МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Тольяттинский государственный университет»

Институт математики, физики и информационных технологий
(наименование института полностью)
Кафедра «Алгебра и геометрия»
(наименование кафедры)
44.04.01 «Педагогическое образование»
(код и наименование направления подготовки, специальности)
«Математическое образование»
(направленность (профиль)/специальность)

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

на тему **« ДИФФЕРЕНЦИАЦИЯ ДОМАШНИХ ЗАДАНИЙ ПО МАТЕМАТИКЕ КАК СРЕДСТВО ПОВЫШЕНИЯ КАЧЕСТВА ОБУЧЕНИЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ШКОЛЫ»**

Студент Е.А. Большова ____________________

Научный
Руководитель д.п.н., профессор Р.А. Утеева ____________________

Руководитель программы д.п.н., профессор Р.А. Утеева ______________

«_____»_______ 2017 г.

Допустить к защите

Заведующий кафедрой д.п.н., профессор Р.А. Утеева ______________

«_____»___________2017 г.

Тольятти 2017

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В современной концепции развития математического образования в Российской Федерации в числе основных проблем выделены *проблемы мотивационного характера*, состоящие в низкой учебной мотивации школьников и студентов, а также *проблемы содержательного характера* (содержание математического образования на всех уровнях устаревает и остаётся формальным, не связанным с реальной жизнью, а также нарушена преемственность между его уровнями) [45].

С другой стороны, необходимо предоставить каждому обучающемуся независимо от места и условий проживания возможность достижения соответствия любого уровня подготовки с учетом его индивидуальных потребностей и способностей. Возможность достижения необходимого уровня математического образования должна поддерживаться индивидуализацией обучения, использованием электронного обучения и дистанционных образовательных технологий.

Таким образом, предполагается обязательная реализация дифференциации в обучении с целью повышения качества математического образования, мотивации обучающихся. Качество математического образования напрямую зависит от организации учебного процесса, в котором важную роль играет домашняя работа обучающихся. В условиях дифференцированного обучения уже недостаточно дифференцированного подхода только на уроках, необходима дифференциация и при организации домашней работы обучающихся. Дифференцирование домашних заданий может стать фактором обеспечения качества обучения и мотивации обучающихся.

В последние годы проблема *дифференцированного обучения* была рассмотрена в диссертационных исследованиях в аспекте: учёта индивидуальных особенностей обучающихся [22, 24, 44, 47, 70, 95], систематизации знаний обучающихся [68], методической подготовки учителя математики [30, 36, 66], организации контрольно-оценочной деятельности учителя и обучающихся [21, 86], организационно-педагогических условий обучения [46, 79].

Проблемы использования *дифференцированных* и *вариативных домашних заданий* рассмотрены в исследованиях А.Ф. Дергачевой (2001, при обучении физике) [31], О.Г. Зязевой (1998, при обучении химии) [42], при обучении математике Л.В. Степановой (1999) [88], Л.А. Филоненко (2004) [97]. Разработана методика *домашней работы* обучающихся по математике Е.А. Бакулиной (2012) [9]; разработана технология организации и проведения *домашних экспериментальных работ* при обучении О.В. Муртазиной (2004) [65].

Анализ исследовательских работ показал, что проблема *дифференциации* домашних заданий по математике занимает исследователей на протяжении многих лет. В методике обучения математике определено *понятие дифференцированного задания*, выделены *приёмы дифференциации заданий* по математике, *принципы дифференциации*, *виды* дифференцированных домашних заданий по математике, предлагаются новые формы и методы работы с ними. Сформулированы *требования* к отбору и конструированию дифференцированных заданий. Авторы научно-исследовательских работ показывают положительный опыт использования дифференцированных домашних заданий в соответствии с разработанной методикой обучения. Однако, можно отметить, недостаточное использование инновационных видов домашних заданий.

Можно констатировать, что в современных условиях обучения математике необходима *вариативность* организации домашней работы, в том числе с использованием информационных технологий, *инновационных видов домашних заданий*, что позволяет индивидуализировать обучение, повышает интерес к математике, мотивацию обучающихся и, как следствие, качество обучения.

Таким образом, ***актуальность*** темы исследования обусловлена сложившимся к настоящему времени ***противоречием*** между:

необходимостью *вариативности* в организации домашней работы и недостаточным методическим обеспечением на практике *дифференцированными* домашними заданиями по математике.

Указанные противоречия позволили сформулировать ***проблему диссертационного исследования:*** какова методика организации домашней работы с использованием дифференцированных домашних заданий в современных условиях обучения математике в общеобразовательной школе?

Объект исследования: процесс обучения математике обучающихся общеобразовательной школы.

Предмет исследования: методика организации домашней работы по математике с использованием дифференцированных домашних заданий при обучении в общеобразовательной школе.

Цель исследования заключается в выявлении методических особенностей дифференциации домашних заданий по математике для обучающихся общеобразовательной школы и разработке методики их реализации в современных условиях обучения математике.

Гипотеза исследования основана на предположении о том, что встраивание в систему домашней работы дифференцированных домашних заданий, построенных с учетом особенностей типологических групп обучающихся общеобразовательной школы, может повысить качество обучения математике.

Задачи исследования:

1. Выявить *теоретические основы* дифференциации домашних заданий по математике, а именно определить: понятие домашней работы; цели, задачи, функции, виды домашних заданий; понятие дифференцированных домашних заданий по математике, приёмы и принципы дифференциации; основные формы и методы организации домашней работы учащихся с использованием дифференцированных заданий; инновационные виды домашних заданий по математике с использованием информационных и

коммуникационных технологий и их роль в повышении качества обучения обучающихся общеобразовательной школы.

2. Выполнить анализ научно-педагогической и учебно-методической отечественной и зарубежной литературы по проблеме дифференциации домашних заданий при обучения математике обучающихся общеобразовательной школы.

3. На основе анализа существующих методик по проблеме исследования выявить методические особенности дифференциации домашних заданий по математике для обучающихся общеобразовательной школы.

4. Разработать систему дифференцированных домашних заданий по алгебре и началам анализа для обучающихся 10 классов общеобразовательной школы по теме «Преобразование тригонометрических выражений» и методику их реализации в современных условиях обучения математике с использованием инновационных видов домашних заданий.

5. Проверить экспериментально эффективность разных видов дифференцированных домашних заданий по математике, их влияние на качество обучения.

Теоретико-методологическую основу исследования составили основные положения концепции уровневой дифференциации обучения математике Р.А. Утеевой [94].

Для решения поставленных задач применялись следующие ***методы исследования*****:** анализ научно-педагогической и учебно-методической литературы; изучение, наблюдение и обобщение школьной практики; анализ собственного опыта работы в школе; анкетирование школьников и учителей; различные виды эксперимента по проверке основных положений исследования.

Основные этапы исследования:

1 семестр (2015/16 уч.г.): анализ ранее выполненных исследований по теме диссертации, анализ школьных и вузовских учебников, нормативных документов (стандартов, программ), анализ опыта работы школы по данной теме (на основе изучения научно-методической литературы и практики работы);

2 семестр (2015/16 уч.г.): определение теоретических и методических основ исследования по теме диссертации;

3 семестр (2016/17 уч.г.): разработка системы дифференцированных домашних заданий по теме «Преобразование тригонометрических выражений» для обучающихся 10 классов и методики их реализации в современных условиях обучения математике;

4 семестр (2016/17 уч.г.): оформление диссертации, корректировка ранее представленного материала, уточнение аппарата исследования, описание результатов экспериментальной работы, формулирование выводов.

Новизна исследования заключается в том, что нём осуществлен подход к организации домашней работы по математике на основе разработки системы дифференцированных заданий, построенных с учётом особенностей типологических групп обучающихся.

Теоретическая значимость исследования состоит в том, что в нем:

- определены методические особенности дифференциации домашних заданий по математике для обучающихся общеобразовательной школы;

- сформулированы методические рекомендации по внедрению дифференцированных домашних заданий в образовательный процесс в современных условиях обучения математике.

Практическую значимость результатов исследования составляют разработанная система дифференцированных домашних заданий по алгебре и началам анализа для обучающихся 10 классов общеобразовательной школы по теме «Преобразование тригонометрических выражений» и методика их реализации в современных условиях обучения математике с использованием инновационных видов домашних заданий.

На защиту выносятся:

1. Разработанная система дифференцированных домашних заданий по алгебре и началам анализа для обучающихся 10 классов общеобразовательной школы по теме «Преобразование тригонометрических выражений».

2. Методика их реализации в современных условиях обучения математике с использованием инновационных видов домашних заданий.

Достоверность результатов исследования обеспечивается обоснованностью исходной теоретико-методологической основы, использованием методов исследования, соответствующих целям и задачам диссертации.

Апробация результатов исследования осуществлена путем выступлений на: научно-методических семинарах преподавателей, аспирантов и студентов кафедры алгебры и геометрии ТГУ (декабрь 2015, июнь 2016, декабрь 2016, май 2017); научной студенческой конференции «Дни науки» Тольяттинского государственного университета (*диплом за 1 место* на первом этапе (2016), *диплом за 2 место* на первом этапе (2017)); VII Международной научной конференции «Математика. Образование. Культура» (г. Тольятти, ТГУ, 27-29 апрель 2015 г.); Международной научно-практической конференции «Математическое, естественнонаучное образование и информатизация» (г. Самара, СФ МГПУ, 22-23 октября 2015 г.); Всероссийской научно-практической конференции «Математика и математическое образование: современные тенденции и перспективы развития» (г. Саранск, Мордовский государственный педагогический институт им. М. Е. Евсевьева, 27 ноября 2015 г.); Всероссийской заочной научно-практической конференции «Естественно-научное и математическое образование: современные методики и инновации, опыт практического применения» (г. Москва, «Дрофа», 15 апреля 2016 г.); Международной научно-практической конференции «Математика: фундаментальные и прикладные исследования и вопросы образования» (г. Рязань, РГУ имени С.А. Есенина, 26-28 апреля 2016 г.); III Международной научной конференции «Актуальные проблемы обучения математике и информатике в школе и вузе в свете идей Л.С. Выготского» (г. Москва, МПГУ, 17 – 19 ноября 2016 г.); Международной научно-практической конференции «Актуальные проблемы естественнонаучного и математического образования» (г. Самара, СГСПУ, 2-3 декабря 2016 г.); VIII Международной научной конференции «Математика. Образование. Культура (к 240-летию со дня рождения Карла Фридриха Гаусса)» (г. Тольятти, ТГУ, 26-29 апреля 2017 г., *диплом за I место* в конкурсе «Моя магистерская диссертация»).

Экспериментальная проверка предлагаемой системы дифференцированных заданий и методики их реализации была осуществлена в период производственной, педагогической и преддипломной практик на базе кафедры алгебры и геометрии Тольяттинского государственного университета, НИЛ «Школа математического развития и образования - 5+» Тольяттинского государственного университета, а также в период работы учителем математики на базе МБУ школы №70 и МБУ лицея №19 г.о. Тольятти.

Основные результаты исследования отражены в 9 публикациях [12-20].

Магистерская диссертация состоит из введения, двух глав, заключения, списка литературы (111 наименований) и приложений.

ГЛАВА I. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ДИФФЕРЕНЦИАЦИИ ДОМАШНИХ ЗАДАНИЙ ПО МАТЕМАТИКЕ

§1. Различные подходы к понятию домашних заданий по математике

Одной из задач развития математического образования в Российской Федерации является модернизация содержания математического образования на всех уровнях исходя из потребностей обучающихся и потребностей общества [45]. Эффективность и качество обучения математике во многом зависит от того, насколько используемые учителем методы обучения соответствуют учебным целям и задачам на разных этапах урока и при организации домашней работы обучающихся. Домашняя работа является одним из основных видов учебной деятельности в образовательном процессе позволяющий достичь учителю и обучающимся необходимых результатов обучения. Посмотрим, как менялся взгляд на домашнюю учебную работу на протяжении времени.

Анализ научно – методической и педагогической литературы показал, что те или иные аспекты проблемы организации домашней работы рассматривали многие ученые в разные периоды развития отечественного образования.

В 1960 – 1990 гг. большинство исследователей акцентировали внимание на том, что *домашнее задание* – логическое продолжение урока, компонент процесса обучения, основным предназначением которого является закрепление умений и навыков, углубление и расширение знаний по учебному предмету, а так же развитие творческих способностей, личностных качеств, формирование у обучающихся самостоятельности, самообразования и самоконтроля [6, 27, 48, 49, 50, 60, 61, 78, 91, 100].

В 1990 – 2000 гг. были сформулированы *требования* к домашним заданиям, рекомендации по их выполнению, приёмы проверки (В.И Крупич, О.Б. Епишева) [37, С. 67]; представлены возможности использования домашних заданий в процессе формирования математических понятий (В.А Далингер, Г.И. Саранцев) [29, С. 54; 83]; разработаны *дифференцированные домашние задания* (В.А. Гусев, Р.А. Утеева) [32, 33, 34, 93]; выявлены *цели, функции, содержание*, место домашнего задания в обучении [26, 40, 51, 71, 89]; определена *роль домашних заданий* в повышении качества знаний (Р.Фахрутдинова) [96]; рассмотрены вопросы *методической подготовки учителя* к организации домашней работы обучающихся по математике (И.А. Новик, И.А. Бровка) [67, С. 142]; в педагогике раскрыта *учебно – воспитательная роль* домашней работы, значение дифференцирования домашних заданий (И.П. Подласый, В.А. Сластенин, И.Ф. Харламов) [72, 73, 98].

Отметим диссертационные исследования последних двадцати лет, посвященных домашней работе, в которых раскрываются: *проблемы* использования *дифференцированных и вариативных* домашних заданий при обучении (О.Г. Зязева, 1998; Л.В. Степанова, 1999; А.Ф. Дергачёва, 2001; Л.А. Филоненко, 2004) [31, 42, 88, 97], *технология* организации и проведения домашних экспериментальных работ при обучении учащихся (О.В. Муртазина, 2004) [65], *методические аспекты подготовки учителя* математики к использованию дифференцированных заданий (Н.В. Никаноркина, 2006) [66]; *концепция* формирования системы домашних заданий в современном образовательном процессе (Т.В Рогозина, 2011) [79], *методика домашней работы* учащихся по математике (Е.А. Бакулина, 2012) [9].

Таким образом, можно сделать вывод о том, что традиционное представление о домашней работе, как методе закрепления знаний, средстве формирования умений и навыков сменяет современный взгляд на *домашнее задание* как на комплекс самостоятельно выполняемых заданий, соответствующих содержанию обучения, деятельности учителя и обучающихся, реализуемый в вариативных условиях (место, приёмы, средства, время предъявления, выполнения и проверки).

В контексте методики обучения математике *домашнее задание* – многоаспектное явление, характеризующееся [9]:

1) формой организации познавательной деятельности обучающихся;

2) средством индивидуализации обучения;

3) как одна из форм самостоятельной работы обучающихся;

4) как один из видов учебного задания.

В процессе обучения математике в зависимости от содержания урока учителем определяются цели домашней работы обучающихся (таблица 1).

Таблица 1

Цели домашней работы

Тип урока	Цели домашней работы
Урок изучения нового материала	- Формирование новых знаний
Урок закрепления изученного материала	- Формирование знаний, умений и навыков - Применение знаний, умений и навыков - Закрепление изученного материала
Урок обобщения и систематизации знаний	- Обобщение и систематизация знаний - Повторение изученного материала
Урок проверки, оценки, коррекции знаний, умения и навыков	Проверка знаний, умения и навыков

В научно-методической и педагогической литературе *цель домашней работы* в самом общем смысле состоит в расширении и углублении знаний и умений, полученных на уроках, развитии уникальности личности, творческих способностей обучающихся, формировании навыков самостоятельности и подготовки школьников к самообразованию, повторении и более прочном и глубоком усвоении учебного материала и его применение на практике [23, 35, 59, 62, 81].

Цели реализуют функции домашней работы, которые в свою очередь обуславливаются функциями обучения математике. Анализ методической, дидактической литературы, а также диссертационных исследований последних лет по проблеме организации домашней работы в области обучения математике показал, что исследователи выделяют следующие *функции домашней работы* [9, 61, 66, 68]*:*

- образовательную – изучение и закрепление знаний, умений и навыков;

- воспитательную – формирование целеустремлённости, ответственности, самостоятельности в процессе обучения, воспитание положительного отношения к науке и обучению в школе;

-развивающую – развитие творческих способностей, математических навыков и эрудиции, исследовательских умений, самостоятельности, умений работать с информацией;

-эвристическую – освоение в процессе обучения различных эвристик;

-прогностическую – умение выявлять проблемы и выдвигать гипотезы;

-эстетическую – приобщение учащихся грамотному, последовательному, системному изложению учебного материала, воспитание математической культуры и эстетики;

-интегрирующую – формирование понимания взаимосвязей между изучаемыми понятиями и способами деятельности;

-рефлексивную – формирование и развитие осознания собственной учебной деятельности, контроля и самоконтроля обучающихся;

-пропедевтическую – подготовка к изучению нового материала;

-информационную – работа с различными источниками информации, в том числе с ресурсами сети интернет;

-контролирующую (диагностирующую) – контроль за усвоением знаний, умений и навыков, самоконтроль;

-аксиологическую – индивидуализация и дифференциация обучения, реализация способов связи теории и практики;

-поисково-исследовательскую – развитие навыков самообразования и творческой самостоятельности, исследовательских умений.

Таким образом, *деятельность учителя* в организации домашней работы заключается в:

- *планировании* домашнего задания, т.е. в умении определять её цели;

- *подборе* соответствующего *содержания*, т.е. в правильном выборе типов и видов заданий, форм организации домашней учебной работы;

- *осуществлении контроля* домашней учебной деятельности;

- поддержании и *повышении мотивации* домашней учебной деятельности обучающихся.

Проблема организации домашней работы по математике становится всё более актуальной не только в России, но и зарубежом. Разные *аспекты домашнего задания* по математике (*цели, задачи, функции, социально-экономические условия обучающихся, этнографическая группа, половая и рассовая принадлежность* и т.д.) рассматривают учёные, методисты, практикующие учителя в разных уголках земного шара: в Европе, Азии, США и других континентах. Всех исследователей заботит один вопрос: как сделать домашнее задание наиболее эффективным, повысив при этом мотивацию к обучению и качество знаний учащихся. Рассмотрим какие исследования проводят зарубежные коллеги по этому вопросу.

1. В статье [108] даётся краткое изложение педагогических исследований *влияния домашнего задания на успеваемость* обучающихся средних школ США. Ван Вурхис (2011 г.) выявил путём аналитического исследования, влияние домашних заданий на успеваемость обучающихся: процентный *рост качества знаний* составил от 8% до 31%. В 2006 году Купер, Робинсон и Патал провели мета-анализ исследований домашних заданий, и, обнаружили, что существует положительная связь между объемом домашнего задания обучающихся и их успеваемостью. Противоположные

аргументы приводят исследователи Кон (2006 г.), Беннет и Калиш (2006 г.), Краловец и Бьюэлл (2000 г.) утверждая, что домашнее задание способствует отставанию обучающихся из неблагополучных семей, которые находятся в экономически трудных условиях. С другой стороны, эти же исследователи считают, что домашние задания могут быть эффективны в случае принятия школой политики по совершенствованию подготовки учителей организации домашней работы на основе новейших методик и технологий. Как указывалось, ранее, Купер ведущий эксперт по организации домашней работы в США и его коллеги (2006 г.) в тех же мета – аналитических исследованиях установили, что средний ученик в классе, которому задавалось домашнее задание, набирал в итоговом тесте *на 26% больше баллов*, чем средний ученик в классе, которому домашнее задание не задавалось. Примечательно, что при статистическом анализе, влияние домашнего задания на качество обучения учащихся школ сильнее выражено в 7-12 классах, нежели в начальных и 6 классах (Купер и со авт., 2006 г.; Марзано и Пикеринг, 2007 г.; Протеро, 2009 г.). Купер (2007 г.) к широким преимуществам домашнего задания относит формирование умений и навыков, самостоятельности, дисциплины, самоорганизацию учебного времени, вовлечение родителей в образовательный процесс (Купер, 2007 г.; Протеро, 2009 г.).

2. В настоящем исследовании была предпринята попытка выявить, в какой степени *объём* домашних заданий и *длительность* выполнения *домашней работы* по математике влияет на *самоэффективность* и *успеваемость* обучающихся средних школ разных стран, какие *средства* необходимы ученику средней школы для домашней работы, *роль расы, пола и социально-экономического статуса семьи* в этом отношении [103]. *Самоэффективность* определяется, как вера ученика в собственные способности выполнять что – либо на определенном уровне (Бандура, 1997 г.), т.е. в рассматриваемом исследовании *самоэффективность* – вера ученика в собственные способности выполнять домашнее задание на необходимом

уровне. Учитывая, что обучающиеся делают уроки во внеучебное время без непосредственного руководства и в сжатые сроки, исследователи рассматривают домашние задания как средство, которое может помочь учащимся развивать навыки саморегуляции и самоэффективности в процессе решения учебной задачи (Бембениту, 2009 г.; Китсантас и Циммерман, 2009 г.; Циммерман, Боннер и Ковач, 1996 г.). Однако, в других исследованиях, польза домашних заданий оспаривается и получены результаты, указывающие на то что обучающиеся из семей с более высоким социально-экономическим статусом имеют больше ресурсов и родители могут оказать своим детям необходимую помощь (Балли, Ведман и Демо, 1997). Кроме того, Траутвайн и соавт. (2002 г.) проанализировали серию опросов, проведенных среди 1976 обучающихся средних школ, и выявили, с одной стороны, что регулярные домашние задания по математике оказывают положительное влияние на математическую успеваемость, с другой – объёмные долгосрочные домашние задания такого влияние не имеют. Авторы предположили, что, когда обучающиеся получают большой объём домашних заданий по определённой теме, их мотивация к обучению снижается. Дополнительные исследования авторов показали, что такой объём домашних заданий приносит больше пользы для обучающихся с низкой успеваемостью. В результате практической реализации данного предположения, у учителей, которые назначали долгосрочные домашние задания слабоуспевающим ученикам в своих классах, разница между обучающимися с низкой и высокой успеваемостью становилась менее очевидной.

Другие исследователи (Кейт, Алмаз-Халам, и Файн, 2004 г.) изучили *эффект длительности* выполнения домашнего задания в школе и вне школы в рамках Национального Образования Продольного Исследования (НОПИ) набора данных в группе. Кейт и соавт. (2004 г.) показали, что выполнение длительных домашних заданий в школе имело относительно положительное влияние на успеваемость учеников, тогда как долгосрочные домашние задания вне школы давали незначительный эффект.

Многочисленные исследования документально подтверждают различия во влиянии домашнего задания на успеваемость обучающихся из разных этнических групп, иммигрантов с разным социально-экономическим статусом и половой принадлежностью (Олдос, 2006 г.; Плотник и Рамирез, 2008 г.; Траутвайн и соавт., 2002 г.). Полученные данные показывают, что время, затраченное на выполнение домашних заданий, различалось между обучающимися этнических групп (например, испанец, черный, и белый и т.п.) (Плотник и Рамирез, 2008 г.).

Авторы следующего исследования отметили, что *учебная самоэффективность* положительно влияет на выполнение домашних заданий (Пинтрич и Де Гроот, 1990 г.), особенно это касается девочек, которые имеют более высокую степень самоэффективности, своевременно завершая домашнее задание, нежели мальчики (Пахарес, 2001 г.). Результаты исследований в отношении расовых и гендерных различий относительно степени самоэффективности в математике неоднозначны (Шунк и Мис, 2005 г.). У «белых» учеников степень самоэффективности в математике выше, чем у афроамериканцев (Пахарес и Кранцлер, 1995 г.). Ученический уровень самоэффективности может также зависеть от ряда других факторов, таких как, например, социальная значимость семьи (Чанк и Мис, 2005 г.). А конкретно, чем выше социальная значимость семьи, тем более способна она оказать поддержку в обучении и повысить мотивацию обучающегося, которая влияет на степень самоэффективности и успеваемость.

3. В данном исследовании изучается *влияние* домашнего задания по математике *на успеваемость* обучающихся средней школы в Юго-Западной Нигерии [104]. Исследование представляет собой экспериментальный проект, в котором было выбрано 600 обучающихся из шести старших классов средней школы №1 из штатов Лагос, Огун, Ойо, Осун, Ондо и Экити с помощью стратифицированной техники случайной выборки. Обе группы были заранее протестированы с помощью математического теста из 30 пунктов, чтобы убедиться в их однородности. Группы обучались по единой

математической программе в течение четырех недель. Группе А (экспериментальная) давалось ежедневное домашнее задание, а группе Б (контрольная) не назначалось домашнее задание. Каждое домашнее задание представляло собой упражнение по материалам, пройденным в классе (из школьных учебников). После эксперимента была выявлена значительная разница между успеваемостью учеников, которым назначалось домашнее задание и которым не назначалось домашнее задание, в пользу первых. Было рекомендовано задавать обучающимся ежедневное домашнее задание и осуществлять систематический контроль за его выполнением и результатами.

4. В научно-исследовательской работе описывается опыт изучения *влияния совместной групповой* домашней работы по математики учащихся 6 класса США на успеваемость и отношение к учебному предмету [105]. Было выявлено, что совместные групповые занятия на уроках математики в классе дают положительные результаты, т.к. работая на уроке в небольших группах (3-4 человека) обучающиеся имеют возможность получать помощь друг от друга, особенно это актуально для учеников с низкими учебными способностями. Хорошо успевающие обучающиеся имеют возможность проявить лидерство в работе, обсуждая предположения по решению той или иной задачи с участниками других групп, выступая в роли инструкторов, помощников учителя. Таким образом каждый обучающийся имеет возможность работать в собственном темпе. Автор исследования решил продолжить данный вид учебной деятельности и в домашней работе обучающихся. Таким образом, обучающиеся работали в группах в классе и в тех же группах дома. Эксперимент продолжался около полутора месяцев (автор был вынужден прервать эксперимент по личным причинам). Подводя итоги тестирования обучающихся групп, автор не обнаружил резких изменений успеваемости обучающихся в какую-либо сторону, но *положительное отношение* к выполнению домашних заданий и *мотивация к обучению* резко *возросла*, т.к. ранее, до внедрения групповой домашней работы многие обучающиеся даже не смотрели задания на дом.

Исследователь планирует продолжать использовать совместной групповое обучение в домашней работе, меняя стратегию и методы такого обучения для повышения качества знаний и успеваемости в классе.

5. Домашнее задание по математике в данном исследовании рассматривается не как компонент целостного образовательного процесса, а с точки зрения социальных условий в которых находятся обучающиеся, т.е. социальные условия берутся в качестве основы построения технологии организации домашней работы [106]. Практикующий учитель США изучает *влияние социальных условий* на *мотивацию* обучающихся, и, как следствие, на *качество* выполнения домашних заданий по математике и успеваемость по предмету. Теоретическая концептуализация домашнего задания опирается на социальную теорию обучения Венгера (1998 г.), основанную на исследованиях социокультурной теории и этнографического изучения роли и значения математики в выполнении домашних заданий в жизни обучающихся средней школы. Исследовались два типа обучающихся: способные к математике и нуждающиеся в постоянной помощи. Наблюдения, беседы, анкетирования, тестирования показали прямую зависимость отношения к домашним заданиям и успеваемости от социокультурной среды обучающихся, которая формирует их индивидуальные особенности и взгляд на обучение в целом. Таким образом выявление личностных идей и взглядов, обучающихся позволит учителю найти новые способы мотивации к учебной деятельности, в частности, к выполнению домашней работы по математике и повысить качество знаний и успеваемость своих учеников. Продолжая исследование, автор определяет какие идеи являются личностно значимыми для учеников при выполнении домашнего задания [107]. Анализ выявил два взгляда на домашние задания по математике: обучающиеся, которые воспринимают домашние задания как способ всестороннего развития собственной личности и помогающий им в изучении математики и, обучающиеся, которые отвергают домашние задания, не видя в них смысл для своего дальнейшего обучения. Такой результат исследования подтолкнул

автора к постановке новых вопросов для изучения: каковы *способы и методы организации* домашней работы по математике с *разными группами* обучающихся (с точки зрения обученности и отношения к обучению)?

6. Основная цель следующего исследования состоит в изучении *отношения родителей* обучающихся к домашним заданиям в школах Малайзии [109]. Для исследования были случайным образом отобраны 723 семьи с детьми в возрасте 9 и 11 лет из 17 школ Малайзии. Результаты показали, что большинство родителей считают домашние задания полезными для своих детей. Они согласились, что выполнение домашних заданий помогает повысить успеваемость и развивает самостоятельность. Что касается времени, затраченного на выполнение домашнего задания, полученные результаты свидетельствуют, что дети проводят в среднем около 2 часов 32 минут в день за домашней работой. Около 90% родителей отметили, что они почти не обращаются к учителям за помощью при выполнении домашней работы. Результаты также показали, что лишь 48,9% родителей помогают своим детям с домашними заданиями. Авторы надеются, что выводы, полученные в данной работе, будут способствовать дальнейшим исследованиям и помогут внести вклад в работу над проблемами, связанными с организацией домашней работы в школах Малайзии.

7. Автор статьи, анализируя литературу по теории и методике преподавания математики, обращает внимание на тот факт, что *дифференцированное обучение*, учитывающее стили обучения, типы мышления и некоторые виды интеллекта позволяет достичь лучшего результата в обучении математике и *повысить успеваемость* обучающихся [110].

8. В этой статье автор размышляет о *значении домашнего задания* по математике в учебной деятельности школьника. Автор считает, что только *совместная методическая работа* над этой проблемой *учителей* и *родителей* поможет достичь высоких результатов в обучении математике [111].

Краткий обзор отечественной и зарубежной научно-педагогической литературы показал, что выполнение домашних заданий по математике позволяет сделать обучение математике более эффективным. Колоссальную роль в этом процессе играет мотивация обучающихся, которая напрямую зависит от многих факторов, таких как социально-экономический статус семьи, половая и расовая принадлежность, отношение родителей к обучению и, наконец, методика организации домашней работы учителем. Все эти факторы формируют индивидуальные особенности обучающихся и определяют их внутренние мотивы к обучению, которые и являются определяющими их успешности. Таким образом, можно сделать вывод о том, что учителю необходимо организовывать домашнюю работу учитывая индивидуальные особенности обучающихся, что повысит их мотивацию к обучению и как следствие качество знаний.

§2. Виды домашних заданий по математике

Качество математического образования напрямую зависит от организации учебного процесса, в котором важную роль играет домашняя работа обучающихся. Качество домашней работы в свою очередь зависит от качества классной работы и домашних заданий, которые получают школьники. Проблема организации домашней работы обучающихся занимает исследователей на протяжении уже многих лет. И.А. Гурина анализируя труды отечественных педагогов *дореволюционного периода* второй половины XIX – начала XX отметила, что в рассматриваемый период не только делался акцент на значимость занятий дома в повышении грамотности обучающихся, развитии их самостоятельности, кругозора, воли и настойчивости, но и приводились, а также практически реализовывались конкретные *рекомендации по организации* и методике выполнения *домашних самостоятельных работ*: определены их *функциональные задачи*, *содержательная база* (устные и письменные упражнения, выполнение творческих и практических работ), *объем*, и *продолжительность* соразмерно возрасту и подготовке обучающихся [28].

На практике для учителя математики актуальным остается вопрос о том, как организовать домашнюю работу обучающихся в соответствии с их уровнем обученности и обучаемости, повышая при этом мотивацию и качество знаний. Исходя из этого, возникает необходимость в разнообразных *видах домашних заданий.* Рассмотрим некоторые из них.

В научно-методической литературе середины и конца XX столетия [49, 61, 62] наряду с *традиционными* видами домашних заданий по математике (устные, письменные, практические) предлагается использования *домашних самостоятельных, индивидуальных работ, карточек-консультаций* (с указанием плана решения заданий) составленных в нескольких вариантах и *дифференцированных* по уровню сложности.

Существенную роль в воспитании волевых качеств личности, умения работать с книгой играют *домашние контрольные, самостоятельные и тестовые работы*, которые можно предлагать обучающимся наряду с текущими домашними заданиями. В таких заданиях нужно предусматривать задания не на простое воспроизведение изученного учебного материала, а на применение усваиваемых правил, алгоритмов, понятий в новых ситуациях, а так же комбинированное видоизменение изучаемого материала. Такие домашние задания должны быть обязательно *вариативны*, что позволяет осуществлять *дифференцированный* подход к обучающимся и, вместе с тем, обеспечивает самостоятельность их выполнения. Срок выполнения работ зависит от объема и степени трудности.

В статье Р. Фахрутдиновой [96] приведены виды домашних заданий: *домашние практические и лабораторные работы*; *домашние математические сказки и сочинения*; *составление математических задач* с подробным описанием организации учебной работы на конкретных темах школьного курса математики. Такие виды домашних заданий оказывают положительное влияние на развитие математического мышления, творческих способностей, эрудиции, расширяют кругозор, развивают фантазию, стремление к знаниям и поддерживают хорошее настроение обучающихся. Например, в процессе выполнения *домашней лабораторной работы* по математике обучающиеся, работая с наглядными пособиями, инструментами, графиками и таблицами, производя вычисления, «открывают» и формулируют новые математические определения. В процессе сочинения *математических сказок* у детей вырабатывается привычка мыслить самостоятельно, стремление к знаниям, они лучше ориентируются в необычной ситуации, проявляют творчество, фантазию, особенно те, кто в другое время просто бы не реагировал на урок. Создание математических сказок предполагает не только умение фантазировать на математические темы, но и умение владеть грамотной русской речью. При написании *сочинения* обучающиеся проделывают полезную работу – изучают учебную и научно-популярную литературу по теме, отбирают из большого материала необходимый минимум. Тематика сочинений разнообразна: история какого-нибудь вопроса, приложение математики в какой-нибудь области знаний, методы решения задач, обобщение какого-нибудь раздела программы, изучаемого в разных классах.

Домашняя работа школьников предполагает прежде всего *работу с учебником.* Тексты учебников содержат очень много терминов, специальных обозначений, графиков, часто написаны сложным для восприятия обучающихся языком, что затрудняет самостоятельную работу с текстами дома. Школьников необходимо научить ориентироваться в потоке информации. В начале обучения рекомендуется после изложения нового материала на уроке не только указать ученикам, какой параграф задается на дом, но и научить найти его, пользуясь оглавлением, найти и прочитать определения по теме, прочитать домашние задачи. Если подобную работу провести несколько раз, то обучающиеся научаться самостоятельно выделять главное в тексте, быстро ориентироваться в теоретическом и практическом материале. В статье А.В. Оглуздиной [69] предлагаются некоторые *приёмы работы с текстом учебника*: представление информации в *кластерах*, приём *«Таблица верных и неверных утверждений»*, *«синквейн»* и другие. Данные приёмы, по нашему мнению, применимы и для организации домашней работы, необходимо в дальнейшем разработать содержание самих заданий по темам школьного курса математики. Рассмотрим способы применения некоторых из них в домашней работе.

1. *Представление информации в кластерах*. Это способ графического представления информации, позволяющий сделать мыслительные операции более наглядными при изучении той или иной темы. Для этого необходимо в центре листа записать изучаемый (ключевой) термин (понятие) или математическое утверждение; затем вокруг набросать его характеристики (идеи, факты, образы, рисунки), в виде слов или предложений; получившиеся характеристики по мере появления соединяются линиями с центральным понятием и между собой по смыслу. Полученная структура, отображающая графически наши рассуждения, составляет информационное поле изучаемой темы. Кластер можно составлять как коллективно на уроке, так и самостоятельно, что позволяет обучающимся более глубоко вникнуть в суть прочитанного, а учителю даёт возможность по составленной структуре определить логичность полученных школьниками причинно-следственных связей и, в случае неверного понимания их, оказать индивидуальную помощь. Обучающимся можно предложить домашнее задание: составить кластер по ключевому понятию практически любой темы школьного курса математики (например, «Квадратное уравнение», «Четырехугольники, их признаки и свойства» и др.) после первого урока изучения данной темы.

2. Приём *«Таблица верных и неверных утверждений».* Это один из способов организации домашнего задания по самостоятельной работе школьников с текстом учебника. Обучающимся предлагаются верные и неверные утверждения (вопросы) по новой (незнакомой) теме. Необходимо

определить для каждого утверждения (или вопроса) используя соответствующий значок «+» - согласен, «-» - нет, «?» - сомневаюсь. В начале следующего урока используя результат домашней работы, осуществляется изучение новой темы.

3. *«Синквейн»* – приём, который позволяет коротко изложить материал по изучаемой теме. *«Синквей»* - французский термин, в переводе означает «пять». Другими словами, это стихотворение (без рифмы), которое состоит из пяти строк, в которых необходимо обобщить и систематизировать информацию по изученной теме. Это приём позволяет учителю добиться более глубокого понимания темы. После изучения нового понятия (определения, темы) учащимся можно предложить дома сочинить *«Синквейн».*

Правила составление *«Синквейна»:*

1. первая строка: именем существительным обозначается объект или изученная тема;

2. вторая строка: записываются характеристики темы двумя прилагательными (признаки или свойства объекта);

3. третья: описываются тремя глаголами действия, связанные с ними;

4. четвёртая: предложение из четырёх слов по теме;

5. пятая: существительное, связанное с первым, отражающее сущность темы.

В диссертационном исследовании [97] разработано содержание и подробно рассмотрены методические особенности проведения каждого *вида домашнего учебного исследования* предложенной классификации: решение *проблемно-поисковых задач*, самостоятельное *составление задач*, подготовка *математического сочинения*, выполнение *учебного проекта*.

В современной научно-педагогической и методической литературе выделены недостатки домашней учебной работы школьников, одним из которых является отсутствие разнообразия предлагаемых учителем видов домашних заданий, что ведет к постепенному снижению интереса обучающихся к предмету и мотивации к учебной деятельности. В связи с этим в последнее время в области обучения математике появляются *инновационные виды домашних заданий*, в том числе с использованием *информационных и коммуникационных технологий*, такие как *домашние проектные задания, расчётные и аттестационные домашние проекты*, *домашние эксперименты и учебные исследования*, домашние задания с использованием *социальных сетевых сервисов и видео-контента*, *электронные презентации* как вид домашнего задания. Раскроем содержание каждого из них.

Учебный проект представляет собой вид творческой работы обучающихся, в которой представлена разработка идеи, детальное рассмотрение практической задачи, лабораторное исследование и т.д., с последующим оформлением результатов и защитой (электронной презентацией). *Домашний учебный проект* предполагает прохождение этих же этапов, но лишь в домашних условиях, где обучающиеся работают самостоятельно и не имеют возможность постоянно обращаться за помощью к учителю. В качестве длительных домашних заданий предлагаются *расчётные и аттестационные учебные проекты* [4], возможности использования информационных технологий в *домашней проектной деятельности* рассматриваются автором [8]. В настоящее время существует достаточно много качественных электронных продуктов для изучения школьного курса математики («Живая геометрия», «1С: Математический конструктор», «GeoGebra» и др.). С помощью данных программ обучающиеся имеют возможность экспериментировать с данными моделями (изменять значения элементов фигур, величины углов и т.п.), формулировать и доказывать признаки и свойства геометрических фигур. Результатом решения заданий является интерактивная модель, которая демонстрируется на уроке (Приложение 1). Проект может выполняться как в групповой форме, так и индивидуально. Организация домашней работы подобным образом даёт широкие возможности учителю дифференцировать задания, подбирая их по уровню сложности, а также организовывать дифференцированную работу в группах (если это задания для групп обучающихся), определяя роль каждого ученика в работе над проектом.

Социальные сетевые сервисы как еще один вид домашней работы могут оказывать быстрое, эффективное, а главное, плодотворное содействие в учебе. Это связано с тем, что данный вид учебной работы обладает рядом особенностей и возможностей, которые не всегда присутствуют в других видах домашних заданий. Они уже нашли применение при организации дистанционного обучения и могут быть использованы при работе над домашними заданиями. Анализ интернет – источников показал, что в настоящее время существует множество самых разных *социальных сервисов*:

1) *образовательные социальные сети*, где учителя делятся своими идеями, учебно-методическими разработками (например, открытый класс, сеть творческих учителей);

2) *социальные хранилища*, позволяющие хранить различного вида данные (http://picasaweb.google.com, http://youtube.com, http://bobrdobr.ru и др.);

3) *сетевые офисы*, позволяющие создавать, редактировать и хранить различные документы в сети (http://docs.google.com, http://www.edmodo.com, http ://www .empressr. com и др.);

4) *коллективные гипертексты* – сервис, позволяющий любому пользователю участвовать в разработке веб-сайта, причём не только в качестве комментатора, но и в качестве автора и редактора (например, общероссийский образовательные проект Летописи, обучающая площадка для проведения тренингов, сетевых проектов);

5) *интерактивные доски онлайн, онлайн тестирования, анкетирования* и многие другие.

Условия использования в учебном процессе, особенности и возможности применения этих и многих других электронных ресурсов рассмотрены в статьях [7, 85].

Один из *сетевых сервисов – блог* в контексте домашней работы более подробно исследуется Н. Я. Салангиной, О. Л. Мнацаканян [82]. Домашняя работа в *блоге* позволяет индивидуализировать процесс обучения, способствует творческому подходу ученика к выполнению заданий, поскольку при работе в нем списать практически невозможно, да и неинтересно. В то же время ученик, испытывающий затруднения, всегда может посмотреть, как выполнили работу его товарищи, попросить о помощи и оперативно получить её. Использование *блога* позволят более эффективно формировать у учеников социальные и коммуникативные компетенции путем организации открытого обсуждения любого вопроса и принятия коллективного решения.

Демонстрация различных видео материалов при обучении математики используется учителями в основном для повышения мотивации обучающихся или наглядности, и практически не рассматривается с точки зрения дополнительного домашнего задания, например, при повторения пройденного учебного материала. В тоже время в сети интернет можно найти огромное количество видео-уроков, лекций и разнообразного интересного контента. К сожалению, мы не располагаем на уроках достаточным количеством времени, чтобы просматривать подобный материал, поэтому его можно предложить обучающимся в качестве домашней [41]. Один из таких *видео-контентов* http://interneturok.ru. Домашнее задание может звучать следующим образом: «посмотрите этот видеоматериал и ответьте на вопросы», «ознакомьтесь с данной лекцией, на следующем уроке мы обсудим её содержание», «сделайте конспект этого видео-урока» и т.д. Формулировки заданий могут быть разнообразными. Видеоролики рассчитаны примерно на 15-20 мин. Исходя из личного опыта, можно сказать, что обучающиеся с большим энтузиазмом относятся к подобным заданиям и с удовольствием приобщаются к современным технологиям в процессе обучения. Такие задания они находят полезными и в большинстве своём интересными.

Итак, можно констатировать, что в современных условиях обучения математике необходима *вариативность* организации домашней работы, в том числе с использованием *информационных технологий*, *инновационных видов домашних заданий*, что позволяет индивидуализировать обучение, повышает интерес к предмету. Использование того или иного вида домашнего задания обусловлено типом и целями урока. Только умелое сочетание домашних заданий позволит повысить качество знаний обучающихся, мотивацию к учебной деятельности и обеспечит хороший результат обучения.

§3. Дифференцированные домашние задания по математике и их роль в повышении качества обучения

На современном этапе развития школьного математического образования ориентация на личность является необходимым условием осуществления образовательного процесса, развивающего и учитывающего индивидуальные особенности обучающихся. *Дифференциация обучения* является одним из путей реализации личностно-ориентированного обучения математике, позволяющая обучающимся получать математическую подготовку разного уровня в соответствии с их индивидуальными особенностями и интересами. Эффективность и качество обучения математике во многом зависит от того, насколько используемые учителем задания и методика работы с ними соответствуют учебным целям и задачам на разных этапах урока и при организации домашней работы обучающихся. *Дифференцированные домашние задания* можно рассматривать как одно из средств достижения образовательных целей, повышения качества обучения математике.

В последние годы в связи с расширением информационного пространства и использованием социальных сетевых сервисов в исследованиях по проблеме *дифференциации учебных заданий* по математике можно отметить значительное *разнообразие* предлагаемых *форм и методов* работы с ними как в классной, так и в домашней работе. Перед учителями открылись новые образовательные горизонты, позволяющие мотивировать обучающихся, не только вовлекая их в процесс обучения, но и привлекая их в процесс организации классной и домашней работы, используя дифференцированные задания. Рассмотрим, что понимают под *дифференцированным заданием* в современной научно-методической и педагогической литературе, какая роль отводится при этом домашним заданиям, каким образом осуществляется дифференциация учебных заданий и процесс организации домашней работы с их использованием.

В методике дифференцированного обучения математике Р.А. Утеевой [92, С. 91] определяется понятие *дифференцированного задания* – задание по теме школьного курса математики, составленное с учётом особенностей типологической группы обучающихся и выполняемое обучающимися данной группы. *Типологическая группа* – группа обучающихся, которые объединены одинаковым фактическим уровнем знаний и умений по математике и достигающие одинакового уровня их усвоения [92, С. 88]. Выделены основные *приёмы дифференциации заданий* [92, С. 95]: усложнение числовых данных и вопросов для обучающихся групп А и В, углубляющих и расширяющих их знания и умения по изучаемой теме; разные формулировки одинаковых по содержанию задач; выполнение одинаковых заданий на разных уровнях усвоения и обобщения материала и проблемности; решение одинаковых заданий разными способами и методами. Сформулированы *приёмы дифференциации* учебных заданий по мере оказываемой учителем помощи [92, С. 95]: указание ответа (промежуточного или конечного), порядка действий в задании, общего принципа решения или образца по выполнению построений, рисунков или правила, определения, теоремы, которые необходимо использовать при решении заданий.

К *дифференцированным заданиям* Г.И. Саранцев относит многовариативные самостоятельные работы, а так же задания на специальных карточках (с указанным планом решения, по которому учитель консультирует обучающихся) [83, С. 98].

Авторы методики [62, С. 249] основным *принципом дифференциации* считают дифференциацию помощи обучающимся со стороны учителей. Отмечается эффективность использования *дифференцированных самостоятельных работ*, *карточек – консультаций*, в которых предусматривается оказание помощи со стороны учителя, а также задания повышенной трудности (3-4 варианта заданий). Такая работа может быть предложена как отдельным обучающимся, так и каждому (задания на карточках). По мнению авторов методики, *дифференциация* и *индивидуализация* в обучении математике означает использование методов и форм организации учебной деятельности с учётом индивидуальных особенностей обучающихся.

В методике преподавания математики [60] рассматривается один из *приёмов индивидуализации* обучения состоящий в дифференциации заданий для самостоятельных работ, в том числе предназначенных для домашней работы, по трём уровням трудности.

Необходимость *вариативности домашних заданий* отметили авторы методики [49]. Однако четких рекомендаций по данной проблеме не дано.

В учебниках по педагогике [72, 73, 98] подчеркивается необходимость *дифференциации домашних заданий* как для отдельных учеников, так и для групп обучающихся. Необходимость такой работы очевидна для всех обучающихся: исключение пробелов в знаниях по отдельным темам для неуспевающих учеников, выработка практических умений и навыков при решении тренировочных заданий, развитие творческих способностей путём решения заданий повышенной трудности у хорошо успевающих обучающихся.

В исследовании Т.Л. Овсянниковой (1998 г.) излагается *методика построения систем* предметных заданий и *дифференцированных заданий* к ним для трёх подгрупп обучающихся в соответствии с их учебными (высокими, средними, низкими) возможностями, определяемыми сочетанием уровней обученности и мотивации [68].

Л.В. Степанова (1999) [88] использовала *систему дифференцированных домашних заданий* по математике с целью развития творческой самостоятельности обучающихся. В структуре каждого *домашнего задания* выделяется *инвариантный* (базовое ядро) модуль набора заданий и *вариативная часть* заданий, которая определяет уровень. Учебные задания из инвариантной части определили *базовый* (обязательный) *уровень* подготовки обучающихся, учебные задания из вариативной части представляли собой *разноуровневые задания* составленные в соответствии с развитием творческой самостоятельности обучающихся. Были сформулированы требования к задачам вариативной части. Автор поясняет что наиболее эффективны и удобны в использовании оказались задания предоставляемые обучающимся на карточках, что является формой непосредственного обращения к школьнику. Совокупность указаний и вспомогательных заданий при решении основной задачи на карточке помогает при актуализации полученных ранее знаний, подготавливает обучающихся к творческой деятельности. Данные указания не содержат готовых ответов или решений, а так же планов или рецептов по выбору способа решения заданий. Подсказка во вспомогательной задаче заключается в её решении: решая самостоятельно вспомогательную задачу, школьники получают подсказку по решению основной задачи.

Н.В. Никаноркина (2006) [66] анализируя индивидуальные особенности обучающихся, определила *виды задач*, которые позволили учитывать определённые особенности: по способам формулировки; по составу исходных данных; по уровню усвоения учебного материала; по соотношению репродуктивных и творческих операций, приёмов анализа и синтеза при поиске решения задач; в зависимости от целей использования на уроке. Сформулированы *требования к отбору и конструированию задач* по теме при осуществлении *дифференциации* обучения (набор задач по теме должен быть полным, разнообразным, количество задач должно быть достаточным для всех типологических групп обучающихся для формирования у них прочных умений и навыков, задачи должны быть доступными и посильными, мера помощи должна быть продумана учителем и др.).

В *технологии дифференцированного обучения* учащихся 7–9 классов решению текстовых задач алгебраическим способом Т.К. Смыковской, Ю.А. Машевской, О.М. Вихляевой содержательный компонент представляет *цикл* взаимосвязанных *систем разноуровневых задач* [87]. *Разноуровневость* в данной технологии определяется *уровнем сложности* структуры задач и *уровнем трудности* решения задач. В систему задач входят типовые задачи, используемые в качестве источника, на их основе подбираются аналогичные задачи, необходимые для тренинга, далее, изменение данных в типовых задачах приводит к увеличению трудности решения и задачи с трансформацией условия (задачи с параметром).

Г.А. Атаманская предлагает *разделение* учителем обучающихся на *группы*: *базовую, прикладную и творческую* (исследовательскую) [5]. Обучающимися *базовой группы* выполняются основные виды типовых заданий по теме, обучающимися *прикладной группы* выполняются задания прикладного характера по изучаемой теме. Обучающиеся *творческо-исследовательской группы* изучают учебный материал на 2-3 урока вперед, самостоятельно, они формируют дидактический, раздаточный, прикладной материал темы, по итогам готовят доклад. Функции обучающихся разделяются: одни подбирают задачный материал, классифицируя по уровню сложности, другие подбирают дополнительный материал по теме (задачи прикладного характера, теоретическую информацию), третьи выступают с докладами, излагают интересные факты, четвертые осуществляют индивидуальную работу с отстающими обучающимися. Обучающиеся с высоким уровнем обучаемости будут задействованы в исследовательской деятельности, обучающиеся, не интересующиеся математикой, но любители естественнонаучных дисциплин, обретут смысл изучения предмета.

В статье [64] описывается опыт использования *дифференцированных тестовых домашних заданий* (для 10-ых классов, три уровня сложности). Дифференцированные тестовые задания *базового уровня* решают задачу систематизации базовых знаний и умений по темам курса алгебры в основной школе. Такие задания обычно решаются в одно или два действия. Тестовые задания *повышенного уровня* направлены на формирование у обучающихся способностей применять базовые знания при решении творческих задач. Тестовые задания *продвинутого уровня* сложности содержат двухшаговые и трёхшаговые задания и, как правило, при решении, требуют от обучающихся применения олимпиадных и нестандартных приёмов. По мнению авторов, тестовые домашние задания по математике дифференцированные по уровню сложности дают возможность определять уровень усвоения учебного материала обучающимися, диагностировать пробелы в знаниях и умениях в конкретных темах и восполнять эти пробелы, формируя у обучающихся самостоятельность и умение использовать собственные знания в практической деятельности.

М.А. Родионов, Н.Н. Храмова отмечают, что домашние задания должны быть дифференцированными не только в зависимости от уровня усвоенных знаний, но и в отношении интересов и склонностей школьников, должны быть ориентированы на освоение различных *познавательных стилей* обучающихся [80]. Индивидуализация домашних заданий может быть достигнута путём увеличения числа задач и упражнений для обучающихся какой-либо одной группы класса. Более ценными в методическом отношении представляются такие задания, которые являются общими для всего класса, но содержат дополнительные вопросы или задачи, расширяющие их основное содержание.

Автор статьи [82] считает целесообразным применение элементов *дистанционного обучения* и *сетевых социальных сервисов* как одно из средств индивидуализации и дифференциации обучения. Полезно планировать индивидуальные домашние задания в соответствии со способностями и уровнем подготовки ученика или предоставлять возможность выбора заданий, отличающихся уровнем сложности и оценкой за их выполнение; можно давать *задание из двух частей*, первая из которых будет общей для всех обучающихся, а вторая, более трудная или творческого характера, выполняется учениками по желанию, но в случае правильного выполнения обязательно оценивается.

Проблема организации контроля и проверки домашних заданий рассматривается с точки зрения возможности использования индивидуального подхода к каждому учащемуся [23]. Предлагается внедрение в учебный процесс *автоматизированной системы обучения и контроля,* которая позволит формировать *индивидуальные домашние работы* на основе прогресса обучения ученика, истории выполненных контрольных и домашних заданий, других индивидуальных особенностей работы ученика, а также проверять решённые домашние работы. Таким образом, с учителя снимается вся обязанность по созданию, проверке и интеграции домашних заданий в учебный процесс и доставки заданий ученикам, так как все учебные задания предполагается размещать в общем удаленном доступе сети интернет. Автором представлен алгоритм составления домашних заданий по конкретной теме.

Итак, можно сделать вывод о том, что проблема дифференциации домашних заданий по математике занимает исследователей на протяжении многих лет. В методике обучения математике определено *понятие дифференцированного задания*, выделены *приёмы дифференциации* заданий по математике, *принципы дифференциации*, *виды* дифференцированных домашних заданий по математике, предлагаются новые *формы* и *методы* работы с ними. Авторы научно-исследовательских работ показывают положительный опыт использования дифференцированных домашних заданий в соответствии с разработанной методикой обучения. Однако, можно так же отметить, недостаточное методическое обеспечение дифференцированными домашними заданиями по математике в современных условиях информационного образовательного пространства с использованием инновационных видов домашних заданий. Данная проблема является темой нашего дальнейшего исследования.

Выводы по первой главе

При изучении *теоретических основ* дифференциации домашних заданий математике были сделаны следующие *выводы*:

1) *Домашнее задание* – комплекс самостоятельно выполняемых заданий, соответствующих содержанию обучения, деятельности учителя и обучающихся, реализуемый в вариативных условиях (место, приёмы, средства, время предъявления, выполнения и проверки).

3) *Дифференцированное домашнее задание* — это задание по теме школьного курса математики, составленное с учётом особенностей *типологической группы* обучающихся и выполняемое обучающимися данной группы.

4) *Система дифференцированных домашних заданий* должна удовлетворять *принципам* построения системы задач: полнота, целостность, взаимосвязанность, доступность и посильность, достаточность, соответствие дидактическим целям.

5) Отмечена недостаточность методического обеспечения дифференцированными домашними заданиями по математике в современных условиях информационного образовательного пространства с использованием *инновационных видов домашних заданий*, таких как *домашние проектные задания, расчётные и аттестационные домашние проекты*, *домашние эксперименты и учебные исследования*, домашние задания с использованием *социальных сетевых сервисов и видео-контента*, *электронные презентации*.

ГЛАВА II. МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ДИФФЕРЕНЦИАЦИИ ДОМАШНИХ ЗАДАНИЙ ПО МАТЕМАТИКЕ КАК СРЕДСТВА ПОВЫШЕНИЯ КАЧЕСТВА ОБУЧЕНИЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ШКОЛЫ

§4. Методические особенности конструирования домашних заданий по математике в условиях дифференцированного обучения

В методике обучения математике разделяют внешнюю и внутреннюю дифференциацию. Мы будем рассматривать внутреннюю дифференциацию обучения, основанную на учёте индивидуальных особенностей обучающихся, которые влияют на эффективное восприятие и усвоение информации в процессе обучения.

Технология *дифференцированного обучения* представляет собой комплекс организационных *средств* и *методов* дифференцированного обучения, на определённом этапе обучения [84, С. 442]. При реализации дифференцированного обучения формируются *типологические группы* обучающихся.

В дидактике и методике обучения учебным дисциплинам предлагается более двадцати критериев распределения обучающихся на группы (по успеваемости, устойчивости интереса и уровню познавательной самостоятельности, по уровню развития памяти, типа мышления, уровню выполнения мыслительных операций, темпераменту и т.д.) [83, С.168]. Разные авторы предлагают свои критерии деления на группы, их характеристики, формы и методы работы на уроке и дома, а также требования к дифференцированным заданиям [5, 10, 11, 38, 43].

Реализация *технологии дифференцированного обучения* предполагает: [102, С. 93]:

- изучение особенностей обучающихся, которые называются признаками дифференциации, например, дифференциация по темпераменту или уровню восприятия информации, или мотивам и уровням общего развития, уровням понимания и т.д.);

- разделение обучающихся на основании определённых признаков дифференциации в микрогруппы;

- организация учебного процесса микрогрупп обучающихся в соответствии с выделенными признаками дифференциации.

Итак, *концепция технологии дифференцированного обучения* [102, С. 105]:

- направлена на реализацию целей обучения, состоящих в обеспечении определённо построенного педагогического процесса;

- основывается на принципах: научности (применение современных научных достижений в области дифференцированного обучения), личностно-деятельностностных (разработка занятий на основе технологии дифференцированного обучения), природосообразности (ориентация при обучении на ученика);

- достигается через внешнюю и внутреннюю дифференциацию, контроль и управление качеством занятия;

- позволяет достичь успешности обучающихся в учебно-познавательной деятельности, создать здоровьесберегающую среду, гуманистическое мышление и гуманное поведение;

- находится в прямой зависимости от кадровых, информационных, временных ресурсов.

Остановимся на рассмотрении некоторых подходов к построению и реализации *технологии дифференцированного обучения* математике и определим некоторые *особенности конструирования* учебных заданий в условиях дифференцированного обучения.

Р.А. Утеева (1998 г.) на основе построенной *модели уровневой дифференциации обучения* (компоненты: содержательный, уровневый и организационный) разработала *технологию дифференцированного обучения* математике, в реализации которой определены этапы [95]:

1. Определение в классе (любого профиля) типологических групп обучающихся, по фактическому уровню знаний и умений обучающихся по предмету, разделу, теме и уровню их усвоения.

2. Определение в классе рабочих групп обучающихся двух видов: смешанного состава из обучающихся различных типологических групп и однородного состава из обучающихся одинаковой типологической группы.

3. Разработка содержания всех уровней знаний и умений (базового, продвинутого, высокого) по темам основной школы.

4. Подбор и разработка задач разных типов (алгоритмического, полуэвристического, эвристического) для всех уровней по темам основной школы.

5. Дифференциация заданий для типологических групп обучающихся на всех этапах изучения темы: усвоения учебного материала, формирования умений и навыков, обобщения и систематизации, контроля и проверки приобретенных знаний и умений.

6. Выбор доминирующей формы учебной деятельности обучающихся на этапе изучения нового материала.

В исследовании даётся определение и краткая характеристика *типологических групп* и сформулированы *приёмы дифференциации заданий*.

Т.Л. Овсянникова (1998 г.) рассматривает дифференцированные учебные задания как средство систематизации знаний [68]. Автор предлагает *методику построения* систем учебных заданий и *дифференцированных заданий* к ним для трёх подгрупп обучающихся соответствующих их учебным (высоким, средним, низким) возможностям, которые определяются уровнем обученности и мотивации.

Сформулированы *требования к системе циклов задач* и способы составления дифференцированных заданий к ним:

I. На этапе усвоения знаний:

1) задачи алгоритмического типа и учебные задания, способствующие усвоению алгоритмов решения этих задач;

2) при построении учитывается принцип целостности и непрерывного повторения;

3) состоят из трёх подсистем задач с планомерным возрастанием сложности алгоритма решения (при дифференцированном обучении).

II. На этапе обобщения и систематизации знаний:

1) полуэвристические и эвристические задачи и учебные задания, направленные на формирование способов их решения и способствующие систематизации знаний;

2) направлены на формирование элементов творческой деятельности;

3) составлены из задач не по нарастающему уровню сложности;

4) решение некоторых задач связано с необходимостью обращения к изученным ранее алгоритмам и сформированным способам деятельности;

5) состоят из трёх подсистем задач для трёх уровней обучения.

Л.В. Степанова (1999 г.) в своём исследовании определила *место домашней работы* и её *роль* в развитии творческой самостоятельности обучающихся 5-6 классов [88]. Поиск способов совершенствования в организации домашней работы обучающихся привёл к необходимости построения *системы дифференцированных домашних заданий.*

К системе домашних заданий сформулированы *требования*:

- необходимо актуализировать репродуктивные знания для стимулирования учебно-познавательной деятельности обучающихся;

- проводить специальную работу по развитию внимания, памяти, мышления;

- предлагать задания в соответствии с уровнем поисковой и творческой деятельности обучающихся;

- мотивировать обучающихся предложенными заданиями.

Определены *дидактические условия:*

- выполнение обучающимися разные типы учебных заданий поэтапно;

- планомерное усложнение от репродуктивной деятельности обучающихся к творческой;

- управление домашней работой школьников на всех этапах обучения;

- формирование и развитие творческой самостоятельности обучающихся при решении нестандартных учебных заданий;

- систематический контроль деятельности обучающихся.

В исследовании Л.А. Филоненко (2004 г.) решается задача формирования творческой самостоятельности обучающихся путём использования *творческих домашних заданий* в виде *учебных исследований*, которые реализуют развивающую функцию домашнего задания по математике [97]. Автор выделяет четыре уровня самостоятельности и соответствующие им виды учебной деятельности. Учитывая принципы системного подхода в познании (А.И. Уёмов) и принципы конструирования системы задач (Е.Н. Кабанова-Меллер, В.И. Крупич) сформулированы *требования к системе домашних учебных исследований:* целостность системы; соответствие дидактической цели каждого из компонентов системы; направленность системы учебных заданий на развитие творческой самостоятельности, формирование исследовательских умений и на планомерное возрастание уровня самостоятельности обучающихся; учебные исследования разрабатываются в соответствии с программным материалом и учебными возможностями обучающихся; постепенное возрастание уровня трудности учебных заданий.

Н.В. Никаноркина (2006 г.) рассматривает учебные задачи как основное средство дифференциации обучения [66]. Выделены *виды учебных задач*, на основе которых *конструируются дифференцированные задания*: по способам формулировки; по составу исходных данных; по уровню усвоения учебного материала; по соотношению репродуктивных и творческих операций, приёмов анализа и синтеза при поиске решения задач; в зависимости от целей использования на уроке.

Сформулированы *требования* к отбору задач:

1) полнота набора задач;

2) разнообразие набора задач (всех перечисленных автором видов);

3) достаточность количества задач для всех типологических групп обучающихся;

4) однотипных задач должно быть разумное количество;

5) доступность и посильность для выполнения обучающимися;

6) организация помощи со стороны учителя должна быть продумана для всех типологических групп;

7) подбор индивидуальных заданий для работы с отдельными обучающимися.

В *технологии дифференцированного обучения* учащихся 7–9 классов решению текстовых задач алгебраическим способом Т.К. Смыковской, Ю.А. Машевской, О.М Вихляевой содержательный компонент представляет *цикл* взаимосвязанных *систем разноуровневых задач,* удовлетворяющих *требованиям* [87]:

- взаимосвязанность задач;

- единая для всех обучающихся, с возможностью выбора индивидуальной последовательности задач;

- составлена из задач, в процессе решения которых используются одни и те же базовые знания и приёмы;

- составлена из задач, которые логично следуют друг за другом с постепенным нарастанием уровня сложности;

- системообразующим элементом является конструкция графа определённого типа.

Обобщая опыт исследователей можно сформулировать *методические особенности конструирования домашних заданий* по математике в условиях дифференцированного обучения, которые состоят в:

1. Разработка содержания уровней знаний и умений по теме в соответствии с учебным планом (*типологические группы* обучащихся А, В, С и Д [95]).

2. Подбор и составление *домашних заданий* разных типов (алгоритмические, полуэвристические, эвристические) для всех уровней (А, В, С и Д) на каждом этапе изучения темы (используя известные *приёмы дифференциации заданий* [95]): на этапе усвоения учебного материала, на этапе формирования умений и навыков, обобщения и систематизации знаний, на этапе контроля и проверки приобретенных знаний и умений.

3. Использование определенного вида домашней работы для всех уровней на каждом этапе изучения темы в соответствии с типом задания:

- *традиционные виды домашних заданий*: самостоятельные, контрольные, тестовые работы; лабораторные и практические работы; сказки и сочинения; домашние задания на составление задач;
- *инновационные виды домашних заданий*: проектные задания; эксперименты и учебные исследования; домашние задания с использованием социальных сетевых сервисов и видео-контента; работа с текстом учебника; электронные презентации.

Стоит отметить что система домашних заданий должна удовлетворять вышеперечисленным *принципам* построения системы задач: полнота, целостность, взаимосвязанность, доступность и посильность, достаточность, соответствие дидактическим целям.

§5. Дифференцированные домашние задания по теме «Преобразование тригонометрических выражений» и методика их реализации в современных условиях обучения математике

Тождественные преобразования представляют собой одну из основных линий школьного курса математики. На их основе у обучающихся формируется представление об аналитических методах в математике. Преобразования тригонометрических выражений, с одной стороны, имеют самостоятельное значение, с другой стороны, являются промежуточным этапом при решении тригонометрических уравнений и неравенств, при исследовании тригонометрических функций. И, наконец, тождественные преобразования тригонометрических выражений имеют большое воспитательное значение, так как они способствуют развитию у обучающихся операционного мышления, таких качеств личности как целеустремленность и самостоятельность. Хорошие знания и прочные навыки по тригонометрии являются свидетельством достаточного уровня математической культуры, непременным условием успешного изучения в вузе математики, физики, ряда технических дисциплин.

Спроектируем *систему домашних заданий* по теме «Преобразование тригонометрических выражений» для обучающихся 10 классов математического профиля общеобразовательной школы.

Прежде всего, выполним *методический анализ* теоретического и практического содержаний по теме «Преобразование тригонометрических выражений».

Методический анализ темы.

Базовые знания:

- числовая окружность на координатной плоскости;
- поворот точки вокруг начала координат;
- радианная мера угла;
- синус, косинус, тангенс и котангенс любого угла.

Рассматриваемые сведения:

– формулы зависимости между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента;

– тождество, доказательство тождеств;

– синус и косинус суммы и разности аргументов;

– тангенс суммы и разности аргументов;

– формулы приведения;

– формулы двойного аргумента;

– формулы понижения степени;

– формулы для преобразования сумм тригонометрических функций в произведение;

– формулы для преобразования произведений тригонометрических функций в суммы;

– формула вспомогательного (дополнительного) аргумента;

– формулы понижения степени.

Теоретический материал.

Анализ содержания темы «Преобразование тригонометрических выражений» в различных учебниках алгебры и начал математического анализа удовлетворяющих требованиям ФГОС среднего общего образования рассмотрен в таблице (таблица 2). Анализ учебников показал, что для реализации методического проекта по выбранной теме может быть выбран УМК А.Г. Мордковича и др. «Алгебра и начала математического анализа 10 – 11» для математического профиля [1, 54, 55, 76].

Рассматриваемая тема выделена в учебнике отдельной главой. Последовательно выводятся основные формулы тригонометрии. Показаны многочисленные примеры их использования для упрощения тригонометрических выражений, для доказательства тригонометрических и обратных тригонометрических тождеств, для вычисления значений тригонометрических и обратных тригонометрических выражений, для решения тригонометрических уравнений и неравенств. На протяжении всего периода изучения этой главы отрабатывается техника решения тригонометрических уравнений, в то время как сама логика решения изучена ранее, в предыдущей главе. Вывод практически всех формул не «открывает» параграф, а завершает (автор сначала показывает, как применяются формулы как конкретных примерах).

На профильном уровне для изучения темы «Преобразование тригонометрических выражений» по УМК А.Г. Мордковича и др. отводится 30 часов, в течение которых рассматриваются основные формулы тригонометрии (зависимости между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента, основное тригонометрическое тождество, формулы приведения, синус и косинус суммы и разности двух углов, тангенс суммы и тангенс разности двух углов, тригонометрические функции двойного угла (тангенс, синус, косинус),

Таблица 2

Сравнительный методический анализ темы «Преобразование тригонометрических выражений»

Компоненты анализа	«Алгебра и начала математического анализа. 10 кл.» Муравин Г.К., Муравина О.В. М.: Дрофа, 2013 (базовый профиль)[53].	«Алгебра и начала анализа. 10 – 11кл.» Алимов Ш.А. Колягин Ю.М. и др. М.: Просвещение, 2012 (гуманитарный профиль) [57].	«Алгебра и начала анализа. 10 кл.» Мордкович А.Г., Семенов П.В. М.: Мнемозина, 2014 (математический профиль) [54, 55].
1. Вводимые понятия:	1) формулы зависимости между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента; 2) основное тригонометрическое тождество; 3) синус и косинус суммы и разности двух углов; 4) тангенс суммы и тангенс разности двух углов; 5) тригонометрические функции двойного угла (тангенс, синус, косинус); 6) формулы понижения степени (синуса и косинуса); 7) формулы перехода от произведения к сумме (косинусов, синусов); 8) формулы перехода от суммы косинусов к их произведению; 9) уравнения, сводящиеся к квадратным; 10) однородные тригонометрические уравнения; 11) приём введения вспомогательного угла.	1) формулы зависимости между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента; 2) основное тригонометрическое тождество; 3) тождество; 4) доказательство тождеств; 5) способы доказательства тождеств; 6) синус, косинус и тангенс углов α и –α; 7) формулы сложения; 8) синус, косинус и тангенс двойного угла; 9)* синус, косинус и тангенс половинного угла (дополнительный более сложный материал); 10) формулы приведения; 11) правила для получения формул приведения; 12) сумма и разность синусов; 13) сумма и разность косинусов; 14) формулы преобразования произведения (синусов и косинусов) в сумму или разность.	1) синус и косинус суммы и разности аргументов; 2) тангенс суммы и разности аргументов; 3) формулы приведения; 4) правила для получения формул приведения; 5) формулы двойного аргумента (синуса, косинуса, тангенса); 6) формулы понижения степени (формулы половинного аргумента для синуса, косинуса и тангенса); 7) формулы для преобразования сумм тригонометрических функций (синуса и косинуса) в произведение; 8) формулы для преобразования произведений тригонометрических функций (синусов и косинусов) в суммы; 9) формула вспомогательного (дополнительного) аргумента; 10) метод введения вспомогательного аргумента; 11) метод универсальной подстановки.

2. Вводимые утверждения:			1) теорема сложения.		1) теорема сложения.	
3. Анализ задачного материала по уровню учебной деятельности учащихся.	Задания по теме представлены разной степени трудности и отмечены соответствующими значками. Для самоконтроля в приложении есть раздел «Ответы. Советы. Решения».		Задания по теме представлены разной степени трудности и отмечены соответствующими цветом. Для самоконтроля в приложении есть раздел «Ответы и указания».		Задания по теме представлены разной степени трудности и отмечены соответствующими значками. Для самоконтроля в приложении есть раздел «Ответы».	
	Уровни	Номера заданий по учебнику	Уровни	Номера заданий по учебнику	Уровни	Номера заданий по учебнику
	Репродуктивный	335-337, 339, 340 (1-4), 342, 344, 346-349, 350 (1), 352-354, 356, 358, 361, 364, 365-367, 369, 371-376, 380-383, 384 (1-4), 385 (1, 2), 386-388, 390, 391, 393, 397-401, 402 (1-6), 403, 405 (1-3, 5, 6), 406 (1-3), 407, 408, 411, 412, 413-415, 416, 417, 418 (1-3), 423 (1-17),	Репродуктивный	456-459, 465-468, 475, 476, 481-487, 498-507, 513*-518*, 524-528, 537-540, 546-556.	Репродуктивный	24.1-24.11, 24.13-24.18, 25.1-25.4, 25.8, 26.1-26.6, 27.1-27.9, 27.19, 27.46, 27.47, 28.1-28.6, 28.10, 28.18, 29.1-29.3, 30.1, 30.2

		424, 428, 429 (1, 3).				
	Частично – поисковый	338, 340 (5-8), 343, 345, 350 (2), 351, 355, 357, 359, 360, 362, 363, 368, 370, 377-379, 384 (5-8), 385 (3, 4), 389 (1), 392, 394-396, 402 (7, 8), 404, 405 (4), 406 (4), 407, 408, 409, 410, 415, 418 (4), 419-422, 423 (18), 425-427, 429 (2).	Частично – поисковый	460-462, 469, 470, 473, 474, 477-480, 488-497, 508-512, 519*, 520*, 529-536, 541-543, 557-564.	Частично – поисковый	24.12, 24.19-24.37, 24.39-24.42, 24.47, 25.5-25.7, 25.9-25.20, 26.7-26.32, 27.10-27.18, 27.20-27.22, 27.27-27.32, 27.34-27.40, 27.48-27.56, 27.58-27.65, 27.67-27.71, 28.7-28.9, 28.11-28.15, 28.19-28.20, 28.23, 28.26-28.37, 29.4-29.9, 29.12-29.15, 29.17, 29.20-29.25, 29.27, 30.3-30.10, 30.12, 30.13, 30.15-30.18, 30.22-30.24, 30.26, 31.1-31.8, 31.12-31.15, 31.17, 31.18, 31.20, 31.24, 31.25, 31.32, 31.33.
	Творческий	340 (9, 10), 389	Творческий	463, 464, 471, 472,	Творческий	24.38, 24.43-24.46,

<table>
<tr><td></td><td></td><td>(2), 429 (4).</td><td></td><td>521*-523*, 544, 545, 565-567.</td><td></td><td>24.48-24.52, 25.21-25.24, 26.33-26.37, 27.23-27.26, 27.33, 27.41-27.45, 27.57, 27.66, 27.72, 28.16, 28.17, 28.21, 28.22, 28.24, 28.25, 28.38, 29.10, 29.11, 29.16, 29.18, 29.19, 29.26, 29.28-29.30, 30.11, 30.14, 30.19-30.21, 30.25, 31.9-31.11, 31.16, 31.19, 31.21-31.23, 31.26-31.31, 31.34-31.47.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">4. Выводы:</td><td colspan="6">Сравнительный анализ показал, что в каждом из учебников свой подход к изложению темы «Преобразование тригонометрических выражений» .</td></tr>
<tr><td colspan="2">Самая объемная глава учебника, посвящена тригонометрии. В первой ее части школьники знакомятся, в основном, с функциональными (периодичность, формулы приведения, графики, простейшие уравнения), а во второй – с алгебраическими (тригонометрические тождества и</td><td colspan="2">В данном учебнике учебный материал по тригонометрии разбит на 3 главы: «Тригонометрические формулы», «Тригонометрические уравнения» и «Тригонометрические функции». В главе «Тригонометрические формулы» последовательно выводятся основные формулы необходимые для</td><td colspan="2">Рассматриваемая тема выделена в учебнике отдельной главой. Последовательно выводятся основные формулы тригонометрии. Показаны многочисленные примеры их использования для упрощения тригонометрических выражений, для доказательства тригонометрических и</td></tr>
</table>

	преобразования, основные типы тригонометрических уравнений) аспектами тригонометрии. Следует отметить, что формулы привидения вводятся ранее основных формул для преобразования тригонометрических выражений, вместе с решением простейших тригонометрических уравнений. В каждом пункте темы сначала показан вывод формул, затем способы их применения на конкретных примерах. Отдельной темой обозначены методы решения тригонометрических уравнений основных видов. Несмотря на то, что учебник относится к базовому, авторы разъясняют в методических рекомендациях что он может быть использован в десятых классах любого профиля (базового, математического, гуманитарного) и предлагают соответствующие варианты поурочного планирования и методические указания.	преобразования тригонометрических выражений и разобрано достаточное количество примеров на их применение. Доказательство некоторых тригонометрических тождеств отмечено как дополнительный, более сложный материал (например, тангенс суммы и разности аргументов, синус тройного угла и др.). Пункт «Синус, косинус и тангенс половинного угла» так же относится к дополнительному, более сложному материалу. «Тригонометрические уравнения» и «Тригонометрические функции» изучаются после знакомства учащихся с основными тригонометрическими формулами.	обратных тригонометрических тождеств, для вычисления значений тригонометрических и обратных тригонометрических выражений, для решения тригонометрических уравнений и неравенств. На протяжении всего периода изучения этой главы отрабатывается техника решения тригонометрических уравнений, в то время как сама логика решения изучена ранее, в предыдущей главе. Вывод практически всех формул не «открывает» параграф, а завершает (автор сначала показывает, как применяются формулы как конкретных примерах).
	Во всех рассмотренных учебниках предложены разноуровневые задания по теме в достаточно большом количестве.		

формулы понижения степени (синуса и косинуса), формулы перехода от произведения к сумме (косинусов, синусов), формулы перехода от суммы косинусов к их произведению), а также решение основных типов тригонометрических уравнений (сводящиеся к квадратным, однородные тригонометрические уравнения).

Таким образом, выбор УМК А.Г. Мордковича и др. обоснован *следующими причинами*:

– в данном учебнике представлены основные типы заданий на преобразование тригонометрических выражений: задачи на вычисления значений тригонометрических выражений, упрощение тригонометрических выражений, тригонометрические уравнения и неравенства, доказательство тождеств; а также задания с нестандартными формулировками, требующими творческого подхода при решении;

– в учебнике реализована главная цель, которую ставили перед собой авторы – развитие личности школьника средствами математики, подготовка его к продолжению обучения и к самореализации в современном обществе;

– в учебнике представлен материал, соответствующий программе и позволяющий учащимся 10 классов выстраивать индивидуальные траектории изучения математики за счет обязательного и дополнительного материала, маркированной разноуровневой системы упражнений, организованной помощи в разделе «Ответы», дополнительного материала;

– в учебнике наиболее полно, на наш взгляд, раскрыто теоретическое и практическое содержание темы «Преобразование тригонометрических выражений»;

– учебник удовлетворяет требованиям, предъявляемым ФГОС среднего общего образования.

Определим основные цели и задачи изучения выбранной темы. К основным *целям* и *задачам* изучения темы «Преобразование тригонометрических выражений» авторы выбранного УМК относят [1]:

–вывод формул зависимости между синусом, косинусом, тангенсом одного и того же угла, обучение применению этих формул для вычисления значений синуса, косинуса, тангенса числа по заданному значению одного из них;

– ознакомление с понятием тождества как равенства, справедливого для всех допустимых значений букв, обучение доказательству тождеств с использованием изученных формул;

– обучение применению формул сложения при вычислениях и выполнении преобразований тригонометрических выражений;

– ознакомление обучающихся со следствиями теоремы сложения, обучение применению формул двойного угла при преобразованиях тригонометрических выражений;

– обучение применению правила, позволяющего заменить синус, косинус, тангенс, котангенс любого числа соответственно синусом, косинусом, тангенсом или котангенсом числа α, если $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$;

– обучение учащихся применению формул суммы и разности синусов (косинусов) при вычислениях и разложении на множители;

– обучение учащихся применению формул замены произведения синусов и косинусов суммой при вычислениях и преобразованиях;

– обучение решению тригонометрических уравнений, сводящихся к алгебраическим, а также решению однородных уравнений первой и второй степени;

– обучение применению тригонометрических тождеств при вычислениях, преобразованиях тригонометрических выражений, решении простейших тригонометрических уравнений;

– развитие умений взаимодействовать в процессе изучения нового материала и выбирать успешные стратегии в различных учебных ситуациях, развитие навыков учебно-исследовательской деятельности, развитие умений продуктивно общаться и взаимодействовать в процессе совместной деятельности, развитие навыков познавательной рефлексии как осознание совершаемых действий и мыслительных процессов, развитие навыков самостоятельного поиска методов решения практических задач.

В Федеральном компоненте Государственного образовательного стандарта среднего (полного) общего образования по математике (математика, профильный уровень) прописано, что обучающиеся должны [74]:

знать/понимать:

– значение математической науки для решения задач, возникающих в теории и практике; широту и ограниченность применения математических методов к анализу и исследованию процессов и явлений в природе и обществе;

–значение практики и вопросов, возникающих в самой математике, для формирования и развития математической науки;

–значение идей, методов и результатов алгебры и математического анализа для построения моделей реальных процессов и ситуаций.

уметь:

–применять методы доказательств и алгоритмов решения, проводить доказательные рассуждения в ходе решения задач;

–использовать стандартные приемы решения тригонометрических уравнений и неравенств, в том числе готовых компьютерных программ для поиска пути решения и иллюстрации решения;

–описывать круг математических задач, для решения которых требуется введение новых понятий (синус, косинус, тангенс, котангенс; арксинус, арккосинус, арктангенс, арккотангенс), решать практические расчетные задачи из окружающего мира, включая задачи из смежных дисциплин.

В результате изучения темы «Преобразование тригонометрических выражений» обучающийся должен:

знать/понимать:

–основные тригонометрические тождества;

–формулы приведения;

– синус, косинус и тангенс суммы и разности двух углов;

– тригонометрические функции двойного угла;

– формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму и преобразования суммы в произведение;

– формулы для выражения тригонометрических функций через тангенс половинного аргумента;

уметь:

–применять тригонометрические тождества для вычисления значений выражений, решения уравнений и неравенств и доказательства тождеств;

–записывать основные тригонометрические формулы (синуса и косинуса суммы и разности двух углов, тангенса суммы и разности двух углов, формулы приведения, тригонометрических функций двойного угла, преобразования произведения тригонометрических функций в сумму и преобразования суммы в произведение) и применять их для вычисления значений выражений, решения уравнений и неравенств и доказательства тождеств;

– преобразовывать выражения, содержащие обратные тригонометрические функции;

–решать тригонометрические уравнения изученных видов, находить корни на промежутке, решать тригонометрические уравнения графически с применением компьютерных программ.

При проектировании системы домашних заданий по выбранной теме будем исходить из указанных выше целей с учётом требований ФГОС среднего общего образования.

На профильном уровне для изучения темы «Преобразование тригонометрических выражений» по УМК А.Г. Мордковича и др. отводится 30 часов, в течение которых рассматриваются:

1. Синус и косинус суммы и разности аргументов.

2. Тангенс суммы и разности аргументов.

3. Формулы приведения.

4. Формулы двойного аргумента. Формулы понижения степени.

5. Преобразование сумм тригонометрических функций в произведение.

6. Преобразование произведений тригонометрических функций в суммы.

7. Преобразование выражения $Asinx + Bcosx$ к виду $Csin\ (x + t)$.

8. Методы решения тригонометрических уравнений.

В такой последовательности темы раздела изучаются на профильном уровне по УМК А.Г. Мордковича и др. «Алгебра и начала математического анализа 10 – 11» в 10 классе [1, 54, 55]. Придерживаясь данного тематического планирования учебного материала составим систему дифференцированных домашних заданий, используя учебники и учебно-методические пособия по математике для обучающихся общеобразовательных школ [25, 39, 52, 56, 58, 63, 90, 101].

При разработке дифференцированных домашних заданий по теме «Преобразование тригонометрических выражений» в рамках технологии уровневой дифференциации будем опираться на понятия «*дифференцированные формы учебной деятельности»*, «*приёмы дифференциации заданий», «типологические группы обучающихся»* Р.А. Утеевой [92], а также на *методические особенности* дифференциации домашних заданий, выявленные на основе анализа существующих методик [66, 68, 88, 95, 97], которые состоят в:

1. Разработке содержания для всех уровней знаний и умений по теме в соответствии с учебным планом (*типологические группы* обучающихся *А, В*, *С* и *Д*).

2. Подборе и составлении *домашних заданий* разных типов (алгоритмические, полуэвристические, эвристические) для всех уровней (*А, В, С* и *Д*) на каждом этапе изучения темы (используя известные *приёмы дифференциации заданий*):

-*дифференцированные задания* для усвоения учебного материала;

-*дифференцированные задания* для формирования навыков и умений, обобщения и систематизации знаний;

-*дифференцированные задания* для контроля и проверки приобретенных знаний и умений.

3. Использовании определенного вида домашней работы для всех уровней на каждом этапе изучения темы в соответствии с типом задания:

-*традиционные виды домашних заданий*: самостоятельные, контрольные, тестовые работы; лабораторные и практические работы; сказки и сочинения; домашние задания на составление задач;

-*инновационные виды домашних заданий*: проектные задания; эксперименты и учебные исследования; домашние задания с использованием социальных сетевых сервисов и видео-контента; работа с текстом учебника; электронные презентации.

Разработка содержания уровня знаний и умений по теме
в соответствии с учебным планом

Уровень А, В, С, Д

Знает: формулы синуса, косинуса, тангенса суммы и разности аргументов; формулы приведения; формулы тригонометрических функций двойного аргумента; формулы понижения степени; формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму и преобразования суммы в произведение; формулы преобразования выражения $A\sin x + B\cos x$ к виду $C\sin(x + t)$; основные типы тригонометрических уравнений и методы их решения.

Уровень А

Умеет: применять формулы синуса, косинуса, тангенса суммы и разности аргументов; формулы приведения; формулы тригонометрических функций двойного аргумента; формулы понижения степени; формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму и преобразования суммы в произведение; формулы преобразования выражения $A\sin x + B\cos x$ к виду $C\sin (x + t)$при решении заданий *повышенного уровня* сложности на вычисление значений выражений (в том числе с помощью микрокалькулятора), решение уравнений и неравенств (в том числе с применением компьютерных технологий), упрощение выражений, доказательство тождеств, а так же *творческих и нестандартных заданий*, имеющих *поисковый* характер.

Уровень B

Умеет: применять формулы синуса, косинуса, тангенса суммы и разности аргументов; формулы приведения; формулы тригонометрических функций двойного аргумента; формулы понижения степени; формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму и преобразования суммы в произведение; формулы преобразования выражения *Asinx + Bcosx* к виду *Csin (x + t)*при решении заданий *среднего* уровня сложности *алгоритмического* типа на вычисление значений выражений (в том числе с помощью микрокалькулятора), решение уравнений и неравенств (в том числе с применением компьютерных технологий), упрощение выражений, доказательство тождеств, а так же заданий, имеющих *частично-поисковый* и *творческий* характер.

Уровень C

Умеет: применять формулы синуса, косинуса, тангенса суммы и разности аргументов; формулы приведения; формулы тригонометрических функций двойного аргумента; формулы понижения степени; формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму и преобразования суммы в произведение; формулы преобразования выражения *Asinx + Bcosx* к виду *Csin (x + t)* при решении *базовых* заданий *алгоритмического* типа, соответствующих обязательным программным требованиям на вычисление значений выражений (в том числе с помощью микрокалькулятора), решение уравнений и неравенств (в том числе с применением компьютерных технологий), упрощение выражений, доказательство тождеств, а так же заданий, имеющих *частично-поисковый характер.*

Уровень Д

Умеет применять формулы синуса, косинуса, тангенса суммы и разности аргументов; формулы приведения; формулы тригонометрических функций двойного аргумента; формулы понижения степени; формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму и преобразования суммы в произведение; формулы преобразования выражения *Asinx + Bcosx* к виду *Csin (x + t)* при решении *базовых* заданий *алгоритмического* типа, соответствующих обязательным программным требованиям на вычисление значений выражений (в том числе с помощью микрокалькулятора), решение уравнений и неравенств (в том числе с применением компьютерных технологий), упрощение выражений, доказательство тождеств.

1. Дифференцированные домашние задания по теме «Синус и косинус суммы и разности аргументов»

Дифференцированные домашние задания на этапе усвоения учебного материала по теме «Синус и косинус суммы и разности аргументов»:

Уровень А

Задания алгоритмического типа

1) Вычислите:

а) $\sin 20° + \sin 13° \sin 57° - \sin 33° \sin 77°$;

б) $-\cos 10° + \cos 11° \cos 21° + \cos 69° \cos 79°$;

в) $\dfrac{\sin 20° \cos 5° - \cos 20° \sin 5°}{\cos 10° \cos 5° - \sin 10° \sin 5°}$;

г) $\dfrac{\cos\frac{\pi}{30}\cos\frac{\pi}{15} + \sin\frac{\pi}{30}\sin\frac{\pi}{15}}{\sin\frac{7\pi}{30}\cos\frac{4\pi}{15} + \cos\frac{7\pi}{30}\sin\frac{4\pi}{15}}$.

2) Докажите тождество:

а) $\dfrac{\cos(30° - \alpha) - \cos 330° \cos\alpha}{\sin(30° - \alpha) + \sin 120° \sin\alpha} = tg\alpha$;

б) $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) - \sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)} = tg2\alpha$;

в) $\dfrac{\sin(2\alpha+\beta) + \sin(2\alpha-\beta) - \cos\left(\frac{3\pi}{2} - 2\alpha\right)}{\sin(2\alpha+\beta) + \sin(2\alpha-\beta) - \sin\left(\frac{3\pi}{2} + 2\alpha\right)} = tg2\alpha$.

3) Упростите выражение: $\frac{\sin 48^\circ - \sin 23^\circ \cos 25^\circ}{\sin 2^\circ + \sin 23^\circ \cos 25^\circ}$.

4) Вычислите $cosx$, зная, что $\cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = -0.8$ и $\frac{\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{6}$.

5) Решите уравнение: $\sqrt{3} cosx + sinx = 1$.

6) Решите неравенство: $\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4} - \sin\frac{x}{2}\sin\frac{x}{4} > \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Задания полуэвристического типа

7) Упростите выражение: $\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) cosx + \sin 2x \ \sin(\pi + x)$ и укажите все x, при которых его значение равно $\frac{-\sqrt{3}}{2}$.

8) Докажите, что для любого действительного значения x справедливо неравенство: $\cos(7 - 2x)\cos 2x > \sin(7 - 2x)\sin 2x$.

9) Докажите: $\sin(\alpha + \beta)\sin(\alpha - \beta) = \sin^2\alpha - \sin^2\beta$.

10) Докажите равенство: $\cos 15^\circ - \sin 15^\circ = \sin 45^\circ$.

Уровень В

Задания алгоритмического типа

1) Вычислите:

а) $\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ$;

б) $cos\alpha + \cos(240^\circ + \alpha) + \cos(240^\circ - \alpha)$;

в) $\sin 77^\circ \cos 17^\circ - \sin 13^\circ \sin 73^\circ$;

г) $\cos(-53^\circ)\sin(-337^\circ) + \sin 307^\circ \sin 113^\circ$;

д) $\sin\left(\frac{\pi}{6} + t\right)\cos\left(\frac{\pi}{3} - t\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{3} + t\right)\sin\left(\frac{\pi}{3} - t\right)$;

е) $\frac{\cos 105^\circ \cos 5^\circ + \sin 105^\circ \cos 85^\circ}{\sin 95^\circ \cos 5^\circ - \cos 95^\circ \sin 185^\circ}$.

2) Докажите равенство: $\cos^2 75^\circ + \sin^2 75^\circ = 1$.

3) Используя формулы сложения, выведите следующие формулы (*формулы приведения*):

1. $tg(2\pi - x) = -tgx$;

2. $ctg\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = -tgx$.

4) Докажите тождество:

а) $\frac{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)} = tg\alpha g\alpha ct$;

б) $\frac{\sqrt{2} cos\alpha - 2\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right) - \sqrt{3} sin\alpha} = -\sqrt{2} tg\alpha$;

в) $\frac{\sqrt{2} cos\alpha - 2\sin(45^\circ - \alpha)}{2\sin(60^\circ + \alpha) - \sqrt{3} cos\alpha} = \sqrt{2}$.

5) Решите уравнение: $\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) + \sin\frac{x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

6) Вычислите:

1. $\cos\left(\frac{\pi}{2}+t\right)$ зная, что $sint=\frac{3}{5}, 0<t<\frac{\pi}{2}$;

2. $\sin\left(t+\frac{3\pi}{2}\right)$ зная, что $cost=\frac{-5}{13}, \frac{\pi}{2}<t<\pi.$

3. $\sin(\alpha-\beta)$и$\cos(\alpha-\beta)$ зная, что $sin\beta=\frac{-12}{13}, cos\alpha=-0.8, \pi<\beta<\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}<\alpha<\pi.$

7) Решите неравенство: $\sin2xsin5x+\cos2xcos5x>\frac{-\sqrt{3}}{2}$.

Уровень С

Задания алгоритмического типа

1) Вычислите:

1.$\cos165°$;

2.$\sin165°$;

3.$\sin105°\cos105°$;

4.$\sin53°\cos7°-\cos53°\sin(-7°)$;

5.$\cos\frac{2\pi}{15}\cos\frac{\pi}{5}-\sin\frac{2\pi}{15}\sin\frac{\pi}{5}$;

6.$\sin(\alpha+45°)\cos(\alpha-45°)-\cos(\alpha+45°)\sin(\alpha-45°)$;

7.$\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)-\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$.

2) Упростите выражение:

а)$2\cos(60°-\alpha)-\sqrt{3}sin\alpha-cos\alpha$;

б)$\sqrt{2}\sin(\alpha-45°)-sin\alpha+cos\alpha$;

в)$\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-cos\alpha-sin\alpha.$

3) Докажите тождество:

а)$\sin(\alpha+\beta)+\sin(-\alpha)\cos(-\beta)=\sin\alpha\sin\beta$;

б)$\frac{1}{2}cosx+\frac{\sqrt{3}}{2}sinx=\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)$;

в)$\sin(30°-\alpha)-\cos(60°-\alpha)=-\sqrt{3}sin\alpha.$

4) Используя формулы сложения, выведите следующие формулы (*формулы приведения*):

1. $\cos(\pi+x)=-\cos x$;

2. $\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos x.$

5) Решите уравнение: $\cos6xcos5x+\sin6xsin5x=-1.$

Уровень Д

Задания алгоритмического типа

1) Укажи все равенства, которые являются записью формул синуса (косинуса) суммы или разности аргументов:

$1.\cos(\alpha+\beta)=cos\alpha+cos\beta;$	$4.\sin(\alpha-\beta)=sin\alpha\sin\beta+cos\alpha\cos\beta;$
$2.\sin(\alpha+\beta)=sin\alpha cos\beta+cos\alpha sin\beta;$	$5.\cos(\alpha+\beta)=cos\alpha\cos\beta-sin\alpha\sin\beta;$
$3.\sin(\alpha+\beta)=sin\alpha+sin\beta;$	$6.\cos(\alpha-\beta)=cos\alpha-cos\beta.$

2) Представив $135°$ как сумму $90°+45°$, вычислите: 1. $\sin135°;$ 2. $\cos135°.$

3) Используя формулы сложения, преобразуйте выражения:

1. $\sin(\alpha-30°);$ 2. $\cos(60°-\alpha).$

4) Упростите:

$а)\cos(60°-\alpha)+\cos(60°+\alpha);$

$б)\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)-\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right);$

$в)\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta);$

$г)\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta).$

5) Представьте $2x$ в виде $x+x$ и докажите тождество: $\sin2x=2sinxcosx.$

6) Упростите данное выражение: 1. $\sin89°\cos1°+\cos89°\sin1°.$

Отметьте полученный после упрощения результат:

а) $\sin88°;$ б) $\cos90°;$ в) $\sin90°;$ г) $\cos88°.$

Из приведенных ниже вариантов отметьте правильное значение полученного выражения:

а) $\frac{1}{2};$ б) $\frac{\sqrt{3}}{2};$ в) 0; г) 1.

2. Упростите, аналогично 1: $\cos178°\cos2°-\sin178°\sin2°.$

3. Упростите: $\cos\frac{5\pi}{8}\cos\frac{3\pi}{8}+\sin\frac{5\pi}{8}\sin\frac{3\pi}{8}.$

Отметьте полученный после упрощения результат:

а) $\sin\frac{\pi}{4};$ б) $\cos\frac{\pi}{4};$ в) $cos\pi;$ г) $sin\pi.$

Из приведенных ниже вариантов отметьте правильное значение полученного выражения:

а) $\frac{1}{2};$ б) $\frac{\sqrt{3}}{2};$ в) $\frac{\sqrt{2}}{2};$ г) 1.

4. Упростите, аналогично 3: $\sin\frac{13\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}-\cos\frac{13\pi}{12}\sin\frac{\pi}{12}.$

7) Докажите тождество:

1. $\sin7xcos4x-\cos7xsin4x=\sin3x;$ 2. $\cos2xcos12x+\sin2xsin12x=\cos10x.$

Указания и решения:

Уровень А

$8) \cos(7-2x)\cos 2x - \sin(7-2x)\sin 2x = \cos 7 > 0.$

$9) \sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta) = (sin\alpha\cos\beta + cos\alpha\sin\beta)(sin\alpha cos\beta - cos\alpha\sin\beta) = \sin^2\alpha\cos^2\beta -$
$-\cos^2\alpha\sin^2\beta.$

Заметим, что правая часть тождества не содержит $cos\alpha\cos\beta$, следовательно, их требуется исключить из полученного выражения.

Дифференцированные домашние задания на этапе формирования умений и навыков, обобщения и систематизации знаний по теме «Синус и косинус суммы и разности аргументов»:

Уровень А

Задания полуэвристического типа

1) Сравните числа a и b, если $a = \frac{\sin 4}{\cos 5}, b = \frac{\cos 4}{\sin 5}.$

2) Зная, что $\sin(x+y) = a, \sin(x-y) = b$, найдите $\frac{tgx}{tgy}.$

3) Докажите, что не существует пары $(x;\,y)$такой, что:

$cosxcosy = \frac{\sqrt{6}}{3};\, sinxsiny = \frac{-\sqrt{2}}{2}.$

4) Вычислите: $\cos\left(arctg\frac{3}{4} + \arcsin\left(\frac{-3}{5}\right)\right).$

Задания эвристического типа

5) Докажите, что если $tg(\alpha+\beta)sin\gamma = cos\gamma$, *то* $\alpha+\beta+\gamma = \frac{\pi}{2} + \pi n.$

6) Докажите равенство:

1. $\arcsin\frac{4}{5} - \arccos\frac{2}{\sqrt{5}} = arctg\frac{1}{2};$ 2. $\arcsin\frac{4}{5} + \arcsin\frac{5}{13} + \arcsin\frac{16}{65} = \frac{\pi}{2}.$

7) Синусы двух острых углов треугольника равны соответственно $\frac{20}{29}$ *и* $\frac{3}{25}$.

Найдите косинус внешнего угла треугольника, не смежного с двумя данными углами.

8) Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения: $cos\alpha + \sqrt{3}sin\alpha.$

Уровень В

Задания полуэвристического типа

1) Найдите корни уравнения на заданном промежутке:
$\cos 0.7x cos 1.3x - \sin 0.7x sin 1.3x = \sin 7x cos 9x - \sin 9x cos 7x, x\ [-\pi;\pi].$

2) Укажите наименьшее положительное число x, при котором значение выражения $\cos 30^\circ cosx^\circ - \sin 30^\circ sinx^\circ$ равно $\frac{-\sqrt{2}}{2}.$

3) Постройте график функции $y=\cos\left(2x+\frac{7\pi}{12}\right)\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(2x+\frac{7\pi}{12}\right)\sin\left(x+\frac{9\pi}{4}\right).$

Задания эвристического типа

4) Сравните числа $a=\cos x cos2x$ и $b=\cos 3x$, если $\frac{\pi}{2}<x<\pi.$

5) Зная, что $\cos(x+y)=a, \cos(x-y)=b$, найдите $tgxtgy.$

6) Вычислите: $\cos\left(\frac{\pi}{6}+\arccos\left(\frac{-3}{5}\right)\right).$

7) Найдите длину хорды единичной окружности: $P_{\frac{\pi}{2}}P_{2\pi}.$

8) Синусы двух углов остроугольного треугольника равны $\frac{5}{13}$ и $\frac{8}{17}$. Найдите синус третьего угла.

Уровень С

Задания алгоритмического типа

1) Вычислите:

а) $\cos 125°\cos 5°+\sin 55°\cos 85°;$

б) $os\left(\frac{\pi}{4}+t\right)\cos\left(\frac{\pi}{12}-t\right)-\cos\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\cos\left(\frac{5\pi}{12}+t\right);$

в) $\frac{\sin 25°\cos 5°-\cos 25°\cos 85°}{\cos 375°\cos 5°-\sin 15°\sin 365°}.$

2) Докажите тождество: $\frac{cos\alpha-2\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)}{2\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)-\sqrt{3}sin\alpha}=-\sqrt{3}tg\alpha.$

3) Докажите равенство: $\cos^2 75°-\sin^2 75°=\frac{-\sqrt{3}}{2}.$

4) Решите уравнения:

1. $\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)-cosx=0.5;$

2. $\sqrt{3}cosx-sinx=1.$

5) Зная, что:

1. $\sin\alpha=\frac{8}{17}, cos\beta=\frac{4}{5}, 0<\alpha<\frac{\pi}{2}, 0<\beta<\frac{\pi}{2}$, найдите значение выражения $\cos(\alpha+\beta);$

2. $cost=\frac{3}{5}, \frac{3\pi}{2}<t<2\pi$, вычислите $\sin\left(t-\frac{3\pi}{2}\right).$

6) Решите неравенство: $\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}-\sin\frac{x}{2}\sin\frac{x}{4}>\frac{\sqrt{2}}{2}.$

7) Зная, что $\cos\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)=-0.8$ и $\frac{\pi}{3}<x<\frac{5\pi}{6}$, вычислите: $cosx.$

Задания полуэвристического типа

8) Определите знак числа a: $a = (\sin 3 + \cos 4)^2 + (\cos 3 + \sin 4)^2 - 1.$

9) Напишите формулу длины отрезка в точках $P_\alpha и P_\beta$ – конечных точках поворотов на углы α и β. Найдите по этой формуле длину отрезка $P_{\frac{\pi}{2}} P_{\frac{\pi}{6}}$.

10) Постройте график функции: $y = \sin\frac{11x}{5}\cos\frac{x+10\pi}{5} - \cos\frac{11x}{5}\sin\frac{x}{5}.$

Уровень Д

Задания алгоритмического типа

1) Используя формулы сложения, выведите следующие формулы (*формулы приведения*):

1. $\sin(\pi - x) = sinx;$

2. $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = -sinx.$

2) Упростите выражение: $\frac{\cos(\alpha - \beta) - 2 sin\alpha sin\beta}{2 sin\alpha cos\beta - \sin(\alpha - \beta)}$

3) Докажите тождество:

а) $\cos(\alpha + \beta) + \sin(-\alpha)\sin(-\beta) = sin\alpha \cos\beta;$

б) $\frac{\sqrt{3}}{2} cosx - \frac{1}{2} sinx = \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right);$

в) $\sin(30° - \alpha) + \sin(30° + \alpha) = cos\alpha;$

4) Докажите равенство: $\sin 105° \cos 105° = -\frac{1}{4}.$

5) Представив $\alpha - \beta$ в виде $\alpha + (-\beta)$, докажите тождество:
$\cos(\alpha - \beta) = cos\alpha \cos\beta + sin\alpha \sin\beta.$

6) Решите уравнение: $\frac{\sqrt{3}}{2} cosx + \frac{1}{2} sinx = 1.$

7) Зная, что $sint = \frac{3}{5}, 0 < t < \frac{\pi}{2},$ вычислите:

1. $\sin\left(\frac{\pi}{2} + t\right);$

2. $\cos\left(\frac{\pi}{3} + t\right).$

8) Решите неравенство: $sinxcos 3x + cosxsin 3x > \frac{1}{2}.$

Задания полуэвристического типа

9) Найдите наименьший (в градусах положительный корень) уравнения:
$cosxcos 45° + sinxsin 45° = \sin 200° \cos 80° - \cos 200° \sin 80°.$

Указания и решения:

Уровень А

1) $a-b=\frac{\sin 4}{\cos 5}-\frac{\cos 4}{\sin 5}=\frac{\sin 4\sin 5-\sin 4\cos 5}{\sin 5\cos 5}=\frac{-\cos 9}{\sin 5\cos 5}$. Учтём, что точка 5 принадлежит четвёртой четверти числовой окружности, а точка 9 – второй. Значит, $\sin 5<0, \cos 5>0, \cos 9<0,$ *и в итоге* $a-b<0$. Значит, $a<b.$

4) Пусть $arctg\frac{3}{4}=x, srcsin\left(\frac{-3}{5}\right)=y.$ Тогда, согласно определениям обратных тригонометрических функций, $tgx=\frac{3}{4}$ и $0<x<\frac{\pi}{2}, siny=\frac{-3}{5}$ и $\frac{\pi}{2}<y<0.$ Требуется вычислить $\cos(x+y)$.

Ответ: 1.

7) Если $\gamma_1=180°-(180°-(\alpha+\beta))$ – градусная мера внешнего угла треугольника, не смежного с двумя данными, то $\cos\gamma_1=\cos(180°-(180°-(\alpha+\beta)))$.

Уровень В

4) $a-b=cosxcos2x-cox(x+2x)=sinxsin2x.$ По условию $\frac{\pi}{2}<x<\pi$, значит, $\pi<2x<2\pi$, а потому $sinx>0, \sin 2x<0.$ Следовательно, $sinxsin2x<0$. Итак, $a-b<0,$ *т.е.* $a<b.$

2. Дифференцированные домашние задания по теме «Тангенс суммы и разности аргументов»

Дифференцированные домашние задания на этапе усвоения учебного материала по теме «Тангенс суммы и разности аргументов»:

Уровень А

Задания полуэвристического типа

1) Вычислите: $\frac{\sin 90°-tg(45°+\alpha)tg(45°+3\alpha)}{tg(45°+\alpha)+ctg(45°-3\alpha)}+tg4\alpha.$

2) Упростите выражения: $\frac{1-tg^2 35°tg^2 25°}{tg^2 35°-tg^2 25°}.$

3) Известно, что $tg\alpha=\frac{7}{3}, 0<\alpha<\frac{\pi}{2}, tg\beta=-0.4, -\frac{\pi}{2}<\beta<0.$ Докажите, что $\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}.$

4) Вычислите β, если известно, что $tg(\alpha+\beta)=-3,\ tg(\alpha-\beta)=\frac{1}{3}$ и $\frac{\pi}{2}<\beta<\pi.$

5)Докажите, что значение выражения $\frac{tg(\alpha-\beta)-tg\alpha+tg\beta}{tg(\alpha-\beta)tg\beta}$ не зависит от значения $\beta.$

Уровень В

Задания алгоритмического типа

1) Вычислите: $\frac{1-tg70^\circ tg65^\circ}{tg70^\circ+tg65^\circ}$.

2) Упростите выражение: $\frac{tg\frac{\pi}{9}+tg\frac{5\pi}{36}}{1+tg\frac{8\pi}{9}tg\frac{5\pi}{36}}$.

3) Известно, что $\sin\alpha=\frac{8}{17}, \cos\beta=\frac{-12}{13} и \frac{\pi}{2}<\alpha<\pi, \frac{\pi}{2}<\beta<\pi$. Вычислите $tg(\alpha-\beta)$.

Задания полуэвристического типа

4) Найдите $tg\beta$, если $tg(\alpha-\beta)=2.5$ и $tg\alpha=-\frac{1}{3}$.

5) Докажите тождество: $\frac{tg^2 2x-tg^2 x}{1-tg^2 2x tg^2 x}=tg3x tgx$.

Уровень С

Задания алгоритмического типа

1) Вычислите: $tg165^\circ$.

2) Упростите выражения: $\frac{tg\left(\frac{\pi}{8}+\alpha\right)+tg\left(\frac{\pi}{8}-\alpha\right)}{1-tg\left(\frac{\pi}{8}+\alpha\right)tg\left(\frac{\pi}{8}-\alpha\right)}$.

3) Известно, что $tg\alpha=1.2, \sin\beta=-0.8 и -\frac{\pi}{2}<\beta<0$. Вычислите $tg(\alpha+\beta)$.

Задания полуэвристического типа

4) Вычислите: $tg\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right), если\ tg\alpha=\frac{4}{5}$.

5) Докажите тождество: $\frac{1-tg2\alpha}{1+tg2\alpha}=tg(45^\circ-2\alpha)$.

Уровень Д

Задания алгоритмического типа

1) Используя известные значения тангенсов углов $60^\circ и 45^\circ$, вычислите: $tg105^\circ$.

2) Упростите выражение: $\frac{tg1.47-tg0.69}{1+tg1.47tg0.69}$.

3) Известно, что $tg\alpha=\frac{1}{2}, tg\beta=\frac{1}{3}$. Вычислите $tg(\alpha-\beta)$.

4) Представив $2x$ в виде $x+x$, докажите тождество $tg2x=\frac{2tgx}{1-tg^2 x}$.

5) Вычислите $tg2x$, если $tgx=-4$.

Задания полуэвристического типа

6) Вычислите $tg2x$, если $sinx = \frac{3}{5}, cosx = -\frac{4}{5}.$

Дифференцированные домашние задания на этапе формирования умений и навыков, обобщения и систематизации знаний по теме «Тангенс суммы и разности аргументов»:

Уровень А

Задания полуэвристического типа

1) Решите систему уравнений: $\begin{cases} tg(x-y) = \frac{-1}{2}, \\ 2tgx + tgy = 5. \end{cases}$

Задания эвристического типа

2) Тангенсы двух углов треугольника равны $\frac{2}{3}$ *и* $1.5.$ Найдите третий угол треугольника.

3) Докажите, что:

а) угол между прямыми $y = 2x$ *и* $y = \frac{1}{3}x$ равен $45°$;

б) прямые $y = 0.4x$ и $y = -2.5x$ взаимно перпендикулярны;

в) как связаны между собой угловые коэффициенты k_1 *и* k_2 двух взаимно перпендикулярных прямых?

4) Укажите две пары чисел α *и* β таких, что $0 < \alpha < \pi, 0 < \beta < \pi$, причём: $tg(\alpha - \beta) = tg\alpha - tg\beta.$

5) Вычислите: $tg\left(\arcsin\frac{4}{5} + arcctg\frac{3}{4}\right).$

Уровень В

Задания полуэвристического типа

1) Найдите корни уравнения, принадлежащие отрезку [-$\pi; 2\pi$]:

$$\frac{tg\frac{\pi}{5} - tg2x}{tg\frac{\pi}{5}tg2x + 1} = \sqrt{3}.$$

2) Найдите тангенс третьего угла треугольника, если тангенсы двух его углов равны $\frac{1}{3}$ *и* $0.4.$

3) Дано: $\alpha - \beta = \frac{\pi}{4}$. Докажите, что $\frac{tg\alpha - 1}{tg\alpha + 1} = tg\beta.$

Задания эвристического типа

4) Точка *K* – середина стороны *CD* квадрата *ABCD*. Чему равен тангенс острого угла между диагональю *AC* и отрезком *BK*?

5) Вычислите: $tg\left(\frac{\pi}{3} - arcctg\frac{1}{3}\right).$

Уровень С

Задания алгоритмического типа

1) Зная, что $tg\alpha = \frac{1}{4}$ *и* $tg(\alpha - \beta) = 2,$ *вычислите* $tg\beta.$

2) Известно, что $sin\alpha = \frac{-12}{13}, \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Вычислите $tg\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right).$

Задания полуэвристического типа

3) Решите уравнение: $\frac{tg5x - tg3x}{1 + tg3xtg5x} = \sqrt{3}.$

4) Решите неравенство: $\frac{tg3x - 1}{tg3x + 1} > 1.$

5) Докажите тождество: $tg(\alpha - \beta) - (tg\alpha - tg\beta) = tg(\beta - \alpha)tg\alpha g\alpha t$

Уровень Д

Задания алгоритмического типа

1) Упростите выражение: $\frac{tg(45° + \alpha) - tg\alpha}{1 + tg(45° + \alpha)tg\alpha}.$

2) Вычислите: $tg\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right),$ *если* $tg\alpha = \frac{4}{5}.$

Задания полуэвристического типа

3) Найдите $tg(\alpha + \beta)$, если $tg\alpha = 1.2, sin\beta = -0.8 и -\frac{\pi}{2} < \beta < 0.$

4) Найдите $tg\beta$, если $tg\left(\frac{\pi}{4} + \beta\right) = 2.$

5) Докажите тождество: $\frac{tg(\beta - \alpha)tg\beta}{tg(\alpha - \beta) - (tg\alpha + tg\beta)} = ctg\alpha$

3.Дифференцированные домашние задания по теме «Формулы приведения»

Дифференцированные домашние задания на этапе усвоения учебного материала по теме «Формулы приведения»:

Уровень А

Задания полуэвристического типа

1) Вычислите:

а) $\dfrac{11\cos 287° - 25\sin 557°}{\sin 19°}$; в) $\dfrac{\sin 56°\cos 124° - \sin 34°\cos 236°}{\cos 28°\cos 88° + \cos 178°\sin 208°}$;

б) $\dfrac{5\sin\frac{5\pi}{7} + 2\cos\frac{25\pi}{14}}{\sin\frac{2\pi}{7}}$; г) $\dfrac{tg\frac{19\pi}{36} - tg\frac{7\pi}{36}}{\sqrt{3}ctg\frac{7\pi}{3} - ctg\frac{\pi}{36}ctg\frac{11\pi}{36}}$.

2) Упростите выражение:

а) $\dfrac{\sin^2(\pi - t) + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - t\right)}{\sin(\pi - t)}\ tg(\pi - t)$;

б) $\dfrac{\sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)tg\left(\frac{\pi}{2} + y\right)}{\cos(\pi - x)ctg\left(\frac{3\pi}{2} - y\right)} - \dfrac{\sin\left(\frac{7\pi}{2} - y\right)ctg\left(\frac{5\pi}{2} + x\right)}{\cos(2\pi - y)tg(11\pi - x)}$.

3) Докажите тождество: $\dfrac{\cos^2(\pi - t) + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - t\right) + \cos(\pi + t)\cos(2\pi - t)}{tg^2\left(t - \frac{\pi}{2}\right)ctg^2\left(\frac{3\pi}{2} + t\right)} = \cos^2 t.$

4) Найдите приближённое значение $arcctga$, если $a = tg(-46°)$.

Уровень В

Задания алгоритмического типа

1) Приведите к тригонометрической функции острого угла: $ctg(-11.2)$, $\cos(-17)$.

2) Упростите выражение:

а) $\sin\left(\frac{\pi}{2} + t\right) - \cos(\pi - t) + tg(\pi - t) + ctg\left(\frac{5\pi}{2} - t\right)$; б) $\dfrac{\sin(\pi + t)\sin(2\pi + t)}{tg(\pi + t)\cos\left(\frac{3\pi}{2} + t\right)}$.

3) Вычислите с помощью формул приведения:

а) $tg 1800° - \sin 495° + \cos 945°$;

б) $\cos(-9\pi) + 2\sin\left(\frac{-49\pi}{6}\right) - ctg\left(\frac{-21\pi}{4}\right)$.

4) Вычислите с точностью до тысячных: $\sin(arctg(-2))$.

Задания полуэвристического типа

5) Известно, что $ctg\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = 0.4, tg\left(\frac{\pi}{2} + y\right) = -3$. Вычислите: $ctg(x - y)$.

Уровень С

Задания алгоритмического типа

1) Приведите к значению тригонометрической функции наименьшего положительного аргумента: $\cos 400°; \sin\frac{14\pi}{15}$.

Замечание. Наименьший положительный угол меньше $45°$.

2) Упростите выражение: $\sin 146° + \sin 304° + \sin(-56°) + \cos(-34°)$.

3) Вычислите с помощью формул приведения: $\cos 4650°; \sin\left(-\frac{11\pi}{6}\right)$.

4) Вычислите с точностью до тысячных: $\arcsin 0.87 + arctg(-57)$.

Задания полуэвристического типа

5) Найдите приближённое значение $arcctga$, если $a = -26589; a = -\frac{\pi}{3}$.

Уровень Д

Задания алгоритмического типа

1) Приведите к тригонометрической функции острого угла:

$\sin 221°; \cos 306°; tg187°; ctg215$.

2) Упростите выражения: $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - t\right); \cos(2\pi - t); tg(270° + \alpha); ctg(360° + \alpha)$.

3) Вычислите с помощью формул приведения: $\cos 330°$; $\sin\frac{7\pi}{6}$.

4) Найдите с точностью до тысячных значения синуса, косинуса, тангенса и котангенса углов: $210°; \frac{7\pi}{3}$.

Задания полуэвристического типа

5) Вычислите с помощью формул приведения: $\cos 4650°$.

Указания и решения:

Уровень А

1) в) Применяя формулы приведения, получаем:

$\sin 124° = \sin(90° + 34°) = \cos 34°;$

$\cos 235° = \cos(180° + 56°) = -\cos 56°;$

$\cos 178° = -\sin 88°;$

$\sin 208° = -\sin 28°,$

Тогда $\frac{\sin 56° \cos 124° - \sin 34° \cos 236°}{\cos 28° \cos 88° + \cos 178° \sin 208°} = \frac{\sin 56° \cos 34° - \sin 34° \ (-\cos 56°)}{\cos 28° \cos 88° - \sin 88° \ (-\sin 28°)} = .$

$\frac{\sin 56° \cos 34° + \cos 56° \sin 34°}{\cos 28° \cos 88° + \sin 28° \sin 88°} = \frac{\sin(56° + 34°)}{\cos(88° - 28°)} = \frac{\sin 90°}{\cos 60°} = 2.$

Ответ: 2.

Уровень В

1) Поскольку $0 < 4\pi - 11.2 < 0.5\pi$ имеем $ctg(-11.2) = ctg(4\pi - 11.2)$.

Дифференцированные домашние задания на этапе формирования умений и навыков, обобщения и систематизации знаний по теме «Формулы приведения»:

Уровень А

Задания полуэвристического типа

1) Вычислите:

$a) arccos\left(\cos\left(\frac{-24\pi}{5}\right)\right)$; $б) arctg\left(ctg\left(\frac{-21\pi}{5}\right)\right)$.

2) Докажите равенство: $\frac{\cos 40^\circ - \sqrt{3}\sin 40^\circ}{\sin 190^\circ} = 2.$

Задания эвристического типа

3) Докажите, что: $arctgx + arcctgx = \frac{\pi}{2}, x \in R.$

4) Постройте график функции: $y = \arcsin(cosx).$

5) Исследовать на чётность функцию $f(x) = tg(\pi - x^2).$

Уровень В

Задания полуэвристического типа

1) Вычислите: $\frac{tg380^\circ + tg25^\circ}{tg225^\circ + ctg290^\circ ctg65^\circ}.$

2) Решите уравнение:

$a) 3\sin^2\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) - 2\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)\cos(\pi + x) + 2\sin^2(x - \pi) = 2;$

$б) 2\cos^2 x - \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + tgxtg\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = 0.$

3) Постройте график функции: $y = \cos(\pi + x)\cos\left(3\pi - \frac{x}{2}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)\cos\frac{3\pi + x}{2} + \cos\frac{16\pi}{3}.$

Задания эвристического типа

4) Известно, что α, β, γ – углы треугольника. Доказать, что: $\sin\frac{\alpha + \beta}{2} = \cos\frac{\gamma}{2}.$

5) Исследовать на чётность функцию $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right).$

Уровень С

Задания алгоритмического типа

1) Вычислите: $\sin\left(\dfrac{-11\pi}{6}\right)\cos\left(\dfrac{-13\pi}{6}\right)tg\left(\dfrac{-5\pi}{4}\right)ctg\left(\dfrac{-5\pi}{3}\right).$

2) Упростите выражение: $\dfrac{\sin(-\alpha)ctg(-\alpha)}{\cos(360^\circ-\alpha)tg(180^\circ+\alpha)}.$

3) Решите уравнение на промежутке $[0;2\pi]$: $3ctg(2\pi-x)=\sqrt{3}.$

Задания полуэвристического типа

4) Решите уравнение: $2\cos(2\pi+x)+\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)=3.$

5) Докажите тождество: $\dfrac{tg(\pi-t)}{\cos(\pi+t)}\ \dfrac{\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}+t\right)}{tg\left(\dfrac{3\pi}{2}+t\right)}=tg^2t.$

Уровень Д

Задания алгоритмического типа

1) Вычислите: $\cos220^\circ+\cos320^\circ-tg110^\circ+ctg380^\circ.$

2) Упростите выражение: $\sin(90^\circ-\alpha)+\cos(180^\circ+\alpha)+tg(270^\circ+\alpha)+ctg(360^\circ+\alpha).$

Задания полуэвристического типа

3) Решите уравнение на промежутке $[0;2\pi]$: $2\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)=\sqrt{2}.$

4) Решите уравнение: $2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)+\sqrt{2}=0.$

5) Докажите тождество: $\sin(270^\circ+\alpha^\circ)=-cos\alpha^o.$

Указания и решения:

Уровень А

1) При решении использовать идею: если f – символ тригонометрической функции, то $arcf(f(t))=t \leftrightarrow t$ принадлежит области значений функции $arcf$, то есть чтобы вычислить, например, $arccos\left(\cos\left(\dfrac{-24\pi}{5}\right)\right)$ надо преобразовать $\cos\left(\dfrac{-24\pi}{5}\right)$ к виду $cost,\text{где } t\in[0;\pi]$ -

области значений функции арккосинус. Имеем:

$$\cos\left(\frac{-24\pi}{5}\right)=\cos\left(\frac{24\pi}{5}\right)=\cos\left(4\pi+\frac{4\pi}{5}\right)=\cos\frac{4\pi}{5}, \textit{значит } arccos\left(\cos\left(\frac{-24\pi}{5}\right)\right)=$$

$$=arccos\left(\cos\frac{4\pi}{5}\right)=\frac{4\pi}{5}.$$

4) Заданная функция – периодическая с основным периодом 2π и чётная, поэтому для построения её графика достаточно сначала построить ветвь графика на отрезке $[0;\pi]$, отразить её симметрично относительно оси ординат и затем воспользоваться периодичностью функции.

Уровень В

4) Так как α,β,γ – углы треугольника, то $\alpha+\beta+\gamma=180°$. Тогда $\sin\frac{\alpha+\beta}{2}=\sin\frac{180°-\gamma}{2}=\sin\left(90°-\frac{\gamma}{2}\right)=\cos\frac{\gamma}{2}$ что и требовалось доказать.

5) Область определения данной функции $D(f)=(-\infty;+\infty)$. Так как $\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-sinx, mo f(x)=-\sin(-x)=sinx=-f(x)\rightarrow$ данная функция нечётная.

4. Дифференцированные домашние задания по теме «Формулы двойного аргумента»

Дифференцированные домашние задания на этапе усвоения учебного материала по теме «Формулы двойного аргумента»:

Уровень А

Задания полуэвристического типа

1) Упростите выражение: $\frac{2\cos^2\alpha-1}{4tg\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}$.

2) Вычислите:

$a)\left(\cos\frac{\pi}{8}+\sin\frac{\pi}{8}\right)\left(\cos^3\frac{\pi}{8}-\sin^3\frac{\pi}{8}\right);$

$б)\cos\frac{\pi}{65}\cos\frac{2\pi}{65}\cos\frac{4\pi}{65}\cos\frac{8\pi}{65}\cos\frac{16\pi}{65}\cos\frac{32\pi}{65}.$

3) Докажите равенство: $\sin70°+8\cos20°\cos40°\cos80°=2\cos^2 10°.$

4) Докажите тождества:

$a)\cos20°\cos40°\cos60°\cos80°=\frac{1}{16};$

$$б)\frac{ctg\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)tg(2\pi-2\alpha)}{ctg\left(\frac{3\pi}{2}-2\alpha\right)-tg\alpha}-2\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=2\sin\left(2\alpha-\frac{\pi}{3}\right).$$

Задания эвристического типа

5) Попытайтесь придумать аналогичные 4) тождества.

Уровень В

Задания алгоритмического типа

1) Упростите выражение: $\dfrac{2\sin4\alpha(1-tg^2 2\alpha)}{1+ctg^2\left(\frac{\pi}{2}+2\alpha\right)}$.

2) Вычислите:

$а) 2\sin\frac{\pi}{24}\cos\frac{\pi}{24}\left(\cos^2\frac{\pi}{24}-\sin^2\frac{\pi}{24}\right);$

$б) \sin\frac{\pi}{48}\cos\frac{\pi}{48}\cos\frac{\pi}{24}\cos\frac{\pi}{12};$

$в) \frac{\cos150°}{\sin40°}-\frac{\sin150°}{\cos40°}.$

3) Докажите тождества:

$а) \frac{1-\cos2t+\sin2t}{1+\cos2t+\sin2t}\ tg\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=1;$

$б) sinxcos2xcos4x=\frac{\sin8x}{8cosx}.$

Задания полуэвристического типа

4) Зная, что $cosx=\frac{3}{5}$ $и\ x\in\left(\frac{3\pi}{2};2\pi\right)$, вычислите $\sin\left(\frac{\pi}{2}+4x\right)$.

5) Проверьте числовое равенство: $\sin18°\cos18°\cos36°=\frac{1}{4}\sin72°$.

Уровень С

Задания алгоритмического типа

1) Упростите выражение:

а) $\dfrac{\cos80°}{\cos40°+\sin40°}$;

б) $\dfrac{\cos36°+\sin^2 18°}{\cos18°}$.

2) Вычислите:

а) $(\cos15°+\sin15°)^2$;

б) $\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}$;

в) $\dfrac{\cos2t-\cos^2 t}{1-\cos^2 t}$.

Задания полуэвристического типа

3) Докажите тождества:

а) $\cos^4 t+\sin^4 t=1-\frac{1}{2}\sin^2 2t$;

б) $(ctgt-tgt)\sin2t=2\cos2t$.

Уровень Д

Задания алгоритмического типа

1) Упростите выражение:

а) $\frac{\sin 2t}{cost} - sint$; б) $\frac{\sin 40°}{\sin 20°}$.

2) Вычислите:

а) $\cos^2 15° - \sin^2 15°$;

б) $2\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}$; в) $\frac{2tg\frac{5\pi}{12}}{tg^2\frac{5\pi}{12} - 1}$.

3) Докажите тождество: $(sint - cost)^2 = 1 - \sin 2t$.

Задания полуэвристического типа

4)Докажите тождество: $\cos^4 t - \sin^4 t = \cos 2t$.

Указания и решения:

Уровень А

1) Так как сумма аргументов $\frac{\pi}{4} - \alpha$ *и* $\frac{\pi}{4} + \alpha$ *равна* $\frac{\pi}{2}$*, то* $\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$.

Тогда $$\frac{2\cos^2\alpha - 1}{4tg\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)} = \frac{2\cos^2\alpha - 1}{4tg\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)} = \frac{\cos 2\alpha}{4\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)}\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)} =$$

$$\frac{\cos 2\alpha}{4\sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)}.$$

Применив формулу синуса двойного аргумента к углу $\frac{\pi}{4} - \alpha$, получаем

$$\frac{\cos 2\alpha}{4\sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)} = \frac{\cos 2\alpha}{2\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right)} = \frac{\cos 2\alpha}{2\cos 2\alpha} = \frac{1}{2}.$$

Ответ: $\frac{1}{2}$.

2) б) Ответ: $\frac{1}{64}$.

3) Ответ: $2\cos^2 10^o$.

Дифференцированные домашние задания на этапе формирования умений и навыков, обобщения и систематизации знаний по теме «Формулы двойного аргумента»:

Уровень А

Задания полуэвристического типа

1) Упростите выражение: $\sqrt{\dfrac{\sin 4\alpha}{ctg\alpha - tg\alpha}}\ \dfrac{1}{\sin 2\alpha}+1, если \dfrac{3\pi}{4}<\alpha<\pi.$

2) Известно, что $tgx=\dfrac{1}{7}, siny=\dfrac{\sqrt{10}}{10}, 0<x<\dfrac{\pi}{2}, 0<y<\dfrac{\pi}{2}$. Докажите, что $x+2y=\dfrac{\pi}{4}.$

3) Зная, что $t=2arctg\left(-\dfrac{3}{4}\right)$, *вычислите* $sint, cost, tgt, ctgt.$

4) Решите уравнение: $4\sin 2x+8(sinx-cosx)=7.$

5) Постройте график функции: $y=\dfrac{\sin 2x}{2|sinx|}.$

Задания эвристического типа

6) Вычислить $\sin 18°$.

7) Исключить a из системы равенств $\begin{cases} x=tg\dfrac{\alpha}{2}-ctg\dfrac{\alpha}{2}, \\ y=sin\alpha. \end{cases}$

Уровень В

Задания полуэвристического типа

1) Известно, что $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=\dfrac{49}{50} и \dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi.$ Вычислите $\sin 2\alpha$.

2) Зная, что $f(x)=cosx, f(a)=-0.1,$ вычислите $f(3a)$.

3) Найдите (в градусах) наибольший отрицательный корень уравнения:

$sinx=\dfrac{\sin^2 75°-\cos^2 75°}{4\sin 15°\cos 15°}.$

4) Решите уравнение: $\cos^2\left(3x+\dfrac{\pi}{4}\right)-\sin^2\left(3x+\dfrac{\pi}{4}\right)+\dfrac{\sqrt{3}}{2}=0,\ x\in\left[\dfrac{3\pi}{4};\pi\right].$

5) Используя замену $u=tg\dfrac{x}{2}$ и тождества $sinx=\dfrac{2tg\dfrac{x}{2}}{1+tg^2\dfrac{x}{2}}, cosx=\dfrac{1-tg^2\dfrac{x}{2}}{1+tg^2\dfrac{x}{2}}$,

решите уравнения:

а) $sinx+7cosx=5;$ б) $5sinx+10cosx+2=0.$

Задания эвристического типа

6) Найдите наибольшее и наименьшее значения функции:

$y=\cos 2x+4cosx-1.$

7) Постройте график функции: $y=\dfrac{\cos 2x}{cosx-sinx}-cosx.$

Уровень С

Задания алгоритмического типа

1) Вычислите:

а) $2\cos^2\frac{\pi+t}{4}-2\sin^2\frac{\pi+t}{4}$;

б) $\frac{2}{tgt-ctgt}$;

в) $(1-tg^2t)\cos^2 t$.

Задания полуэвристического типа

2) Докажите тождества:

а) $ctgt-\sin 2t=ctgt cos2t$;

б) $\frac{\cos 2t}{sintcost+\sin^2 t}=ctg(\pi+t)-1$.

3) Выразите $\cos 3x$ *через* $cosx$.

4) Сравните a *и* b, *если* $a=\sin\frac{\pi}{12}, b=\frac{1}{4}$.

Задания эвристического типа

5) Решите уравнение:

а) $\cos 2x+3sinx=1,\ x\in[0;2\pi]$;

б) $2-\cos 2x+3sinx=0$.

6) Решите неравенство:

а) $\cos^2 2x-\sin^2 2x\le -1$;

б) $\sin 2x cos 2x<\frac{1}{4}$.

Уровень Д

Задания алгоритмического типа

1) Упростите выражение: $\frac{\cos 36^\circ+\sin^2 18^\circ}{\cos 18^\circ}$.

2) Вычислите:

а) $\frac{\sqrt{2}}{2}-\left(\cos\frac{\pi}{8}+\sin\frac{\pi}{8}\right)^2$;

б) $\frac{\cos 2t-\cos^2 t}{1-\cos^2 t}$;

в) $\sin 2t ctgt-1$.

Задания полуэвристического типа

3) Представив $3x$ в виде $x+2x$, докажите тождество: $\sin 3x=3sinx-4\sin^3 x$.

4) Известно, что $sint=\frac{5}{13},\frac{\pi}{2}<t<\pi$. Вычислите: $\sin 2t; \cos 2t$.

Задания эвристического типа

5) Решите уравнение:

а) $\sin 2x-cosx=0$;

б) $\sin 4x cos 4x=\frac{1}{2}$;

в) $\cos^2\frac{x}{3}-\sin^2\frac{x}{3}=\frac{1}{2}$.

6) Докажите тождества:

а) $\cos^4 t-\sin^4 t=1-\frac{1}{2}\sin^2 2t;$ б) $2\cos^2 t-\cos 2t=1.$

Указания и решения

Уровень А

1) $\sqrt{\frac{\sin 4\alpha}{ctg\alpha-tg\alpha}}\ \frac{1}{\sin 2\alpha}+1=\sqrt{\frac{\sin 4\alpha}{\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}}\ \frac{1}{\sin 2\alpha}+1=\sqrt{\frac{\sin 4\alpha}{\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}}}\ \frac{1}{\sin 2\alpha}+1=\sqrt{\frac{\sin 4\alpha\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}}\ \frac{1}{\sin 2\alpha}+1=$

$=\sqrt{\frac{2\sin 2\alpha cos 2\alpha sin\alpha cos\alpha}{\cos 2\alpha}}\ \frac{1}{\sin 2\alpha}+1=\frac{\sqrt{\sin^2 2\alpha}}{\sin 2\alpha}+1=\frac{|\sin 2\alpha|}{\sin 2\alpha}+1.$

Так как $\frac{3\pi}{4}<\alpha<\pi, \text{то}\ \frac{3\pi}{2}<2\alpha<2\pi\ и\ \sin 2\alpha<0.$ Тогда $\frac{|\sin 2\alpha|}{\sin 2\alpha}+1=\frac{-\sin 2\alpha}{sin\alpha}+1=0.$

Ответ: 0.

6) Имеем $\sin 36°=\cos 54°.$ *Тогда* $\sin(2\cdot 18°)=\cos(3\cdot 18°)$, $2\sin 18°\cdot$ $\cos 18°=4\cos^3 18°-3\cos 18°$, $2\sin 18°\cos 18°=\cos 18°(4\cos^2 18°-3)$,

$4\cos^2 18°-3, 2\sin 18°=4(1-\sin^2 18°)-3, 2\sin 18°=4-4\sin^2 18°-3,\ 4\sin^2 18°+2\sin 18°-1=0.$

Рассматривая последнее равенство как квадратное уравнение и учитывая, что $\sin 18°>0$, получаем $\sin 18°=\frac{\sqrt{5}-1}{4}.$

Ответ: $\sin 18°=\frac{\sqrt{5}-1}{4}.$

7) $x=tg\frac{\alpha}{2}-ctg\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}-\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}-\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{-cos\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{-2cos\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}=$

$=\frac{-2cos\alpha}{sin\alpha}=-2ctg\alpha,\ ctg\alpha=\frac{-x}{2};\ y^2=\sin^2\alpha=\frac{1}{1+ctg^2\alpha}=\frac{1}{1+\frac{x^2}{4}}=\frac{4}{4+x^2}.$

Ответ: $y^2=\frac{4}{4+x^2}$.

5. Дифференцированные домашние задания по теме «Формулы понижения степени»

Дифференцированные домашние задания на этапе усвоения учебного материала по теме «Формулы понижения степени»:

Уровень А

Задания полуэвристического типа

1) Докажите тождества:

а) $\cos^4\alpha = \frac{1}{8}\cos 4\alpha + \frac{1}{2}\cos 2\alpha + \frac{3}{8}$;

б) $\dfrac{4\cos^2(\alpha-\pi) - 4\sin^2\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) + 3\cos^2\left(\frac{5\pi}{2} - \alpha\right)}{4\sin^2\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}\right) - \cos^2\left(\frac{7\pi}{2} - \alpha\right)} = tg^4\frac{\alpha}{2}$.

2) Зная, что $\cos 4x = \frac{17}{81}, \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{4}$, вычислите tgx.

3) Зная, что $15\cos 2t + 8 sint = 9$ *и* $1 < t < 3$, *вычислите* tgt.

4) Докажите, что если $\sin^2 x = sinycosy$, *то* $\cos 2x = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} + y\right)$.

Задания эвристического типа

5) Дано: $\cos 20° = m$. *Найти* $\cos 5°$.

6) Упростить выражения:

а) $\sqrt{0.5 + 0.5\sqrt{0.5 + 0.5 cos\alpha}}$, *если* $0 \le \alpha \le \pi$;

б) $\sqrt{\frac{1 - cos\alpha}{1 + cos\alpha}} + \sqrt{\frac{1 + cos\alpha}{1 - cos\alpha}}$.

Уровень В

Задания алгоритмического типа

1) Докажите тождества:

а) $\frac{\sin 2t}{1 + \cos 2t} \; \frac{cost}{1 + cost} \; \frac{\cos\frac{t}{2}}{1 + \cos\frac{t}{2}} = tg\frac{t}{4}$;

б) $\frac{1 + \cos 2t - \sin 2t}{1 + \sin 2t + \cos 2t} = tg\left(\frac{\pi}{4} - t\right)$;

в) $\sin^2 t - \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - t\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(2t - \frac{\pi}{4}\right)$.

2) Решите уравнения:

а) $sinx = tg^2\frac{x}{2}(1 + cosx)$;

б) $\cos^2\frac{x}{4} = \frac{1}{4}$.

3) Дано: $ctgt = \frac{3}{4}, \pi < t < \frac{3\pi}{2}$. Вычислите: $\cos\frac{t}{2}, \sin\frac{t}{2}, tg\frac{t}{2}, ctg\frac{t}{2}$.

Задания полуэвристического типа

4) Сколько корней имеет уравнение $2\cos^2\frac{x}{2} - \cos\frac{\pi}{9} = 1$. на отрезке $[-2\pi; 2\pi]$.

Найдите эти корни.

5) Найдите корни уравнения, удовлетворяющие неравенству $|x| < 4$:
$4\cos^2 2x + 8\cos^2 x = 7.$

Уровень С

Задания алгоритмического типа

1) Представьте в виде произведения выражения:

а) $1 - \sin 40°$;

б) $1 + \sin\frac{7\pi}{10}$.

2) Упростите выражение: $\cos^2\left(\frac{5\pi}{4} - 2\alpha\right) - \cos^2\left(\frac{5\pi}{4} + 2\alpha\right)$.

3) Докажите тождества:

а) $2\sin^2 2t = 1 + \sin\left(\frac{3\pi}{2} - 4t\right)$;

б) $2\sin^2\frac{t}{2} + cost = 1$.

4) Вычислите (с помощью формул понижения степени): $\sin\frac{3\pi}{8}$.

Задания полуэвристического типа

5) Докажите тождество: $1 - sin\alpha = 2\sin^2\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right)$.

6) Решите уравнение: $1 + cosx = 2\cos\frac{x}{2}$.

Уровень Д

Задания алгоритмического типа

1) Примените формулы понижения степени к следующим выражениям:

а) $\cos^2 1.5\alpha$;

б) $\sin^2(\alpha - \beta)$;

в) $\sin^2\frac{\alpha}{2}$;

г) $tg^2\left(3\gamma + \frac{\pi}{6}\right)$.

2) Представьте в виде произведения выражения:

а) $1 + \cos 4\alpha$;

б) $1 - \cos 6\alpha$;

в) $1 + cos\alpha$.

3) Упростите выражение: $2\sin^2(45° - \alpha) + \sin 2\alpha$.

Задания полуэвристического типа

4) Докажите тождество: $\sin^2 2t = \frac{1 - \cos 4t}{2}$.

5) Вычислите (с помощью формул понижения степени): $\cos 22.5$.

6) Представьте в виде произведения выражение: $1 - sin\alpha$.

Указания и решения:

Уровень А

1) а) Так как $\cos^4\alpha = \left(\frac{1+\cos 2\alpha}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cos 2\alpha+\frac{1}{4}\cos^2 2\alpha$. Далее применим формулу понижения степени к $\cos^2 2\alpha$.

Ответ: $tgt = \frac{-3}{4}$.

б) $$\frac{4\cos^2\alpha-4\cos^2\frac{\alpha}{2}+3\sin^2\alpha}{4\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\alpha} = \frac{4\cos^2\alpha-2(1+\cos\alpha)+3(1-\cos^2\alpha)}{4\cos^2\frac{\alpha}{2}-4\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{4\cos^2\alpha-2-2\cos\alpha+3-3\cos^2\alpha}{4\cos^2\frac{\alpha}{2}\left(1-\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{1-2\cos\alpha+\cos^2\alpha}{4\cos^4\frac{\alpha}{2}} =$$

$$= \frac{(1-\cos\alpha)^2}{4\cos^4\frac{\alpha}{2}} = \frac{\left(2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)^2}{4\cos^4\frac{\alpha}{2}} = tg^4$$

что и требовалось доказать.

3) Введя новую переменную $x = sint$ и учитывая, что $\cos 2t = 1-2\sin^2 t = 1-2x^2$, получим квадратное уравнение, откуда находим x.

5) $\cos 10° = \sqrt{\frac{1+\cos 20°}{2}} = \sqrt{\frac{1+m}{2}} = \sqrt{\frac{2(1+m)}{4}} = \frac{\sqrt{2(1+m)}}{2}, \cos 5° = \sqrt{\frac{1+\cos 10°}{2}} =$

$= \sqrt{\frac{1+\left(\sqrt{2(1+m)}/2\right)}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2(1+m)}}}{2}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2(1+m)}}}{2}$.

6) а) $\sqrt{0.5+0.5\sqrt{\frac{1+cos\alpha}{2}}} = \sqrt{0.5+0.5\sqrt{\cos^2\frac{\alpha}{2}}} = \sqrt{0.5+0.5\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right|}$. Так как

$0 \le \alpha \le \pi, mo\, 0 \le \frac{\alpha}{2} \le \frac{\pi}{2} u \left|\cos\frac{\alpha}{2}\right| = \cos\frac{\alpha}{2}$.

Тогда $\sqrt{0.5+0.5\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right|} = \sqrt{0.5+0.5\cos\frac{\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1+\cos\frac{\alpha}{2}}{2}} = \sqrt{\cos^2\frac{\alpha}{4}} = \left|\cos\frac{\alpha}{4}\right|$. Так как

$0 \le \frac{\alpha}{4} \le \frac{\pi}{4}, mo \left|\cos\frac{\alpha}{4}\right| = \cos\frac{\alpha}{4}$.

Ответ: $\cos\frac{\alpha}{4}$.

б) $\sqrt{tg^2\frac{\alpha}{2}}+\sqrt{ctg^2\frac{\alpha}{2}} = \left|tg\frac{\alpha}{2}\right|+\left|ctg\frac{\alpha}{2}\right| = \frac{\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|}{\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right|}+\frac{\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right|}{\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|} = \frac{\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|^2}{\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right|}+\frac{\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right|^2}{\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|} =$

$$=\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\left|\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\right|}=\frac{1}{\left|\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\right|}=\frac{2}{2\left|\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\right|}=\frac{2}{|sin\alpha|}.$$

Ответ: $\frac{2}{|sin\alpha|}$.

Дифференцированные домашние задания на этапе формирования умений и навыков, обобщения и систематизации знаний по теме «Формулы понижения степени. Формулы двойного аргумента»:

Уровень А

Задания полуэвристического типа

1) Вычислите: $\cos^2\frac{5\pi}{8}-\sin^2\frac{5\pi}{8}+\cos^4\frac{5\pi}{8}-\sin^4\frac{5\pi}{8}+\cos^6\frac{5\pi}{8}-\sin^6\frac{5\pi}{8}.$

2) Зная, что $t=arcctg\frac{12}{5}$, вычислите $\sin\frac{t}{2},\cos\frac{t}{2},tg\frac{t}{2}.$

3) Решите уравнения:

а) $\sin 2x+2sinx=2-2cosx;$ б) $4\sin 2x+8(sinx-cosx)=7.$

Задания эвристического типа

4) Постройте график функции:

а) $y=-\sqrt{\frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}};$

б) $y=\begin{cases}(sinx+cosx)^2, если x\le\frac{\pi}{4},\\ 2+\frac{\pi}{4}-x, если x>\frac{\pi}{4}.\end{cases}$

5) Упростите выражения:

а) $\sqrt{1+sin\varphi}-\sqrt{1-sin\varphi};$ б) $\sqrt{2+\sqrt{2+2\cos 4\alpha}}, если\ 0\le\alpha\le\frac{\pi}{2}.$

Уровень В

Задания полуэвристического типа

1) Упростите выражение $\sqrt{1-\cos 2t}+\sqrt{1+\cos 2t}$, если:

а) $t\in\left[\frac{\pi}{2};\pi\right];$ в) $t\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right];$

б) $t\in\left[\frac{3\pi}{2};2\pi\right];$ г) $t\in\left[\pi;\frac{3\pi}{2}\right].$

2) Известно, что $\cos 2x=\frac{5}{13}$. Вычислите:

а) $\sin^4x+\cos^4x;$ б) $\sin^8x+\cos^8x.$

3) Решите уравнение: $\sin^2\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{4}.$

4) Решите неравенства:

а) $\cos^2\frac{x}{4}-\sin^2\frac{x}{4}>\frac{1}{2}$;

б) $\sin\frac{2x}{3}\cos\frac{2x}{3} \le -\frac{1}{2}$.

Задания эвристического типа

5) Решите уравнение: $4\cos^2 2x+8\cos^2 x=7$.

6) Найдите наименьшее и наибольшее значения функции: $y=\sin 3x+\cos 2x+4\sin^3 x$.

Уровень С

Задания алгоритмического типа

1) Докажите тождества:

а) $\frac{1-cost}{sint}=tg\frac{t}{2}$;

б) $1-sin\alpha=2\sin^2\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)$.

2) Дано: $\sin 2x=\frac{-3}{5}, \frac{\pi}{2}<x<\pi$. Вычислите: $cosx; sinx; tgx; ctgx$.

3) Решите уравнение:

а) $1-cosx=sinxsin\frac{x}{2}$;

б) $\cos^2\frac{x}{4}=\frac{1}{4}$.

Задания полуэвристического типа

4) Докажите тождество: $\frac{\sin 2t}{1+\cos 2t}\ \frac{cost}{1+cost}=tg\frac{t}{2}$.

5) Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y=f(x)$, если $f(x)=2\sin^2 3x-\cos 6x$.

Уровень Д

Задания алгоритмического типа

1) Докажите тождества:

а) $2\cos^2 t-\cos 2t=1$;

б) $\cos^2 3t=\frac{1+\sin\left(\frac{\pi}{2}-6t\right)}{2}$.

2) Решите уравнение:

а) $1-cosx=2\sin\frac{x}{2}$;

б) $\sin^2 2x=1$.

3) Дано: $cost=\frac{3}{4}, 0<t<\frac{\pi}{2}$. Вычислите: $\cos\frac{t}{2}; \sin\frac{t}{2}; tg\frac{t}{2}; ctg\frac{t}{2}$.

Задания полуэвристического типа

4) Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = f(x)$, если $f(x) = 2\cos 2x + \sin^2 x.$

Указания и решения

Уровень А

3) а) Перепишем уравнение в виде $\sin 2x + 2(sinx + cosx) - 2 = 0$ и введём новую переменную $t = sinx + cosx$. Так как $(sinx + cosx)^2 = 1 + \sin 2x$, то получаем, что $\sin 2x = t^2 - 1$ и тригонометрическое уравнение сводится к квадратному.

Ответ: $x = 2\pi n; x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \ Z.$

5) а) $\sqrt{1 + sin\varphi} - \sqrt{1 - sin\varphi} = \sqrt{1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)} - \sqrt{1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)} = \sqrt{2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)} -$

$- \sqrt{2\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)} = \sqrt{2}\left(\left|\cos\left(\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)\right)\right| - \left|\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)\right|\right).$

Так как $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}, то\ 0 < \frac{\varphi}{2} < \frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4} < -\frac{\varphi}{2} < 0, 0 < \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} < \frac{\pi}{4}$. Следовательно,

$\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) > 0 и \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) > 0.$ Тогда $\sqrt{2}\left(\left|\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)\right| - \left|\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)\right|\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)\right) =$

$= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\varphi}{2} + \sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\varphi}{2} - \sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\varphi}{2} + \cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\varphi}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{\varphi}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{\varphi}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{\varphi}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{\varphi}{2}\right) =$

$= \sqrt{2}\ \frac{2}{\sqrt{2}}\sin\frac{\varphi}{2} = 2\sin\frac{\varphi}{2}.$

Ответ: $2\sin\frac{\varphi}{2}.$

Уровень В

6) $\sin 3x + \cos 2x + 4\sin^3 x = (3sinx - 4\sin^3 x) + (1 - 2\sin^2 x) + 4\sin^3 = -2\ \sin^2 x + 3sinx + 1.$

Введя новую переменную $t = sinx$, переформулируем задачу: речь идёт об отыскании наименьшего и наибольшего значений функции $y = -2t^2 + 3t + 1$ на отрезке [-1;1].

Ответ: $y_{наиб} = 2\frac{1}{8}, y_{наим} = -4.$

6. Дифференцированные домашние задания по теме «Преобразование сумм тригонометрических функций в произведения»

Дифференцированные домашние задания на этапе усвоения учебного материала по теме «Преобразование сумм тригонометрических функций в произведения»:

Уровень А

Задания полуэвристического типа

1) Представьте в виде произведения:

а) $1 + sin\alpha + cos\alpha$;

б) $1 - 2cos\alpha + \cos 2\alpha$.

2) Вычислите:

а) $\cos^2 35° + \cos^2 25° - \cos^2 5°$;

б) $tg9° - tg63° + tg81° - tg27°$.

3) Проверьте равенства:

$а) \sin 47° + \sin 61° - \sin 11° - \sin 25° = \cos 7°$;

$б) tg55° - tg35° = 2tg20°$.

4) Докажите тождество: $1 - 2sin\alpha - \cos 2\alpha = -4sin\alpha \sin^2\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right)$

Задания эвристического типа

5) Докажите, что если $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, то выполняется равенство:

$\sin\alpha + sin\beta + sin\gamma = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}.$

6) Докажите тождество: $cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha = 4\cos 2\alpha cos\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{6}\right).$

Уровень В

Задания алгоритмического типа

1) Представьте в виде произведения:

а) $\sin 50° + \cos 20°$;

б) $\cos\frac{\pi}{8} - \sin\frac{\pi}{7}$;

в) $1 + 2cost$;

г) $cost + sint$;

д) $\cos 2t - \cos 4t - \cos 6t + \cos 8t$.

2) Докажите тождества:

а) $\frac{sinx + \sin 2x + \sin 3x}{cosx + \cos 2x + \cos 3x} = tg2x$;

б) $\cos^2(\alpha - \beta) - \cos^2(\alpha + \beta) = \sin 2\alpha sin2\beta$.

3) Вычислите:

$$а)\frac{\sin\frac{5\pi}{18}+\sin\frac{11\pi}{9}}{\cos\frac{5\pi}{18}+\cos\frac{11\pi}{9}};$$

$$б)\frac{sinx-\sin2x+\sin3x-\sin4x}{cosx-\cos2x+\cos3x-\cos4x}, если\ tg\frac{5\pi}{4}=2.$$

4) Проверьте равенство: $\cos115°-\cos35°+\cos65°+\cos25°=\sin5°.$

Задания полуэвристического типа

5) Зная, что $sinx-siny=a, cosx-cosy=b\left(a\neq0, b\neq0\right), вычислите\ ctg\frac{x+y}{2}.$

Уровень С

Задания алгоритмического типа

1) Представьте в виде произведения:

а) $\cos6t+\cos4t;$

б) $\cos(\alpha-2\beta)-\cos(\alpha+2\beta);$

в) $\sin(60°+\alpha)-\sin(60°-\alpha);$

г) $\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{3}\right)-\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right);$

д) $tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)-tg\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right);$

е) $\sin\left(2\alpha-\frac{\pi}{6}\right)-\sin\left(2\alpha-\frac{\pi}{3}\right).$

2) Докажите тождество: $\frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}=tg\alpha.$

3) Вычислите: $\frac{\cos68°-\cos22°}{\sin68°-\sin22°}.$

Задания полуэвристического типа

4) Докажите тождество: $sinx+siny+\sin(x-y)=4\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x-y}{2}.$

5) Проверьте равенство: $\sin20°+\sin40°-\cos10°=0.$

Уровень Д

Задания алгоритмического типа

1) Представьте в виде произведения:

а) $\sin10°+\sin50°;$

б) $\cos75°-\cos15°;$

в) $\sin\frac{\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{11};$

г) $\cos\frac{3\pi}{8}+\cos\frac{5\pi}{4};$

д) $tg20°+tg40°;$

е) $ctg\frac{\pi}{12}-ctg\frac{\pi}{10}.$

2) Докажите тождества:

а) $\frac{\sin2\alpha+\sin6\alpha}{\cos2\alpha+\cos6\alpha}=tg4\alpha;$

б) $\frac{\cos2\alpha-\cos4\alpha}{\cos2\alpha+\cos4\alpha}=tg3\alpha tg\alpha.$

Задания полуэвристического типа

3) Проверьте равенства:

а) $\cos 12° - \cos 48° = \sin 18°$; б) $\cos 20° - \sin 50° = \sin 10°$.

Указания и решения:

Уровень А

1) а) Применив к сумме $1+cos\alpha$ формулу понижения степени, а к $sin\alpha$ формулу синуса двойного аргумента, получаем

$1+cos\alpha+sin\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}+2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = 2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\right)$. Представив выражение, стоящее в скобках, в виде суммы косинусов и преобразовав её в произведение, имеем:

$$2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\right) = 2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)\right) = 2\cos\frac{\alpha}{2}\ \ 2\cos\frac{\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}}{2}\cdot$$

$$\cos\frac{\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha}{2}}{2} = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{4}\right) = 4\cos\frac{\alpha}{2}\ \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right) = 2\sqrt{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right).$$

Ответ: $2\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$.

2) б) $(tg9°+tg81°)-(tg63°+tg27°) = \frac{\sin 90°}{\cos 9°\cos 81°}-\frac{\sin 90°}{\cos 63°\cos 27°} = \frac{2}{\sin 18°}-$

$-\frac{2}{\sin 54°} = \frac{2(\sin 54°-\sin 18°)}{\sin 18°\sin 54°} = \frac{4\sin 18°\cos 36°}{\sin 18°\cos 36°} = 4$.

Ответ: 4.

5) Сложим $\sin\alpha$ *и* $\sin\beta, \sin\gamma$ заменим на $\sin(\alpha+\beta)$; применим к выражению $\sin(\alpha+\beta)$ формулу синуса двойного аргумента:

$$sin\alpha+sin\beta+sin\gamma = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2} = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right) =$$

$$= 2\sin\frac{\pi-\gamma}{2}\ \ 2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} = 2\cos\frac{\gamma}{2}\ \ 2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}.$$

Уровень В

1) а) Формулы преобразования суммы тригонометрических функций в произведение содержат одноимённые функции, а в данной сумме присутствуют и синус, и косинус. С помощью формул приведения данную сумму можно преобразовать в сумму синусов или сумму косинусов, при этом, в зависимости от выбора вида суммы, будут получаться, на первый взгляд, разные ответы, в действительности же равные между собой. Перейдя в

данном примере к сумме синусов, имеем: $\sin 50° + \cos 20° = \sin 50° + \sin 70° = = 2\sin 60° \cos 10° = \sqrt{3}\cos 10°.$

Ответ: $\sqrt{3}\cos 10°.$

Дифференцированные домашние задания на этапе формирования умений и навыков, обобщения и систематизации знаний по теме «Преобразование сумм тригонометрических функций в произведения»:

Уровень А

Задания полуэвристического типа

1) Найдите корни уравнения, принадлежащие промежутку $(0;2.5)$:

а) $\cos 6x + \cos 8x = \cos 10x + \cos 12x;$ б) $\sin 2x + 5\sin 4x + \sin 6x = 0.$

2) При каких значениях x числа a,b,c образуют арифметическую прогрессию, если $a = \cos 7x, b = \cos 2x, c = \cos 11x$?

3) Решите неравенство: $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) < 1.$

4) Докажите тождество: $\cos 2\alpha + \cos 6\alpha + \cos 10\alpha + \cos 14\alpha = \frac{\sin 6\alpha}{2\sin 2\alpha}.$

Задания эвристического типа

5) Попытайтесь придумать аналогичное 4) тождество.

6) Докажите:

а) если $2sinx = \sin(x + 2y), то\ tg(x + y) = 3tgy;$

б) если $2cosx = \cos(x + 2y), то\ ctg(x + y) - 2tgx = tgx + ctgy;$

в) если $\cos^2 x + \cos^2 y = m, то \cos(x + y)\cos(x - y) = m - 1;$

г) если $\cos^2(x + y) + \sin^2 x + \sin^2 y = m, то\ sinxsinycos(x + y) = \frac{1 - m}{2}.$

7) Постройте график уравнения:

а) $\sin 2x = \sin 2y;$ б) $\cos 2x = \cos 2y.$

Уровень В

Задания полуэвристического типа

1) Решите уравнения:

а) $\sin(7\pi + x) = \cos(9\pi + 2x);$

б) $\sin^2 \frac{x}{2} = \cos^2 \frac{7x}{2};$

в) $2\sin^2 x + \cos 5x = 1;$

г) $tg3x = ctgx;$

д) $sinx + \sin 3x + cosx + \cos 3x = 0.$

Задания эвристического типа

2) Сколько корней имеет заданное уравнение на отрезке $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$: $2\cos^2 - 1 = \sin 3x.$

3) При каких значениях x числа a,b,c образуют арифметическую прогрессию, если $a=\sin 3x, b=cosx, c=\sin 5x$?

4) Решите неравенство: $\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)>-\frac{1}{2}$.

5) Постройте график функции: $y=2\left(\sin\frac{9x+2\pi}{3}+\sin\frac{9x-2\pi}{3}\right)$.

Уровень С

Задания алгоритмического типа

1) Представьте в виде произведения:

а) $\cos\frac{\pi}{8}-\sin\frac{\pi}{8}$;

б) $\cos 22°-\sin 66°$;

в) $\sqrt{3}tg\alpha-1$;

г) $\sqrt{3}-2sin\alpha$;

д) $\sin 5x+2\sin 6x+\sin 7x$.

2) Докажите тождества:

а) $tg\alpha+tg\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{cos\alpha\cos\beta}$;

б) $\frac{sin\alpha+sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta}=\frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}$.

Задания полуэвристического типа

3) Найдите абсциссы точек пересечения графиков функций:
$y=\cos 7x$ *и* $y=\cos 3x$.

4) Решите уравнения, используя разложение на множители (сгруппируйте члены, к которым будет применяться формула суммы или разности):

а) $sinx+\sin 2x+\sin 3x=0$;

б) $cosx-\sin 3x=\cos 5x$.

5) На промежутке $[-\pi;\pi]$ найдите все решения уравнения: $\cos 3x+cosx=0$.

Уровень Д

Задания алгоритмического типа

1) Представьте в виде произведения:

а) $\sin 3t-sint$;

б) $\cos(\alpha-2\beta)-\cos(\alpha+2\beta)$;

в) $\cos 6t+\cos 4t$;

г) $\sin(\alpha-2\beta)-\sin(\alpha+2\beta)$;

д) $tg\frac{\pi}{5}-tg\frac{\pi}{10}$;

е) $\frac{1}{2}-cost$;

ж) $\frac{\sqrt{3}}{2}+sint$.

2) Проверьте равенства:

а) $\cos 85°+\cos 35°-\cos 25°=0$;

б) $\sin 20°+\sin 40°-\cos 10°=0$.

3) Решите уравнения:

а) $cosx+\cos 3x=0$;

б) $\sin 12x+\sin 4x=0$.

Задания полуэвристического типа

4) Представьте в виде произведения:

а) $\frac{1}{2}-cost;$ б) $\frac{\sqrt{3}}{2}+sint.$

5) Докажите тождество: $\frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}=tg\alpha.$

6) Решите уравнение: $sinx+\sin 2x+\sin 3x=0.$

Указания и решения:

Уровень А

6) а) Из условия следует, что $sinx=\sin(x+2y)-sinx, m.e. sinx=2sinycos(x+y).$ Тогда

$$tg(x+y)-3tgy=(tg(x+y)-tgy)-2tgy=\frac{sinx}{\cos(x+y)cosy}-\frac{2siny}{cosy}=\frac{sinx-2sinycos(x+y)}{\cos(x+y)cosy}=0.$$

Значит, $tg(x+y)=3tgy.$

г) $2\cos^2(x+y)+2\sin^2 x+2\sin^2 y=2m;\ 2\cos^2(x+y)+1-\cos 2x+1-\cos 2y=2m;$

$2\cos^2(x+y)-2\cos(x+y)\cos(x-y)=2m-2;\ \cos(x+y)(\cos(x+y)-\cos(x-y))=m-1;\ \cos(x+y)$

$(-2sinxsiny)=m-1;\ sinxsinycos(x+y)=\frac{1-m}{2}.$

7. Дифференцированные домашние задания по теме «Преобразование произведений тригонометрических функций в суммы»

Дифференцированные домашние задания на этапе усвоения учебного материала по теме «Преобразование произведений тригонометрических функций в суммы»:

Уровень А

Задания полуэвристического типа

1) Представьте в виде суммы:

а) $\sin^2 xcos4x;$ б) $\cos^2 2xsin3x.$

Задания эвристического типа

2) Докажите тождество: $\cos^2(45°-\alpha)-\cos^2(60°+\alpha)-\cos 75°\sin(75°-2\alpha)=\sin 2\alpha.$

3) Вычислите: $\sin 10°\sin 30°\sin 50°\sin 70°.$

Уровень В

Задания алгоритмического типа

1) Представьте в виде суммы:

а) $4\sin 25°\cos 15°\sin 5°;$ б) $sinxsinysinz.$

Задания полуэвристического типа

2) Докажите тождество: $tgxtg\left(\frac{\pi}{3}-x\right)tg\left(\frac{\pi}{3}+x\right)=tg3x.$

3) Вычислите: $2\cos 28^\circ \cos 17^\circ - 2\sin 31^\circ \sin 14^\circ - 2\sin 14^\circ \sin 3^\circ$.

Уровень С

Задания алгоритмического типа

1) Представьте в виде суммы:

а) $\sin(60^\circ + \alpha)\sin(60^\circ - \alpha)$;   б) $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$.

Задания полуэвристического типа

2) Докажите тождество: $\sin\alpha - 2\sin\left(\frac{\alpha}{2} - 15^\circ\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2} + 15^\circ\right) = \frac{1}{2}$.

3) Вычислите: $\frac{1}{2\sin 10^\circ} - 2\sin 70^\circ$.

Уровень Д

Задания алгоритмического типа

1) Представьте в виде суммы:

а) $\sin 14^\circ \cos 16^\circ$;   б) $\sin(\alpha + \beta)\sin(\alpha - \beta)$.

Задания полуэвристического типа

2) Докажите тождество: $2\sin t \sin 2t + \cos 3t = \cos t$.

3) Вычислите: $\sin^2 10^\circ + \cos 50^\circ \cos 70^\circ$.

Указания и решения:

Уровень А

2) Применяем к первому и второму слагаемым левой части формулу понижения степени, а к третьему – формулу преобразования произведения в сумму:

$$\frac{1 + \cos(90^\circ - 2\alpha) - (1 + \cos(120^\circ + 2\alpha)) - (\sin(150^\circ - 2\alpha) - \sin 2\alpha)}{2} =$$

$$\frac{2\sin 2\alpha - (\cos(120^\circ + 2\alpha) + \sin(150^\circ - 2\alpha))}{2}.$$

Если теперь обозначим $120^\circ + 2\alpha$ буквой t и отметим, что $150^\circ - 2\alpha = 270^\circ - t$, то в скобках получим выражение: $\cos t + \sin(270^\circ - t)$, т.е. $\cos t - \cos t$. В итоге имеем: $\sin 2\alpha$.

3) $\cos 10^\circ \cos 30^\circ \cos 50^\circ \cos 70^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4}\cos 70^\circ(2\cos 10^\circ \cos 50^\circ) =$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}\cos 70^\circ(\cos 60^\circ + \cos 40^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{8}(\cos 70^\circ + 2\cos 70^\circ \cos 40^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{8}(\cos 70^\circ + \cos 110^\circ + \cos 30^\circ) =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{8}\left(\cos 70^\circ - \cos 70^\circ + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3}{16}.$$

Ответ: $\frac{3}{16}$.

Дифференцированные домашние задания на этапе формирования умений и навыков, обобщения и систематизации знаний по теме «Преобразование произведений тригонометрических функций в суммы»:

Уровень А

Задания полуэвристического типа

1) Докажите неравенство: $\cos(2x-3)\cos(2x+3) > \sin(1+2x)\sin(1-2x)$.

2) Зная, что $cosx = \frac{-3}{5}, \frac{\pi}{2} < x < \pi$, *вычислите* $125\sin\frac{x}{2}\cos\frac{5x}{2}$.

3) Решите системы уравнений: $\begin{cases} \cos(x+y)\cos(x-y) = \frac{1}{4}, \\ \sin(x+y)\sin(x-y) = \frac{3}{4}. \end{cases}$

Задания эвристического типа

4) Постройте график функции: $y = -3\left|\cos\frac{3x+\pi}{6}\cos\frac{3x-\pi}{6}\right|$.

5) Постройте графики уравнений:

а) $2\cos(x+y)cosx = cosy$;

б) $\sin\frac{y(x+1)}{2}\cos\frac{y(x-1)}{2} = \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{y}{2}\right)$.

6) Докажите тождество: $cosx + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x + \ldots + cosnx = \dfrac{\cos\frac{(n+1)x}{2}\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$.

Уровень В

Задания полуэвристического типа

1) Сравните числа: $a = \cos 2\cos 4, \quad b = -\sin 3.5\sin 2.5$.

2) Решите уравнения:

а) $\sin 3xcosx = \sin\frac{5x}{2}\cos\frac{3x}{2}$;

б) $\cos 2xcosx = \cos 2.5xcos0.5x$.

3) При каких значениях x числа a и b образуют геометрическую прогрессию, если: $a = \sin 2x, b = \sin 3x, c = \sin 4x$?

4) Решите неравенство: $\cos\frac{3x+\pi}{6}\cos\frac{3x-\pi}{6} > 0$.

Задания эвристического типа

5) Найдите наименьший положительный и наибольший отрицательный корень уравнения: $cosxcos3x = 0.5$.

6) Найдите наименьшее и наибольшее значения функции:

$y = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$.

Уровень С

Задания алгоритмического типа

1) Представьте в виде суммы:

а) $\sin 10°\cos 8°\cos 6°$;

б) $cosxcosycosz$.

Задания полуэвристического типа

2) Докажите тождество: $4\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right)\sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = 3 - 4\sin^2 x$.

3) Вычислите:

а) $\cos^2 3° + \cos^2 1° - \cos 4°\cos 2°$;

б) $2\sin 87°\cos 57° - \sin 36°$.

Задания эвристического типа

4) Сравните числа: $a = \sin 1\cos 2,\ b = \sin 3\cos 4$.

5) Решите уравнение: $2\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right)\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + \sin^2 x = 0$.

Уровень Д

Задания алгоритмического типа

1) Представьте в виде суммы:

а) $2cos\alpha\cos(\alpha + 2)$;

б) $\sin 15°\cos 40°$;

в) $\sin 5\alpha sin 3\alpha$;

г) $\sin\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right)$.

Задания полуэвристического типа

2) Вычислите: $\frac{1}{2\sin 10°} - 2\sin 70°$.

Задания эвристического типа

3) Докажите тождества:

а) $sin\alpha - 2\sin\left(\frac{\alpha}{2} - 15°\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2} + 15°\right) = \frac{1}{2}$;

б) $4cos\alpha\cos(60° - \alpha)\cos(60° + \alpha)$.

4) Упростите выражение: $\sin 2\alpha + 2\sin\left(\frac{5\pi}{12} - \alpha\right)\cos\left(\frac{5\pi}{12} + \alpha\right).$

Указания и решения:

Уровень А

1) Составив разность левой и правой частей доказываемого неравенства и преобразовав произведения в суммы, получим:

$$\cos(2x-3)\cos(2x+3) - \sin(1+2x)\sin(1-2x) = \frac{\cos 4x + \cos 6 - (\cos 4x - \cos 2)}{2} = \frac{\cos 6 + \cos 2}{2} =$$

$= \cos 4\cos 2.$

Точка 4 принадлежит третьей четверти числовой окружности, а точка 2 – второй. Значит, $\cos 4 < 0, \cos 2 < 0, \cos 4\cos 2 > 0,$ неравенство доказано.

6) Обращая внимание на знаменатель правой части тождества, приведём левую часть к тому же знаменателю:

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \ldots + \sin nx = \frac{\sin x \sin\frac{x}{2} + \sin 2x \sin\frac{x}{2} + \sin 3x \sin\frac{x}{2} + \ldots + \sin nx \sin\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} =$$

$$= \frac{\left(\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{3x}{2}\right) + \left(\cos\frac{3x}{2} - \cos\frac{5x}{2}\right) + \left(\cos\frac{5x}{2} - \cos\frac{7x}{2}\right)}{2\sin\frac{x}{2}} . + \ldots + \frac{\cos\frac{(2n-1)x}{2} - \cos\frac{(2n+1)x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}} =$$

$$= \frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}.$$

8. Дифференцированные домашние задания по теме «Преобразование выражения Asinx+Bcosx к виду Csin(x+t)»

Дифференцированные домашние задания на этапе усвоения учебного материала по теме «Преобразование выражения Asinx+Bcosx к виду Csin(x+t)»:

Уровень А

Задания полуэвристического типа

1) Найдите наименьшее и наибольшее значения функции:

$y = cosx - \sqrt{3}sinx + 2\sqrt{3}\cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right).$

2) При каком значении параметра a наименьшее значение заданной функции равно числу m:

а) $y = -9\sin1.4x - 12\cos1.4x + a; m = 1;$ б) $y = 3.5\sin0.2x - 12\cos0.2x + a; m = -1.$

Задания эвристического типа

3) Решите уравнения:

$а) 5sinx - 12cosx + 13\sin3x = 0;$ $б) \sqrt{3}sinx + cosx + 2 = \frac{12}{5\pi}x.$

Уровень В

Задания алгоритмического типа

1) Найдите область значений функции: $y = 8\cos\frac{x}{3} - 15\sin\frac{x}{3}.$

2) Решите уравнение: $\cos\frac{x}{2} - \sqrt{3}\sin\frac{x}{2} + 1 = 0.$

3) Решите неравенство: $3sinx - 4cosx < 2.5.$

Задания полуэвристического типа

4) Найдите наименьшее и наибольшее значения функции:

$y = |7\sin2x - 24\cos2x| + 15.$

Уровень С

Задания алгоритмического типа

1) Преобразуйте данное выражение к виду $Csin(x+t) или Ccos(x+t)$:

а) $7sinx - 24cosx;$ б) $8cosx + 15sinx.$

Задания полуэвристического типа

2) Вычислите: $\frac{\sin38° - \cos38°}{\sqrt{2}\sin7°}.$

3) Найдите наименьшее и наибольшее значения функции: $y = sinx - \sqrt{3}cosx.$

4) Решите уравнение: $sinx + cosx = \sqrt{2}.$

Уровень Д

Задания алгоритмического типа

1) Преобразуйте данное выражение к виду $Csin(x+t)$ *или* $Ccos(x+t)$:

а) $sinx - cosx;$ б) $2sinx - \sqrt{12}cosx.$

Задания полуэвристического типа

2) Докажите тождество: $sinx + cosx + \sqrt{2} = 2\sqrt{2}\cos^2\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{8}\right).$

3) Преобразуйте сумму в произведение: $sint + cost + 5\cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$.

4) Существуют ли значения x, при которых выполняется равенство: $\sin 5x + \cos 5x = 1.5$.

Указания и решение:

Уровень А

1) $\left(cosx - \sqrt{3}sinx\right) + 2\sqrt{3}\cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right) + 2\sqrt{3}\cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = 4\left(\frac{1}{2}\ \sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right)\right) = 4\left(\sin\frac{\pi}{6}\ \sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right) + \cos\frac{\pi}{6}\cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right)\right) = 4cosx.$

Ясно, что $y_{наим} = -4, y_{наиб} = 4.$

3) *б)* $\sqrt{3}sinx + cosx + 2 = \frac{12}{5\pi}x,\ 2\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 2 = \frac{12}{5\pi}x,\ \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{6}{5\pi}x - 1.$

Построив в одной системе координат синусоиду $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ и прямую $y = \frac{6}{5\pi}x - 1$, найдём точку их пересечения: $\left(\frac{5\pi}{6};0\right)$, значит $x = \frac{5\pi}{6}$ – единственный корень заданного уравнения.

Дифференцированные домашние задания на этапе формирования умений и навыков, обобщения и систематизации знаний по теме «Преобразование выражения Asinx+Bcosx к виду Csin(x+t)»:

Уровень А

Задания полуэвристического типа

1) Решите уравнения:

а) $\sqrt{2}(sinx - cosx) = 2x - \frac{\pi}{2}$;   б) $\left(sinx + \sqrt{3}cosx\right)^2 - 5 = \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$.

2) При каких значениях параметра a решением неравенства является любое действительное число x: $35\sin 3x + 12\cos 3x \geq 18.5\left(a^3 - 10\right)$?

Задания эвристического типа

3) При каком значении параметра a наибольшее значение функции $y = f(x)$ равно наименьшему значению функции $y = g(x)$:
$f(x) = 7\sin 5x - 24\cos 5x + a - 1, g(x) = 3 - 2\cos 4x$?

4) Докажите, что при любых значениях x выполняется неравенство: $\sqrt{3}sinx - 7cosx > -\sqrt[3]{390}.$

Уровень В

Задания полуэвристического типа

1) Постройте график функции: $y = sinx - \sqrt{3}cosx.$

2) Решите уравнения:

а) $5\cos\dfrac{x}{2} - 12\sin\dfrac{x}{2} = 6.5;$

б) $\sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x = 2\sin 4x.$

Задания эвристического типа

3) При каких значениях параметра a уравнение не имеет решений:

$3\cos\dfrac{x}{2} - 4\sin\dfrac{x}{2} + 1 = a^2.$

4) Докажите, что при любых значениях x выполняется неравенство:

$16\sin^2 3x + 15\sin 6x \leq 25.$

Уровень С

Задания алгоритмического типа

1) Докажите тождество: $sinx + cosx + \sqrt{2} = 2\sqrt{2}\cos^2\left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{8}\right).$

2) Решите неравенство: $\sqrt{3}sinx + cosx > 1.$

Задания полуэвристического типа

3) Решите уравнения:

а) $sinx - cosx = 1;$

б) $\sin 5x - \cos 5x = \dfrac{\sqrt{6}}{2}.$

4) При каком значении параметра a наибольшее значение заданной функции равно числу M: $y = 6\sin 1.5x - 8\cos 1.5x + a, M = 17$?

Уровень Д

Задания алгоритмического типа

1) Преобразуйте данное выражение к виду $Csin(x+t)$ *или* $Ccos(x+t)$:

а) $3sinx + 4cosx;$

б) $5cosx - 12sinx.$

Задания полуэвристического типа

2) Вычислите: $\dfrac{\sin 17° + \sqrt{3}cos17°}{2\cos 347°}.$

3) Найдите наименьшее и наибольшее значения функции: $y = \sqrt{3}sinx + cosx.$

4) Решите уравнение: $\sqrt{3}sinx + cosx = 1.$

Указания и решение:

Уровень А

4) Т.к. $\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 7^2} = \sqrt{52}$, левую часть искомого неравенства можно преобразовать к виду $\sqrt{52}\sin(x-\alpha)$, где α – вспомогательный аргумент. Наименьшее значение функции $y = \sqrt{52}\sin(x-\alpha)$ равно $-\sqrt{52}$. Значит, чтобы убедиться в справедливости заданного неравенства, достаточно установить,

что $-\sqrt{52} > -\sqrt[3]{390}$, т.е. что $\sqrt{52} < \sqrt[3]{390}$. Предположим, что $\sqrt{52} \geq \sqrt[3]{390}$. Возведя обе части неравенства в квадрат, получим $52^3 \geq 390^2; 52\cdot 52\cdot 52 \geq 390\cdot 390; 52\cdot 4\cdot 4 \geq 30\cdot 30; 52\cdot 4 \geq 15\cdot 15;$ $208 \geq 215$. Получили противоречие, значит, наше предположение неверно. Искомое неравенство доказано.

3) Т.к. $\sqrt{7^2+24^2}=25$, выражение $7\sin 5x - 24\cos 5x$ можно представить в виде $25\sin(5x+\alpha)$, где α – вспомогательный аргумент. Значит, $f(x)=25\sin(5x+\alpha)+a-1$, поэтому для $y=f(x)$ получаем: $y_{наиб}=a+24$. Т.к. $g(x)=3-2\cos 4x$, то для $g(x)$: $y_{наим}=1$. Из уравнения $a+24=1$ получаем $a=-23$.

9. Дифференцированные домашние задания по теме «Решение тригонометрических уравнений»

Дифференцированные домашние задания на этапе усвоения учебного материала по теме «Решение тригонометрических уравнений»:

Уровень А

Задания полуэвристического типа

1) Определите, если возможно, тип уравнения, составьте план решения и выполните его:

1. $8\sin^6 x + 3\cos 2x + 2\cos 4x + 1 = 0;$
2. $5\sin 3x + 2sinx = 0;$
3. $3|cosx| + 2cosx = 5|sinx| - 3sinx;$
4. $tgx + ctgx = 3 + \cos 4x;$
5. $sinx2x + tgx = 2;$
6. $sinxcosx + 6cosx + 6 = 6sinx;$
7. $5\sin 2x - 11cosx = 11sinx - 7;$
8. $2(1 - sinx - cosx) + tgx + ctgx = 0;$
9. $\cos\frac{4x}{3} = \cos^2 x;$
10. $32\cos^6 x - \cos 6x = 1;$
11. $3sinx - 5\sin\left(7x+\frac{\pi}{6}\right) = 4cosx;$
12. $\left(\sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x\right)^2 = 2 + 2\cos\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right);$
13. $\frac{\cos^2 x - cosx - \sin^2 x}{1 - \cos 2x - sinx} = 0.$

Задания эвристического типа

2) Найдите корни уравнения $\cos 4x + \frac{10tgx}{1+tg^2 x} = 3$ принадлежащие отрезку $[-2; 1.4]$.

Уровень В

1) Определите, если возможно, тип уравнения, составьте план решения и выполните его:

Задания алгоритмического типа

1. $\sin^2 2x + 2\cos^2 2x = \frac{7}{4};$
2. $3\cos^2 x + 4sinx = 4;$
3. $\sin 2x - sinx = 2cosx - 1;$

4. $\sin^2 x - \sqrt{3}\sin x\cos x = 0$;

5. $\cos^2(45° + x°) - \cos^2(45° - x°) = -1$;

6. $\sin^3 x\cos x - \sin x\cos^3 x = \frac{1}{4}$;

7. $\cos x + \sqrt{3}\sin x = 1$;

8. $\cos 3x = \cos 5x$;

9. $\sin^2 x - 10\sin x\cos x + 21\cos^2 x = 0$;

10. $1 + \cos 3x + \cos 7x + \cos 10x = 0$;

11. $2\sin^2 x = 4 - 5\cos x$;

12. $7\sin^2 x = 8\sin x\cos x - \cos^2 x$;

13. $\sin 2x\cos 3x + \cos 2x\sin 3x = 1$;

14. $3\sin^2 x + 2\sin x\cos x = 2$;

15. $\sin(x + \pi) = \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$;

16. $\sqrt{3}\cos x - \sin x = 1$;

17. $\cos^4 2x - \sin^4 2x = \frac{1}{2}$.

Задания полуэвристического типа

18. $1 + \sin x + \cos x + \sin 2x + \cos 2x = 0$.

Уровень С

Задания алгоритмического типа

1) Решите уравнение, сведя его к квадратному:

а) $2tgx - 5ctgx = 3$;

б) $\cos x - \sin^2 x = 1$;

в) $\sin x = 5 + \cos^2 x$;

г) $2\cos^2 x + 4 = -\sin x$;

д) $8\cos^4 x - 6\sin^2 x + 1 = 0$.

Выделите особенности уравнений, сводящихся к квадратным.

2) Решите однородное уравнение:

а) $\sin^2 x + \sin x\cos x - 2\cos^2 x = 0$;

б) $\sin^2 x\cos^2 x - 3\cos^4 x = 0$.

Выделите особенности данных уравнений.

Задания полуэвристического типа

3) Решите уравнение, сведя его к однородному:

а) $6\sin^2 x + \sin x\cos x - \cos^2 x = 2$;

б) $3\sin^2 x + 4\sin x\cos x - 3\cos^2 x - 2 = 0$.

Подумайте, чем отличаются эти уравнения от однородных уравнений?

4) Решите уравнение с помощью разложения на множители:

$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$.

5) Определите, если возможно тип уравнения (*Уровень Д, 5*) и составьте план решения.

Уровень Д

Задания алгоритмического типа

1) Решите уравнение:

а) $2\cos x + \sqrt{3} = 0$;

б) $\cos^2 x + \cos x = -\sin^2 x$;

в) $(\sin x - \cos x)^2 - 1 = 0$;

г) $\sin^2 x - 6\sin x = 0$.

2) Решите уравнение, сведя его к квадратному:

а) $2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$;

б) $2\sin^2 x - 3\sin x - 2 = 0$;

в) $6 - tgx = tg^2 x$.

3) Решите однородное уравнение:

$a) sinx + cosx = 0;$ $\qquad$ $б) \sin^2 x - \sqrt{3} sinxcosx = 0.$

Задания полуэвристического типа

4) Решите уравнение с помощью разложения на множители:

$a) (cosx - 1)^2 = \cos^2 x - 1;$ $\qquad$ $б) cosx - \cos 2x = 1.$

5) Определите, если возможно тип уравнения:

$1. \sin^2 2x + 2\cos^2 2x = \dfrac{7}{4};$

$2. 3\cos^2 x + 4 sinx = 4;$

$3. \sin 2x - sinx = 2cosx - 1;$

$4. \sin^2 x - \sqrt{3} sinxcosx = 0;$

$5. \cos^2(45° + x°) - \cos^2(45° - x°) = -1;$

$6. \sin^3 xcosx - sinx\cos^3 x = \dfrac{1}{4};$

$7. cosx + \sqrt{3} sinx = 1;$

$8. \cos 3x = \cos 5x;$

$9. \sin^2 x - 10 sinxcosx + 21\cos^2 x = 0;$

$10. 1 + \cos 3x + \cos 7x + \cos 10x = 0;$

$11. 2\sin^2 x = 4 - 5cosx;$

$12. 7\sin^2 x = 8 sinxcosx - \cos^2 x;$

$13. \sin 2x cos 3x + \cos 2x sin 3x = 1;$

$14. 3\sin^2 x + 2 sinxcosx = 2;$

$15. \sin(x + \pi) = \cos\left(\dfrac{3\pi}{2} + x\right);$

$16. \sqrt{3} cosx - sinx = 1;$

$17. \cos^4 2x - \sin^4 2x = \dfrac{1}{2}.$

Указания и решение:

Уровень А

1) 1. Воспользоваться тем, что $2\sin^2 x = 1 - \cos 2x$ и ввести новую переменную $t = \cos 2x.$

2. Воспользоваться тем, что $\sin 3x = 3 sinx - 4\sin^3 x$ и ввести новую переменную $t = sinx.$

3. Можно рассмотреть уравнение для каждой четверти числовой окружности по отдельности. Например, если x принадлежит второй четверти, то $|cosx| = -cosx, |sinx| = sinx$ и уравнение принимает вид $-cosx = 2sinx, т.е. tgx = -0.5$. Поскольку x принадлежит второй четверти, получаем $x = -arctg 0.5 + \pi(2n+1)$.

4. Ответ: $x = \dfrac{\pi}{4} + \pi n; x = (-1)^n \dfrac{1}{2} \arcsin \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} + \dfrac{\pi n}{2}; n \in Z.$

5. Можно воспользоваться формулой $\sin 2x = \dfrac{2tgx}{1 + tg^2 x}$, а затем ввести новую переменную $t = tgx$ (универсальная подстановка).

9. Уравнение привести к виду $2\cos\frac{4x}{3}=1+\cos 2x$, далее $2\left(2\cos^2\frac{2x}{3}-1\right)=1+\cos\left(3\ \frac{2x}{3}\right)$ и ввести новую переменную $t=\cos\frac{2x}{3}$.

11. Ответ: $x=\frac{-\pi}{36}-\frac{\alpha}{6}+\frac{\pi n}{3}; x=\frac{5\pi}{48}+\frac{\alpha}{8}+\frac{\pi n}{4}, где \alpha=\arcsin\frac{4}{5}$.

13. Приравнивая к нулю числитель дроби получаем совокупность уравнений: $cosx=1; cosx=\frac{-1}{2}$. Отмечаем на числовой окружности соответствующие точки. Аналогично поступая со знаменателем, получаем: $\sin x=0; sinx=\frac{1}{2}$ («выколотые» точки).

Ответ: $x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n, n\in Z.$

2) Заметив, что $\frac{2tgx}{1+tg^2x}=\sin 2x$, получаем уравнение $\cos 4x+5\sin 2x=3$, откуда находим: $x=(-1)^n\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}$.

Ответ: $\frac{-7\pi}{12};\frac{\pi}{12};\frac{5\pi}{12}$.

Дифференцированные домашние задания на этапе формирования умений и навыков, обобщения и систематизации знаний по теме «Решение тригонометрических уравнений»:

Уровень А

Задания полуэвристического типа

1) Решите уравнения:

1. $6tgx+5ctg3x=tg2x;$

2. $\sin 5x+sinx=2+2\cos^2 x;$

3. $\left(sinx+\sqrt{3}cosx\right)\sin 3x=2;$

4. $\cos 2x\left(1-\frac{3}{4}\sin^2 2x\right)=1;$

5. $sinx+cosx=\sqrt{2}+\sin^4 4x;$

6. $\sqrt{25-4x^2}\left(3\sin 2\pi x+8\sin\pi x\right)=0;$

7. $\left(ctg\frac{x}{2}-\frac{2}{3}sinx\right)\sqrt{4x-x^2+5}=0;$

8. $\sqrt{\cos 2x}+\sqrt{1+\sin 2x}=2\sqrt{sinx+cosx};$

9. $\sqrt{\cos 5x+cosx-\sin 5x}=\sqrt{sinx};$

10. $tg\frac{\pi x}{1+x^2}+\sin\frac{2\pi x}{1+x^2}=2.$

Задания эвристического типа

2) Дано уравнение с параметром $a:\sqrt{acos2x-3\sin 2x}=cosx$. Известно, что $x=0$ является корнем этого уравнения. Найдите остальные корни.

Уровень В

Задания полуэвристического типа

1) Используя условия равенства одноимённых функций, решите уравнения:

$a)\sin\left(6x-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right);$ $б)\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=-\cos\frac{x}{2}.$

2) Найдите на отрезке $[-\pi;\pi]$ все корни уравнений:

$a)\cos 2x+\sin^2 x=\cos x;$ $б)\frac{2\cos^2 x+\cos x}{2\cos x+7\sin^2 x}=-\frac{1}{2}.$

3) Найдите все решения уравнения $\sqrt{3}\sin x+2\cos x=\sqrt{3}+\sin 2x$, удовлетворяющих условию $0<x<2.$

4) При каких значениях a наибольшее значение функции $y=a\sin x+\cos x$ равно 5?

5) Решите уравнения:

$a)\frac{2-\sin x+\cos 2x}{6x^2-\pi x-\pi^2}=0;$ $б)\frac{6\sin^2 x-6\sin x+\cos 2x+1}{12x^2-8\pi x+\pi^2}=0.$

Задания эвристического типа

6) Запишите условия, при которых выполняются равенства $\sin\alpha=\cos\beta$ и $tg\alpha=ctg\beta$. Используя полученные условия, решите уравнения:

$a)\sin 3x=\cos 4x;$ $б)tg 2x=ctg 5x.$

7) Докажите, что не имеет корней уравнение: $\left(\sin x+\sqrt{3}\cos x\right)\sin 4x=2.$

Уровень С

Задания полуэвристического типа

1) Определите, если возможно, тип уравнения и решите его:

1. $\sin^2 2x+2\cos^2 2x=\frac{7}{4};$
2. $3\cos^2 x+4\sin x=4;$
3. $\sin 2x-\sin x=2\cos x-1;$
4. $\sin^2 x-\sqrt{3}\sin x\cos x=0;$
5. $\cos^2(45°+x°)-\cos^2(45°-x°)=-1;$
6. $\sin^3 x\cos x-\sin x\cos^3 x=\frac{1}{4};$
7. $\cos x+\sqrt{3}\sin x=1;$
8. $\cos 3x=\cos 5x;$
9. $\sin^2 x-10\sin x\cos x+21\cos^2 x=0;$
10. $1+\cos 3x+\cos 7x+\cos 10x=0;$
11. $2\sin^2 x=4-5\cos x;$
12. $7\sin^2 x=8\sin x\cos x-\cos^2 x;$
13. $\sin 2x\cos 3x+\cos 2x\sin 3x=1;$
14. $3\sin^2 x+2\sin x\cos x=2;$
15. $\sin(x+\pi)=\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right);$
16. $\sqrt{3}\cos x-\sin x=1;$
17. $\cos^4 2x-\sin^4 2x=\frac{1}{2}.$

Задания эвристического типа

2) Найдите наименьший положительный корень уравнения:

$4\sin 3x\sin x-2\cos 2x+1=0.$

Уровень Д

Задания алгоритмического типа

1) Решите уравнение, сведя его к квадратному:

$а) 2tgx - 5ctgx = 3;$

$б) cosx - \sin^2 x = 1;$

$в) sinx = 5 + \cos^2 x;$

$г) 2\cos^2 x + 4 = -sinx;$

$д) 8\cos^4 x - 6\sin^2 x + 1 = 0.$

Выделите особенности уравнений.

2) Решите уравнения:

$а) \sin^2 x + sinxcosx - 2\cos^2 x = 0;$

$б) \sin^2 x\cos^2 x - 3\cos^4 x = 0.$

Выделите особенности данных уравнений.

Задания полуэвристического типа

3) Решите уравнения, сведя их к однородным:

$а) \sin^2 x + sinxcosx - 2\cos^2 x = 0;$

$б) \sin^2 x\cos^2 x - 3\cos^4 x = 0.$

Подумайте, чем отличаются эти уравнения от однородных уравнений?

Задания эвристического типа

4) Решите уравнение с помощью разложения на множители:

$sinx + \sin 2x + \sin 3x = 0.$

5) Составьте план решения уравнений (*задание1Уровень С*).

Указания и решение:

Уровень А

1) 3. Ответ: $x = \frac{\pi}{6} + \pi n, n \; Z.$

4. Преобразовав уравнение к виду $1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x = \frac{1}{\cos 2x}$, заметим, что левая часть неотрицательна и не превосходит 1. Значит, и правая часть должна быть неотрицательной (точнее, положительной), при этом она не меньше 1.

Ответ: $x = \pi n, n \in Z.$

7. Фактически речь идёт о решении совокупности уравнений: $ctg\frac{x}{2} - \frac{2}{3}sinx = 0; 4x - x^2 + 5 = 0.$

Ответ: $-1; 5; \pi; \frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}.$

8. Ответ: $x = \pi n; x = (-1)^n \frac{\pi}{18} + \pi n; x = (-1)^n \frac{5\pi}{18} + \pi n; x = (-1)^n \frac{7\pi}{18} + \pi n; n \in Z.$

9. Ответ: $x = (-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n; x = (-1)^n \frac{\pi}{12} + 2\pi n; x = (-1)^n \frac{5\pi}{12} + 2\pi n; n \in Z.$

10. Воспользовавшись формулой $\sin 2t = \frac{2tgt}{1 + tg^2 t}$, введём новую переменную $y = tg\frac{\pi x}{1 + x^2}$.

Ответ: $x = 1 \pm \sqrt{3}$.

Методические рекомендации по организации домашней работы

1. На этапе *усвоения* учебного материала, а так же на этапе *формирования* умений и навыков, обобщения и систематизации знаний по данной теме обучающимся можно предложить *групповую дифференцированную домашнюю работу* (по типологическим группам А, В, С и Д), реализуемую учителем при помощи сетевого дневника-блога (например, используя интерактивные ресурсы www.weebly.com, www.blogger.com, www.penzu.co). Предлагаемые ниже задания размещаются на страничке блога и становятся доступны для просмотра и комментариев обучающимся внутри каждой из групп класса. Здесь ученики, испытывающие затруднения, всегда могут попросить о помощи и оперативно получить её как от учителя, так и от участников своей группы.

2. На этапе *формирования* умений и навыков, обобщения и систематизации знаний по теме обучающимся типологических групп А и В можно предложить дополнительное задание: выбрать из предложенных учителем заданий для домашней работы две наиболее сложные с их точки зрения (задание повышенной сложности) и продемонстрировать решение поэтапно в виде электронной презентации. Данную работу так же можно разместить в блоге учителя для всеобщего доступа.

3. На этапе *формирования* умений и навыков, обобщения и систематизации знаний по теме обучающимся типологических групп С и Д даётся дополнительное задание: просмотреть видеоматериал на портале www.interneturok.ru («Алгебра 10 класс, Мордкович А. Г.» – глава «Преобразование тригонометрических выражений» – любая из тем раздела). Задание для группы С: выделить «ключевые» задания по теме и оформить в виде электронной презентации, которую потом можно будет так же опубликовать в блоге. Задание для группы Д: выделить типичные ошибки на применение формул при решении основных заданий и оформить в виде электронной презентации два решения – правильное и с ошибкой.

4. На этапе *усвоения* учебного материалапо теме «Решение тригонометрических уравнений» обучающимся групп А и В можно предложить групповую дифференцированную домашнюю работу (используя дифференцированные домашние задания) в виде небольшого учебного проекта-исследования в виртуальной лаборатории «1С: Математический конструктор», которая позволяет сделать графическое решение тригонометрических уравнений более наглядным. Обучающимся даётся домашнее задание: подготовить по одной интерактивной модели решения уравнения с выгрузкой и демонстрацией на следующем уроке.

10. Организация контроля по теме «Преобразование тригонометрических выражений»

На этапе *контроля и проверки* приобретенных знаний и умений по теме «Преобразование тригонометрических выражений» можно использовать дифференцированные домашние задания и разные виды домашней работы. Мы предлагаем разработку дифференцированной домашней самостоятельной работы и дифференцированные домашние задания с использованием приёмов работы с текстом учебника.

Цель: проверить теоретические и практические знания и умения по теме «Преобразование тригонометрических выражений».

1. Дифференцированные домашние задания с использованием приёмов работы с текстом учебника по теме «Преобразование тригонометрических выражений» представлены в таблице (таблица 3).

Таблица 3

Дифференцированные домашние задания с использованием приёмов работы с текстом учебника

Уровень	*Задания полуэвристического типа*	*Задания эвристического типа*
А	Самостоятельное составление примеров и заданий	Составление проверочной работы по выбранной теме раздела
В	Графическая систематизация	Самостоятельное составление примеров и заданий
С	Составление плана	Графическая систематизация
Д	Изготовление закладок	Составление плана

Методические рекомендации

1) *Изготовление закладок* это один из приёмов, обеспечивающих понимание текста на уровне полноты его восприятия и разностороннего анализа его содержания [99, С. 172]. Полоска бумаги небольшой ширины (как у обычной книжной закладки) и высоты чуть больше высоты страницы накладывается вертикально рядом с текстом и на уровне верхнего края страницы на закладке проводится горизонтальная черта над которой записывается номер текущей страницы учебника. На ней ученики отмечают важные фрагменты текста и свои комментарии к ним. Все записи делаются на уровне соответствующих строк, что позволяет учителю легко проверить работу по своему учебнику. Полезно эту работу учителю контролировать, оценивать и конечно, давать возможность учащимся доработать свои закладки.

Задание для обучающихся: составить закладки по главе 5 учебника «Преобразование тригонометрических выражений» стр. 198 – 232.

2) *Составление плана* это один из приёмов преобразования учебного текста, обеспечивающих его понимание на уровне объяснения [99, С. 176]. Перед тем, как предлагать обучающимся такую форму работы, необходимо освоить приём подбора заголовка к фрагментам текста.

Задание для обучающихся: составить план главы 5 учебника «Преобразование тригонометрических выражений» стр. 198 – 232.

3) Перевод текстовой информации в *графическую* форму (схему, таблицу, диаграмму) способствует развитию базовых мыслительных операций, таких как анализ, синтез, сравнение, обобщение [99, С. 177].

Задание для обучающихся: составить таблицу основных формул и примеров к ним по главе 5 учебника «Преобразование тригонометрических выражений» стр. 198 – 232.

4) *Самостоятельное составление* примеров и заданий это один из приёмов, обеспечивающих его понимание на уровне интерпретации [99, С. 178]. Задание самостоятельно придумать свои задачи предполагает составление не только задач, аналогичных представленным в тексте

учебника, но и задач с необычным содержанием. В качестве разновидности такой работы можно рассматривать составление проверочных работ для обучающихся своего класса.

Задание для обучающихся: 1) составить примеры и задачи по главе 5 учебника «Преобразование тригонометрических выражений» стр. 198 – 232; 2) составить проверочную работу по выбранной теме главы 5 учебника «Преобразование тригонометрических выражений» стр. 198 – 232.

2. Дифференцированная домашняя самостоятельная работа по теме «Преобразование тригонометрических выражений»:

Уровень А

Задания полуэвристического типа

1) Решите уравнение: $\arcsin(3x^2-1)=\arcsin(10x-4)$.

2) Найдите все решения уравнения $\left|cosx-\frac{1}{4}\right|=8\cos^2\frac{x}{2}-5$ *на отрезке* $[-\pi;\pi]$.

3) Докажите, что угол между прямыми $y=2x-1$ *и* $y=\frac{1}{3}x+3$ равен $45°$.

Задания эвристического типа

4) Сравните числа $\frac{\sin 253°}{16\sin 16°}$ *и* $\cos 16°\cos 32°\cos 64°\cos 128°$.

5) При каких значениях *a* наибольшее значение функции $y=asinx+cosx$ равно 5?

Уровень В

Задания полуэвристического типа

1) Решите неравенство: $\sin\frac{4x}{3}>\frac{-\sqrt{3}}{2}$.

2) Сколько корней имеет уравнение $\left(\frac{1}{\sin^2 x}-1\right)\sqrt{4-x^2}=0$?

3) Вычислите $cos\alpha-sin\alpha$, если известно, что $\sin\alpha\cos\alpha=\frac{-1}{4}, \frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$.

Задания эвристического типа

4)Вычислите: $\log_{0.1}ctg5°+\log_{0.1}ctg15°+\log_{0.1}ctg25°+...+\log_{0.1}ctg75°+\log_{0.1}ctg85°$.

5) Можно ли утверждать, что если $\alpha°$ - острый угол, то $\sin(\alpha°+1°)>sin\alpha°$?

Уровень С

Задания алгоритмического типа

1) Упростите выражение: $\dfrac{1+\cos2\alpha}{2\cos^2(3\pi+\alpha)}-\sin^2\alpha.$

2) Решите уравнение: $3\sin^2 x+7cosx-3=0.$

3) Докажите тождество: $\dfrac{cos\alpha}{1-sin\alpha}=\dfrac{1+sin\alpha}{cos\alpha}.$

4) Вычислите: $\dfrac{\sin50°\cos5°-\sin5°\cos50°}{2\cos^2 15°-1}.$

Задания полуэвристического типа

5) Найдите абсциссы точек пересечения графиков функций $y=\sin^2 2x$ *и* $y=\cos^2 2x.$

Уровень Д

Задания алгоритмического типа

1) Упростите выражение: $\dfrac{(sin\alpha+cos\alpha)^2}{1+\sin2\alpha}.$

2) Решите уравнение: *sin 5 x = sin 3x.*

3) Докажите тождество: $2\cos^2(45°+4\alpha)+\sin8\alpha=1.$

4) Вычислите: $\sin72°+\cos222°-\sin12°.$

Задания полуэвристического типа

5) Найдите наименьший положительный корень уравнения $2\sin^2-3sinx+1=0.$

Методические рекомендации

Ответы и решения:

Уровень А: 1) Больше; 2) $\pm\arccos0.25$; 3) Построим $y=2x-1иy=\dfrac{1}{3}x+3$.

Обозначим: α – искомый угол, β – угол между прямой $y=\dfrac{1}{3}x+3$ и осью *OX*, φ – угол между прямой $y=2x-1$ и осью *OX*. Тогда $\alpha=\varphi-\beta$, $sin\varphi=\dfrac{2\sqrt5}{5}, cos\varphi=\dfrac{\sqrt5}{5}, sin\beta=\dfrac{\sqrt{10}}{10}, cos\beta=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}, sin\alpha=\sin(\varphi-\beta)=\dfrac{2\sqrt5}{5}\dfrac{3\sqrt{10}}{10}-\dfrac{\sqrt5}{5}\dfrac{\sqrt{10}}{10}=$ $=\dfrac{\sqrt2}{2}; sin\alpha=\dfrac{\sqrt2}{2}\to\alpha=45°$; 4) $\dfrac{1}{3}$; 5) 5.

Уровень В: 1) $\left(\dfrac{-\pi}{4}+\dfrac{3\pi}{2};\pi+\dfrac{3\pi}{2}\right), n\in Z$; 2)5; 3)$-lgtg45°=\log_{0.1}1=0$;; 4) $\dfrac{\sqrt6}{2}$;

5) Можно, т.к. если $\alpha=89°$, то $\sin(89°+1°)>\sin89°$;острый $\to$ $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$, на данном промежутке $sin\alpha$ возрастает.

Уровень С: $1)\cos^2\alpha$;

$2)\ \dfrac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z$; $3)\ \dfrac{cos\alpha}{1-sin\alpha}-\dfrac{1+sin\alpha}{cos\alpha}=\dfrac{\cos^2\alpha-1+\sin^2\alpha}{(1-sin\alpha)cos\alpha}=$

$=\dfrac{0}{(1-sin\alpha)cos\alpha}=0\rightarrow$ *л.ч.* $=$ *п.ч.* $\rightarrow$ *тождество*; $4)\ \dfrac{\sqrt{6}}{3}$; $5)\ \dfrac{\pi}{8}+\dfrac{\pi n}{4}, n\in Z.$

Уровень Д: 1) 1; 2) $x=\pi n$ *или* $x=\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{\pi n}{4}, n\in Z$; 3) $1+\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+4\alpha\right)+\sin 8\alpha=$

$=1-\sin 8\alpha+\sin 8\alpha=1$; 4) 0; 5) $\dfrac{\pi}{6}$.

§6. Констатирующий и поисковый этапы эксперимента

Констатирующий и *поисковый* этапы эксперимента проводились на базе МБУ «Лицей №19» г. о. Тольятти в 2016/17 уч. г. В нём приняли участие учителя математики (8 человек), обучающиеся 10 классов (51 человек) и 8 класса (25 человек).

В ходе *констатирующего этапа* экспериментального исследования проводилось изучение современного состояния вопросов использования в обучении математике дифференцированных домашних заданий. Основными *задачами* данного этапа эксперимента являлись рассмотрение основных видов дифференцированных домашних заданий, получивших распространение в практике учителей математики, приёмов и принципов дифференциации учебных заданий и методики их реализации; наблюдение за деятельностью учителей и обучающихся; изучение возможностей использования дифференцированных домашних заданий в учебном процессе; выявление методических особенностей конструирования дифференцированных домашних заданий в современных условиях обучения математике.

Основные *методы* исследования: изучение опыта учителей математики по организации учебной работы с дифференцированными домашними заданиями, изучение учебно-методической документации общеобразовательной школы, анкетирование учителей (Приложение 2) и обучающихся (Приложение 3).

Анкетирование учителей математики по вопросам использования разнообразных видов дифференцированных домашних заданий по математике, систематичности и эффективности такой работы в процессе обучения позволило сделать следующие выводы:

1. Все опрошенные учителя математики *(100%)* считают, что домашнее задание – обязательный компонент учебного процесса.

2. Под дифференцированным домашним заданием большая часть учителей математики *(90%)* понимают домашнее задание, составленное для обучающихся класса, объединённых в группы по уровню знаний, умений и навыков; лишь небольшая часть *10%* отметили другие критерии распределения обучающихся по группам (уровню самостоятельности, по уровню развития памяти, уровню выполнения мыслительных операций и др.).

3. Большинство учителей математики *(80%)* считают целесообразным не частое использование дифференцированных домашних заданий.

4. Лишь *10%* учителей регулярно задают на дом дифференцированные домашние задания.

5. Чаще всего в качестве дифференцированных домашних заданий учителя математики используют самостоятельные, контрольные, тестовые работы, проектные задания, с использованием социальных сетевых сервисов и видео-контента, электронные презентации; реже – домашние лабораторные, практические работы, написание сочинений, сказок, домашние задание на составление задач и на работу с текстом учебника.

6. Все опрошенные учителя отметили повышение интереса у обучающихся к разнообразным видам дифференцированных домашних заданий, а именно указали на то что они всегда проявляют интерес *85%*, иногда – *15%*.

7. Все опрошенные учителя считают, что использование дифференцированных домашних заданий разнообразных видов улучшает качество усвоения учебного материала.

8. Основными причинами, которые препятствуют регулярному использованию дифференцированных домашних заданий разных видов стали: недостаточное методическое и техническое обеспечение учебного процесса, нехватка времени, трудоёмкость процесса организации.

Анкетирование обучающихся с целью изучения отношения школьников к домашней работе по математике показало следующее:

1. Большинство опрошенных обучающихся *(70%)* отрицательно относятся к домашним заданиям по математике и основными причинами такого отношения называют однотипные домашние задания *55%* и отсутствие помощи со стороны учителя *34%*.

2. Выполняют домашнее задание регулярно *65%* обучающихся.

3. Основные причины нерегулярного выполнения домашнего задания большинство обучающихся видят в большом объёме домашней работы *35%*, нерегулярной проверке со стороны учителя *10%* и однотипных заданиях *55%*.

4. По мнению респондентов, разнообразные виды домашних заданий им предлагаются в основном 1-2 раза в месяц.

5. Большинство обучающихся отметили, что выполняли бы систематические разнообразные виды домашних заданий с удовольствием *55%* и, если бы учитель оказывал соответствующую помощь *36%*.

Таким образом, установлено, что:

1. Большинство учителей математики используют в своей практике в определённой степени регулярности разнообразные виды дифференцированных домашних заданий и считают, что их применение оказывает положительную динамику в мотивации обучающихся и улучшает качество усвоения учебного материала. С другой стороны, учителя математики указывают на некоторые причины (недостаточное методическое и техническое обеспечение учебного процесса, нехватка времени, трудоёмкость процесса организации) которые препятствуют регулярному осуществлению этой работы.

2. Обучающиеся в большинстве своём выполняют домашние задания по математике, но отрицательно к ним относятся ввиду отсутствия разнообразия в предлагаемых вариациях этих заданий, а также помощи со стороны учителя.

Полученные *результаты* констатирующего этапа эксперимента показывают актуальность использования разных видов дифференцированных домашних заданий по математике, их положительное влияние на мотивацию и успеваемость обучающихся и необходимость разработки дифференцированных домашних заданий и методики их реализации в современных условиях обучения математике. В *результате* данного этапа экспериментального исследования были выявлены методические особенности конструирования дифференцированных домашних заданий и окончательно сформулирована гипотеза проводимого исследования.

Цель поискового этапа экспериментального исследования состояла в апробации определенных видов дифференцированных домашних заданий по математике и методики их реализации в современных условиях обучения.

В *результате* данного этапа экспериментального исследования была разработана система дифференцированных домашних заданий по теме «Преобразование тригонометрических выражений» для обучающихся 10 классов математического профиля общеобразовательной школы (§5).

Апробация отдельных видов дифференцированных домашних заданий на практике была осуществлена в 8 классе математического профиля по теме «Квадратные корни» (Приложение 4). Дифференцированные домашние задания были составлены на 24 урока по УМК Ю.Н. Макарычева, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешкова и др [2, 3]. Использовались разнообразные виды дифференцированных домашних заданий: домашние самостоятельные, контрольные, тестовые работы, домашние практические работы, домашние сочинения, домашние задание на составление задач и на работу с текстом учебника, домашние задания с использованием социальных сетевых сервисов и видео-контента, электронные презентации (сетевые блоги, соц. сети, соц.

хранилища, видео материалы онлайн, виртуальные лаборатории и др.) (Приложение 5).

В результате *апробации* отдельных видов дифференцированных домашних заданий было выявлено повышение уровня усвоения математических знаний, умений и навыков и формирование положительного отношения к выполнению домашних заданий. Истинность данного утверждения была установлена по критерию степени овладения материалами учебной программы. Средний балл успеваемости по выполнению домашних заданий был взят в качестве основного показателя.

Выводы по второй главе

При изучении *методических основ* дифференциации домашних заданий математике были сделаны следующие *выводы*:

1. На основе анализа существующих методик по организации дифференцированной домашней работы по математике обучающихся общеобразовательной школы в современных условиях обучения выявлены методические особенности дифференциации домашних заданий, которые состоят в:

-разработке содержания для всех уровней знаний и умений по теме в соответствии с учебным планом (*типологические группы* обучающихся *А, В*, *С* и *Д*);

-подборе и составлении *домашних заданий* разных типов (алгоритмические, полуэвристические, эвристические) для всех уровней (*А, В, С* и *Д*) на каждом этапе изучения темы (используя известные *приёмы дифференциации заданий*);

- использовании определенного вида домашней работы для всех уровней на каждом этапе изучения темы в соответствии с типом задания.

2. В соответствии с выявленными методическими особенностями дифференциации домашних заданий разработана система дифференцированных домашних заданий для обучающихся 10 классов

математического профиля по теме «Преобразование тригонометрических выражений» и методика их реализации в современных условиях обучения.

3. В результате *апробации* отдельных видов дифференцированных домашних заданий было выявлено повышение уровня усвоения математических знаний, умений и навыков и формирование положительного отношения к выполнению домашних заданий.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В процессе диссертационного исследования «Дифференциация домашних заданий по математике как средство повышения качества обучения обучающихся общеобразовательной школы» в соответствии с целью и задачами были получены выводы и результаты.

1. Обоснована роль дифференцированных домашних заданий как средства повышения качества обучения математике в общеобразовательной школе.

2. Выявлены методические особенности дифференциации домашних зданий по математике для обучающихся общеобразовательной школы и разработана методика их реализации на практике.

3. Разработана система дифференцированных домашних заданий по теме «Преобразование тригонометрических выражений» с учётом особенностей типологических групп обучающихся 10 классов математического профиля общеобразовательной школы.

4. Сформулированы методические рекомендации по реализации системы дифференцированных домашних заданий в процессе обучения математике в общеобразовательной школе.

5. Апробированы некоторые инновационные виды дифференцированных домашних заданий в процессе поискового этапа экспериментального исследования.

Таким образом, дифференцированные домашние задания по математике можно рассматривать как одно из средств достижения образовательных целей, повышения качества обучения математике.

Результаты исследования показывают, что все поставленные задачи решены, а цель магистерской диссертации достигнута.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс (профильный уровень): методическое пособие для учителя / А.Г. Мордкович, П.В. Семенов. – 2-е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2010. – 239 с.
2. Алгебра. 8 класс: учеб. для общеобразоват. организаций / Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, С.Б. Суворова; под ред. С.А. Теляковского. – 21-е изд. – М.: Просвещение, 2014. – 272 с.
3. Алгебра. Дидактические материалы. 8 класс / В.И. Жохов, Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк. – 17-е изд. – М.: Просвещение, 2014. – 160 с.
4. Аммосова, Н.В. Расчетные и атестационные проекты при обучении математике как средство развития исследовательской деятельности учащихся основной школы / Н.В.Аммосова, Б.Б.Коваленко // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. – 2015. – №5. – С. 313-315.
5. Атаманская, Г.А. Организация уровневой дифференциации учащихся в процессе обучения математике /Г.А. Атаманская //Международный студенческий научный вестник. – 2014. – № 4. - С. 11.
6. Бабанский, Ю. К. Педагогика / Под редакцией Ю. К. Бабанского. – М.: Просвещение, 1983. – 479 с.

7. Бакулина, Е.А. Особенности организации домашнего задания по математике с использованием социальных сетевых сервисов /Е.А.Бакулина // Гуманитарные науки и образование. – 2014. – № 4 (20). – С. 8-11.

8. Бакулина, Е.А. Проектные домашние задания по математике как средство интеграции деятельности учителя и учащихся /Е.А. Бакулина // Интеграция образования. – 2011. – № 3. – С. 60.

9. Бакулина, Е.А. Теория и практика домашнего задания в современных условиях обучения математике учащихся средних общеобразовательных учреждений: дис. … канд. пед. наук / Е.А.Бакулина: Мордовский государственный педагогический институт им. М.Е. Евсевьева. – Саранск, 2012. – 158 с.

10. Блинова, Т.Л. Реализация уровневой дифференциации посредством сочетания методов решения геометрических задач /Т.Л. Блинова // Образование и наука в современных условиях. – 2015. – №3. – с. 54-56.

11. Бойкова, А.С. Технология дифференцированного обучения на уроках математики (из опыта работы) /А.С. Бойкова // Подготовка учителя на физико - математическом факультете МГОГИ: Традиции и перспективы (к 70-летию со дня рождения Владимира Николаевича Гусева): матер. IV научно – практ. конф. – Орехово – Зуево, 24 марта 2014. – С. 36-37.

12. Большова, Е.А. Актуальные проблемы организации домашней работы по математике учащихся общеобразовательной школы //Математика и математическое образование: современные тенденции и перспективы развития: материалы Всероссийской научно-практической конференции, г. Саранск, 27 ноября 2015 г.– Саранск: Мордов. гос. пед. ин-т., 2015. – С. 159-162.

13. Большова, Е.А. Дифференцированные домашние задания по математике как средство повышения качества обучения учащихся общеобразовательных школ //Математика: фундаментальные и прикладные исследования и вопросы образования [Электронный ресурс]: материалы Международной научно-практической конференции, 26-28 апреля 2016 года

/под общ. ред. канд. физ.-мат. наук, доц. Е.Ю. Лискиной; Ряз. гос. ун-т имени С.А. Есенина. – Рязань, 2016. – С. 362-367.

14. Большова, Е.А. Инновационные виды домашних заданий по математике с использованием информационных и коммуникационных технологий //Актуальные проблемы обучения математике и информатике в школе и вузе в свете идей Л.С. Выготского: материалы III Международной научной конференции, 17 – 19 ноября 2016 г. - ФГБОУ ВО «Московский педагогический государственный университет» (МПГУ), Издатель Захаров С.И. («СерНа»), 2016. – С. 23-26.

15. Большова, Е.А. Методическая подготовка учителя математики к организации домашней работы учащихся / Е.А. Большова, Р.А. Утеева // Школьное математическое образование: традиции и инновации: материалы Всерос. науч. конф. г. Ульяновск, 20-22 октября 2010 г.; под ред. И. В. Столяровой; Ульян.гос. пед. ун- т. – Ульяновск, 2010. – С.82-86.

16. Большова, Е.А. Организация дифференцированной работы учащихся по математике //Естественно-научное и математическое образование: современные методики и инновации, опыт практического применения: материалы Всероссийской заочной научно-практической конференции 15 апреля 2016 года – Москва: Издательство «ДРОФА», 2016. – С. 91-97.

17. Большова, Е.А. Приемы дифференциации домашних заданий по математике //Бюллетень лаборатории математического, естественнонаучного образования и информатизации: материалы Международной научно-практической конференции «Математическое, естественнонаучное образование и информатизация». – Самара; М.: Самарский филиал МГПУ, 2015. – С.84-90.

18. Большова, Е.А. Приемы работы с текстом учебника в домашних заданиях по математике //Актуальные проблемы естественнонаучного и математического образования: материалы Международной научно-

практической конференции. 2-3 декабря 2016 года, г. Самара. – Самара: СГСПУ, 2016. – С. 176 - 180.

19. Большова, Е.А. Роль домашних заданий по математике в повышении качества обучения учащихся в зарубежных школах // Математика и математическое образование: сборник трудов VIII Международной научной конференции «Математика. Образование. Культура» (к 240-летию со дня рождения Карла Фридриха Гаусса), 26-29 апреля 2017 года, Россия, г. Тольятти / под общ. ред. Р.А. Утеевой. – Тольятти: Изд-во ТГУ, 2017. – С. 406-410.

20. Большова, Е.А. Формы и методы проверки домашних заданий учащихся по математике //Математика и математическое образование: сборник трудов VII Международной научной конференции «Математика. Образование. Культура» (Россия, г. Тольятти, 27-29 апреля 2015 года) – Тольятти: Изд-во ТГУ, 2015. – С.108-111.

21. Борисова, А.М. Дифференцированное обучение и оценивание знаний учащихся по математике (общеобразовательный уровень подготовки): дис. … канд. пед. наук /А.М. Борисова– Новосибирск, 2002. – 185 с.

22. Вольхина, И.Н. Дифференциация обучения математике учащихся предпрофильных классов (с использованием системы упражнений прикладного характера): дис. … канд. пед. наук /И.Н.Вольхина – Новосибирск, 1998. – 202 с.

23. Гачин, А.Н. Домашнее задание как важный компонент непрерывного образования / А.Н.Гачин // Научно-методический электронный журнал "Концепт". – 2014. – № 12. – С. 51-55.

24. Гласман, Н.С. Дифференциация обучения математике учащихся 5-6 классов физико – математического профиля: дис. … канд. пед. наук / Н.С. Гласман– Новосибирск, 2000. – 220 с.

25. Глизбург, В.И. Алгебра и начала анализа. Контрольные работы для 10 класса общеобразовательных учреждений (профильный уровень) / В.И. Глизбург; под. ред. А.Г. Мордковича. – М.: Мнемозина, 2007. – 62 с.

26. Голуб, Б.А. Основы общей дидактики. Учеб. пособие для студ. педвузов/ Б.А.Голуб – М.: Туманит, изд. центр ВЛАДОС, 1999. – 96 с.

27. Груденов, Я.И. Совершенствование методики работы учителя математики: Кн. для учителя / Я.И. Груденов– М.: Просвещение, 1990. – С. 176- 177.

28. Гурина, И.А. Организация и методика домашних самостоятельных работ в русской дореволюционной / И.А. Гурина // Психология и педагогика: методика и проблемы практического применения. – 2009. – № 5-3. – С. 79-83.

29. Далингер, В.А. Методика реализации внутрипредметных связей при обучении математике: Кн. для учителя / В.А. Далингер– М.: Просвещение, 1991. – 82 с.

30. Демисенова, С.В. Совершенствование подготовки будущих учителей математики в педвузе к внеклассной работе по математике в школе в условиях дифференциации обучения школьников и студентов: дис. … канд. пед. наук /С.В. Демисенова – Тобольск, 2004. – 180 с.

31. Дергачёва, А.Ф. Вариативность домашних заданий как средство индивидуализации обучения школьников: дис. … канд. пед. наук /А.Ф. Дергачёва – Санкт-Петербург, 2001. – 206 с.

32. Дидактические материалы по геометрии для 7 класса общеобразовательных учреждений / В.А. Гусев, А.И. Медяник. – 7-е изд. – М.: Просвещение, 2001. – 74 с.

33. Дидактические материалы по геометрии для 8 класса общеобразовательных учреждений / В.А. Гусев, А.И. Медяник. – 7-е изд. – М.: Просвещение, 2001. – 63 с.

34. Дидактические материалы по геометрии для 9 класса общеобразовательных учреждений / В.А. Гусев, А.И. Медяник. – 7-е изд. – М.: Просвещение, 2001. – 62 с.

35. Древелов, Х. Домашние задания: Кн. Для учителя / Х. Древелов, Д. Хесс, Х. Век ; пер. с нем. Н. С. Кабановой . – М.: Просвещение, 1989. – 77, 2 с. – на рус. яз.

36. Дробышева, И.В. Методическая подготовка будущего учителя математики к дифференцированному обучению учащихся средней школы: дис. … д-ра. пед. наук / И.В. Дробышева– М., 2001. - 431 с.

37. Епишева, О.Б. Учить школьников учиться математике: Формирование приемов учебной деятельности: кн. для учителя / О.Б.Епишева, В.И. Крупич– М.: Просвещение, 1990. — 128с.

38. Еркибаева, Г.Г. Место и роль дифференцированного обучения в обеспечении специализации учебного процесса для различных групп обучаемых //Международный журнал экспериментального образования. – 2015. – №1. – С.8-12.

39. Ершова, А.П. Самостоятельные и контрольные работы по алгебре и началам анализа для 10-11 классов: Учеб. Пособие / А.П. Ершова, В.В. Голобородько – М.: Илекса. – 2002. – 176 с.

40. Загвязинский, В.И. Теория обучения: Современная интерпретация / В.И. Загвязинский– М.: Издат. центр «Академия», 2001. – 192 с.

41. Зыкова, И.Ф. Использование математического видео-контента в качестве вспомогательного ресурса для домашнего задания // Концепция развития математического образования: проблемы и пути реализации: материалы XXXIV Международного научного семинара преподавателей математики и информатики университетов и педагогических вузов. – Калуга, 2015. – С. 204-207.

42. Зязева, Е.В. Реализация полифункциональных возможностей домашнего задания в решении образовательных задач по химии: дис. … канд. пед. наук /Е.В. Зязева – Тобольск, 1998. – 184 с.

43. Керимова, С.Б.К. Об использовании дифференцированного подхода в обучении математическому анализу будущих учителей математики.

/ Керимова С.Б.К. // Ярославский педагогический вестник. – 2014. – Т.2. – №3. – С.73-78.

44. Киричек, Г.А. Индивидуальный подход к учащимся при уровневой дифференциации изучения темы "Неравенства" в курсе алгебры основной школы: дис. ... канд. пед. наук: 13.00.02 / Г.А. Киричек – Тольятти, 2002. – 258 с.

45. Концепция развития математического образования в Российской Федерации. Распоряжение правительства России от 24 декабря 2013 года № 2506-Р. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://минобрнауки.рф/документы/3894. – Последнее обновление 07.02.2017.

46. Крымова, Л.Н. Педагогические условия дифференцированного обучения школьников математике средствами дидактического комплекса: дис. … канд. пед. наук / Л.Н. Крымова – Барнаул, 2006. – 219 с.

47. Кузина, Н.В. Дифференцированное обучение математике на основе учета познавательных стилей обучающихся в учреждениях среднего профессионального образования: дис. … канд. пед. наук / Н.В.Кузина – Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина. – Калуга, 2009. – 203 с.

48. Левитас, Г.Г. Современный урок математики методы преподавания /Г.Г. Левитас– М.: Высш. шк., 1989. – 244 с.

49. Ляпин, С.Е. Методика преподавания математики в 8-летней школе /С.А. Гастаева, Б.И.Крельштейн, С.Е.Ляпин, М.М. Шидловская – М., Просвещение, 1965. – 745 с.

50. Лященко, Е.И. Лабораторные и практические работы по методике преподавания математики: учеб. пособие для студентов физ.-мат. спец.пед. ин-тов / Под ред. Е.И.Лященко. – М.: Просвещение, 1988. - 223 с.

51. Манвелов, С.Г. Конструирование современного урока математики: кн. для учителя – 2-е изд. – М.: Просвещение, 2005 – 131с.

52. Математика. Алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс.

Углубленный уровень: учеб. для общеобразоват. учеб. заведений/ Г. К. Муравин, О. В. Муравина. – М.: Дрофа, 2013. – 320 с.

53. Математика. Алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс. Базовый уровень: учеб. для общеобразоват. учеб. заведений/ Г. К. Муравин, О. В. Муравина. – М.: Дрофа, 2013. – 288 с.

54. Математика. Алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс. В 2 ч. Ч. 2. Задачник для учащихся общеобразовательных учреждений (профильный уровень) / [А. Г. Мордкович и др.] под ред. А. Г. Мордковича – 6-е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2009. – 343 с.

55. Математика. Алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс. В 2 ч. Ч. 1. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений (профильный уровень) / А. Г. Мордкович, П. В. Семенов. – 6-е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2009. – 424 с.

56. Математика. Алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала анализа. 10 – 11 кл.: Задачник для общеобразоват. учреждений / А. Г. Мордкович, Л.О. Денищева, Т.А. Корешкова, Т.Н. Мишустина, Е.Е. Тульчинская. – 3-е изд., испр. – М.: Мнемозина, 2005. – 315 с.

57. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа (базовый и углублённый уровни). 10-11 классы: учеб. для общеобразоват. учеб. заведений / Алимов Ш.А., Колягин Ю.М., Ткачёва М.В. и др. – М.: Просвещение, 2012. – 463с.

58. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа (базовый и углублённый уровни). 11 класс: учеб. для общеобразоват. учеб. заведений /

Ю. М. Колягин, М. В. Ткачёва, Н. Е. Фёдорова и др.; под ред. А. Б. Жижченко. – 2-е изд. – М.: Просвещение, 2010. – 336с.

59. Методика и технология обучения математике. Курс лекций: пособие для вузов / под науч. ред. Н.Л. Стефановой, Н.С. Подходовой. – М.: Дрофа, 2007. – 416 с.

60. Методика преподавания математики в средней школе. Общая методика: учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак. пед.ин-тов. / Ю.М.Колягин, В.А.Оганесян, В.Я. Саннинский, Г.Л. Луканкин. – М.: Просвещение, 1975. – 462 с.

61. Методика преподавания математики в средней школе. Частные методики. Учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. ин-тов / Ю.М. Колягин, Г.Л. Луканкин, Е.Л. Мокрушин и др. – М.: Просвещение, 1977. – 480 с.

62. Методика преподавания математики в средней школе: Частная методика: Учеб. пособие для студентов пед. ин-тов по физ.мат. спец./ А.Я. Блох, В.А. Гусев, Г.В. Дорофеев и др.; Сост. В.И. Мишин. – М.: Просвещение, 1987. – 416 с.

63. Мордкович, А.Г. Алгебра и начала анализа. 10-11 кл.: Контрольные работы для общеобразоват. учреждений / А.Г. Мордкович, Е.Е. Тульчинская– 2-е изд. – М.: Мнемозина, 2003. – 62 с.

64. Морозов, Е.А. Организация внеурочной самостоятельной деятельности по математике / Е.А.Морозов, А.В.Морозова,А.В. Новоселов // Проблемы современного образования. – 2015. – № 3. – С. 97-107.

65. Муртазина, О.В. Домашние экспериментальные работы как средство активизации познавательной деятельности учащихся: дис. ... канд. пед. наук: 13.00.01/ О.В. Муртазина – М., 2004. – 123 с.

66. Никаноркина, Н.В. Подготовка будущего учителя математики к использованию задач как средства дифференциации обучения учащихся средней школы: дис. … канд. пед. наук / Н.В.Никаноркина– М., 2006. – 212 с.

67. Новик, И.А. Практикум по методике обучения математике: учеб. пособие / И.А. Новик, Н.В. Бровка– М.: Дрофа, 2008. – 236 с.

68. Овсянникова, Т.Л. Дифференцированные учебные задания как средство систематизации знаний студентов при изучении аналитической геометрии: дис. … канд. пед. наук / Овсянникова Т.Л. – Орел, 1998. – 153 с.

69. Оглуздина, А.В. Приёмы работы с текстом учебника на уроках математики // Современная образовательная практика и духовные ценности общества: материалы II Международной научно-методической конференции. – Череповец, 2015. – С.251-257.

70. Паскевич, Н.В. Формирование и развитие познавательной активности учащихся старшего подросткового возраста в процессе дифференцированного обучения (на примере обучения математике): дис. … канд. пед. наук / Н.В.Паскевич – Пензенский государственный педагогический университет им. В.Г. Белинского. - Пенза, 2009. – 148 с.

71. Педагогика: учебник для студ. учреждений высш. проф. образования / П.И.Пидкасистый, В.А.Мижериков, Т.А. Юзефавичус; под ред. П. И. Пидкасистого. –2-е изд., перераб. и доп. – М.: Издательский центр «Академия», 2014. – 624 с.

72. Педагогика: Учебное пособие для студентов педагогических учебных заведений / В.А.Сластенин, И.Ф.Исаев, А.И.Мищенко, Е.Н.Шиянов. — М.: Школа-Пресс, 1997. – 512 с.

73. Подласый, И.П. Педагогика. Новый курс: Учебник для студ. пед. вузов: В 2-ух кн. Кн. 1: Общие основы. Процесс обучения – М.: Гуманит. изд. центр ВЛАДОС, 1999. – 576 с.

74. Приказ Минобразования РФ от 5 марта 2004 г. N 1089 "Об утверждении федерального компонента государственных образовательных стандартов начального общего, основного общего и среднего (полного) общего образования" (с изменениями и дополнениями). [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://base.garant.ru/6150599/

75. Примерные программы основного общего образования по учебным предметам. Математика (Одобрено Федеральным учебно-методическим объединением по общему образованию. Протокол заседания от 8 апреля 2015 г. № 1/15) [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://muravin 2007 .narod .ru/download/Programma_-mat_2015_0.pdf

76. Рабочие программы по алгебре и началам математического анализа: 10 – 11 классы / Сост. Г. И. Маслакова. – М.: ВАКО, 2012. – 144с.

77. Рабочие программы. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. 10-11 классы: учебно-методическое пособие / Сост. О.В. Муравина. – М.: Дрофа, 2013. – 192 с.

78. Репьев, В.В. Общая методика преподавания: Пособие для пед. ин-тов / В.В. Репьев– М.: Учпедгиз, 1958. – 224 с.

79. Рогозина, Т.В. Система домашних заданий как фактор обеспечения качества образовательного процесса: дис. … канд. пед. наук /Т.В.Рогозина – Российский государственный педагогический университет им. А.И. Герцена. – Санкт-Петербург, 2011 – 245 с.

80. Родионов, М.А. Многомерный подход к оценке эффективности домашней учебной работы школьников по математике /М.А.Родионов, Н.Н.Храмова // Известия Пензенского государственного педагогического университета им. В.Г. Белинского. – 2010. – № 22. – С. 231-233.

81. Руденко, В.Н. Об использовании домашнего задания при изложении новогоматериала / Преподавание алгебры и геометрии в школе: Пособие для учителей /Сост. О.А. Боковнев. – М.: Просвещение, 1982. –С. 30-38.

82. Салангина, Н.Я. Возможности организации домашней работы в условиях информационной образовательной среды /Н.Я.Салангина, О.Л.Мнацаканян // Наука и школа. – 2011. –№ 3. – С. 40-45.

83. Саранцев, Г.И. Методика обучения математике в средней школе: Учеб. пособие для студентов мат. спец. пед. вузов и ун-тов /Г.И. Саранцев – М.: Просвещение, 2002. – 224с.

84. Селевко, Г.К. Энциклопедия образовательных технологий. В 2-х т. Т. 1. – М.: Народное образование, 2005. – 816 с.

85. Ситникова, О.И. Электронные презентации как вид домашнего задания /О.И.Ситникова, А.В.Соловьева // Инновации на основе информационных и коммуникационных технологий. – 2013. – С. 121-122.

86. Скотникова, Н.М. Дифференцированная зачетная система контроля и оценки деятельности учащихся 5-6 классов при обучении математике: дис. … канд. пед. наук / Скотникова Н.М. – Санкт-Петербург, 1998. – 130 с.

87. Смыковская, Т.К. Технология дифференцированного обучения учащихся 7-9 классов решению текстовых задач алгебраическим методом/ Т.К.Смыковская, Ю.А.Машевская, О.М. Вихляева // Фундаментальные исследования. – 2014. – № 12-11. – С. 2468-2472.

88. Степанова, Л.В. Развитие творческой самостоятельности учащихся 5-6 классов в процессе домашней учебной работы: дис. … канд. пед. наук / Л.В. Степанова – Якутск, 1999. – 149 с.

89. Теоретические основы обучения математике в средней школе: учеб. пособие / Т. А. Иванова, Е. Н. Перевощикова, Т. П. Григорьева и др.; под ред. проф. Т. А. Ивановой. – Н. Новгород: НГПУ, 2003. – 320 с.

90. Тригонометрия: Задачник к школьному курсу /А.Г. Мерзляк, В.Б.Полонский, Е.М.Рабинович, М.С. Якир– М.: АСТ-ПРЕСС: Магистр-S, 1998. – 656 с.

91. Унт, И.Э. Индивидуализация и дифференциация обучения / И.Э. Унт – М.: Педагогика, 1990. – 192 с.

92. Утеева, Р.А. Дифференцированное обучение математике учащихся средней школы: Пособие по спецкурсу и спецсеминару для студентов математических специальностей педагогических вузов / Р.А. Утеева – М.: Прометей. – 1996. – 118 с

93. Утеева, Р.А. Дифференцированные задания по математике: 6 класс: Пособие для учителя / Р.А. Утеева – Тольятти, 1996. – 53 с.

94. Утеева, Р.А. Теоретические основы организации учебной деятельности учащихся при дифференцированном обучении математике в средней школе: Монография. – М.: Прометей, 1997. – 230 с.

95. Утеева, Р.А. Теоретические основы организации учебной деятельности учащихся при дифференцированном обучении математике в средней школе: дис. … д-ра. пед. наук /Р.А. Утеева – М. – 1998. – 363 с.

96. Фахрутдинова, Р. Роль домашних заданий в повышении качества знаний учащихся 7 класс / Р.Фахрутдинова // Математика. – 2004.– № 15. – С. 14-15, 23.

97. Филоненко, Л.А. Учебные исследования в домашних заданиях по математике как средство развития творческой самостоятельности учащихся 5-6: дис. … канд. пед. наук /Л.А. Филоненко – Омск, 2004. – 216 с.

98. Харламов, И.Ф. Педагогика/ И.Ф. Харламов – М.: Гардарики, 1999. – 520 с.

99. Холодная, М.А. Развивающие учебные тексты как средство интеллектуального воспитания учащихся / М.А. Холодная, Э.Г. Гельфман– М.: Изд-во «Институт психологии РАН», 2016. – 200 с.

100. Черкасов, Р.С. Методика преподавания математики в средней школе / Р.С. Черкасов, А.А. Столяр– М.: Просвещение, 1985. – 336с.

101. Шахмейстер, А.Х. Тригонометрия / А.Х.Шахмейстер – 3-е изд. – Спб.: «Петроглив»: М.: Изд-во МЦНМО: ИД КДУ, 2013. – 752 с.

102. Юнина, Е.А. Технологии качественного обучения в школе. Учебно-методическое пособие /Е.А. Юнина– М.: Педагогическое общество России, 2007. – 224 с.

103. A. Kitsantas, J. Cheema, Herbert W. (2011). Ware Mathematics Achievement: The Role of Homework and Self-Efficacy Beliefs [Electronic version]. Journal of Advanced Academics, 2, 310-339. – Режим доступа: https://www.eosmith.org/uploaded/Library/Student_Services/Main_Office /Mathematics_Achievement_The_Role_of_Homework_and_Self-Efficacy _Beliefs. pdf

104. Adebule Samuel Olufemi. (2014). The Effect of Homework Assignment on Mathematics Achievement of Secondary School Students in South West Nigeria [Electronic version]. Journal of Education and Practice, 28, 52-55. – Режим доступа: http://www.iiste.org/Journals/index.php/JEP/article/download/16124/16323

105. Maggie Pickering. (2009). Cooperative Grouping Working on Mathematics [Electronic version]. Action Research Projects. Paper 46 – Режим доступа: http://digitalcommons.unl.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1047&context = mathmidactionresearch

106. Mara G. Landers. (2013). Towards a theory of mathematics homework as a social practice [Electronic version]. Educational Studies in Mathematics an International Journal, 3, 372-391. – Режим доступа: http://www.researchgate.net/publication/257557312_Towards_a_theory _of_ mathematics_homework_as_a_social_practice

107. Mara Landers. (2013). Buying in and Checking Out: Identity Development and Meaning Making in the Practice of Mathematics Homework [Electronic version]. Qualitative Research in Education, 2(2), 130-60. – Режим доступа: http://www.hipatiapress.info/hpjournals/index.php/qre/article/download /4 20 /6 25

108. Nicole Schrat Carr. (2013) Increasing the Effectiveness of Homework for All Learners in the Inclusive [Electronic version]. School Community Journal, 1, 169-182. – Режим доступа: http://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ1004337.pdf

109. Parmjit Singh, Sidhu G. K.,Chan Yuen Fook. (2013). Malaysian Parents' Practices and Perspectives on the Organization of School Homework [Electronic version]. Pertanika Journal of Social Sciences & Humanities, 3, 1019-1038. – Режим доступа: http://www.pertanika.upm.edu.my/Pertanika%20PAPERS/JSSH%20Vol.%202 1%20(3)%20Sep.%202013%20(View%20Full%20Journal).pdf

110. Patricia Deubel. (2007). Homework: A Math Dilemma and What To Do About It [Electronic version]. The Journal Transforming Education Through Technology. – Режим доступа:

https://thejournal.com/articles/2007/10/22/homework-a-math-dilemma-and-wh at-to-do-about-it.aspx

111. Peter Grootenboer. (2009). Homework and Learning Mathematics [Electronic version]. Australian Primary Mathematics Classroom, 4, 11-15. – Режим доступа: http://www.researchgate.net/publication/234680035_Homework_and_Learning_Mathematics

Приложение 1

Ход работы по построению интерактивной модели в виртуальной лаборатории «1С: Математический конструктор» представлен ниже (рисунки 1.1-1.4).

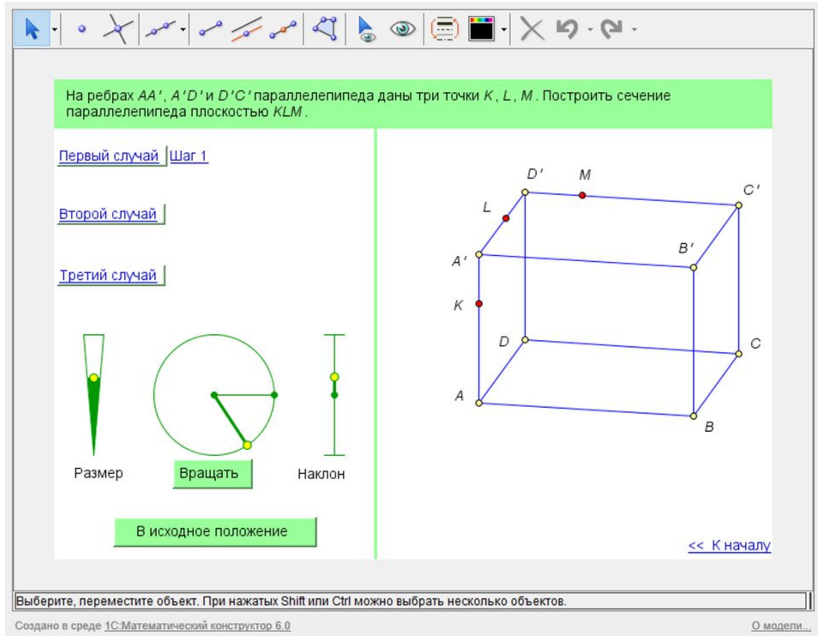

Рисунок 1.1. Построение интерактивной модели в виртуальной лаборатории «1С: Математический конструктор»

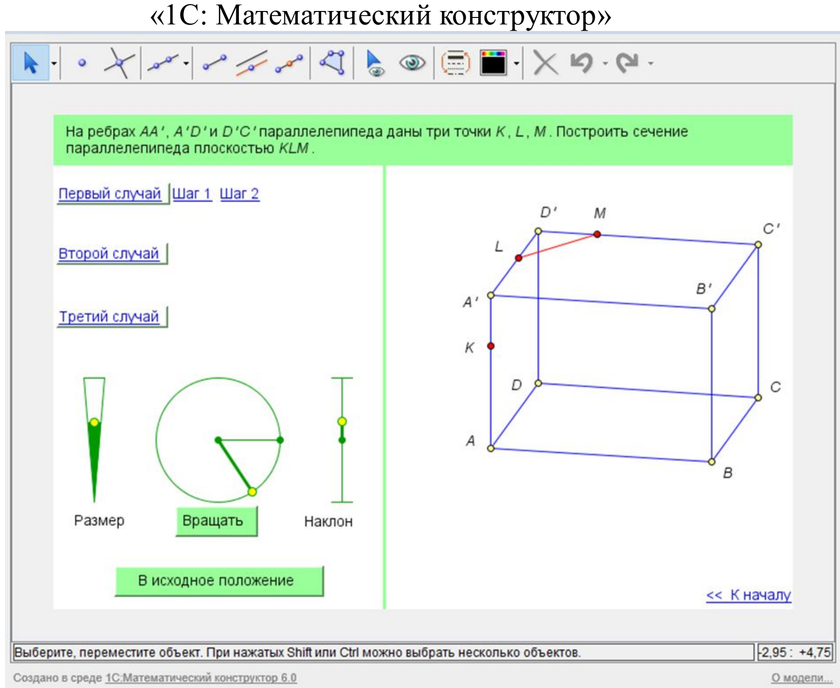

Рисунок 1.2. Построение интерактивной модели в виртуальной лаборатории «1С: Математический конструктор»

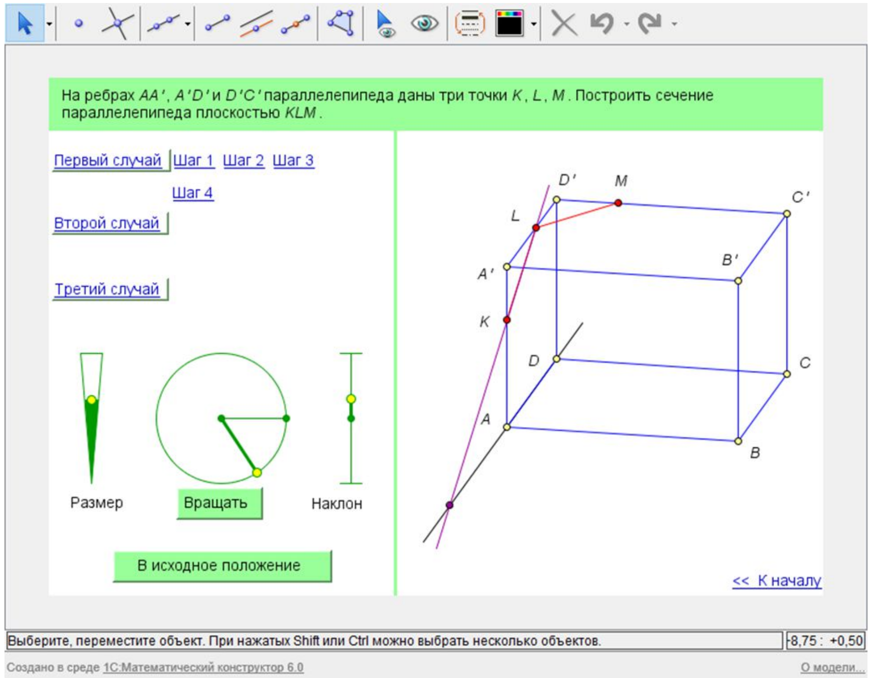

Рисунок 1.3. Построение интерактивной модели в виртуальной лаборатории «1С: Математический конструктор»

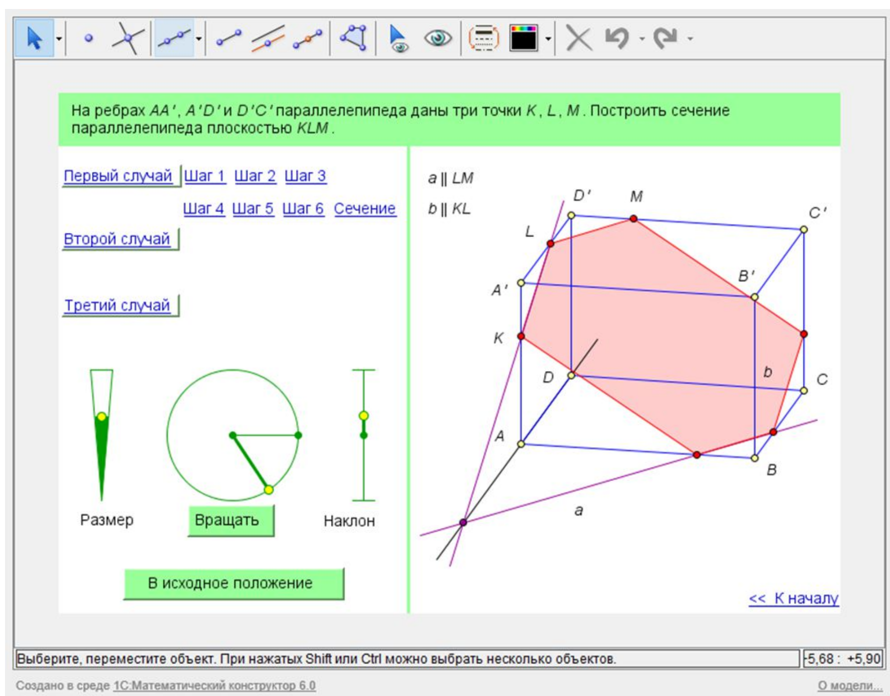

Рисунок 1.4. Построение интерактивной модели в виртуальной лаборатории «1С: Математический конструктор»

Приложение 2

Анкета для учителей

1. Считаете ли Вы домашнее задание обязательным компонентом учебного процесса?

2. Что Вы понимаете под дифференцированным домашним заданием?

3. Считаете ли Вы целесообразным использование дифференцированных домашних заданий по каждой теме?

а) да; б) нет.

4. Как часто Вы на практике используете дифференцированные домашние задания в учебном процессе?

а) всегда;

б) иногда по отдельным темам или разделам;

в) никогда.

5. Какие виды дифференцированных домашних заданий Вы чаще всего используете (расставьте ответы в приоритетном порядке от 1 (чаще всего) до 8 (реже всего))?

- Домашние самостоятельные, контрольные, тестовые работы.
- Домашние лабораторные, практические работы.
- Написание сочинений, сказок.
- Домашние задание на составление задач.
- Проектные домашние задания.
- Домашние эксперименты и учебные исследования.
- Домашние задания с использованием социальных сетевых сервисов и видео-контента, электронные презентации (сетевые блоги, соц. сети, соц. хранилища, видео материалы онлайн, виртуальные лаборатории и др.)
- Домашняя работа с текстом учебника.

Альтернативный ответ: а) использую все виды систематически; б) использую все виды периодически; б) не использую.

6. Наблюдаете ли Вы повышение интереса у обучающихся к разнообразным видам дифференцированных домашних заданий?

а) всегда проявляют интерес;

б) иногда проявляют интерес;

в) не проявляют интерес.

7. Считаете ли Вы, что использование дифференцированных домашних заданий разнообразных видов улучшает качество усвоения учебного материала?

8. Какие препятствия видите в регулярном использовании дифференцированных домашних заданий разных видов?

Приложение 3

Анкета для обучающихся

1. Выскажите своё отношение к домашним заданиям по математике?

а) положительное;

б) отрицательное;

в) нейтральное.

2. Укажите причину Вашего отношения к домашним заданиям по математике:

а) мне нравится предмет;

б) учитель предлагает разнообразные интересные задания;

в) не нравится предмет;

г) учитель предлагает однотипные задания;

д) мне всё равно, делаю домашнее задание, чтобы не получить «2»;

е) часто не понимаю домашнее задание;

ж) учитель не оказывает необходимую помощь;

з) свой вариант ответа.

3. Выполняете ли Вы домашние задания по математике?

а) всегда выполняю;

б) иногда выполняю;

в) никогда не выполняю.

4. Укажите основную причину, по которой Вы не выполняете или не регулярно выполняете домашнее задание по математике:

а) много заданий, не успеваю;

б) часто не вижу смысла в их выполнении;

в) не регулярная проверка со стороны учителя;

г) однотипные задания;

д) не понимаю задание;

е) свой вариант ответа.

5. Как часто учитель предлагает разнообразные виды домашних заданий по математике (учебные проекты, исследования, практические работы, с использованием ИКТ и интернета и др.):

а) каждый урок;

б) 1-2 раза неделю;

в) 1-2 раза в месяц;

г) от случая к случаю;

д) не помню; е) свой вариант ответа.

6. Вам понравилось если бы учитель каждый урок предлагал разнообразные виды домашних заданий по математике (учебные проекты, исследования, практические работы, с использованием ИКТ и интернета и др.)?

а) Да, с удовольствием бы выполнял домашнее задание;

б) да, если бы учитель оказывал помощь;

в) нет, думаю не справлюсь;

г) мне всё равно, буду выполнять, что скажут;

д) свой вариант ответа.

Приложение 4

В таблице (таблица 4) и на графике (рисунок 2) приведены результаты обучающихся 8 «В» класса МБУ лицея №19 по выполнению домашних заданий по математике в сентябре и октябре месяце 2016 года.

Таблица 4

Анализ результатов по выполнению домашних заданий

Обучающиеся	*Сентябрь 2016*	*Октябрь 2016*	*Динамика*
	Средний балл		
	Традиционные домашние задания	*Разные виды дифференцированных домашних заданий*	
1. Д. М.	4	4.8	+0.8
2. М. Е.	3	3.9	+0.9
3. Д. А.	2.4	2.9	+0.5
4. С. С.	4.3	4.8	+0.5
5. М. И.	2.2	2.9	+0.7
6. В. О.	3.4	4.4	+1
7. И. А.	4.4	4.8	+0.4
8. Е. С.	4.3	4.7	+0.4
9. А. И.	3.2	3.7	+0.5
10. А. М.	5	5	0
11. Е. Д.	3.8	4.3	+0.5
12. Д. Я.	2.6	3.3	+0.7
13. Д. А.	4	4.6	+0.6
14. Л. Ю.	3.7	4.2	+0.5
15. Ю. Н.	3.6	4	+0.4
16. И. В.	3.9	4.3	+0.4
17. А. Д.	4.1	4.8	+0.7
18. М. С.	3	3.8	+0.8
19. А. О.	3	3.7	+0.7
20. Д. Н.	2.9	3.3	+0.4
21. Ю. В.	4.3	4.8	+0.5
22. Н. Н.	4.5	5	+0.5

23. Н. С.	2.1	2.9	+0.8
24. А. Л.	2.4	2.8	+0.4
25. И. И.	5	5	0

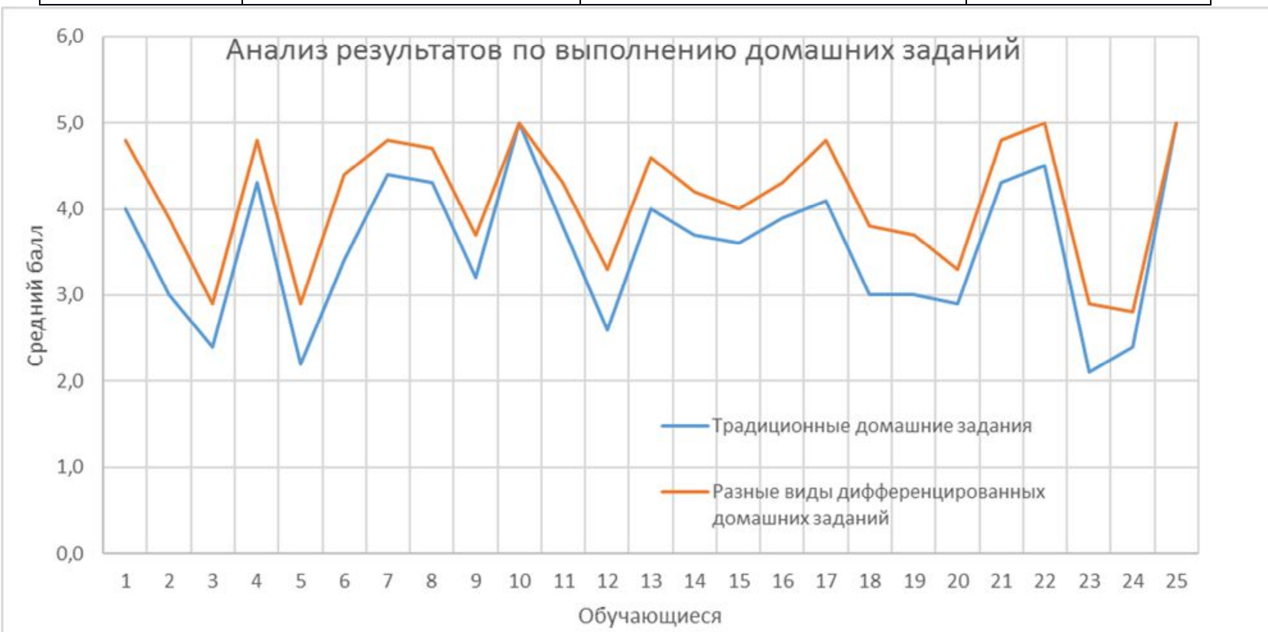

Рисунок 2. Анализ результатов по выполнению домашних заданий

Приложение 5

Дифференцированные домашние задания с использованием приёмов работы с текстом учебника по теме «Действительные числа» представлены в таблице (таблица 5).

Таблица 5

Дифференцированные домашние задания с использованием приёмов работы с текстом учебника

Уровень	*Задания полуэвристического типа*	*Задания эвристического типа*
А	Составить «Синквейн»	Самостоятельно составить примеры и задания по теме
В	Представить графически «Действительные числа»	Составить «Синквейн»
С	Составить кластер	Представить графически «Действительные числа»
Д	Составить «Таблицу верных и неверных утверждений»	Составить кластер

Методические рекомендации

1. *Приём «Таблица верных и неверных утверждений»* позволяет организовать домашнюю работу на этапе формирования знаний и умений по теме. Учащимся предлагается по тексту учебника составить несколько утверждений уже знакомой теме. Среди них должны быть верные и неверные. Такую таблицу можно использовать в качестве проверочной работы для всего класса на следующем уроке.

Задание для обучающихся: составить таблицу верных и неверных утверждений по §5 «Действительные числа».

2. *Кластер* – это способ графической организации материала, позволяющий сделать наглядными те мыслительные процессы, которые происходят при погружении в ту или иную тему. Для составления кластера необходимо посередине листа написать ключевое слово или предложение; вокруг него накидать слова или предложения, выражающие идеи, факты, образы, рисунки, связанные с данной темой; по мере записи, появившиеся слова соединяют прямыми линиями с ключевым понятием, а также между собой, если есть смысловые связи. В итоге получается структура, которая графически отображает наши размышления, определяет информационной поле данной темы.

Задание для обучающихся: составить кластер по §5 «Действительные числа».

3. Задание *представить графически* то или иное понятие предполагает перевод текстовой информации в графическую форму (схему, таблицу, диаграмму и др.) и способствует развитию базовых мыслительных операций, таких как анализ, синтез, сравнение, обобщение.

Задание для обучающихся: представить графически «Действительные числа» (по §5).

4. *Синквейн* – приём, который позволяет в нескольких словах изложить учебный материал по теме. Такой метод позволяет, работая с текстом, добиться более глубокого осмысления темы. После изучения нового понятия (определения, темы) учащимся можно предложить дома сочинить *«синквейн»* практически по любой теме школьного курса математики.

Правила составление *«синквейна»*:

- в первой строке одним словом обозначается тема или изучаемый объект (именем существительным);

- вторая строка – описание темы двумя словами, или признаков, свойств (прилагательные);

- третья – описание действий тремя словами (глаголы);

- четвёртая – фраза из 4 слов по теме;

- пятая – существительное, связанное с первым, отражающее сущность темы.

Задание для обучающихся: составить *«синквейн»* по §5 «Действительные числа».

5. *Самостоятельное составление* примеров и заданий это один из приёмов, обеспечивающих его понимание на уровне интерпретации. Задание самостоятельно придумать свои задачи предполагает составление не только задач, аналогичных представленным в тексте учебника, но и задач с необычным содержанием. В качестве разновидности такой работы можно

рассматривать составление проверочных работ для обучающихся своего класса.