МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Тольяттинский государственный университет»

Институт математики, физики и информационных технологий

Кафедра «Алгебра и геометрия»

Направление подготовки 44.03.05 «Педагогическое образование»

Направленность (профиль) «Математика и информатика»

БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА

на тему **«МЕТОД МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРИ РЕШЕНИИ ТЕКСТОВЫХ ЗАДАЧ В КУРСЕ АЛГЕБРЫ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ»**

Студент А.С. Шипилова ________________

Руководитель к.п.н., доцент Н.А. Демченкова ________________

Консультант к.п.н., А.В. Кириллова ________________

Допустить к защите

Заведующий кафедрой д.п.н., профессор Р.А. Утеева ______________

«____»__________2017 г.

Тольятти 2017

АННОТАЦИЯ

Целью бакалаврской работы является выявление методических особенностей обучения учащихся решению текстовых задач методом математического моделирования в курсе алгебры основной школы. *Объектом исследования* является процесс обучения математике в основной школе. *Предметом исследования* является математическое моделирование при решении текстовых задач в курсе математики основной школы.

Решение текстовых задач является одним из важных средств формирования у учащихся системы основных математических знаний, умений и навыков, одним из основных средств их математического развития. В современном обществе, в котором происходит математизация наук, одним из методов повышения уровня математического образования становится освоение учащимися метода математического моделирования. Способность понимать одно явление чрез другое лежит в основе метода математического моделирования как способа познания.

Бакалаврская работа состоит из введения, двух глав, заключения, списка литературы.

Глава I посвящена теоретическим основам обучения учащихся решению текстовых задач методом математического моделирования в курсе алгебры основной школы. В ней рассмотрены основные понятия и представлена классификация текстовых задач и адекватных им математических моделей.

Глава II посвящена методическим основам метода математического моделирования при решении текстовых задач в курсе алгебры основной школы. В ней представлены: анализ школьных учебников математики для общеобразовательных школ, примеры решения текстовых задач методом математического моделирования в курсе алгебры основной школы.

Список литературы содержит 54 наименования.

ABSTRACT

The key issue of the bachelor's thesis is to reveal the methodological specifics of teaching students to solve text problems by mathematical modeling in the course of algebra of the secondary school. The object of the study is the process of teaching mathematics in the secondary school. The subject of the study is mathematical modeling in solving text problems in the mathematics course of the secondary school.

The solution of text problems is one of the important means for students to develop a system of basic mathematical knowledge and skills, one of the main means of their mathematical development.

In modern society, in which the sciences mathematization is developing, one of the methods to increase the level of mathematical education is the acquirement by students of the mathematical modeling method. The ability to understand one phenomenon through another lies at the basis of the mathematical modeling method as a method of cognition.

The bachelor's thesis consists of an introduction, two chapters, a list of references, including foreign sources.

Chapter I is devoted to the theoretical basics of teaching students to solve text problems by mathematical modeling in the course of algebra of the secondary school. In it the basic concepts are considered and classification of text problems and adequate mathematical models is presented.

Chapter II is devoted to the methodological basics of the mathematical modeling method in solving text problems in the course of algebra of the secondary school. The chapter presents analysis of school textbooks, teaching aids in mathematics for general school, examples of solving text problems by mathematical modeling in the course of algebra of the secondary school.

References contain 54 titles.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность исследования. Решение текстовых задач является важнейшим видом учебной деятельности, в процессе которой усваиваются математические знания, умения и навыки. Текстовые задачи в значительной степени направляют и стимулируют учебно-познавательную активность учащихся.

В ФГОС [44] говорится о том, что результаты изучения предметной области «Математика» должны отражать умения моделировать реальные ситуации на языке алгебры, исследовать построенные модели с использованием аппарата алгебры, интерпретировать полученный результат.

В современном обществе, в котором происходит математизация наук, одним из методов повышения уровня математического образования становится освоение учащимися метода математического моделирования [31, С. 90]. Способность понимать одно явление чрез другое лежит в основе метода математического моделирования как способа познания [21, С. 65].

Метод математического моделирования заключается в описании явлений и процессов реального мира с помощью математических символов. Математическое моделирование осуществляет связь математики с ее приложениями через математические модели, хорошо известные школьникам: уравнения, неравенства, системы уравнений или неравенств. Таким образом, текстовую задачу «переводят» на формальный математический язык и решают средствами математики. Результаты, полученные в ходе решения модели данной задачи, соотносят с текстом задачи [30].

Разработка методики обучения решению текстовых задач отражена в трудах таких учёных, как Е.И. Лященко [26], Ф.А. Орехов [38], Д. Пойа [39], А.А. Столяр [43], Л.М. Фридман [46] и другие. Решение задач методом математического моделирования ставят перед школьниками много различных проблем, в том числе у учащихся возникают трудности с отысканием величины в текстовой задаче, которую необходимо обозначить переменной, а также трудности с составлением математической модели.

Актуальность темы исследования обусловлена тем, что в настоящее время сложилось противоречие между необходимостью обучения учащихся решению текстовых задач методом математического моделирования в курсе алгебры основной школы в соответствии с Примерной программой основного общего образования по учебным предметам [40], требованиями ФГОС основного общего образования [48] и недостаточной разработанностью методики обучения их решению.

Кроме того, существует противоречие между методикой преподавания математики, традиционным содержанием и потребностью как в его практической, так и профессиональной ориентированности, а также, противоречие между недостаточным уровнем мотивации учащихся и возрастанием «удельного веса» самостоятельной работы в курсе алгебры основной школы [37, С. 93].

Таким образом, актуальность данного исследования определяет все вышесказанное.

Проблема исследования состоит в разработке методики обучения учащихся решению текстовых задач в курсе алгебры основной школы.

Объект исследования: процесс обучения математике в основной школе.

Предмет исследования: математическое моделирование при решении текстовых задач в курсе алгебры основной школы.

Цель исследования: выявить методические особенности обучения учащихся решению текстовых задач методом математического моделирования в курсе алгебры основной школы.

Задачи исследования:

- проанализировать понятия математического моделирования и текстовой задачи в курсе алгебры основной школы;

- представить классификацию текстовых задач и адекватных им математических моделей;

- привести анализ программы и школьных учебников по теме исследования;

- проанализировать опыт работы учителей по исследуемой проблеме;

- рассмотреть примеры текстовых задач, решаемых методом математического моделирования.

Для решения задач были использованы следующие **методы исследования:** анализ педагогической и методической литературы, школьных программ; изучение опыта работы учителей математики отечественной школы по данной теме исследования; сравнительный анализ учебников и учебных пособий; обобщение и систематизация материала.

Теоретическая значимость исследования состоит в том, что в ней текстовая задача и ее место в обучении математике рассматривается как средство применения метода математического моделирования.

Практическая значимость исследования заключена в разработке методических материалов для учащихся основной школы, которые могут быть использовать в практической работе учителя математики и студентов педагогических специальностей при прохождении педагогической практики.

Апробация результатов исследования осуществлялась на конференциях, конкурсах:

- первый этап научно-практической конференции «Студенческие дни науки в ТГУ» в конкурсе докладов по направлению «Математика, физика, IT» (Россия, г. Тольятти, ТГУ, 2017 год);

- участие в Международном конкурсе студентов и аспирантов (в рамках требований ФГОС) UNIVERSITY KNOWLEDGE – 2017. Ступень: Бакалавриат. Номинация: Профессионально-специализированные компетенции. Направление: Педагогические науки (г. Москва, 25 марта, 2017 год);

- заочное участие в Международной научно-практической конференции (г. Магнитогорск, 8 марта 2017 г.).

Результаты работы отражены в следующей *публикации*:

1. Текстовые задачи в курсе математики 5-6 классов. Новая наука: стратегии и векторы развития: Международное научное периодическое издание по итогам Международной научно-практической конференции (Магнитогорск, 8 марта 2017 г.)/ Стерлитамак: АМИ, 2017. - №3-1. - С. 47-49.

На защиту выносятся:

1. Методические особенности обучения учащихся решению текстовых задач методом математического моделирования в курсе алгебры основной школы.

2. Методические рекомендации по обучению учащихся основной школы решению текстовых задач методом математического моделирования.

Бакалаврская работа состоит из введения, двух глав, заключения, списка литературы.

Во введении сформулированы основные характеристики исследования: актуальность, противоречие, проблема, объект, предмет, цель, задачи и методы исследования.

Глава I посвящена теоретическим основам обучения учащихся решению текстовых задач методом математического моделирования в курсе алгебры основной школы. В ней рассмотрены основные понятия данной темы и представлена классификация текстовых задач и адекватных им математических моделей.

Глава II посвящена методическим основам метода математического моделирования. В ней представлен: анализ школьных учебников и учебных пособий по математике для общеобразовательных школ; методические материалы по обучению учащихся решению текстовых задач методом математического моделирования в курсе алгебры основной школы; методические рекомендации по их применению.

В заключении сформулированы основные результаты и выводы проведенного исследования.

Список литературы содержит 54 наименования.

ГЛАВА I. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МЕТОДА МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРИ РЕШЕНИИ ТЕКСТОВЫХ ЗАДАЧ В КУРСЕ АЛГЕБРЫ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ

§ 1. Понятие математического моделирования

В данном параграфе представим определения таких понятий, как «модель», «математическая модель», а также рассмотрим понятие математического моделирования. В методической литературе нет однозначного понимания модели и процесса моделирования.

В статье [25] Е.М. Ложкина приводит определение модели в широком смысле: «Две системы объектов А и В называются моделями друг друга (или моделирующими одна другую), если можно установить такое гомоморфное отображение системы А на некоторую систему А и гомоморфное отображение В на некоторую систему В, что А и В изоморфны» [25,109].

Так как данная трактовка имеет широкий смысл, необходимо выделить следующие критерии модели:

1. Объект М конструируется (или выбирается) в соответствии с конкретной целью. Для разных целей одного объекта возможно конструирование разных моделей.

2. В модели должны быть отражены свойства объекта, существенные для цели ее конструирования.

3. Модель всегда материальна. В том случае, когда моде является продуктом мышления, она может быть материализована.

4. Модель допускает иные интерпретации, в частности в других отраслях науки.

Модель является исследовательской, если цель построения предусматривает получение новой информации об объекте. Математическая модель – исследовательская модель некого объекта, выраженная средствами математики.

Подходы, имеющиеся в литературе к понятию математической модели, позволяют дать следующее определение: «Математическая модель – образ оригинала, выраженный с помощью математических символов (математическим языком) и позволяющий свойства объекта - прообраза, его параметры, внутренние и внешние связи описать в количественной форме, с помощью логико-математических конструкций» [37, С. 94].

Модели делят на две группы по видам средств, которые используют для их построения: знаковые и схематизированные (Схема 1).

Знаковые модели текстовых задач, выполненные на математическом языке, называют решающими моделями, поскольку на них происходит решение задачи. Все остальные модели – это вспомогательные модели, при помощи которых переход от текста задачи к её математической модели [3, С. 118].

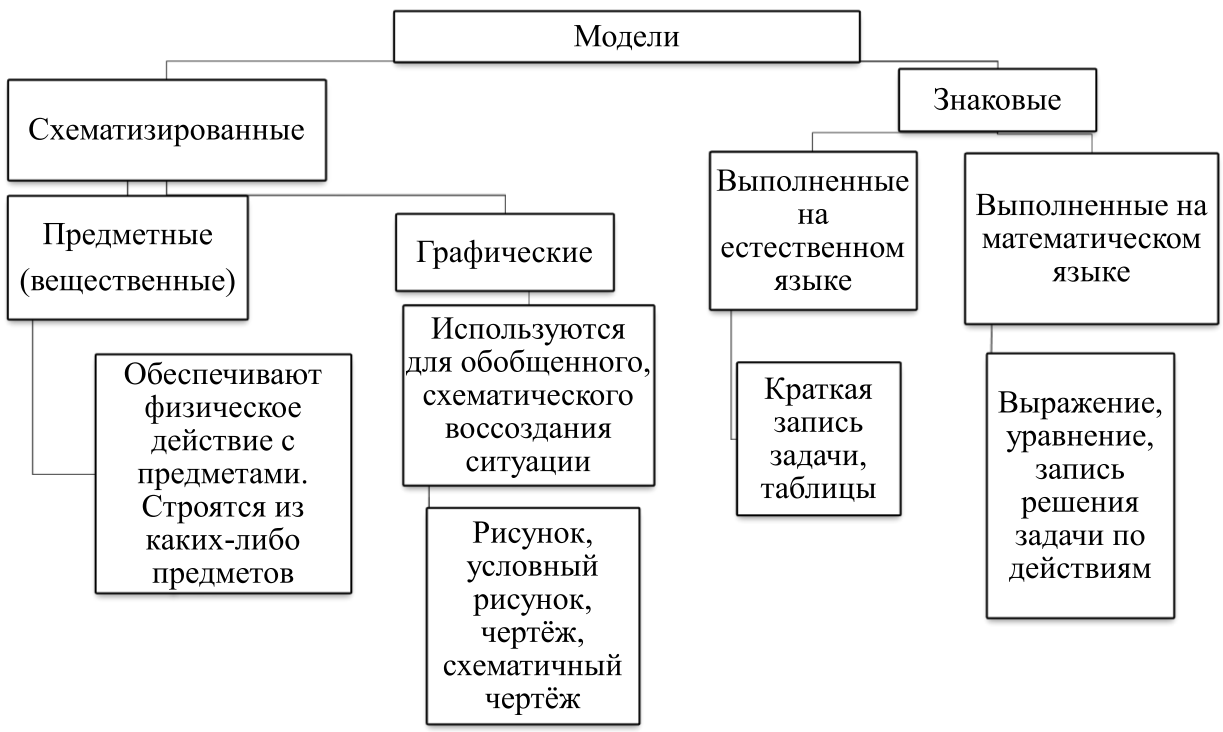

Схема 1. Виды математических моделей.

Рассмотрим данную классификацию с иной точки зрения.

Е.М. Ложкина [25] приводит следующие основные виды моделей, с которыми учащиеся встречаются при решении текстовой задачи: текст задачи; вспомогательные модели (чертёж, таблица, диаграмма и т.д.); решающие модели.

Основываясь на определении исследовательской модели и на приведенных выше критериях модели, приведем некоторые пояснения, представленные в таблице (Таблица 1).

Таблица 1

Виды моделей текстовой задачи

Текстовая задача	Краткая запись	Решающая модель
Модель реальной ситуации, при этом в условии задачи выделены свойства объектов действительности, которые необходимы для выполнения требования.	Модель текстовой задачи, если: - она необходима для решения задачи и помогает ученику; - в ней отражены все свойства объектов (существенные для получения ответа на вопрос данной задачи), связи между объектами, о которых говорится в задаче, а также требование задачи.	Исследовательская математическая модель, которая включает следующее: - описание компонентов, составляющих математический объект (интерпретационный компонент); - математический объект (формализация на математическом языке, которая включает связи и отношения, в соответствии с условием задачи); - математический объект, который включает формализацию требования задачи (содержательный компонент).

Таким образом, рассматривая процесс обучения решению текстовых задач, приходим к двум направлениям, в которых используют модели:

- в качестве средства, облегчающего понимание и восприятие задачи (вспомогательные модели);

- в качестве средства исследовательской деятельности (уравнения, неравенства и т.д.).

При решении учебных задач А.Д. Нахман в статье [37] выделяет четыре основных типа моделей:

- логико-математические модели (в общем случае алгебра высказываний или предикатов является носителем модели);

- аналитические модели (в виде явных функциональных зависимостей записываются процессы реальных объектов);

- геометрические модели (носителями данных моделей являются геометрические объекты);

- модели стахостического типа (статистическая обработка, анализ данных, вероятностные характеристики случайных событий);

- смешанный тип модели.

При выборе конкретного метода задача может допускать решение с помощью различных моделей. Таким образом, при использовании алгебраического метода, составив и решив абсолютно разные уравнения можно получить ответ на вопрос одной и той же задачи [8, С. 11].

Моделирование традиционно понимается как замещение некоторого объекта А (оригинала) другим доступным объектом М (моделью) с целью изучения свойств оригинала. Прием моделирования заключается в том, что исследуя некий объект, строят такой объект (модель), изучение и решение которого позволяет выявить новую информацию, а результат исследования переносят на первоначальный объект [3, С. 114].

Также, математическое моделирование может рассматриваться как процесс, в котором заключается последовательность задач, выполняемых с целью получения математического представления реального мира [50].

Селена Освальт [53] рассматривает математическое моделирование как метод, при котором учащиеся применяют математические знания, полученные раннее, в новых и незнакомых ситуациях.

Таким образом, исходя из вышесказанного, под математическим моделированием будем понимать описание какого-либо реального процесса или явления на математическом языке.

§ 2. Роль математического моделирования при решении текстовых задач

В обучении математике школьников решение текстовых задач занимает большое место. При решении текстовых задач учащиеся не только применяют свои математические знания и умения, которые уже приобрели, но и совершенствуют свои способности [54].

Определим значение текстовых задач в школьном курсе математики. Решение текстовых задач в школьном курсе математики способствует:

- развитию логического мышления учащихся,
- развитию идеи функциональной зависимости,
- повышению вычислительной культуры.

А.В. Шевкин [49] определяет роль текстовых задач в курсе математики следующим образом:

1. Текстовые задачи - одно из важнейших средств обучения математике. В процессе обучения решению текстовых задач учащиеся осознают взаимосвязи и отношения между величинами, получают опыт работы с ними, решают практические задачи.

2. Используя арифметический метод решения задач, учащиеся развивают сообразительность, смекалку, то есть развивают естественный язык.

3. Арифметические способы решения текстовых задач позволяют формулировать и развивать важные общеучебные умения такие, как: анализ задачных ситуаций, составление плана решения (с учётом взаимосвязей между известными и неизвестными величинами), пояснение результатов действий в рамках условия задачи, проверка правильности решения различными способами.

В учебном пособии под редакцией В.И. Мишина [1] пишется, что решение задач формирует у школьников следующие общеучебные умения: умение внимательно воспринимать учебную информацию, мотивировать каждый шаг своей деятельности и уметь планировать ее, рационально оформлять результаты действий, осуществлять самоконтроль и проверку.

И.В. Ермольчик, З.К. Левчук в статье [21] рассматривают математическое моделирование как условие развития логического мышления учащихся. В данной статье говорится о том, что осознанное решение задач учащимися, развитие их логического мышления обеспечиваются за счет формирования умений строить модели текстовых задач. Также обозначается необходимость совершенствования методики обучения школьников решению текстовых задач, которые способствуют формированию обобщенных интеллектуальных умений: производить анализ и делать выводы, устанавливать связи конкретного объекта с другими объектами, определять существенные признаки объекта. Математическое моделирование текстовых задач имеет особое значение, поскольку с помощью данного метода ученики могут видеть сущность математических отношений, содержащихся в различных ситуациях, скрытых в предметных областях.

Л.А. Мамыкина [30] пишет, что метод математического моделирования, применяемый при изучении математики, способствует систематизации знаний, позволяет находить применения прикладной направленности курса математики для лучшего понимания процессов современного мира и сути научных теорий.

О.И. Мельников, И.П. Кунцевич [31] отмечают, что в процессе решения текстовых задач методом математического моделирования у учащихся устанавливаются межпредметные связи с другими дисциплинами.

Во второй главе представленной работы при рассмотрении примеров текстовых задач нами будут учитываться следующие общеучебные умения школьников, формируемые при математическом моделировании решения текстовых задач: планирование собственной деятельности; восприятие и анализ учебной информации; мотивация на каждом этапе собственной деятельности; грамотное оформление полученных результатов; осуществление контроля над собственной деятельностью.

§3. Текстовые задачи как средство реализации метода математического моделирования

Рассмотрим различные подходы к понятию и определению текстовой (сюжетной) задачи. Первый подход связан с понятием текстовой задачи как некоторого описания реальной ситуации (П.У. Байрамукова, А.У. Уртенова, Л.М. Фридман).

П.У. Байрамукова, А.У Уртенова считают, что: «Текстовая задача - есть описание некоторой ситуации на естественном языке с требованием дать количественную характеристику какого-либо компонента этой ситуации, установить наличие и отсутствие некоторого отношения между его компонентами или определить вид этого описания» [3, С. 98]. Чтобы получить эту модель, можно переформулировать задачу, построить ее графическую модель, ввести соответствующие обозначения.

С точки зрения Л.М. Фридмана [46], задача - это требование и вопрос, на который необходимо найти ответ, опираясь и учитывая те условия, которые указаны в задаче.

Л.М. Фридман пишет, что для того чтобы научить учащихся самостоятельно решать нестандартные задачи, выработать общий подход к решению любых задач, сформировать способность разумного поиска способа решения задач, необходимо дать учащимся элементарные знания теории задач попутно с решением задач в течение всего обучения [47, С. 117].

Второй подход связан со структурой задачи (Е.И. Лященко).

Е.И. Лященко под текстовой (сюжетной) задачей понимает следующее: «Сюжетной задачей называют такую задачу, в которой данные и связь между ними включены в фабулу» [26, С.74].

Составные части задачи:

1. Условие – то, что известно в задаче.
2. Вопрос – то, что требуется узнать в задаче.
3. Решение – выполнение действий.

4. Ответ – результат полученных действий.

Е.И. Лященко пишет, что содержание текстовой задачи в большинстве случаев представляет собой определенную ситуацию, близкую к жизненной. Такие задачи главным образом важны для формирования у учащихся способности представлять математические отношения для овладения методом моделированием, для развития интереса к математике [26, С. 74].

А.А. Столяр [43] пишет, что математическая модель находится на более высокой ступени абстракции, чем текстовая задача, которой она соответствует. Текстовые задачи различного конкретного содержания могут иметь одинаковую логико-математическую модель. Приведем пример следующих двух задач:

1. Две машинистки перепечатали рукопись за а часов. Во сколько времени могла бы перепечатать рукопись каждая машинистка, работая одна, если первая затратила бы на эту работу на b часов больше второй?

2. Два насоса наполняют бассейн за а часов. Во сколько времени мог бы наполнить бассейн каждый насос, работая один, если первый затратил бы на эту работу на b часов больше?

- соответствует одна и та же логико-математическая модель:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x-b} = \frac{1}{a} \quad \wedge (x > b).$$

Построение математической модели осуществляется после перевода условий обеих задач на язык этой модели.

В первом случае: x – время, затрачиваемое первой машинкой; во втором случае: x – время работы одного первого насоса.

Исходя из другого обозначения переменных, можно было получить другую математическую модель,

Таким образом, под текстовой задачей будем понимать описание некоторой реальной ситуации или явления на естественном языке с требованием и вопросом, на который необходимо найти ответ, учитывая условия задачи.

§ 4. Классификация текстовых задач и адекватных им математических моделей

Основание для построения классификации выбирают исходя из ее цели и выделяют группы текстовых задач, которые объединяет какая либо характеристика, свойство или тип (число действий, соответствие числа данных и искомых в задаче, фабула задачи, способ решения задачи и т.д.).

Исходя из анализа методической литературы, приведем схему (Схема 2), которая отражает виды классификаций текстовых задач.

Схема 2. Классификации текстовых задач.

1. Приняв за основание классификации число действий (Схема 3), которые необходимо выполнить при решения задачи, разделяют простые и составные задачи. Задачу называют простой, если для ее решения нужно выполнить одно арифметическое действие. Задачу называют *составной*, если для ее решения необходимо выполнить два или большее число действий.

Схема 3. Классификация текстовых задач по числу действий.

2. Как правило, в текстовых задачах число условий (зависимостей между величинами) соответствует числу данных и искомых, однако иногда можно встретить задачи, в которых это соответствия не соблюдается [47, С. 123].

Взяв за основу классификации соответствие числа данных и искомых текстовой задачи (Схема 4), можно выделить задачи *определенные, задачи с альтернативным условием, недоопределенные и переопределенные задачи*.

Схема 4. Классификация текстовых задач по числу данных и искомых.

3. Выбрав в качестве основания классификации фабулу задачи (сюжет), можем выделить основные группы задач, которые представлены ниже

(Схема 5). Данная классификация представлена не в полном виде, так как тематика условий текстовых задач очень разнообразна [8, С. 11].

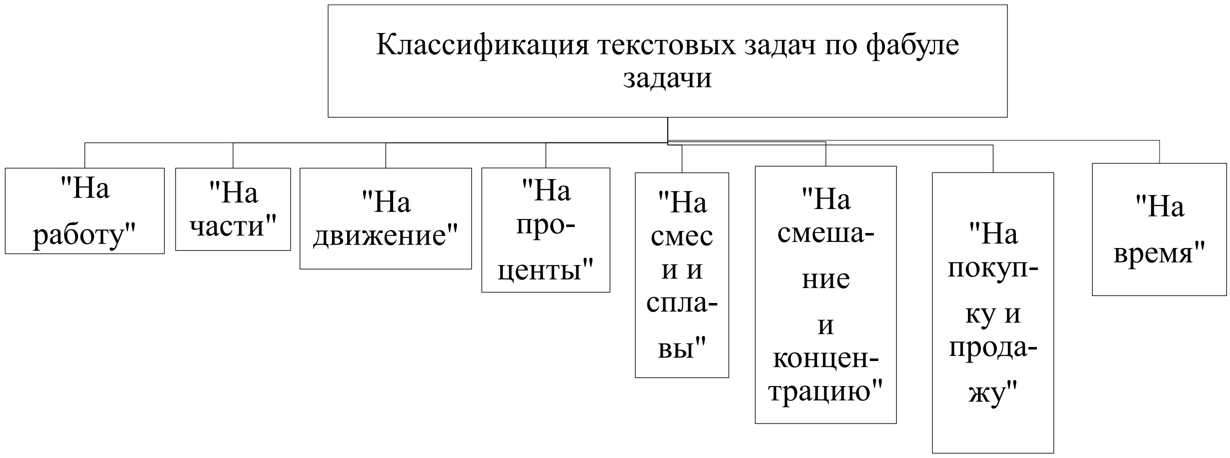

Схема 5. Классификация текстовых задач по фабуле задачи.

4. Существует несколько методов решения текстовых задач. Рассмотрим данные методы: *арифметический, алгебраический, логический, геометрический, практический* [8, С. 12]. Решение текстовых задач в 5-6 классах осуществляется в основном тремя способами: арифметическим, алгебраическим и комбинированным (содержит арифметический и алгебраический способы решения текстовой задачи) [26, С. 74].

Приняв за основу классификации метод решения задачи, можно представить следующую классификацию (Схема 6).

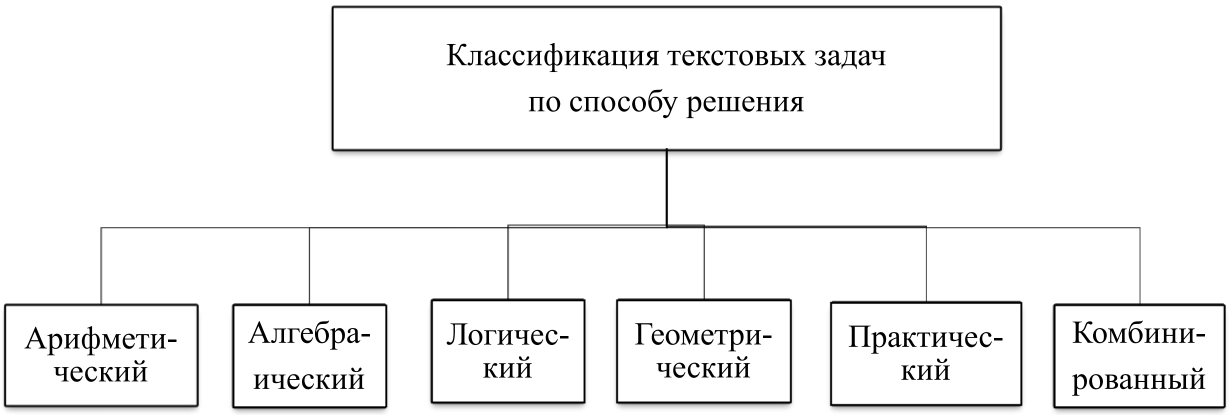

Схема 6. Классификация текстовых задач по способу решения.

Остановимся более подробно на каждом методе решения текстовой задачи.

Арифметический метод. При решении текстовой задачи все математические операции проводятся над конкретными числами [26, С. 75]. Довольно часто одну задачу можно решить различными арифметическими способами, составив разные числовые выражения [8, С. 11].

Алгебраический метод. Найти ответ на требование задачи, составив и решив уравнение (неравенство, систему уравнений или систему неравенств) - значит решить задачу алгебраическим методом. Одну задачу можно решить с помощью различных математических моделей.

Геометрический метод. Решить задачу геометрическим методом – значит найти ответ на требование задачи, при помощи геометрических построений или свойств геометрических фигур.

Логический метод. Решить задачу логическим методом – это значит найти ответ на вопрос задачи, используя логические рассуждения или алгоритм, при этом не выполняя вычислений. Например, задачи «на переправы», задачи «на взвешивание» и т.д.

Практический метод. Решить задачу практическим методом – значит найти ответ на вопрос задачи, выполнив соответствующие практические действия с конкретными предметами или их моделями.

Когда в ходе решения задачи применяют несколько методов, то считают, что задача решена комбинированным (смешанным) методом. В этом случае используют несколько математических моделей.

Например, в некоторых задачах применяют алгебраический метод и арифметический метод, арифметический и практический и т.д. [8, С. 12].

На основе классификации представленной в схеме 6 «Классификация текстовых задач по способу решения», можно представить следующую классификацию, отражающую возможные способы решения и адекватные им математические модели (Схема 7).

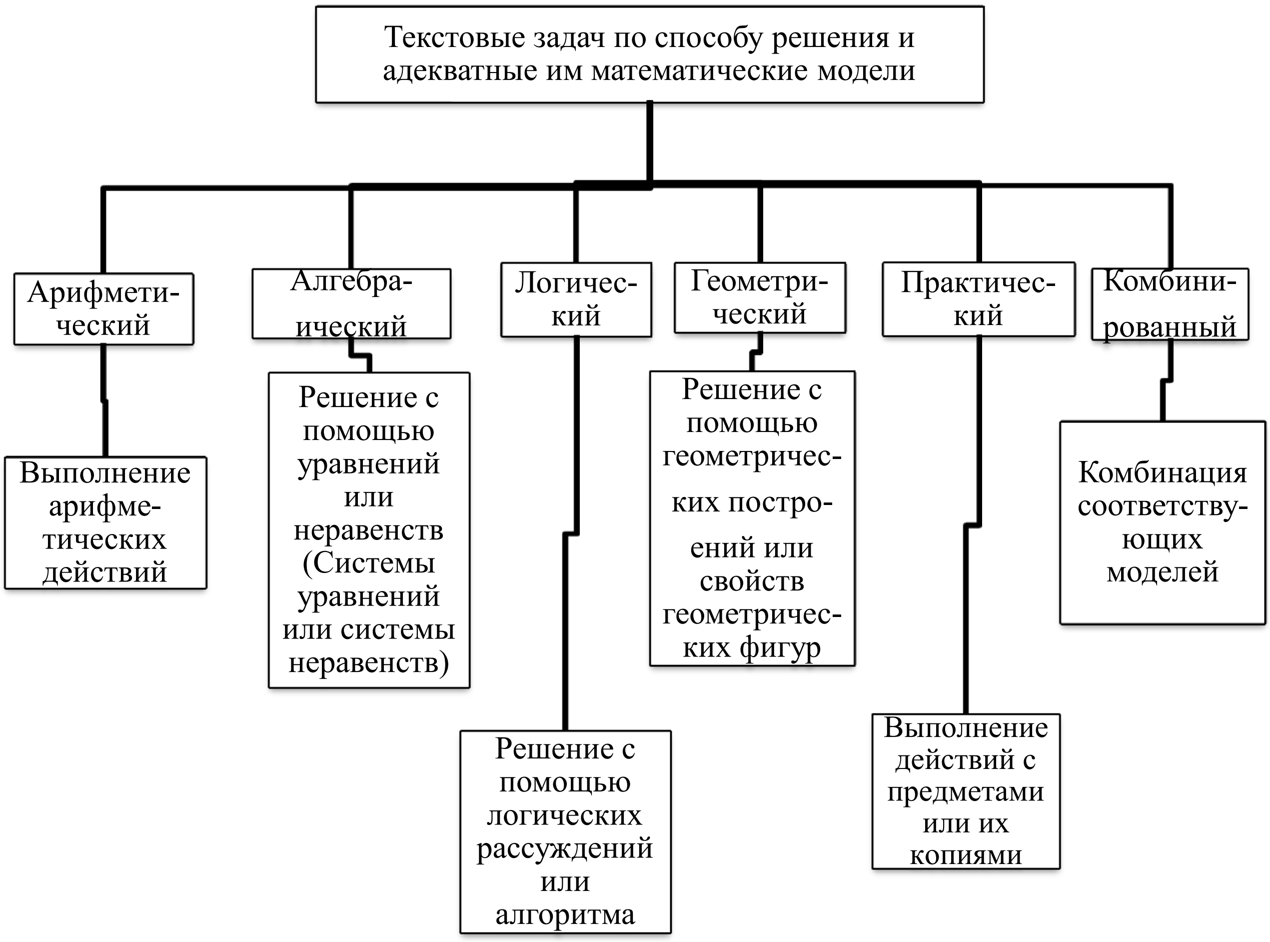

Схема 7. Классификация текстовых задач по способам решения и адекватные им математические модели.

Математической моделью текстовой задачи является выражение или запись по действиям, если задача решается арифметическим методом, уравнение (система уравнений), если задача решается алгебраическим методом [3, С. 114]. Также, в качестве математической модели могут выступать неравенства или система неравенств.

Такую классификацию по методам решения задач Е.П. Виноградова не выделяет [8, С. 10], отмечая, что с точки зрения учебных целей подобные классификации удобны, однако, при решении задач различными методами используют в основном определенную классификацию задач.

Например, при решении алгебраическим методом решения чаще всего в качестве основания классификации берут фабулу задачи, а при арифметическом методе решения - текстовые задачи классифицируют по способам их решения.

Однако, Е.П. Виноградова [8] выделяет текстовые задачи, в которых имеется одинаковая зависимость между величинами при различии их фабул и числовых данных. Взяв за основание классификации алгебраические модели решения задач, можно выделить следующие группы задач (Схема 8).

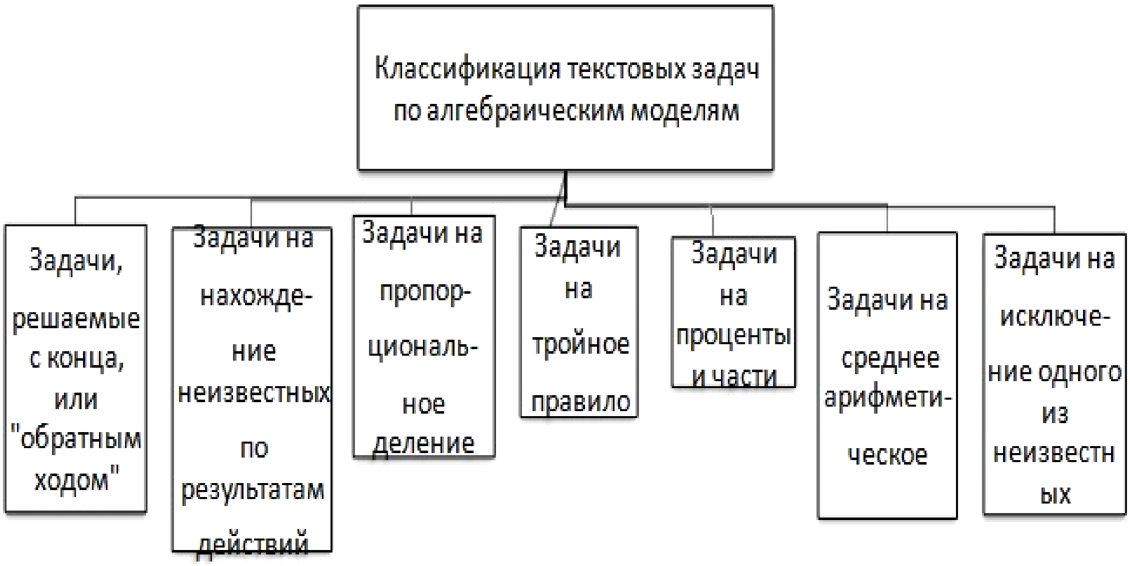

Схема 8. Классификация текстовых задач по алгебраическим моделям.

5. Проявление познавательного интереса учащихся во многом зависит от содержания решаемых задач. Текстовые задачи в условиях технологического подхода к формированию познавательного интереса учащихся можно разделить на виды и уровни познавательного интереса (Схема 9), представленные ниже.

В данной схеме можно выделить следующие типы текстовых задач: задачи витагенного (практического) применения, задачи с межпредметной связью и задачи с элементами историзма. В каждом типе задач представлено по три уровня познавательного интереса [7, С. 57].

Схема 9. Классификация текстовых задач по видам познавательного интереса.

Таким образом, нами были рассмотрены различные классификации текстовых задач и адекватных им математических моделей.

Выводы по первой главе

В первой главе данной бакалаврской работы получены следующие результаты:

1. Выполнен анализ понятия математической модели, рассмотрено понятие математического моделирования. Под математическим моделированием будем понимать описание какого-либо реального процесса, явления или ситуации на математическом языке.

2. Сформулировано определение текстовой задачи. Под текстовой задачей будем понимать описание некоторой реальной ситуации или явления на естественном языке с требованием и вопросом, на который необходимо найти ответ, опираясь и учитывая условия задачи.

3. Рассмотрены основные учебные умения учащихся основной школы при решении текстовых задач методом математического моделирования:

- планирование собственной деятельности;
- восприятие и анализ учебной информации;
- мотивация на каждом этапе собственной деятельности;
- грамотное оформление полученных результатов;
- осуществление контроля над собственной деятельностью.

4. Приведены различные классификации текстовых задач и адекватных им математических моделей, а именно: классификации текстовых задач по числу действий, по числу данных и искомых, по фабуле задачи, по способу решения, по математическим моделям, по алгебраическим моделям, по видам познавательного интереса.

ГЛАВА II. МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МЕТОДА МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРИ РЕШЕНИИ ТЕКСТОВЫХ ЗАДАЧ В КУРСЕ АЛГЕБРЫ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ

§ 5. Сравнительный анализ учебников алгебры для учащихся 5–9 классов по данной теме

В данном параграфе приведем анализ учебников математики 5-6 классов и учебников алгебры 7-9 классов из федерального перечня допущенных и рекомендованных Министерством образования и науки Российской Федерации к использованию на 2016-2017 года [45].

Представим анализ школьных учебников математики для учащихся 5 классов по теме исследования (Таблица 2).

Таблица 2

Общая сравнительная характеристика учебников математики 5 классов

<table>
<tr><th colspan="3">Учебники для учащихся общеобразовательных классов</th></tr>
<tr><td>Учебник для 5 класса (в 2-х частях) Г.В. Дорофеев, Л.Г. Петерсон [15], [16]</td><td>Учебник для 5 класса Г.К. Муравин, О.В. Муравина [35]</td><td>Учебник для 5 класса Е.А. Бунимович, Г.В. Дорофеев, С.Б. Суворова [5]</td></tr>
<tr><th colspan="3">Тема</th></tr>
<tr><td>Математические модели</td><td>Формулы и уравнения</td><td>Задачи на движение</td></tr>
<tr><th colspan="3">Последовательность изучения темы</th></tr>
<tr><td>- перевод условия задачи на математический язык;
- работа с математическими моделями;
- метод проб и ошибок;
- метод перебора.</td><td>- формула пути;
- обозначение неизвестных величин и составление уравнений.</td><td>- движение в противоположных направлениях;
- скорость удаления;
- скорость сближения;
- движение по реке;
- движение по течению реки;
- движение против течения реки.</td></tr>
<tr><th colspan="3">Определение математической модели</th></tr>
<tr><td>Определение математической модели приведено в неявном виде: «В совершенно различных на первый взгляд задачах можно обнаружить, что их решение одинаково. Например, если на столе лежат 2 яблока, 2 апельсина и</td><td colspan="2">Не дано определение математической модели.</td></tr>
</table>

груша, то как найти общее число фруктов, лежащих на столе? Конечно 2+2+1=5. Но ведь точно так же мы можем определить и число уроков во вторник, зная, что по расписанию будут два урока русского языка, две математики и география. В этих двух непохожих ситуациях мы использовали одну и ту же математическую модель, складывая не фрукты и не уроки, а натуральные числа» [15, С.17].		
Тема		
Задачи на дроби	Процентные расчеты	Решение задач
Последовательность изучения темы		
- задачи на нахождение части от числа, выраженной дробью; - задачи на нахождение числа по его части, выраженной дробью; - задачи на нахождение части, которую одно число составляет от другого; - комбинированные задачи на дроби.	После определения понятия «Процент»: - примеры применения процентов в реальной действительности; - сравнение двух величин в процентном соотношении.	- задачи на части; - задачи на уравнивание.
Тема		
-	-	Задачи на совместную работу
Последовательность изучения темы		
-	-	- прием решения задач на совместную работу; - задача на движение, которая решается так же, как и задача на совместную работу (работа заключается в прохождении пути).

В учебниках Г.В. Дорофеева, Л.Г. Петерсона для 5 классов (в 2-х частях) [15], [16] больше всего текстовых задач, в том числе решаемых методом математического моделирования, чем в других рассматриваемых учебниках.

В первой главе «Математический язык» учащиеся сначала учатся записывать, читать и составлять выражения (первый параграф «Математические выражения»). На данном этапе учащиеся учатся анализировать текст задачи и составлять численные и буквенные выражения, которые соответствуют условиям задачи. Таким образом, данный этап можно отнести к пропедевтической работе алгебраического метода решения текстовых задач.

Во втором параграфе данной главы учащиеся переводят условия задачи на математический язык. Приводится две задачи с одним и тем же арифметическим действием, после чего авторы поясняют, что была использована одинаковая математическая модель. На следующих пяти различных задачах авторы демонстрируют, каким образом переводят условия задач с родного языка на математический язык. После каждой такой решенной задачи, приведенной в качестве примера, предлагается несколько задач, например: построить математическую модель данной текстовой задачи; записать выражение, являющееся переводом данной текстовой задачи на математический язык и придумать задачу с другими величинами, имеющую такое же решение; среди данных четырех задач найти такие задачи, математические модели которых совпадают; придумать задачи, математической моделью которых является данной выражение.

В этом же параграфе «Математические модели» учащиеся знакомятся с методом проб и ошибок и с методом перебора, так как при решении текстовых задач учащиеся, исследуя полученную математическую модель, не могут свести ее к известным случаям, то есть не имеют достаточных знаний и опыта, чтобы решить полученное уравнение.

Наибольшее количество задач представлено в главе «Математический язык». Однако, текстовые задачи, решаемые методом математического моделирования, встречаются и в других разделах в качестве задач на повторение.

В учебнике для 5 классов авторов Г.К. Муравина, К.С. Муравина, О.В. Муравиной [35] представлено достаточное количество текстовых задач. В пункте «Числовые выражения и их значения», в котором рассматриваются арифметические действия, правило порядка действий, значения выражений. После рассмотрения темы представлены упражнения для закрепления изученного материала, в том числе текстовые задачи на составление выражения, например: «№213. Решите задачи составлением выражения. Что общего в этих задачах? 1) Лена купила 9 лимонов по цене 15 р. И 6 гранатов по 25 р. За штуку. Сколько денег Лена заплатила за покупку? …»

В числе последних упражнений приведено пять решенных задач, с пояснениями для учащихся: «Задача на встречное движение», «Задача на движение в противоположных направлениях», «Задача на движение вдогонку», «Задача на движение с отставанием», «Задача на движение двух объектов». Данные задачи иллюстрируют разнообразие задач на движение и позволяют учащимся увидеть различия в рассуждениях при поиске решения и ответа.

После изучения других тем предлагается тема «Формулы и уравнения». В качестве нового материала представлена знакомая учащимся формула пути, в которой подробно рассмотрена зависимость величин данной формулы, представлен материал для изучения понятия уравнения.

В конце темы говорится, о том, что уравнения можно использовать для решения текстовых задач, приведен пример данного приема и система упражнений для закрепления материала (решить задачу двумя способами, решить задачу, составляя уравнение, объяснить, как составлено уравнение к задаче и т.д.).

Представим анализ школьных учебников математики для учащихся 6 классов по теме исследования (Таблица 3).

Таблица 3

Общая сравнительная характеристика

учебников математики 6 классов

Учебники для учащихся общеобразовательных классов		
Учебник для 6 класса (в 3-х частях) Г.В. Дорофеев, Л.Г. Петерсон [17], [18], [19].	Учебник для 6 класса Г.К. Муравин, О.В. Муравина [36]	Учебник для 6 класса Е.А. Бунимович, Л.В. Кузнецова, С.С. Минаева [6]
Тема		
Задачи на движение по реке	Отношения и пропорции	Основные задачи на дроби

Последовательность изучения темы		
- движение по течению реки и против течения реки; - скорость течения реки; - собственная скорость объекта.	После объяснения материалов, относящихся к теме «Отношения и пропорции»: -соотношение между величинами, которое задается с помощью процентов.	- нахождение части от числа; - нахождение числа по его части; - какую часть одно число составляет от другого.
Тема		
Задачи на проценты	Пропорциональные величины	Что такое процент
Последовательность изучения темы		
- нахождение процента от числа; - нахождение числа по его проценту; - нахождение процентного отношения двух чисел; - простой процентный рост; - сложный процентный рост.	- рассматривается задача, с пропорциональными величинами; - обратно пропорциональные величины; - составление уравнения в задаче с пропорциональными величинами.	После изложения темы «Процент» рассматриваются величины, которые могут использоваться в текстовых задачах на проценты из реальной действительности. Приводятся три задачи на проценты с подробными решениями.
Тема		
Решение задач с помощью пропорций	Решение уравнений	Что такое отношение
Последовательность изучения темы		
- образование пропорции при прямо пропорциональных величинах; - образование пропорции при обратно пропорциональных величинах; - алгоритм решения задач с помощью пропорций; - пропорциональное деление.	После объяснения материалов, относящихся к изучению уравнений, и нескольких упражнений, повествуется о том, что решение многих текстовых задач сводится к решению уравнений, после чего рассматривается пример. В данном примере предлагается два способа построения уравнений к данной задаче.	После приведения конкретных примеров из реальной действительности авторы объясняют, в каких случаях приходят к сравнению величин с помощью деления. Вводится понятие «отношение двух чисел». - задачи на деление в данном отношении
Тема		
Решение задач с помощью уравнений	Решение задач на проценты	«Главная» задача на проценты
Последовательность изучения темы		
- этапы математического моделирования; - этапы решения задачи с помощью уравнения; - алгоритм решения задач с помощью уравнений.	- соотношение между величинами, которое задается с помощью процентов; - процентное содержание вещества в сплаве; - понятие концентрации вещества.	- вычисление процентов от заданной величины; - нахождение величины по её проценту; - увеличение или уменьшение величины на несколько процентов.
Тема		

-	-	Составление формул и вычисления по формулам
Последовательность изучения темы		
-	-	- формула стоимости; - формула пути. Рассматриваются примеры решения текстовых задач, в которых применяются данные формулы.
Тема		
-	-	Что такое уравнение
Последовательность изучения темы		
-	-	- уравнение как способ перевода условия задачи на математический язык; - решение задач с помощью уравнений.

Учебник Г.В. Дорофеева, Л.Г. Петерсона для 6 классов (в трех частях) [17], [18], [19] имеет большое количество текстовых задач, теоретический материал изложен подробно и ясно, в соответствующих темах приведены примеры решенных текстовых задач. В некоторых примерах рассматривается введение переменной и составление уравнения.

В третьей главе «Рациональные числа» представлен параграф «Уравнения». После знакомства представлены этапы математического моделирования, этапы решения задачи с помощью уравнения, а также представлен алгоритм решения задач с помощью уравнений.

В учебнике для 6 классов авторов Г.К. Муравина, К.С. Муравина, О.В. Муравиной [36] в теме «Отношения и пропорции», рассматривается новый для учащихся способ решения задачи на проценты (задача решается путем составления пропорции, предварительно введя переменную).

Далее следует тема «Решение уравнений». В ней, помимо понятия уравнения, рассматривается перевод условий текстовой задачи на математический язык. Поясняется, что строят уравнение в соответствии с соотношениями между величинами и при помощи известных формул, например, формулы пути в задачах на движение.

В учебнике Е.А. Бунимовича, Л.В. Кузнецовой, С.С. Минаевой [6] для учащихся 6 классов текстовые задачи рассматриваются в теме «Основные задачи на дроби». Решение задач осуществляется при помощи арифметического способа, то есть математической моделью является числовое выражение. В задачах, рассматриваемых в темах «Что такое процент», «Что такое отношение» и «Главная задача на проценты», также решение задач осуществляется арифметическим способом.

В главе учебника «Выражения, формулы, уравнения» учащиеся только начинают знакомиться с буквенными выражениями. В теме «Составление формул и вычисления по формулам» рассматриваются формула стоимости и формула пути, взаимосвязь величин в каждой формуле. Рассматриваются примеры решения текстовых задач, в которых применяются данные формулы.

В конце рассматриваемой главы приведена тема «Что такое уравнение». После освоения основных понятий, уравнение рассматривается как способ перевода условия задачи на математический язык, представлено решение задач с помощью уравнений. В данных задачах прослеживаются этапы математического моделирования. После изложения материала приведены упражнения, для практического применения полученных знаний. Таким образом, учащиеся знакомятся с методом математического моделирования, но не приведено понятие самой математической модели.

Представим анализ школьных учебников алгебры для учащихся 7 классов по теме исследования (Таблица 4).

Таблица 4

Общая сравнительная характеристика учебников алгебры 7 классов

Учебники для учащихся общеобразовательных классов		
Учебник для 7 классов Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, С.Б. Суворова под ред. С.А. Теляковского [27]	Учебник для 7 классов Г.К. Муравин, О.В. Муравина [32]	Учебник для 7 классов Г.В. Дорофеев, С.Б. Суворова, Е.А. Бунимович [12]
Тема		
Решение задач с помощью уравнений	Математическая модель текстовой задачи	Задачи на проценты

Последовательность изучения темы		
- представлен алгоритм решения текстовой задачи с помощью уравнений; - приведено подробное решение текстовой задачи с помощью уравнения.	-математическая модель; - текстовые задачи с подробными решениями и примечаниями; - задача на выполнение плановых заданий; - задача на выполнение количества; - задача на сплавы и смеси; - задача на движение.	- правила перехода от процентов к дробям и наоборот; - приведено пять задач на проценты с подробными решениями. Некоторые задачи имеют по два способа решения.
Определение математической модели		
Не дано определения математической модели.	Задача формулируется на обычном языке и переводится на математический язык – создается математическая модель задачи.	Не дано определения математической модели.
Тема		
Линейное уравнение с двумя переменными	Решение уравнений	Пропорции. Решение задач с помощью пропорций
Последовательность изучения темы		
После изучения данной темы рассматривается текстовая задача, в которой необходимо найти натуральные решения уравнения с двумя переменными.	- подробно рассматривается текстовая задача из предыдущего пункта «Математическая модель текстовой задачи», разбирается решение данной задачи (разбор уравнения).	После определения пропорции, приведения ее свойств, представлены три текстовые задачи, в решении которых существует пропорциональность.
Тема		
Решение задач с помощью систем уравнений	Уравнения с двумя переменными и их системы	Алгебраический способ решения задач Решение задач с помощью уравнений Решение задач с помощью уравнений
Последовательность изучения темы		
- приведен алгоритм решения задачи с помощью системы уравнений - рассмотрено две задачи с подробными решениями.	- рассмотрена текстовая задача, моделью которой является система уравнений с двумя неизвестными; - анализ предложенной задачи по данной теме	– перевод задачи на математический язык, введение переменной, составление уравнения, пример решения задачи; – некоторые правила для обозначения переменной в текстовой задаче; – использование схем и рисунков, которые помогают анализировать текстовую задачу.

Анализируя учебник Ю.Н. Макарычева, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешкова, С.Б. Суворовой [27] можно сказать, что учащиеся решают текстовые задачи методом математического моделирования после изучения линейных уравнений с одной переменной. Однако в данном учебнике не приводится и не упоминается метод математического моделирования и понятие математической модели.

В результате анализа учебника по алгебре для учащихся 7 классов авторов Г.К. Муравина, О.В. Муравиной [32] можно отметить, что перед изучением математической модели учащиеся рассматривали параграф «Выражения», в котором изучали понятия числового выражения, выражения с переменной. Также следует обратить внимание на то, что в теме «Математическая модель текстовой задачи» авторы поясняют, что в предыдущих пунктах текстовые задачи переводились на математический язык путем составления выражений. После объяснения сути математического моделирования авторы приводят сюжеты текстовых задач, которые, по их мнению, встречаются чаще всего. В каждом рассматриваемом случае приведены примеры, подробно описано то, как создавалась математическая модель. В конце учебника приведен практикум по решению текстовых задач, в котором для каждой задачи представлены наводящие вопросы, а в некоторых задачах введена переменная.

В учебнике Г.В. Дорофеева, С.Б. Суворовой, Е.А. Бунимович для 7 классов [12] в четвертой главе «Уравнения» приведен пункт «Алгебраический способ решения задач». В нем применяется метод математического моделирования, но явно об этом не говорится. После рассмотрения данного способа решения задач, рассматривается решение самих уравнений. А уже после того, как учащиеся научились решать уравнения, авторы приводят тему «Решение задач с помощью уравнений». В данном пункте рассмотрены некоторые правила для обозначения переменной в текстовой задаче. В седьмой главе «Многочлены» в пункте «Решение задач с помощью уравнений» приведено использование схем и рисунков, которые помогают анализировать текстовую задачу.

Представим анализ школьных учебников алгебры для учащихся 8 классов по теме исследования (Таблица 5).

Таблица 5

Общая сравнительная характеристика учебников алгебры 8 классов

Учебники для учащихся общеобразовательных классов		
Учебник для 8 классов Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, С.Б. Суворова под ред. С.А. Теляковского [28]	Учебник для 8 классов Г.К. Муравин, О.В. Муравина [33]	Учебник для 8 классов Г.В. Дорофеев, С.Б. Суворова, Е.А. Бунимович [13]
Тема		
Решение задач с помощью квадратных уравнений	Дробные уравнения с одной переменной	Решение уравнений и задач
Последовательность изучения темы		
Приведена текстовая задача с подробным решением при помощи квадратного уравнения.	- пример решения текстовой задачи, математической моделью которой является дробное уравнение.	- пример решения текстовой задачи алгебраическим способом, в результате которого получили уравнение (задача на концентрацию); - понятие концентрации.
Тема		
Решение задач с помощью рациональных уравнений	Прямая и обратная пропорциональность величин	Решение задач (в теме «Квадратные уравнения»)
Последовательность изучения темы		
- приведена текстовая задача с подробным решением при помощи рационального уравнения.	- пропорциональность величин в формуле пути, примеры других пропорциональных зависимостей; - примеры текстовых задач (и их решения), в которых используются свойства пропорциональностей.	- рассмотрен пример текстовой задачи, которая была решена с помощью квадратного уравнения; - введено понятие математического моделирования и некоторые практические советы по составлению математической модели.
Определение математической модели		
Не дано определения математической модели.		В задаче описывается некоторая жизненная ситуация, и составленное уравнение представляет собой математическую модель этой ситуации.

Тема		
Решение систем неравенств с одной переменной	Задачи, приводящие к квадратным уравнениям	Линейное уравнение с двумя переменными
Последовательность изучения темы		
Материал данной темы объясняется на примере решения текстовой задачи. Задача решена при помощи системы неравенств.	- приведен пример решения текстовой задачи с «физическим» сюжетом, математической моделью которой является уравнение, сводящееся к квадратному уравнению.	После изучения непосредственно данной темы, рассматривается текстовая задача, для перевода на математический язык которой вводят две переменные и составляют уравнение.
Тема		
-	Решение задач с помощью систем уравнений	Решение задач с помощью систем уравнений
Последовательность изучения темы		
-	- представлены четыре примера решения текстовых задач, математические модели которых – системы уравнений с двумя неизвестными.	- пример решения текстовой задачи и арифметическим способом, и с помощью математической модели (система двух уравнений с двумя неизвестными); - пример решения текстовой задачи методом математического моделирования (система трех уравнений с тремя неизвестными).

Анализируя учебник Ю.Н. Макарычева, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешкова, С.Б. Суворовой [28] можно сказать, что текстовые задачи встречаются почти в каждой теме в качестве упражнения на повторение или для закрепления конкретного изученного материала. Больше всего текстовых задач в данном учебнике представлено в пунктах «Решение задач с помощью квадратных уравнений» и «Решение задач с помощью рациональных уравнений». В каждом из пунктов представлены примеры решения соответствующих задач, приведено большое количество текстовых задач в качестве упражнений.

Рассматривая учебник Г.К. Муравина, О.В. Муравиной [33] стоит отметить, что больше всего текстовых задач приведено в пунктах «Дробные уравнения с одной переменной», «Прямая и обратная пропорциональность величин», «Задачи, приводящие к квадратным уравнениям», «Решение задач с помощью систем уравнений». В конце учебника приведен

«Практикум по решению задач». Задачи сгруппированы по фабуле («Задачи на движение», «Задачи на совместную работу»), всего 11 задач. К каждой задаче представлены рекомендации и прописан каждый шаг, который необходимо сделать, чтобы в конечном итоге придти к ответу.

В учебнике Г.В. Дорофеева, С.Б. Суворовой, Е.А. Бунимович [13] представлен пункт «Решение уравнений и задач», в котором рассматривается пример решения текстовой задачи алгебраическим способом (задача на концентрацию). Тут же приведено понятие концентрации. В пункте «Решение задач» (в теме «Квадратные уравнения») рассмотрен пример текстовой задачи, которая была решена с помощью квадратного уравнения, а также введено понятие математического моделирования и даны некоторые практические советы по составлению математической модели. Стоит отметить, что в данном учебнике приведено большое количество текстовых задач, решаемых методом математического моделирования.

Представим анализ школьных учебников алгебры для учащихся 9 классов по теме исследования (Таблица 6).

Таблица 6

Общая сравнительная характеристика учебников алгебры 9 классов

Учебники для учащихся общеобразовательных классов		
Учебник для 9 классов Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, С.Б. Суворова под ред. С.А. Теляковского [29]	Учебник для 9 классов Г.К. Муравин, О.В. Муравина [34]	Учебник для 9 классов Г.В. Дорофеев, С.Б. Суворова, Е.А. Бунимович [14]
Тема		
Решение задач с помощью систем уравнений второй степени	Границы значений величин	Решение задач (В теме «Уравнения и системы уравнений», после рассмотрения различных уравнений)
Последовательность изучения темы		
Приведено решение текстовой задачи, в которой в качестве алгебраической модели использовалась	Приводится задача, в которой масса кочана капусты меньше 2,5 кг, но меньше 2,6 кг. Далее, обозначив	- пример решения текстовой задачи, математической моделью которой является дробное уравнение.

система уравнений второй степени с двумя переменными.	массу кочана капусты (в кг) буквой x, записывают соответствующее двойное неравенство.	
Тема		
-	Неравенства с одной переменной и их системы	Решение задач (В главе «Уравнения и системы уравнений», после рассмотрения системы уравнений с двумя переменными)
Последовательность изучения темы		
-	Не рассматривается в теории и на примерах решение текстовых задач, решаемых методом математического моделирования. Однако в качестве упражнений такие текстовые задачи встречаются.	- пример решения текстовой задачи, математической моделью которой является система уравнений с двумя переменными.

Анализируя учебники Ю.Н. Макарычева, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешкова, С.Б. Суворовой [29], делаем вывод, что текстовых задач, решаемых методом математического моделирования, приведено небольшое количество.

Рассматривая учебник Г.К. Муравина, О.В. Муравиной [34] стоит отметить, что текстовых задач в данном учебнике недостаточно для того, чтобы учащиеся научились применять метод математического моделирования средствами алгебры, которые учащиеся осваивают в 9 классе.

В учебнике Г.В. Дорофеева, С.Б. Суворовой, Е.А. Бунимович [14] рассматривается решение текстовых задач, математической моделью которых является изучаемое в соответствующей главе уравнение или их система. В качестве упражнений приведено большое количество текстовых задач.

Таким образом, проанализировав учебники, можно сказать, что с помощью текстовых задач, решаемых методом математического моделирования, учащиеся познают реальную действительность, а также у учащихся формируются общеучебные знания и умения.

§ 6. Из опыта работы учителей по исследуемой проблеме

Г.Г. Левитас [23] предложил способ обучения учащихся алгебраическому методу решения текстовых задач, которым поделился с читателями журнала «Математика в школе» в 2000 году.

Текстовая задача здесь не математическая по фабуле задача, решаемая математически. Приводится пример: « У Кати и Поли вместе 12 кукол; у Кати на 2 куклы меньше. Сколько кукол у них?». Моделируя ситуацию уравнением $x + \ \ x + 2 \ \ = 12$, ее можно решить алгебраическим методом.

Чтобы решить текстовую задачу, ее требуется перевести на математический язык или создать математическую модель. Овладение навыками математического моделирования – одна из важных задач на уроках математики. Но нельзя сказать, что это обучение идёт успешно. Одна из причин неуспеха в решении задач алгебраическим методом состоит в неправильном порядке перевода текста задачи на математический язык.

Автор проводит аналогию между переводом текста с одного языка на другой и переводом текста задачи на математический язык. Учитель математики переводит легкие текстовые задачи из школьного курса на язык математики, как во время восприятия текста с одного языка синхронно совершается перевод на другой язык. Учителю сразу видно, что принять за x, что выразить через x, какое составить уравнение. Школьников учат производить действия в данном порядке и не сложные для школьника задачи решаются таким образом. Но при столкновении с более трудной задачей возникает множество вопросов.

Г. Г. Левитас предлагает решать не получающиеся у школьников задачи в следующей последовательности: составить схему уравнения; выбрать обозначения; составить уравнение.

Например, если учащемуся трудно решить приведенную выше задачу с куклами, то для начала можно составить такую схему уравнения:
(Число кукол у Кати) + (Число кукол у Поли) =12.

После этого ученик занимается переводом выражений, стоящих в скобках на математический язык.

Допускаются и иные истолкования, которые приводят к иным обозначениям: (Число кукол у Поли) - (Число кукол у Кати) =2.

Возможно составление схемы системы уравнений, после чего вводятся два неизвестных:

$$\text{(Число кукол у Кати)} + \text{(Число кукол у Поли)} = 12$$
$$\text{(Число кукол у Поли)} - \text{(Число кукол у Кати)} = 2$$

Итак, особенность этого метода состоит в том, что моделирование проводится в два приема. На первом этапе частично текст задачи и элементы математического языка (знаки действий, знак равно) выступают вместе, а на втором этапе математический язык полностью заменяет естественный.

Таким образом, трудная для нас формулировка условия задачи переводится на язык математики.

Л.А. Сафонова в статье [41] рассматривает действия, которые выполняются при решении текстовой задачи. Согласно выделенным этапам, можно составить следующую таблицу (Таблица 7).

Таблица 7

Общие умения необходимые для решения текстовой задачи

Этап решения задачи	Необходимые умения
Анализ текста задачи	- выделять объекты, о которых говорится в задаче, - выделять условие и вопрос, - устанавливать неизвестные, известные, а также искомые величины, - выделять ситуации, которые описаны в задаче.
Поиск плана решения	- устанавливать функциональную зависимость и отношения между заданным величинами; - выражать величины из формул, - выделять из текста задачи предложения, выражающие зависимость между данными и искомыми величинами, преобразовывать их.
Реализация плана решения задачи	- переводить зависимости и отношения между величинами на математический язык.
Исследование (анализ) проведенного решения	- интерпретировать полученные результаты на языке данной задачи, - выполнять проверку решения и оценивать его с точки зрения рациональности.

Эти умения формируются еще в начальной школе, где преобладает арифметический метод. Рассмотрим специальные (дополнительные к общим) умения, необходимые для решения задачи методом уравнений.

1) *Умение составлять краткую запись условия задачи.*

Решение текстовых задач в начальной школе начинается с рассмотрения готовых образцов краткой записи условия, составления задачи по ее краткой записи. Школьники также учатся краткой записи по аналогии, выбору подходящей записи из предложенных, дополнению незаконченной записи. Подобную работу необходимо продолжать и в младших классах средней школы.

2) *Умение выполнять схематическую запись условия задачи.*

Краткую запись текстовой задачи часто отождествляют со схематической, однако при составлении краткой записи у учащихся развиваются способности представления информации в вербальной форме. Построение схематической записи способствует развитию умения работать с образной информацией.

3) Умение выбрать величину, которую будем считать переменной.

Данное умение важно при составлении математической модели текстовой задачи.

4) Умение алгебраически выражать величины через переменную

Это умение связано с умением выбрать величину, которая обозначается через переменную, так как от выбора переменной зависит составляемое по условию алгебраическое выражение. В начальной школе учатся записывать числовые и буквенные выражения по условию задачи. Для совершенствования этого действия в средних классах желательно предлагать упражнения на выражение неизвестных величин через выбранную переменную.

5) Умение записывать одну и ту же величину разными способами

Формируется это умение упражнениями на нахождение общей величины и выражение ее различными способами.

б) Умение оформлять зависимости между величинами в виде равенств

Другими словами, это умение составлять уравнение. Необходимо объяснить учащимся, что если одна величина выражена двумя способами, то их и надо приравнивать. Однако если уравниваются различные величины, то при составлении уравнения важно учитывать отношения между ними.

Учащимся необходимо пояснить, что при переходе к алгебраическому методу решения задач составляемое уравнение аналогично числовому равенству, только в уравнении вместо числовых значений величин стоят их буквенные выражения.

Для объяснения используются, например, такие упражнения. Составьте равенства по текстам:

а) В магазине есть 26 м шелка трех сортов. Отрез шелка II сорта имеет длину 15 м, что в 3 раза больше длины отреза I сорта и на 9 м больше длины отреза III сорта.

б) В магазине есть «х» м шелка II сорта. Это в3 раза больше отреза I сорта и на 9 м больше длины отреза III сорта. А всего в магазине 26 м шелка трех сортов.

в) В магазине есть «к» м шелка II сорта, что в m раз больше длины отреза I сорта и на n м больше длины отреза III сорта. Всего в магазине р м шелка трех сортов.

Анализ в данной статье [41] доведен до формирования умений решать составленные уравнения.

Таким образом, в данном параграфе рассмотрен опыт работы учителей по исследуемой проблеме. В том числе подробно рассмотрены умения, необходимые для решения задачи как методом уравнений, так и методом математического моделирования в целом. Данные умения были нами распределены в соответствии с этапами решения задачи.

В следующем параграфе рассмотрим приемы, формулирующие рассмотренные выше умения.

§ 7. Пропедевтика алгебраического метода решения текстовых задач в 5-6 классах

В данном параграфе рассмотрим основные вопросы пропедевтической работы по составлению уравнений при решении текстовых задач. Преимущественно такая работа осуществляется в 5-6 классах, но учащиеся решают некоторые простейшие задачи этим методом уже в начальной школе.

Процесс пропедевтической работы разделяют на два этапа [4, С. 137].

Первый этап пропедевтической работы. На данном этапе обучения текстовым задачам учителю необходимо систематически и целенаправленно формировать у учащихся некоторые важные умения и навыки, которые являются не только математическими, но и общеучебными. В соответствии с ними существуют приемы в методике обучения математики, которые разработаны для деятельности учителя по формированию конкретных умений. К ним относят следующие приемы:

1. Внимательное прочтение текста задачи.

Приемы, формирующие умения читать текст задачи: демонстрация образцов правильного прочтения текста задачи; проведение определенной работы над текстом задачи для усвоения ее содержания (предъявление задачи в форме текста, краткой записи, рисунка).

Также включаются приемы работы для лучшего усвоения содержания текстовой задачи: изменение числовых данных задачи; изменение сюжета текста задачи; изменение сюжета текста задачи и ее числовых данных.

2. Анализ текста задачи - выделять условие и заключение задачи.

Приемы, направленные на формирование умения выделять условие и вопрос задачи: выявление роли вопроса в нахождении способа решения задачи; обращение внимания на точность и ясность формулировки вопроса задачи; переформулировка (перефразирование) вопроса задачи.

Эти приемы воспитывают у учащихся способности выделять условие и вопрос задачи: формулирование вопросов к условию задачи; нахождение необходимых данных для ответа на вопрос задачи или для следующего шага решения задачи; составление задачи по заданному вопросу; формулирование одной или нескольких задач по заданному вопросу.

3. Оформление краткой записи задачи.

Приемы, направленные на формирование умения оформлять краткую запись текста задачи: оформление краткой записи в виде таблицы или схемы; оформление краткой записи в строку или столбец; чтение краткой записи задачи; составление задачи по данной краткой записи.

4. Выполнение чертежа или рисунка, в соответствии с условием текста задачи.

Приемы, направленные на обучение выполнения чертежей или рисунков по тексту задачи: предъявление заданий, требующих только выполнения соответствующего рисунка; чтение рисунка (чертежа), выполненного по тексту задачи; составление задачи поданному рисунку или чертежу.

Требования к выполнению чертежей: они должны быть наглядными, четкими, соответствовать тексту задачи; на них должны быть отражены все данные, входящие в условие задачи; выделенные на них данные и искомые величины должны соответствовать условию задачи и общепринятым обозначениям.

Также, при составлении рисунка по условию задачи важно, чтобы схема была построена пропорционально, в соответствии с величинами, которые даны в задаче [52].

Второй этап пропедевтической работы. На данном этапе обучения текстовым задачам учителю следует обратить внимание на выявление зависимостей между величинами, входящими в текст задачи и перевод данных зависимостей на язык математики. Происходит это с помощью соответствующих упражнений [4, С. 139].

Например, в 5 классе учащиеся рассматривают увеличение числа в несколько раз – одно из применений умножения. Здесь, для достижения указанной цели могут быть предложены следующие упражнения:

1) Отец старше сына в 4 раза. Сколько лет отцу, если сыну m лет?(4m.)

2) Сравните a и c, еслиa = 5c. (a больше c в 5 раз или c меньше a в 5 раз.)

3) Составьте равенство, исходя из условия: x больше y в n раз. ($x = ny$.)

4) Составьте задачу по уравнению 2x=28. (Например, «В корзине было несколько грибов. После того как в нее добавили столько же, в ней стало 28 грибов. Сколько грибов было в корзине?»)

Аналогичные упражнения могут быть подобраны для учащихся также для изучения других арифметических действий.

Также в методике обучения решению задач возможны иные системы упражнений для достижения поставленной цели.

Например, после прочтения текстовой задачи учащимся предлагается ответить на ряд вопросов. Решения исходных задач задания не требуют. Здесь можно выделить две группы заданий (Таблица 8).

Таблица 8

Задания для пропедевтической работы алгебраического метода решения текстовых задач в 5-6 классах

Задания для текстовых задач, требующие только ответы на ряд вопросов	
Задачи, формирующие умение видеть всевозможные зависимости и отношения между величинами, входящими в задачу	Задачи, формирующие умение видеть в математическом выражении или формуле определенное содержание (математическую модель)
Примеры. Задача 1. Теплоход «Метеор» за час проходит расстояние в 5 раз больше, чем катер. Сколько километров в час проходит каждый из них, если сумма их скоростей равна 90 км/ч? Задания. 1) Назовите величины, которые связаны зависимостями: а) Одна больше другой в 5 раз; б) Одна меньше ругой в 5 раз;	Примеры. Задача 1. На школьной математической олимпиаде было предложено 8 задач. За каждую решенную задачу засчитывалось 5 очков, а за каждую нерешенную задачу записывалось 3 очка. Сколько задач правильно решил ученик, если он получил 24 очка? Задание. Установите, к решению каких уравнений сводится решение предложенной

2) Если катер проходит х км/ч, то как можно истолковать выражения: $5x$; $5x+x$? Задача 2. Футбольная команда школьников выиграла на … состязаний, чем проиграла. Число проигравших состязаний в … числа состязаний, проведенных вничью. Сколько проведено состязаний, если ничьих было на …, чем проигрышей? Задание. Используя справочный материал, заполните пропуски в тексте задачи. Справочный материал: команда школьников выиграла 16 состязаний, проиграла 6 и свела вничью 2.	задачи: а) $5x-3(8-x)=24$; б) $5x=24$ в) $5\ \ 8-x\ \ -3x=24$ г) $5x-3(8+x)=24$ д) $3y=24$ е) $5x+3(8-x)=24$ Задача 2. С противоположных концов катка длиной 180 м бегут навстречу друг другу два мальчика. Через сколько секунд они встретятся, если начнут бег одновременно и если один пробегает 9 м/с, а другой 6 м/с? Задание. Дополните приведенные ниже выражения до уравнения, к которому сводится решение задачи: а) $9x+\cdots=180$; б) $180\ldots=6x$; в) $\ldots 9x=\cdots$

Предложенная система пропедевтической работы учителя по обучению решению текстовых задач показывает, что являясь целью и средством, задачи выступают и как предмет изучения. Усвоение методов решения задач позволяет подготовить школьников к осознанному решению задач методом составления уравнений [4, С. 140].

§ 8. Методика работы с текстовой задачей, решаемой методом математического моделирования

Процесс решения задачи есть деятельность, которая состоит из более мелких элементарных действий или операций. Необходимо формировать у учащихся умение выполнять эти операции. Наибольшая трудность для ученика – это поиск решения задачи, чаще всего это связано с тем, что ученик не владеет умением проводить анализ задачи, умением делать ее схематичную запись [39].

Л.М. Фридман [47] выделяет следующие этапы работы с текстовой задачей: анализ задачи; оформление и запись анализа; поиск способа решения задачи; этап осуществления решения; проверка решения; исследование задачи; формулировка ответа, после повторного исследования задачи; анализ решения задачи.

Е.И. Лященко считает, что чаще всего в деятельности по решению задач выделяют четыре этапа [26, С. 73]:

1. *Ознакомление с содержанием задачи.*

В теории и практике наиболее распространены следующие способы предъявления задачи учащимся: чтение задачи вслух; чтение задачи «про себя» с последующими ответами на вопросы учителя; выполнение заданий под диктовку учителя (математический диктант); «чтение» по готовому рисунку (таблице, схеме).

Таким образом, работа над задачей начинается с разбора ситуации, указанной в задаче, повторения текста задачи с числовыми данными. Можно использовать прием беседы по условию задачи, результатом беседы будет краткая запись условия задачи. Форма записи условия задачи должна быть компактной, она отражает только то, что необходимо для решения [32, С. 74].

В зависимости от целей, которые ставит учитель при работе над задачей, он организует деятельность учащихся разными приемами. В основном, поиск решения текстовой задачи проводится аналитико-синтетическим путем.

Анализ задачи начинается с вопроса задачи, который учитель задает учащимся. Дети осуществляют подбор данных, с помощью которых можно дать ответ на поставленный вопрос. Если числовых данных недостаточно, то учитель ставит перед учащимися новые вопросы. «Разложение» условия задачи таким образом продолжается до тех пор, пока для ответа на вопрос в условии будут все данные.

2. *Поиск решения задачи – выдвижение плана решения.*

Из анализа вытекает план решения задачи. Запись решения задачи зависит от способа решения. Если арифметический, то формы записи могут быть: действие с объяснением; числовые действия решения без текста; вопрос и последующее действиее; запись решения и предшествующее пояснениее [26, С. 76].

При решении задачи алгебраическим способом существенное значение имеет выбор величины за неизвестное, с помощью которого можно выразить остальные (или часть остальных) величины, входящие в задачу, и установить зависимость между данными задачи, которая даст возможность составить уравнение. Для многих задач за неизвестное можно принимать величину, которую требуется найти; тогда ответ на вопрос задачи получается без дополнительных вычислений.

3. *Процесс решения задачи – реализация плана.*

При решении текстовой задачи часто используют сочетание арифметического и алгебраического способов решения. В силу этого форма записи решения каждой части будет разной.

При обучении учащихся решению задач алгебраическим способом целесообразно требовать от школьников проговаривать мотивы составления уравнения. Желательно одну и ту е задачу решать, составляя различные уравнения при выборе за неизвестное различные величины, входящие в условие задачи. Такой прием позволяет сформировать у учащихся умение мотивировать составление уравнения при решении задач алгебраическим способом.

Получение нескольких решений одной и той же задачи позволяет не только сравнить эти решения, но и указывать более рациональное из них.

4. *Проверка решения задачи.*

Особое внимание уделяется проверке решения задачи. Важно помочь учащимся осознать необходимость осуществления проверки, следует познакомить с видами проверки решения задачи: решение задачи другим способом; установление факта, удовлетворяет ли полученный ответ условию задачи по содержанию [3, С. 77].

Рассматривая задачи, которые решаются с помощью уравнений, М.Б. Волович [10] выделяет этапы решения: обозначение неизвестной величины, выражение остальных величину через переменную и другие величины; составление уравнения, решение уравнения, анализ результата вычислений.

А.Д. Нахман [37] выделяет следующие основные этапы процесса математического моделирования:

1) формализация задачи (формулировка в терминах математики);

2) решение задачи в соответствии с математической теорией (решение внутри модели);

3) интерпретация полученных результатов в терминах предметной области, которая была дана первоначально.

Т.Е. Демидова и А.П. Тонких [11] выделяют несколько основных способов проверки решения задачи (Схема 10).

Важно, чтобы учащиеся освоили основные способы проверки решения задачи и знали о других существующих способах.

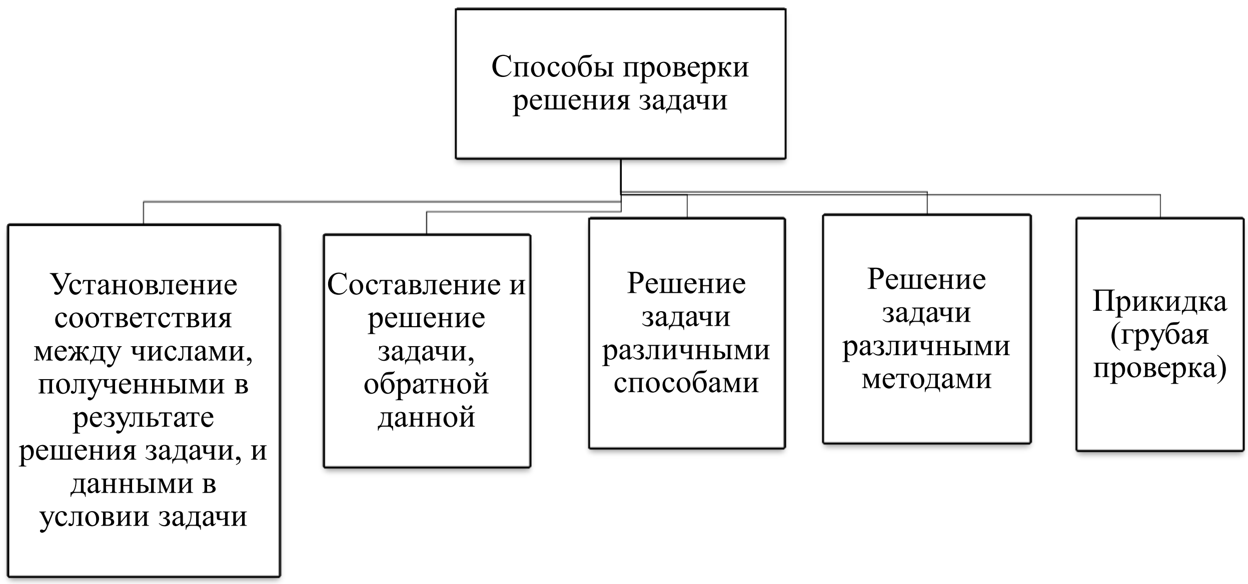

Схема 10. Способы проверки решения задачи.

В методическом пособии под редакцией В.И. Мишина [1] отмечено, что в школьной практике используются различные формы записи условия текстовой задачи: словесная, табличная, схематичная.

Критерии эффективности краткой записи: наглядность представления связей между величинами и соответствующими данными задачи; способность ученика самостоятельно воспроизвести условие задачи; возможность использования краткой записи для поиска решения задачи.

Эффективной моделью поиска решения текстовых задач в 5-6 классах является табличная форма записи системы отношений, включающая отношения между данными, между искомыми, между условием и требованием задачи [1, С. 46].

Не редко учащиеся испытывают трудности при составлении точной схемы или краткой записи текстовой задачи. Краткая запись должна быть достаточно полной, чтобы дать учащимся возможность выделять взаимосвязи между известными и неизвестными величинами [51].

Рассмотренная методика работы над текстовой задачей дает возможность формировать у учащихся умения записывать реальные ситуации на математическом языке.

§ 9. Примеры текстовых задач, решаемых методом математического моделирования в курсе алгебры 5-9 классов

В данном параграфе рассмотрим систему текстовых задач для учащихся 5-9 классов.

Используя труды М.Р. Леонтьевой и С.Б. Суворовой [24] выделяем следующие требования к системе упражнений, направленной на организацию усвоения приемов решения текстовых задач:

- система упражнений должна позволять учащимся активно участвовать в конструировании приема решения текстовых задач;
- в ходе выполнения упражнений данной системы у учащихся должно осуществляться усвоение и повторение каждого из приемов, которые входят в состав метода математического моделирования;
- упражнения должны быть выстроены по принципу систематичности, нарастания сложности, противодействия выработке стереотипа;
- упражнения должны формировать у учащихся умение выяснять, применима ли та или иная модель в рассматриваемой текстовой задаче;

- задания должны быть комплексного характера, выполнение которых требует распознания типа задачи и осознанный выбор приема и метода ее решения [С. 24].

Приведем следующую систему задач по теме «Метод математического моделирования при решении текстовых задач».

Ниже представлены задачи для 5-6 классов, которые будут расположены по группам в соответствии с классификацией, представленной на схеме 5, §4 «Классификация текстовых задач по фабуле задачи».

Задача на части

Задача №1 [38, С. 81]. В двух пачках 270 тетрадей. Сколько тетрадей в каждой пачке, если известно, что в одной из них в 4 раза больше, чем в другой?

Решение. Запись в тетради учащихся первого условия.

$$\begin{array}{l}\text{В } 1-\text{й пачке}\\ \text{Во } 2-\text{й пачке}\end{array}\ 270\ \text{тетрадей}$$

Второе условие: в 1-й пачке в 4 раза больше, чем во 2-й. К записи первого условия можно добавить иллюстрацию.

$$\left.\begin{array}{ll}\text{В 1-й пачке:} & \underline{\ x\ |\ x\ |\ x\ |\ x\ }\\ \text{Во 2-й пачке:} & \underline{\ x\ |}\end{array}\right\}\ 270$$

Так, x – количество тетрадей во второй пачке. Основание для уравнения – первое условие: в двух пачках 270 тетрадей. Составляем уравнение: $4x + x = 270$.

Решение уравнения: 1) $5x = 270$; $x = 270:5$; $x = 54$ (т) – столько тетрадей во 2-й пачке. 2) $4x = 4 * 54 = 216$ (т) – столько тетрадей в 1-й пачке. Проверка: $216 + 54 = 270$.

Ответ: 216 тетрадей и 54 тетради.

Задача на пропорции

Задача №2 [1, С. 44]. Из 21 кг хлопкового семени получили 5,1 кг масла. Сколько масла получили из 7 кг хлопкового семени?

Решение. Осознание составления учащимися пропорции к единице происходит постепенно, с некоторыми трудностями. Поэтому необходимо записывать кратко условие задачи. Это позволяет увидеть, какие отношения равны. В данном случае возможно привести такую краткую запись:

21 кг семян – 7 кг семян

5,1 кг масла – x кг масла

Пусть из 7 кг хлопкового семени получится х кг масла.

Тогда массу семян (кг), необходимую для получения одного килограмма масла, можно найти двумя способами: разделить 21 на 5,1 или разделить 7 на x.

Приравняв данные выражения, получим пропорцию $21{:}\,5{,}1 = 7{:}\,x$, отсюда $x = 1{,}7$. Значит, из 7 кг хлопкового семени получится 1,7 кг масла.

Ответ: 1,7 кг

Задача на движение

Задача № 4 [20, С. 12]. Расстояние между совхозом и городом, равное 170 км, мотоциклист проехал за 5 часов. Первые 2 часа он ехал со скоростью на 10 км/ч большей, чем скорость на оставшейся части пути. Определите скорости на первой и второй части пути.

Решение. Представим табличную запись (Табл. 9) решения данной задачи.

Таблица 9

Табличную запись решения задачи

<table>
<tr><th></th><th>Скорость</th><th>Время</th><th>Расстояние</th></tr>
<tr><td>1 участок</td><td>$x + 10$</td><td rowspan="2">2
3   5</td><td rowspan="2">$2(x + 10)$
$3x$ 170</td></tr>
<tr><td>2 участок</td><td>x</td></tr>
</table>

Пусть скорость мотоциклиста на втором участке пути x км/ч, тогда скорость мотоциклиста на первом участке пути $(x + 10)$ км/ч. Весь путь мотоциклист проехал за 5 часов, следовательно, на второй участок он затратил 3 часа. Значит длина второго участка $3x$ км.

Расстояние между городом и совхозом – сумма двух участков, то есть $2(x + 10)$+ $3x$ км. По условию задачи это расстояние равно 170 км.

Составим и решим уравнение: $2\ \ x + 10\ \ + 3x = 170$;

$2x + 20 + 3x = 170$; $5x = 170 - 20$; $5x = 150$; $x = 150:5$, $x = 30$.

Итак, скорость мотоциклиста на втором участке составляла 30 км/ч.

$30 + 10 = 40$ (км/ч)- скорость мотоциклиста на первом участке.

Ответ: 40 км/ч; 30 км/ч.

Задача на работу

Задача №5 [22, С. 3]. Шестеро рабочих выполнят некоторое задание на 4 дня раньше, чем четверо. За сколько дней выполнят задание шестеро рабочих?

Решение. Составим краткую запись условия задачи:

4 рабочих - ?

6 рабочих - ?, на 4 дня меньше, чем

Выразим зависимость между величинами при помощи стрелок:

4 рабочих – $(x + 4)$ дня

6 рабочих - x дней

Составим уравнение: $\frac{6}{4} = \frac{x+4}{x}$, или $3x = 2(x + 4)$, отсюда $x = 8$.

Итак, шестеро рабочих выполнят задание за 8 дней.

Ответ: 8 дней.

Задача на проценты

Задача №6 [1, С. 43]. В классе из 40 учащихся 32 правильно решили задачу. Сколько процентов учащихся правильно решили задачу?

Решение. 40 учащихся – 100%

32 учащихся – ?%

1 способ. Найдем, сколько учащихся составляет 1%:

1) 40:100=0,4 – составляет 1% учащихся.
2) 32:0,4=80. Значит, 32 ученика составляют 80%.

Ответ: 80 процентов.

2 способ. Введем переменную и составим уравнение.

Пусть x процентов учащихся правильно решили задачу. Один процент учащихся составляет 40:100=0,4, а x процентов составляет $0{,}4x$ учащихся.

Таким образом, $0{,}4x = 32; x = 32 : 0{,}4; x = 80.$

Ответ: 80%.

Задача на покупку и продажу

Задача №7 [9, С. 54]. Если бы школьник купил 11 тетрадей, то у него осталось бы 5 рублей, а на 15 тетрадей у него не хватало бы 7 рублей. Сколько денег было у школьника?

Чтобы учащиеся лучше представили условие задачи, можно задать несколько наводящих вопросов. Сколько ситуаций рассматривается в данной задаче? Что собой представляет каждая из ситуаций?

Решение. Пусть стоимость тетрадей x рублей, тогда:

1) $11x + 5 = 15x - 7; 4x = 12; x = 12 : 4; x = 3.$

Значит, одна тетрадь стоила 3 рубля. Найдем, сколько рублей школьник потратил на 11 тетрадей: $11 * 3 = 33$ (т);

У школьника еще осталось 5 рублей, значит: 33+5=38 (руб).

Ответ: 38 рублей.

Переходим к рассмотрению задач, составленных для учащихся 7—9 классов.

Задачи для 7 класса содержат следующие типы заданий:

- текстовые задачи, решения которых предполагает использование аппарата уравнений;

- текстовые задачи, при решении которых следует использовать в качестве алгебраической модели систему уравнений.

Задачи для 8 класса содержат следующие типы заданий:

- текстовые задачи, в решении которых используются в качестве алгебраической модели квадратные и дробные уравнения.

Задачи для 9 класса содержат следующие типы заданий:

- текстовые задачи, для решения которых в качестве алгебраической модели необходимо использовать систему уравнений второй степени с двумя переменными.

Далее задания будут расположены по группам в соответствии с классификацией, представленной на схеме 5, §4 «Классификация текстовых задач по фабуле задачи». Из данной классификации выбраны только группы задач, которые чаще встречаются в 7-9 классах.

Задача на смеси, сплавы и концентрацию

Задача № 8 [11, С. 5]. Сплавлено два слитка, содержание золота в которых 64% и 84% соответственно. Полученный сплав весит 50 г и содержит 76% золота. Сколько весил каждый из сплавленных слитков?

Решение. Пусть x г – весит первый слиток, y г – второй. Тогда золота в первом слитке будет $\frac{x*64\%}{100\%} = 0{,}64x$ (г), во втором – $\frac{y*84\%}{100\%} = 0{,}84y$ (г).

Количество золота в сплаве $\frac{50*76\%}{100\%} = 38$ (г).

Следовательно, из условия задачи имеем систему уравнений:

$\begin{matrix} x + y = 50 \\ 0,64 + 0{,}84y = 38 \end{matrix}$. Решив данную систему, найдем $x = 20$, $y = 30$.

Таким образом, первый слиток весил 20 г, второй слиток - 30 г.

Ответ: 20 г и 30 г.

Задача на движение

Задача № 9 [48, С. 28]. Из пункта А в пункт В со скоростью 80 км/ч выехал первый автомобиль, а через некоторое время с постоянной скоростью – второй. После остановки на 20 мин в пункте В второй автомобиль поехал с той же скоростью назад. Через 48 км он встретил первый автомобиль, шедший навстречу, и был на расстоянии 120 км от В в тот момент, когда в пункт В прибыл первый автомобиль. Найдите расстояние от А до места первой встречи автомобилей, если $AB = 480$ км.

Решение. Обозначим расстояние от А до места первой встречи автомобилей - s км, а скорость второго автомобиля –v км/ч, увидим, что 72 км (120-48=72) второй автомобиль пройдет за то же время, которое понадобится первому автомобилю, чтобы преодолеть 48 км.

Следовательно, $\frac{72}{v} = \frac{48}{80}$, откуда $v = 120$ (км/ч).

От места первой встречи до пункта В первому автомобилю останется пройти $(480 - s)$ км со скоростью 80 км/ч. На это он затратил $\frac{480-s}{80}$ ч.

За это же время второй автомобиль прошел от места первой встречи (от места обгона) до пункта В, потратил $\frac{1}{3}$ ч на стоянку в пункте В и еще $\frac{120}{v}$ ч на то, чтобы отъехать от В на 120 км.

Таким образом, составим уравнение $\frac{480-s}{80}=\frac{480-s}{v}+\frac{1}{3}+\frac{120}{v}$. Из него, зная, что $v=120$, находим $s=160$ (км).

Итак, расстояние от А до места первой встречи автомобилей составляет 160 км.

Ответ: 160 км.

Задача на работу

Задача № 10 [42, С. 959]. На изготовление 21 детали первый рабочий затрачивает на 4 часа меньше, чем второй рабочий на изготовление 35 таких же деталей. Известно, что первый рабочий за час делает на 2 детали больше, чем второй. Сколько деталей в час делает второй рабочий?

Решение. Введем переменную. Пусть х деталей в час делает второй рабочий.

Составим и решим уравнение: $\frac{35}{x}-\frac{21}{x+2}=4$; $\frac{35\ x+2\ -21x-4(x+2)}{x(x+2)}=0$;

$\frac{-4x^2+6x+70}{x(x+2)}=0$, $x\neq 0$ и $x\neq -2$.

$2x^2-3x-35=0$, $D=9-4*2*\ -35\ =289$, $x_1=5$; $x_2=-3{,}5$ (x_2 не удовлетворяет условию задачи). Следовательно, второй рабочий делает 5 дет/ч.

Ответ:5 дет/ч.

Задача на покупку и продажу

Задача № 12 [48, С. 29]. Группа студентов решила купить магнитофон ценой от 170 до 195 рублей. В последний момент двое отказались участвовать в покупке, поэтому каждому из оставшихся пришлось внести на 1 рубль больше. Сколько стоил магнитофон?

Решение. Пусть x – число студентов в группе, y руб. – величина первоначального предполагаемого взноса. Тогда стоимость магнитофона

$x * y$. Исходя из условия задачи можем составить систему неравенств с двумя переменными: $\begin{cases} xy = (x-2)(y+1) \\ 170 \le xy \le 195 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = 2 \\ 170 \le xy \le 195 \end{cases}$.

Следовательно, $340 \le x(x-2) \le 390$. Исключили y, т.к. по условию x- натуральное число. Теперь систему неравенств можно решать в натуральных числах.

Из неравенства $x^2 - 2x - 340 \ge 0$ имеем $x \ge 1 + \sqrt{1+340}$.

Из неравенства $x^2 - 2x - 390 \le 0$ находим $x \le 1 + \sqrt{1+390}$.

Таким образом, нужно найти натуральные решения неравенств $19 < \sqrt{1+341} \le x \le \sqrt{391}$. Очевидно, что $x = 20$. Тогда $y = 9$, $xy = 180$. Значит, магнитофон стоил 180 рублей.

Ответ: 180 руб.

Задача на части

Задача № 11 [2, С. 112]. Вася и Петя поделили между собой 39 орехов. Число орехов, доставшихся любому из них, меньше удвоенного числа орехов, доставшихся другому. Квадрат трети числа орехов, доставшихся Пете, меньше числа орехов, доставшихся Васе. Сколько орехов у каждого?

Решение. Пусть x – количество орехов, доставшихся Васе, а - количество орехов, доставшихся Пете. Исходя из условия задачи, составим систему из одного уравнения и трех неравенств: $\begin{cases} x + y = 39, \\ x < 2y, \\ y < 2x, \\ \frac{y^2}{9} < x. \end{cases}$

Сложность данной задачи в решении самой системы. При этом согласно условиям задачи, x и y – целые положительные числа.

Из уравнения найдем $x = 39 - y$. Относительно y имеем систему из трёх неравенств: $\begin{cases} 39 - y < 2y \\ y < 78 - 2y \\ \frac{y^2}{9} < 39 - y \end{cases}$. Из первых двух неравенств находим $y > 13$, $y < 26$. Последнее неравенство перепишем в виде $y^2 + 9y - 351 < 0$.

Можно, конечно, решить это неравенство, но можно поступить иначе. Так как y- целое положительное, то при $y = 14$ будем иметь $14^2 + 9 * 14 - 351 = -29 < 0$, а при $y = 15$ будет $15^2 + 9 * 15 - 351 = 9 > 0$, то $y \leq 14$, $y = 14$, $x = 25$.

Итак, 25 орехов досталось Васе и 14 орехов досталось Пете.

Ответ: 25 и 14 орехов.

Таким образом, нами была представлена система текстовых задач, решаемых методом математического моделирования. Задачи могут быть использованы при составлении самостоятельных и контрольных работ.

Ниже представлена самостоятельная работа для учащихся 7 класса. Данная самостоятельная работа имеет два варианта, в каждом варианте по 3 задачи. Для решения самостоятельной работы отводится 25 минут.

Вариант 1.

1. Из пункта M в пункт N велосипедист ехал по шоссе со скоростью 16 км/ч, а возвращался он со скоростью 12 км/ч по проселочной дороге, которая была на 6 км длиннее. Сколько километров проехал велосипедист по шоссе и сколько по проселочной дороге, если на весь путь он затратил 4 ч? [32]

2. Через 3 дня после того, как Пётр начал читать книгу, эту же книгу начал читать Алексей. Закончили чтение они одновременно. Пётр прочитывал по 10 страниц в день, а Алексей – по 16 страниц в день. Сколько страниц в книге? [12, С.215]

3. В магазине находилось два мешка с рисом одинаковой массы и один мешок с пшеном. Масса всех трёх мешков составляла160 кг. После того как из каждого мешка с рисом продали 20% риса, а из мешка с пшеном 25% пшена, масса крупы в мешках составила125 кг. Сколько килограммов риса и пшена было в каждом мешке первоначально? [27, №1182]

Вариант 2.

1. Лыжная трасса состоит из подъема и спуска, причем подъем на 8 км короче спуска. Лыжник, двигаясь на спуске со скоростью 18 км/ч, а на

подъеме – со скоростью 8 км/ч, затратил на подъем на 15 мин больше, чем на спуск. Найдите длину каждого участка трассы. [32]

2. Два студента взялись набирать рукопись, разделив ее между собой на две равные части. Через 4 дня после того, как первый начал работу, к работе приступил второй. Закончили они работу одновременно. Первый студент набирал по 254 страницы в день, а второй – по 40 страниц. Сколько дней работал каждый студент и сколько страниц они набрали вместе? [12, С.215]

3. За 8 дней работы на первом станке и 5 дней работы на втором было изготовлено 235 деталей. В результате усовершенствования производительность первого станка возросла на 15%, а второго на 20%. Теперь за два дня работы на первом станке и 3 дня работы на втором можно изготовить 100 деталей. Сколько деталей в день изготовляли раньше на каждом станке? [27, №1183]

Таким образом, можно отметить, что разработанные методические материалы по обучению учащихся решению текстовых задач методом математического моделирования могут быть применены учителем при подготовке учащихся к ОГЭ.

Выводы по второй главе

Во второй главе данной бакалаврской работы получены следующие результаты:

1. Представлен сравнительный анализ учебников алгебры учащихся 5-9 классов относительно метода математического моделирования при решении текстовых задач.

2. Выделены два основных этапа пропедевтики метода математического моделирования: на первом этапе учитель систематически и целенаправленно формирует у учащихся важные общеучебные и математические умения, необходимые для математического моделирования. На втором этапе учитель уделяет основное внимание выявлению зависимостей между величинами, о которых говорится в тексте задачи. Необходимо обучать переводу зависимостей величин на математический язык. В соответствии с выделенными умениями рассмотрены приемы работы учителя, направленные на их формирование.

3. Выявлены и рассмотрены этапы решения текстовых задач. Сформулированы основные методические особенности применения математического моделирования при решении текстовых задач.

4. Представлены примеры текстовых задач, решаемых методом математического моделирования. Представлен набор задач.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. В данной работе выполнен анализ понятия математической модели, рассмотрено понятие математического моделирования. Под математическим моделированием будем понимать описание какого-либо реального процесса, явления или ситуации на математическом языке.

2. Сформулировано определение текстовой задачи. Под текстовой задачей будем понимать описание некоторой реальной ситуации или явления на естественном языке с требованием и вопросом, на который необходимо найти ответ, опираясь и учитывая условия, которые указаны в задаче.

3. Рассмотрены основные учебные умения учащихся основной школы при решении текстовых задач методом математического моделирования:

- планирование собственной деятельности;
- восприятие и анализ учебной информации;
- мотивация на каждом этапе собственной деятельности;
- грамотное оформление полученных результатов;
- осуществление контроля над собственной деятельностью.

4. Приведены различные классификации текстовых задач и адекватных им математических моделей, а именно: классификации текстовых задач по числу действий, по числу данных и искомых, по фабуле задачи, по способу решения, по математическим моделям, по алгебраическим моделям, по видам познавательного интереса.

5. Представлен сравнительный анализ учебников алгебры учащихся 5-9 классов относительно метода математического моделирования при решении текстовых задач.

6. Рассмотрены основные этапы решения текстовых задач. Сформулированы основные методические особенности применения математического моделирования при решении текстовых задач.

7. Представлен набор текстовых задач, решаемых методом математического моделирования

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Автономова, Т.В. Практикум по методике преподавания математики в средней школе [Текст]: Учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. ин-тов / Т.В. Автономова, С.Б. Верченко, В.А. Гусев и др.; Под ред. В.И. Мишина. – М.: Просвещение, 1993. –192 с.

2. Аминова, З.А. Методические особенности решения текстовых задач по математике [Электронный ресурс] / З.А. Аминова // Вестник Череповецкого государственного университета. – 2012. - №4 (43). – С. 110-113.Режим доступа:http://elibrary.ru/download/elibrary_18844917_66176888.pdf - Последнее обновление 12.05.2017.

3. Байрамукова, П.У. Методика обучения математике в начальных классах [Текст]: курс лекций / П.У. Байрамукова, А.У. Уртенова – Ростов н/Д: Феникс, 2009. – 299 с.

4. Блох, А.Я. Методика преподавания математики в средней школе. Частная методика [Текст]: Учеб. пособие для студентов пед. ин-тов по физ.-мат. спец. / А.Я. Блох, В. А. Гусев, Г. В. Дорофеев и др.; Сост. В. И. Мишин. - М.: Просвещение, 1987. – 416 с.

5. Бунимович, Е.А. Математика. Арифметика. Геометрия. 5 класс [Текст]: учеб. для общеобразоват. организаций с прил. на электрон. носителе / [Е.А. Бунимович, Г.В. Дорофеев, С.Б. Суворова и др.]; Рос. академ. наук, Рос. академ. образования, изд-во «Просвещение». – 3-е изд. – М.: Просвещение, 2014. – 223 с.

6. Бунимович, Е.А. Математика. Арифметика. Геометрия. 6 класс [Текст]: учеб. для общеобразоват. организаций с прил. на электрон. носителе / [Е.А. Бунимович, Л.В. Кузнецова, С.С. Минаева и др.]. – 3-е изд. – М.: Просвещение, 2014. – 240 с.

7. Вафеева, А.М. Арифметические задачи для формирования познавательного интереса учащихся / А.М. Вафеева // Математика в школе. – 2011. – № 3. – С. 56 – 62.

8. Виноградова, Е.П. Математика: текстовые задачи и методы их решения [Текст]: учебно-методическое пособие / Е.П. Виноградова. – Орск: Издательство ОГТИ, 2007. – 94 с.

9. Виноградова, Л.В. Методика преподавания математики в средней школе [Текст]: учеб. пособие / Л.В. Виноградова. – Ростов н/Д.: Феникс, 2005. – 252с.

10. Волович, М.Б. Ключ к пониманию математики - 5-6 классы / М.Б. Волович. - М.: Аквариум, 1997. – 288 с.

11. Демидова, Т.Е., Тонких, А.П, О способах проверки решения текстовых задач / Демидова Т.Е., Тонких А.П. // Математика в школе. – 1999. – № 5. – С. 4 – 7.

12. Дорофеев, Г.В. Алгебра. 7 класс [Текст]: учеб. для общеобразоват. организаций / [Г.В. Дорофеев, С.Б. Суворова, Е.А. Бунимович и др.] – 2-е изд. – М.: Просвещение, 2014.- 287 с.

13. Дорофеев, Г.В. Алгебра. 8 класс [Текст]: учеб. для общеобразоват. организаций / [Г.В. Дорофеев, С.Б. Суворова, Е.А. Бунимович и др.] – 3-е изд. – М.: Просвещение, 2016.- 320 с.

14. Дорофеев, Г.В. Алгебра. 9 класс [Текст]: учеб. для общеобразоват. организаций / [Г.В. Дорофеев, С.Б. Суворова, Е.А. Бунимович и др.]; под ред. Г.В. Дорофеева; Рос. академ. наук, Рос. академ. образования, изд-во «Просвещение». – 5-е изд. – М.: Просвещение, 2010. - 304 с.

15. Дорофеев, Г.В. Математика. 5 класс. Часть 1. [Текст] / Г.В. Дорофеев, Л.Г. Петерсон. – 2-е изд., перераб. – М.: Издательство «Ювента», 2011. – 176 с.

16. Дорофеев, Г.В. Математика. 5 класс. Часть 2. [Текст] / Г.В. Дорофеев, Л.Г. Петерсон. – 2-е изд., перераб. – М.: Издательство «Ювента», 2011. – 240 с.

17. Дорофеев, Г.В. Математика. 6 класс. Часть 1. [Текст] / Г.В. Дорофеев, Л.Г. Петерсон. – 2-е изд., перераб. – М.: Издательство «Ювента», 2010. – 112 с.

18. Дорофеев, Г.В. Математика. 6 класс. Часть 2. [Текст] / Г.В. Дорофеев, Л.Г. Петерсон. – 2-е изд., перераб. – М.: Издательство «Ювента», 2010. – 128 с.

19. Дорофеев, Г.В. Математика. 6 класс. Часть 3. [Текст] / Г.В. Дорофеев, Л.Г. Петерсон. – 2-е изд., перераб. – М.: Издательство «Ювента», 2010. – 176 с.

20. Дробышев, Ю.А. Методические рекомендации к контрольным работам по методике преподавания математики (3 курс заочного отделения) [Текст] / Ю.А. Дробышев, И.В. Дробышева, Е.И. Малахова. – Калуга: КГУПУ им. Циолковского, 1997. – 78 с.

21. Ермольчик, И.В., Левчук, З.К. Математическое моделирование как условие развития логического мышления учащихся [Электронный ресурс] / И.В. Ермольчик, З.К. Левчук // Педагогика, психология, методика. 2014. - №1(43). – С. 65 - 71. – Режим доступа: http://elibrary.ru/download/elibrary_23077906_31615273.pdf - Последнее обновление 12.05.2017.

22. Круглова, Е.А. Откуда брать задачи / Е.А. Круглова // Математика в школе. – 1999. – № 5. – С. 2 – 4.

23. Левитас, Г.Г. Об алгебраическом решении текстовых задач/ Г.Г. Левитас // Математика в школе. – 2000. – № 8. – С 13.

24. Леонтьева, М.Р. Упражнения в обучении алгебре [Текст]: Кн. Для учителя / М.Р. Леонтьева, С.Б. Суворова. – М.: Просвещение, 1985. – 128 с.

25. Ложкина, Е.М. Методологические основы изучения понятия «Математическая модель» в курсе алгебры основной школы [Электронный ресурс] / Е.М. Ложкина // Известия Российского Государственного педагогического университета им. А.И. Герцена. 2008.- №70 - 2. – С. 99 - 104. – Режим доступа: https://elibrary.ru/download/elibrary_16359220_49610879.pdf - Последнее обновление 12.05.2017.

26. Лященко, Е.И. Лабораторные и практические работы по методике преподавания математики [Текст]: Учеб. пособие для студентов физ.-мат.

спец. пед. ин-тов / Е.И. Лященко, К.В. Зобкова, Т.Ф. Кириченко и др.; Под ред. Е.И. Лященко. – М.: Просвещение, 1988. – 223 с.

27. Макарычев, Ю.Н. Алгебра. 7 класс [Текст]: учеб. для общеобразоват. учреждений / [Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, С.Б. Суворова]; под ред. С.А. Теляковского. – М.: Просвещение, 2013. – 256 с.

28. Макарычев, Ю.Н. Алгебра. 8 класс [Текст]: учеб. для общеобразоват. организаций с прил. на электрон. носителе / [Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, С.Б. Суворова]; под ред. С.А. Теляковского. – М.: Просвещение, 2013. – 287 с.

29. Макарычев, Ю.Н. Алгебра. 9 класс [Текст]: учеб. для общеобразоват. организаций / [Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, С.Б. Суворова]; под ред. С.А. Теляковского. – 21-е изд. – М.: Просвещение, 2014. – 271 с.

30. Мамыкина, Л.А. Математическое моделирование как метод познания и обучения математике в профильной школе [Электронный ресурс] / Л.А. Мамыкина // Новосибирский государственный педагогический университет. 2008. - №8. – С. 296-281. – Режим доступа: https://elibrary.ru/download/elibrary_18086876_92658059.pdf - Последнее обновление 12.05.2017.

31. Мельников, О.И, Кунцевич, И.П. Этапы обучения математическому моделированию [Электронный ресурс] / О.И Мельников, И.П. Кунцевич // Витебский государственный университет им. П.М. Машерова (Витебск). 2011. - №65. – С.90-95. – Режим доступа:http://elibrary.ru/download/elibrary_17015783_30924508.pdf - Последнее обновление 12.05.2017.

32. Муравин, Г.К. Алгебра 7 кл. [Текст]: учеб. для общеобразоват. учреждений / Г.К. Муравин, К.С. Муравин, О.В. Муравина. – 9-е изд., стереотип. – М.: Дрофа, 2013. – 285 с.

33. Муравин, Г.К. Алгебра 8 кл. [Текст]: учеб. для общеобразоват. учреждений / Г.К. Муравин, К.С. Муравин, О.В. Муравина. – 15-е изд., стереотип. – М.: Дрофа, 2013. – 254 с.

34. Муравин, Г.К. Алгебра 9 кл. [Текст]: учебник / Г.К. Муравин, К.С. Муравин, О.В. Муравина. – 14-е изд., стереотип. – М.: Дрофа, 2014. – 315 с.

35. Муравин, Г.К. Математика. 5 кл. [Текст]: учебник / Г.К. Муравин, О.В. Муравина. – 3-е изд., стереотип. – М.: Дрофа, 2014. – 318 с.

36. Муравин, Г.К. Математика. 6 кл. [Текст]: учебник / Г.К. Муравин, О.В. Муравина. – 2-е изд., стереотип. – М.: Дрофа, 2014. – 319 с.

37. Нахман, А.Д. Математическое моделирование как инновационная содержательно-методическая линия в курсе математики [Электронный ресурс] / А.Д. Нахман // Вестник Тульского государственного университета. Серия: современные образовательные технологии в преподавании естественнонаучных дисциплин. – 2014. - №1 (13). – С. 93-96. – Режим доступа: http://elibrary.ru/download/elibrary_22535277_36435525.pdf - Последнее обновление 12.05.2017.

38. Орехов, Ф.А. Решение задач методом составления уравнений[Текст]: Пособие для учителей восьмилетней школы / Ф.А. Орехов. - М.: Просвещение, 1971. – 156 с.

39. Пойа, Д. Как решать задачу /Пер. с англ. В.Г. Звонаревой и Д.Н. Белла, под ред. Ю.М. Гайдука. - 2-е изд. - М.: Учпедгиз, 1961. – 207 с.

40. Примерная основная образовательная программа основного общего образования. Одобрена решением федерального учебно-методического объединения по общему образованию / М-во образования и науки РФ. – М.: Просвещение, 2015. – 560 с.

41. Сафонова, Л.А. О действиях, составляющих умение решать текстовые задачи / Л.А. Сафонова // Математика в школе. – 2000. – № 8. – С. 34 – 36.

42. Смыковская, Т.К., Машевская, Ю.А., Вихляева, О.М. Использование интерактивной доски при обучении решению текстовых задач алгебраическим методом [Электронный ресурс] / Т.К. Смыковская, Ю.А. Машевская, О.М. Вихляева // Современные проблемы науки и образования. – 2014. - №6. – С. 957-965. - Режим доступа:

http://elibrary.ru/download/elibrary_22878202_32998177.pdf - Последнее обновление 12.05.2017.

43. Столяр, А.А. Логические проблемы преподавания математики / А.А. Столяр.– Минск: «Высшая школа», 1965. – 254 с.

44. Федеральный государственный образовательный стандарт общего основного образования / М-во образования и науки РФ. – М.: Просвещение, 2010. - 50 с. – Режим доступа: http://минобрнауки.рф/документы/938- Последнее обновление 06.06.2017.

45. Федеральный перечень учебников, рекомендованных к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ начального общего, основного общего, среднего общего образования: Приказ Мин. образования и науки РФ от 31 марта 2014. [Электронный ресурс]. - Режим доступа: http://минобрнауки.рф/новости/4136/файл/3091/253_31.03.2014.pdf. - Последнее обновление 12.05.2017.

46. Фридман, Л.М., Теоретические основы методики обучения математике [Текст]: Учебное пособие / Л.М. Фридман. - Изд. 3-е. – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009. – 248 с.

47. Фридман, Л.М., Турецкий, Е.Н. Как научиться решать задачи / Л.М. Фридман – 3-е изд., дораб. – М.: Просвещение, 1989. – 192 с.

48. Чаплыгин, В.Ф. Некоторые методические соображения по решению текстовых задач / В.Ф. Чаплыгин // Математика в школе. – 2000. – № 4. – С. 28 – 31.

49. Шевкин, А.В. Обучение решению задач в 5-6 классах [Текст]: Книга для учителя / А.В. Шевкин. – 3-е изд. Исправл. – М.:ООО «ТИД Русское слово- РС».- 2002. – 208 с.

50. Bahmaei F. Mathematical modelling in primary school, advantages and challenges [Электронный ресурс] / F. Bahmaei // Journal of Mathematical Modelling and Application. – 2011. - № 9, 3-13. – С. 1-11. Режим доступа:

https://proxy.furb.br/ojs/index.php/modeling/article/download/3774/2597 - Последнее обновление 12.05.2017.

51. Cheong, Ya. K. The Model Method in Singapore [Электронный ресурс] / Yan Kow Cheong// The Mathematics Educator. – 2002. - С. 47-64. Режим доступа: http://math.nie.edu.sg/ame/matheduc/tme/tmeV6_2/05-Yan%20KC%20Final%20version.pdf - Последнее обновление 12.05.2017.

52. Mathematics Problem Solving and Problem-Based Learning for Joyful Learning in Primary Mathematics Instruction[Электронный ресурс] / Department of Mathematics Education Yogyakarta State University. -2011. – 33 с. Режим доступа: http://staff.uny.ac.id/sites/default/files/131930136/Mathematics%20Problem%20Solving%20and%20PBL.pdf – Последнее обновление 12.05.2017.

53. Oswalt, S. Mathematical modeling in the high school classroom [Электронный ресурс] / S. Oswalt // Mississippi State University. – 2012. – 86 с. Режим доступа: http://etd.lsu.edu/docs/available/etd-07032012-124945/unrestricted/oswaltthesis.pdf – Последнее обновление 12.05.2017.

54. Soylu, Ya. The Models Used by Elementary School Teachers to Solve Verbal Problems [Электронный ресурс] / Ya. Soylu // Australian Journal of Teacher Education. – 2010. - №35 (4). – С. 25-40. Режим доступа: http://ro.ecu.edu.au/cgi/viewcontent.cgi?article=1429&context=ajte – Последнее обновление 12.05.2017.