплине по выбору. – Арзамас: Арзамасский филиал ННГУ, 2014. С.13.

23. Демоверсия, спецификация, кодификатор ЕГЭ и ГВЭ 2017. [Электронный ресурс]: // URL: http://www.fipi.ru/ege-i-gve-11/demoversii-specifikacii-kodifikatory

24. Демоверсия, спецификация, кодификатор ОГЭ и ГВЭ 2017. [Электронный ресурс]: // URL:http://www.fipi.ru/oge-i-gve-9/demoversii-specifikacii-kodifikatory

25. Дорофеев Г.В., Суворова С.Б., Бунимович Е.А. Алгебра 8. – М.: Просвещение, 2010

26. Дяченко С.И. Линия задач с параметрами в школьном курсе математики // Вестник Таганрогского института им. А.П. Чехова. – 2010, №1. С. 72-76.

27. Егупова М.В. Практико-ориентированное обучение математике в школе как предмет методической подготовки учителя. Монография. – М.:МПГУ, 2014. С.112-114.

28. Емелин А.В. Изучение иррациональных чисел в курсе алгебры средней школы с использованием самоподобных визуальных моделей: Автореф… дис. канд.пед.наук. - Нижний Новгород, 2012

29. Епишева О.Б., Крупич В.И. Учить школьников учиться математике: Формирование приёмов учеб.деятельности: Кн. для учителя. – М.: Просвещение, 1990.

30. Задачи и упражнения по началам мат. анализа. / Сост. Е. С. Канин, С. И. Калинин; Под общ. ред. Е. С. Канина – М.: Московский лицей, 2002. – С. 5-13

31. Зубарева И.И. Построение методологической схемы изучения числовой линии курса математики 5-6 классов на основе принципа систематичности и последовательности в обучении с позиций психологической теории деятельности: Автореф… дис. канд.пед.наук. - Москва, 2008

32. Иванова Т.А. Теоретические основы обучения математике в средней школе: Учебное пособие. – Н. Новгород: НГПУ, 2003.-319 с.

33. Ивашев-Мусатов О.С. О введении числа е // Математика в школе. – 2012. - № 6. – С. 37-38

34. Изучение алгебры в VII – IX классах : Кн. для учителя. / Колягин Ю.М., Сидоров Ю.В., Ткачева М.В. и др. – М.: Просвещение, 2002.- 287 с.

35. Канин Е.С. и др. Упражнения по началам математического анализа в 9-10 классах: Кн. для учителя / Е.С. Канин, Е.М. Канина, М.Д. Чернявский. – М.: Просвещение, 1986. – 160 с.

36. Канин Е.С. Об углубленном изучении действительных чисел // Математика в школе. – 1999. - № 6. – С. 74-77

37. Канин Е.С., Канина Е.М. Об изучении действительных чисел в 9 классе // Математика в школе,1978. - №5. – С. 27 – 31.

38. Кардаильская О.С. Исторический материал как мотивационный фактор при изучении линии числа в школьном курсе математики // Актуальные проблемы гуманитарных и естественных наук. – 2012. - № 2. – С.220-223

39. Карп А.П. Сборник задач по алгебре и началам анализа: Учебное пособие для учащихся школ и классов с углубленным изучением математики. – М.: Просвещение, 1995. – С. 4 – 5

40. Колмогоров А.Н., Абрамов А.М., Вейц Б.Е. Алгебра и начала анализа: Учебное пособие для 9-10 класса средней школы / Под ред. А.Н. Колмогорова. – М.: Просвещение, 1976. – С. 40-54

41. Концепция математического образования Российской Федерации [Электронный ресурс]: // URL: http://komarovana.ucoz.ru/novosti/rasporjazhenie_pravitelstva_rf.pdf

42. Кордемский Б.А. Эмоциональная презентация детищей несоизмеримости // Математика в школе. – 1998. - № 1. – С.76-77

43. Крутецкий В. А. Основы педагогической психологии. - М. : Просвещение, 1972.

44. Кузнецова Т.И. Методика моделирования дробных чисел в условиях повторительного школьного курса математики // Школьные технологии. – 2013. - № 6. – С.113-119

45. Липилина В.В. Теория чисел в примерах и задачах: учебное пособие. –Самара: ПГСГА, 2011.-124 с.

46. Лабораторные и практические работы по методике преподавания математики: Учеб. пособие для студентов физ.-мат. спец. пед. ин-тов /Е.И. Лященко, К.В. Зобкова, Т. Ф. Кириченко и др.; Под ред. Е.И. Лященко.- М.: Просвещение, 1988. С. 21.

47. Лященко Е.И. Содержательно-методологические линии школьной математики /Проблемы теории и практики обучения математике: Сборник научных работ, представленных на Международную научную конференцию «59 Герценовские чтения». – СПб.: Изд- во РГПУ им. А.И. Герцена, 2006. – С. 128–132.

48. Марнянский И.А. Упражнения к некоторым темам курса «Алгебра и начала анализа» 9 класса // Математика в школе. – 1978. - № 1. – С.24-25

49. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа (базовый и углубленный уровень). 10 класс / Ю.М. Колягин, М.В. Ткачѐва, Н.Е. Фѐдорова, М.И. Шабунин. - М.: Просвещение, 2012

50. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа (базовый и

углубленный уровень). 10 класс / С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин. – М.: Просвещение, 2013. – 19с.

51. Мирошин В.В. Формирование содержательно-методической линии задач с параметрами в курсе математики общеобразовательной школы: Автореф… дис. канд.пед.наук. - Москва, 2008

52. Мордкович А.Г. Алгебра 8. В 2ч. Учеб. для общеобразоват. учреждений. – М.: Мнемозина, 2010. – 223 с

53. Мордкович А.Г. Алгебра и начала анализа. 10-11 кл.: Методическое пособие для учителя. – М.: Мнемозина, 2000. - 144 с.

54. Мордкович А.Г. Беседы с учителями математики. – Мир и образование, Оникс, 2015. -334 с.

55. Мордкович А.Г., Николаев Н.П. Алгебра 8. В 2ч. – М.: Мнемозина, 2013

56. Мордкович А.Г., Семенов П.В. Математика: Алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс (базовый и углубленный уровни) в 2 ч. – М.: Мнемозина, 2013

57. О чем " Молчит " учебник: [Задания по алгебре] / Н.Б. Гусева, Сычева Г.В. // Математика в шк. - 2000. - N 3. - С. 16-23

58. Пелевина Н.Н. Действительные числа в школьном курсе математики // сборник трудов конференции «Актуальные вопросы методики обучения математике и информатике». – Ульяновск, 2012. – Ульяновск: УГПУ им. И.Н.Ульянова, 2013. – С.90-94

59. Плакатина О.И. Логико-дидактический анализ состава содержания математического образования [Электронный ресурс]: // altspu. URL: http://www.altspu.ru/Journal/vestnik/ARHIW/N1_2003/pdf_fail/matem/plakatina.pdf

60. Потапов М.К. Математика. Методические рекомендации.5 класс. Пособие для учителей общеобразоват. учреждений / М. К. Потапов, А. В. Шевкин. - М.: Просвещение, 2012. – 160 с.

61. Пратусевич М.Я., Столбов К.М., Головин АН. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа (углубленный уровень). 10 класс. – М.: Просвещение, 2010

62. Преподавание алгебры в 7 -9 классах осуществляется по УМК Ю.М. Макарычева, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешкова, С.Б [электронный ресурс]: // http://volganik3.shkola.hc.ru/wp-content/uploads/2013/10/Алгебра-в-7-9-классах-УМК-Ю.М.-Макарычева-Н.Г.-Миндюк-К.И.-Нешкова-С.Б.pdf

63. Программы общеобразоват. учреждений. Алгебра и начала мат. анализа.10-11кл. - сост. Бурмистрова Т.А. - 2009 -159с

64. Рогановский Н.М. Методика преподавания математики в средней школе: Учеб. пособие – Мн.: Выш. Шк., 1990. С. 86.

65. Саранцев Г.И. Методология и методика обучения математике.- Саранск: Тип.”Крас. Окт.”, 2001.- 144 с.

66. Саранцев Г.И. Общая методика преподавания математики: Учебное пособие для студентов мат. спец. пед. вузов и университетов - Саранск: Тип. «Красс.Окт.», 1999.- С. 120-143.

67. Саранцев Г.И. Упражнения в обучении математике. – М.: Просвещение, 1995. – 240с.

68. Симонова Н.С., Дружинина М.М. Множество действительных чисел в курсе математического анализа педвуза. // Математическое образование: концепции, методики, технологии. Сб. трудов V Международной научной конференции «Математика. Образование. Культура». Ч.2. – Тольятти: ТГУ, 2011г.-С.225-229.

69. Симонова Н.С., Утеева Р.А. Числовые системы: Учебное пособие для студ. мат. спец. педвузов и ун-тов /Под ред. Р.А. Утеевой.- Тольятти: ТГУ, 2005.-108 с.

70. Симонова Н.С., Шемякина А.Ю. Элективный курс «Действительные числа в задачах» для учащихся математического профиля. // Математика и математическое образование: сборник трудов VII

Международной научной конференции «Математика. Образование. Культура» (к 240-летию со дня рождения Карла Фридриха Гаусса). – Тольятти: Изд-во ТГУ, 2017. – С. 279-285

71. Сластенин В.А. и др. Педагогика Учеб. пособие для студ. высш. пед. учеб. заведений / В. А. Сластенин, И. Ф. Исаев, Е. Н. Шиянов; Под ред. В.А. Сластенина. - М.: Издательский центр "Академия", 2013. - 576 с.

72. Смирнова Е.С. Рекомендации по использованию литературы по теме «Действительные числа» // Математика в школе. -1993.- № 3.- С. 22-24.

73. Смирнова С.И. Какое это число? //Математика в школе. 2000. №4. – С.10-12.

74. Столяр А.А. Методы обучения математике. М.: Высшая школа, 1966. - 190 с.

75. Тренировочный вариант для подготовки к огэ [Электронный ресурс]: // URL: http://alexlarin.net/gia/trvar144_oge.html

76. Ульянова Т.В. Методические акценты в преподавании темы «Действительные числа» на профильном уровне // ОНВ. 2011. №4 (99). URL: http://cyberleninka.ru/article/n/metodicheskie-aktsenty-v-prepodavanii-temy-deystvitelnye-chisla-na-profilnom-urovne

77. Усова А.В. Формирование у школьников научных понятий в процессе обучения / М.: Изд-во университета РАО, 2007. 309 с.

78. Утеева Р.А. Теоретические основы организации учебной деятельности учащихся при дифференцированном обучении математике в средней школе: Монография. – М.: Прометей, 1997

79. Утеева Р.А., Симонова Н.С., Шемякина А.Ю. Содержательно-методические линии школьного курса математики как категория методической науки // European Social Science Journal (Европейский журнал социальных наук). 2016, № 12. – С. 241-247

80. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования [Электронный ресурс]: // Министерство

образования и науки Российской Федерации. URL: http://минобрнауки.рф/документы/543

81. Федеральный государственный образовательный стандарт среднего (полного) общего образования. Приказ Мин. образования и науки РФ от 17.05.2012 г. №413. URL: http:// минобр-науки.рф/документы/2365

82. Фихтенгольц Г.М. Иррациональные числа в средней школе.// Математическое просвещение. 1957. №2. – С.133-149.

83. Хитрина Н.А. О применении контрпримеров. - Математика в школе.-1974. №6.- С. 34-41

84. Холодная, М. А. Психология интеллекта. Парадоксы исследования. / М. А. Холодная. - СПб.: Питер, 2002. - 272 с.

85. Цукерман В.В. К понятию действительного числа http://mi.mathnet.ru/rus/mo/y2010/i3/p22

86. Чаплыгин В.Ф. Задачи в формировании понятия действительного числа // Математика в школе. – 1997. - № 1. – С. 26-27

87. Шемякина А.Ю. Задачи для формирования понятий темы «Действительные числа» в других разделах школьного курса математики // Проблемы современного математического образования в педвузах и школах России: Тезисы докладов II межрегиональной научной конференции. – Киров: Изд-во Вятского гос.пед.ун-та, 2001. – 195с.

88. Шемякина А.Ю. Проектирование числовой содержательно-методической линии в углублённом курсе математики общеобразовательной школы. // Математика и математическое образование: сборник трудов VII Международной научной конференции «Математика. Образование. Культура» (к 240-летию со дня рождения Карла Фридриха Гаусса). – Тольятти: Изд-во ТГУ, 2017. – С. 430-435

89. Шемякина А.Ю. Содержание темы «Действительные числа» в курсе математики основной школы. // Математическое образование: концепции, методики, технологии: сборник трудов IV Международной

научной конференции «Математика. Образование. Культура» В 3-х частях. Ч.2 – Тольятти: ТГУ, 2009. – С.224-227

90. Шемякина А.Ю. Уровневая дифференциация при изучении темы школьного курса математики «Действительные числа» // Образовательная среда учебного заведения и её влияние на духовно-нравственное становление будущего специалиста: Тезисы докладов VII научно-практической конференции. – Тольятти, РИЦ ТСЭК, 2000

91. Шемякина А.Ю. Уровневый подход при изучении действительных чисел в школьном курсе математики // Всероссийская конференция «Математика и общество. Математическое образование на рубеже веков», Дубна, сентябрь 2000.— М.: МЦНМО, 2000.— 664 с. – С.41-43

92. Шемякина А.Ю., Утеева Р.А. Актуальные проблемы средней школы при изучении темы «Действительные числа». // Российские регионы: проблемы современного образования: Тезисы докладов III межрегиональной научно-практической конференции. – Киров, ВСЭИ, 2000. – С.155-156

93. Шонин М. Ю. Формирование понятия действительного числа при решении задач в курсе математики [Текст] / М. Ю. Шонин // Наука, образование, общество: тенденции и перспективы развития : материалы Междунар. науч.-практ. конф. (Чебоксары, 13 дек. 2015 г.) / редкол.: О. Н. Широков [и др.]. — Чебоксары: ЦНС «Интерактив плюс», 2015. — С. 152–154

94. Штейнгард Л.А. Любое целое – через любое действительное // Математика в школе. - 1986. - №2. – С. 76

95. Штейнгард Л.А. Новые доказательства иррациональности чисел $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$ или о том, как последние цифры числа помогают решать задачи. // Математика в школе. – 2012. - № 9

96. Экспериментальная математика в школе. Исследовательское обучение: коллективная монография / М.В. Шабанова, Р.П. Овчинникова, А.В. Ястребов и др. – М.: Издательский дом Академии Естествознания, 2016. –С.80-83.

97. Яковлева Н.О. Педагогическое проектирование инновационных образовательных систем / Н.О. Яковлева. – Челябинск: Изд-во Челябинского гуманитарного института, 2008. – С. 50-51.

98. La Suha Ishabu, S, Pd., M.Si. The Improve Learning Results and Creativity Student to Lesson Operation Count Numbers Through Cooperative Learning Type Numbered Heads Together (NHT) in Class IV S D District 6 3 Ambon-Indonesia// Mathematical Theory and Modeling. – IISTE, 2013. - № 5. – PP. 68-72.

http://www.iiste.org/Journals/index.php/MTM/article/view/5868/5983

99. Makinde A.O. Some Methods of Effective Teaching and Learning Of Mathematics // Journal of Education and Practice. – IISTE, 2012. - № 7. – PP. 53-55.

http://www.iiste.org/Journals/index.php/JEP/article/view/1849/1804

100. Meeting the Needs of All Students through Differentiated Instruction: Helping Every Child Reach and Exceed Standards, Holli m. Levy, Clearing House 81 no4 Mr/Ap 2008

http://www.wou.edu/~tbolsta/web/texbook/24_Meeting_the_Needs.pdf

101. Mr. Onoshakpokaiye E, Odiri. Relationship of study habits with mathematics achievement.// Journal of Education and Practice. – IISTE, 2015. - № 10. – PP. 168-171.

http://www.iiste.org/Journals/index.php/JEP/article/view/21452/22160

102. Pardala A., Uteeva R., Ashirbaev N. Mathematical education in terms of innovative development//Mathematics teaching-research journal online. - New York.V 7 N 4, Summer 2015.

http://www.hostos.cuny.edu/mtrj

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Тестирование по теме «Действительные числа»

1. Выберите верные утверждения:

а) Каждое действительное число является рациональным;

б) Каждое иррациональное число является действительным;

в) Каждое целое число является рациональным;

г) Все иррациональные числа – это корни из рациональных чисел.

2. В чем заключается отличие рациональных чисел от иррациональных?

3. Каким числом выражается длина любого отрезка?

4. Существует ли точное значение числа $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ и можно ли его найти?

5. Выберите иррациональные числа: $\sqrt{12,25}$; $\sqrt{3}-\pi$; $5\sqrt{13}$.

6. Покажите, что число $\sqrt{29-12\sqrt{5}}-\sqrt{29+12\sqrt{5}}$ является рациональным.

7. Найдите приближенное значение числа $\sqrt{3}$ с избытком.

8. Найдите $\sqrt{2}-1$ с точностью до 0,01.

9. Как можно изобразить на координатной прямой точку с координатой $\sqrt{5}$?

10. Рациональное число запишите в виде десятичной дроби: π; $\frac{46}{27}$.

11. Запишите в виде обыкновенной дроби число 0,(4).

12. Все приближения числа α, начиная с некоторого, совпадают. Каким числом (рациональным или иррациональным) является число α?

13. Выберите верные утверждения:

а) Уравнение $\sqrt{m}+x=\sqrt{n}$ $(m,n \in \boldsymbol{N})$ имеет рациональный корень;

б) Уравнение $\sqrt{m}+x=\sqrt{n}$ $(m,n \in \boldsymbol{N})$ имеет иррациональный корень;

в) Уравнение $\sqrt{m}+x=\sqrt{n}$ $(m,n \in \boldsymbol{N})$ не имеет действительных корней.

14. Может ли произведение двух иррациональных чисел быть числом рациональным? Ответ поясните примерами.

15. Может ли произведение двух периодических дробей быть дробью непериодической? Ответ поясните примерами.