МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Тольяттинский государственный университет»

Институт математики, физики и информационных технологий
(наименование института полностью)

Кафедра «Алгебра и геометрия»
(наименование кафедры)

44.04.01 «Педагогическое образование»
(код и наименование направления подготовки, специальности)

«Математическое образование»
(направленность (профиль)/специальность)

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

на тему **«ФОРМИРОВАНИЕ АЛГОРИТМИЧЕСКОГО МЫШЛЕНИЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПРИ ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ В ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ШКОЛЕ»**

Студент В.С. Дегтярева ____________________

Научный руководитель к.п.н., доцент И.В. Антонова ____________________

Руководитель программы д.п.н., профессор Р.А. Утеева ______________

«_____»_______ 2017 г.

Допустить к защите

Заведующий кафедрой д.п.н., профессор Р.А. Утеева ______________

«_____»___________2017 г.

Тольятти 2017

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность исследования. Слово «алгоритм» произошло от латинского слова «algorithmi» – формы написания имени среднеазиатского ученого Аль-Хорезми, которое затем перешло в имя «Алгоритми», так оно и вошло в употребление. Данный термин использовали ранее для обозначения четырех арифметических операций, в этом значении он применялся в ряде европейских языков [34, С. 42].

В соответствии с ФГОС среднего (полного) общего образования [47] изучение предметной области «Математика и информатика» должно обеспечить у учащихся сформированность *основ* логического, *алгоритмического* и математического *мышления*, умений применять полученные знания при решении задач. Кроме того, требованиями к предметным результатам освоения учащимися *базового курса* математики являются владение методами доказательств и *алгоритмами решения задач*; умение их применять, проводить доказательные рассуждения в ходе решения задач; *углубленного курса* - сформированность понятийного аппарата по основным разделам курса математики; знание основных теорем, формул и умение их применять; умение доказывать теоремы и находить нестандартные способы решения задач.

Формирование алгоритмического мышления учащихся - одна из актуальных проблем преподавания математики в общеобразовательной школе, так как эффективное использование учащимися в учебном процессе определенных алгоритмов показывает, насколько они осознают изученный материал и умеют применять его при решении различных задач; облегчает процесс овладения ими различных умений и навыков.

Л.Н. Ланда в 1961 г. впервые показал возможность применения алгоритмов в процессе обучения учащихся и их значение для формирования у них таких методов мышления, как дедукция, индукция и аналогия.

Проблема использования в обучении алгоритмов обсуждалась философами, психологами, дидактами, методистами в области теории и методики обучения математики в 60-70 годах 20 века. Ими были определены понятия алгоритмической деятельности, алгоритмического мышления и другие понятия, связанные с ними; раскрыта целесообразность изучения и применения алгоритмов при обучении определенных учебных предметов и различные способы записи алгоритмов.

В теории и методике обучения математике методическим аспектам формирования алгоритмического мышления учащихся при обучении математике посвящены работы Л.В. Виноградовой [15], Я.И. Груденова [20], Т.А. Ивановой [45], Е.И. Лященко [26], Н.Л. Стефановой, Н.С. Подходовой [33], А.А. Столяра [42], Л.М. Фридмана [48], А.Я. Хинчина [49] и др.

В ряде исследований отмечается, что работу над формированием алгоритмического мышления у учащихся необходимо начинать в начальном курсе математики. Так, в учебниках математики 2 класса Л.Г. Петерсон в разделе «Работа с информацией и анализ данных» рассматриваются понятие алгоритма, виды алгоритмов (линейные, разветвлённые и циклические); составление, запись и выполнение алгоритмов различных видов.

Г.В. Дорофеев отмечает, что алгоритмическое мышление может быть сформировано у учащихся только в процессе изучения математики.

Кроме того, алгоритмический метод готовит учащихся к решению нестандартных задач.

Для формирования алгоритмического мышления у учащихся общеобразовательной школы необходима целенаправленная, систематическая работа, специально разработанная методика.

Таким образом, **актуальность** темы исследования обусловлена *противоречиями между*: требованиями к обязательным результатам освоения программы среднего (полного) общего образования по математике и фактическим состоянием методики формирования алгоритмического мышления учащихся на уроках математики в общеобразовательной школе.

Необходимость разрешения данного противоречия определяет актуальность **проблемы исследования:** обоснование и разработка методики формирования алгоритмического мышления учащихся при обучении математике в общеобразовательной школе, ориентированной на овладение ими математическими методами решения задач согласно ФГОС.

Объект исследования: процесс обучения математике в общеобразовательной школе.

Предмет исследования: методика формирования алгоритмического мышления учащихся старших классов при обучении математике в общеобразовательной школе.

Цель исследования заключается в теоретическом обосновании предлагаемой методики формирования алгоритмического мышления учащихся на уроках математики в общеобразовательной школе.

Задачи исследования*:*

1. Провести анализ различных подходов к определению понятий алгоритм, алгоритмическое мышление.

2. Выделить основные формы и виды представления алгоритмов и правил, этапы их изучения в школьном курсе математики.

3. Выявить методические особенности формирования алгоритмического мышления учащихся на уроках алгебры в общеобразовательной школе.

4. Представить методические рекомендации по формированию алгоритмического мышления учащихся старших классов на примере тем курса алгебры и начал анализа.

5. Разработать методику формирования алгоритмического мышления учащихся на примере темы «Производная функции».

Для решения поставленных задач применялись следующие **методы исследования**: анализ психолого-педагогической, научной и учебно-методической литературы; изучение, наблюдение и обобщение школьной практики; анализ собственного опыта работы в школе.

Основные этапы исследования:

1 семестр (2015/16 уч.г.): анализ ранее выполненных исследований по теме диссертации, анализ школьных учебников, нормативных документов (стандартов, программ), анализ опыта работы школы по данной теме (на основе изучения научно-методической литературы и практики работы);

2 семестр (2015/16 уч.г.): определение психолого-педагогических и методических основ исследования по теме диссертации;

3 семестр (2016/17 уч.г.): разработка методики формирования алгоритмического мышления учащихся при обучении математике на примере темы «Производная функции» и соответствующих методических рекомендаций на примере тем курса алгебры и начал анализа;

4 семестр (2016/17 уч.г.): оформление диссертации, корректировка ранее представленных материалов, уточнение аппарата исследования, формулирование выводов.

Новизна проведенного исследования заключается в том, что в нем определена и обоснована методика формирования алгоритмического мышления учащихся при обучении математике в общеобразовательной школе.

Теоретическая значимость исследования состоит в том, что в нем:

- выявлены различные подходы к определению понятий алгоритм, алгоритмическое мышление;

- определены основные формы и виды представления алгоритмов и правил, этапы их изучения в школьном курсе математики;

- представлены методические особенности формирования алгоритмического мышления учащихся на уроках алгебры в общеобразовательной школе.

Практическую значимость результатов исследования составляют методические рекомендации по формированию алгоритмического мышления учащихся старших классов на примере тем курса алгебры и начал анализа и разработанная соответствующая методика на примере темы «Производная функции», которые могут быть использованы учителями математики, студентами педагогических направлений подготовки при прохождении педагогической и производственной практик.

Достоверность и обоснованность результатов и выводов, полученных в ходе проведенного исследования, обусловлены использованием данных теории и методики обучения математике, анализом педагогической практики и личным опытом работы, сочетанием теоретических и практических методов исследования.

На защиту выносятся:

1. Методические рекомендации по формированию алгоритмического мышления учащихся старших классов на примере тем курса алгебры и начал анализа.

2. Методика формирования алгоритмического мышления учащихся на примере темы «Производная функции».

Апробация результатов исследования осуществлена путём выступлений на научно-методических семинарах преподавателей, аспирантов и студентов кафедры алгебры и геометрии ТГУ (декабрь 2015; июнь, декабрь 2016; май 2017); научной студенческой конференции «Дни науки в ТГУ» (апрель 2016, диплом за 3 место; апрель 2017).

Экспериментальная проверка предлагаемых методических рекомендаций была осуществлена в период производственной, педагогической и преддипломной практик на базе кафедры алгебры и геометрии Тольяттинского государственного университета, а также в период работы учителем математики на базе МБУ «Школа №55» г.о. Тольятти.

Структура диссертации: введение, две главы, заключение, список литературы (57 наименований) и Приложения.

В Приложении представлены ответы и решения к некоторым методическим материалам (самостоятельной и контрольной работам, системам упражнений), направленным на формирование алгоритмического мышления.

ГЛАВА I. ПСИХОЛОГО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ФОРМИРОВАНИЯ АЛГОРИТМИЧЕСКОГО МЫШЛЕНИЯ УЧАЩИХСЯ ПРИ ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ В ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ШКОЛЕ

§1. Сущность, свойства алгоритмов и правил

Большое количество задач в школьном курсе математики опирается при решении на применение определенного правила, формулы, понятия или теоремы. Например, для того, чтобы решить уравнение первой степени, необходимо известные слагаемые перенести в правую часть уравнения, а слагаемые, содержащие неизвестные, перенести в его левую часть, затем привести подобные слагаемые и обе части уравнения разделить на коэффициент при неизвестном, если он отличен от нуля. В случае, если он равен нулю, то уравнение не имеет решений.

Приведенный пример представляет собой алгоритм решения линейного уравнения или, так называемое, предписание *алгоритмического типа*. Примерами алгоритмов также могут являться правила действий с десятичными дробями, обыкновенными дробями и смешанными числами, решения различных уравнений, неравенств и т. д.

Алгоритм определяется как «свод правил, который точно описывает последовательность операций таким образом, что каждое правило – результативное и определенное и последовательность прерывается через конечный промежуток времени» [53].

Л.В. Виноградова считает, что *алгоритм* – это «точное общепонятное предписание о выполнении в определенной последовательности операций для решения любой из задач, принадлежащих некоторому классу» [15].

Н.Л. Стефанова, Н.С. Подходова описывают алгоритм как основное, неопределяемое понятие, рассматривая его сущность на содержательно-интуитивном уровне. Под *алгоритмом* авторы понимают *понятное предпи-*

сание, указывающее, какие операции и в какой последовательности необходимо выполнить с данными, чтобы решить задачу определенного типа.

Числовая линия – это одна из ведущих линий курса математики 5 – 6 классов. На начальном этапе обучения каким-либо действиям с любыми числами формулируется правило. Правило является свернутым алгоритмом. Обычно в правиле выделяются блоки – отдельные шаги (системы действий в сжатом виде, некоторые действия вообще не содержатся в формулировке правила). Это, в основном, те действия, которые необходимы на начальном этапе применения правила и отработаны до введения правила.

Установлено, что «любой алгоритм является правилом, однако, не всякое правило является алгоритмом».

Математическое правило представляет собой «описание общего способа решения однотипных стандартных задач» [45, С. 141].

Т.А. Иванова [45] приводит *примеры правил* из различных школьных учебников математики:

1. Умножение десятичных дробей (5 класс, [31]).
2. Квадрат разности двух чисел (7 класс, [6]).
3. Косинус суммы двух аргументов (10 класс, [2]).
4. Нахождение наибольшего и наименьшего значений непрерывной и дифференцируемой функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ (11 класс, [2]).
5. Построение точки пересечения данной прямой с заданной плоскостью (10 класс, [17]).
6. Нахождение корней квадратного уравнения (8 класс, [8]).
7. Правило сравнения двух чисел (6 класс, [32]).

В ходе анализа правил, изучаемых в курсе математики, проведенного Т.А. Ивановой, выявлено, что [45, С. 141-143]:

– в школьных учебниках много правил;

– курс алгебры, в отличие от курса геометрии, содержит значительно большее количество правил;

– правила формулируются в различных формах: словесной (примеры 1, 4, 5, 7), символьной (примеры 3, 6); словесной и символьной (пример 2);

– отдельные правила (пример 4) являются четкой последовательностью шагов для решения типовых задач определенного типа (в таких случаях будем полагать, что правило задано в алгоритмической форме);

– решение однотипных задач значительно облегчается, если правило имеет алгоритмическую форму (отметим, что в учебниках школьных программ далеко не каждое правило имеет такую форму);

– чаще всего каждое последующее правило содержит отдельные ранее изученные правила (например, правило нахождения наибольшего и наименьшего значений функции $f(x)$ на отрезке (пример 4) включает правило нахождения критических точек);

– в каждом правиле можно легко увидеть его теоретический базис (математическую основу), который может заключаться или в одной теореме (такие правила Л.М. Фридман и Е.Н. Турецкий [48] называют «правилами-теоремами», или «правилами-тождествами», или «правилами-формулами», как в примерах 2 и 3, 6), или в одном определении (правило-определение, примеры 4 и 7), или в их сочетании (пример 1);

– многие правила нужно извлекать самим из соответствующих теорем (тождеств, формул) и определений (пример 5). Для того, чтобы решить нестандартную задачу, мы должны применить несколько правил. Таким образом, от усвоения обучающимися правил зависит успех решения задач.

Любой алгоритм обладает определенными свойствами.

Существуют следующие *свойства алгоритмов*:

– *массовость* (алгоритм должен подходить для решения любых задач определенного типа);

– *элементарность и дискретность шагов* (излагаемы процесс нужно разбить на отдельные последовательные шаги. Должен получиться упорядоченный набор четко отделенных друг от друга действий);

– *детерминированность* (однозначность действий алгоритма, исключающую случайность в выборе действий);

– *результативность* (алгоритм направлен на получение определенного результата)».

По данным свойствам можно определить однозначно, является ли рассматриваемый порядок действий алгоритмом или нет [30, С. 328].

Таким образом, под алгоритмом мы будем понимать понятное предписание, указывающее, какие операции и в какой последовательности необходимо выполнить с данными, чтобы решить задачу определенного типа. Кроме того, алгоритм должен обладать такими свойствами, как массовость, дискретность шагов, детерминированность и результативность.

§2. Формы и виды представления (записи) алгоритмов и правил в школьном курсе математики

Алгоритм можно быть задать в нескольких формах: в виде таблицы, формулы, правила, определения, описания. Алгоритм может регулировать действие с разной степенью подробности или свернутости, в зависимости от того, для кого он предназначен. Если алгоритм представлен в форме последовательности операций, то он является готовой программой действий. Л.В. Виноградова приводит пример сложения десятичных дробей (5 класс, [31]).

Если алгоритм представлен в виде формулы, правила, таблицы, определения, то программы, состоящей из последовательности команд, нет. Её предстоит создать самим.

Существуют алгоритмы *распознавания* и *преобразования*. Признаки делимости, рассмотренные ранее алгоритмы подведения под определение и под понятие являются примерами *алгоритмов распознавания*. К примеру, признак делимости числа на 3 имеет следующий алгоритм:

1) сложить цифры, из которых состоит данное число;

2) проверить, делится ли полученная сумма на 3;

3) если полученная сумма делится на 3, то и само число делится на 3; если полученная сумма не делится на 3, то и само число не делится на 3.

Алгоритмы применения формул являются *алгоритмами преобразования*. Вместе с тем, при применении определенной формулы, к примеру, квадрата разности двух чисел, сначала происходит распознавание формулы, подтверждение того, что выбор формулы сделан верно, а затем производится преобразование: актуализация формулы и использование её по шагам. Описанная деятельность состоит из следующих шагов:

1) определить первый член двучлена;

2) определить второй член двучлена;

3) возвести в квадрат первый член двучлена;

4) найти произведение первого и второго членов двучлена;

5) удвоить произведение, полученное в четвертом шаге;

6) возвести в квадрат второй член двучлена;

7) из результата третьего действия вычесть результат пятого и сложить с результатом шестого.

Достаточно большой объем всевозможных правил в учебниках математики школьных программ в последнее время представляется обучающимся в форме алгоритма с *выделенной последовательностью шагов*. Применение правила в таком случае является менее трудным для учащихся, чем его использование при отсутствии указанных шагов или если какие-то действия в предписании опущены, только предполагаются и должны быть дополнены самими обучающимися.

Приведем пример правила сложения чисел с разными знаками (6 класс, [32]).

Чтобы сложить числа с разными знаками, нужно:

1) из большего модуля вычесть меньший;

2) поставить перед полученным числом знак того слагаемого, модуль которого больше.

Данный алгоритм требуется доработать обучающимися, т. к. в нем не обозначены следующие шаги: найти модуль каждого числа; сравнить модули этих чисел и определить, какое число имеет больший модуль; определить знак числа, которое имеет больший модуль. Эти шаги некоторыми обучающимися выполняются без затруднений, а для других их выделение представляет существенные трудности.

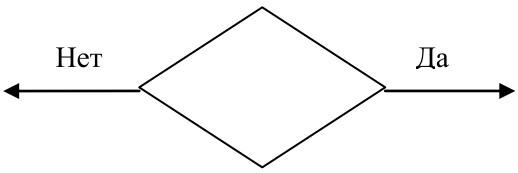
В некоторых случаях операции, входящие в состав действий, представлены в учебниках в описательной форме или показаны на примерах, и для осуществления действий обучающимся требуется выполнить отдельные шаги действия самостоятельно.

Одним из распространенных способов записи алгоритмов является запись на языке *блок-схем*. Запись представляет собой набор элементов (блоков), соединенных стрелками. Каждый элемент – это «шаг» алгоритма.

В блок – схемах применяются следующие обозначения:

1. Процесс – выполнение операций, в результате которых изменяется значение данных.

2. Решение – выбор направления выполнения алгоритмов в зависимости от некоторых переменных условий.



Из ромбов выходят две стрелки (одна из них помечается словом «да», другая – словом «нет», они показывают, соответственно, выполнено или нет проверяемое условие).

3. Пуск – остановка – начало – конец обработки данных.

Все алгоритмы, в зависимости от вида используемых блок – схем, делятся на:

а) *линейные* – это алгоритмы, в которых команды выполняются в естественном порядке, то есть одна за дугой;

б) *разветвленные* – естественный порядок выполнения команд в алгоритме может нарушиться, если предусматривается проверка выполнения некоторых условий;

в) *циклические* – алгоритмы, в которых определенные серии команд повторяются определенное число раз. Циклические алгоритмы могут иметь сложную структуру. Если внутри цикла содержатся другие циклы, то такие циклы называются кратными (вложенными).

Таким образом, алгоритм можно быть задать в нескольких формах: в виде таблицы, формулы, правила, определения, описания. Алгоритмы можно разделить на алгоритмы распознавания и преобразования. Одним из распространенных способов записи алгоритмов является запись на языке блок-схем. В зависимости от вида используемых блок – схем, делятся на линейные, разветвленные и циклические.

§3. Формирование алгоритмического мышления учащихся на уроках алгебры общеобразовательной школы

3.1. Понятие алгоритмического мышления

С точки зрения психологии, мышление – это «психический процесс отражения объективной действительности, представляющий собой высшую ступень человеческого познания» [28].

Л.М. Фридман описывает *мышление* как «психический процесс, с помощью которого человек устанавливает внутренние свойства объектов познания, которые нельзя обнаружить с помощью восприятия, а также связи и отношения между объектами. Поэтому мышление есть внечувственный процесс решения задач (в широком смысле)» [48, С. 178].

Автор подчеркивает, что, говоря о развитии мышления учащихся в процессе обучения математике, подразумевают развитие у них математического мышления. Возникает вопрос, что понимают под математическим мышлением в теории и методике обучения математике и каковы его отличия от мышления в целом.

А.Я. Хинчин выделил следующие *признаки математического мышления*:

1) «доведенное до предела доминирование логической системы рассуждения…»;

2) «…лаконизм, сознательное стремление всегда находить кратчайший, ведущий к данной цели логический путь, беспощадное отбрасывание всего, что не абсолютно необходимо для безупречной аргументации»;

3) «…четкая расчлененность хода аргументации»;

4) «скрупулезная точность символики» [49, С.141-144].

По мнению Л.С. Трегуба, под методами познания, которые лежат в основе математики, понимают общие методы человеческого познания. Автор утверждает, что «указанные понятия (множество, отображение, преобразование, группа преобразований, симметрия, отношение, равенство) – это схемы, отображающие, моделирующие основные приемы нашего познания вообще», поэтому *особого математического мышления* не существует [46, С. 7].

Л.М. Фридман не согласен с позицией, высказанное Л.С. Трегубом об особенностях математического мышления, отмечая, что оно «имеет свою специфику, свои особенности, отличающие его от мышления в других науках», так как указанное автором «единство принципов человеческого познания является лишь *следствием* широкого проникновения математических методов познания во все области научного исследования» [48, С. 187].

При этом Л.С. Трегуб не считает это проникновение математизацией и подчеркивает, что «усиленно начавшееся в сравнительно недавнее время тщательное выяснение общих приемов, которыми мы пользуемся при обработке информации об окружающем мире, и немедленное использование полученных результатов в качестве повсеместно применимого метода научного исследования, составляет одну из замечательных и многообещающих особенностей современной науки. Часто такое внедрение четко «отпрепарированных» общих приемов познания как метода исследования в ту или иную специальную научную дисциплину ошибочно воспринимается как *математизация* последней. Но в только что упомянутом смысле можно говорить и о «*математизации математики*» (в качестве проявления такой математизации математики предстанет тогда, скажем, Эрлангенская программа Клейна)» [46, С. 8].

Более полное понимание математических понятий и методов достигается посредством личной математизации самим учащимся. Под личной математизацией имеемся в виду то, что каждый учащийся в отдельности участвует в активной математической деятельности, связанной с формированием математического понятия или метода. Обучение математике должно вносить существенный вклад в развитие человека, который использует возможности математики в своей повседневной жизни [56].

По мнению Л.М. Фридмана, «особенность математического мышления нужно искать не в её методах, а в её *объектах»* [48, С. 187].

А.К. Сухотин под особенностью математического объекта видит абстракцию от абстракции или, так называемую «обобщающую абстракцию». В качестве примера математического объекта рассматривается *понятие числа*. Любое конкретное натуральное число отражает признаки не отдельных предметов, а их совокупностей, не конкретных элементов, а классов. Так, число «3» является определением мощности всех множеств, эквивалентных множеству (a, b, c), т. е. оно есть то общее свойство, которое присуще всем тройкам, из каких предметов они ни были составлены. «Конкретное число есть определенное свойство класса. Но сам класс… уже есть свойство. Это и означает, что количественная характеристика фиксирует свойство свойств, что конкретное число есть предикат от предиката» [43, С. 26].

По мнению автора, если говорить о натуральном числе вообще, о его понятии, то получится абстракция еще более высокого порядка, а именно свойство свойства, ибо понятие числа вообще описывает класс всех конкретных чисел, т.е. класс классов.

По мнению Л.М. Фридмана, математические объекты «находятся в определенных отношениях друг с другом, в отношениях количественных, пространственных и им подобных». Поэтому под *математическим мышлением* автор понимает «предельно абстрактное, теоретическое мышление, объекты которого лишены всякой вещественности и могут интерпретироваться самым произвольным образом, лишь бы при этом сохранялись заданные между ними отношения» [48, С. 188].

В научной *психологической литературе* существуют различные классификации мышления, которые разделяются в зависимости от уровня обобщения, разделяются характером используемых способов мышления и т.п. На основании этих критериев выделяют виды мышления по:

1) «форме (наглядно-действенное, наглядно-образное, абстрактно-логическое);

2) характеру решаемых задач – теоретическое и практическое;

3) степени развернутости и осознанности – дискурсивное и интуитивное;

4) степени новизны и оригинальности – репродуктивное и продуктивное (творческое);

5) числу участников – индивидуальное и коллективное мышление» [27].

В зависимости от способа решения задачи и других особенностей мышления дополнительно выделяют такие его виды как эмпирическое и логическое (аналитико-синтетическое), алгоритмическое, реалистическое и интуитивное, произвольное и непроизвольное, осознанное и неосознанное и т.п.

В рамках данной работы будет рассмотрено понятие алгоритмического мышления.

В психологии алгоритмическое мышление не рассматривается как самостоятельный особый вид. Некоторые исследователи рассматривают этот тип мышления (наряду с логическим) как разновидность теоретического. Также существует точка зрения, что алгоритмическое мышление это специфический стиль мышления, характерный для определенного рода деятельности.

При таком подходе под стилем мышления, в частности, понимается «открытая система интеллектуальных стратегий, приемов, навыков и операций, к которой личность предрасположена в силу своих индивидуальных особенностей (от системы ценностей мотивации до характерологических свойств)» [41].

Несколько иначе *стиль мышления* трактует А.В. Копаев. Он определяет стиль мышления как «систему мыслительных способов действий, приемов, методов и соответствующих им мыслительных стратегий, которые направлены на решение задач определенного класса, и которые детерминированы этими задачами» [25].

В *педагогической литературе* кроме понятия «алгоритмическое мышление» широко используется также термин «алгоритмическая культура». Под алгоритмической культурой человека понимают комплекс личностных качеств и определенный уровень алгоритмического мышления, обеспечивающих понимание алгоритмической природы понятий, значения алгоритмов в жизни общества и его деятельности; владение умениями выполнять действия по предлагаемому алгоритму, составлять алгоритмы, производить выбор и применять алгоритмы в своей деятельности.

Рассмотрим различные подходы к понятию алгоритмического мышления *в теории и методике обучения математике*.

Л.В. Виноградова пишет, что под алгоритмическим мышлением понимают «особый аспект культуры мышления, характеризующийся умением составлять и использовать различные алгоритмы» [15].

Умение решать различные задачи, которые требуют составления плана действий для достижения результата связывают со способностью человека *алгоритмически мыслить* в широком смысле. Так, в виде процесса решения тех или иных задач можно описать любую деятельность человека. Поэтому умения человеком решать эти задачи, продумывать стратегию их решения, осуществлять прогнозирование результатов своей деятельности, анализировать и находить рациональные способы решения задач является достаточно существенным. Речь идет об умениях, которые характеризуют *алгоритмическое мышление*. Искусство составлять и решать задачи требует специального мыслительного навыка, которым люди, как правило, не обладают изначально. Под влиянием внешних факторов алгоритмическое мышление в течение жизни развивается. Но без специальной целенаправленной методической работы этот процесс носит стихийный характер.

По мнению Л.В. Виноградовой, в ходе проведения обобщений при решении нескольких задач одного типа, учащиеся надо обучать выделению алгоритмов и их составлению. Их также надо обучать: чтению формул, переходу от речевой формы к аналитической и обратно; составлению программ действий в случаях, когда материал в учебнике представлен в описательной форме; разворачивать, дополнять алгоритмы, предъявленные в готовой форме. Таким образом, учитель будет обучать учащихся применению теоретических знаний на практике и *развивать у них алгоритмическое мышление*.

Я.И. Груденов при работе с готовыми алгоритмами предлагает пользоваться *компактным методом*, который заключается в том, что правило (алгоритм) проговаривается по частям, на которое оно разделено по смыслу; каждая операция осуществляется вслед за произнесением имеющегося текста. Это способствует осознанному усвоению соответствующего правила. Компактный метод противопоставляется раздельному методу, в соответствии с которым произнесение правила целиком и его применение идут друг за другом [19].

Автор не приводит понятие алгоритмического мышления, им описывается лишь *алгоритмический метод* решения задач. Для того, чтобы учащиеся имели возможность выполнять упражнения с соответствующими объяснениями и в той последовательности, которую требует соблюдать учитель, предлагается алгоритм или список указаний. Он приводится или в готовом виде, или составляется вместе с классом. Учащиеся работают с ним и выполняют необходимые упражнения [20, С. 65].

При использовании алгоритмов при обучении учащихся Л.В. Виноградова рекомендует обращаться к положениям теории деятельности: выполнять все операции, имеющиеся «в алгоритме (правиле) во внешнем плане и в развернутой форме, т.е. в написании и проговаривании всех операций без пропусков» [15].

3.2. Логико-математический анализ правил (алгоритмов)

Е.И. Лященко указывает, что *система упражнений* является *основным средством*, которое используется на различных этапах формирования алгоритма. Содержание заданий в ней устанавливается на основе произведения *логико-математического анализа* конкретного *правила (алгоритма)*.

Вместе с тем, умение выполнять *логико-математический анализ алгоритмов (правил)* позволит учителю правильно осуществлять работу по *организации процесса овладения алгоритмами* на уроках математики [26; 33].

Н.Л. Стефанова, Н.С. Подходова и др. в учебном пособии [33, С. 57-58] отмечают, что логический анализ алгоритмов (правил) предполагает:

– «проверку наличия у данного правила характеристических свойств алгоритма;

– выделение последовательности операций и логических условий в данном правиле;

– установление связей алгоритма (правила) с другими знаниями».

Математический анализ – установление математической базы, т.е. начальных математических знаний. Если в результате логико-математического анализа какого-либо правила учитель приходит к выводу, что правило не является алгоритмом, то рационально разработать предписание выполнения определенного действия, ориентируясь на уровень подготовленности обучающихся, доступное каждому ученику. Кроме того, целесообразно вести данную работу при обучении математике в старших классах общеобразовательной школы. Для разработки таких предписаний может послужить примером стандартная задача темы «Формулы сокращенного умножения», решение линейного уравнения и т. д. На первых стадиях формированию алгоритмического мышления целесообразно привлекать обучающихся по мере возможной ситуации, в старших классах это делать необходимо для формирования у учащихся способности находить общий метод решения задач. Умение выполнять тождественные преобразования развивается так же, как и умение вычислять, на основе качественных знаний свойств операций над числами, многочленами и т. д. и алгоритмов их выполнения. Оно состоит не только в умении правильно обосновать свои действия, но и в способности найти кратчайший путь перехода от первичного выражения к тому выражению, которое наиболее соответствует цели преобразования, в умении увидеть изменение области определения выражений в цепочке тождественных преобразований, в скорости выполнения преобразований и отсутствия ошибок в них.

Е.И. Лященко различает два значения, в которых может употребляться *понятие алгоритмизации обучения*:

1) «под алгоритмизацией обучения понимают алгоритмизацию деятельности учителя; составление и использование алгоритмов обучения;

2) алгоритмизация деятельности учащихся есть не что иное, как обучение алгоритмам» [26].

По мнению автора в обучении алгоритмам можно идти разными путями:

1. Обучать алгоритму в готовом виде. Этот путь достаточно экономит время, но не является лучшим.
2. Эффективно, когда обучающийся открывает алгоритмы самостоятельно или с помощью учителя.
3. Создать систему упражнений и задач, в процессе решения которых у обучающихся будут формироваться нужный порядок действий.

Е.И. Лященко отмечает, что формирование алгоритмического мышления проходит более успешно, когда эти различные пути соединяются.

Далее приведем *примеры тем из курса математики основной школы*, при изучении которых могут быть созданы условия для формирования алгоритмического мышления учащихся.

В учебнике математики для 5 класса авторов Виленкин Н.Я., Жохов В.И., Чесноков А.С., Шварцбурд С.И. ***правило деления на десятичную дробь*** описано следующим образом: «Чтобы разделить число на десятичную дробь, надо: 1) в делимом и делителе перенести запятую вправо на столько цифр, сколько их после запятой в делителе; 2) после этого выполнить деление на натуральное число».

Проведем *логико – математический анализ* этого правила.

Цель введения правила: сформировать умения выполнять умножение десятичных дробей.

1. Данное правило – не алгоритм, так как не обладает таким свойством алгоритма, как массовость (правило не является руководством для выполнения деления двух десятичных дробей, когда количество цифр после запятой в делителе больше, чем количество цифр после запятой в делимом).

2. Логические условия: определения понятий делимого, делителя и частного.

3. Базовые знания: понятие дроби; десятичной дроби; натурального числа; делимого, делителя и частного. Умения: выполнять деление, вычитание натуральных чисел; деление десятичного числа на натуральное; применять правило деления на 10, 100 и т.д.

Запишем данное правило в *виде алгоритма*. Учитывая *правило деления десятичной дроби на натуральное число* и то, что количество цифр после запятой в делимом и делителе может совпадать, сформулируем в словесной форме алгоритм деления на десятичную дробь.

Чтобы разделить число на десятичную дробь, надо:

1. Подсчитать число цифр после запятой в делителе (a);

2. Подсчитать число цифр после запятой в делимом (b);

3. В делимом перенести запятую вправо на столько цифр, сколько их после запятой в делителе;

4. В делителе перенести запятую вправо на столько цифр, сколько их после запятой в делителе;

5. Если количество цифр после запятой в делимом и в делителе совпадают ($a = b$) или количество цифр в делителе больше чем в делимом ($a > b$), то произвести деление двух натуральных чисел;

Если количество цифр после запятой в делимом больше чем в делителе, то: а) разделить дробь на это число, не обращая внимания на запятую; б) поставить в частном запятую, когда кончится деление целой части.

Запишем данный алгоритм на *языке блок – схемы*, представленной ниже на Схеме 1.

В учебнике математики для 6 класса авторов Виленкин Н.Я., Жохов В.И., Чесноков А.С., Шварцбурд С.И. приведено ***правило нахождения наименьшего общее кратного***, которое имеет вид: «Чтобы найти наименьшее общее кратное нескольких натуральных чисел, надо: 1) разложить их на простые множители; 2) выписать множители, входящие в разложение одного из чисел; 3) добавить к ним недостающие множители из разложений остальных чисел; 4) найти произведение получившихся множителей».

Из учебника алгебры для 7 класса авторов Макарычева Ю.Н., Миндюк Н.Г. выпишем правила, формулы, представленные в теме ***«Разложение на множители суммы и разности кубов»***:

1. $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$, т.е. сумма кубов двух выражений равна произведению суммы этих выражений и неполного квадрата их разности.

2. $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$, т.е. разность кубов двух выражений равна произведению разности этих выражений и неполного квадрата их суммы.

Прочитав каждое из данных правил, формул можно прийти к выводу, что не одно из них не представляет собой алгоритм в строгом своем понимании.

Разберем подробно правила «Разложения на множители суммы и разности кубов», т.е. проведем логико – математический анализ этого правила, запишем данные правила в виде алгоритма, запишем его на языке блок – схем и подберем упражнения для каждого из трех этапов работы с алгоритмом.

В данном учебнике правила разложения суммы и разности кубов на множители представлены в виде формул, данных в буквенном и словесном формах.

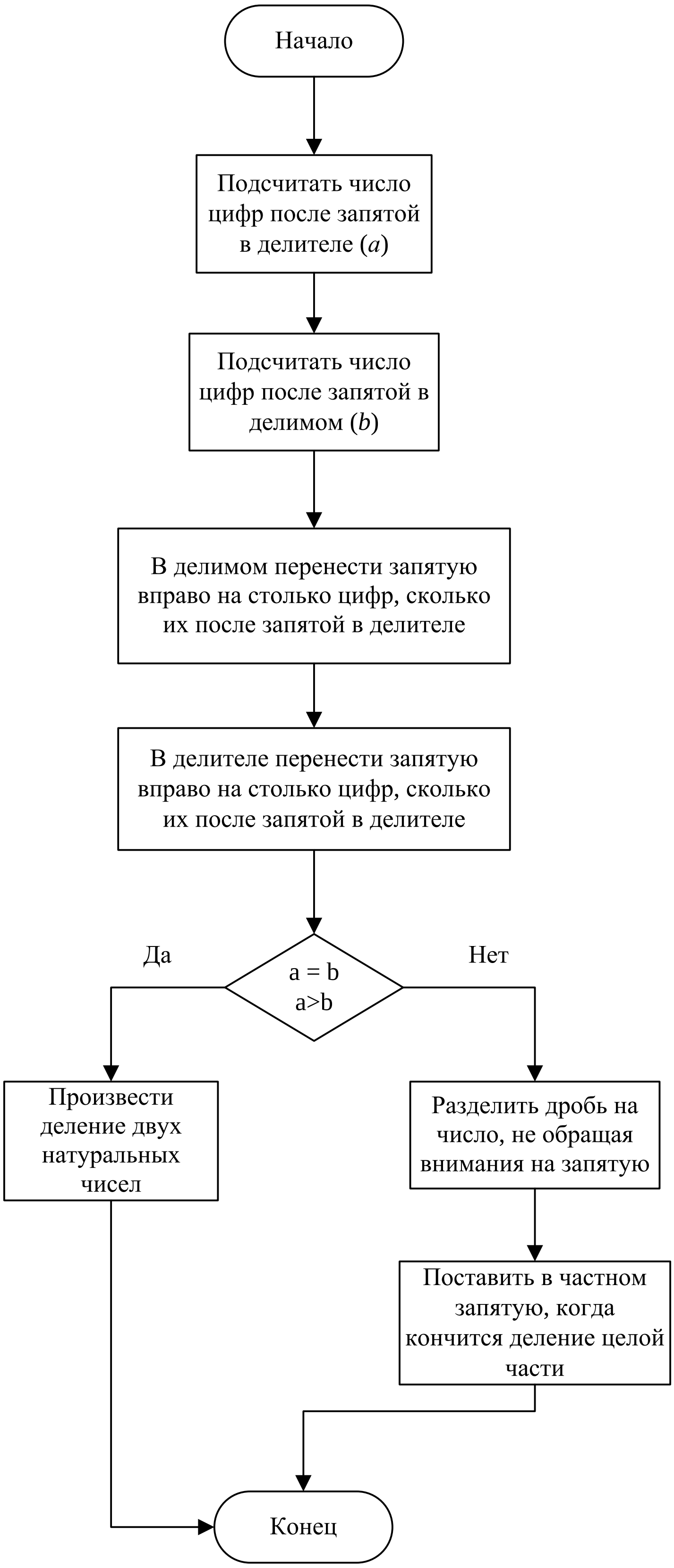


Схема 1. Алгоритм деления числа на десятичную дробь.

Проведем *логико – математический анализ* данных правил.

Цель введения правил: сформировать умения выполнять разложения на множители разность и сумму кубов.

1. Данные правила – не алгоритмы, так как не они не обладают соответствующими свойствами алгоритма.

2. Логическое условие: определения понятий первого и второго двучлена и неполного квадрата их суммы.

3. Базовые знания: понятие одночлена; многочлена; степени многочлена; неполного квадрата суммы и разности; формулы квадрата суммы и разности; Умения: выполнять сложение, вычитание и умножение многочленов; применять формулы суммы и разности квадратов, формулы неполного квадрата разности и суммы; работать со степенями многочлена.

Запишем данное правило в виде алгоритма.

Для того чтобы разложить сумму (разность) кубов на множители, надо:

1) найти первый член двучлена (a);

2) найти второй член двучлена (b);

3) найти сумму (разность) первого и второго двучлена ($a + b$) (($a - b$));

4) возвести первый член двучлена в квадрат (a^2);

5) составить произведение первого и второго двучлена (ab);

6) возвести второй член двучлена в квадрат (b^2);

7) найти разность (сумму) результатов четвертого и пятого шагов ($a^2 - ab$) (($a^2 + ab$));

8) результаты шестого и седьмого шагов сложить ($a^2 - ab + b^2$) (($a^2 + +ab+ b^2$));

9) результаты восьмого и третьего шагов умножить ($a + b$) ($a^2 - ab + b^2$) ((($a - b$) ($a^2 + ab + b^2$))).

Запишем данный алгоритм на языке блок – схемы, представленной ниже на Схеме 2.

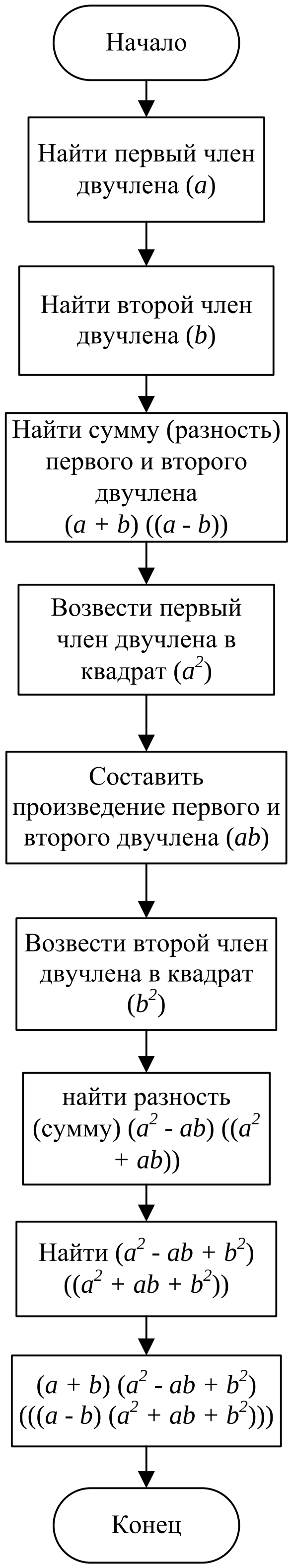


Схема 2. Алгоритм разложения суммы (разности) кубов на множители.

Из учебника алгебры для 8 класса авторов Макарычева Ю.Н., Миндюк Н.Г. выпишем правила, формулы, представленные в теме ***«Решение квадратных уравнений по формуле»***: $ax^2 + bx + c = 0$ (1).

Дискриминант квадратного уравнения (1): $D = b^2 - 4ac$.

Различные возможные случаи в зависимости от D:

1) если $D > 0$, то $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$ - формула корней квадратного уравнения;

2) если $D = 0$, то $x = -\frac{b}{2a}$;

3) если $D < 0$, то уравнение (1) не имеет корней.

Таким образом, в зависимости от дискриминанта квадратное уравнение может иметь два корня (при $D > 0$), один корень (при $D = 0$) или не иметь корней (при $D < 0$).

Все вышеперечисленные правила и формулы алгоритмами не являются.

Разберем подробно правило решения квадратного уравнения через дискриминант, т.е. выполним логико – математический анализ данного правила, запишем его в виде алгоритма и на языке блок – схем и подберем упражнения для каждого из трех этапов работы с данным алгоритмом.

В данном учебнике нет как такового правила решения квадратного уравнения через дискриминант, записанного в словесной форме. Даются формула нахождения дискриминанта и формула корней уравнения в зависимости от D. Систематизируем материал, приведенные в учебнике в алгоритм, но для начала выполним логико – математический анализ.

Проведем *логико – математический анализ* данного правила.

Цель введения данной темы: сформировать умения решать квадратное уравнение, использую формулу дискриминанта.

1. Данное правило – не алгоритм, так как не обладает соответствующими свойствами алгоритма.

2. Логическое условие: определение понятия дискриминанта квадратного уравнения.

3. Базовые знания: понятие квадратного уравнения, приведенного квадратного уравнения, понятие корня квадратного уравнения, понятие дискриминанта. Умения: выполнять равносильные преобразования, решать квадратное уравнение через выделение квадратного двучлена, находить дискриминант, пользоваться формулами корней уравнения, в зависимости от значения дискриминанта.

Запишем данное правило в форме алгоритма.

Для того чтобы решить квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ через дискриминант, надо:

1) вычислить дискриминант по формуле $D = b^2 - 4ac$;

2) сравнить дискриминант с нулем;

3) если дискриминант больше нуля ($D > 0$), то квадратное уравнение имеет два корня $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$; если дискриминант равен нулю ($D = 0$), то квадратное уравнение имеет два одинаковых корня $x = -\frac{b}{2a}$; если дискриминант меньше нуля ($D < 0$), то квадратное уравнение не имеет корней.

Запишем данный алгоритм на языке блок – схемы, представленной ниже на Схеме 3.

Из учебника алгебры для 9 класса авторов Макарычева Ю.Н., Миндюк Н.Г. выпишем правила, формулы, представленные в теме ***«Арифметическая прогрессия»***:

1. Разность арифметической прогрессии.

«Для того чтобы найти разность арифметической прогрессии, надо из любого ее члена, начиная со второго вычесть предыдущий член, т.е. при любом натуральном n верно равенство: $d = a_{n+1} - a_n$, где d – разность арифметической прогрессии».

Формула n – го члена арифметической прогрессии: $a_n = a_1 + d(n - 1)$.

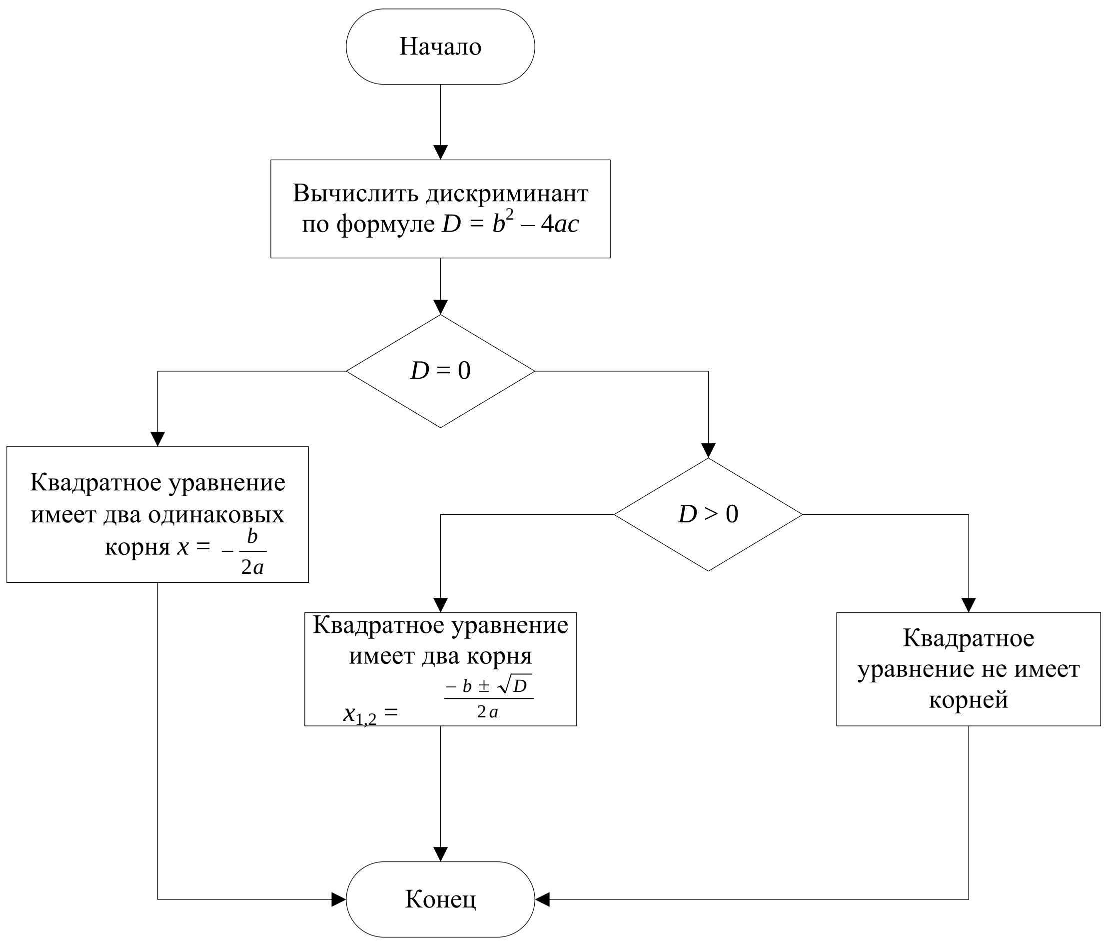


Схема 3. Алгоритм решения квадратного уравнения.

2. *Формула суммы* n *первых членов арифметической прогрессии:*
$S_n = \frac{(a_1 + a_n)\,n}{2}$.

Если заданы первый член и разность арифметической прогрессии, то используют следующую формулу:

$$S_n = \frac{2a_1 + d\,(n-1)n}{2}.$$

Не одна из представленных формул и правил алгоритмом в строгом своем на является.

Разберем подробно формула суммы *n* первых членов арифметической прогрессии, т.е. выполним логико – математический анализ данной формулы, разработаем алгоритм нахождения суммы *n* первых членов арифметической прогрессии и подберем упражнения для каждого из этапов формирования данного алгоритма.

Выпишем еще раз формулу нахождения суммы n первых членов арифметической прогрессии: $S_n = \frac{(a_1 + a_n)\,n}{2}$.

Проведем *логико – математический анализ* данной формулы.

Цель введения данной темы: сформировать умения находить сумму n первых членов арифметической прогрессии.

1. Данная формула – не алгоритм, так как не обладает соответствующими свойствами алгоритма.

2. Логическое условие: определения понятий первого и n – го члена арифметической прогрессии.

3. Базовые знания: понятие последовательности, арифметической прогрессии, разности арифметической прогрессии, n – го члена, суммы n – го члена. Умения: находить n – член арифметической прогрессии, разность, пользоваться формулой n – го члена арифметической прогрессии.

Запишем данную формулу в форме алгоритма.

Для того, чтобы найти сумму n первых членов арифметической прогрессии, надо:

1) найти первый член арифметической прогрессии (a_1);

2) найти n – ый член арифметической прогрессии (a_n);

3) найти сумму первого члена и n – го члена арифметической прогрессии ($a_1 + a_n$);

4) умножить полученную сумму на n ($(a_1 + a_n)\,n$);

5) разделить полученное произведение на 2 ($\frac{(a_1 + a_n)\,n}{2}$).

Запишем данный алгоритм на языке блок – схемы представленной ниже на Схеме 4.

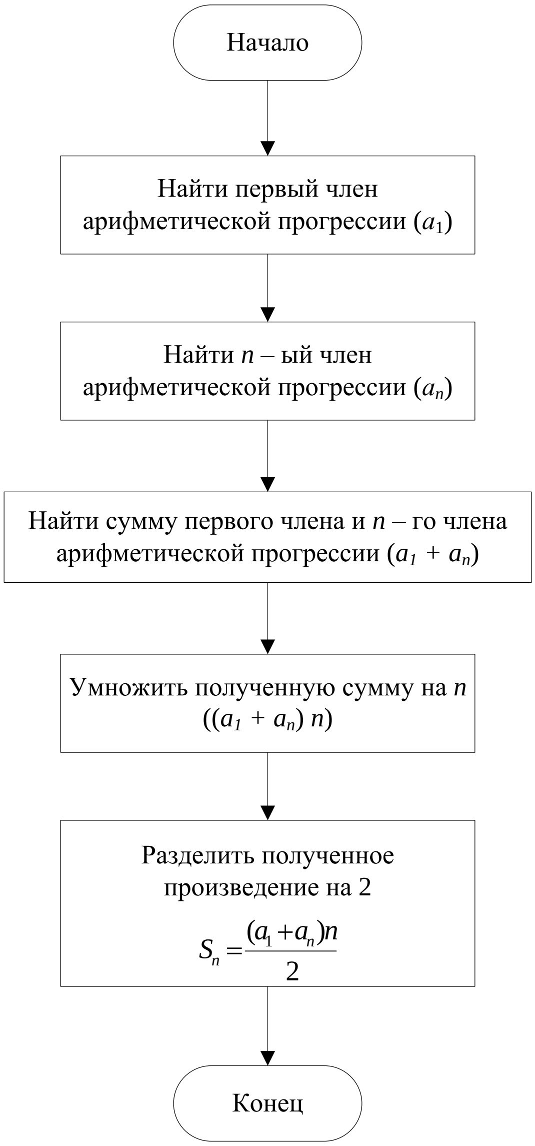


Схема 4. Алгоритм нахождения суммы n первых членов арифметической прогрессии

Далее приведем примеры правил, формул *из курса математики 7-9 классов*, при изучении которых могут быть созданы условия для формирования алгоритмического мышления учащихся:

- в 7 классе:

Правило умножения степеней.

Правило деления степеней.

Правило умножения одночлен на многочлен.

Правило умножения многочлен на многочлен.

Нахождение квадрата суммы двух выражений.

Нахождение квадрата разности двух выражений.

Нахождение произведения разности двух выражений и их суммы.

Нахождение разности квадратов двух выражений.

Нахождение суммы кубов двух выражений.

Нахождение разности кубов двух выражений.

- в 8 классе:

Правила сложения сложение и вычитание дробей с одинаковыми знаменателями.

Правила умножения (деления) двух дробей.

Правило возведения дроби в степень.

Нахождение корней квадратного уравнения

- в 9 классе:

Нахождение разности арифметической прогрессии.

Нахождение n – го члена арифметической прогрессии.

Нахождение суммы n первых членов арифметической прогрессии.

Нахождение знаменателя геометрической прогрессии.

Нахождение n – го члена геометрической прогрессии.

Нахождение суммы n первых членов геометрической прогрессии.

Нахождение бесконечной геометрической прогрессии.

Нахождение косинуса разности двух углов.

Нахождение косинуса суммы двух углов.

Нахождение синуса суммы двух углов.

Нахождение синуса разности двух углов.

Нахождение суммы синусов двух углов.

Нахождение разности синусов двух углов.

Нахождение суммы косинусов двух углов.

Нахождение разности косинусов двух углов.

Итак, в данном пункте нами приведены *примеры тем из курса математики основной школы*, при изучении которых могут быть созданы условия для формирования алгоритмического мышления учащихся.

3.3. Принципы отбора упражнений

По мнению Т.А. Ивановой, при отборе содержания упражнений учителю следует придерживаться определенных принципов: «полноты, однотипности, контрпримеров сравнения, непрерывного повторения, вариативности, единственного различия». Приведем краткую характеристику данных принципов, рассмотренную и проиллюстрированную автором на примере правила умножения десятичных дробей [45, С. 148].

Принцип полноты, который заключается в том, что система упражнений должна включать все виды упражнений на изучаемое правило, включая и особенные случаи.

В соответствии с эти принципом, задания на правило деления десятичных дробей должны содержать не менее четырех видов следующих заданий:

1) деление десятичной дроби на натуральное число;

2) в делимом достаточно десятичных знаков для перенесения запятой;

3) в делимом недостаточно десятичных знаков для перенесения запятой;

4) деление натурального числа на десятичную дробь.

Последствия несоблюдения принципа полноты очевидны. К сожалению, в школьных учебниках он не всегда реализован.

Принцип однотонности, состоящий в том, что для каждого вида заданий должны быть подобраны несколько упражнений. Т.А. Иванова отмечает, что однотипные упражнения в большей степени необходимы для «слабых учеников» и в меньшей – для «сильных». Последовательное выполнение таких упражнений является следствием снижения активности мыслительной деятельности обучающихся, так как на рассматриваемое правило они ориентируются лишь при решении первого примера.

Для каждого из четырех видов заданий из указанного выше примера учителю целесообразно подобрать или составить достаточное количество однотипных упражнений, ориентируясь на уровни их развития [45, С. 148].

Принцип контрпримеров. Контрпримером является любая задача, которая склоняет обучающихся допустить ошибку. Применение данного принципа будет способствовать повышению положительной мотивации учащихся и вместе с этим - более глубокому пониманию изучаемого правила. Я.И. Груденов по этому поводу пишет: «В тех классах, где контрпримеры начинают использовать систематически, они воспринимаются учащимися как своеобразная игра, в которой побеждают более внимательные и сообразительные» [20, С. 157].

Т.А. Иванова замечает, что большинство учебников не содержит задания на применение принципа контрпримеров, поэтому учителю необходимо самостоятельно подбирать или составлять их. Рассмотрим пример такого упражнения.

Пример. Укажите, в каких примерах допущены ошибки, если известно, что 864:12 = 72:

1) 8,64:12 = 7,2; 2) 86,4:1,2 = 0,72;

3) 86,4:0,12 = 720; 4) 864:1,2 = 72.

Принцип сравнения, предполагающий включение некоторого ряда взаимосвязанных упражнений с целью показа их сходства или различия, в частности, упражнений «на прямые и обратные операции и действия».

Пример. Зная, что 28×73 = 2044, поставьте запятую в делимом так, чтобы равенство было верным: 2044:0,28 = 73.

Здесь ученикам предлагается выполнить обратную операцию: сравнить количество десятичных знаков частного и делителя и сделать вывод.

Принцип непрерывного повторения. Система упражнений должна содержать задания, включающие темы из предыдущих разделов. Цель их включения: «во-первых, осуществлять систематическое повторение изученных действий, особенно тех, при выполнении которых учащиеся допускают ошибки, во-вторых, устранять отрицательное влияние однотипности упражнений, обоснованное выше» [45].

Т.А. Иванова предлагает обратиться при работе с данным принципом к примеру на *правило умножения одночленов*. Автор пишет, что «полезно, например, в такие упражнения, как: $-b^4 \times (-b^4)$, $8y^5 \times (-4y^5)$, $m \times m$ и т. д., включать упражнения на сложение одночленов: $-b^4 - b^4$, $8y^5 + (-4y^5)$, $m + m$ и т. д. …Последние примеры соответствуют одновременно принципам и контрпримеров, и сравнения» [45, С. 149].

Пример. При изучении темы «Деление на десятичную дробь» необходимо предлагать обучающимся решить задания на выполнение арифметических действий с десятичными дробями, пройденных ранее, например: Найдите разность чисел 26,13 и 8,7.

Принцип вариативности, который «реализуется неоднозначно: с одной стороны, видоизменение формы выдачи заданий, с другой – разнообразие числовых и буквенных компонентов алгебраических выражений, а в упражнениях по геометрии варьирование рисунков и обозначений». Так, автор подчеркивает, что в одном из школьных учебников даны 34 упражнения на правило умножения десятичных дробей с одной формулировкой: «*вычисли*».

Т.А. Иванова считает, что полезно обучающихся включать в игру: «Кто больше придумает формулировок к примеру: 0,720$\times$370=266,4?». Вот некоторые из них [45, С. 149]:

1) вычислить;
2) найти значение числового выражения;
3) найти произведение;
4) найти число, которое в 370 раз больше данного;
5) выполнить умножение и т. д.

Принцип единственного различия. Суть этого принципа состоит в том, что при переходе от одного упражнения к другому сохраняются все элементы формы этих упражнений, кроме одного.

Пример. При анализе всех операций, которые входят в правило деления десятичных дробей, то можно сделать вывод, что новыми являются перенос запятых и постановка запятой в частном. Значит, должна быть отобрана группа упражнений на усвоение данной операции. После упражнений на нахождение частного 201,4:10,6 сразу же предлагаем серию упражнений с «плавающими» запятыми: а) 201,4:106; б) 20,14:10,6; в) 201,4:0,106.

По мнению автора, следуя вышеуказанным принципам, учитель должен отобрать упражнения на «осознание, осмысление того или иного правила». Далее перед учителем стоит задача упорядочить их. Для упорядочивания упражнений нужно придерживаться *принципа от простого к сложному.*

Т.А. Иванова выделяет еще один важный принцип для определения последовательности упражнений, это *принцип цикличности* [45, С. 150].

Чтобы понять его важность, обратимся к *теории поэтапного формирования умственных действий*. Так, в хрестоматии по психологии [50] указано, что для того, чтобы новое действие было усвоено, оно должно перейти из внешнего плана во внутренний, преодолевая ряд этапов: «1. Выполнение действия в материальном и материализованном виде. 2. Формирование действия как внешнеречевого (в форме громкой речи). 3. Формирование действия во внешней речи про себя. 4. Выполнение действия в умственном плане». Для каждого этапа предназначен цикл упражнений, в первую очередь, удовлетворяющий принципу полноты. Там, где позволительно, при подборе упражнений 1-го этапа необходимо учитывать принцип единственного различия, при подборе упражнений других этапов – либо принцип контрпримеров, либо принцип непрерывного повторения, либо принцип сравнения. Однотипные упражнения имеются на разных этапах. Сложность упражнений возрастает при переходе от этапа к этапу, порядок упражнений нарочито меняется внутри каждого цикла.

3.4. Этапы изучения алгоритмов

Е.И. Лященко при формировании алгоритма выделяет три основных этапа [26]:

1. *Введение алгоритма,* к которому относятся актуализация знаний учащихся, которые необходимы для введения и обоснования алгоритма; открытие учащимися под руководством учителя самого алгоритма; его формулировка.

2. *Усвоение алгоритма,* с которой связывают обработку отдельных операций, входящих в алгоритм, и усвоение их последовательности.

3. *Применение алгоритма,* где осуществляется отработка алгоритма с учащимися в известной и неизвестной им ситуациях.

Я.И. Груденов считает, что при использовании алгоритмического метода на уроках математики в общеобразовательной школе устраняется такая важная проблема учебников, как то, что «процесс мыслительной деятельности расчленяется на определенное число простых элементарных операций, усвоение и понимание которых для учащихся будет менее трудоёмко» [20].

Как было отмечено, Е.И. Лященко указывает, что *система упражнений* является *основным средством*, которое используется на различных этапах формирования алгоритма. Содержание заданий в ней устанавливается на основе произведения *логико-математического анализа* конкретного *правила (алгоритма).*

Автор выделяет наиболее рациональные формы работы с учащимися на разных *этапах формирования алгоритма*. «На первом этапе это устная работа на повторение. На втором этапе – письменная коллективная работа с широким использованием комментирования выполняемых действий. На третьем этапе – самостоятельная работа» [26, С. 64].

На основании выполненного в предыдущем пункте логико – математического анализа алгоритмов:

- *деления на десятичную дробь* (5 класс);

- *нахождения наименьшего общего кратного* (6 класс);

- *разложения суммы и разности кубов на множители* (7 класс);

- *нахождения корней квадратного уравнения, используя формулу дискриминанта* (8 класс);

- *нахождения суммы n первых членов арифметической прогрессии* (9 класс)

приведем примеры систем упражнения для каждого этапа изучения данного алгоритма, направленные на формирование алгоритмического мышления учащихся.

Система упражнений на формирование алгоритма деления на десятичную дробь

I. Упражнения для первого этапа (этап введения алгоритма)

1) При каких значениях буквы верно равенство:

а) $x \cdot 94 = 846$; б) $74 \cdot y = 4292$?

2) Выполните деление:

а) 216 : 12; *б*) 8517 : 17; *в*) 45700 : 10; *г*) 28085 : 137.

3) Выполните деление:

а) 20,7 : 9; *б*) 243,2 : 8; *в*) 0,644 : 92; *г*) 3 : 32; *д*) 1,016 : 8.

4) Увеличьте каждое из чисел:

а) 3,705; 62,8; 0,5 в 10 раз; *б*) 2,3578; 0,0068; 0,3 в 100 раз.

II. Упражнения для второго этапа (этап усвоения алгоритма)

1) Найдите частное и выполните проверку умножением:

а) 0,8 : 0,5; *б*) 3,51 : 2,7; *в*) 14,335 : 0,61.

2) Выполните деление:

а) 7,56 : 0,6; *б*) 0,161 : 0,7; *в*) 0,468 : 0,09; *г*) 10,5 : 3,5; *д*) 46,08 : 0,384.

3) Паша проехал на автомобиле 92,4 км за 1,2ч. Какова была скорость автомобиля?

4) На выполнение домашнего задания Света затратила в 1,6 раза меньше времени, чем на просмотр фильма. Сколько времени ушло у Светы на просмотр фильма и на выполнение домашнего задания, если на просмотр фильма ушло 4 ч?

III. Упражнения для третьего этапа (этап применения алгоритма)

1) За 1,8 ч мальчик прошел 5,4 км. Сколько километров он пройдет с той же скоростью за 2,3 ч?

2) Решите уравнение:

а) $10 - 2{,}4x = 3{,}16$; *б*) $(z - 1{,}2) : 0{,}6 = 21{,}1$.

3) С трех участков собрали 87,36 т капусты. При этом с первого участка собрали в 1,4 раза больше, а со второго в 1,8 раза больше, чем с третьего. Сколько тонн капусты собрали с каждого участка?

4) Выполните действия:

а) $(120{,}4 - 26{,}6) : 23{,}45 - 2{,}74$; *б*) $5{,}125 : (7 - 4{,}5) + 1{,}2 \cdot (2{,}54 + 0{,}76)$;

в) $18{,}585 : 5{,}9 \cdot 1{,}3 - 0{,}16 \cdot 2{,}14 : 2$.

5) Представьте обыкновенную дробь в виде десятичной и найдите значение выражения:

а) $\frac{3}{4} : 0{,}2$; б) $(4{,}75 - 2\frac{1}{8}) : 0{,}8$; в) $(1 - 0{,}532) : \frac{13}{20}$.

Система упражнений на формирования алгоритма нахождения наименьшего общего кратного

I. Упражнения для первого этапа (этап введения алгоритма)

1) Верно ли, что:

а) 27 – кратное 3; *б*) 6 – кратное 12; *в*) 156 – кратное 13?

2) Выберите из чисел 15, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16 те, которые являются:

а) кратными 4; *б*) делителями 16 и кратными 4;

в) кратными 3 и делителями 18.

3) Напишите все двузначные числа, кратные числу:

а) 8; *б*) 11; *в*) 48; *г*) 99.

4) Сколько делителей имеет каждое из чисел: 31, 25, 100?

5) С помощью таблицы простых чисел, помещенной на форзаце учебника, определите, какие из чисел 101, 121, 253, 409, 561, 563, 863, 997 являются простыми, а какие составными.

6) Разложите на простые множители числа:

а) 216; 162; 144; 512; 675; 1024;

б) 60; 180; 220; 350; 400; 1200; 8000;

в) 11; 1001; 1225; 21780; 45630.

7) Напишите все двузначные числа, разложение которых на простые множители состоит:

а) из двух одинаковых множителей;

б) из трех одинаковых множителей.

II. Упражнения для второго этапа (этап усвоения алгоритма)

1) Найдите разложение на простые множители наименьшего общего кратного чисел a и b, если:

а) $a = 3 \cdot 5$, $b = 7 \cdot 5$; б) $a = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$, $b = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7$.

2) Найдите наименьшее общее кратное чисел a и b, если:

а) $a = 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7$, и $b = 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 7$;

б) $a = 2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 7$, и $b = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7$;

в) $a = 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 13$, и $b = 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 13$;

г) $a = 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 11$, и $b = 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 11$;

3) Найдите наименьшее общее кратное чисел:

а) 6 и 8; *б*) 12 и 16; *в*) 72 и 99;

г) 396 и 180; *д*) 34, 51 и 68; *е*) 168, 231 и 60.

4) Являются ли числа 54 и 65 взаимно простыми? Найдите наименьшее общее кратное чисел 54 и 65. Равно ли оно произведению 54 и 65? Запишите

какие-нибудь два взаимно простых числа. Найдите наименьшее общее кратное этих чисел. Сделайте вывод.

III. Упражнения для третьего этапа (этап применения алгоритма)

1) Найдите наименьшее общее кратное чисел:

а) 45 и 135; б) 34 и 170.

2) Вдоль дороги от пункта *A* поставлены столбы через каждые 45 м. Эти столбы решили заменить другими, поставив их на расстояние 60 м друг от друга. Найдите расстояние от пункта *A* до ближайшего столба, который будет стоять на месте старого.

3) В портовом городе начинаются три туристских теплоходных рейса, первый из которых длится 15 суток, второй 20 суток и третий 12 суток. Вернувшись в порт, теплоходы в этот же день снова отправляются в рейс. Сегодня из порта вышли теплоходы по всем трем маршрутам. Через сколько суток они впервые снова вместе уйдут в плавание?

Система упражнений на формирование алгоритма разложения суммы и разности кубов на множители

I. Упражнения для первого этапа (этап введения алгоритма)

1) Назовите каждый член многочлена:

а) $-6x^4 + y^3 - 5y + 11$; б) $25ab + ab^2 + a^2b + 8a - 7b$.

2) Приведите подобные члены многочлена:

а) $-a^4 + 2a^3 - 4a^4 + 2a^2 - 3a^2$;

б) $1 + 2y^6 - 4y^3 - 6y^6 + y^3 - 5y^5 - 9$;

в) $10x^2y - 5xy^2 - 2x^2y + x^2y - 3xy^2$.

3) *а*) Составьте сумму многочленов $4x^3 - 5x - 7$ и $x^3 - 8x$ и преобразуйте ее в многочлен стандартного вида.

б) Составьте разность многочленов $5y^2 - 9$ и $7y^2 - y + 5$ и преобразуйте ее в многочлен стандартного вида.

4) Упростите выражение:

а) $(x + 6)(x + 5)$; б) $(a – 4)(a + 1)$; в) $(2 – y)(y – 8)$; г) $(2y – 1)(3y + 2)$.

5) Представьте в виде многочлена:

а) $(x + y)^2$; б) $(y – 9)^2$; в) $(a + 12)^2$; г) $(0{,}3 – m)^2$;

6) Упростите выражение:

а) $(x + 7)^2 + x(x - 3)$; *б*) $(2b + 3)^2 – 7(5a + 9)$; *в*) $(t – 7)^2 + (f – 6)(1 – f)$.

II. Упражнения для второго этапа (этап усвоения алгоритма)

1) Разложите на множители многочлен:

а) $x^3 + y^3$; *б*) $m^3 – n^3$; *в*) $8 + a^3$; *г*) $27 – y^3$; *д*) $t^3 + 1$; *е*) $1 – c^3$.

2) Представьте выражение в виде суммы или разности кубов и разложите его на множители:

а) $8x^3 – 1$; *б*) $1 + 27y^3$; *в*) $8 – \frac{1}{8}a^3$;

г) $\frac{1}{64}m^3 + 1000$; *д*) $125a^3 – 64b^3$; *е*) $\frac{1}{27}x^3 + \frac{1}{125}y^3$.

3) Запишите в виде произведения выражение:

а) $x^3 – y^6$; *б*) $a^6 + b^3$; *в*) $m^9 – n^3$; *г*) $p^3 + k^9$; *д*) $a^6 + b^9$; *е*) $x^9 – y^9$.

III. Упражнения для третьего этапа (этап применения алгоритма)

1) Запишите в виде произведения:

а) $–x^3 + y^3$; *б*) $–8 – p^3$; *в*) $– a^6 + \frac{1}{8}$; *г*) $– \frac{1}{27} – b^6$; *д*) $c^6 + 1$; *е*) $x^6 + y^6$.

2) Представьте в виде произведения:

а) $a^3b^3 – 1$; *б*) $1 + x^3y^3$; *в*) $8 – a^3c^3$; *г*) $m^3n^3 + 27$; *д*) $x^6y^3 – c^3$; *е*) $a^3 – m^3n^9$.

3) Докажите, что значение выражения:

а) $327^3 + 173^3$ делится на 500; *б*) $731^3 – 631^3$ делится на 100.

Система упражнений на формирование алгоритма нахождения корней квадратного уравнения, используя формулу дискриминанта

I. Упражнение для первого этапа (этап введения алгоритма)

1) Является ли квадратным уравнение:

а) $3{,}7x^2 – 5x +1 = 0$; *б*) $48x^2 – x^3 – 9 = 0$; *в*)$1 – 12x = 0$;

г) $7x^2 – 13 = 04$ *д*) $– x^2 = 0$.

2) Укажите в квадратном уравнении его коэффициенты:

а) $5x^2 – 9x +4 = 0$; *б*) $x^2 + 3x – 10 = 0$; *в*) $6x^2 – 30 = 0$; *г*) $9x^2 = 0$.

3) Приведите уравнение к виду $ax^2 + bx + c = 0$:

а) $(2x – 1) (2x + 1) = x (2x + 3)$; *б*) $(3x + 2)^2 = (x +2) (x – 3)$;

в) $(x + 1) (x + 2) = (2x – 1) (x – 2)$; г) $(x + 3) (3x – 2) = (4x + 5) (2x – 3)$.

4) Решите уравнение:

а) $5x^2 – 7x = 0$; *б*) $1 – 16y^2 = 0$;

в) $4t^2 – 3t + 7 = 2t^2 + t + 7$; *г*) $t^2 – 5 = (t + 5) (2t – 1)$.

5) Решите уравнение:

а) $x^2 – 5x + 4 = 0$; *б*) $2y^2 – 9y + 10 = 0$.

II. Упражнения для второго этапа (этап усвоения алгоритма)

1) Вычислите дискриминант квадратного уравнения и укажите число его корней:

а) $2x^2 + 3x + 1 = 0$; *б*) $2x^2 + x + 2 = 0$; *в*) $9x^2 + 6x + 1 = 0$; *г*) $x^2 + 5x + 6 = 0$.

2) Решите уравнение:

а) $2x^2 – 5x + 3 = 0$; б) $4x^2 – 8x +4 = 0$;

в) $3y^2 – 13y + 14 = 0$; *г*) $2x^2 – 9x +10 = 0$.

3) Решите уравнение:

а) $– 2x^2 + 3x + 5 =0$; *б*) $1 – 18t + 81t^2 = 0$;

в) $– 11t + t^2 – 152 = 0$; *г*) $18 + 3y^2 – y = 0$.

4) При каких значениях у:

а) трехчлен $y^2 – 11y + 31$ принимает значение, равное 1;

б) значения многочленов $y^2 + 5$у $– 3$ и $2y – 5$ равны;

в) двучлен $7y + 1$ равен трехчлену $3y^2 – 2y + 1$;

г) трехчлен $– 2y^2 + 5y + 6$ равен двучлену $4y^2 + 5y$?

III. Упражнения для третьего этапа (этап применения алгоритма)

1) Решите уравнение:

а) $5x^2 = 9x +2$; *б*) $– x^2 = 5x – 14$; *в*) $z – 5 = z^2 – 25$.

2) Найдите корни уравнения:

а) $(2x-3)(5x+1)=2x+\frac{2}{5}$; *б*) $(3x-1)(x+3)=x(1+6x)$;

3) Решите уравнение:

а) $\frac{x^2-1}{2}-11x=11$; б) $\frac{x^2+x}{2}=\frac{8x-7}{3}$; *в*) $\frac{3}{4}x^2-\frac{2}{5}x=\frac{4}{5}x^2+\frac{3}{4}$.

4) Найдите корни уравнения и укажите их приближенные значения в виде десятичных дробей с точностью до 0,01:

а) $5x^2-x-1=0$; *б*) $3(y^2-2)-y=0$.

5) При каких значениях x верно равенство:

а) $\frac{1}{7}x^2=2x-7$; *б*) $x^2+1{,}2=2{,}6x$?

6) Существует ли такое значение a, при котором верно равенство (если существует, то найдите его):

а) $3a+0{,}6=9a^2+0{,}36$; *б*) $0{,}4a+1{,}2=0{,}16a^2+1{,}44$?

Система упражнений на формирования алгоритма нахождения суммы n первых членов арифметической прогрессии

I. Упражнения для первого этапа (этап введения алгоритма)

1) Найдите первые пять членов последовательности, заданной формулой n – го члена:

а) $x_n=3n-7$; *б*) $x_n=n^2+1$; *в*) $x_n=\frac{n}{2n+1}$; *г*) $x_n=2^{n-1}$.

2) Найдите номер члена последовательности (x_n), заданной формулой $x_n=7-2n$, равного:

а) – 13; *б*) – 43; *в*) – 61;

3) Последовательность (c_n) – арифметическая прогрессия. Найдите:

а) разность и третий ее член, если $c_1=240$, $c_2=190$;

б) разность и четвертый ее член, если $c_2=-19$, $c_3=-11{,}5$;

в) разность и первый ее член, если $c_4=23$, $c_5=26{,}5$.

4) Напишите формулу n – го члена арифметической прогрессии (a_n), если:

а) $a_1=3$, $d=5$; *б*) $a_1=-9{,}5$ $d=1{,}5$;

в) $a_1 = 7$, $d = 1$; *г*) $a_1 = 8{,}2$, $d = -1$;

5) Тело в первую секунду своего движения прошло 7 м, а за каждую следующую секунду – на 3 м больше, чем за предыдущую. Какое расстояние тело прошло за восьмую секунду?

6) Найдите разность арифметической прогрессии, если:

а) $b_1 = 2$, $b_{10} = 92$; б) $b_1 = -7$, $b_{16} = 2$.

II. Упражнения для второго этапа (этап усвоения алгоритма)

1) Найдите сумму двухсот первых членов арифметической прогрессии, если:

а) $a_1 = 10$, $a_{200} = 350$; *б*) $a_1 = 6{,}5$; $a_{200} = 7{,}5$.

2) Найдите сумму восьми первых членов арифметической прогрессии:

а) – 23; – 20; *б*) 9; 5; *в*) – 2,6; 0; *г*) 14,2; 9,6.

3) Найдите сумму пятидесяти, ста, n первых членов последовательности (x_n), если:

а) $x_n = 4n + 2$; *б*) $x_n = 2n + 3$.

4) Найдите:

а) сумму $2 + 4 + 6 + \ldots + 2n$, слагаемыми которой являются все четные натуральные числа от 2 до $2n$;

б) сумму $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1)$, слагаемыми которой являются все нечетные натуральные числа от 1 до $2n - 1$.

III. Упражнения для третьего этапа (этап применения алгоритма)

1) Найдите сумму:

а) всех натуральных чисел, не превосходящих 150;

б) всех натуральных чисел от 20 до 120 включительно;

в) всех двузначных чисел.

2) Найдите сумму членов арифметической прогрессии с десятого по двадцатый включительно, если первый член равен 7 и разность равна 15.

3) Найдите сумму двадцати первых членов арифметической прогрессии (c_n), если $c_7 = 18{,}5$ и $c_{17} = -26{,}5$.

4) При свободном падении тело проходит в первую секунду 4,9 м, а в каждую следующую на 9,8 м больше. Найдите глубину шахты, если свободно падающее тело достигло ее дна через 5 с после начала падения.

5) Шары расположены в форме треугольника так, что в первом ряду 1 шар, во втором – 2, в третьем – 3 и т.д. Во сколько рядов размещены шары, если их число равно 120? Сколько требуется шаров, чтобы составить треугольник из 30 рядов?

Согласно Н.Л. Стефановой и Н.С. Подходовой, при работе с алгоритмами можно выделить следующие основные *этапы работы* учителя по разработке определенной технологии обучения математики [33]:

1. *Подготовительный этап*, который включает отбор теоретического содержания, формулировку цели, выполнение логико-математического анализа правила, разработку в случае необходимости алгоритмического предписания, разработку содержания «этапа актуализации знаний для обоснования необходимости и введения алгоритма». Авторы отмечают, что «если в результате логико-математического анализа правила учитель убеждается, что правило не является алгоритмом, то необходимо разработать предписание выполнения того или иного действия с учетом уровня подготовленности учащихся, понятное каждому ученику».

2. *Этап обучения алгоритму*, содержащий: «разработку алгоритмического предписания (в случае необходимости); разработку и проведение этапа актуализации знаний, необходимых для обоснования необходимости и введения алгоритма; введение алгоритмического предписания». Выделяется два способа обучения алгоритмам: 1) сообщение учащимся готовых алгоритмов; 2) подведение учащихся к самостоятельному открытию необходимых алгоритмов, который предусматривает реализацию трёх этапов изучения математического материала, схожие по смыслу с этапами формировании алгоритма, выделенные Е.И. Лященко и описанные нами выше.

На этапе формулировки алгоритма обучения предполагается осуществление описания обучающей деятельности учителя с помощью предписаний, правил, последовательности действий алгоритмического типа, способствующих решению учителем определенных дидактических задач. В этом случае процесс обучения учащихся представляется в виде «алгоритма обучения», который отражает методическую характеристику учения [44].

3. *Этап диагностики*. На этапе введения алгоритма ожидаемыми результатами станут представление и знание общего способа выполняемого действия; знание теоретической основы правила. Показателем будет правильное описание способа действия.

На этапе *закрепления алгоритма* ожидаемые результаты – воспроизведение алгоритма при выполнении действия; выполнение действия с объяснением операций с конкретными объектами. Правильное воспроизведение шагов алгоритма и выполнение операций в соответствии с шагами на этом этапе являются показателями успешности [33].

Т.А. Иванова в своей книге «Теоретические основы обучения математике в средней школе» говорит о том, что на практике учитель математики часто выделяет следующую *последовательность изучения правил*: повторение ранее изученных правил; сообщение обучающимся нового правила в готовом виде; показ образца решения 2 - 3 упражнений по этому правилу; выполнение упражнений из школьного учебника. При реализации такого подхода все внимание учителя направлено на усвоение информационной компоненты содержания правила. Учитель выстраивает свою работу и работу учеников согласно объяснительно-репродуктивного типа обучения, где учащимся отводится пассивная роль.

Автор подчеркивает, что «в школьной практике наравне с сообщением учащимся нового правила в готовом виде наблюдается и вариант его введения путем *обобщения частных случаев»* [45, С. 143]. Так, после решения определенных упражнений формулируют правило. Известный психолог В.В.

Давыдов рекомендует принципиально иной подход к формированию у школьников общего способа решения типовых задач, в ходе которого у них развивался бы теоретический тип мышления. В данном подходе обучающимся предлагается решить задачу, основной целью которой является открытие общего способа решения типовых задач. Ученики решают её совместно с учителем, после чего анализируют условие и решение, не обращая внимания при этом на её частные особенности.

Таким образом, для формирования алгоритмического мышления в общеобразовательной школе учителю необходима подготовительная работа: выделить соответствующие темы; выполнить логико-математический анализ правил и алгоритмов; подобрать специальные упражнения с учетом этапов изучения алгоритмов и правил.

ВЫВОДЫ ПО ПЕРВОЙ ГЛАВЕ

1. Проведен анализ различных подходов к определению понятия «алгоритм». Определено, что *алгоритм* – понятное предписание, указывающее, какие операции и в какой последовательности необходимо выполнить с данными, чтобы решить задачу определенного типа. Выявлено, что алгоритм должен обладать такими свойствами, как массовость, дискретность шагов, детерминированность и результативность.

2. Выделены основные формы и виды представления алгоритмов и правил, этапы их изучения в школьном курсе математики. Алгоритм можно задать в нескольких формах: в виде таблицы, формулы, правила, определения, описания. Выявлено, что алгоритмы делят на алгоритмы распознавания и преобразования. Одним из распространенных способов записи алгоритмов является запись на языке блок-схем. В зависимости от вида используемых блок – схем, делятся на линейные, разветвленные и циклические.

3. Выявлены методические особенности формирования алгоритмического мышления учащихся на уроках алгебры в общеобразовательной школе. Установлено, что для формирования алгоритмического мышления в общеобразовательной школе учителю необходима подготовительная работа: выделить соответствующие темы; выполнить логико-математический анализ правил и алгоритмов; подобрать специальные упражнения с учетом этапов изучения алгоритмов и правил.

ГЛАВА II. МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ФОРМИРОВАНИЯ АЛГОРИТМИЧЕСКОГО МЫШЛЕНИЯ УЧАЩИХСЯ ПРИ ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ В ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ШКОЛЕ

§4. Темы курса алгебры и начала анализа, направленные на формирование алгоритмического мышления учащихся

Анализ учебника алгебры и начал анализа А.Г. Мордковича позволил определить темы, при изучении которых могут быть созданы условия для формирования алгоритмического мышления учащихся:

1. Числовая окружность.
2. Формулы приведения.
3. Периодичность функций $y = \sin x$, $y = \cos x$.
4. Однородные тригонометрические уравнения.
5. Преобразования тригонометрических выражений.
6. Предел функции.
7. Определение производной.
8. Вычисление производной.
9. Уравнение касательной к графику функции.
10. Применение производной для исследования функций на монотонность и экстремумы.
11. Применение производной для отыскания наибольших и наименьших значений величин.
12. Формула Ньютона – Лейбница.
13. Свойства логарифмов.

Выпишем из данного учебника основные формулы, правила и алгоритмы, представленные в указанных темах.

Тема «Числовая окружность»

Дана единичная окружность, на ней отмечена начальная точка *A* – правый конец горизонтального диаметра. Поставим в соответствие действительному числу *t* точку окружности по следующему *правилу*:

1. Если $t > 0$, то двигаясь из точки *A* в направлении против часовой стрелки (положительное направление обхода окружности), опишем по окружности путь *AM* длины *t*. Точка *M* и будет искомой точкой *M*(*t*).

2. Если $t < 0$, то двигаясь из точки *A* в направлении по часовой стрелки (отрицательное направление обхода окружности), опишем по окружности путь *AM* длины $|t|$. Точка *M* и будет искомой точкой *M*(*t*).

3. Числу $t = 0$ поставим в соответствие точку *M*; $A = A(0)$.

Единичную окружность с установленным соответствием (между действительным числом и точками окружности) будем называть числовой окружностью.

Тема «Формулы приведения»

Правило вычисления формул приведения заключается в том, что:

1) если под знаком преобразуемой тригонометрической функции содержится сумма аргументов вида $\pi + t$, $\pi - t$, $2\pi + t$, $2\pi - t$, то наименование тригонометрической функции следует сохранить;

2) если под знаком преобразуемой тригонометрической функции содержится сумма аргументов вида $\frac{\pi}{2} + t$, $\frac{\pi}{2} - t$, $\frac{3\pi}{2} + t$, $\frac{3\pi}{2} - t$, то наименование тригонометрической функции следует изменить (на родственное);

3) перед полученной функцией от аргумента *t* надо поставить знак, который имела бы преобразуемая функция при условии, что $0 < t < \frac{\pi}{2}$.

Тема «Периодичность функций y = sin x, y = cos x»

Если функция $y = f(x)$ имеет период *T*, то для построения графика функции нужно сначала построить ветвь (волну, часть) графика на любом промежутке длины *T* (чаще всего будет промежуток с концами в точках 0 и *T* или $-\frac{T}{2}$ и $\frac{T}{2}$), а затем сдвинуть эту ветвь по оси x вправо и влево на T, $2T$, $3T$ и т.д.

Тема «Однородные тригонометрические уравнения»

Алгоритм решения уравнения $a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0$ имеет вид:

1. Посмотреть, есть ли в уравнении член $a \sin^2 x$.

2. Если член $a \sin^2 x$ в уравнении содержится (т.е. $a \neq 0$), то уравнение решается делением обеих его частей на $\cos^2 x$ и последующем введением новой переменной $z = \mathrm{tg}\, x$.

3. Если член $a \sin^2 x$ в уравнении не содержится (т.е. $a = 0$), то уравнение решается методом разложения на множители: за скобки выносится $\cos x$.

Так же обстоит дело и в однородных уравнениях вида: $a \sin 2mx + b \sin mx \cos m x + c \cos^2 mx = 0$.

Тема «Преобразования тригонометрических выражений»

Представим основные *формулы* по теме:

Тангенс суммы и разности аргументов:

$\mathrm{tg}\,(x + y) = \frac{tg\, x + tg\, y}{1 - tg\, x\, tg\, y}$; $\mathrm{tg}\,(x - y) = \frac{tg\, x - tg\, y}{1 + tg\, x\, tg\, y}$.

Формулы двойного аргумента:

$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$;

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$;

$\mathrm{tg}\, 2x = \frac{2tgx}{1 - tg^2 x}$.

Формулы понижения степени

$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$;

$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$.

Тема «Предел функции»

В данной теме можно выделить следующие правила:

I.Вычисление предела функции на бесконечности осуществляется по следующим *правилам*:

1. Для любого натурального показателя m и любого коэффициента k справедливо соотношение: $\lim_{x\to\infty}(\frac{k}{x^m}) = 0$.

2. Если $\lim_{x\to\infty} f(x) = b, \lim_{x\to\infty} g(x) = c$, то

а) предел суммы равен сумме пределов: $\lim_{x\to\infty}(f(x) + g(x)) = b + c$;

б) предел произведения равен произведению пределов: $\lim_{x\to\infty}(f(x) \cdot g(x)) = b + c$;

в) предел частного равен частному от деления пределов (разумеется при условии, что $c \neq 0$): $\lim_{x\to\infty}(\frac{f(x)}{g(x)}) = \frac{b}{c}$;

г) постоянный множитель можно вынести за знак предела: $\lim_{x\to\infty} kf(x) = kb$.

II. Пусть функция y = f(x) определена в токах x_0 и x_1. Разность x_0 - x_1 называют приращением аргумента (при переходе от точки x_0 к x_1), а разность $f(x_0) – f(x_1)$ называют приращением функции.

Приращение аргумента обозначают Δx. Приращение функции обозначают Δy или Δf.

$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Тема «Определение производной»

В данной теме можно выделить следующие алгоритмы и правила:

I. *Алгоритм* нахождения производной (для функции $y = f(x)$)

II. Физический (механический) смысл производной.

III. Геометрический смысл производной.

Тема «Вычисление производной»

В данной теме представлены правила дифференцирования.

Тема «Уравнение касательной к графику функции»

Уравнение касательной имеет вид: $y = f(a) + f'(a)(x – a)$.

Тема «Применение производной для исследования функций на монотонность и экстремумы»

Алгоритм исследования непрерывной функции $y = f(x)$ на монотонность и экстремумы имеет вид:

1. Найти производную $f'(x)$.

2. Отметить стационарные и критические точки на числовой прямой и определить знак производной на получившихся промежутках.

3. Опираясь на теоремы о промежутках монотонности и на теоремы о экстремальных точках, сделать выводы о монотонности функции и о ее точках экстремума.

Тема «Применение производной для нахождения наибольших и наименьших значений величин»

Алгоритм нахождения наименьшего и наибольшего значения непрерывной функции $y = f(x)$ на отрезке $[a,b]$ имеет вид:

1. Найти производную $f'(x)$.

2. Найти стационарные и критические точки функции, лежащие внутри отрезка $[a,b]$.

3. Вычислить значение функции $y = f(x)$ в точках, отобранных на втором шаге, и в точках a и b; выбрать среди этих значений наименьшее (это и будет $y_{\text{наим.}}$) и наибольшее (это и будет $y_{\text{наиб}}$).

Тема «Формула Ньютона – Лейбница»

Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то справедлива *формула*: $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, где $F(x)$ – первообразная для f(x).

Тема «Свойства логарифма»

1. Логарифм произведения двух положительных чисел равен сумме логарифмов этих чисел: $\log_a bc = \log_a b + \log_a c$.

2. Если a, b, c положительные числа, причем $a\neq 1$, то справедливо равенство: $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$.

3. Если a, b – положительные числа, причем $a \neq 1$, то для любого числа r справедливо равенство: $\log_a b^r = r \log_a b$.

Из данных перечисленных правил, некоторые представляют собой уже готовый алгоритм, а некоторые правила сформулированы в лаконичной и «сжатой » форме.

Отметим, что по темам «Определение производной», «Вычисление производной» и «Уравнение касательной к графику функции», а также по нахождению наименьшего и наибольшего значения непрерывной функции y = f(x) на отрезке [a,b] правила и алгоритмы представлены в §5.

Таким образом, в данном параграфе приведены основные темы, при изучении которых могут быть созданы условия для формирования алгоритмического мышления учащихся.

§5. Формирование алгоритмического мышления на примере темы «Производная функции» в 10 классе

5.1. Анализ практического опыта по теме «Производная функции»

Г.Э. Кирсанова в статье «Использование алгоритмов при обучении математике» [24] описывает *условия* эффективного *формирования алгоритмического мышления* в общеобразовательной школе, которые зависят от определенных условий:

1. Сочетание алгоритмического подхода в обучении учащихся с *применением образца ответа* ученика на определенном шаге алгоритма при работе с ним на уроке.

2. *Лаконичность алгоритма*, так как компактный алгоритм легче усваивается учащимися и применяется при решении задач.

3. Указание учителя на *долговременное усвоение шагов* алгоритма.

4. *Точное применение образца решения задач* и *последовательности рассуждений* в них, на основе алгоритма, составленного и приведенного учителем.

5. *Вставка в алгоритм соответствующих указаний,* необходимых учащимся для контроля своих действия, способствующая предупреждению их типичных ошибок. Причем указания должны быть оформлены в виде глаголов в изъявительном наклонении [29, С. 12].

Немецкий исследователь в области теории и методики преподавания математике Б. Чада выделяет следующие методические особенности, помогающие формированию алгоритмического мышления учащихся:

1. Использование возможностей, заложенных в школьной программе, но с некоторыми уточнениями и незначительными дополнениями.

2. Использование способностей к логическому мышлению, помогающие понимать, самостоятельно «открывать» и формулировать алгоритм.

3.Хорошее развитие речи, т.е. необходимо умение четко выражать свои мысли и описывать выполняемые действия.

4. Подготовка к более широкой деятельности по алгоритмическим предписаниям должна проводиться, прежде всего, в рамках обучения математике. Так, автор подчеркивает, что понятие «алгоритмическая деятельность» обычно рассматривают односторонне, т. е. как тренировку в выполнении заранее указанных действий, например, для привития вычислительных навыков. Алгоритмическая деятельность включает как дисциплину ума (формальную деятельность), так и элементы творчества.

Вместе с этим, «математические знания и навыки,— пишет К. Вебер,— имеют, в конечном счете, значение лишь в той мере, в какой удается привить учащимся умение *самостоятельно применять* эти знания и навыки как в математике непосредственно, так и в других дисциплинах и в практической жизни. Именно с этой точки зрения должна рассматриваться роль алгоритмической деятельности в рамках общего математического образования» [19, С. 45].

Б. Чада указывает, что, например, бессмысленно сообщать школьнику алгоритмические предписания, если за этим не следует развитие у него способности к самостоятельному выполнению их, к использованию любых алгоритмических предписаний, даже и выходящих за рамки уроков математики. Необходимо развивать общее умение выполнять любые алгоритмические предписания — независимо от предмета и рамок его изучения. Это умение и рассматривается как алгоритмическая культура и понимается под этим качество развития личности, охватывающее знания, способности, навыки, привычки и волевые свойства.

4. Формирование алгоритмического мышления в современных условиях должно представлять собой непрерывный процесс, который никогда не следует считать завершенным. Однако к моменту окончания каждого года обучения любой учащийся должен достичь той или иной его ступени.

5. Так как алгоритмическое мышление играет важную роль для *каждой* личности, то вырабатывать ее следует главным образом на уроках, а не на факультативных (необязательных) занятиях.

6. Способности к алгоритмической деятельности развиваются в двух направлениях: одно ведет к улучшению выполнения данных конкретных предписаний, другое — к составлению самих предписаний. Наиболее важное практическое значение имеет вторая способность. Разумеется, речь никак не может идти об увеличении количества алгоритмических предписаний, а лишь о систематическом развитии алгоритмической культуры учащихся. В связи с этим, ни в коем случае не следует требовать от школьника применения какого-то определенного алгоритма, если задачу можно решить несколькими различными алгоритмами [56, С. 62].

Таким образом, в условиях ускорения научно – технического процесса необходимо систематически формировать на уроках математики алгоритмическое мышление школьников.

5.2. Характеристика уровня требований к знаниям, умениям и навыкам учащихся по теме «Производная функции»

Как было отмечено, во ФГОС среднего (полного) общего образования указано, что изучение учащимися предметной области "Математика и информатика" должно обеспечить: сформированность основ логического, алгоритмического и математического мышления; сформированность умений применять полученные знания при решении различных задач.

Вместе с этим, в Примерной программе среднего (полного) общего образования по математике отмечается, что «в результате изучения математики *на профильном уровне* ученик должен:

знать/понимать:

– значение математической науки для решения задач, возникающих в теории и практике; широту и ограниченность применения математических методов к анализу и исследованию процессов и явлений в природе и обществе;

– значение практики и вопросов, возникающих в самой математике, для формирования и развития математической науки;

– значение идей, методов и результатов алгебры и математического анализа для построения моделей реальных процессов и ситуаций;

– универсальный характер законов логики математических рассуждений, их применимость в различных областях человеческой деятельности;

– различие требований, предъявляемых к доказательствам в математике, естественных, социально-экономических и гуманитарных науках, на практике;

– роль аксиоматики в математике; возможность построения математических теорий на аксиоматической основе; значение аксиоматики для других областей знания и для практики;

уметь:

– вычислять производные и первообразные элементарных функций, применяя правила вычисления производных и первообразных, используя справочные материалы;

– исследовать функции и строить их графики с помощью производной;

– решать задачи с применением уравнения касательной к графику функции;

– решать задачи на нахождение наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке;

использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни для:

– решения геометрических, физических, экономических и других прикладных задач, в том числе задач на наибольшие и наименьшие значения с применением аппарата математического анализа» [40].

5.3. Обучение учащихся правилам и алгоритмам вычисления производной по учебнику А.Г. Мордковича

В ходе анализа учебника алгебры и начал анализа А.Г. Мордковича для 10-11-х классов была выбрана *тема «Производная функции»*, при изучении которой может осуществляться обучение правилам и алгоритмам учащихся общеобразовательной школы.

Тема «Производная функции» включает в себя следующие интересующие нас *подтемы*:

1. Определение производной.
2. Вычисление производной.
3. Уравнение касательной к графику функции.
4. Применение производной для исследования функций на монотонность и экстремумы.

5. Применение производной для отыскания наибольших и наименьших значений величин.

Рассмотрим основные правила и алгоритмы, представленные в них:

Тема «Определение производной функции»

А.Г. Мордкович пишет: «Если жизнь выдвигает на повестку дня новую математическую модель, дело математиков – специально заняться изучение этой модели в отрыве от ее конкретного содержания, то есть предпринять следующие действия: 1) присвоить новой модели специальный термин; 2) ввести для нее специальное обозначение; 3) изучить правила оперирования с новой моделью и сферу ее применимости. Например, для рассмотрения одной из математической модели используется термин *производная* и обозначение y'» [36].

Автор дает такое *определение производной функции*.

Определение. Если для функции $y = f(x)$ а фиксированной точке x существует предел отношения приращения функции к приращению аргумента Δx при условии $\Delta x \to 0$, то этот предел называется *значением производной функции* $y = f(x)$ в точке x и обозначается $f'(x)$ или y'.

В данной теме можно выделить следующие алгоритмы и правила:

I. Алгоритм нахождения производной (для функции $y = f(x)$), который состоит из следующих этапов:

1. Зафиксировать значение x, найти $f(x)$.
2. Дать аргументу x приращение Δx, перейти в новую точку $x + \Delta x$, найти $f(x + \Delta x)$.
3. Найти приращение функции: $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.
4. Составить отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.
5. Вычислить предел $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, который представляет собой $f'(x)$.

А.Г. Мордкович делает два существительных комментария к этому алгоритму [36].

1. Первый шаг алгоритма выглядит так: «Зафиксировав значение x, найти $f(x)$». Казалось бы, что данный шаг не нужен, так как в самом задании содержится $f(x)$, и здесь используется та же запись $f(x)$. Этот шаг важен с двух точек зрения – *методологической* («записи $f(x)$ в исходном задании и на первом шаге одинаковы *по форме*, но не *по содержанию*: в исходном задании x – переменная, а на первом шаге – постоянная») и *психолого-педагогической* («это – этап сосредоточения на задаче, вхождения в процесс решения»).

2. Автор указывает, что нельзя допустить, чтобы понятия приращения аргумента и приращения функции появились впервые при введении производной, так как ведь здесь они – не цель, а средство для изучения нового понятия производной. Рекомендуется ввести указанные термины и «странные» обозначения с треугольником слева от переменной со «странным» прочтением («дельта икс») заранее, чтобы учащиеся успели приобрести хотя бы небольшой опыт нахождения Δx, Δy и даже предела последнего отношения.

II. Физический (механический) смысл производной, состоящий в следующем: если $s(t)$ – закон прямолинейного движения тела, то производная выражает мгновенную скорость в момент времени t: $v = s'(t)$.

III. Геометрический смысл производной, который состоит в следующем: если к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой $x = a$ можно провести касательную, непараллельную оси y, то $f'(a)$ выражает угловой коэффициент касательной: $k = f'(a)$. Так как $k = \operatorname{tg} \alpha$, то верно равенство $f'(a) = \operatorname{tg} \alpha$.

Тема «Вычисление производной»

В данной теме можно выделить следующие *правила* дифференцирования:

1. Если функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ имеют производную в точке x, то и их сумма имеет производную в точке x, причем производная суммы равна сумме производных: $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$.

2. Если функция $y = f(x)$ имеет производную в точке x, то и функция $y = k\,f(x)$ имеет производную в точке x, причем: $(k\,f(x))' = \mathrm{k}\,f\,'(x)$.

3. Если функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ имеют производную в точке x, то и их произведение имеет производную в точке x, причем: $(f(x)\ g(x))' = f\ '(x)\ g(x)+ f(x)\ g\ '(x)$.

4. Если функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ имеют производную в точке x,причем в этой точке $g(x)\neq 0$, то и частное $\frac{f(x)}{g(x)}$ имеет производную в точке, причем: $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$.

5. Производная функции $y = f(kx + m)$ вычисляется по формуле $(f(kx + m))' = k\,f\,'(kx + m)$.

Тема «Уравнение касательной к графику функции»

Напомним, что уравнение касательной имеет вид: $y = f(a) + f'(a)(x - a)$ (1).

В данной теме можно выделить *алгоритм составления уравнения касательной к графику функции y = f(x)*, который состоит из следующих этапов: *1*. Обозначить абсциссу точки касания буквой a. *2*. Вычислить $f\,(a)$. *3*. Найти $f\,'(x)$ и вычислить $f\,'(a)$. *4*. Подставить найденные числа a, $f\,(a)$, $f\,'(a)$ в формулу (1).

5.4. Обучение учащихся правилам и алгоритмам применения производной по учебнику А.Г. Мордковича

Тема «Вычисление производной»

Первый этап работы с алгоритмами.

А.Г. Мордкович подчеркивает, что включённые в курс алгебры старшей школы сведения о пределах имеют вспомогательный характер и необходимы для вывода формул производных. В связи с этим на этапе актуализации знаний основное внимание рекомендуется уделить проведению предельных переходов для приближённого вычисления значений конкретных функций и их приращений. Также, определению производной функции как предела разностного отношения должно предшествовать рассмотрение особенностей поведения графиков функций, приводящее к понятию касательной. «Производная функции появляется сначала как тангенс угла наклона касательной к оси абсцисс. Тем самым с понятием производной на первом этапе связывается наглядный образ – касательная. Предельные переходы появляются как средство вычисления производной» [36].

В дальнейшем учащиеся изучают область применения производной: это *задачи на исследование функций* (возрастание и убывание, нахождение точек максимума и минимума функции, непрерывность), составление уравнения касательной, а также решение прикладных задач.

Рассмотрим *методику введения понятия «Производная функции»* в учебниках алгебры и начал анализа.

В учебнике С.М. Никольского (для базового и профильного уровней, 11 класс) под производной функции понимают [38]: «Производной функции $y = f(x)$, заданной на некотором интервале $(a; b)$, в точке x этого интервала, называют предел отношения приращения функции в этой точке к соответствующему приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю $f`(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$ ».

До введения понятия «производная функции» автор вводит понятия «приращение аргумента» и «приращение функции».

Очевидно, это определение не является правилом, а значит, не является алгоритмом: оно не обладает ни одним свойством алгоритма, нет выделенной последовательности шагов и операций.

В учебнике *Ш.А. Алимова* (для базового уровня, 11 класс) понятие производной функции вводят следующим образом [11]:

«Пусть функция $f(x)$ определена на некотором промежутке, x – точка этого промежутка и число $h \neq 0$ такое, что $x + h$ также принадлежит данному промежутку. Тогда предел разности отношения $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ при $h \to 0$

(если этот предел существует) называется производной функции $f(x)$ в точке x и обозначается $a\, f\,`(x)$. Таким образом,

$$f\,`(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$».

В данном учебнике понятия «приращение аргумента» и «приращение функции» автор не вводит.

Определение не является правилом, а значит, не является алгоритмом, аналогично с предыдущим, оно не обладает всеми свойствами алгоритма, нет последовательности шагов, но оно имеет входные данные, промежуточные операции и условие существования производной.

В учебнике *А.Г. Мордковича* (для профильного уровня, 10 класс) понятие производной функции вводят так [36]:

«Пусть функция $y = f(x)$ определена в точке x и в некоторой её окрестности. Дадим аргументу x приращение Δx, такое, чтобы не выйти из указанной окружности. Найдём соответствующее приращение функции Δy (при переходе от точки x к точке $x + \Delta x$) и составим отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Если существует предел этого отношения при $\Delta x \to 0$, то указанный предел называют производной $y = f(x)$ в точке x и обозначается $f\,`(x)$. Итак,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f\,`(x)$$».

Так же, до введения понятия «производная функции» автор вводит понятия «приращение аргумента» и «приращение функции».

Кроме того, в данном учебнике автора описан *алгоритм нахождения производной функции*:

1. Определить функцию $f(x)$.

2. Дать аргументу x приращение Δx, перейти в точку $x + \Delta x$ и найти $f(x + \Delta x)$.

3. Найти приращение функции $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.

4. Составить отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$.

5. Вычислить $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Это и есть $f`(x)$.

Этот алгоритм можно привести к более *стандартному виду*:

1. Определить функцию $f(x)$.

2. Дать аргументу x приращение Δx, перейти в точку $x + \Delta x$ и найти $f(x + \Delta x)$.

3. Найти приращение функции $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ и упростить его.

4. Составить выражение $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ и сократить его на Δx.

5. Вычислить $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

6. $f`(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Данный алгоритм отвечает всем свойствам алгоритмов.

Второй этап работы с алгоритмами.

А.Г. Мордкович указывает, что в зависимости от учебной программы, профиля и уровня подготовленности учащихся, можно либо изложить в данном виде алгоритм нахождения производной, описанный в первом этапе, либо дать возможность учащимся самостоятельно вывести данный алгоритм. При самостоятельном составлении алгоритма могут возникнуть трудности, но с помощью учителя, после введения алгоритма нахождения производной элементарных функций, учащиеся могут самостоятельно вывести алгоритмы правил вычисления производных и нахождения производной сложной функции.

Рассмотрим методику введения правил вычисления производных функций.

Приведем правила вычисления производных, представленных в учебнике А.Г. Мордковича [36].

Правило 1. Если функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ имеют производную в точке x, то и их сумма имеет производную в точке x, причем произведение суммы равно сумме производных:

$$\left(f(x) + g(x)\right)` = f`(x) + g`(x)$$

Составим алгоритм:

1. Определить $y = f(x) + g(x)$.
2. Определить $f(x)$.
3. Определить $g(x)$.
4. Найти производную $f`(x)$.
5. Найти производную $g`(x)$.
6. Найти сумму $f`(x) + g`(x)$.
7. $y` = f`(x) + g`(x)$.

Правило 2. Если функция $y = f(x)$ имеет производную в точке x, то и функция $y = kf(x)$ имеет производную в точке x, причем:

$$\left(kf(x)\right)` = kf`(x)$$

Составим алгоритм:

1. Определить $y = kf(x)$.
2. Определить $f(x)$.
3. Определить k.
4. Найти производную $f`(x)$.
5. Найти произведение $kf`(x)$.
6. $y` = kf`(x)$.

Правило 3. Если функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ имеют производную в точке x, то и их произведение имеет производную в точке x, причем:

$$\left(f(x)g(x)\right)` = f`(x)g(x) + f(x)g`(x)$$

Составим к нему *алгоритм:*

1. Определить $y = f(x)g(x)$.
2. Определить $f(x)$.
3. Определить $g(x)$.
4. Найти производную $f`(x)$.
5. Найти производную $g`(x)$.
6. Найти произведение $f`(x)g(x)$.
7. Найти произведение $f(x)g`(x)$.
8. Найти сумму $f`(x)g(x) + f(x)g`(x)$.
9. $y` = f`(x)g(x) + f(x)g`(x)$.

Правило 4. Если функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ имеют производную в точке x и в этой точке $g(x) \neq 0$, то функция $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ имеет производную в точке x, причем:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)` = \frac{f`(x)g(x) - f(x)g`(x)}{g^2(x)}$$

Составим к нему *алгоритм:*

1. Определить $y = \frac{f(x)}{g(x)}$.
2. Определить $f(x)$.
3. Определить $g(x)$.
4. Найти производную $f`(x)$.
5. Найти производную $g`(x)$.
6. Найти произведение $f`(x)g(x)$.

7. Найти произведение $f(x)g`(x)$.

8. Найти разность $f`(x)g(x) - f(x)g`(x)$.

9. Найти $g^2(x)$.

10. Найти частное $\frac{f`(x)g(x) - f(x)g`(x)}{g^2(x)}$.

11. $y` = \frac{f`(x)g(x) - f(x)g`(x)}{g^2(x)}$.

Рассмотрим *методику введения производной сложной функции*.

Алгоритм её нахождения в явном виде не описан в учебниках.

Определение производной сложной функции в учебнике А.Г. Мордковича (профильный уровень, 10 класс) имеет следующий вид [36]:

«Производная композиции двух функций – $y = f(u), u = g(x)$ равна произведению производной функции по промежуточному аргументу и производной промежуточного аргумента по независимой переменной:

$$y_x^` = y_u^` \cdot u_x^`$$

где $y_x^`$ - производная $y$ по $x$; $y_u^`$ - производная y по промежуточному аргументу u, $u_x^`$ - производная u по неизвестной переменной x».

Составим *алгоритм нахождения сложной производной*. Выполнение действий по этому алгоритму предполагает знание понятия производной функции, таблицы производных и умение применять их при решении задач.

1. Определить функцию $y_x = f(g(x))$.

2. Определить функцию $u_x = g(x)$.

3. Определить функцию $y_u = f(u)$.

4. Найти производную функции $y_u^` = f`(u)$ (либо с помощью предыдущего алгоритма нахождения производной, либо с помощью таблицы производных).

5. Найти производную функции $u_x^` = g`(x)$ (либо с помощью предыдущего алгоритма нахождения производной, либо с помощью таблицы производных).

6. Найти произведение $y_u^` \cdot u_x^`$ и упростить его.

7. $y_x^` = y_u^` \cdot u_x^`$.

Данный алгоритм так же отвечает всем свойствам.

Третий этап работы с алгоритмами.

По мнению А.Г. Мордковича, диагностикой усвоения алгоритмов на этапе их введения и закрепления может быть как выполнение практических заданий в ходе урока, так и тестовые и самостоятельные работы.

Приведем примеры выполнения упражнений по задачнику к учебнику автора [35].

I. *Нахождение производной по определению [№ 40.9 (а, б), 35].*

а) $y = x^2 + 2x$.

1. Определим функцию $f(x) = x^2 + 2x$.

2. Дадим аргументу x приращение Δx, перейдем в точку $x + \Delta x$ и найдем $f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^2 + 2(x + \Delta x) = x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 + 2x + 2\Delta x$.

3. Найдем приращение функции:

$$\Delta y = (x + \Delta x)^2 + 2(x + \Delta x) = x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 + 2x + 2\Delta x - (x^2 + 2x) = (x + \Delta x)^2 + 2(x + \Delta x) = x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 + 2x + 2\Delta x - x^2 - 2x = 2x\Delta x + \Delta x^2 + 2\Delta x = \Delta x(2x + \Delta x + 2)$$

4. Составим выражение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ и сократим его на Δx: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x(2x+\Delta x+2)}{\Delta x} = 2x + \Delta x + 2$.

5. Вычислим $\lim_{\Delta x \to 0}(2x + \Delta x + 2) = 2x + 2$.

6. $f`(x) = 2x + 2$.

Также приведем *пример нахождения производной этой функции* по *правилу 1*.

1. Определим $y = x^2 + 2x$.
2. Определим $f(x) = x^2$.
3. Определим $g(x) = 2x$.

4. Найдем производную $f`(x) = 2x$.
5. Найдем производную $g`(x) = 2$.
6. Найдем сумму $f`(x) + g`(x) = 2x + 2$.
7. $y` = 2x + 2$

б) $y = \frac{1}{x}$.

1. Определим $f(x) = \frac{1}{x}$.
2. Дадим аргументу x приращение Δx, перейдем в точку $x + \Delta x$ и найдем $f(x + \Delta x) = \frac{1}{x+\Delta x}$.
3. Найдем приращение функции $\Delta y = \frac{1}{x+\Delta x} - \frac{1}{x} = \frac{x-x-\Delta x}{x(x+\Delta x)} = -\frac{\Delta x}{x(x+\Delta x)}$.
4. Составим выражение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ и сократим его на Δx: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{\Delta x}{\Delta x \cdot x(x+\Delta x)} = -\frac{1}{x^2 + x\Delta x}$.
5. Найдем $\lim_{\Delta x \to 0}\left(-\frac{1}{x^2 + x\Delta x}\right) = -\frac{1}{x^2}$.
6. $f`(x) = -\frac{1}{x^2}$.

II. Нахождение производной по правилу 4 [№ 41.18 (а), 35]

а) $y = \frac{x^3}{2x+4}$

1. Определим $y = \frac{x^3}{2x+4}$.
2. Определим $f(x) = x^3$.
3. Определим $g(x) = 2x + 4$.
4. Найдем производную $f`(x) = 2x^2$.
5. Найдем производную $g`(x) = 2$.
6. Найдем произведение $f`(x)g(x) = 4x^3 + 8x^2$.
7. Найдем произведение $f(x)g`(x) = 2x^3$.
8. Найдем разность $f`(x)g(x) - f(x)g`(x) = 2x^3 + 8x^2$.

9. Найдем $g^2(x) = 4x^2 + 16x + 16$.

10. Найдем частное $\frac{f`(x)g(x) - f(x)g`(x)}{g^2(x)} = \frac{x^3+4x^2}{2x^2+8x+8}$.

11. $y` = \frac{x^3+4x^2}{2x^2+8x+8}$.

III. Нахождение производной сложной функции [№42.1(а), 42.2(а), 3].

№42.1(а).

а) $(4x-9)^7$.

1. Определим функцию $y_x = (4x-9)^7$.
2. Определим функцию $u_x = 4x - 9$.
3. Определим функцию $y_u = u^7$.
4. Найдем производную $y_u` = \frac{7}{u^6} = \frac{7}{(4x-9)^6}$.
5. Найдем производную $u_x` = 4$.
6. Найдем произведение $y_u` \cdot u_x`$ и упростим его: $y_u` \cdot u_x` = \frac{7}{(4x-9)^6} \cdot 4 = \frac{28}{(4x-9)^6}$.
7. $y_x` = \frac{28}{(4x-9)^6}$.

№42.2(а).

а) $\sin(3x-9)$.

1. Определим функцию $y_x = \sin(3x-9)$.
2. Определим функцию $u_x = 3x - 9$.
3. Определим функцию $y_u = \sin u$.
4. Найдем производную $y_u` = \cos u = \cos(3x-9)$.
5. Найдем производную $u_x` = 3$.
6. Найдем произведение $y_u` \cdot u_x`$ и упростим его: $y_u` \cdot u_x` = \cos(3x-9) \cdot 3 = 3\cos(3x-9)$.

7. $y_x^` = 3\cos(3x - 9)$.

Тема «Применение производной для исследования функций на монотонность и экстремумы»

В данной теме можно выделить *алгоритм исследования непрерывной функции $y = f(x)$ на монотонность и экстремумы,* который имеет вид:

1. Найти производную $f'(x)$.

2. Отметить стационарные и критические точки на числовой прямой и определить знак производной на получившихся промежутках.

3. Опираясь на теоремы о промежутках монотонности и на теоремы о экстремальных точках, сделать выводы о монотонности функции и о ее точках экстремума.

Тема «Применение производной для нахождения наибольших и наименьших значений величин»

В данной теме можно выделить *алгоритм нахождения наименьшего и наибольшего значения непрерывной функции $y = f(x)$ на отрезке $[a,b]$,* который состоит из следующих этапов:

1. Найти производную $f'(x)$.

2. Найти стационарные и критические точки функции, лежащие внутри отрезка $[a,b]$.

3. Вычислить значение функции $y = f(x)$ в точках, отобранных на втором шаге, и в точках a и b; выбрать среди этих значений наименьшее (это и будет $y_{наим.}$) и наибольшее (это и будет $y_{наиб}$).

Далее опишем *методические рекомендации обучения алгоритмам* учащихся 10-11-х классов общеобразовательной школы на примере данного алгоритма.

При обучении алгоритмам учащихся 10-11-х классов на данном примере необходимо: 1) разобрать этот алгоритм с учащимися и записать его на языке блок – схемы; 2) подобрать соответствующие упражнения для каждого из трех этапов работы с этим алгоритмом.

Кроме того, прежде чем записывать данный алгоритм на языке блок – схем, запишем его на естественном языке более подробно, чем это сделано в учебнике алгебры и начал анализа.

Алгоритм нахождения наименьшего и наибольшего значения непрерывной функции $y = f(x)$ на отрезке $[a,b]$:

1. Найти производную $f'(x)$.

2. Найти стационарные и критические точки функции.

3. Выбрать критические и стационарные точки, лежащие внутри отрезка $[a, b]$.

4. Вычислить значение функции $y = f(x)$ в критических, стационарных точках (внутри данного отрезка) и на концах отрезка.

5. Из найденных значений функции выбрать наибольшее и наименьшее.

Теперь запишем данный алгоритм на языке блок – схемы, представленной ниже на Схеме 5.

В соответствии с методическими особенностями обучения правилам и алгоритмам в школьном курсе математики, представим *систему упражнении* направленную на овладение алгоритмом нахождения наименьшего и наибольшего значения непрерывной функции $y = f(x)$ на отрезке $[a,b]$, составленную с учетом *соответствующих требований* [37, С. 64].

Так, система упражнений, направленная на овладение алгоритмом отыскания наименьшего и наибольшего значения непрерывной функции $y = f(x)$ на отрезке $[a,b]$ включает*:*

I. Упражнения для этапа введения алгоритма:

1. Найдите производную функции: а) $y = 7x^2 - 7x$; б) $y = 12x + \sqrt{x}$; в) $y = \sin x + 3$; г) $y= x^3 + 2x^5$.

2. Имеет ли функция стационарные или критические точки: а) $y = 2x^2 - 3x + 5$; б) $y = \frac{1}{4}x + 5$; в) $y = \frac{x+5}{2}$; г) $y = |x|$?

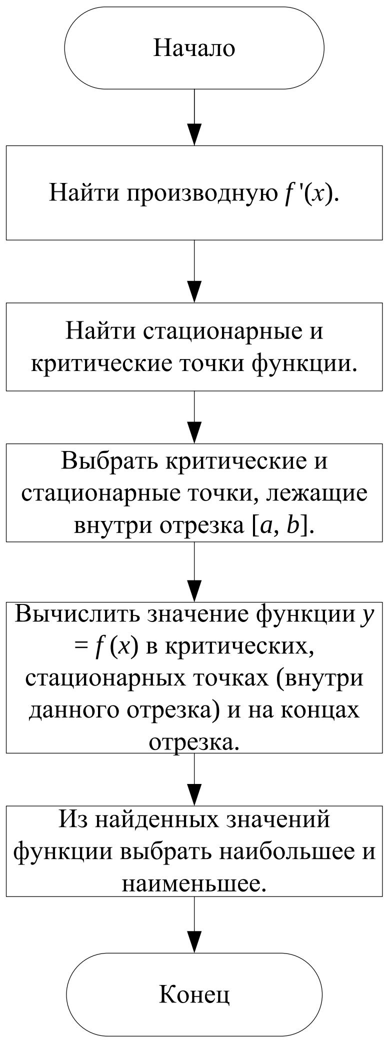


Схема 5. Алгоритм нахождения наименьшего и наибольшего значения непрерывной функции y = f(x) на отрезке [a,b].

3. Найдите стационарные и критические точки функции: а) $y = 7 + 12x - x^3$; б) $y = \frac{x}{5} + \frac{5}{x}$; в) $y = \sqrt{2x-1}$; г) $y = 2 \sin 2x - \sin 4x$.

II. Упражнения для этапа усвоения алгоритма:

4. Найдите наибольшее и наименьшее значения заданной функции на заданном отрезке: а) $y = 3x - 6$, $[-1, 4]$; б) $y = -\frac{8}{x}$, $[\frac{1}{4}, 8]$; в) $y = x^2 - 8x + 19$, $[-1, 5]$; г) $y = -0{,}5 \sin x$, $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

5. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^3 + 3x^2 - 45x - 2$ на отрезке: а) $[-6,0]$; б) $[1,2]$; в) $[-6, -1]$; г) $[0, 2]$.

6. Найдите наибольшее и наименьшее значения заданной функции на заданном промежутке: а) $y = \text{ctg } x + x$, $[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$; б) $y = x^3 - 2x^2 + 1$, $[0{,}5; +\infty)$; в) $y = x + \frac{1}{x}$, $(-\infty{,}0)$; г) $y = x - 2\sqrt{x}$, $[0,+\infty)$.

III. Упражнения для этапа применения алгоритма:

7. Сумма двух целых чисел равна 24. Найдите эти числа, если известно, что их произведение принимает наибольшее значение.

8. Периметр прямоугольника составляет 72 см. Каковы его стороны, если этот прямоугольник имеет наименьшую площадь?

9. Найдите наибольшее и наименьшее значения заданной функции на заданном промежутке: а) $y = x^2 - 5|x| + 6$, $[0,4]$; б) $y = x^2 - 4x + 5 + |1 - x|$, $[0,4]$.

10. База находится в лесу в 5 км от дороги, а в 13 км от базы на этой дороге есть железнодорожная станция. Пешеход по дороге идет со скоростью 5 км/ч, а по лесу – 3 км/ч. За какое минимальное время пешеход может добраться от базы до станции?

Ответы к данной системе упражнений представлены в Приложении 1.

5.5. Проектирование изучения темы «Производная»

Тема «Производная» - одна из основных тем курса алгебры и начала анализа в 10-11 классах. Объем темы рассчитан на 7 часов.

1. Понятие производной. Правила дифференцирования. Вычисление производной функции по определению.

Цели. Ввести понятие производной, дать представлений о правилах дифференцирования (производная суммы). Научить обучающихся вычислять производную элементарных функций по определению.

Тип урока: урок изложения нового материала.

2. Производная произведения, следствия. Производная многочлена и степенной функции.

Цели. Ввести в ходе занятия формулу для вычисления производной произведения, следствие из нее, показать, как применяется формула на примерах. Формирование навыков вычисления производной степенной функции и многочлена.

Тип урока: комбинированный.

3. Производная тригонометрических функций. Производная частного.

Цели. Ввести в ходе занятия формулу для вычисления производной частного, формулы для вычисления производных синуса, косинуса. Вывести формулы для вычисления производных тангенса и котангенса. Дать формулы для вычисления производных обратных тригонометрических функций.

Тип урока: комбинированный.

4. Производная логарифмической и показательной функций. Сложная функция, ее производная.

Цели. Ввести в ходе занятия формулу для вычисления производных показательной и логарифмической функций. Показать на примерах, что такое сложная функция. Привести формулу для вычисления производной сложной функции. Формирование первичных навыков по вычислению производных сложных функций.

Тип урока: комбинированный.

5. Физический и геометрический смысл первой производной. Физический смысл второй производной.

Цели. Ввести в ходе занятия понятия: физический (механический) смысл первой и второй производной, геометрический смысл первой производной. Вывести уравнение касательной и нормали, проведенных к графику функции в точке x_0.

Тип урока: комбинированный.

6. Исследование функций с помощью первой производной. Схема исследования. Построение графиков.

Цели. Сформировать у обучающихся представление о том, как применяется производная к исследованию функций, привести схему исследования. Формирование умения строить графики функций на основе данных, полученных при исследовании функций.

Тип урока: комбинированный.

7. Контрольная работа.

Цели. Систематизация, обобщение и контроль знаний и умений обучающихся по теме.

Тип урока: урок контроля, систематизации и обобщения знаний.

Приведем *конспекты уроков* по темам «Понятие производной. Правила дифференцирования. Вычисление производной функции по определению» и «Производная произведения, следствия. Производная многочлена и степенной функции» в соответствии с методикой формирования алгоритмического мышления.

Урок 1. Понятие производной. Правила дифференцирования. Нахождение производной по определению.

ЦЕЛИ. Ввести понятие производной, дать представлений о правилах дифференцирования (производная суммы). Научить обучающихся вычислять производную элементарных функций по определению.

Тип урока: урок изложения нового материала.

Этапы урока:

1. Организационный момент.
2. Постановка целей урока.
3. Актуализация опорных знаний.
4. Изложение нового материала.
5. Первичное закрепление изученного материала.
6. Запись домашнего задания.
7. Итог урока.

1, 2. Организационный момент, постановка целей урока.

3. Актуализация опорных знаний.

Повторение понятий: функция, независимая переменная (аргумент), зависимая переменная, предел функции.

4. Изложение нового материала.

Понятие производной.

4.1. Приращение функции.

Чаще всего нас интересует изменение какой-то величины, а не ее значение. Например, сила упругости пружины пропорциональна удлинению пружины; работа есть изменение энергии; средняя скорость – это отношение перемещения к промежутку времени, за который было совершено это перемещение и т.д.

При сравнении значения функции f в некоторой фиксированной точке x_0 с значениями функции в различных точках x, лежащих в окрестности x_0 удобно выражать разность $f(x) - f(x_0)$ через разность $x - x_0$ пользуясь понятиями «приращение аргумента » и «приращение функции».

Определение 1. Пусть x – произвольная точка, лежащая в некоторой окрестности фиксированной точки x_0. Разность $x - x_0$ - называется приращением независимой переменной (или аргумента) в точке x_0, обозначается Δx, т.е. $\Delta x = x - x_0$

Замечание: Говорят также, что первоначальное значение аргумента x_0 получило приращение Δx.

Определение 2. Вследствие приращения аргумента, значение функции f изменится на величину

$$f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

эта разность называется приращением функции f в точке x_0, соответствующим приращению Δx, и обозначается Δf

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Пример Найдем приращения Δx и Δf, в точке x_0 ,если $f(x) = x^2$

$x_0 = 2$, $x = 1{,}9$.

Дано: Решение:

$\boldsymbol{x_0} = 2$ $\quad \Delta \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_0}$

$\boldsymbol{x} = 1{,}9$ $\quad \Delta \boldsymbol{x} = \boldsymbol{1{,}9 - 2}$

$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x^2}$ $\quad \Delta \boldsymbol{x} = \boldsymbol{-\,0{,}1}$

Найти:

$\Delta \boldsymbol{x}$ -? $\quad f(\boldsymbol{x_0}) = \boldsymbol{x^2}$

Δ f -? $\quad f(2) = 4$

$f(\boldsymbol{x_0} + \Delta \boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x_0} + \Delta \boldsymbol{x})^2$

$f(2 - 0{,}1) = f(1{,}9) = 1{,}9^2 = 3{,}61$

$\Delta f = f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x_0})$

$\Delta f = 3{,}61 - 4$

$\Delta f = -\,0{,}39$

Ответ: $\Delta \boldsymbol{x} = 0{,}1$ $\quad \Delta f = -\,0{,}39$.

4.2. Задачи, приводящие к понятию производной.

Рассмотрим прямолинейное движение материальной точки.

Пусть точка *M* движется по прямой линии. Каждому моменту времени t соответствует путь S , т. е. путь, это функция от времени: S=f (t) (закон движения). Если тело движется равномерно, то его скорость постоянная и V = S/ t . В жизни же тела (поезд, автомобиль, самолет и др.) прямолинейно движутся лишь на некоторых участках пути, а в общем случае их движение неравномерное. Неравномерное движение нельзя охарактеризовать указанием пути, пройденного точкой за тот или иной промежуток времени. Поэтому для его характеристики используется понятие средней скорости.

Пусть материальная точка *M* движется по закону S = f (t), из промежутка (0; T), если $S_0 = f(t_0)$ и $S_1 = f(t_1)$, то средней скоростью движения за промежуток от t_0 до t_1 называется число:

$$V_{ср.} = V(t_0; t_1) = \frac{S_1 - S_0}{t_1 - t_0}$$

Пример: Пусть тело движется по закону $S = (gt^2) / 2$.

Вычислим скорость за первую секунду:

$$V_1 = (S(1)- S(0))/(1-0); \quad V_1 = 4{,}9 \text{ м/с}.$$

Вычислим скорость за десятую секунду:

$$V_2 = (S(10) - S(9)) / (10-9); \quad V_2=93{,}1 \text{ м/с}.$$

Вычислим скорость за период времени от 0 с до 10 с.

$$V_3=(S(10)- S(0))/(10-0); \quad V_3 = 49 \text{ м/с}.$$

V_1, V_2 и V_3 различны.

Пример показывает, что при неравномерном движении для характеристики движения средней скорости не достаточно, для его характеристики вводят мгновенную скорость.

$$V_{мг}=\lim_{\Delta x\to 0} V_{ср}$$

4.3. Определение производной.

В рассмотренной задаче, мы по сути дела находили скорость изменения функции. Число равное скорости изменения функции в данной точке – это есть производная функции в этой точке.

Определение 3. Производной функции f в точке x_0 называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента. При Δx стремящемся к нулю. $f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$.

Для того чтобы вычислить производную функции f в точке x_0 нужно:

1. Вычислить $\Delta f(x)$;
2. Найти $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$;
3. Вычислить $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$.

Пример. Найти производную функции $f(x)=x^3$ в точке x_0.

1. $\Delta f(x) = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$

$\Delta f(x) = (x_0+\Delta x)^3 – x^3 = x_0^3 + 3x_0^2\Delta x + 3x_0(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x_0^3=$

$= 3x_0^2\Delta x + 3x_0(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$.

2. $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}=\frac{\Delta x(3x_0^2+3x_0\cdot\Delta x+\Delta x^2}{\Delta x}=3x_0^2 + 3x_0\Delta x + (\Delta x)^2$

3. $\lim\limits_{\Delta x \to 0}(3x_0^2+3x_0\Delta x+(\Delta x)^2) = 3x_0^2+3x_0\times 0+0^2 = 3x_0^2.$

Тогда $f'(x) = 3x_0^2$, т. е. $(x^3)' = 3x_0^2$.

Пример. Найдите производную функции $f(x)= kx+b$

1. $\Delta f(x) = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$

$\Delta f = k(x_0+\Delta x) + b - (kx_0+b) = kx_0 + k\Delta x + b - kx_0 – b = k\Delta x.$

2. $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{k\Delta x}{\Delta x} = k$,

3. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} k = k.$

Определение 4. Функцию, имеющую производную в точке x_0, называют дифференцируемой в точке x_0.

Определение 5. Пусть D_1 – множество точек в которых функция f дифференцируема, сопоставляя каждому x из D_1, число $f'(x_0)$, получим новую функцию с областью определения D_1. эта функция называется производной функции $f(x)$ и обозначается $f'(x)$.

Определение 6. Нахождение производной данной функции f называется дифференцированием.

Из примеров видно, что $(x^3)' = 3x^2$. $(kx+ b)' = k$.

Если предположить, что $k = 0$, то $0 = (kx+ b)' = (0x+ b)' = b'$

$$b' = 0.$$

То есть производная от постоянной функции или числа равна нулю.

$$\mathbf{C' = 0.}$$

4.4. Правила дифференцирования.

Обозначим $V(x_0) = V$, $U(x_0) = U$

Правило 1. Если функции U и V дифференцируемы в точке x_0, то их сумма дифференцируема в этой точке.

$$(U+ V)' = U' + V'.$$

То есть производная суммы равна сумме производных.

Доказательство : Найдем приращение суммы в точке x_0

1.) $\Delta(U+ V) = (U(x_0+ \Delta x)+ V(x_0+ \Delta x)) – (U(x_0) – V(x_0)) =$

$= (U(x_0+ \Delta x) - U(x_0)) + (V(x_0+ \Delta x) – V(x_0)) = \Delta U+ \Delta V.$

2.) $\frac{\Delta(U+V)}{\Delta x} = \frac{\Delta U + \Delta V}{\Delta x} = \frac{\Delta U}{\Delta x} + \frac{\Delta V}{\Delta x}$

так как U и V дифференцируемы в точке x_0 то

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta(U+V)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta U}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta V}{\Delta x} = U' + V'$$

то есть

$$(U+ V)' = U' + V'.$$

Пример. Вычислите производную функции $x^2 +2x +3$ в точке x_0.

Решение. $(x^2+2x+3)' = (x^2)' + (2x+3)'$

$(2x+3)' = 2$ (см. пример выше) найдем производную x^2.

1) $\Delta f(x) = (x_0+ \Delta x)^2 – x_0^2 = x_0^2+2x_0 \Delta x+(\Delta x)^2 - x_0^2 = 2x_0 \Delta x+(\Delta x)^2$

2) $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{2x_0\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = \frac{\Delta x(2x_0 + \Delta x)}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x.$

3) $\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}(2x_0+\Delta x)= 2x_0+0$

$(x^2)' = 2x.$

Тогда $(x^2 + 2x +3)' = 2x+ 2.$

5. Первичное закрепление изученного материала.

Задание 1 Вычислите значение производной функции в точках:

А) $f(x) = x^2+3x+1$ в т. $x_0 = 0; 3; 1.$

Б) $f(x) = \frac{x^2}{2}+1$, $x_0 = - 2; 1; - 1.$

Задание 2. Пользуясь определением найдите мгновенную скорость точки, движущейся по закону f (x), в момент времени x_0

А) $f(x) = - x^2 + 8x$, $x_0 =6$ сек. Б) $f(x) = 3x^3+2$ $x_0=2$ сек.

В) $f(x) = \frac{x}{4}$, $x_0=4$ сек.$\frac{x}{4}$ Г) $f(x) = 5x – 3$, $x_0= 10$ сек.

6. Запись домашнего задания.

Домашнее задание. Вычислить производные функций по определению и используя правила дифференцирования.

1) f (x) = x^3+x^2+x+1 в точке x_0= 3;   2) f (x) = $\frac{x}{2}$ +2 в точке x_0= 2;

3) f(x) = $\frac{x^2}{3}$+x   в точке x_0 =1 ; -1.

7. Итог урока.

Урок 2 Производная произведения, следствия. Производная многочлена, степенной функции.

ЦЕЛИ. Ввести в ходе занятия формулу для вычисления производной произведения, следствие из нее, показать как применяется формула на примерах. Формирование навыков вычисления производной степенной функции и многочлена.

Тип урока: комбинированный.

Ход занятия:

1. Организационный момент.
2. Постановка целей урока.
3. Проверка домашнего задания.
4. Актуализация опорных знаний.
5. Изложение нового материала.
6. Первичное закрепление изученного материала (решение задач)
7. Запись домашнего задания.
8. Итог урока.

1, 2. Организационный момент, постановка целей урока.

3,4. Проверка домашнего задания , актуализация опорных знаний

(*3 человека решают домашние примеры у доски, 1 – доказывает формулу – производная суммы, остальные в это время вычисляют производную функции* f*(x) = x^3+2x по определению 1 человек работает у доски).*

Вопросы для фронтальной работы:

1) Определение производной.
2) Смысл производной.

3) Производная от постоянной функции или числа.

4) Производная суммы.

5) Приращение аргумента и приращение функции.

5.Изложение нового материала.

5.1 Производная произведения.

Правило 2. Если функции U и V дифференцируемы в точке x_0, то и их произведение дифференцируемо в этой точке, и

$$(U\times V)' = U'\times V+U\times V'.$$

Следствие 1. Если функция U дифференцируема в точке x_0, а C – постоянная, то функция CU дифференцируема в точке x_0 и

$$(CU)' = CU'$$

Коротко говоря : постоянный множитель можно вынести за знак производной.

Доказательство:

$(C\,U)' = C'\,U + C\,U' = 0\,U+C\,U' = CU'$. $(CU)' = CU'$

Следствие 2. Если функции U и V дифференцируемы в точке x_0, то функция (U – V) дифференцируема в этой точке, и

$$(U - V)' = U' - V',$$

то есть производная разности равна разности производных.

Доказательство:

$(U - V)' = (U +(- V))' = U' +((- 1)\cdot V)' = U' +(-1)\cdot V' = U' - V'$,

$$(U - V)' = U' - V'.$$

5.2. Производная степенной функции.

Формула вычисления производной степенной функции x^α, где α – любое действительное число, такова –

$$\mathbf{(x^{\alpha})' = \alpha\cdot x^{\alpha-1}.}$$

Покажем правильность этой формулы на примерах.

1) Было показано, что $(x^2)' = 2x$, $(x^3)' = 3x^2$ (см. Урок 1).

2) Покажем, что $(x^4)' = 4x^3$

Доказательство: $(x^4)' = (x^2 \cdot x^2)' = (x^2)' \cdot x^2 + x^2 \cdot (x^2)' = 2x \cdot x^2 + x^2 \cdot 2x = 2x^3 + 2x^3 = 4x^3$.

$$(x^4)' = 4x^3.$$

Аналогично можно показать, что $(x^5)' = 5x^4$, $(x^6)' = 6x^5$ и так далее.

Если $\alpha = 0$, то $x^\alpha = x^0 = 0 \cdot x^{0-1} = 0$

$\alpha = 1$, то $x^\alpha = x^1 = 1 \cdot x^{1-1} = 1 \cdot x^0 = 1 \cdot 1 = 1$.

Выпишем все формулы:

$(x^1)' = 1 \qquad (x^2)' = 2x,$

$(x^3)' = 3x^2, \qquad (x^4)' = 4x^3,$

- - - - - - - -

$$\mathbf{(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}.}$$

Примеры:

А) $f(x) = 3x^5 + x^4 + 3x^2 + 1$

$f(x)' = (3x^5 + x^4 + 3x^2 + 1)' = (3x^5)' + (x^4)' + (3x^2)' + (1)' = 3(x^5)' + (x^4)' + 3(x^2)' + (1)' = 3 \cdot 5x^4 + 4x^3 + 3 \cdot 2x + 0 = 15x^4 + 4x^3 + 6x.$

Б) $f(x) = 3x^7 - \frac{5}{x^3}$

$f(x)' = (3x^7 - 5x^{-3})' = (3x^7)' - (5x^{-3})' = 3 \cdot (7x^6) - 5 \cdot (-3x^{-2}) = 21x^6 + 15x^{-2} = = 21x^6 + \frac{15}{x^2}$.

В) $f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + 5x^2 - 10,$

$$f(x)' = (\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + 5x^2 - 10)' = (\sqrt{x})' + (\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}})' + (5x^2)' - (10)' =$$

$$= (x^{\frac{1}{2}})' + \left(x^{\frac{-2}{3}}\right)' + (5x^2)' - (10)' = \frac{1}{2} \bullet x^{\frac{-1}{2}} + \left(-\frac{2}{3} \bullet x^{\frac{-5}{3}}\right) + 5 \cdot x^2 - 0 =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{2}{3\sqrt[3]{x^5}} + 10x = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{2}{3x\sqrt[3]{x^2}} + 10x.$$

6.Решение задач.

Задание 1. Вычислить производные функций:

f(x) = x^2+x^3; f(x) = $\frac{1}{x}+5x-2$; f(x) = x^2+3x-1;

f(x) = $x^3+\sqrt{x}$; f(x) = $x^3\cdot(4+2x-x^2)$; f(x) = $x^2\cdot(3x+x^3)$;

f(x) = $\sqrt{x}\cdot(2x-x)$; f(x) = $(2x-3)(1-x^3)$; f(x) = x^8+3x^4-x-5;

f(x) = $\frac{x}{3}-\frac{4}{x^2}+\sqrt[5]{x^3}$; f(x) = $x^7-4x^5+x\sqrt[7]{x^2}+x$; f(x) = $\frac{x^2}{2}+\frac{3}{x}-\frac{1}{x\sqrt{x}}$

Задание 2. Решите уравнение f′(x)= 0, если

f(x) = $2x^2-x$; f(x) = $\frac{3}{x^3}-1{,}5x-4x$;

f(x) = $\frac{-2}{3}\cdot x^3+x^2+12$; f(x) = $2x-5x^2$.

Задание 3. Вычислите f′(1), если

f(x) = $(\sqrt{x}+x^2)\cdot(2-\sqrt{x})$; f(x) = $\sqrt{x}\cdot(3x-x)$.

Задание 4. Задайте формулой три какие-нибудь функции, производная которых равна: а) $2x+3$; б) $8x-2$; в) $16x^3-0{,}4$; г) $9x^2-\frac{1}{2}$.

7.Запись домашнего задания. ***Домашнее задание.*** №№.41.12(а, б), 41.13(а), 41.15(а, г), 41.17(б).

8.Итог урока.

5.6. Виды, содержание, формы и методы контроля знаний и умений по теме «Производная»

В ходе изучения темы применяются такие формы контроля знаний, как домашняя работа, индивидуальные карточки, самостоятельные и проверочные работы, а также контрольная работа по теме «Производная и её приложения». Для более тщательного контроля над усвоением алгоритмов решения задач применяется классическая форма проведения контрольной работы.

При овладении алгоритмом нахождения наименьшего и наибольшего значения непрерывной функции *y = f(x)* на отрезке *[a,b] целесообразно:*

1) *разработать карточки* как раздаточный дидактический материал. Карточка должна содержать соответствующий алгоритм и пример, иллю-

стрирующий применение данного алгоритма к решению конкретной задачи, что обеспечивает работу учащихся по образцу;

3) составить самостоятельные работы в двух вариантах по данной теме.

Приведем *образец* данной *карточки* ниже (Таблица 1).

Далее покажем содержание самостоятельной работы.

Самостоятельная работа по теме

«Нахождение наибольшего и наименьшего значения функции»

Вариант I

Найдите наибольшее и наименьшее значения заданной функции на заданном отрезке: 1) $y = -\frac{8}{x}$, $x \in [\frac{1}{4}; 8]$; 2) $y = x^2 + 4x - 3$, $x \in [0; 2]$; 3) $y = x^3 - 9x^2 + 24x - 1$, $x \in [-1; 3]$.

Таблица 1

Образец карточки

№ шага	*Алгоритм нахождения наименьшего и наибольшего значения непрерывной функции $y = f(x)$ на отрезке $[a,b]$:*	*Пример применения алгоритма при решении задач* $f(x) = x^4 - 2x^2 - 3$, $[0,2]$
1.	Найти производную $f'(x)$.	$f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1)$
2.	Найти стационарные и критические точки функции.	$f'(x) = 0$, $4x(x^2 - 1) = 0$, $x = 0$ или $x^2 - 1 = 0$б $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$ – критические точки
3.	Выбрать критические и стационарные точки, лежащие внутри отрезка $[a, b]$.	$0, 1 \in [0,2]$
4.	Вычислить значение функции $y = f(x)$ в критических, стационарных точках (внутри данного отрезка) и на концах отрезка.	$f(1) = 1 - 2 - 3 = -4$, $f(0) = -3$, $f(2) = 16 - 8 - 3 = 5$
5.	Из найденных значений функции выбрать наибольшее и наименьшее.	$y_{наим} = f(1) = -4$, $y_{наиб} = f(2) = 5$

Вариант II

Найдите наибольшее и наименьшее значения заданной функции на заданном отрезке: 1) $y = \frac{3}{x}$, $x \in [0{,}3; 2]$; 2) $y = 2x^2 - 8x + 6$, $x \in [-1; 4]$;

3) $y = x^3 - 9x^2 + 15x - 3$, $x \in [-1; 3]$.

Решение заданий в карточках и в самостоятельных работах представлено в Приложении.

Кроме того, данная самостоятельная работа может быть проведена во время повторения темы «Применение производной для отыскания наибольших и наименьших значений функции» в 11 классе. Вместе с тем, карточка может быть использована учащимися также и при написании самостоятельной работы в качестве вспомогательного средства.

Приведем пример *контрольной работы по теме «Производная, её приложения»*.

Дается контрольная работа по вариантам, всего 2 варианта. Перед началом работы повторяются основные формулы, теоремы, определения (5-7 минут).

Вариант 1

1. Исследуйте функцию на экстремумы по первой производной $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2-4x+6$.

2. Дана функция $f(x)=3\sin\left(\frac{x}{3}-\frac{\pi}{6}\right)$, вычислите значение производной в точках x=0 и x=π.

3. Найдите производные функций.

а) $f(x)=x^8-\frac{2}{x^6}-\sqrt{x^5}+\lg e$; б) $f(x)=3^x\cdot\ln 5x$;

в) $f(x)=\frac{\cos 3x}{x}$; г) $f(x)=\sin^5 3x$.

4. Точка движется по закону $S(t)=3t^2+5t$ (м). Найдите скорость и ускорение точки в конце второй секунды после начала движения.

Вариант 2

1. Исследуйте функцию на экстремумы по первой производной $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x$.

2. Дана функция $f(x) = x - tg(-2x)$, вычислите значение производной в точках x=0 и x=π.

3. Найдите производные функций.

А) $f(x) = \sqrt{x^3} - \sqrt{x} - 3x^{18} + \ln\pi$; Б) $f(x) = \sqrt[3]{x} \cdot tgx$;

В) $f(x) = \dfrac{x}{\sin x}$; Г) $f(x) = \cos^4 2x$.

4. Найдите скорость и ускорение точки в момент времени t = 3 сек., если $S(t) = 4t^2 - 3$.

Решение заданий 1 варианта контрольной работы представлены в Приложении 6.

Таким образом, в данном параграфе представлены методические особенности формирования алгоритмического мышления на примере темы «Производная» в 10 классе по учебнику А.Г. Мордковича. Описан опыт учителей по теме; требования к уровню знаний и умений учащихся, раскрыты этапы формирования алгоритмического мышления на примере данной темы. Разработан проект изучения темы «Производная».

ВЫВОДЫ ПО ВТОРОЙ ГЛАВЕ

1. Представлены методические рекомендации по формированию алгоритмического мышления учащихся старших классов на примере тем курса алгебры и начала анализа. Приведены основные темы, при изучении которых могут быть созданы условия для формирования алгоритмического мышления учащихся.

2. Разработана методика формирования алгоритмического мышления учащихся на примере темы «Производная функции» по учебнику А.Г. Мордковича. Описан опыт учителей по теме; требования к уровню знаний и умений учащихся, раскрыты этапы формирования алгоритмического мышления на примере данной темы. Разработан проект изучения темы «Производная».

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сформулируем основные методы и полученные результаты:

1. Проведен анализ различных подходов к определению понятия «алгоритм». Определено, что алгоритм должен обладать такими свойствами, как массовость, дискретность шагов, детерминированность и результативность.

2. Выделены основные формы и виды представления алгоритмов и правил, этапы их изучения в школьном курсе математики. Алгоритм можно задать в нескольких формах: в виде таблицы, формулы, правила, определения, описания. Выявлено, что алгоритмы делят на алгоритмы распознавания и преобразования. Одним из распространенных способов записи алгоритмов является запись на языке блок-схем. В зависимости от вида используемых блок – схем, делятся на линейные, разветвленные и циклические.

3. Выявлены методические особенности формирования алгоритмического мышления учащихся на уроках алгебры в общеобразовательной школе. Установлено, что для формирования алгоритмического мышления в общеобразовательной школе учителю необходима подготовительная работа: выделить соответствующие темы; выполнить логико-математический анализ правил и алгоритмов; подобрать специальные упражнения с учетом этапов изучения алгоритмов и правил.

4. Представлены методические рекомендации по формированию алгоритмического мышления учащихся старших классов на примере тем курса алгебры и начала анализа. Приведены основные темы, при изучении которых могут быть созданы условия для формирования алгоритмического мышления учащихся.

5. Разработана методика формирования алгоритмического мышления учащихся на примере темы «Производная функции» по учебнику А.Г. Мордковича. Описан опыт учителей по теме; требования к уровню знаний и умений учащихся, раскрыты этапы формирования алгоритмического мышления на примере данной темы. Разработан проект изучения темы «Производная».

Все это дает основание считать, что задачи, поставленные в исследовании, полностью решены.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алгебра в 8 класс. Методическое пособие для учителей./ Под ред. Теляковского С.А. – М: Просвещение, 1977.

2. Алгебра и начала анализа: Учеб. для 10–11 кл. общеобразоват. учреждений. /А.Н. Колмогоров, А.М. Абрамов, Ю.П. Дудницын и др.; Под. ред. А.Н. Колмогорова. – М.: Просвещение, 2001. – 384 с.

3. Алгебра. 8 класс./Под ред. Виленкина Н.Я. - М: Просвещение, 1997.

4. Алгебра. 9 класс. / Под ред. Теляковского С.А. - М: Просвещение, 1994.

5. Алгебра. 9 класс. Учеб. для учащихся общеобразоват. учреждений / Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, И.Е. Феоктистов. — 7-е изд., испр. и доп. — М. : Мнемозина, 2008. — 447 с.

6. Алгебра: Учеб. Для 7 класса. / Алимов Ш.А., Ю.М. Колягин, Ю.В. Сидоров и др – М: Просвещение, 1999.

7. Алгебра: Учеб. Для 7 класса. общеобразовательных учреждений/ Под редакцией С.А. Теляковского – М: Просвещение, 2002.

8. Алгебра: Учеб. Для 8 класса. / Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, И.Е. Феоктистов. – М: Просвещение, 1991.

9. Алгебра: Учеб. Для 8 класса. общеобразовательных учреждений/ Под редакцией С.А. Теляковского – М: Просвещение, 1996.

10. Алгебра: Учеб. Для 9 класса. / Алимов Ш.А., Ю.М. Колягин, Ю.В.Сидоров и др – М: Просвещение, 1992.

11. Алимов Ш. А., Колягин Ю. М., Ткачева М. В. Алгебра и начала анализа. 10 – 11 класс: учебник для обучающихся общеобразовательных учреждений: базовый уровень / Ш. А. Алимов. – М.: Просвещение, 2012.

12. Беседа с учителями математики: Учеб.-метод. пособие / А.Г. Мордкович. – 2-е изд., доп. и перераб. – М.: ООО «Издательство Оникс»: ООО «Издательство «Мир и Образование», 2008. – 336 с.

13. Варпаховский К.М. Элементы теории алгоритмов. – М, 1997. – 24 с.

14. Вебер К. О математическом образовании в общеобразовательных школах // Математика в школе. – 1978. – № 2. – С. 45 – 48.

15. Виноградова Л.В. Методика преподавания математики в средней школе: учеб. пособие / Л.В. Виноградова. – Ростов-на-Дону: Феникс, 2005. - 252 с.

16. Галицкий М.Л., Гольдман А.Н., Завич Л.И. Курс алгебры 8-го класса в задачах// Журнал «Квантор», 1991.

17. Геометрия. 10 - 11 классы : учеб. для общеобразоват. учреждений: базовый и профил. уровни / Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев и др. — 18-е изд. — М.: Просвещение, 2009. - 255 с.

18. Геометрия. 7-9 классы Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф., Кадомцев С.Б., Юдина И.И. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 120 с.

19. Груденов Я.И. Изучение определений, аксиом, теорем: Пособие для учителя. – М., 1981. – 95 с.

20. Груденов Я.И. Совершенствование методики работы учителя математики. М.: Просвещение, 1990. – 224 с.

21. Давыдов В.В. Теория развивающего обучения. – М.: Академия, 2004. – 288 с.

22. Дидактические материалы по алгебре для 9 класса/ Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, Л.М. Короткова. – 5-е изд. – М.: Просвещение, 2000. – 160 с.

23. Искандарян С.И. Вопросы обучения младших школьников элементам алгоритмизации // Математика в школе. – 1979. – № 2. – С.52 – 53.

24. Кирсанова Г.Э. Использование алгоритмов при обучении математике // Сибирский учитель. – 2005. - № 2. – С. 12 – 15.

25. Копаев, А.В. О практическом значении алгоритмического стиля мышления / А.В. Копаев // Информационные технологии в общеобразовательной школе. – 2003. – №6. – С.6-11.

26. Лабораторные и практические работы по методике преподавания математики: учеб. пособие для студентов физ.-мат. спец. пед. ин-тов/ Е.И. Лященко, К.В. Зобкова, Т.Ф. Кириченко и др.; под ред. Е.И. Лященко. – М.: Просвещение, 1988. – 223 с.

27. Ланда Л.Н. Алгоритмизация в обучении. – М.: Просвещение, 1966.

28. Леонтьев А.Н. Деятельность. Сознание. Личность Текст / А.Н. Леонтьев. - М.: Политиздат, 1977. - 304 с.

29. Макаренков Ю.А. Что такое алгоритм? Беседы со старшеклассником / Ю.А. Макаренков, А.А. Столяр. – Минск: Нар. Асвита, 1989. – 127 с.

30.Математика и программирование: Универс. энцикл. / Худож. А.А. Шуплецов. – Мн.: ТОО «Харвест», 1996. – 528 с.

31. Математика: Учеб. Для 5 класса. Виленкин Н.Я., 17-е издание. – М: Мнемозина, 2005.

32. Математика: Учеб. Для 6 класса. Виленкин Н.Я., 17-е издание. – М: Мнемозина, 2005.

33. Методика и технологии обучения математике. Лабораторный практикум: учеб. пос. для студентов матем. факультетов пед. университетов / под науч. ред. В.В. Орлова. - М., «Дрофа», 2007. – 320 с.

34. Монахов В.М., Демидович Н.Б. Алгоритмы и программирование // Математика в школе. – 1976. – № 3. – С. 41 – 49.

35. Мордкович А. Г. Алгебра и начала анализа. 10 класс. В 2 ч. Ч. 2. Задачник для обучающихся общеобразовательных учреждений (профильный уровень) / Под редакцией А. Г. Мордковича. – М.: Мнемозина, 2009.

36. Мордкович А.Г. Алгебра и начала математического анализа. 10 - 11 классы. В 2 ч. Ч. 1. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений (базовый уровень) / А.Г. Мордкович. – 10-е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2009. – 399 с.

37. Мордкович А.Г. Алгебра. 7 – 9 кл.: Методическое пособие для учителя. – М.: Мнемозина, 2000. – 143 с.

38. Никольский С.М., Потапов М. К., Решетников Н. Н. Алгебра и начала анализа. 11 класс: учебник для обучающихся общеобразовательных учреждений: базовый и профильный уровни / С. М. Никольский. – М.: Просвещение, 2009.

39. Пенькова М.Е. Алгоритмы в математике [Электронный ресурс] / М.Е. Пенькова // Открытый урок. Первое сентября. - Режим доступа: http://festival.1september.ru/articles/602939/. – Последнее обновление 11.03.2017.

40. Примерные программы среднего (полного) общего образования: математика. Алгебра и начала анализа, геометрия: 10-11 классы / Е.А. Седова, С.В. Пчелинцев, Т.М. Мищенко и др., под общ. ред. М.В. Рыжакова. – М.: Вентана-Граф, 2012. – 136 с. – (Современное образование).

41. Рубинштейн С.Л. Проблемы общей психологии Текст. / С.Л. Рубинштейн. - М.: Изд-во «Педагогика», 1976. - 417 с.

42. Столяр А.А. Педагогика математики. 3-е изд. - Минск, 1986.

43. Сухотин А.К. Философия в математическом познании. - Томск, 1977.

44. Темербекова А.А., Чугунова И.В., Байгонакова Г.А. Методика обучения математике: учеб. пособие для студ. высш. учеб. Заведений / А.А. Темербекова. – Горно-Алтайск: РИО ГАГУ, 2013.

45. Теоретические основы обучения математике в средней школе: Учебное пособие / Т.А. Иванова, Е.Н. Перевощикова, Т.П. Григорьева, Л.И. Кузнецова; Под. ред. проф. Т.А. Ивановой. – Н. Новгород: НГПУ, 2003. 320 с.

46. Трегуб Л.С. Элементы современного введения в математику. Ташкент, 1973.

47. Федеральный государственный образовательный стандарт среднего (полного) общего образования: Приказ Мин. образования и науки РФ от

17.05.2012 г. №413. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://минобрнауки.рф/документы/2365. – Последнее обновление 11.05.2017.

48. Фридман Л.М. Как научиться решать задачи: кн. для учащихся старших классов средней школы. – М., 1989. – 192 с.

49. Хинчин А.Я. Педагогические статьи. - М., 1963.

50. Хрестоматия по общей психологии: Психология мышления / Под ред. Ю.Б. Гиппенрейтера, В.В. Петухова. – М., 1981. – 311 с.

51. Чада Б. Развивать алгоритмическую культуру учащихся // Математика в школе. – 1978 – № 4. – С. 62 – 63.

52. Чада Б. Развитие алгоритмической культуры учащихся // Математика в школе. – 1983. – № 2. – С. 62 – 63.

53. Kayama M., Satoh M., Kobayashi K., Kunimune H., Hashimoto M., Otani M. Algorithmic Thinking Learning Support Syste Based on Student-Problem Score Table Analysis [Text] / M. Kayama // International Journal of Computer and Communication Engineering. – Slovenia, 2015.

54. Kohei Arai, Anik Nur Handayani. Question Answering System for an Effective Collaborative Learning / Kohei Arai // International Journal of Advanced Computer Science and Applications. – United States, 2012.

55. Lampen, E. Teacher narratives in making sense of the statistical mean algorithm / E. Lampen // Pythagoras. – South Africa, 2015.

56. Mtetwa D., Mudehwe L., Minyira S. Learning mathematics for personal understanding and productions: A viewpoint / D. Mtetwa // Pythagoras. – South Africa, 2010.

57. Wallace D. Parts of the Whole: Learn More, Learn Better / D. Wallace // Numeracy. – United States, 2012.

Приложение 1

Ответы к системе упражнений, направленной на формирование алгоритма нахождения наименьшего и наибольшего значений непрерывной функции на отрезке

Таблица 2

Ответы к системе упражнений

№ заданий	Этапы изучения алгоритма		
	Первый этап	Второй этап	Третий этап
1	а) $14x - 7$; б) $12 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$; в) $\cos x$; г) $3x^2 + 10x^4$.	а) 6; - 9; б) – 1; - 32; в) 28; 3; г) 0,5; - 0,5.	12;12.
2	а) имеет $x = \frac{3}{4}$; б) не имеет; в) не имеет; г) $x = 0$ – критическая точка.	а) 173; - 2; б) – 43; - 72; в)173; 45; г) – 2; - 72;	18 см; 18 см.
3	а) – 2; 2; б) – 5; 5; в) $\frac{1}{2}$ - критическая точка; г) $\frac{\pi n}{3}$.	а) $y_{наиб} = \frac{\pi}{4}+1$; $y_{наим} = \frac{3\pi}{4} - 1$; б) $y_{наиб}$ не существует; $y_{наим} = -\frac{5}{27}$; в) $y_{наиб} = -2$; $y_{наим}$ не существует; г) $y_{наиб}$ не существует; $y_{наим} = -1$.	а) 6; - 0, 25; б) 8; $1\frac{3}{4}$.
4			3 ч 44 мин.

Приложение 2

Решение самостоятельной работы по теме «Нахождение наибольшего и наименьшего значения функции»

I Вариант

1. $y = -\frac{8}{x}$, $[\frac{1}{4}, 8]$;

$y' = \frac{8}{x^2}$; $y' = 0$; $\frac{8}{x^2} = 0$ – нет решений =>нет стационарных точек;

$y(\frac{1}{4}) = -\frac{8}{\frac{1}{4}} = -32$; $y(8) = -\frac{8}{8} = -1$;

$y_{наим\,[\frac{1}{4},\,8]} = y(\frac{1}{4}) = -32$; $y_{наиб\,[\frac{1}{4},\,8]} = y(8) = -1$;

Ответ: - 1; - 32.

2. $y = x^2 + 4x - 3$, $[0, 2]$;

$y' = 2x + 4$; $y' = 0$; $2x + 4 = 0$; $x = -2$;

$x = -2$ не принадлежит заданному отрезку;

$y(0) = -3$; $y(2) = 4 + 8 - 3 = 9$;

$y_{наим\,[0,2]} = y(0) = -3$; $y_{наиб\,[0,2]} = y(2) = 9$;

Ответ: 9; - 3.

3. $y = x^3 - 9x^2 + 24x - 1$, $[-1, 3]$;

$y' = 3x^2 - 18x + 24$; $y' = 0$; $3x^2 - 18x + 24 = 0$; $x^2 - 6x + 8 = 0$;

$D = 36 - 32 = 4$;

$x_1 = \frac{6+2}{2} = \frac{8}{2} = 4$; $x_2 = \frac{6-2}{2} = \frac{4}{2} = 2$;

$x = 2 \in [-1, 3]$; $x = 4$ не $\in [-1, 3]$;

$y(-1) = -1 - 9 - 24 - 1 = -35$; $y(2) = 8 - 36 + 48 - 1 = 19$;

$y(3) = 27 - 81 + 72 - 1 = 17$;

$y_{наим\,[-1,3]} = y(-1) = -35$; $y_{наиб\,[-1,3]} = y(2) = 19$;

Ответ: 19; - 35.

II Вариант

1. $y = \frac{3}{x}$, $[0,3; 2]$;

$y' = -\frac{3}{x^2}$; $y' = 0$; $-\frac{3}{x^2} = 0$ – нет решений =>нет стационарных точек;

$y\ (0,3) = \frac{3}{\frac{3}{10}} = 10$; $y\ (2) = \frac{3}{2} = 1,5$;

$y_{\text{наим }[0,3;2]} = y\ (2) = 1,5$; $y_{\text{наиб }[0,3;2]} = y\ (0,3) = 10$;

Ответ: 10; 1,5.

2. $y = 2x^2 - 8x + 6$, [-1, 4];

$y' = 4x - 8$; $y' = 0$; $4x - 8 = 0$; $x = 2$; $x = 2 \in [-1, 4]$;

$y\ (-1) = 2 + 8 + 6 = 16$; $y\ (2) = 8 - 16 + 6 = -2$; $y\ (4) = 32 - 32 + 6 = 6$;

$y_{\text{наим }[-1,4]} = y\ (2) = -2$; $y_{\text{наиб }[-1,4]} = y\ (-1) = 16$;

Ответ: 16; - 2.

3. $y = x^3 – 9x^2 + 15x – 3$, [-1, 3];

$y' = 3x^2 – 18x + 15$; $y' = 0$; $3x^2 – 18x + 15 = 0$; $x^2 – 6x + 5 = 0$;

D = 36 – 20 = 16;

$x_1 = \frac{6+4}{2} = \frac{10}{2} = 5$; $x_2 = \frac{6-4}{2} = \frac{2}{2} = 1$;

$x = 1 \in [-1, 3]$; $x = 5$ не $\in [-1, 3]$;

$y\ (-1) = -1 – 9 – 15 – 3 = -28$; $y\ (1) = 1 – 9 + 15 – 3 = 4$;

$y\ (3) = 27 – 81 + 45 – 3 = -12$;

$y_{\text{наим }[-1,3]} = y(-1) = -28$; $y_{\text{наиб }[-1,3]} = y(1) = 4$;

Ответ: 4; - 28.

Приложение 3

Решение самостоятельной работы по теме

«Уравнение касательной к графику функции»

I Вариант

1. $f(x) = x^2 – 3x + 5$, $a = -1$;

$f(a) = f(-1) = 1 + 3 + 5 = 9$; $f'(x) = 2x – 3$; $f'(a) = f'(-1) = -2 – 3 = -5$;

$y = 9 – 5(x + 1)$; $y = -5x + 4$.

Ответ: $-5x + 4$.

2. $f(x) = \frac{3x-2}{3-x}$, $a = 2$;

$f(a) = f(2) = \frac{6-2}{3-2} = 4$; $f'(x) = \frac{3(3-x)+3x-2}{(3-x)^2} = \frac{9-3x+3x-2}{(3-x)^2} = \frac{7}{(3-x)^2}$; $f'(2) = \frac{7}{(3-2)^2} = 7$;

$y = 4 + 7(x – 2)$; $y = 7x – 10$.

Ответ: $7x – 10$.

3. $y = 9 – x^2$;

Найдем точки пересечения графика данной функции с осью OX:

$9 – x^2 = 0$; $x^2 = 9$; $x_{1,2} = \pm 3$;

Составим уравнение касательной к графику функции . $y = 9 – x^2$ в точках $x_{1,2} = \pm 3$:

$f(3) = f(-3) = 0$; $f'(x) = -2x$; $f'(3) = -6$; $f'(-3) = 6$;

$y_1 = -6(x - 3) = -6x + 18$; $y_2 = 6(x + 3) = 6x + 18$.

Ответ: $-6x + 18$; $6x + 18$.

II Вариант

1. $f(x) = -x^2 – 7x + 8$, $a = 1$;

$f(a) = f(1) = -1 - 7 + 8 = 0$; $f'(x) = -2x – 7$; $f'(a) = f'(1) = -2 – 7 = -9$;

$y = 0 – 9(x - 1)$; $y = -9x + 9$.

Ответ: $-9x + 9$.

2. $f(x) = \frac{2x-5}{5-x}$, $a = 4$;

$f(a) = f(4) = \frac{8-5}{5-4} = 3$; $f'(x) = \frac{2(5-x)+2x-5}{(5-x)^2} = \frac{10-2x+2x-5}{(5-x)^2} = \frac{5}{(5-x)^2}$;

$f'(4) = \frac{5}{(5-4)^2} = 5;$

$y = 3 + 5\,(x - 4);\ y = 5x - 17.$

Ответ: $5x - 17$.

3. $y = x^2 - 3x;\ y = 4;$

$x^2 - 3x = 4;\ x^2 - 3x - 4 = 0;$

$D = 9 + 16 = 25;$

$x_1 = 4;\ x_2 = -1$

Составим уравнение касательной к графику функции . $y = x^2 - 3x$ в точках $x_1 = 4;\ x_2 = -1$:

$f(4) = f(-1) = 4\ f'(x) = 2x - 3;\ f'(4) = 8 - 3 = 5;\ f'(-1) = -2 - 3 = -5;$

$y_1 = 4 + 5\,(x - 4) = 5x - 16;\ y_2 = 4 - 5\,(x + 1) = -5x - 1.$

Ответ: $5x - 16$; $-5x - 1$.

Приложение 4

Ответы к системам упражнений на формирование алгоритмического мышления на примерах некоторых тем курса математики 5-9 классов

Таблица 3

Тема «Деление на десятичную дробь»

№ заданий	Этапы изучения алгоритма		
	Первый этап	Второй этап	Третий этап
1	а) 9; б) 58.	а) 1,6; б) 1,3; в) 23,5.	4,8 км.
2	а) 18; б) 501; в) 4570; г) 205.	а) 12,6; б) 0,23; в) 5,2; г) 3; д) 120.	а) x = 2,85; б) z = 13,86.
3	а) 2,3; б) 30,4; в) 0,007; г) 0,09375; д) 0,127.	62,5 км/ч.	29,12, т.; 37,44 т.; 20,8т.
4	а) 37,05; 628; 5; б) 235,78; 0,68; 30.	3,6 ч.	а) 13,66; б) 5,58; в) 0,7.
5			а) 3,75; б) 3,28125; в) 0,72.

Таблица 4

Тема «Нахождение наименьшего общего кратного»

№ заданий	Этапы изучения алгоритма		
	Первый этап	Второй этап	Третий этап
1	а) верно; б) неверно; в) верно.	а) $3 \cdot 5 \cdot 7$; б) $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$.	а) 135; б) 170.
2	*а*) 4; 8; 12; 16; *б*) –4; 16; *в*) 6.	а) 2700; б) 4410; в) 3300; г) 700.	
3	*а*) 16; 24; 32; 40; 48; 56; 64; 72; 80; 88; 96; *б*) 11; 22; 33; 44; 55; 66; 77; 88; 99; *в*) 48; 96; г) 99.	а) 24; б) 48; в) 792; г) 1980; д) 204; е) 9240.	60 дней.
4	*а*) 2; *б*) *3*; *в*) 8.	Да; 3510.	
5	Простые: 101, 409, 563, 863, 997; Составные: 121, 253, 561		
7	*а*) 25; 49; *б*) 27.		

Таблица 5

Тема «Разложения суммы и разности кубов на множители»

№ заданий	Этапы изучения алгоритма		
	Первый этап	Второй этап	Третий этап
1		а) $(x + y)(x^2 – xy + y^2)$; б) $(m – n)(m^2 + mn + n^2)$; в) $(2 + a)(4 – 2a + a^2)$; г) $(3 – y)(9 + 3y + y^2)$; д) $(t + 1)(t^2 – t + 1)$; е) $(1 – c)(1 + c + c^2)$.	а) $(y - x)(y^2 + yx + x^2)$; б) $– (2 + p)(4 – 2p + p^2)$; в) $(\frac{1}{2} - a^2)(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}a^2 + a^4)$; г) $- (\frac{1}{3} + b^2)(\frac{1}{9} - \frac{1}{3}b^2 + b^4)$; д) $(c^2 + 1)(c^4 – c + 1)$; е) $(x^2 + y^2)(x^4 + y^2x^2 + y^4)$.
2	*а*) $– 5a^4 + 2a^3 – a^2$; *б*) $– 4y^6 – 5y^5 – 3y^3 – 8$; *в*) $9x^2y – 8xy^2$.	а) $(2x – 1)(4x^2 – 2x +1)$; б) $(1+ 3y)(1 – 3y + 9y^2)$; в) $(2 –\frac{1}{2} a)(4 + a +\frac{1}{4} a^2)$; г) $(\frac{1}{4} m+10)(\frac{1}{16}m^2 – \frac{5}{2}m + 100)$; д) $(5a – 4b)(25a^2 +20ab + 16b^2)$; е) $(\frac{1}{3}x + \frac{1}{5}y)(\frac{1}{9} x^2–\frac{1}{15} xy + \frac{1}{25}y^2)$.	а) $(ab - 1)(a^2 b^2+ ab + 1)$; б) $(1 + xy)(1 – xy + x^2y^2)$; в) $(8- a^3c^3)(4+ 2ac + a^2c^2)$; г) $(mn + 3)(m^2 n^2- 3mn + 9)$; д) $(x^2 y - c)(x^4y^2 + x^2 y c+ c^2)$; е) $(a – mn^3)(a^2 + amn^2 + n^6)$.
3	*а*) $5x^3 – 13x – 7$; *б*) $– 2y^2 + y – 14$.	а) $(x + y^2)(x^2 – xy^2 + y^4)$; б) $(a^2 + b)(a^4 –a^2b+ b^2)$; в) $(m^3 – n)(m^6 + m^3n + n^2)$; г) $(p – k^3)(p^2 – pk^3 + k^6)$; д) $(a^2 + b^3)(a^4 –a^2b^3+ b^6)$; е) $(x^3 + y^3)(x^6 – x^3y^3 + y^6)$.	
4	*а*) $x^2 + 11x + 30$; *б*) $a^2 – 3a – 4$; *в*) $– y^2 + 10y – 16$; *г*) $6y^2 + y – 2$.		
5	*а*) $x^2 + 2xy + y^2$; *б*) $y^2 – 18y + 81$; *в*) $a^2 + 24a – 144$; *г*) $0,09 – 0,6m + m^2$.		
6	*а*) $2x^2 +3x + 9$; *б*) $4a^2$; *в*) $– 5b +14$.		

Таблица 6

Тема «Решение квадратного уравнения, используя формулу дискриминанта»

№ заданий	Этапы изучения алгоритма		
	Первый этап	Второй этап	Третий этап
1	а) да; б) нет; в) да; г) да.	а) $D = 1$, 2 корня; б) $D = -7$, нет корней; в) $D = 0$, 1 корень; г) $D = 1$, 2 корня;	а) $x_1 = 2$, $x_2 = -\frac{1}{5}$; б) $x_1 = 2$, $x_2 = -7$; в) $x_1 = 5$, $x_2 = -4$.
2	*а)* a = 5, b = - 9, c = 4; *б)* a = 1, b = 3, c = - 10; *в)* a = 6, b = 0, c = - 30; *г)* a = 9, b = 0, c = 0;	а) $x_1 = \frac{4}{3}$, $x_2 = 1$; б) $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{3}{5}$; в) $y_1 = \frac{7}{3}$, $x_2 = 2$; г) $y_1 = \frac{5}{2}$, $x_2 = 2$.	а) $x_1 = 1{,}7$, $x_2 = -\frac{1}{5}$; б) $x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{13}}{6}$.
3	*а)* $2x^2 - 3x - 1$, *б)* $8x^2 + 13x + 10$; *в)* $- x^2 - 8x$; *г)* $-5x^2 + 9\ 3x + 9$.	а) $y_1 = -1$, $x_2 = \frac{2}{5}$; б) $p = \frac{1}{9}$; в) $y_1 = 19$, $x_2 = -8$; г)нет решений.	а) $x_1 = 23$, $x_2 = -1$; б) $x_1 = \frac{7}{3}$, $x_2 = 2$; в) $x_1 = -2$, $x_2 = -6$.
4	*а)* $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{4}{3}$; *б)* $y_{1,2} = \pm\frac{1}{2}$; *в)* $x_1 = 0$, $x_2 = 2$; *г)* $x_1 = 0$, $x_2 = -9$.	а) $x_1 = 6$, $x_2 = 5$; б) $x_1 = 1$, $x_2 = -2$; в) $x_1 = 0$, $x_2 = 3$; г) $x_{1,2} = \pm 1$.	а) $x_1 = 0{,}56$, $x_2 = -0{,}36$; б) $y_1 = 1{,}59$, $y_2 = -1{,}26$.
5	*а)* $x_1 = 3$, $x_2 = 1$; *б)* $x_1 = \frac{5}{2}$, $x_2 = 2$;		а) $x = 7$; б) $x_1 = 2$, $x_2 = 0{,}6$.
6			а) $a_1 = 0{,}4$, $a_2 = -\frac{1}{15}$; б) $a_1 = 1{,}5$, $a_2 = 1$.

Таблица 7

Тема «Нахождения суммы n первых членов арифметической прогрессии»

№ заданий	Этапы изучения алгоритма		
	Первый этап	Второй этап	Третий этап
1	а) $x_1 = -4$, $x_2 = -1$, $x_3 = 2$, $x_4 = 5$, $x_5 = 8$; б) $x_1 = 2$, $x_2 = 5$, $x_3 = 10$, $x_4 = 17$, $x_5 = 26$; в) $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = \frac{2}{5}$, $x_3 = \frac{3}{7}$, $x_4 = \frac{4}{9}$, $x_5 = \frac{5}{11}$; г) $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 4$, $x_4 = 8$, $x_5 = 16$.	а) 36000; б) 1400.	а) 11325; б) 7070; в) 4905.
2	*а)* 10; *б)* 25; *в)* 34	а) 100; б) – 40; в) 52; г) – 72.	2387
3	*а)* $d = -50$, $c_3 = 140$ *б)* $d = 7{,}5$, $c_4 = -4$; *в)* $d = 3{,}5$, $c_1 = 12{,}5$.	а) $S_{50} = 5200$, $S_{100} = 20400$, $S_n = 2n(n + 2)\ n$; б) $S_{50} = 2700$, $S_{100} = 10400$, $S_n = (n + 4)\ n$.	55
4	*а)* $a_n = 3 + 5\ (n - 1)$; *б)* $a_n = -9{,}5 + 1{,}5\ (n - 1)$; *в)* $a_n = 7 + (n - 1)$; *г)* $a_n = 8{,}2 - (n - 1)$.	а) $n\ (n + 1)$; б) n^2.	122,5
5	28 м		15
6	*а)* 10; *б)* 0,6.		

Приложение 5

Решение системы упражнений, направленной на формирование алгоритма нахождения наименьшего и наибольшего значений непрерывной функции на отрезке

Первый этап

1) *а*) $y = 7 + 12x - x^3$;

$y' = 12 - 3x^2$; $y' = 0$; $12 - 3x^2 = 0$; $3x^2 = 12$; $x^2 = 4$;

$x_{1,2} = \pm 2$ – стационарные точки.

Ответ: $x_{1,2} = \pm 2$.

б) $y = \frac{x}{5} + \frac{5}{x}$;

$y' = \frac{1}{5} - \frac{5}{x^2}$; $y' = 0$; $\frac{1}{5} - \frac{5}{x^2} = 0$; $\frac{x^2 - 25}{5x^2} = 0$; $5x^2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$;

$x^2 - 25 = 0$; $x^2 = 25$;

$x_{1,2} = \pm 5$ – стационарные точки.

Ответ: $x_{1,2} = \pm 5$.

в) $y = \sqrt{2x - 1}$;

ОДЗ: $2x - 1 \geq 0$; $2x \geq 1$; $x \geq \frac{1}{2}$;

$y' = \frac{2}{2\sqrt{2x-1}} = \frac{1}{\sqrt{2x-1}}$; $y' = 0$; $\frac{1}{\sqrt{2x-1}} = 0$ – ни при каком значении x дробь не будет равна 0;

$x \neq \frac{1}{2}$; $x = \frac{1}{2}$ - критическая точка.

г) $y = 2 \sin 2x - \sin 4x$;

$y' = 4 \cos 2x - 4 \cos 4x$; $y' = 0$; $4(\cos 2x - \cos 4x) = 0$;

$\cos 2x - \cos 4x = 0$; $-2\sin 3x \sin(-x) = 0$; $2\sin 3x \sin x = 0$; $\sin 3x \sin x = 0$;

$\sin 3x = 0$ или $\sin x = 0$

$3x = \pi n$ $\qquad$ $x = \pi n$, $n \in Z$

x = $\frac{\pi n}{3}$, n ∈ Z – стационарная точка.

Ответ: x = $\frac{\pi n}{3}$, n ∈ Z

Второй этап

1) *в*) $y = x^2 - 8x + 19$, [-1, 5];

$y' = 2x - 8$; $y' = 0$; $2x - 8 = 0$; $2x = 8$; $x = 4$;

$x = 4 \in [-1, 5]$;

$y(-1) = (-1)^2 - 8(-1) + 19 = 1 + 8 + 19 = 28$;

$y(4) = (4)^2 - 8 \cdot 4 + 19 = 16 - 32 + 19 = 3$;

$y(5) = (5)^2 - 8 \cdot 5 + 19 = 25 - 40 + 19 = 4$;

$y_{наиб\,[-1,5]} = f(-1) = 28$; $y_{наим\,[-1,5]} = f(4) = 3$.

Ответ: 28; 3.

3) *б*) $y = x^3 - 2x^2 + 1$, [0,5; +∞);

$y' = 3x^2 - 4x$; $3x^2 - 4x = 0$; $x(3x - 4) = 0$;

$x = 0$ или $3x - 4 = 0$;

$x = \frac{4}{3}$

Заданному лучу [0,5; +∞) принадлежит лишь точка $x = \frac{4}{3}$.

При $x < \frac{4}{3}$ имеем $y' < 0$, а при $x > \frac{4}{3}$ имеем $y' > 0$. Значит, $x = \frac{4}{3}$ - точка минимума функции, причем $y_{max} = f\left(\frac{4}{3}\right) = \left(\frac{4}{3}\right)^3 - 2\left(\frac{4}{3}\right)^2 + 1 = \frac{64}{27} - 2 \cdot \frac{16}{9} + 1 = \frac{64}{27} - \frac{32}{9} + 1 = \frac{64-96+27}{27} = -\frac{5}{27}$.

Поскольку $x = \frac{4}{3}$ - единственная точка экстремума функции на заданном промежутке, причем точка минимума, то $y_{наим} = y_{max} = f\left(\frac{4}{3}\right) = -\frac{5}{27}$.

Ответ: $y_{наим} = -\frac{5}{27}$.

Третий этап

1) $\begin{cases} a + b = 24 \\ ab = max \end{cases}$; $\begin{cases} a = 24 - b \\ 24b - b^2 = y \end{cases}$;

y'=24 – 2b; y' = 0; 24 – 2b = 0; b = 12;

y(12) = 144; b = 12; a = 12.

Ответ: 12; 12.

3)

б) $y = x^2 - 4x + 5 + |1 - x|$, [0,4];

Если $x \le 1$, то $|1 - x| = 1 - x$, и функция принимает вид : $y = x^2 - 5x + 6$; если $x > 1$, то $|1 - x| = x - 1$, и функция принимает вид : $y = x^2 - 3x + 4$. Таким образом, речь идет о кусочной функции $y = f(x)$, где

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x + 6, \text{где } x \le 1; \\ x^2 - 3x + 4, \text{где } x > 1. \end{cases}$$

Вычисляя f '(x), мы должны учесть, что при x < 1 следует пользоваться формулой $f(x) = x^2 - 5x + 6$. Получим f '(x) = 2x – 5.

При $x > 1$ следует пользоваться формулой $f(x) = x^2 - 3x + 4$. Получим $f'(x) = 2x - 3$.

В «точке стыка» $x = 1$ производная не существует, это – критическая точка функции.

Итак, $f'(x) = \begin{cases} 2x - 5, \text{где } x < 1; \\ 2x - 3, \text{где } x > 1. \end{cases}$

Найдем стационарные точки, решив уравнение $f'(x) = 0$.

Если $x < 1$, то $f'(x) = 2x - 5$; из уравнения $2x - 5 = 0$ находим $x = \frac{5}{2}$.

Если $x > 1$, то $f'(x) = 2x - 3$; из уравнения $2x - 3 = 0$ находим $x = \frac{3}{2}$.

$x_1 = \frac{5}{2}$, $x_2 = \frac{3}{2} \in [0,4]$.

Находим значение функции в точках $x = 0$, $x = 1$, $x = \frac{5}{2}$, $x = \frac{3}{2}$, $x = 4$:

$y(0) = 6$;

$y(1) = 1 - 5 + 6 = 2$;

$y\left(\frac{5}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \frac{15}{2} + 4 = \frac{25-30+16}{4} = \frac{11}{4}$;

$y\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{2} + 4 = \frac{9-18+16}{4} = \frac{7}{4} = 1\frac{3}{4}$.

$y_{\text{наим }[0,\,4]} = y\left(\frac{3}{2}\right) = 1\frac{3}{4}$; $y_{\text{наиб }[0,\,4]} = y(0) = 6$.

Ответ: 6; $1\frac{3}{4}$.

4)

ЖД = 12; x – путь пешехода по дороге, y – путь пешехода по лесу (Рис. 1).

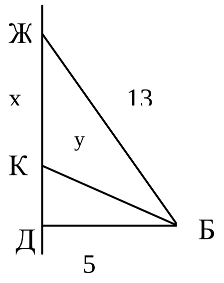


Рис. 1.

Суммарное время $t = \frac{x}{5} + \frac{y}{3}$; ДК = 12 – x;

По теореме Пифагора y = $\sqrt{25 + (12 - x)^2}$;

$t' = \frac{1}{5} + \frac{2x-24}{2\cdot 3\sqrt{x^2-24x+169}} = \frac{1}{5} + \frac{x-12}{3\sqrt{x^2-24x+169}}$;

$t' = 0$; $\frac{1}{5} + \frac{2x-24}{2\cdot 3\sqrt{x^2-24x+169}} = \frac{1}{5} + \frac{x-12}{3\sqrt{x^2-24x+169}} = 0$;

$\frac{3}{5}\sqrt{x^2 - 24x + 169} = 12 - x$;

$9x^2 - 9\cdot 24x + 9\cdot 169 = 25(144 - 24x + x^2)$;

$16x^2 - 384x + 2079 = 0$;

$x_1 = 8{,}25$; $x_2 = 15{,}75$ – не подходит;

$x = \frac{33}{4}$; $y = \sqrt{25 + 3{,}75^2} = \frac{25}{4}$; $t = \frac{33}{20} + \frac{25}{12} = \frac{56}{15} \approx 3$ часа 44 минуты.

Ответ: 3 часа 44 минуты.

Приложение 6

Решение варианта контрольной работы по теме

«Производная и её приложения»

Вариант 1

1. $f'(x) = x^2 - 3x - 4$

$f'(x) = 0$.

$x^2 - 3x - 4 = 0$

$x_1 = -1, x_2 = 4$

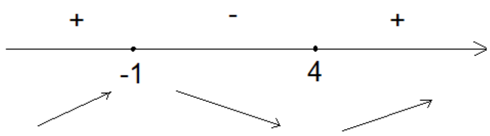


Рис. 2.

Нарисуем числовую прямую (Рис. 2.).

$f_{min} = f(4) = 12\frac{2}{3}$

$f_{max} = f(-1) = 8\frac{1}{6}$

1. $f'(x) = \cos(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{6})$

$f'(0) = \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$f'(0) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

2. *а)* $f'(x) = 8x^7 + \frac{12}{x^7} - \frac{5x^4}{2\sqrt{x^5}}$

б) $f'(x) = 3^x ln3 \cdot ln5x + \frac{3^x}{x}$

в) $f'(x) = \frac{-3x\sin 3x - \cos 3x}{x^2}$

г) $f'(x) = 15\sin^4 3x \cos 3x$

3. $S'(t) = 6t + 5$

$S'(2) = 17$

Приложение 7

Решение систем упражнений, направленных на формирование алгоритмического мышления на примерах некоторых тем курса математики 5-9 классов

Алгоритм нахождения

суммы n первых членов арифметической прогрессии

Первый этап

1) *а*) $x_n = 3n - 7$ – формула n – го члена.

Найти пять первых членов прогрессии.

$x_1 = 3 * 1 - 7 = 3 - 7 = -4$; $x_2 = 3 * 2 - 7 = 6 - 7 = -1$;

$x_3 = 3 * 3 - 7 = 9 - 7 = 2$; $x_4 = 3 * 4 - 7 = 12 - 7 = 5$;

$x_5 = 3 * 5 - 7 = 15 - 7 = 8$.

г) $x_n = 2^{n-1}$ – формула n – го члена.

Найти пять первых членов прогрессии.

$x_1 = 2^{1-1} = 2^0 = 1$; $x_2 = 2^{2-1} = 2^1 = 2$; $x_3 = 2^{3-1} = 2^2 = 4$; $x_4 = 2^{4-1} = 2^3 = 8$;

$x_5 = 2^{5-1} = 2^4 = 16$.

2) а) $x_n = 7 - 2n$ – формула n – го члена; $x_n = -13$. Найти n.

$7 - 2n = -13$; $-2n = -13 - 7$; $-2n = -20$; $n = 10$. Ответ: $n = 10$.

в) $x_n = 7 - 2n$ – формула n – го члена; $x_n = -61$. Найти n.

$7 - 2n = -61$; $-2n = -61 - 7$; $-2n = -68$; $n = 34$. Ответ: $n = 34$.

3) а) (c_n) – арифметическая прогрессия; $c_1 = 240$, $c_2 = 190$.

Найти d, c_3.

$d = c_2 - c_1 = 190 - 240 = -50$; $c_3 = c_1 + d (n - 1)$;

$c_3 = 240 - 50 (3 - 1) = 240 - 100 = 140$.

Ответ: $d = -50$, $c_3 = 140$.

5) $a_1 = 7$, $d = 3$, $n = 8$. Найти a_8.

$a_8 = 7 + 3 (8 - 1) = 28$. Ответ: $a_8 = 28$.

б) *а*) $b_1 = 2$, $b_{10} = 92$. Найти d.

$b_{10} = 92$, $b_{10} = b_1 + d\,(10 - 1)$; $b_1 + 9d = 92$; $2 + 9d = 92$; $9d = 90$; $d = 10$.

Ответ: d = 10.

Второй этап

1) а) $a_1 = 10$, $a_{200} = 350$. Найти S_{200}.

$S_{200} = \frac{a_1 + a_{200}}{2} \cdot 200$; $S_{200} = (10 + 350)\,100 = 36000$. Ответ: $S_{200} = 360000$.

2) *в*) $a_1 = -2{,}6$, $a_2 = 0$. Найти S_8.

$d = a_2 - a_1 = 0 - (-2{,}6) = 2{,}6$; $a_8 = a_1 + 7d = -2{,}6 + 2{,}6 \cdot 7 = 15{,}6$;

$S_8 = \frac{a_1 + a_8}{2} \cdot 8$; $S_8 = (-2{,}6 + 15{,}6)\,4 = 52$. Ответ: $S_8 = 52$.

3) *а*) $x_n = 4n + 2$. Найти S_{50}, S_{100}, S_n.

$x_1 = 4 + 2 = 6$; $x_{50} = 200 + 2 = 202$; $x_1 = 400 + 2 = 402$;

$S_{50} = \frac{x_1 + x_{50}}{2} \cdot 50$; $S_{50} = (6 + 202)\,25 = 5200$;

$S_{100} = \frac{x_1 + x_{100}}{2} \cdot 100$; $S_{100} = (6 + 402)\,50 = 20400$;

$S_n = \frac{x_1 + x_n}{2} \cdot n$; $S_n = \frac{6 + 4n + 2}{2} \cdot n = 2n\,(2 + n)$.

Ответ: $S_{50} = 5200$, $S_{100} = 20400$, $S_n = 2n\,(2 + n)$.

4) а) $a_1 = 2$, $a_2 = 4$. Найти S_n. $a_n = 2n$; $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2+2n}{2}\, n = n(1 + n)$.

Ответ: $S_n = n(1 + n)$.

Третий этап

1) *а*) $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_{150} = 150$. Найти S_{150}. $S_{150} = \frac{a_1 + a_{150}}{2} \cdot 150$; $S_{150} = (1 + 150)$ 75 = 11325. Ответ: $S_{150} = 11325$.

2) $a_1 = 7$, $d = 15$. Найти S_{10-20}.

$a_9 = a_1 + 8d = 7 + 8 \cdot 15 = 127$; $S_9 = \frac{a_1 + a_9}{2} \cdot 9 = \frac{7+127}{2} \cdot 9 = 603$;

$a_{20} = a_1 + 19d = 7 + 19 \cdot 15 = 292$; $S_{20} = \frac{a_1 + a_9}{2} \cdot 20 = \frac{7+292}{2} \cdot 20 = 2990$

$S_{10-20} = S_{20} - S_9 = 2990 - 603 = 2387$. Ответ: $S_{10-20} = 2387$.

3) $c_7 = 18{,}5$, $c_{17} = -26{,}5$. Найти S_{20}.

$c_7 = c_1 + 6d$; $c_{17} = c_1 + 16d$;

$$\begin{cases} c_1 + 6d = 18{,}5 \\ c_1 + 16d = -26{,}5 \end{cases}$$

$c_1 = 18{,}5 - 6d$; $18{,}5 - 6d + 16d = -26{,}5$; $10d = -45$; $d = -4{,}5$;

$c_1 = 18{,}5 - 6(-4{,}5) = 45{,}5$; $c_{20} = 45{,}5 - 19 \cdot 4{,}5 = -40$;

$S_{20} = \frac{c_1 + c_{20}}{2} \cdot 20 = \frac{45{,}5 - 40}{2} \cdot 20 = 55$. Ответ: $S_{20} = 55$.

4) $a_1 = 4{,}9$; $d = 9{,}8$; $n = 5$. Найти S_{20}.

$a_5 = a_1 + 4d = 4{,}9 + 4 \cdot 9{,}8 = 44{,}1$; $S_5 = \frac{c_1 + c_5}{2} \cdot 5 = \frac{4{,}9 + 44{,}1}{2} \cdot 5 = 122{,}5$.

Ответ: $S_5 = 122{,}5$.

5) $a_1 = 1$; $d = 1$; $S_n = 120$. Найти n.

$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$; $a_n = a_1 + d(n - 1)$; $a_n = 1 + n - 1 = n$; $S_n = \frac{1+n}{2} \cdot n = 120$;

$n(n + 1) = 240$; $n^2 + n - 240 = 0$.

$D = 1 + 960 = 961$; $\sqrt{D} = 31$. $n_1 = \frac{-1+31}{2} = 15$; $n_2 = \frac{-1-31}{2} = -16$;

Так как число n должно быть положительным, то n = 15. Ответ: n= 15.

Алгоритм нахождения наименьшего общего кратного

Второй этап

1) *а*) НОК(*a*,*b*) = 3*5*7.

б) НОК(*a*,*b*) = 2*2*3*3*3*5*7.

2) *в*) НОК(*a*,*b*) = 2*2*5*5*11*3 = 3300.

г) НОК(*a*,*b*) = 2*2*5*5*7 = 700.

3) *г*) *a* = 396, *b* = 180; *a* = 396 = 2*2*3*3*11; *b* = 180 = 2*2*3*3*5; НОК(*a*,*b*) = 2*2*3*3*11*5 = 1980.

4) НОД (*a*, *b*) = 1 – числа 54 и 65 взаимно просты.

НОК(54, 65) = 2*3*3*3*5*13 = 3510.

Третий этап

1) б) 34 = 2*17; 170 = 2*5*17. НОК(34, 170) = 170.

2) *3)* НОК(15, 20, 12) = 2*2*3*5 = 60.

Ответ: через 60 суток теплоходы впервые снова уйдут в плавание.

Алгоритм разложения суммы и разности кубов на множители

Первый этап

2) *а*) $-a^4 + 2a^3 - 4a^4 + 2a^2 - 3a^2 = -5a^4 + 2a^3 - a^2$;

б) $1 + 2y^6 - 4y^3 - 6y^6 + y^3 - 5y^5 - 9 = -4y^6 - 5y^5 - 3y^3 - 8$;

в) $10x^2y - 5xy^2 - 2x^2y + x^2y - 3xy^2 = 9x^2y - 8xy^2$.

3) а) $(4x^3 - 5x - 7) + (x^3 - 8x) = 4x^3 - 5x - 7 + x^3 - 8x = 5x^3 - 13x - 7$;

б) $(5y^2 - 9) - (7y^2 - y + 5) = 5y^2 - 9 - 7y^2 + y - 5 = -2y^2 + y - 14$.

4) а) $(x + 6)(x + 5) = x^2 + 5x + 6x + 30 = x^2 + 11x + 30$;

б) $(a - 4)(a + 1) = a^2 + a - 4a - 4 = a^2 - 3a - 4$;

в) $(2 - y)(y - 8) = 2y - 16 - y^2 + 8y = -y^2 + 10y - 16$;

г) $(2y - 1)(3y + 2) = 6y^2 + 4y - 3y - 2 = 6y^2 + y - 2$.

5) а) $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$; б) $(y - 9)^2$ *б*) $= y^2 - 18y + 81$;;

в) $(a + 12)^2 = a^2 + 24a - 144$; г) $(0{,}3 - m)^2 = 0{,}09 - 0{,}6m + m^2$.

6) *а*) $(x - 3)^2 + x(x + 9) = x^2 - 6x + 9 + x^2 + 9x = 2x^2 + 3x + 9$;

б) $(2a + 5)^2 - 5(4a + 5) = 4a^2 + 20a + 25 - 20a - 25 = 4a^2$;

в) $(b - 4)^2 + (b - 1)(2 - b) = b^2 - 8b + 16 + 2b - b^2 - 2 + b = -5b + 14$.

Второй этап

1) *а*) $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$; *б*) $m^3 - n^3 = (m - n)(m^2 + mn + n^2)$;

в) $8 + a^3 = 2^3 + a^3 = (2 + a)(4 - 2a + a^2)$;

г) $27 - y^3 = 3^3 - y^3 = (3 - y)(9 + 3y + y^2)$; *д*) $t^3 + 1 = t^3 + 1^3 = (t + 1)(t^2 - t + 1)$;

е) $1 - c^3 = 1^3 - c^3 = (1 - c)(1 + c + c^2)$.

2) *а*) $8x^3 - 1 = (2x)^3 - 1^3 = (2x - 1)(4x^2 - 2x + 1)$;

б) $1 + 27y^3 = 1^3 + (3y)^3 = (1 + 3y)(1 - 3y + 9y^2)$;

в) $8 - \frac{1}{8}a^3 = 2^3 - (\frac{1}{2}a)^3 = (2 - \frac{1}{2}a)(4 + a + \frac{1}{4}a^2)$;

г) $\frac{1}{64}m^3 + 1000 = (\frac{1}{4}m)^3 + 10^3 = (\frac{1}{4}m + 10)(\frac{1}{16}m^2 - \frac{5}{2}m + 100);$

д) $125a^3 - 64b^3 = (5a)^3 - (4b)^3 = (5a - 4b)(25a^2 + 20ab + 16b^2);$

е) $\frac{1}{27}x^3 + \frac{1}{125}y^3 = (\frac{1}{3}x)^3 + (\frac{1}{5}y)^3 = (\frac{1}{3}x + \frac{1}{5}y)(\frac{1}{9}x^2 - \frac{1}{15}xy + \frac{1}{25}y^2).$

3) *а)* $x^3 - y^6 = x^3 - (y^2)^3 = (x + y^2)(x^2 - xy^2 + y^4);$

б) $a^6 + b^3 = (a^2)^3 + b^3 = (a^2 + b)(a^4 - a^2b + b^2);$

в) $m^9 - n^3 = (m^3)^3 - n^3 = (m^3 - n)(m^6 + m^3n + n^2);$

г) $p^3 + k^9 = p^3 + (k^3)^3 = (p - k^3)(p^2 - pk^3 + k^6);$

д) $a^6 + b^9 = (a^2)^3 + (b^3)^3 = (a^2 + b^3)(a^4 - a^2b^3 + b^6);$

е) $x^9 - y^9 = (x^3)^3 - (y^3)^3 = (x^3 + y^3)(x^6 - x^3y^3 + y^6).$

Третий этап

1) *а)* $-x^3 + y^3 = y^3 - x^3 = (y - x)(y^2 + yx + x^2);$

б) $-8 - p^3 = -(2^3 + p^3) = -(2 + p)(4 - 2p + p^2);$

в) $-a^6 + \frac{1}{8} = \frac{1}{8} - a^6 = (\frac{1}{2})^3 - (a^2)^3 = (\frac{1}{2} - a^2)(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}a^2 + a^4)$

г) $-\frac{1}{27} - b^6 = -(\frac{1}{27} + b^6) = -((\frac{1}{3})^3 + (b^2)^3) = -(\frac{1}{3} + b^2)(\frac{1}{9} - \frac{1}{3}b^2 + b^4);$

д) $c^6 + 1 = (c^2)^3 + 1^3 = (c^2 + 1)(c^4 - c + 1);$

е) $x^6 + y^6 = (x^2)^3 + (y^2)^3 = (x^2 + y^2)(x^4 + y^2x^2 + y^4).$

2) *а)* $a^3b^3 - 1 = (ab)^3 - 1^3 = (ab - 1)(a^2b^2 + ab + 1);$

б) $1 + x^3y^3 = 1^3 + (xy)^3 = (1 + xy)(1 - xy + x^2y^2);$

в) $8 - a^3c^3 = 2^3 - (ac)^3 = (8 - a^3c^3)(4 + 2ac + a^2c^2);$

г) $m^3n^3 + 27 = (mn)^3 + 3^3 = (mn + 3)(m^2n^2 - 3mn + 9);$

д) $x^6y^3 - c^3 = (x^2y) - c^3 = (x^2y - c)(x^4y^2 + x^2yc + c^2);$

е) $a^3 - m^3n^9 = a^3 - (mn^3)^3 = (a - mn^3)(a^2 + amn^2 + n^6).$

3) *а)* Доказать, что $(327^3 + 173^3) \vdots 500;$

$327^3 + 173^3 = (327 + 173)(327^2 - 327 \cdot 173 + 173^2) = 500(327^2 - 327 \cdot 173 + 173^2) \vdots 500 \Rightarrow (327^3 + 173^3) \vdots 500.$ ч.т.д.

Алгоритм решения квадратного уравнения,

используя формулу дискриминанта

Первый этап

3) б) $(3x + 2)^2 = (x + 2)(x - 3)$;

$9x^2 + 12x + 4 = x^2 - 3x + 2x - 6$; $9x^2 + 12x + 4 - x^2 + 3x - 2x + 6 = 0$;

$8x^2 + 13x + 10 = 0$.

4) *в*) Ответ: $x_1 = 0$, $x_2 = 2$.

5) *а*) Ответ: $x_1 = 3$, $x_2 = 1$.

Второй этап

2) Ответ: $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{3}{5}$.

3) Ответ: $x = \frac{1}{9}$.

4) Ответ: при $x_1 = 6$ и $x_2 = 5$ трехчлен $x^2 - 11x + 31$ принимает значение, равное 1.

Третий этап

1) Ответ: $x_1 = 5$, $x_2 = -4$. **2)** Ответ: $x_1 = 1{,}7$, $x_2 = -0{,}2$.

3) Ответ: $x_1 = 23$, $x_2 = -1$. **5)** Ответ: равенство $\frac{1}{7}x^2 = 2x - 7$ верно при $x = 7$.

6) *а*) $3a + 0{,}6 = 9a^2 + 0{,}36$; $9a^2 + 0{,}36 - 3a + 0{,}36 = 0$; $9a^2 - 3a - 0{,}24 = 0$;

$D = b^2 - 4ac = 9 - 4\cdot9\cdot(-0{,}24) = 9 + 8{,}64 = 17{,}64$; $D > 0$ – уравнение имеет два корня; $a_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$; $a_1 = \frac{3+4{,}2}{18} = 0{,}4$; $a_2 = \frac{3-4{,}2}{18} = -\frac{1}{15}$.

Ответ: равенство $3a + 0{,}6 = 9a^2 + 0{,}36$ верно при $a_1 = 0{,}4$ и $a_2 = -\frac{1}{15}$.