МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Тольяттинский государственный университет»

Институт математики, физики и информационных технологий

Кафедра «Алгебра и геометрия»

Направление подготовки 44.03.05 «Педагогическое образование»

Направленность (профиль) «Математика и информатика»

БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА

на тему **«МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ МЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ СТЕРЕОМЕТРИИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МОДЕЛИ ПРАВИЛЬНОЙ ШЕСТИУГОЛЬНОЙ ПРИЗМЫ В КЛАССАХ С УГЛУБЛЕННЫМ ИЗУЧЕНИЕМ МАТЕМАТИКИ»**

Студент Н.М. Руськина ____________

Руководитель к.ф.-м.н., профессор
кафедры алгебры и геометрии
Е.В. Потоскуев ____________

Консультант к.п.н., А.В. Кириллова ____________

Допустить к защите

Заведующий кафедрой д.п.н., профессор Р.А. Утеева ____________

«____»__________2017 г.

Тольятти 2017

АННОТАЦИЯ

Цель бакалаврской работы - разработать методику обучения решению метрических задач на нахождение расстояний и углов с применением модели правильной шестиугольной призмы, используя *геометрический и векторно-координатный методы* по УМК Е.В. Потоскуева и Л.И. Звавича.

Задачи на вычисление углов и расстояний между прямыми и плоскостями в пространстве являются метрическими задачами стереометрии. Необходима выработка умений учащихся 10-11 классов видеть, правильно изображать и вычислять расстояния и углы между прямыми и плоскостями на уже изображенных многогранниках, чтобы безошибочно решать стереометрические задачи на вычисление площадей и объемов этих многогранников. При их решении могут использоваться геометрический (синтетический), векторный, координатный и векторно-координатный методы.

Бакалаврская работа состоит из введения, двух глав, заключения, списка литературы.

Глава I посвящена *выявлению целей* обучения решению метрических задач стереометрии. Анализируются программы и учебники по теме исследования. Представлены *геометрический и векторно-координатный методы* решения метрических задач стереометрии.

В Главе II составлены методические аспекты по обучению решению метрических задач на нахождение расстояний и углов геометрическим и векторно-координатным методами.

Список литературы содержит 25 наименований.

ABSTRACT

The topic of the given bachelor's thesis is "The teaching method of solving the metric problems of stereometry using the model of a regular hexagonal prism in classes with advanced mathematics learning".

The aim of the work is to give some information about methodological specifics of teaching to solve metric problems of stereometry as exemplified by a model of regular hexagon prism.

The tasks on calculating angles and distances between straight lines and planes in space are metric problems of stereometry. A student in tenth or eleventh grade must learn how to calculate distances and angles between straight lines and planes at given polyhedrons in order to solve stereometric problems on calculating the content and cubic content of these polyhedrons.

The key issue of the bachelor's thesis is using of geometric and vector-coordinate methods in solving metric problems of stereometry

The first chapter of the thesis describes the goal of teaching to solving the metric problems of stereometry. We analyze programs and textbooks on the topic under research and present geometrical and vector-coordinate methods of solving metric problems of stereometry.

The second chapter of the thesis focuses on methodical recommendations on teaching the solving of metric problems, in which distances and angles using geometrical and vector-coordinate methods should be found.

References contain 25 items.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность исследования. «Изучение геометрии не только состоит в формировании геометрических знаний, но и способствует развитию личности, умению логически мыслить и доказательно обосновывать истинность утверждений в любой сфере деятельности. Хорошее геометрическое образование, пространственное воображение и логическое мышление необходимы не только профессиональному математику, но и инженеру, и экономисту, и дизайнеру, и юристу, и программисту, и специалистам многих других профессий.

Владение геометрией означает умение решать геометрические задачи. Алгоритмов решения геометрических задач, вообще говоря, нет. Прежде чем приступить к решению задачи, следует наглядно представить, вообразить, нарисовать фигуры, о которых идет речь в ее условии. И хотя, при строгом подходе к изучению геометрии, рисунок не имеет доказательной силы, даже если он выполнен безупречно, тем не менее, верно, наглядно и хорошо выполненный рисунок (чертеж) к задаче — это надежный помощник при ее решении» [10, С. 5].

Задачи, в которых находят *расстояния*, *углы*, площади, объемы, называют метрическими задачами стереометрии. Необходима выработка умений учащихся 10-11 классов видеть, правильно изображать и вычислять различные расстояния в пространстве, а также величины углов между прямыми и плоскостями на уже *изображенных многогранниках*, чтобы безошибочно решать стереометрические задачи на вычисление площадей и объемов этих многогранников. При их решении могут использоваться *геометрический (синтетический), векторный, координатный и векторно-координатный методы*.

Эти умения учащиеся приобретают, когда в задачном материале в качестве многогранника — тренажёра, наряду с правильным тетраэдром и кубом, привлекается также *правильная шестиугольная призма*.

В данной работе, используя модель правильной шестиугольной призмы, предлагаются геометрический и векторно-координатный методы решения стереометрических задач различного уровня сложности на вычисление *расстояний*: от точки до прямой и плоскости, между двумя прямыми, а также *углов*: между двумя прямыми, прямой и плоскостью, двумя плоскостями.

Проблема исследования: выявление методических особенностей обучения решению метрических задач стереометрии с использованием модели правильной шестиугольной призмы в классах с углублённым изучением математики.

Объектом исследования является процесс обучения геометрии учащихся 10 - 11 классов с углубленным изучением математики.

Предмет исследования: методические особенности обучения решению метрических задач с использованием модели правильной шестиугольной призмы в классах с углубленным изучением математики.

Цель исследования заключается в разработке методики обучения решению метрических задач на нахождение расстояний и углов с применением модели правильной шестиугольной призмы, используя геометрический и векторно-координатный методы по УМК Е.В. Потоскуева и Л.И. Звавича.

Задачи исследования:

1. Определить различные подходы к решению метрических задач стереометрии.

2. Провести анализ содержания программы и школьных учебников по теме исследования.

3. Выделить методические особенности обучения решению задач на нахождение расстояний в пространстве *геометрическим методом* с использованием модели правильной шестиугольной призмы.

4. Выделить методические особенности обучения решению задач на нахождение расстояний и углов в пространстве *векторно-координатным методом* с использованием модели правильной шестиугольной призмы.

Для решения поставленных задач были использованы следующие **методы исследования:** изучение литературы по теме исследования, самостоятельное решение задач.

Теоретическая значимость исследования состоит в том, что в нем выявлены методические особенности обучения решению метрических задач с использованием модели правильной шестиугольной призмы в классах с углубленным изучением математики.

Практическая значимость исследования данной работы состоит в предложении методических рекомендаций выработки у учащихся 10 – 11 классов с углубленным изучением математики умений и навыков решения метрических задач стереометрии от базового - до повышенного уровня сложности.

Апробация результатов исследования осуществлена путём выступлений на научной студенческой конференции «Дни науки» института математики, физики и информационных технологий ТГУ (апрель 2017 г., диплом за 3 место на I этапе); VIII Международной научной конференции «Математика. Образование. Культура», (к 240-летию со дня рождения Карла Фридриха Гаусса) (ТГУ, апрель 2017, диплом за 3 место).

По теме исследования опубликована статья [16].

На защиту выносятся методические рекомендации выработки у учащихся 10 – 11 классов с углубленным изучением математики умений и навыков решения метрических задач стереометрии от базового до повышенного уровня сложности, используя изображения и модели правильной шестиугольной призмы.

Бакалаврская работа состоит из введения, двух глав, пяти параграфов, заключения и списка литературы.

Во введении сформулированы основные характеристики исследования: актуальность, проблема, объект, предмет, цель, задачи и методы исследования.

Глава I посвящена выявлению целей обучения решению метрических задач стереометрии. Анализируются программы и учебники по теме исследования. Представлены геометрический и векторно-координатный методы решения метрических задач стереометрии.

В Главе II составлены методические аспекты по обучению решению метрических задач на нахождение расстояний и углов геометрическим и векторно-координатным методами.

В заключении сформулированы основные результаты и выводы проведённого исследования.

Список литературы содержит 25 наименований.

ГЛАВА I. МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОБУЧЕНИЯ УЧАЩИХСЯ РЕШЕНИЮ МЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ СТЕРЕОМЕТРИИ

§ 1. Стереометрические задачи и методы их решения

Е.И. Лященко утверждает [5, С. 22], что «основным средством, которое используется при обучении математике для формирования знаний, умений и навыков учащихся, являются задачи».

«Задачи по стереометрии - прекрасные упражнения, способствующие развитию пространственных представлений, умения логически мыслить, способствующие более глубокому усвоению всего школьного курса математики» [4, С. 4].

Многие задачи по стереометрии чаще всего сводятся к планиметрическим задачам, поэтому возвращаясь к планиметрии, необходимо повторять теоремы и формулы, для их успешного решения. При решении задач по стереометрии мы прибегаем к использованию средств алгебры и тригонометрии, применяем векторный и координатный методы, дифференцирование и интегрирование.

Нахождение расстояний в пространстве является той важной частью раздела стереометрии, на которой основываются, базируются все ее метрические вопросы, в том числе нахождение углов, площадей и объемов геометрических фигур. Умение *видеть и вычислять различные расстояния, углы между прямыми и плоскостями является фундаментом, опорой для успешного изучения всей метрической стереометрии* [10, С. 7].

В данной работе рассматриваются два метода решения задач метрического характера: геометрический и векторно-координатный.

Обратимся к *программам по геометрии* для учащихся 10 - 11 классов общеобразовательных учреждений, составитель Т.А. Бурмистрова. В этом пособии автор отмечает, что изучение математики на углубленном уровне среднего (общего) образования ориентировано на формирование представлений об идеях и методах математики, развитие логического и математического мышления, алгоритмической деятельности, пространственного воображения ([14]).

В *Федеральном государственном образовательном стандарте* среднего (полного) образования [18] говорится о том, что требования к предметным результатам освоения *углубленного курса* математики должны включать требования к результатам освоения базового курса и дополнительно отражать:

– сформированность понятийного аппарата по основным разделам курса математики; знаний основных теорем, формул и умения их применять; умения доказывать теоремы и находить нестандартные способы решения задач;

– сформированность умений моделировать реальные ситуации, исследовать построенные модели, интерпретировать полученный результат;

– сформированность представлений о необходимости доказательств при обосновании математических утверждений и роли аксиоматики в проведении дедуктивных рассуждений.

Далее рассмотрим методы решения метрических задач стереометрии по УМК Е.В. Потоскуева и Л.И Звавича. Покажем, что необходимо знать и уметь учащимся 10 - 11 классов для того, чтобы успешно решать метрические задачи на нахождение расстояний и углов, используя модель правильной шестиугольной призмы.

1.1. Геометрический метод решения задач стереометрии

Одним из способов решения стереометрических задач является геометрический метод. Данный метод основан на использовании теорем планиметрии и стереометрии, при этом чтобы доказать то или иное утверждение**,** необходимо прибегнуть к логическим рассуждениям. Кроме того, при решении таких задач необходимо выполнять различные геометрические построения [4].

Для того чтобы успешно решать задачи на нахождения расстояний и углов геометрическим методом, учащиеся должны достичь следующих предметных результатов.

Уметь на моделях, изображениях куба, правильного тетраэдра, параллелепипеда, правильных пирамиды и призмы:

– строить (изображать) перпендикуляр из данной точки на данную прямую (плоскость) и находить его длину, аргументированно обосновывая каждый шаг построения и вычисления;

– изображать, определять и вычислять углы между пересекающимися и скрещивающимися прямыми, содержащими ребра, диагонали многогранника, диагонали его граней, сопровождая каждый шаг построения и вычисления корректной аргументацией;

– решать задачи на доказательство и вычисление на перпендикулярность прямой и плоскости, используя модели и изображения многогранников;

– решать задачи на нахождение расстояния между скрещивающимися прямыми, используя изображения правильного тетраэдра, куба, прямоугольного параллелепипеда;

– находить различные расстояния в пространстве, используя многогранники и многоугольники, расположенные в пространстве, корректно аргументировать каждый шаг построения изображения, доказательной и вычислительной частей решения задачи.

Уметь, используя в качестве объектов изучения куб, прямоугольный параллелепипед, правильный тетраэдр, правильную пирамиду, правильную призму, в координатной форме решать задачи: а) на составление уравнения плоскости; б) на вычисление угла между двумя плоскостями (двумя прямыми, между прямой и плоскостью) по заданным их уравнениям, определяя при этом, параллельны (перпендикулярны) ли они; в) на вычисление расстояния: от данной точки до данной плоскости; между параллельными плоскостями.

Отметим, что при решении задач данным методом необходимы знания планиметрии, алгебры и геометрии, также пространственное воображение. Применение тригонометрии в решении задач нередко позволяет упростить вычисления [4].

1.2. Векторно-координатный метод решения задач стереометрии

При решении стереометрических задач, к некоторым из них применим векторно-координатный метод. Прежде всего, это задачи, в которых речь идет о кубе, тетраэдре с прямым трехгранным углом, правильной шестиугольной призмы.

Особенность векторно-координатного метода решения аффинных и метрических задач стереометрии заключается в том, что сначала мы переводим условие данной геометрической задачи на язык *векторной и координатной алгебры*, после чего происходит решение алгебраических уравнений, неравенств или их систем, используя при этом определенные, необходимые формулы координатной геометрии. Затем полученный в координатной форме результат переводится на язык геометрии точек, прямых и плоскостей, и, наконец, «возникает» нужный ответ к данной задаче [12].

Для того чтобы успешно решать задачи на нахождения расстояний и углов векторно-координатным методом, учащиеся должны достичь следующих предметных результатов:

Уметь, используя в качестве объектов изучения куб, прямоугольный параллелепипед, правильный тетраэдр, правильную пирамиду, правильную призму, в координатной форме решать задачи:

а) на составление уравнения плоскости;

б) на вычисление угла между двумя плоскостями (двумя прямыми, между прямой и плоскостью) по заданным их уравнениям, определяя при этом, параллельны (перпендикулярны) ли они;

в) на вычисление расстояния: от данной точки до данной плоскости; между параллельными плоскостями;

«Решение многих стереометрических задач векторно-координатным методом значительно проще их решения средствами элементарной геометрии, при этом можно обойтись без дополнительных построений, которые становятся необходимыми при иных методах решения» [12].

Таким образом, в данном параграфе мы рассмотрена сущность геометрического и векторно-координатного методов решения метрических задач стереометрии. Указаны знания, умения и навыки, которыми должен владеть учащийся для решения метрических задач стереометрии в 10 - 11 в классах с углубленным изучением геометрии.

§ 2. Анализ содержания программы и школьных учебников по теме исследования

Различные авторские коллективы предлагают ряд учебников геометрии для 10-11 классов.

Подробно рассмотрим УМК по геометрии [6] (авторы *Е. В. Потоскуев, Л.И. Звавич*).

Учебник [6] по геометрии углублённого уровня для 10 класса включает теоретический материал по курсу стереометрии. Авторы этого УМК отмечают, что на уроки геометрии в классах с углубленным изучением математики отводится 3 часа в неделю, на изучение всего курса геометрии в 10 классе - 105 часов. Для успешной работы по данному учебнику авторами разработано примерное почасовое тематическое планирование [8].

Для того чтобы научиться решать метрические задачи**,** учащимся необходимо освоить материал следующих глав учебника.

В главе 2 «*Прямые в пространстве*» представлена классификация взаимного расположения прямых в пространстве. Учащимся необходимо знать и понимать, что возможны три взаимно исключающих случая взаимного расположения двух прямых в пространстве - две данные прямые:

а)параллельны; б) пересекаются; в) скрещиваются. Выделены основные изучаемые вопросы для параллельных и скрещивающихся прямых: определение, свойства, признак. Приведены понятия об угле между лучами и прямыми, рассмотрен случай перпендикулярности прямых. На изучение этого геометрического материала и решение тематических задач [7] различного уровня сложности авторами рекомендуется 7 урочных часов.

В главе 3 «*Прямая и плоскость в пространстве*» излагается материал о возможных случаях взаимного расположения прямой и плоскости в пространстве: прямая параллельна плоскости или пересекает её. В последнем случае рассматриваются две ситуации: прямая перпендикулярна плоскости или не перпендикулярна ей.

По каждому из случаев параллельности или перпендикулярности прямой и плоскости рассмотрены ключевые вопросы: определение, признак, свойства. Подробно рассматривается вопрос об изображении пространственных геометрических фигур на плоскости при параллельном (ортогональном) проектировании. Все теоремы, выражающие свойства параллельности (перпендикулярности) прямой и плоскости в пространстве, представлены рисунками и соответствующими заключениями. Важным является наличие в данном УМК доказательства теорем о трёх перпендикулярах и обратной ей. Изучение геометрического материала и решение тематических задач различного уровня сложности по данной главе осуществляется в течение 24 уроков.

В главе 4 «*Плоскости в пространстве*» приведена систематизация расположения плоскостей в пространстве; представлены основные понятия темы (параллельные, пересекающиеся, перпендикулярные плоскости, двугранный и линейный углы, общий перпендикуляр двух скрещивающихся прямых). Указаны основные теоремы: признаки перпендикулярности (параллельности) двух плоскостей, свойства перпендикулярных (параллельных) плоскостей, теорема о величине линейного утла и теорема о площади ортогональной проекции многоугольника. Свойства перпендикулярных плоскостей представлены соответствующими теоремами и рисунками. Предлагаются для выполнения графические работы №2 «Параллельность в пространстве», №3 «Перпендикулярность в пространстве». На изучение этого материала и решение соответствующих задач различного уровня сложности отводится 15 часов.

В главе 5 «*Расстояния в пространстве*» рассматривается материал о расстоянии: между двумя точками; от точки до фигуры; между фигурами, а также о геометрических местах точек, связанных с расстояниями в пространстве. Относительно этих понятий систематизирован весь теоретический материал темы. Например, при изучении вопроса о расстоянии от точки до фигуры (прямой, плоскости, сферы) рассмотрены два возможных варианта расположения точки относительно этой фигуры: точка принадлежит или не принадлежит данной фигуре. Изложение теоретических обоснований программных вопросов этого раздела стереометрии сопровождается соответствующими рисунками. Отражён один из способов нахождения расстояния от точки до плоскости без построения соответствующего перпендикуляра, в зависимости от того, пересекает ли данную плоскость прямая, проходящая через заданную точку, или она параллельна этой плоскости. Изучение данного геометрического материала и решение тематических задач различного уровня сложности осуществляется в течение 8 часов-уроков.

После изучения вышеперечисленных глав, отводится 2 часа на «уроки обобщения пройденного материала» о расстояниях в пространстве, параллельности, перпендикулярности прямых и плоскостей, об углах между ними.

Глава 6. «*Векторный метод в пространстве*» посвящена изучению таких тем как: определение вектора в пространстве; коллинеарность двух и компланарность трех векторов. Здесь же вводится определения угла между векторами и их скалярного произведения, изучаются его свойства. На изучение данного геометрического материала и решения задач отводиться 9 часов.

В главе 7 «*Координатный метод в пространстве*» излагается геометрический материал о координатном методе в пространстве. Доказывается признак коллинеарности двух векторов, заданных своими координатами. Аргументированно выведены формулы для нахождения: расстояния между двумя точками, заданными своими координатами; координат середины отрезка и точки, делящей отрезок в данном отношении. В этой главе выводятся общее уравнение плоскости и различные уравнения прямой, формулы для вычисления угла между двумя плоскостями (двумя прямыми, прямой и плоскостью), условие параллельности и перпендикулярности двух плоскостей (двух прямых, прямой и плоскости), заданных своими уравнениями. Здесь же выводится формула расстояния от точки до плоскости в координатах.

Изучение геометрического материала и решение тематических задач различного уровня сложности в данной главе реализуется в течение 9 часов.

Далее рассмотрим учебник [2] под авторством *Александрова А.Д.* и др. Пособие на базовом уровне ориентировано на обеспечение общеобразовательной и общекультурной подготовки. В учебнике содержатся теоретические тексты для базового и углубленного уровней. На углубленном уровне дополнительно ведется строгое изучение теоретического материала, решение разнообразных и сложных задач. После теоретической части предлагаются «Вопросы для самоконтроля». Авторы отмечают, что на уроки геометрии в классах с углубленным изучением отводится 2 часа в неделю.

Авторами разработаны программы и примерное поурочное планирование [1] для углубленного изучения геометрии по этому учебнику.

Обратимся к примерному планированию учебного материала.

Учащиеся *10 класса,* при изучении геометрии, в главе II «Перпендикулярность и параллельность прямых и плоскостей» рассматривают параграфы: §10 «Угол между плоскостями. Перпендикулярность плоскостей» (3 часа), §14 «Расстояния между фигурами и параллельность» (3 часа), §15 «Углы» (4 часа). Глава рассчитана на 26 часов изучения материала.

Учащимся *11 класса,* в главе IV «Многогранники», предлагаются для изучения параграфы: §21 «Призма» (4 часа), §14 «Правильные и полуправильные многогранники. Симметрия фигур» (4 часа). Глава рассчитана на 19 часов изучения материала.

Глава VI «Координаты и векторы» посвящена темам: §29 «Метод координат» (4 часа), §30 «Векторы» (7 часов), §.15 «Координаты и векторы» (4 часа). Глава рассчитана на 16 часов изучения материала.

Задачи разделены на два уровня сложности. В задачном материале выделены: рубрика «Дополняем теорию», позволяющая расширить теоретический текст; рубрика «Исследуем», предполагающая творческий поиск.

Теперь обратимся к учебнику [17] под авторством *Смирнова И.М., Смирнов В.А.* Предлагаемое пособие является двухуровневым. Весь материал в нем подразделен на основной (базовый) и дополнительный (профильный уровень). Это позволяет использовать учебное пособие как в общеобразовательных (2 часа в неделю), так и профильных классах.

Структура содержания учебника: учебный материал разделен на главы и параграфы.

Обратимся к примерному планированию учебного материала для углубленного изучения геометрии.

В учебнике [17] для учащихся 11 класса, в главе III «Перпендикулярность в пространстве» излагается материал: угол между прямыми в пространстве; угол между прямой и плоскостью; расстояние между точками, прямыми и плоскостями; двугранный угол. На данную тему отводиться 19 часов. Глава IV «Многогранники» посвящена изучению таких тем как: многогранные углы и их свойства; выпуклые и невыпуклые многогранники; правильные многогранники (тетраэдр, куб, октаэдр, икосаэдр, додекаэдр). На изучение геометрического материала данной главы отводится 7 часов.

Учащиеся *11 класса* в главе и векторы» изучают следующий материал: прямоугольная система координат в пространстве; координаты середины отрезка; формула расстояния между двумя точками; уравнение сферы; координаты вектора; длина вектора; скалярное произведение векторов; уравнение плоскости в пространстве. На данную тему отводиться 13 часов.

Учебник, помимо традиционного материала, содержит материал научно-популярного и прикладного характера, нестандартные и исследовательские задачи.

В настоящей бакалаврской работе предлагаются некоторые методические аспекты обучения учащихся 10 – 11 классов с углубленным изучением геометрии по УМК Е.В. Потоскуева, Л.И. Звавича. В частности, рассматриваются формы и методы изучения аффинных и метрических свойств правильной шестиугольной призмы синтетическим (геометрическим) и векторно-координатным методами.

Выводы по первой главе

Подводя итоги главы I можно сказать о том, что:

1. Определены различные подходы к решению метрических задач стереометрии. В данной главе представлен перечень тех *знаний и умений*, которые необходимы учащимся для успешного решения задач на нахождение различных расстояний и углов геометрическим и векторно-координатным методом.

2. Проведен анализ программ и школьных учебников по геометрии для учащихся 10 - 11 классов, рекомендованных к использованию Министерством образования и науки РФ № 253 от 31 марта 2014 г. [19].

ГЛАВА II. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ МЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ СТЕРЕОМЕТРИИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МОДЕЛИ ПРАВИЛЬНОЙ ШЕСТИУГОЛЬНОЙ ПРИЗМЫ В КЛАССАХ С УГЛУБЛЕННЫМ ИЗУЧЕНИЕМ МАТЕМАТИКИ

Определение 1. *Призмой называется многогранник, две грани которого, называемые основаниями призмы, – равные многоугольники с соответственно параллельными сторонами, а остальные грани – параллелограммы, у каждого из которых две стороны являются соответственными сторонами оснований* [9].

Эти остальные грани называются *боковыми гранями призмы*, а их объединение – *боковой поверхностью призмы*. Стороны боковых граней, не лежащие в плоскостях оснований, называются *боковыми ребрами призмы.*

Объединение боковой поверхности призмы и двух ее оснований называется *полной поверхностью призмы*.

Призма называется *n-угольной*, если ее основание – простой *n*-угольник. Призма, боковые ребра которой перпендикулярны плоскостям оснований, называется *прямой* призмой. В противном случае призма называется *наклонной. Правильной* призмой называется прямая призма, основание которой – правильный многоугольник.

Отрезок, соединяющий две вершины призмы, не лежащие в одной грани, называется *диагональю призмы*.

Перпендикуляр, проведенный из какой-либо точки одного основания призмы к плоскости другого основания, называется *высотой призмы*. Высотой призмы называют также и длину этого перпендикуляра.

Так как боковые ребра прямой призмы перпендикулярны ее основаниям, то высота прямой призмы равна ее боковому ребру. Плоскость, проходящая через два боковых ребра, не лежащих в одной грани, называется *диаго-*

нальной плоскостью, а сечение призмы этой плоскостью – её *диагональным сечением*.

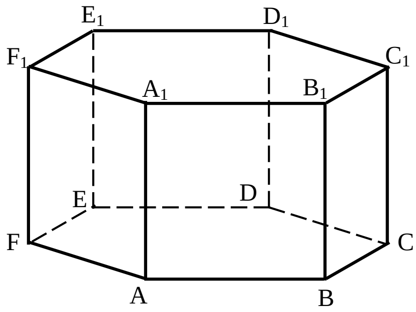

Рис. 1

Призма является выпуклым многогранником, если ее основание – выпуклый многоугольник, и невыпуклым, если основание этой призмы – невыпуклый многоугольник.

Мы будем изучать правильную 6-угольную призму (рис.1), то есть прямую призму, в основании которой лежит правильный шестиугольник.

В зарубежной литературе [24] и [25] представлен дополнительный материал, посвящённый теории многогранников и их свойствам, изучение которых выходит за рамки школьной программы.

§ 3. Методические особенности обучения решению задач на нахождение расстояний в пространстве геометрическим методом

В данном параграфе рассматриваются решения задач на нахождение расстояний от точки до прямой, от точки до плоскости, и расстояния между скрещивающимися прямыми. В качестве многогранников будем использовать куб и правильную шестиугольную призму.

3.1. Расстояние от точки до прямой

В работе Е.В. Потоскуева говорится о том, что «для нахождения расстояний $\rho(M; a)$ от точки M, не лежащей в плоскости α, до прямой a, лежащей в этой плоскости, достаточно провести из точки M перпендикуляр MP ($P \in \alpha$) на плоскость α, тогда длина отрезка MP (величина $|MP| = h$) равна расстоянию от точки M до плоскости α. При этом, если точка $P \in a$, то расстояние $\rho(M; a) = |MP| = h$. Если точка $P \notin a$, то из точки P проводим в плоскости α перпендикуляр *PK* к прямой *a, K*∈ *a.* Тогда ρ (M; *a*) = *M K*=$\sqrt{MP^2 + PK^2}$ »[8].

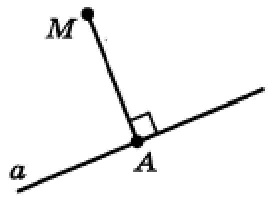

Рис. 2

Определение 2. «*Расстоянием от данной точки M до данной прямой a, не проходящей через точку M, является длина перпендикуляра, опущенного из точки M на прямую a* (рис. 2)*; основание этого перпендикуляра есть ближайшая к M точка прямой a »*[6, С. 87].

У многих учеников, приступающих к изучению геометрии, слабо развито пространственное воображение. Но данную проблему легко устранить при правильно поставленном преподавании геометрии. Поэтому одной из целей преподавания геометрии является развитие пространственного воображения учащихся [3].

Решая задачи стереометрии, учащиеся должны помнить о том, что изображение многогранников на плоскости не может быть точной копией оригинала [4].

В зарубежной литературе [21], [22] и [23] представлен ряд различных проблем развития пространственного мышления, его роль в различных видах учебной и трудовой деятельности человека.

Рассмотрим решения задач на нахождение расстояний от точки до прямой. В качестве многоугольника возьмём куб.

Задача 1. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите расстояние от точки B до прямой AD. Ребро куба равно 10.

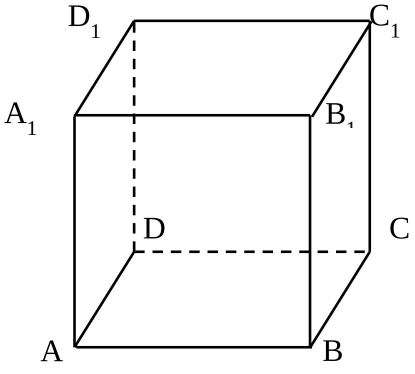

Рис. 3

Решение. Так как данный многогранник $ABCDA_1B_1C_1D_1$ - куб (рис. 3), то грань ABCD – квадрат. Следовательно, $AB \perp AD \Rightarrow$ $|AB| = 10 = \rho(B;AD)$ - искомое расстояние.

Многие учащиеся не сразу видят изображенную пространственную ситуацию (геометрическую картинку), поэтому затрудняются дать правильный ответ. В данном случае трудность заключается в том, что видимый на рисунке угол ABC изображен не прямым (на этом изображении AB не перпендикулярна BC).

Задача 2. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите расстояние от точки B до прямой DC_1. Ребро куба равно 6.

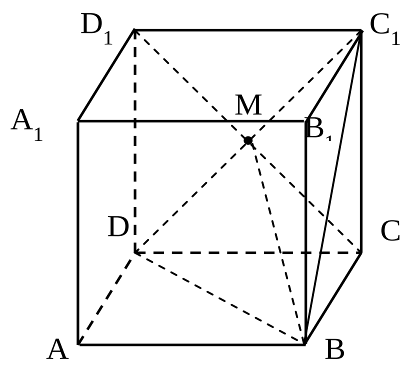

Рис. 4

Решение: В этой задаче требуется построить искомый перпендикуляр (рис. 4). Заметим, что ΔDBC_1 - равносторонний, следовательно, медиана BM этого треугольника является его высотой. Тогда, для построения искомого перпендикуляра достаточно отметить середину M отрезка DC_1 и соединить ее с точкой B.

Так как ΔDBC_1 - равносторонний, а BM - медиана этого треугольника, то искомое расстояние $\rho(B; DC_1) = BM = \frac{BC_1\sqrt{3}}{2} = \frac{BC\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{2} = \frac{6\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{6}$.

Ответ: $3\sqrt{6}$.

Задача 3. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите расстояние от вершины C до прямой C_1A. Ребро куба равно 8.

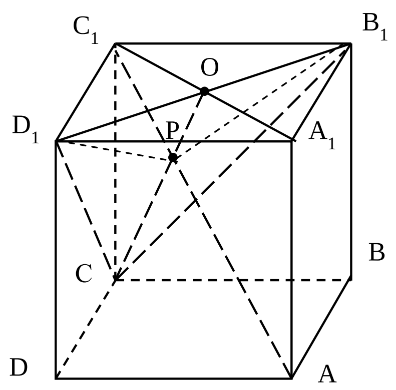

Рис. 5

Решение. Построим точку $P = C_1A \cap (D_1CB_1) = C_1A \cap OC$, где $OC = (BC_1D) \cap (D_1CB_1)$, $O = D_1B_1 \cap C_1A$. (рис. 5).

Докажем, что $C_1A \perp (D_1CB_1)$. Имеем: $C_1C \perp (A_1B_1C_1) \Rightarrow C_1A_1$ - ортогональная проекция диагонали C_1A данного куба на плоскость грани $A_1B_1C_1D_1$. Так как $C_1A_1 \perp B_1D_1$ (как диагонали квадрата $A_1B_1C_1D_1$),то $C_1A \perp B_1D_1$ (по теореме о трех перпендикулярах).

Аналогично, используя теорему о трех перпендикулярах, доказывается, что $C_1A \perp D_1C$.

Таким образом, получаем:

$$\begin{cases} C_1A \perp B_1D_1, \\ C_1A \perp D_1C \end{cases} \Rightarrow C_1A \perp (D_1CB_1)$$

$AC_1 \perp (D_1CB_1)$ (по признаку перпендикулярности прямой и плоскости), при этом $AC_1 \cap (D_1CB_1) = P$.

А так как $OC \subset (B_1CD_1)$ и $AC_1 \perp (B_1CD_1)$, то $OC \perp AC_1$ (по определению прямой, перпендикулярной плоскости).

Так как $C_1P \perp (B_1CD_1)$, $CC_1 = C_1B_1 = C_1D_1$, то $CP = PB_1 = PD_1$, значит точка P - центроид ΔB_1CD_1.

$AC_1 \perp (B_1CD_1)$, $CP \subset (B_1CD_1) \Rightarrow AC_1 \perp CP$, $\Rightarrow CP = \rho(C_1; AC_1)$.

Найдем это расстояние. $CB_1 = 8\sqrt{2}$ - как диагональ квадрата B_1C_1CB со стороной 8. В равностороннем ΔB_1CD_1 имеем: $OC = \frac{CB_1 \cdot 8\sqrt{2}}{2} = \frac{8\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{6}$.

Тогда $CP = \frac{2}{3} \cdot OC = \frac{24 \cdot \sqrt{6}}{3} = \frac{8\sqrt{6}}{3}$.

Ответ: $\frac{8\sqrt{6}}{3}$.

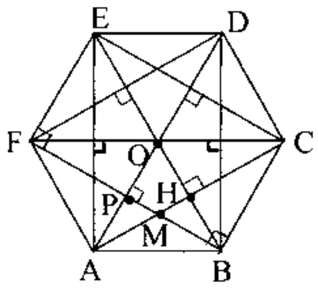

Рис. 6

«Для решения метрических задач применительно к правильной шестиугольной призме полезно на отдельном (выносном) рисунке изобразить ее нижнее (или верхнее) основание - правильный шестиугольник ABCDEF (рис. 6).

Взаимное расположение диагоналей и сторон этого шестиугольника, их длины и величины углов между ними известны из планиметрии.

Данный рисунок позволяет увидеть свойства правильного шестиугольника такие как: взаимное расположение диагоналей и сторон, их длины и величины углов между ними» [13].

Приведем примеры решения более сложных задач на примере модели правильной шестиугольной призмы.

Задача 4. В правильной шестиугольной призме - $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E1F1$, каждое ребро которой равно 1, найдите расстояние от вершины B до прямой E_1F.

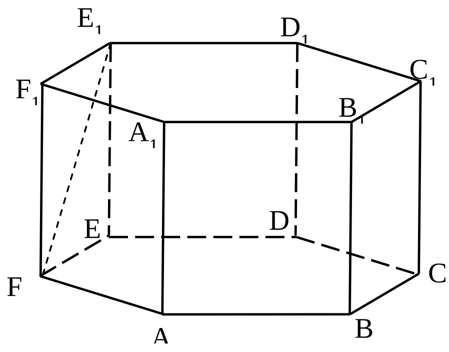

Рис. 7

Решение. Имеем: $F_1F \perp (ABC)$, $BF \subset (ABC) \Rightarrow F_1F \Rightarrow BF$ (рис. 7) (по определению прямой, перпендикулярной плоскости); $BF \perp EF$ (шестиугольник ABCDEF). Поэтому $BF \perp (F_1FE)$ (по признаку перпендикулярности прямой и плоскости), откуда $BF \perp FE_1$ (по определению прямой, перпендикулярной плоскости). Это означает, что $\rho(B;FE_1) = BF = \sqrt{3}$ (как сторона правильного треугольника, вписанного в единичную окружность).

Задача 5. [11] В правильной шестиугольной призме - $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, каждое ребро которой равно 2, найдите расстояние от вершины B до прямой D_1C.

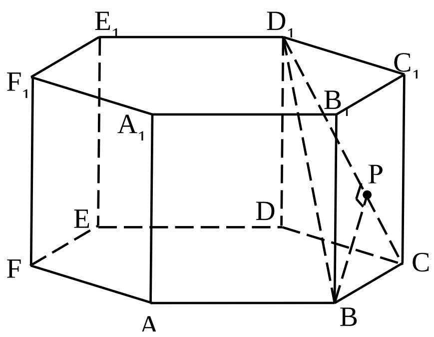

Рис. 8

Решение. Из (рис. 8) видно, что ни DB ни CD не перпендикулярны BC, поэтому ΔBCD_1 прямоугольный.

Пусть BP - высота ΔBCD_1, тогда $BP \perp CD_1$, значит $BP = \rho(B;\ CD_1)$. Найдем BP. В ΔBCD_1: $BC = 2$, $CD_1 = 2\sqrt{2}$. В прямоугольном треугольнике ΔBDD_1 находим:

$$BD_1 = \sqrt{BD^2 + DD_1{}^2} = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 2^2} = \sqrt{4 \cdot 3 + 4} = 4.$$

Обозначим: $D_1P = x$, тогда $CP = 2\sqrt{3} - x$. Получаем: $D_1B^2 - D_1P^2 = BC^2 - CP^2$; или $16 - x^2 = 4 - (2\sqrt{3} - x)^2$; $16 = -4 + 4\sqrt{2}x$; $x = \frac{5\sqrt{2}}{2}$.

Теперь найдем ВР = $\sqrt{D_1B^2 - D_1P^2} = \sqrt{16 - \left(\frac{11\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{14}}{2}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{14}}{2}$.

3.2. Расстояние от точки до плоскости

«Для нахождения расстояния от точки М, не лежащей в плоскости α, до этой плоскости, проводят перпендикуляр МР из точки М на плоскость α($P \in \alpha$), тогда |МР| = h = ρ(М;α)» [13].

Следуя принципу «от простого к сложному» рассмотрим несколько подготовительных задач на нахождение расстояний от точки до плоскости. В качестве многогранника возьмем куб.

Задача 6. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведено сечение через вершины A_1, C_1, и В. Расстояние от вершины B_1 до плоскости сечения равно 18. Найдите расстояния до плоскости сечения от вершин а) А; б) С; в) D_1.

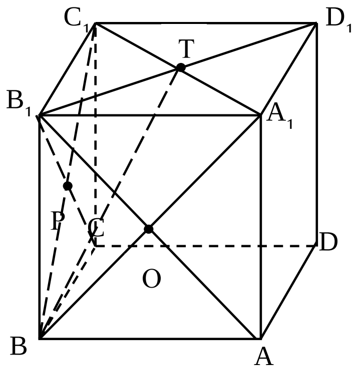

Рис. 9

Решение. Обозначим $\alpha = (A_1C_1B)$ (рис. 9).

а) Если $O = AB_1 \cap \alpha = AB_1 \cap A_1B$, то $AO = B_1O$, значит, $\rho(A;\alpha) = \rho(B_1;\alpha) = 18$.

б) Если $P = CB_1 \cap \alpha = CB_1 \cap BC_1$, то $CP = B_1P$, значит, $\rho(C;\alpha) = \rho(B_1;\alpha) = 18$.

в) $B_1D_1 \cap \alpha = T = B_1D_1 \cap A_1C_1$, где Т середина отрезка B_1D_1, значит, $\rho(D_1;\alpha) = \rho(B_1;\alpha) = 18$.

Задача 7. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите расстояние от точки B_1 до плоскости A_1BC_1. Ребро куба равно 9 [10, С. 94].

Решение. Рассмотрим (рис. 10). Указание: воспользовавшись **задачей 3** можем утверждать, что $B_1D \perp (A_1BC_1)$. Тогда: $\rho(B_1; (A_1BC_1)) = B_1K$.

В правильном ΔA_1BC_1 (его стороны равны $9\sqrt{2}$) находим ВО = $\frac{A_1B\cdot\sqrt{3}}{2} = \frac{9\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{2} = \frac{9\sqrt{6}}{2}$. Так как $B_1K \perp (A_1BC_1)$, $B_1B = C_1B_1 = A_1B_1$, то $KB = KC_1 = KA_1$

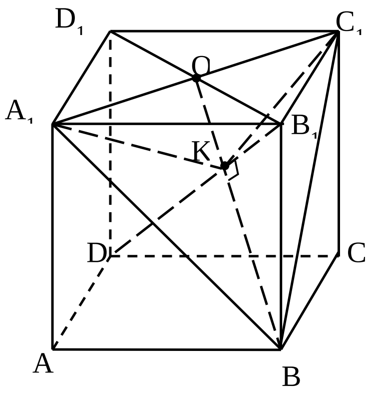

Рис. 10

(как проекции равных наклонных), то точка K - центроид. Откуда $BK = \frac{2}{3}BO = \frac{2\cdot 9\sqrt{6}}{3\cdot 2} = 3\sqrt{6}$.

Тогда $B_1K = \sqrt{B_1B^2 - KB^2}$,

$B_1K = \sqrt{9^2 + (3\sqrt{6})^2} = \sqrt{81 - 54} = 3\sqrt{3}$.

Ответ: $3\sqrt{3}$.

Приведем пример нахождения расстояний от точки до плоскости (в качестве многогранника возьмем модель правильной шестиугольной призмы)

Задача 8. В правильной шестиугольной призме - $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E1F1$, каждое ребро которой равно 1, найдите расстояние а) от вершины A_1 до плоскости BCC_1; б) от вершины B_1 до F_1D_1B.

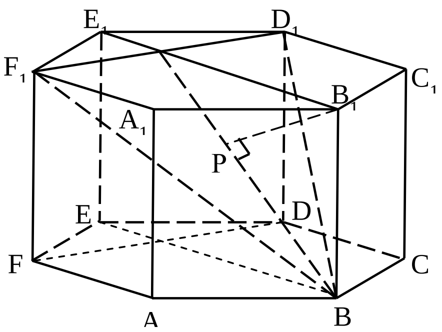

Рис. 11

Решение. а) Так как $A_1D_1 \| B_1C_1$, то $A_1D_1 \parallel (BB_1C_1)$, поэтому расстояние от точки A_1 до (BB_1C_1) (рис. 11) равно расстоянию от (BB_1C_1) от любой точки прямой A_1D_1. «Удобной» для решения задачи является точка $P_1 = A_1D_1 \cap B_1F_1$. Действительно, $B_1F_1 \|$ BF, при этом $BF \perp BC$, $BF \perp BB_1$, откуда $BF \perp (BB_1C_1)$ (по признаку перпендикулярности прямой и плоскости). Это означает, что $B_1F_1 \perp (BB_1C_1)$, поэтому $\rho(P_1; (BB_1C_1)) = P_1B_1 = \frac{1}{2}$ $F_1B_1 = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Тогда $\rho(A_1; (BCC_1)) = \rho(P_1; (BCC_1)) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

б) По (рис. 11) видим, что $FD \perp BE$, $DD_1 \perp FD$, $DD_1 \| BB_1$ следовательно $FD \perp (BB_1E_1)$ (по признаку перпендикулярности прямой и плоскости). Так как $FD \| F_1D_1$ и $FD \perp (BB_1E_1)$, то $F_1D_1 \perp (BB_1E_1)$, откуда $(BF_1D_1) \perp (BB_1E_1)$ (по признаку перпендикулярности двух плоскостей).

Обозначим: $M = B_1E_1 \cap F_1D_1$. Тогда $(BF_1D_1) \cap (BB_1E_1) = BM$ и вследствие $(BF_1D_1) \perp (BB_1E_1)$ приходим к выводу: перпендикуляр из точки B_1 на (BF_1D_1) расположен в (BB_1E_1), поэтому $\rho(B_1; (BF_1D_1)) = \rho(B_1; M) = B_1P$, где B_1P - высота прямоугольного треугольника ΔBB_1M.

Найдем длину B_1P. В прямоугольном треугольнике BB_1M находим: $B_1P = \frac{BB1 \cdot B1M}{\sqrt{BB_1{}^2 + B_1M^2}} = \frac{1 \cdot 1{,}5}{\sqrt{1^2 + 1{,}5^2}} = \frac{1{,}5}{\sqrt{1 + 2{,}25}} = \frac{30\sqrt{13}}{13}$.

Ответ: $\frac{30\sqrt{13}}{13}$.

3.3. Расстояние между двумя скрещивающимися прямыми

Определение 3. « *Расстояния между двумя скрещивающимися прямыми равно длине их общего перпендикуляра*» [13].

А.А. Прокофьев в статье [15] говорит о том, что для решения задач на нахождение расстояний между скрещивающимися прямыми можно выделить несколько подходов: метод построения общего перпендикуляра, метод параллельных прямой и плоскости, метод параллельных плоскостей, метод ортогонального проектирования.

Приведем примеры решения задач на нахождения различных расстояний методом параллельных плоскостей.

Для того, чтобы найти расстояния между двумя скрещивающимися прямыми, воспользуемся утверждением: «*расстояние между двумя скрещивающимися прямыми равно расстоянию между параллельными плоскостями, проходящими через эти прямые*» [13].

Рассмотрим решение такой задачи, в качестве многогранника возьмем куб.

Задача 9. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ требуется найти расстояние между прямыми B_1A и A_1D. Ребро куба равно 18 [10, С. 88, 3 вар.].

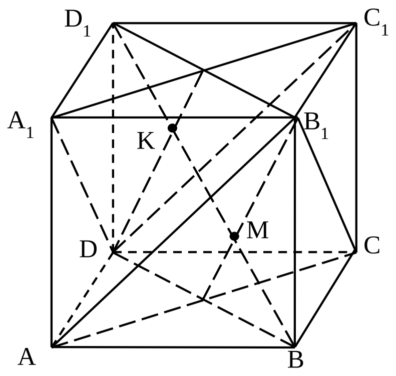

Рис. 12

Решение. Прямые A_1D и B_1A лежат в плоскостях A_1DC_1 и B_1AC соответственно (рис. 12), эти плоскости параллельны (по признаку параллельности двух плоскостей).

Используя рассуждения **задачи 3** говорим о том, что $BD_1 \perp (AB_1C)$. Причем $BD_1 \cap (A_1DC_1)$ = K, $BD_1 \cap (AB_1C)$ = M. $KM = \frac{1}{3} BD_1 = \frac{1}{3} 18\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$.

Это означает, что $\rho(A_1D;B_1A) = \rho((A_1DC_1);(AB_1C)) = KM = 6\sqrt{3}\rho(A_1D;B_1A) = \rho\big((A_1DC_1);(B_1AC)\big) = KM = 6\sqrt{3}$.

Ответ: $6\sqrt{3}$.

Применяя «метод параллельных плоскостей», для решения этой задачи в каждом из случаев достаточно построить параллельные плоскости, проходящие через данные прямые [13].

Используя модель правильной шестиугольной призмы, решим аналогичные задачи на нахождение расстояний между скрещивающимися прямыми.

Задача 10. В правильной шестиугольной призме - $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E1F1$, каждое ребро которой равно 1, найдите расстояние между прямыми а) B_1F и $C E_1$; б) между прямыми F_1A и A_1B.

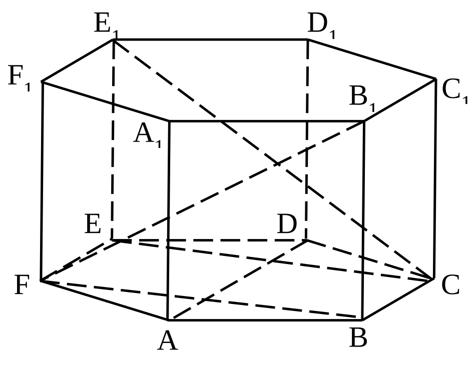

Рис. 13

Решение. Задача а) относится к базовому уровню сложности. Рассмотрим ее решение.

Обратимся к рисунку 13. Имеем $B_1B \parallel E_1E$ и $BF \parallel EC$, тогда $(EE_1\ C) \parallel (BB_1F)$ (по признаку параллельности двух плоскостей). Далее имеем $DA \perp FB$, $DA \perp B_1B$, следовательно $DA \perp (BB_1F)$. Но и $DA \perp (EE_1C)$.

Тогда, по методу параллельных плоскостей $\rho(B_1F;\ C\ E_1) = \rho((BB_1F);(\ EE_1C))$ $= DA = 1$.

Ответ: 1.

Теперь рассмотрим решение задачи повышенного уровня сложности.

б) *Решение*. Пусть $O = FC \cap AD$, $O_1 = F_1C_1 \cap A_1D_1$, $P = AD \cap FB$, $P_1 = A_1D_1 \cap F_1B_1$. (рис. 14) .

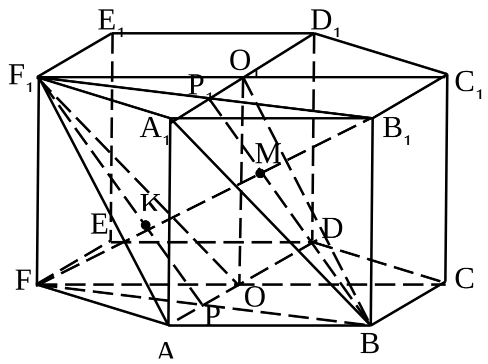

Рис. 14

Из прямого параллелепипеда $ABOFA_1B_1O_1F_1$, все стороны которого равны 1, а в основании лежит ромб $ABOF$, имеем $O_1B \parallel F_1A$, $A_1B \parallel F_1O$. Откуда $(AF_1O) \parallel (A_1O_1B)$. Тогда из $A_1B \subset (AF_1O)$ и $F_1A \subset (A_1O_1B)$ следует $\rho(F_1A;\ A_1B) = \rho((AF_1O);\ (A_1O_1B))$. Так как боковые грани этого параллелепипеда равные квадраты, то ΔAF_1O и ΔA_1O_1B равны и являются равнобедренными (боковые стороны равны, как диагонали равных квадратов). Поэтому $F_1P \perp AO$, $BP_1 \perp A_1O_1$.

Учитывая перпендикулярность $AO \perp BF$ приходим к выводу $AO \perp (BB_1F_1)$ (по признаку перпендикулярности прямой и плоскости). Откуда $(BB_1F_1) \perp (AF_1O)$ (по признаку перпендикулярности прямой и плоскости). А так как $(AF_1O) \perp (A_1O_1B)$, то $(BB_1F_1) \perp (A_1O_1B)$. Это значит, что прямая, проведенная через точку F перпендикулярна плоскостям (AF_1O) и $A_1O_1B)$ расположенной в (BB_1F_1) и пересекающей (AF_1O) и (A_1O_1B) в точках принадлежащих прямым F_1P соответственно BP_1.

Обозначим эти точки соответственно K и M. Тогда $\rho(F_1A;\ A_1B) = \rho((AF_1O);\ (A_1O_1B)) = KM$.

Так как $F_1P \parallel BB_1$ и $FP = PB$, то $FK = KM$ (по теореме Фалеса).

Таким образом $\rho(F_1A;\ A_1B) = FP$. Найдем FP. В прямоугольном треугольнике ΔFF_1P с катетами $FF_1=1$ и $FP=0{,}5\sqrt{3}$, находим высоту FK. $FK = \frac{FF_1 \cdot FP}{\sqrt{FF_1{}^2+FP^2}} = \frac{1 \cdot 0{,}5\sqrt{3}}{\sqrt{1^2+(0{,}75)^2}} = \frac{\sqrt{21}}{7}$. Таким образом, $\rho(F_1A;\ A_1B) = \frac{\sqrt{21}}{7}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{21}}{7}$.

§ 4. Методические особенности обучения решению задач на нахождение расстояний в пространстве векторно-координатным методом

Для того чтобы учащиеся могли успешно решать задачи на нахождения расстояний в пространстве векторно-координатным методом, нужно рассмотреть ряд подготовительных задач.

Сначала учащиеся должны научиться решать задачи на построение точек в прямоугольной системе координат (7.028, 7.046-7.048), нахождение координат вектора (7.031-7.033) и на изображение многогранников в прямоугольной системе координат (7.035, 7.056, 7.057, 7.035, 7.065). Также, необходимо научиться решать задачи на составление уравнения плоскости (7.081-7.085, 7.089-7.090) и на составление уравнения прямой (7.141, 7.149-7.152) [7].

В данном параграфе представлены методические особенности решения задач на нахождение расстояний: от точки до прямой, от точки до плоскости, между двумя плоскостями векторно-координатным методом. В качестве многогранников выберем куб и модель правильной шестиугольной призмы. Приведем примеры и решения каждого вида задач на нахождения расстояний [12, С. 128].

4.1. Расстояния от точки до прямой

Определение 4. «*Расстояние от точки М до прямой а, расположенных в пространстве, равно расстоянию между данной точкой М и точкой*

K= β⋂ a, где β - плоскость, проходящая через точку M перпендикулярно прямой a.

Координатным методом эту задачу можно решать таким образом. Составить уравнение плоскости α, проходящей через точку А перпендикулярно данной прямой *m*. Затем решить систему, состоящую из этого уравнения и уравнений прямой *m*. Решением этой системы являются координаты точки К = α ⋂ *m*. Тогда расстояние между точками А и К равно искомому расстоянию от точки А до прямой *m»* [12].

Рассмотрим решение задачи на нахождение расстояний от точки до прямой. В качестве многогранника возьмем куб.

Задача 15. Куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ расположен в системе координат *Oxyz* так, что A(1;0;0), $D_1(1;1;1)$, $B_1(0;1;0)$, B(0;0;0). Постройте этот куб и векторно-координатным методом найдите расстояние: от точки A_1 до прямой AC_1.

Указание: воспользовавшись **задачей 3** можем утверждать, что $AC_1 \perp (A_1DB)$. Тогда: $\rho(A_1; (A_1DB)) = \rho(A_1; (AC_1)) = A_1K$.

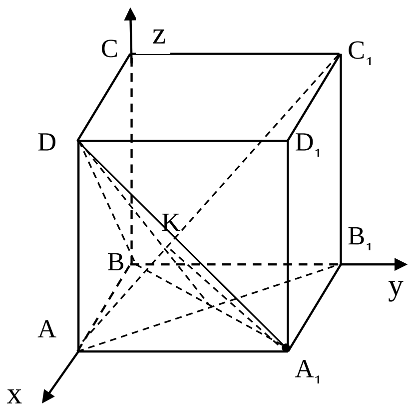

Рис. 13

Решение. На (рис.13) изображено расположение данного куба относительно системы координат *Oxyz*. Точка B(0;0;0) - начало координат. Тогда точки A_1, C, C_1, D имеют следующие координаты: $A_1(1;1;0)$, C(0;0;1), $C_1(0;1;1)$, D(1;0;1).

Найдем расстояние $\rho(A_1;AC_1)$.

Составим уравнение плоскости α, проходящей через точку A_1 перпендикулярно прямой AC_1. Так как $A_1 \in \alpha$ и $\alpha \perp AC_1$, то в качестве вектора нормали плоскости α примем вектор $\overrightarrow{AC_1}(-1;1;1)$.

$$\alpha\text{: } -1(x - 1)+(y - 1)+(z - 0) = 0 \Rightarrow \alpha\text{: } -x + y + z = 0 \Rightarrow \alpha\text{: } x - y - z = 0.$$

Составим параметрическое уравнение прямой AC_1. В качестве ее направляющего вектора примем вектор $\overrightarrow{AC_1}(-1;1;1)$. Параметрические уравнения прямой AC_1 имеют вид:

$$AC_1: \begin{cases} x = 1 - 1 \cdot t, \\ y = 0 + 1 \cdot t, \\ z = 0 + 1 \cdot t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - t, \\ y = t, \\ z = t \end{cases} t \in \mathbf{R}.$$

Обозначим: $K = \alpha \cap AC_1$. Получаем следующую систему уравнений, из которой находим координаты точки К.

$$\begin{cases} x - y - z = 0, \\ x = 1 - t, \\ y = t, \\ z = t \end{cases} \Rightarrow 1 - t - t - t = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{3}.$$

Следовательно, точка К имеет координаты: $x = 1 - t = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$; $y = \frac{1}{3}$; $z = \frac{1}{3}$, то есть: $K\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$.

Тогда находим: $A_1K = \sqrt{(\frac{2}{3} - 1)^2 + (\frac{1}{3} - 1)^2 + (\frac{1}{3} - 1)^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

Таким образом, $\rho(A_1;AC_1) = A_1K = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Таким образом, для того чтобы найти расстояние от точки до прямой векторно-координатным методом, следует составить уравнение плоскости, проходящей через заданную точку перпендикулярно заданной прямой и составить параметрическое уравнение прямой. Затем вычислить координаты точки пересечения найденных прямой и плоскости. После чего, задача сводится к задаче о нахождении расстояния между двумя точками.

Далее рассмотрим решение подобной задачи по приведенному выше алгоритму на примере правильной шестиугольной призмы.

Задача 16. В системе координат *Oxyz* расположена правильная шестиугольная призма $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, каждое ребро которой равно 1. Центр основания призмы совпадает с началом координат, а вершины B, C, D, C_1 имеют координаты: $B(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2};0)$, $C(0;1;0)$, $D(-\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2};0)$, $C_1(0;1;1)$. Постройте эту призму. Векторно-координатным методом найдите расстояние: а) от вершины B до прямой A_1C; б) от вершины A до прямой BC_1; в) от вершины F до прямой A D_1.

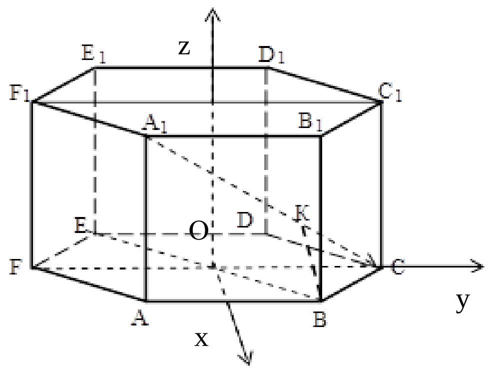

Рис. 14

Решение. а) На (Рис. 14) изображено расположение данной призмы относительно системы координат *Oxyz*. В ней $A_1(\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2};1)$, $B_1(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2};1)$.

Необходимо составить уравнение плоскости α, проходящей через точку B перпендикулярно прямой A_1C. Так как $B \in \alpha$ и $\alpha \perp A_1C$, то в виде вектора нормали плоскости α примем вектор $\overrightarrow{AC_1}(\sqrt{3};-3;2)$. Составим уравнение плоскости α: $\sqrt{3}\,x - \frac{3}{2} - 3y + \frac{3}{2} + 2z = 0 \Rightarrow \alpha$: $\sqrt{3}x - 3y + 2z = 0$.

Далее необходимо составить уравнение прямой A_1C. В качестве ее направляющего вектора примем вектор $\overrightarrow{CA_1}(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{-3}{2};1)$. Для удобства вычислений, вместо вектора $\overrightarrow{CA_1}$ $(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{-3}{2};1)$, возьмем вектор $\vec{p}(\sqrt{3};-3;2)$, такой что $\vec{p} \parallel \overrightarrow{CA_1}$. Тогда параметрические уравнения прямой A_1C имеют вид:

$$\begin{cases} x = 0 + \sqrt{3}t, \\ y = 1 - 3t, \\ z = 0 + 2t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{3}t, \\ y = 1 - 3t, \\ z = 2t \end{cases} t \in \mathbf{R}.$$

Обозначим: $K = A_1C \cap \alpha$, тогда $BK = \rho(B;\, A_1C)$.

Имеем следующую систему уравнений, из которой найдем координаты точки К:

$$\begin{cases} \sqrt{3}x - 3y + 2z = 0, \\ x = \sqrt{3}t, \\ y = 1 - 3t, \\ z = 2t \end{cases} \Rightarrow \sqrt{3}\cdot\sqrt{3}\,t - 3(1-3t) + 2\cdot 2\,t = 0 \Rightarrow t = \frac{3}{16}.$$

Следовательно, точка К имеет координаты: $x = \frac{3\sqrt{3}}{16}$; $y = 1\text{-}3t = \frac{7}{16}$; $z = 2t = \frac{6}{16}$, то есть: $К\left(\frac{3\sqrt{3}}{16}; \frac{7}{16}; \frac{6}{16}\right)$.

Тогда $\rho(B;\ A_1C) = BK = \sqrt{\left(\frac{3\sqrt{3}}{16} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{7}{16} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{6}{16}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{3\sqrt{3}-8\sqrt{3}}{16}\right)^2 + \left(\frac{7-8}{16}\right)^2 + \frac{36}{256}} = \sqrt{\frac{(-\sqrt{3})^2+1+36}{256}} = \frac{\sqrt{37+25\cdot 3}}{16} = \frac{\sqrt{112}}{16} = \frac{4\sqrt{7}}{16} = \frac{\sqrt{7}}{4}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{7}}{4}$.

Задачи под буквами б) и в) решаются аналогично. *Ответ:* б) $\frac{\sqrt{14}}{4}$; в) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

4.2. Расстояния от точки до плоскости

Определение 5. « *Расстояние от точки М до плоскости α равно длине перпендикуляра МК (К ∈ α), проведенного из точки М на плоскость α*»([14]).

«Расстояние от точки $M(x_0;y_0;z_0)$ до плоскости β: Ax + By + Cz + D= 0 находится по формуле: $\rho(M;\beta) = \frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ (1) ».

Рассмотрим решение задачи на нахождения расстояний от точки до плоскости. В качестве многогранника возьмем куб.

Задача 17. Куб $ABCDA_1B_1C_1D_1B$ расположен в системе координат *Oxyz* так, что A(1;0;0), $D_1(1;1;1)$, $B_1(0;1;0)$, B(0;0;0). Постройте этот куб и векторно-координатным методом найдите расстояние: от точки С до плоскости A_1BC_1.

Решение. Указание: пусть $\alpha = (A_1BC_1)$. $CD_1 \parallel A_1B \subset \alpha \Rightarrow CD_1 \parallel \alpha$. $K = CD_1 \cap DC_1$, тогда $\rho(C; \alpha) = \rho(K; \alpha)$.

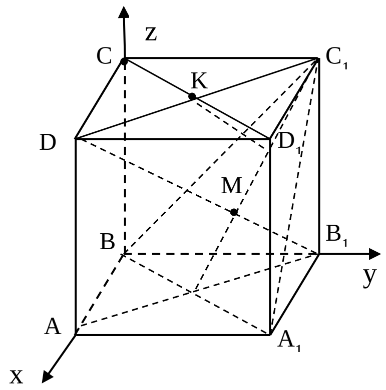

Рис. 15

Так как KM ∥ DB_1 и $DB_1 \perp \alpha$, то KM ∥ $DB_1 \Rightarrow KM \perp \alpha$.

На (рис. 15) изображено расположение данного куба относительно системы координат *Oxyz*. Точка B(0;0;0) - начало координат. Тогда точки A_1, C, C_1, D имеют следующие координаты: $A_1(1;1;0)$, C(0;0;1), $C_1(0;1;1)$, D(1;0;1).

Найдем расстояние от точки C до плоскости $(A_1BC_1) = \alpha$, то есть $\rho(C; \alpha)$.

Пусть уравнение плоскости α имеет вид: ax+by+cz+d=0. Точки $A_1(1;1;0)$, B(0;0;0) и $C_1(0;1;1)$ принадлежат данной плоскости. Тогда

$$\begin{cases} 1\cdot a+1\cdot b+0\cdot c+d=0, \\ 0\cdot a+0\cdot b+0\cdot c+d=0, \\ 0\cdot a+1\cdot b+1\cdot c+d=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b+d=0, \\ d=0, \\ b+c+d=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b=0, \\ d=0, \\ b+c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-b, \\ d=0, \\ c=-b. \end{cases}$$

Пологая b = -1, получаем a = 1, c = 1, d = 0. Следовательно, уравнение плоскости имеет вид α: x - y + z = 0.

Используя формулу (1), находим: $\rho(C; \alpha) = \frac{|0\cdot1-1\cdot1+1\cdot0|}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Таким образом, для того чтобы найти расстояние от точки до плоскости векторно-координатным методом, следует составить уравнение плоскости, после чего, используя формулу (1), определить искомое расстояние.

Далее рассмотрим решение подобной задачи на примере модели правильной шестиугольной призмы.

Задача 19. В системе координат *Oxyz* расположена правильная шестиугольная призма $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, каждое ребро которой равно 1. Центр основания призмы совпадает с началом координат, а вершины B, C, D, C_1 имеют координаты: B($\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\frac{1}{2}$;0), C(0;1;0), D(- $\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\frac{1}{2}$;0), C_1(0;1;1). Постройте эту призму и векторно-координатным методом найдите расстояние: а) от вершины B до плоскости D_1AC; б) от вершины B до плоскости AB_1C; в) от вершины E до плоскости B_1FD.

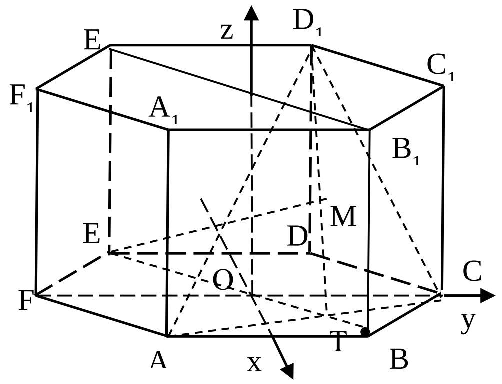

Рис. 16

Решение. а) Указание: пусть α = (D_1AC). T = BE ⋂ AC. BT : TE = 1:3 ⇒ ρ(B; α) = (1/3)ρ(E; α).

На (Рис. 16) изображено расположение данной призмы относительно системы координат *Oxyz*. В ней A $(\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2};0)$, $D_1(-\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2};1)$.

Требуется найти расстояние от точки B до плоскости (D_1AC) = α, то есть ρ(B; α).

Пусть уравнение плоскости α имеет вид: ax+by+cz+d=0. Точки $D_1(-\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2};1)$, A $(\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2};0)$ и C (0;1;0) принадлежат данной плоскости. Тогда

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2}a+\frac{1}{2}b+c+d=0, \\ \frac{\sqrt{3}}{2}a-\frac{1}{2}b+0\cdot c+d=0, \\ 0\cdot a+1\cdot b+0\cdot c+d=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2}a+\frac{1}{2}b+c+d=0, \\ \frac{\sqrt{3}}{2}a-\frac{1}{2}b+d=0, \\ b+d=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c+2d=0, \\ \frac{\sqrt{3}}{2}a-\frac{1}{2}b+d=0, \\ b=-d \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c=-2d, \\ \frac{\sqrt{3}}{2}a+\frac{3}{2}d=0, \\ b=-d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=-2d, \\ a=-\sqrt{3}d, \\ b=-d \end{cases}$$

Пологая d = -1, получаем a = $\sqrt{3}$, b = 1, c = 2. Следовательно, получаем уравнение плоскости α: $\sqrt{3}$x+y+2z-1=0.

Теперь находим искомое расстояние по формуле (1): ρ(B; α) = $\frac{\left|\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+1\cdot\frac{1}{2}+2\cdot 0-1\right|}{\sqrt{\sqrt{3}^2+1^2+2^2}} = \frac{\left|\frac{3}{2}+\frac{1}{2}-\frac{2}{2}\right|}{\sqrt{8}} = \frac{1}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{8}}{8} = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

Задачи под буквами б) и в) решаются аналогично. *Ответ:* б) $\frac{\sqrt{5}}{5}$; в) $\frac{2\sqrt{13}}{13}$.

4.3. Расстояние между скрещивающимися прямыми

Используем следующий факт: «*расстояние между двумя скрещивающимися прямыми равно расстоянию от любой точкой одной прямой до плоскости, проходящей через вторую прямую параллельно первой прямой.*

Задачи данного вида можно свести к задаче о вычислении расстояния от точки до плоскости, поэтому можно применить формулу расстояния от точки до плоскости, применяя координатный метод» [12].

Рассмотрим решение задачи на нахождения расстояний между скрещивающимися прямыми. В качестве многогранника возьмем куб.

Задача 20. Куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ расположен в системе координат *Oxyz* так, что $A(1;0;0)$, $D_1(1;1;1)$, $B_1(0;1;0)$, $B(0;0;0)$. Постройте этот куб и вектор-но-координатным методом найдите расстояние: между прямыми: BD_1 и B_1C.

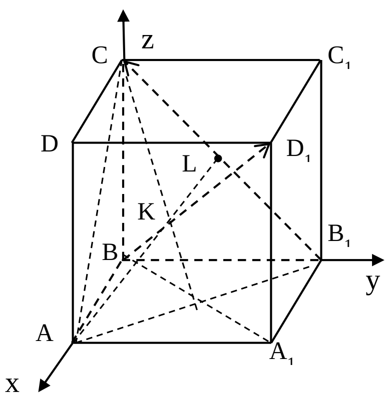

Рис. 17

Решение. Указание: Пусть $\alpha = (ACB_1)$.

$B_1C \subset \alpha$; $BD_1 \perp \alpha$ и $BD_1 \cap \alpha = K \Rightarrow \rho(BD_1; B_1C) = KL$.

На (рис. 17) изображено расположение данного куба относительно системы координат *Oxyz*. Точка $B(0;0;0)$ - начало координат. Тогда точки A_1, C, C_1, D имеют следующие координаты: $A_1(1;1;0)$, $C(0;0;1)$, $C_1(0;1;1)$, $D(1;0;1)$.

Требуется найти расстояние от прямой BD_1 до прямой B_1C, то есть $\rho(BD_1; B_1C)$.

Направляющими векторами прямых BD_1 и B_1C являются вектора $\overrightarrow{BD_1}$ $(1;1;1)$ и $\overrightarrow{B_1C}$ $(0;-1;1)$ соответственно.

Составим уравнение плоскости (обозначим ее α), проходящую через прямую BD_1 параллельно прямой B_1C. В качестве вектора нормали плоскости α примем вектор $\vec{n}(a;b;c)$, такой что $\vec{n} \perp \overrightarrow{BD_1}$, $\vec{n} \perp \overrightarrow{B_1C}$. Найдем координаты этого вектора.

$$\begin{cases} \vec{n} \perp \overrightarrow{BD_1}, \\ \vec{n} \perp \overrightarrow{B_1C} \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{BD_1} = 0, \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{B_1C} = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 1 \cdot a + 1 \cdot b + 1 \cdot c = 0, \\ 0 \cdot a + (-1) \cdot b + 1 \cdot c = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a + b + c = 0, \\ -b + c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b + c = 0, \\ c = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + 2b = 0, \\ c = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -2b, \\ c = b. \end{cases}$$

Пологая b = -1, получаем: a = 2, c = -1. Следовательно, вектор $\vec{n}$ имеет координаты: $\vec{n}(2;-1;-1)$.

Таким образом, по формуле (1): $\rho(BD_1; B_1C) = \rho(C; \alpha) = \frac{|0\cdot2-1\cdot0-1\cdot1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+(-1)^2}}$ $= \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{6}}{6}$.

Таким образом, чтобы найти расстояние между скрещивающимися прямыми векторно-координатным методом, следует найти направляющие вектора этих прямых и вычислить координаты нормального вектора плоскости, параллельной заданным прямым. Затем, используя формулу (1), определить искомое расстояние.

Далее рассмотрим решение подобной задачи на примере модели правильной шестиугольной призмы.

Задача 21. В системе координат *Oxyz* расположена правильная шестиугольная призма $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, каждое ребро которой равно 1. Центр основания призмы совпадает с началом координат, а вершины B, C, D, C_1 имеют координаты: $B(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2};0)$, C(0;1;0), $D(-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2};0)$, $C_1(0;1;1)$. Постройте эту призму. Векторно-координатным методом найдите расстояние: а) между прямыми A_1F и AB_1; б) C_1D и B_1C; в) BE_1 и F_1E.

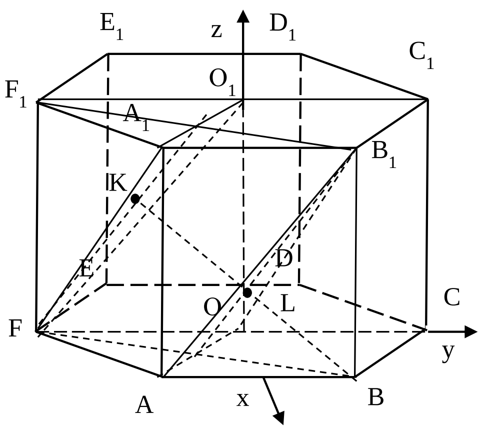

Рис. 18

Решение: а) Указание: воспользовавшись **задачей 10** б) можем утверждать, что $A_1F \subset (A_1OF) = \alpha$, $AB_1 \subset (AB_1O_1) = \beta$, и $\alpha \parallel$

β. Тогда $\rho(A_1F; AB_1) = \rho(\alpha; \beta) = \rho(L; K)$.

На (Рис. 18.) изображено расположение данной призмы относительно системы координат *Oxyz*. В ней $A_1(\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2};1)$, $B_1(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2};1)$, $A(\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2};0)$, F(0-1;0).

Найдем расстояние $\rho(A_1F;AB_1)$. Направляющими векторами прямых FA_1 и AB_1 являются вектора $\overrightarrow{FA_1}$ $(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2};1)$ и $\overrightarrow{AB_1}$ (0; 1;1) соответственно. Для удобства вычислений, вместо вектора $\overrightarrow{FA_1}$ $(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2};1)$, возьмем вектор $\vec{p}(\sqrt{3};1;2)$, такой что $\vec{p} \parallel \overrightarrow{FA_1}$.

Составим уравнение плоскости (обозначим ее α), проходящей через прямую FA_1 параллельно прямой AB_1. Вектором нормали плоскости α примем вектор $\vec{n}$(a;b;c), перпендикулярный направляющим векторам $\overrightarrow{FA_1}$ и $\overrightarrow{AB_1}$.

Координаты вектора нормали плоскости вычислим из следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} \vec{n} \perp \overrightarrow{FA_1}, \\ \vec{n} \perp \overrightarrow{AB_1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{n} \perp \vec{p}, \\ \vec{n} \perp \overrightarrow{AB_1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{p} = 0, \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{AB_1} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{3}a + b + 2c = 0, \\ 0 \cdot a + b + c = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \sqrt{3}a + b + 2c = 0, \\ b + c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{3}a + b + 2c = 0, \\ b = -c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{3}a + c = 0, \\ b = -c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = -\sqrt{3}a, \\ b = \sqrt{3}a. \end{cases}$$

Пологая a = $\sqrt{3}$, получаем b = 3, c = -3. Значит вектор $\vec{n}$ имеет координаты $\vec{n}(\sqrt{3};3;-3)$.

Тогда $\alpha(F;\vec{n})$: $\sqrt{3}(x-0)+3(y+1)-3(z-0)=0 \Rightarrow \alpha(F;\vec{n})$: $\sqrt{3}x+3y-3z+3=0$.

Теперь находим: $\rho(A_1F;AB_1) = \rho(B_1;\alpha) = \frac{\left|\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - 3\cdot\frac{1}{2} - 3\cdot 1 + 3\right|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+3^2+(-3)^2}} = \frac{\left|\frac{3}{2}+\frac{3}{2}-3+3\right|}{\sqrt{21}} = \frac{3\sqrt{21}}{21} = \frac{\sqrt{21}}{7}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{21}}{7}$.

Задачи под буквами б) и в) решаются аналогично. *Ответ:* б) $\frac{\sqrt{30}}{10}$; в) $\frac{\sqrt{30}}{10}$.

Подводя итог можно сказать о том, что для каждого типа задач на нахождение расстояний в пространстве можно подобрать общий алгоритм их решения, применяя векторно-координатный метод.

§ 5. Методические особенности обучения решению задач на вычисление углов в пространстве векторно-координатным методом

Одним из видов задач по стереометрии являются задачи на нахождение различных углов геометрических фигур. При решении таких задач учащиеся сталкиваются с рядом трудностей связанных с построением на чертеже искомого угла и доказательством того, что именно этот угол является искомым. Преимущество решения такой задачи векторно-координатного методом заключается в том, что построение искомого угла не требуется [20, С. 18].

Приведем некоторые методические аспекты применения векторно-координатного метода решения задач на вычисление углов между двумя прямыми, между прямой и плоскостью, используя в качестве многогранника куб и правильную шестиугольную призму.

Для того чтобы учащиеся могли успешно решать такие задачи любого уровня сложности, необходима выработка у них умений решать тематические опорные задачи.

Ранее мы говорили о том, что учащимся необходимо научиться решать задачи на построение точек в прямоугольной системе координат (7.028, 7.046-7.048), нахождение координат вектора (7.031-7.033) и на изображение многогранников в прямоугольной системе координат (7.035, 7.056, 7.057, 7.035, 7.065).

Особое внимание следует уделить задачам на составление уравнения плоскости (7.081-7.085, 7.089-7.090) и уравнений прямой (7.141, 7.149-7.152) [7].

Приведем примеры и решений каждого ряда задач на нахождения расстояний. В качестве многогранников выберем куб и правильную шестиугольную призму.

5.1. Угол между двумя прямыми

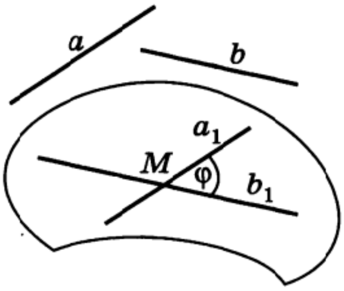

Рис. 19

Определение 6. «*За величину угла между двумя скрещивающимися прямыми* a *и* b *принимается величина угла между параллельными им пересекающимися в некоторой точке M прямыми* a_1 *и* b_1 $\angle(a;b) = \angle(a_1;b_1) = \varphi$, *где* $a_1 \parallel a$, $b_1 \parallel b$, $a_1 \cap b_1 = M$ (рис. 19)».

Прямые a и b, имеющие направляющие векторы $\overrightarrow{p_1}(a_1;a_2;a_3)$ и $\overrightarrow{p_2}(b_1;b_2;b_3)$ и проходящие соответственно через точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$ и $M_2(x_2;y_2;z_2)$, задаются параметрическими уравнениями соответственно:

(a): $x = x_1 + a_1t,\ y = y_1 + a_2t,\ z = z_1 + a_3t,\ t \in R;$

(b): $x = x_2 + b_1t,\ y = y_2 + b_2t,\ z = z_2 + b_3t,\quad t \in R.$

Если $\varphi = \angle(a, b)$, $\psi = \angle(\vec{p}_1, \vec{p}_2)$, то либо $\varphi = \psi$, либо $\varphi + \psi = 180°$ (Рис. 20). Учитывая, что $\cos\varphi \geq 0$ при $\varphi \in [0°; 90°]$, получаем $\cos\varphi = |\cos\psi|$. Это означает, что косинус угла между прямыми может быть найден с помощью формулы: $\cos\varphi = |\cos\psi| = \frac{|\overrightarrow{p_1}\cdot\overrightarrow{p_2}|}{|\overrightarrow{p_1}|\cdot|\overrightarrow{p_2}|}$ или в координатном виде [14]:

$$\cos\varphi = \frac{|a_1\cdot b_1 + a_2\cdot b_2 + a_3\cdot b_3|}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}. \qquad (2)$$

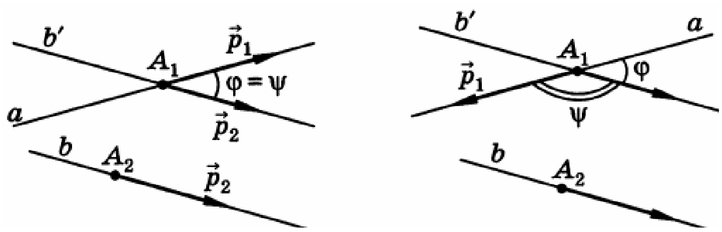

Рис. 20

В качестве примера рассмотрим решение следующей задачи.

Задача 22. Куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ расположен в системе координат *Oxyz* так, что C(1;0;0), B_1(0;0;1) A(0;1;0), B(0;0;0). Постройте этот куб и векторно-координатным методом найдите угол между прямыми: A_1B и AC.

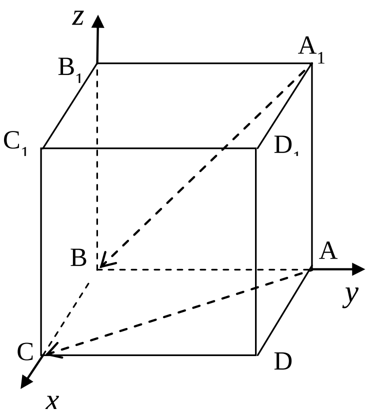

Рис. 21

Решение. На (рис. 21) изображено расположение данного куба относительно системы координат *Oxyz*. Точка B(0;0;0) - начало координат по условию задачи. Тогда: D(1;1;0), D_1(1;1;1), A_1(0;1;1), C_1(1;0;1).

Найдем угол φ = ∠ (A_1B; AC).

Направляющим вектором прямой A_1B будем считать вектор $\overrightarrow{A_1B}$(0;-1;-1), а направляющим вектором прямой AC - вектор $\overrightarrow{AC}$(1;-1;0).

Тогда:

$$\cos\varphi = \frac{|\overrightarrow{A_1B}\cdot\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{A_1B}|\cdot|\overrightarrow{AC}|} = \frac{|0\cdot1+(-1)\cdot(-1)+(-1)\cdot0|}{\sqrt{0^2+(-1)^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{1^2+(-1)^2+0^2}} = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, $\varphi = arccos\frac{1}{2} = 60°$.

Ответ: $60°$.

Далее рассмотрим решение более сложной задачи, выбрав в качестве многогранника правильную шестиугольную призму.

Задача 23. В системе координат *Oxyz* расположена правильная шестиугольная призма $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, каждое ребро которой равно 1. Центр основания призмы совпадает с началом координат, а вершины A, B_1, F, F_1 имеют координаты: $A(\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2};0)$, $B_1(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2};1)$, $F(0;-1;0)$, $F_1(0;-1;1)$. Постройте эту призму. Векторно-координатным методом найдите величину угла меду прямыми A_1B и B_1F.

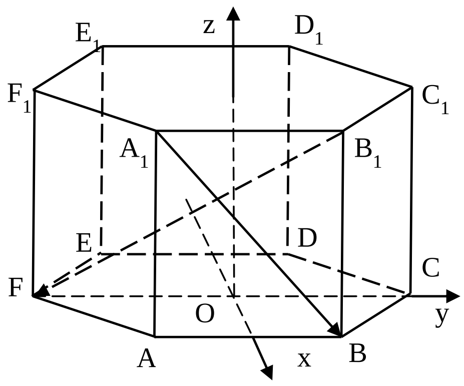

Рис. 22

Решение. На (рис. 22) изображено расположение данной призмы относительно системы координат *Oxyz*. В ней точки A_1, B, B_1, F имеют следующие координаты: $A_1(\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2};1)$, $B(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2};0)$, $B_1(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2};1)$, $F(0;-1;0)$.

Обозначим: $\varphi т=\angle(A_1B;B_1F)$. Направляющим вектором прямой A_1B будем считать вектор $\overrightarrow{A_1B}(0;1;-1)$, а направляющим вектором прямой B_1F - вектор $\overrightarrow{B_1F}(-\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{3}{2};-1)$.

Тогда: $\cos\varphi = \frac{|\overrightarrow{A_1B}\cdot\overrightarrow{B_1F}|}{|\overrightarrow{A_1B}|\cdot|\overrightarrow{B_1F}|} = \frac{\left|0\cdot(-\frac{\sqrt{3}}{2})+1\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)+(-1)\cdot(-1)\right|}{\sqrt{0^2+1^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{(-\frac{\sqrt{3}}{2})^2+(-\frac{3}{2})^2+(-1)^2}} = \frac{\left|-\frac{3}{2}+1\right|}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{2}}{8}$.

Получаем: $\cos\varphi = \frac{\sqrt{2}}{8} \Rightarrow \varphi = \arccos\frac{\sqrt{2}}{8}$.

Ответ: $\arccos\frac{\sqrt{2}}{8}$.

Таким образом, для того чтобы векторно-координатным методом найти величину угла между двумя прямыми, следует определить координаты направляющих векторов этих прямых, после чего, используя формулу (2), найти искомую величину угла.

5.2 *Угол между прямой и плоскостью*

***Определение* 7.** «*Углом между наклонной и плоскостью называется угол между наклонной и её проекцией на эту плоскость* (рис. 23).

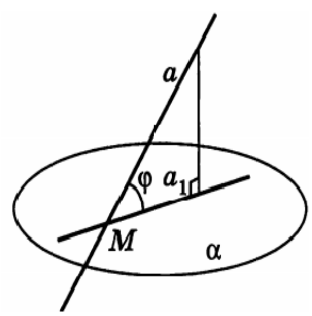

Рис. 23

Угол между прямой $l: \begin{cases} x = x_0 + ta, \\ y = y_0 + tb, \\ z = z_0 + tc \end{cases}$ и плоскостью α: $A\,x + B\,y + \ C\,z + D = 0$ можно найти, используя угол между направляющим вектором $\vec{p}(a;b;c)$ прямой l и вектором $\vec{n}(A;B;C)$ нормали плоскости α (рис. 24) по формуле:

$$\sin\angle(l;\ \alpha) = \sin\varphi = \cos\psi = \ |\cos\angle(\vec{p}\ ;\vec{n})| = \frac{|a\cdot A + bB\cdot + c\cdot C|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\cdot\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \text{ » } (3)$$

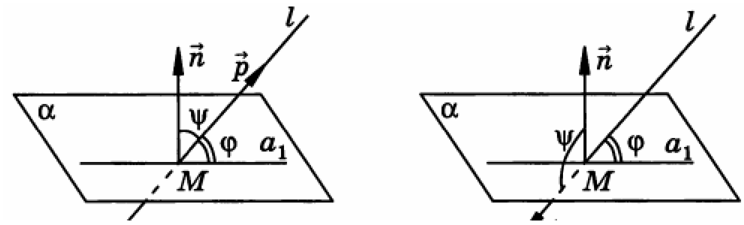

Рис. 24

Задача 24. Куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ расположен в системе координат *Oxyz* так, что $C(1;0;0)$, $B_1(0;0;1)$, $A(0;1;0)$, $B(0;0;0)$. Постройте этот куб и векторно-координатным методом найдите синус угла между прямой BC и плоскостью AB_1D_1.

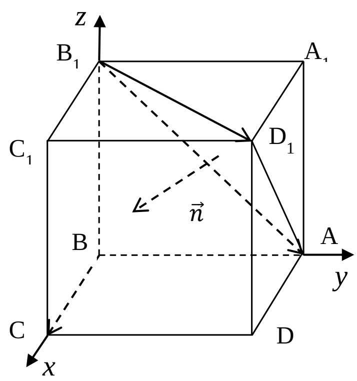

Рис. 25

Решение. На (рис. 25) изображено расположение данного куба относительно системы координат *Oxyz*. Точка B(0;0;0) - начало координат по условию задачи. Тогда: D(1;1;0), $D_1(1;1;1)$, $A_1(0;1;1)$, $C_1(1;0;1)$.

Найдем $\sin\varphi = \angle(BC;AB_1D_1)$.

Направляющим вектором прямой BC будем считать вектор $\overrightarrow{BC}(1;0;0)$.

Пусть вектор $\vec{n}(a;b;c)$ - вектор нормали плоскости α = (AB_1D_1). Тогда данный вектор перпендикулярен векторам $\overrightarrow{B_1A}(0;1;-1)$ и $\overrightarrow{B_1D_1}(1;1;0)$.

Найдем координаты вектора $\vec{n}(a;b;c)$. Имеем:

$$\begin{cases}\vec{n}\perp\overrightarrow{B_1A},\\ \vec{n}\perp\overrightarrow{B_1D_1}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{B_1A}=0,\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{B_1D_1}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}0\cdot a+1\cdot b+(-1)\cdot c=0,\\ 1\cdot a+1\cdot b+0\cdot c=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b-c=0,\\ a+b=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}b=c,\\ a=-b\end{cases}$$

Пологая c = 1, получаем a = -1, b = 1. Имеем: $\vec{n}(-1;1;1)$. Тогда уравнение плоскости α = (A; $\vec{n}$) примет вид:

$$-1\cdot(x-0)+1\cdot(y-1)+1\cdot(z-0)=0\iff x-y-z+1=0.$$

Теперь находим по формуле (3):

$$\sin\varphi=\frac{|\overrightarrow{BC}\cdot\vec{n}|}{|\overrightarrow{BC}|\cdot|\vec{n}|}=\frac{|1\cdot(-1)+0\cdot1+0\cdot1|}{\sqrt{1^2+0^2+0^2}\cdot\sqrt{(-1)^2+1^2+1^2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Далее рассмотрим решение подобной задачи на примере правильной шестиугольной призмы.

Задача 25. В системе координат *Oxyz* расположена правильная шестиугольная призма $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, каждое ребро которой равно 1. Центр основания призмы совпадает с началом координат, а вершины A, F, F_1, B_1 имеют координаты: $A(\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2};0)$, $B_1(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2};1)$, $F(0;-1;0)$, $F_1(0;-1;1)$. Постройте эту призму и векторно-координатным методом найдите величину угла меду прямой A_1B и плоскостью BB_1C. ([12], с. 138).

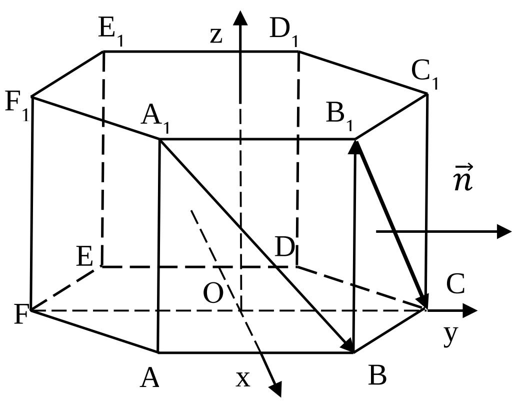

Рис. 26

Решение. На (рис. 26) изображено расположение данной призмы относительно системы координат *Oxyz*. В ней $A_1(\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2};1)$, $B(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2};0)$, $B_1(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2};1)$, C(0;1;0).

Обозначим: $\varphi=\angle(A_1B;(BB_1C))$. Для прямой A_1B направляющим вектором является вектор $\overrightarrow{A_1B}(0;1;-1)$.

Координаты вектора $\vec{n}(a;b;c)$ нормали плоскости β=(BB_1C) найдем из условия его перпендикулярности векторам $\overrightarrow{BB_1}(0;0;1)$ и $\overrightarrow{B_1C}(-\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2};-1)$.

Тогда:

$$\begin{cases} \vec{n} \perp \overrightarrow{BB_1}, \\ \vec{n} \perp \overrightarrow{B_1C} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{BB_1} = 0, \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{B_1C} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \cdot a + 0 \cdot b + c = 0, \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}a + \frac{1}{2}b - c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 0, \\ a = \frac{\sqrt{3}}{3}b \end{cases}.$$

Пологая $b = 3$, получим $a = \sqrt{3}$, $c = 0$. Тогда вектор нормали плоскости β имеет координаты $\vec{n}(\sqrt{3};3;0)$. Уравнение плоскости β, проходящей через точку C(0;1;0) перпендикулярно вектору $\vec{n}(\sqrt{3};3;0)$, примет вид:

$$\sqrt{3}\cdot(x-0)+3\cdot(y-1)+0\cdot(z-0)=0 \Rightarrow \sqrt{3}x+3y-3=0.$$

Теперь находим искомую величину угла φ:

$$\sin\varphi = |\cos\varphi\angle((\overrightarrow{A_1B}) \cdot \vec{n})| = \frac{|0\cdot\sqrt{3}+1\cdot3+(-1)\cdot0|}{\sqrt{0^2+1^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{\sqrt{3}^2+3^2+0^2}} = \frac{3}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{12}} = \frac{\sqrt{6}}{4}, \text{ откуда:}$$

$$\varphi = \arcsin\frac{\sqrt{6}}{4}.$$

Ответ: $\arcsin\frac{\sqrt{6}}{4}$.

Таким образом, чтобы векторно-координатным методом найти величину угла между данными прямой и плоскостью, необходимо определить координаты направляющего вектора этой прямой и вектора нормали данной плоскости, после чего по формуле (3) вычислить синус искомого угла.

5.3. Угол между плоскостями

«Угол между плоскостями α и β, заданными уравнениями соответственно $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, удобно связать между их нормальными векторами $\overrightarrow{n_1}(A_1;B_1;C_1)$ и $\overrightarrow{n_2}(A_2;B_2;C_2)$» (Рис. 27.) [12]. Именно,

$$\cos\angle(\alpha;\beta)=|\cos\angle(\overrightarrow{n_1};\overrightarrow{n_2})|=\frac{|A_1\cdot A_2+B_1\cdot B_2+C_1\cdot C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}. \quad (4)$$

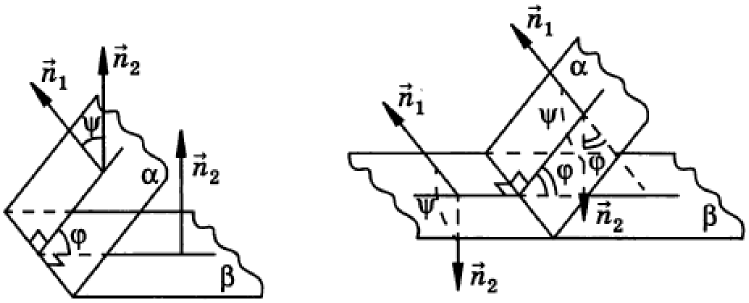

Рис. 27

В качестве примера рассмотрим решение следующей задачи.

Задача 25. Куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ расположен в системе координат *Oxyz* так, что C(1;0;0), B_1(0;0;1), A(0;1;0), B(0;0;0). Постройте этот куб и векторно-координатным методом найдите синус угла между плоскостями D_1AC и B_1AC.

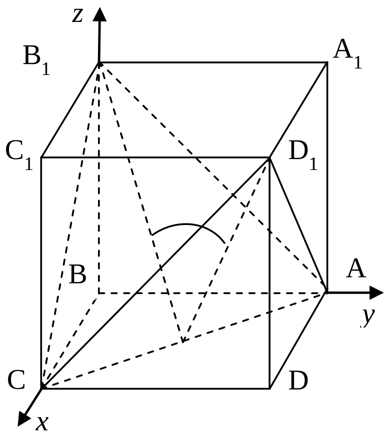

Рис. 28

Решение. На (рис. 28) изображено расположение данного куба относительно системы координат *Oxyz*. Точка B(0;0;0) - начало координат по условию. Тогда: D(1;1;0), D_1(1;1;1), A_1(0;1;1), C_1(1;0;1).

Найдем угол ψ между плоскостями α = (B_1AC) и β = (D_1AC).

Пусть вектор $\overrightarrow{n_1}(a_1;b_1;c_1)$ - вектор нормали плоскости α. Тогда данный вектор перпендикулярен векторам: $\overrightarrow{B_1C}$(1;0;-1) и $\overrightarrow{B_1A}$(0;1;-1).

Найдем координаты вектора $\overrightarrow{n_1}$:

$$\begin{cases}\overrightarrow{n_1} \perp \overrightarrow{B_1C}, \\ \overrightarrow{n_1} \perp \overrightarrow{B_1A}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{B_1C} = 0, \\ \overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{B_1A} = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}1 \cdot a + 0 \cdot b + (-1) \cdot c = 0, \\ 0 \cdot a + 1 \cdot b + (-1) \cdot c = 0\end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases}a_1 - c_1 = 0, \\ b_1 - c_1 = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a_1 = c_1, \\ b_1 = c_1.\end{cases}$$

Пологая c_1 = 1, получим a_1 = 1, b_1= 1. Имеем: $\overrightarrow{n_1}$(1;1;1). Тогда уравнение плоскости α = (A; $\overrightarrow{n_1}$) примет вид:

$$1 \cdot (x - 0) + 1 \cdot (y - 1) + 1 \cdot (z - 0) = 0 \Leftrightarrow x + y + z - 1 = 0.$$

Аналогичным образом, находим вектор нормали $\overrightarrow{n_2}(a_2; b_2; c_2)$ к плоскости β, перпендикулярный векторам $\overrightarrow{D_1A}$(-1;0;-1) и $\overrightarrow{D_1C}$(0;-1-1). Тогда:

$$\begin{cases}\overrightarrow{n_2} \perp \overrightarrow{D_1A}, \\ \overrightarrow{n_2} \perp \overrightarrow{D_1C}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\overrightarrow{n_2} \cdot \overrightarrow{D_1A} = 0, \\ \overrightarrow{n_2} \cdot \overrightarrow{D_1C} = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}(-1) \cdot a + 0 \cdot b + (-1) \cdot c = 0, \\ 0 \cdot a + (-1) \cdot b + (-1) \cdot c = 0\end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases}-a_2 - c_2 = 0, \\ -b_2 - c_2 = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a_1 = -c_1, \\ b_2 = -c_2\end{cases}.$$

Пологая c_2 = 1, получаем a_2 = -1, b_2 = -1. Имеем: $\overrightarrow{n_2}$(-1;-1;1). Это значит, что уравнение плоскости β = (D_1; $\overrightarrow{n_2}$) примет вид:

$$-1 \cdot (x - 1) - 1 \cdot (y - 1) + 1 \cdot (z - 1) = 0 \Leftrightarrow x + y - z - 1 = 0.$$

Теперь находим:

$$\cos\psi = \frac{|\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}| \cdot |\overrightarrow{n_2}|} = \frac{|1 \cdot (-1) + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2} \cdot \sqrt{(-1)^2+(-1)^2+1^2}} = \frac{1}{3}.$$

$$\sin\psi = \sqrt{1 - \cos^2\psi} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \psi = \arcsin\frac{2\sqrt{2}}{2}.$$

Ответ: $\arcsin\frac{2\sqrt{2}}{2}$.

Далее приведем решение аналогичной задачи на примере правильной шестиугольной призмы.

Задача 26. В системе координат *Oxyz* расположена правильная шестиугольная призма $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, каждое ребро которой равно 1. Центр основания призмы совпадает с началом координат, а вершины A, F, F_1, B_1 имеют координаты: A($\frac{\sqrt{3}}{2}$; $-\frac{1}{2}$;0), B_1($\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\frac{1}{2}$;1), F(0;−1;0), F_1(0;−1;1). Постройте эту призму. Векторно-координатным методом найдите величину угла меду плоскостями A_1FE и C_1AB.

Решение. На (рис. 29) изображено расположение данной призмы относительно системы координат *Oxyz*. В ней: $A_1(\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2};1)$, $A(\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2};0)$, $B(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2};0)$, $C_1(0;1;1)$, $E(-\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2};0)$, $F(0;-1;0)$.

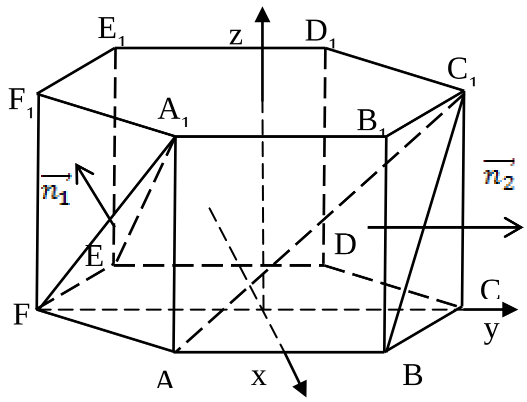

Рис. 29

Обозначим: $\angle(\alpha;\beta)=\varphi$, где $\alpha=(A_1FE)$, $\beta=(C_1AB)$.

Найдем координаты векторов нормалей плоскостей α и β.

Вектор $\overrightarrow{n_1}(a_1;b_1;c_1)$ нормали плоскости α перпендикулярен векторам: $\overrightarrow{A_1F}(-\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2};-1)$ и $\overrightarrow{A_1E}(-\sqrt{3};0;-1)$. Найдем координаты вектора $\overrightarrow{n_1}$.

$$\begin{cases}\overrightarrow{n_1}\perp\overrightarrow{A_1F},\\ \overrightarrow{n_1}\perp\overrightarrow{A_1E}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{A_1F}=0,\\ \overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{A_1E}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-\frac{\sqrt{3}}{2}a_1-\frac{1}{2}b_1-c_1=0,\\ -\sqrt{3}a_1-0\cdot b_1-c_1=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{3}a_1+b_1+2c_1=0,\\ c_1=-\sqrt{3}a_1.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b_1=\sqrt{3}a_1,\\ c_1=-\sqrt{3}a_1.\end{cases}$$

Пологая $a_1=\frac{1}{\sqrt{3}}$, получим $b_1=1$, $c_1=-1$.

Имеем: $\overrightarrow{n_1}(\frac{1}{\sqrt{3}};1;-1)$.

Аналогично, вектор $\overrightarrow{n_2}(a_2;b_2;c_2)$ нормали плоскости β, перпендикулярен векторам: $\overrightarrow{AC_1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{3}{2};1\right)$ и $\overrightarrow{AB}(0;1;0)$. Найдем координаты вектора $\overrightarrow{n_2}$.

$$\begin{cases}\overrightarrow{n_2}\perp\overrightarrow{AC_1},\\ \overrightarrow{n_2}\perp\overrightarrow{AB}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{AC_1}=0,\\ \overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{AB}=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}-\frac{\sqrt{3}}{2}a_2+\frac{3}{2}b_2+c_2=0,\\ 0\cdot a_2+b_2+0\cdot c_2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_2=-\frac{2}{\sqrt{3}}c_2,\\ b_2=0\end{cases}.$$

Пологая $c_2 = \sqrt{3}$, тогда $a_2 = -2$, $b_2 = 0$. Получаем: $\overrightarrow{n_2}(-2; 0; \sqrt{3})$.

Тогда:

$$\cos\varphi = |\cos\angle(\overrightarrow{n_1}; \overrightarrow{n_2})| = \frac{|\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}| \cdot |\overrightarrow{n_2}|} = \frac{\left|\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot (-2) + 1 \cdot 0 + (-1) \cdot \sqrt{3}\right|}{\sqrt{(\frac{1}{\sqrt{3}})^2 + 1^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{(-2)^2 + 0^2 + \sqrt{3}^2}} = \frac{\frac{4}{3}}{\sqrt{\frac{7}{3}}\sqrt{7}} = \frac{4}{7}.$$

Ответ: $\frac{4}{7}$.

Таким образом, чтобы векторно-координатным методом найти величину угла между двумя плоскостями, достаточно определить координаты нормальных векторов данных плоскостей, после чего по формуле (4) вычислить синус искомого угла.

Подводя итог можно сказать о том, что для каждого типа задач на нахождение углов в пространстве можно подобрать общий алгоритм их решения, применяя векторно-координатный метод.

Выводы по второй главе

Во второй главе выделены методические особенности обучения решению метрических задач на нахождение расстояний и углов в пространстве *геометрическим* и *векторно-координатным* методом с использованием модели правильной шестиугольной призмы.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключении приведенного исследования можно сделать следующие выводы.

1. В данной работе определены различные подходы к решению метрических задач стереометрии. Применение различных методов решения одной объединяющей их задачи способствует формированию у учащихся целостного понимания геометрии, развивает их логическую культуру и представление о красоте геометрических методов. Представлен перечень тех знаний и умений, которые необходимы учащимся для успешного решения задач на нахождение различных расстояний и углов в правильной шестиугольной призме и других многогранниках, используя геометрический и векторно-координатный метод.

2. Проведен анализ программ и школьных учебников по геометрии для учащихся 10 - 11 классов, рекомендованных Министерством образования и науки Российской Федерации, № 253 от 31 марта 2014 г.

3. Выделены методические особенности обучения решению стереометрических задач на нахождение расстояний и углов геометрическим и векторно-координатным методом с использованием модели правильной шестиугольной призмы.

Сравнивая эти методы, приходим к выводу: наиболее *универсальным и алгоритмичным* является векторно-координатный метод решения метрических задач стереометрии, в то время как геометрический метод требует *индивидуального творческого подхода* при решении каждой содержательной задачи.

Выше сказанные позволяет сделать вывод: задачи, поставленные в исследовании вопросов методики обучения решению метрических задач с использованием модели правильной шестиугольной призмы в 10-11 классах с углубленным изучением геометрии, успешно решены. Более глубокие исследования вопросов обучения геометрии – предмет дальнейших творческих исследований.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров, А.Д. Геометрия. Методические рекомендации. 10 - 11 классы [Текст]: Пособие для учителей общеобразоват. организаций / А. Д. Александров, А. Л. Вернер, В. И. Рыжик. - М. : Просвещение, 2014. – 144 с.

2. Александров, А.Д. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геомерия 10 - 11 классы [Текст]: учеб. для общеобразоват. организаций : базовый и углубл. уровни / А. Д. Александров, А.Л. Вернер, В. И. Рыжик. - М. : Просвещение, 2014. – 255 с.

3. Бескин, Н.М. Методика геометрии. С приложением главы «Методика преподавания наглядной геометрии» А.М. Астряба/ Н.М. Бескин. – М.: ГУПИМП РСФСР. – 1947.

4. Готман, Э.Г. Стереометрические задачи и методы их решения/ Э.Г. Готман. – М.: МЦНМО, 2006. – 160 с.

5. Лященко, Е.И. Лабораторные и практические работы по методике преподавания математики [Текст]: Учеб. пособие для студентов физ. - мат. спец. пед. ин-тов / Е.И. Лященко, К.В. Зобкова, Т.Ф. Кириченко и др.; Под ред. Е.И. Лященко. - М.: Просвещение, 1988. – 223 с.

6. Потоскуев, Е.В. Геометрия. 10 кл.: учеб. для общеобразоват. учреждений с углуб. и профильным изучением математики/ Е. В. Потоскуев, Л. И. Звавич. – М.: Дрофа, 2010. – 223 с.

7. Потоскуев, Е.В. Геометрия. 10 кл.: Задачник для общеобразоват. учреждений с углубл. и профильным изучением математики / Е.В. Потоскуев, Л.И. Звавич. – 2-е изд., стереотип. – М.: Дрофа, 2004. – 256 с.

8. Потоскуев, Е.В. Геометрия. 10 кл.: Методическое пособие к учебнику Е. В. Потоскуева, Л. И. Звавича «Геометрия. 10 кл» / Е. В. Потоскуев, Л. И. Звавич, Л. Я. Шляпочник. - М.: Дрофа, 2004. – 224 с.

9. Потоскуев, Е.В. Геометрия. 11 кл.: Учеб. для общеобразоват. учреждений с углуб. и профильным изучением математики/ Е. В. Потоскуев, Л. И. Звавич. – М.: Дрофа, 2004. – 268 с.

10. Потоскуев, Е.В. ЕГЭ. Геометрия. Задания 14, 16. Опорные задачи по геометрии. Планиметрия. Стереометрия. / Е.В. Потоскуев. - М.: Издательство «Экзамен», 2016. – С. 223.

11. Потоскуев, Е.В. Правильная шестиугольная призма как модель геометрии прямых и плоскостей / Математика в школе 2016. - № 4. - С. 26-34.

12. Потоскуев, Е.В. Прямые и плоскости в координатах. / Е.В. Потоскуев // Математика – Первое сентября. – 2013. – № 6. – С. 22-23.

13. Потоскуев, Е.В. Эффективные помощники «вхождения» в метрическую стереометрию/ Е.В. Потоскуев // Математика – Первое сентября. – 2010. – № 23. – С. 13–15.

14. Программы общеобразовательных учреждений. Геометрия. 10-11 классы/ Сост. Т.А. Бурмистрова. – М.: Просвещение. – 2009. – С. 95.

15. Прокофьев, В.В. О различных подходах к вычислению расстояния между скрещивающимися прямыми. / В.В. Прокофьев // Математика в школе. – 2015. – № 5. – С. 18–32.

16. Руськина Н.М. Об углах в правильной шестиугольной призме. / Н.М. Руськина // Математика и математическое образование: сборник трудов VIII Международной научной конференции «Математика. Образование. Культура» (к 240 - летию со дня рождения Карла Фридриха Гаусса), 26 - 29 апреля 2017 года, Россия, г. Тольятти / под общ. ред. Р.А. Утеевой. - Тольятти: Изд-во ТГУ, 2017. – С.453-456.

17. Смирнова, И.М. Геометрия 10 - 11 класс [Текст]: учеб. для учащихся общеобразоват. учреждений (базовый и профильный уровни) / И. М. Смирнова, В. А. Смирнов. - 5-е изд., испр. и доп. - М. : Мнемозина, 2008. - 288 с.

18. Федеральный государственный образовательный стандарт среднего (полного) общего образования: Приказ Мин. образования и науки РФ от

17.05.2012 г. №413. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://минобрнауки.рф/документы/2365. – Последнее обновление 07.05.2017

19. Федеральный перечень учебников, рекомендованных к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ начального общего, основного общего, среднего общего образования» / Приказ Министерства образования и науки РФ. – М.: Просвещение, 2014. - 164 с. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://god2015.com/files/Prikaz_253.pdf – Последнее обновление 22.05.2017.

20. Холева, О.В. Нахождение углов между прямыми и плоскостями. / О.В. Холева // Математика в школе. - 2011. - № 8. - С. 18-21.

21. Arnheim R. Visual thinking. London, 1970.

22. Boyd, C.J. Geometry Student Edition. Publisher: Clencoe / McCraw - Hill, 2007. - 960 p.

23. Petrunin A. Euclidean plane and its relatives. CreateSpace, 2015. - 190 p.

24. Wheater C. Practice Makes Perfect: Geometry. McGraw-Hill, 2010. - 160 p.

25. Weinreich G. Geometrical Vectors. University Of Chicago Press, 1998. - 126 p.