МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Тольяттинский государственный университет»

Институт математики, физики и информационных технологий

Кафедра «Алгебра и геометрия»

Направление подготовки 44.03.05 «Педагогическое образование»

Направленность (профиль) «Математика и информатика»

БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА

на тему **«МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ ЭЛЕМЕНТАМ ТЕОРИИ ДЕЛИМОСТИ В КУРСЕ АЛГЕБРЫ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ»**

Студент А.В. Молокович ____________________

Руководитель к.п.н., доцент кафедры алгебры и геометрии Н.С. Симонова ____________________

Консультант к.п.н., А.В. Кириллова ____________________

Допустить к защите

Заведующий кафедрой д.п.н., профессор Р.А. Утеева ______________

«____»__________2017 г.

Тольятти 2017

АННОТАЦИЯ

Целью бакалаврской работы является выявление методических особенностей обучения учащихся теме «Элементы теории делимости» и разработка элективного курса для расширенного изучения данной темы.

Теория делимости является одним из важнейших разделов арифметики и, в частности, всей теории чисел. В школьной практике теория делимости используется при изучении основных понятий, основных признаков делимости и решения задач.

Бакалаврская работа состоит из введения, двух глав, заключения, списка литературы и приложений.

В *Главе I* рассмотрены методические основы изучения темы «Элементы теории делимости». Рассмотрены исторические аспекты развития основных понятий теории делимости.

Представлен анализ программы и школьных учебников по теме «Элементы теории делимости». Выявлены методические особенности изучения темы «Теория делимость» в курсе алгебры основной школы.

В *Главе II* представлены методические материалы по изучению темы «Элементы теории делимости» в курсе алгебры основной школы.

Список литературы содержит 35 наименований.

ABSTRACT

"The elements of division theory teaching methods in the algebra course in secondary school"

The title of the bachelor's thesis is "The elements of division theory teaching methods in the algebra course in secondary school"

The aim of the work is to give some information about methodical specifics of the elements of division theory teaching in the algebra course in secondary school. The object of the bachelor's thesis is the process of algebra teaching in a secondary school. The subject of the bachelor's thesis is a Division theory section teaching methods at the lessons of algebra course in secondary school.

The bachelor's thesis describes in details the historical aspects of the origin and development of the elements of division theory concept in mathematics. We analyze the content of the division theory in the algebra coursebooks and education programs of different authors. Next we outline the methods of the elements of division theory concept introduction.

The second part of the work gives details about methodical recommendations of division theory teaching in the algebra course in secondary school as well as the development plan of an elective course on bachelor's thesis. Finally, we present systems of exercises on Division theory section teaching to students in the algebra course of secondary school.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность исследования. Теория делимости является одним из важнейших разделов арифметики и, в частности, всей теории чисел. Невозможность деления на нуль и неопределенность операции деления во множестве целых чисел поспособствовали возникновению таких понятий, как простые и составные числа, наибольший общий делитель (НОД), наименьшее общее кратное (НОК), а также признаков делимости чисел. Познакомившись с операцией деления еще в начальной школе, учащиеся более подробно знакомятся с теорией делимости в курсе математики 5-6 классов, а также изучают ее элементы в 7-9 классах (решение дробно-рациональных уравнений, деление многочленов). Таким образом, основные направления методики изучения натуральных чисел и операций над ними в начальных классах получили свое дальнейшее развитие при изучении теории делимости уже во множестве целых чисел в курсе алгебры общеобразовательной школы.

По мнению В.В. Зайко [21], грамотная реализация методики обучения элементам теории делимости в учебниках 5 и 6 классов выражена в замене объяснительных текстов проблемными ситуациями в виде практических заданий. Выполнение таких заданий требует активного использования приемов выбора, сравнения, классификации, преобразования и конструирования. Приоритетными являются обучающие задания, с помощью которых устанавливаются взаимосвязи понятий курса математики 5 и 6 классов с теми понятиями, которые учащиеся ранее усвоили в начальных классах, то есть образуется преемственность знаний учащихся.

В школьной практике теория делимости используется при изучении основных понятий, основных признаков делимости и решения задач.

Проблема исследования состоит в выявлении методических особенностей обучения учащихся разделу «Теория делимости» в курсе алгебры основной школы.

Объект исследования: процесс обучения математике в основной школе.

Предмет исследования: методика обучения учащихся различным элементам теории делимости в курсе алгебры основной школы.

Цель исследования: выявить методические особенности обучения теме «Элементы теории делимости» и разработать элективный курс для расширенного изучения данной темы.

Задачи исследования:

1. Ознакомиться с историей происхождения понятия делимости и основных понятий теории чисел.

2. Провести анализ учебных программ и школьных учебников от различных авторов.

3. Изучить методические особенности обучения темам, входящих в структуру теории делимости.

4. Привести собственные методические рекомендации к процессу обучения данным темам.

5. Разработать элективный курс по теме «Элементы теории делимости» для учащихся 8 класса.

6. Привести конкретные примеры и задания по данной теме, встречающиеся в учебных изданиях в основной школе (5-9 классы).

Решение поставленных задач потребовало привлечения следующих **методов исследования:**

– анализ методической литературы, а также анализ учебников и школьной программы по математике для 5-9 классов;

– изучение опыта работы учителей;

– обобщение и систематизация теоретических и практических знаний по рассматриваемой теме.

Теоретическая значимость исследования состоит в том, что в нем раскрываются методические особенности обучения учащихся разделу «Элементы теории делимости» в курсе алгебры основной школы.

Практическая значимость исследования работы заключается в том, что в ней представлена разработка элективного курса для учащихся 8 класса, направленного на углубленное изучение темы «Элементы теории делимости».

На защиту выносится:

1. Методические рекомендации по обучению теме «Элементы теории делимости» в школьном курсе математики.

2. Элективный курс по теме «Делимость чисел» для учащихся 8 класса.

Во **введении** перечислены цели, основные задачи и актуальность исследования темы данной дипломной работы.

В **первой главе** указаны методические основы изучения темы «Элементы теории делимости». Рассмотрены исторические аспекты развития основных понятий теории делимости. Представлен анализ программы и школьных учебников по теме «Элементы теории делимости». Выявлены методические особенности изучения темы «Теория делимость» в курсе алгебры основной школы.

Во **второй главе** представлены методические материалы по изучению темы «Элементы теории делимости» в курсе алгебры основной школы.

В **заключении** приведено обобщение рассмотренного материала и выводы проведенного исследования.

Список литературы содержит 35 наименований.

В **Приложениях** представлены сведения о тематическом планировании элективного курса «Делимость чисел» для 8 класса, а также примерные задания для контрольной работы по итогам этого курса.

ГЛАВА I. МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОБУЧЕНИЯ ТЕМЕ «ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ДЕЛИМОСТИ» В КУРСЕ АЛГЕБРЫ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ

§1. Из истории развития основных понятий теории делимости

Коренное преобразование математики по традиции единодушно приписывают Пифагору. Вот что пишет об этом Прокл: «Пифагор преобразовал эту науку в форму свободного образования. Он изучал эту науку, исходя из первых ее оснований, и старался получать теоремы при помощи чисто логического мышления, вне конкретных представлений» [13, с. 66].

Что касается творчества ранних пифагорейцев (представителей пифагорской школы), то в настоящее время невозможно отделить сделанное самим Пифагором от работ его учеников, поэтому в дальнейшем, речь будет идти исключительно о математике пифагорейцев. Пифагорейцы занимались астрономией, геометрией, музыкой, и, в числе прочего, арифметикой, а именно теорией чисел.

Можно справедливо утверждать, что Пифагор и пифагорейская школа закладывали основы теории чисел и принципы арифметики.

1.1. Арифметика целых чисел

Число для пифагорейцев – это множество единиц, то есть только целое положительное число. Единицы, из которых и состоит число, считались неделимыми и изображались точками, которые пифагорейцы располагали в виде правильных геометрических тел, получая ряды «треугольных», «квадратных», «пятиугольных» и других «фигурных» чисел. Каждый такой ряд представляет последовательные суммы арифметической прогрессии с разностями 1, 2, 3 и т. д.

На Рис. 1 изображены «треугольные числа» 1, $1 + 2 = 3$, $1 + 2 + 3 = 6$, $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ (общее выражение этих чисел $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$).

На Рис. 2 показаны «квадратные числа» 1, 1 + 3 = 4, 1 + 3 + 5 = 9 (общее выражение этих чисел 1 + 3 + 5 + … + (2n - 1) = n^2; наше выражение «квадрат» для числа n^2 является пережитком пифагорейской терминологии).

На Рис. 3 изображены «пятиугольные числа» 1 + 4 = 5, 1 + 4 + 7 = 12 (общее выражение этих чисел 1 + 4 + 7 + … + (3n - 2) = $\frac{n(3n-1)}{2}$).

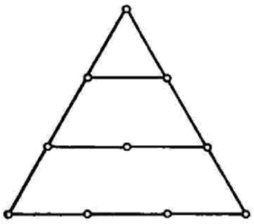

Рис. 1

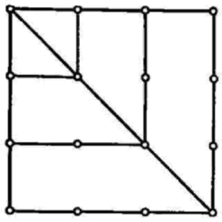

Рис. 2

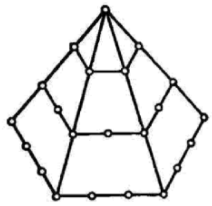

Рис. 3

Пифагорейцы определили также «кубические» числа 1, 8, 27, … (откуда наше выражение «куб» для n^3) и «пирамидальные» числа – суммы треугольных чисел 1, 1 + 3 = 4, 1 + 3 + 6 = 10, …, 1 + 3 + 6 + …, $\frac{n(n+1)}{2}$ = $= \frac{n(n+1)(n+2)}{2\cdot 3}$.

При изучении свойств чисел, пифагорейцы были первыми, кто обратил внимание на законы их делимости. Они классифицировали все числа как *четные* и *нечетные* и, что не менее важно, как *простые* и *составные*. Пифагорейцы называли простые числа, представимые в виде произведения двух сомножителей, – «плоскими числами» и изображали их в виде прямоугольников, а составные числа, представимые в виде произведения трех сомножителей, – «телесными числами» и изображали их в виде параллелепипедов. Простые числа, которые нельзя представить в виде произведений, они называли «линейными числами». Пифагорейцы создали так называемое учение о четных и нечетных числах, которое с современной точки зрения является теорией делимости на 2. Построенная ими теория была впоследствии воспроизведена Евклидом в 21-34-м предложениях IX книги «Начал».

Основной результат учения о четных и нечетных числах можно сформулировать так: произведение двух чисел делится на 2 (т.е. четно) тогда и только тогда, когда, по крайней мере, один из сомножителей делится на 2. Отсюда следует, что любое целое число N можно однозначно представить в виде $N = 2^k N_1$, где N_1 – нечетно. Удивительно, что предложение, которое и в наши дни большинству людей представляется очевидным, было так рано обосновано. Еще удивительнее, что была понята необходимость его обоснования [13].

1.2. Арифметика дробей и первая теория отношений

Как только натуральные числа 1, 2, 3, … стали доступны, манипуляции с ними и решение проблем, связанных с цифрами, привели к созданию положительных дробей, известным древним вавилонянам (2000 г. до н. э.), которые также знали некоторые квадратные и кубические корни [31].

Важнейшим свойством рациональных чисел, в отличие от целых, является то, что в области рациональных чисел деление всегда возможно, то есть уравнение $ax = b$, a и b – рациональные и $a \neq 0$, всегда имеет решение. Только в Греции начали оперировать с дробями вида $\frac{m}{n}$, причем умели производить с ними все действия арифметики с тем ограничением, что вычитать можно было лишь из большего меньшее. Сложение и вычитание производились путем приведения к общему знаменателю, дроби умели сокращать, умножать и делить.

Не позднее V в. до н. э. появились и первые теоретические исследования, посвященные этим новым объектам. Что следует понимать под $\frac{m}{n}$? Точнее, как определить в общем случае равенство или неравенство двух таких объектов и как ввести для них арифметические операции?

Греки исходили из того, что единица E неделима, поэтому они говорили не о долях единицы $\frac{m}{n}E$, а об отношениях целых чисел $\frac{mE}{nE} = \frac{M}{N}$, то есть в сущности имели в виду пары целых чисел.

Согласно VII книге «Начал», две пары чисел (A, B) и (C, D) пропорциональны или имеют одинаковое отношение, если у A и B существует такой общий делитель F, а у C и D – делитель G, что

$$A = mF, \quad C = mG,$$
$$B = nF, \quad D = nG.$$

В частности, одно из чисел, m или n, могло равняться единице.

Все пары целых чисел разбивались на непересекающиеся классы пар, имеющих одно и то же отношение:

$$A_1 : B_1 = A_2 : B_2 = A_3 : B_3 = \dots$$

Древние выбирали из множества пар, имеющих одинаковое отношение, наименьшую пару A_0, B_0, относительно которой доказывали:

1) если $A : B = A_0 : B_0$, то $A = kA_0$, $B = kB_0$ (VII, предложение 20);

2) если A_0, B_0 взаимно просты, то они составляют наименьшую пару из всех, имеющих с ней одинаковое соотношение (VII, предложение 21);

3) если A_0, B_0 составляют наименьшую пару, то они между собой взаимно просты (VII, предложение 22).

Как видно, вся эта теория пар основывается на понятиях из общей теории делимости – общий делитель двух чисел, взаимная простота двух чисел и т. д. В основе всех этих понятий и большей части доказательств лежит алгоритм нахождения *наибольшего общего делителя* (*НОД*) двух чисел, называемый в настоящее время *алгоритмом Евклида*.

Также в «Началах» дается алгоритм нахождения *наименьшего общего кратного* (*НОК*) в предложениях 34 и 36 книги VII, что, очевидно, необходимо для операции, соответствующей сложению дробей, но сама эта операция в теоретических сочинениях греков не употребляется [13].

1.3. Теория делимости

Важные свойства целых чисел были установлены уже в древности. В Греции, в школе Пифагора (VI в. до н. э.), изучались вопросы делимости чисел, рассматривались различные категории чисел, например простые, составные, совершенные (т. е. числа, сумма собственных делителей которых равна этому же числу, например 6 = 1 + 2 + 3), квадратные.

В своих «Началах» Евклид (III в. до н. э.) излагает основные свойства делимости целых чисел, доказывает теорему о том, что простые числа образуют бесконечное множество. Там же он дает алгоритм (так называемый *алгоритм Евклида*) для определения НОД двух чисел, являющийся основной теоремой делимости [21]:

Если A и B – целые числа ($A > B$), то этот алгоритм состоит в представлении A в виде

$$A = nB + B_1,$$

где $0 \leq B_1 < B$, затем B в виде

$$B = n_1 B_1 + B_2,$$

где $0 \leq B_2 < B_1$, и т. д. Процесс не может быть бесконечным, так как существует лишь конечное число целых чисел, меньших B. Таким образом, через конечное число шагов мы придем к такому остатку B_k, что $B_{k_1} = n_k B_k$; B_k и будет наибольшим общим делителем чисел A и B.

После введения этого алгоритма, можно уже вполне строго доказать *основную теорему делимости*.

Произведение двух чисел AB делится на простое число P тогда и только тогда, когда на P делится по крайней мере один из сомножителей. Это и есть предложение 30 VII книги «Начал». В предложении 32 доказывается, кроме того, что любое число либо является простым, либо делится на какое-нибудь простое. Отсюда следует, что любое A представимо в виде

$$A = P_1 P_2 \ldots P_k,$$

где P_i – простые числа. Наконец, в предложении 14 книги IX доказывается, то если все сомножители различны, то такое представление *единственно* [13].

Закон однозначности разложения на простые множители является основой всей арифметики целых чисел (этот закон также называется *основной теоремой арифметики*).

§2. Анализ программы и учебников по теме исследования

2.1. Анализ программ по математике для 5-9 классов

Анализ учебной программы по математике 5 класса

В 5-ом классе изучение темы «Делимость чисел» носит пропедевтический характер. **Основной целью** этого курса является систематизация и обобщение знаний учащихся о натуральных числах, полученных в начальной школе.

В программе Г.К. Муравина для 5 класса [26] фактически не рассматриваются элементы теории делимости, однако в качестве пропедевтического курса к ним, имеет место подробное изучение расширенного множества натуральных чисел, включающего нуль.

Ниже, в таблице 1, приведено примерное тематическое планирование к учебнику Г.К. Муравина для 5 класса общеобразовательной школы [28].

Таблица 1

Тематическое планирование к учебнику Г.К. Муравина для 5 класса

Содержание темы	**Кол-во часов**		**Что должен уметь учащийся**
	5	**6**	
Натуральные числа и нуль	27	33	
Десятичная система счисления Натуральный ряд чисел. Десятичная система счисления. Разряды и классы. Правила записи и чтения чисел. Сумма разрядных слагаемых. Сумма цифр числа	4	5	Описывать свойства натурального ряда. Читать и записывать натуральные. Находить сумму цифр числа и сумму разрядных слагаемых
Сравнение чисел Числовые равенства и неравенства. Строгие и нестрогие неравенства. Двойные неравенства. Контрпример. Правила чтения равенств и неравенств. Правило сравнения чисел	4	5	Сравнивать и упорядочивать натуральные числа. Читать равенства, строгие и нестрогие неравенства. Опровергать утверждения с помощью контрпримера. Решать задачи на увеличение и уменьшение на несколько единиц, а также на *увеличение и уменьшение в несколько раз*
Контрольная работа	1	1	

Анализ учебной программы по математике 6 класса

По курсу Г.К. Муравина, в 6 классе изучаются основные элементы теории делимости, такие как:

- Делимость натуральных чисел. Делители и кратные;

- Наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное;

- Свойства делимости произведения, суммы и разности;

- Признаки делимости и т.п.

Основной целью курса является завершение изучения натуральных чисел и закрепление навыков вычислений с обыкновенными дробями [26, С. 27].

На этом этапе происходит заключительный этап изучения вопросов, связанных с множеством натуральных чисел.

Основное внимание уделяется понятиям «делитель» и «кратное», а также «наибольший общий делитель» и «наименьшее общее кратное», которые применяются при сокращении обыкновенных дробей и приведении дробей к общему знаменателю.

Выводятся свойства делимости произведения, суммы и разности чисел. Причем доказательства всех этих свойств на данном этапе обучения не приводятся.

Признаки делимости чисел выводятся на конкретных примерах. При этом у учащихся формируются умения проводить простейшие умозаключения, обосновывать свои действия, ссылаясь на определения, правила и свойства делимости. Также применяются признаки делимости при разложении чисел на множители и сокращении дробей.

Наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное учащиеся находят разными способами, что способствует развитию у них вариативного мышления.

Также программа Муравина предусматривает дополнительное изучение тем «Множества» и «Связь между НОД и НОК», однако они несут скорее развивающее значение и уровень их знания не влияет на итоговую оценку учащегося по предмету.

Ниже, в таблице 2, приведено примерное тематическое планирование к учебнику Г.К. Муравина для 6 класса общеобразовательной школы.

Таблица 2

Тематическое планирование к учебнику Г.К. Муравина для 6 класса

Содержание темы	**Кол-во часов**		**Что должен уметь учащийся**
	5	**6**	
Делимость чисел	35	41	
Делители и кратные Делитель, наибольший общий делитель. Кратное, наименьше общее кратное. Сократимая и несократимая дробь. Деление с остатком	6	7	Формулировать определения делителя и кратного. Находить НОД и НОК. Сокращать дроби. Приводить дроби к общему знаменателю. Выполнять действия с обыкновенными дробями, используя НОД и НОК
Свойства делимости произведе-ния, суммы и разности	6	6	Формулировать свойства делимости. Доказывать и опровергать с помощью контрпримеров утверждения о делимости чисел
Признаки делимости натураль-ных чисел Признаки делимости натуральных чисел на 2, 5, 10, 4, 3 и на 9	5	7	Формулировать признаки делимости. Доказывать и опровергать с помощью контрпримеров утверждения о делимости чисел
Простые и составные числа Разложение натурального числа на простые множители. Основная теорема арифметики. Правило нахождения НОД	6	7	Формулировать определения простого и составного числа. Раскладывать числа на простые множители
Контрольная работа	1	1	
Взаимно простые числа Признак делимости на 6, 12 и т.д. НОК взаимно простых чисел	5	6	Формулировать определение взаимно простых чисел. Формулировать признаки делимости на 6, 12, 15 и др.
Множества Множество, элемент множества, конечное, бесконечное и пустое множество. Подмножество. Равен-ство множеств. Пересечение, объединение множеств. Свойства объединения и пересечения множеств. Диаграммы Эйлера-Венна	5	6	Приводить примеры конечных и бесконечных множеств. Находить объединение и пересечение конкретных множеств. Приводить примеры несложных классификаций из различных областей жизни. Иллюстрировать теоретико-множест-венные понятия с помощью кругов Эйлера-Венна.
Контрольная работа	1	1	

Анализ учебной программы по математике 7 класса

В программах 7 класса такие элементы теории делимости как целочисленное деление, простые и составные числа, делители натурального числа и его простые множители обычно встречаются в начале учебника.

Элементы теории делимости встречаются и в теме «Одночлены и многочлены», в частности, при делении на одночлен.

Далее, при изучении темы «Разложение многочленов на множители» встречаются такие элементы теории делимости как вынесение общего множителя за скобки и применение нескольких способов разложения многочлена на множители, а в теме «Алгебраические дроби» можно выделить приведение дробей к общему знаменателю, а также умножение и деление алгебраических дробей.

Анализ учебной программы по математике 8 класса

В стандартных школьных учебниках элементы теории делимости также сначала встречаются в начале первой четверти при повторении темы «Алгебраические дроби. Арифметические операции над алгебраическими дробями».

Основными темами в курсе алгебры 8 класса, которые рассматривают теорию делимости и ее элементы, являются «Квадратный трехчлен», «Разложение многочлена на множители» и «Деление многочлена на многочлен».

Однако программа для 8 классов с углубленным изучением математики может предложить гораздо более расширенное изучение элементов теории делимости.

В зависимости от используемого учебника, программа может содержать темы, посвященные множествам натуральных, целых и действительных чисел; взаимно однозначному соответствию (биекции) между некоторыми множествами, свойствам и признакам делимости различной сложности, а также более редким методам нахождения НОД натуральных чисел (алгоритм Евклида).

Анализ учебной программы по математике 9 класса

В девятом классе изучение теории делимости не представлено вовсе, но ее элементы встречаются в темах, посвященных многочленам (делители свободного члена многочлена, теорема Безу, разложение квадратного трехчлена на множители, деление многочлена), а также при решении дробно-рациональных уравнений.

2.2. Анализ учебников и учебных пособий

«Математика 5 класс. Часть 1» – Г.В. Дорофеев, Л.Г. Петерсон [7]

В первой части этого учебника всего два раздела, больший из которых посвящен делимости натуральных чисел.

Перед тем как давать само понятие делимости, авторы объясняют его через разложение каких-то предметов на группы: «27 предметов можно разложить на 3 равные группы по 9 предметов в каждой» [7, С. 87].

После ввода таких понятий как кратное, делитель и частное идут несколько контрольных вопросов, в которых требуется перечислить все делители некоторых чисел, а также общие делители двух и более чисел. Тут же упоминается понятие парных делителей числа – «делители, произведение которых равно самому числу». Фактически в этом учебнике так и дается определение НОД: методом перебора перечисляются все общие делители чисел, а затем наибольшее из них подчеркивается и выписывается отдельно. Понятие НОК также вводится «незаметно» через задание – методом перебора записываются все кратные двум и более числам, а затем выписывается наименьшее из них.

Основываясь только на первой главе можно сделать вывод о том, что учебник предлагает минимум теории и максимум практики, а также более способствует взаимодействию учащихся с педагогом во время урока, чем другие учебники математики за 5 класс.

Во второй главе после ввода стандартных терминов «простое число» и «составное число» упоминается интересная интерпретация множества натуральных чисел:

Множество натуральных чисел разбивается на 3 части:

1) *число* 1 (имеет единственный делитель);
2) *простые числа* (имеют в точности 2 делителя);
3) *составные числа* (имеют больше 2 делителей) [7, с. 94].

Следующая глава учебника посвящена основным свойствам делимости натуральных чисел, причем под этим подразумеваются свойства делимости произведения (которое идет первым по счету) и свойства делимости суммы и разности. Эти свойства идентичны свойствам из учебников других авторов, однако любопытно то, что из свойств самой операции деления здесь упоминается только свойство *транзитивности*, и оно идет сразу после свойства делимости произведения двух чисел.

Далее объясняются признаки делимости чисел на 10, 2, 5, 3 и 9.

Однако последние главы раздела вновь посвящены изучению НОД, НОК, а также разложению чисел на простые множители, но уже в более знакомой по другим учебникам форме. В случае НОД и НОК:

1) чтобы найти НОД нескольких чисел, надо взять их общие простые делители с наименьшими показателями.

2) чтобы найти НОК нескольких чисел, надо взять все их простые делители с наибольшими показателями [7, С. 146].

Здесь также указывается, что любое составное число можно разложить на простые множители (*основная теорема арифметики*), однако это также упоминалось в начале раздела «Делимость натуральных чисел».

Учитывая все вышеописанное можно сделать вывод, что данный учебник предлагает хорошую теоретическую и практическую базу, однако его структурирование материала выглядит неоднозначно.

«Математика. 5 класс» – Н.Я. Виленкин, В.И. Жохов [2]

В этом учебнике операция деления впервые рассматривается в первой главе «Натуральные числа» сразу после операции умножения. Авторы старались максимально наглядно продемонстрировать, что деление – обратная операция умножению. В частности, приводится такое определение:

«Действие, с помощью которого по произведению и одному из множителей находят другой множитель, называют *делением*» [2, С. 74]. После ввода терминов делимое, делитель и частное идет правило «Ни одно число нельзя делить на нуль». Далее приводятся простейшие свойства операции деления:

1. При делении любого числа на 1 получается это же число;
2. При делении числа на это же число получается единица;
3. При делении нуля на число получается нуль.

Далее идут правила нахождения неизвестных множителей, делимого и делителя, а после – практический материал.

Сразу после задач рассматривается тема «Деление с остатком». Невозможность деления нацело некоторых чисел на другие рассматривается на примере деления числа 23 на 4. Далее рассматриваются новые термины (неполное частное и остаток от деления), отмечается, что остаток *всегда* меньше делителя, и вводится правило:

«Чтобы найти делимое при делении с остатком, надо умножить неполное частное на делитель, и к полученному произведению прибавить остаток».

Примечательно, что авторы не вводят буквенные обозначения для неполного частного и остатка от деления, ограничиваясь текстовым правилом.

В следующий раз операция деления рассматривается значительно позже в теме «Деление и дроби». Здесь вводятся следующие важные правила:

«С помощью дробей можно записать результат деления двух *любых* натуральных чисел»;

«Если деление выполняется нацело, то частное является *натуральным числом*. Если же разделить нацело нельзя, что частное является *дробным числом*»;

«*Любое* натуральное число можно записать в виде дроби с любым натуральным знаменателем» [2, С. 162].

«Математика. 6 класс» – И.И. Зубарева, А.Г. Мордкович [12]

В этом учебнике теории делимости отведена целая глава «Делимость натуральных чисел». В начале, после повторения понятий кратности, делимого, делителя и делимости нацело (с использованием обозначения «$a \vdots b$»), вводится следующее определение наименьшего общего кратного (НОК).

«Общий знаменатель, который мы находим, складывая или вычитая дроби с разными знаменателями, является кратным каждого из знаменателей, или, как говорят, *общим кратным* знаменателей. Для того чтобы не усложнять вычислений, обычно стараются найти *наименьшее* из общих кратных знаменателей. Наименьшее общее кратное чисел m и n принято обозначать **НОК (*m; n*)**» [12, С. 161].

После решения задач на тему НОК авторы переходят к рассмотрению темы НОД и приводят следующее определение:

«Числа, которые одновременно являются делителями некоторых чисел, называются их *общими делителями*. Наибольший общий делитель чисел m и n обозначают **НОД (*m; n*)**».

Далее в учебнике рассмотрены простейшие свойства делимости суммы, разности и произведения (включая свойство транзитивности), а также несколько дополнительных:

Если $a \vdots b$ и c не делится на b, то $a + c$ не делится на b.

Пример 1. Из того, что $12 \vdots 3$ и 22 не делится на 3, можно сделать вывод, что 12 + 22 не делится на 3.

Если $a \vdots b$ и $(a + c) \vdots b$, то $c \vdots b$.

Пример 2. Из того, что $12 \vdots 3$ и $(12 + 21) \vdots 3$, можно сделать вывод, что $21 \vdots 3$.

Следующие несколько параграфов учебника отводятся на изучение признаков делимости. Причем в этом плане данный учебник является «рекордсменом» среди других учебников по математике для 6 класса – он содержит признаки делимости на 2, 5, 10, 4, 25, 3 и на 9 (в учебниках Виленкина [3] и Дорофеева [8], например, есть только признаки деления на

10, 5, 2, 9 и 3). Каждому из признаков предшествует ряд вопросов аналитического характера, заставляющих учащихся самим приводить примеры и формулировать признаки делимости.

Также авторы отмечают, что, несмотря на использование ими в примерах исключительно натуральных чисел, все перечисленные признаки делимости применимы и для любых целых чисел. Например, число -48 делится на 2, поскольку его цифра единиц четная, а число -1435 делится на 5, поскольку цифра единиц – 5.

Следующим разделом теории делимости в этом учебнике является тема «Простые числа. Разложение числа на простые множители». Авторы учебника наглядно объясняют различие между простыми и составными числами, приводя следующую таблицу 3:

Таблица 3

Различие между простыми и составными числами

Один делитель	Два делителя	Более двух делителей
1	простые	составные

Натуральные числа, имеющие только два делителя, называют *простыми*. Натуральные числа, имеющие более двух делителей, называют *составными*. Число 1 *не относится* ни к простым, ни к составным числам.

Рассказывая о разложении натуральных чисел на простые множители, авторы упоминают *основную теорему арифметики*: «любое натуральное число (кроме 1) либо является простым, либо его можно разложить на простые множители, причем единственным способом» [12, С. 194]. Также примечательным является то, что только в этом учебнике дается термин «канонические разложения».

Главу «Делимость натуральных чисел» завершают темы, повторяющие НОД и НОК. Здесь содержатся подробные алгоритмы их нахождения, которые не сильно разнятся с аналогичными правилами из учебников других авторов.

«Дополнительные главы по курсу математики. Учебное пособие по факультативному курсу для учащихся 7-8 классов» – К.П. Сикорский [29]

Данное учебное пособие дополняет учебник Виленкина Н.Я. «Математика. 6 класс». Книга состоит из семи больших разделов.

В разделах содержатся теоретические сведения и соответствующие упражнения. В конце раздела приводятся упражнения для повторения.

К каждому разделу даются дополнительные упражнения более высокого уровня сложности по сравнению с основными упражнениями.

Первый раздел, состоящий из 15 параграфов, посвящен делимости чисел и простым числам. Упражнения к разделу можно разделить на 2 группы. Первую группу составляют задания на доказательство утверждений.

Ко второй группе относятся задания, которые основываются не только на определениях и теоремах, но и на умение проводить необходимые рассуждения, использовать ранее введенный алгебраический аппарат. К примеру, задание 32 [29, С. 14]: «Числа a и b не делятся на c. В каком случае $a - b$ делится на c? В каком случае $a + b$ делится на c?» заставляет учащегося вспоминать основные свойства делимости чисел (свойства делимости суммы и разности натуральных чисел), а также дает возможность привести несколько собственных примеров. Однако спорным моментом является то, что материал в сборнике излагается не в четкой, отличной от школьных учебников, хронологии. Более правильным порядком следования тем было бы: «Простые числа», «Взаимно простые числа», «Признаки делимости», «Наибольший общий делитель», «Наименьшее общее кратное», а затем тема «Сравнения». Автор же поместил определение сравнимости и разбор соответствующих задач между темами «Деление с остатком» и «Взаимно простые числа».

Представленный материал подобран очень хорошо. Сначала даются задачи на определение, затем задачи на основе использования теорем, а затем на использование логического мышления и умения рассуждать. Весь теоретический материал рассмотрен широко и полно.

Легко заметить, что понятия рассматриваются более глубоко чем в стандартном школьном курсе, так как вводятся новые математические символы и определения, а все теоремы и утверждения записываются в символьной форме. Вводится новое понятия сравнения [29, С. 15]:

Определение 1. Если два числа a и b имеют одинаковые остатки при делении на m, то говорят, что a и b сравнимы по модулю m, и пишут

$$a \equiv b \pmod{m}.$$

Определения вводятся на основании делимости чисел, что для большинства детей трудно понимается. В каждом конкретном случае стоит сначала рассмотреть пример делимости чисел и уже на основании этого примера дать определение.

В итоге данное учебное пособие можно порекомендовать учителю математики в качестве источника как расширенного, так и совершенного нового учебного материала (как например тема «Существование и единственность деления с остатком», которая не рассматривается ни в одном базовом школьном учебнике). Однако педагогу все же не стоит злоупотреблять этим сборником ввиду его комплексной структуры, а использовать только в сочетании со школьным учебником.

2.3. Анализ учебников для классов, с углубленным изучением математики

«Алгебра. Углубленное изучение. 8 класс» – А.Г. Мордкович [22]

В этом учебнике элементы теории делимости рассматриваются как часть главы, посвященной действительным числам и неравенствам. После повторения множеств натуральных, целых и рациональных чисел, дается общее определение делимости чисел a и b через равенство $a = bq$. Так как сначала упоминается только целочисленное деление, то сразу же вводится обозначение вида $a \vdots b$ и указывается, что в отличие от записи «$a : b$», которая обязывает произвести деление, символ «$\vdots$» лишь показывает принципиальную возможность выполнить деление.

Далее даются свойства делимости, как и собственные (рефлексивность, транзитивность), так и дистрибутивные (то есть делимость суммы, делимость разности). Каждое из свойств подробно объяснено с помощью примера, а к некоторым из них даже прилагается доказательство. Помимо этих восьми стандартных свойств в учебнике дается следующее:

«Среди *n* последовательных натуральных чисел одно, и только одно делится на *n*» [22, С. 146]. После этого рассматриваются признаки делимости. Здесь впервые в линии школьных учебников А.Г. Мордковича упоминаются условия необходимости и достаточности. Приведены как распространенные признаки делимости, так и более сложные, признаки делимости на 11, 7 и 13.

Следующим элементом теории делимости в этом учебнике является темы «Простые и составные числа» и «Деление с остатком». В первой из них дается теорема о бесконечности множества простых чисел с доказательством, а во второй приводится доказательстве о единственности неполного частного и целого. Также автор замечает, что для решения некоторых задач формулу деления с остатком удобнее записывать в виде $a = bq + r = b(q + 1) - (b - r)$.

Последними темами теории делимости являются «НОД и НОК» и «Основная теорема арифметики натуральных чисел», причем именно в таком порядке. НОД и НОК двух и более чисел находятся путем их разложения на множители и выбора наибольшего или наименьшего из них (в следующей теме для этого также используется каноническое разложение на простые множители). Отличительным от других учебников школьного курса является то, что здесь представлены свойства НОД и НОК, а также кратности в целом [22, С. 157].

1. Если K – общее кратное чисел a и c, то $K \vdots$ НОК $(a; c)$.

2. Если $a \vdots b_1$ и $a \vdots b_2$, то $a \vdots$ НОК (b_1, b_2).

3. Если $a \vdots b_1$, $a \vdots b_2$ и НОД $(b_1; b_2) = 1$, то $a \vdots b_1 b_2$.

4. Если $a \vdots c$ и $b \vdots c$, то $\frac{ab}{c}$ – общее кратное чисел a и b.

Также дается доказательство к равенству НОК $(a; b) \cdot$ НОД $(a; b) = ab$.

«Алгебра. 8 класс: Учебник для школы и классов с углубленным изучением математики» – Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк [17]

Делимости чисел в этом учебнике посвящена большая глава, которая начинается с повторения теории множеств, изученной в 7 классе.

После повторения понятий «множество», «элемент множества» и т.п. вводятся бинарные операции над двумя множествами A и B, графически изображенные с помощью кругов Эйлера-Венна [17].

Определение 2. Пересечением двух множеств называется множество, состоящее из всех общих элементов этих множеств.

Характеристически эту операцию можно записать как:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}.$$

Определение 3. Объединением двух множеств называется множество, состоящее из всех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из этих множеств.

Это можно записать так: $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\}$.

Далее коротко изучается понятие взаимно однозначного соответствия (то есть, биекции). Ее рассматривают на примере множества **N** натуральных чисел и множества четных натуральных чисел (натуральному числу n ставится в соответствие число $2n$), а также на примере двух окружностей с одним центром.

Элементам теории делимости предшествует повторение натуральных и целых числовых множеств; авторами разъясняется факт установления взаимно однозначного соответствия между этими множествами.

Следующий параграф учебника посвящен делимости чисел. После определения целочисленного деления следуют свойства делимости целых чисел с доказательствами. Положительной частью этого пункта является то, что здесь приведена методика применения этих свойств в некоторых задачах.

В пункте, посвященному свойствам делимости суммы и произведения перечислены свойства делимости суммы, делимости разности, неделимости суммы, делимости произведения, делимости удвоенного произведения целых чисел. Каждое из свойств описано максимально подробно и доказано с использованием символьных обозначений. Присутствуют также *доказательства от противного.*

В пункте «Деление с остатком» при доказательстве теоремы о единственности неполного частного q и остатка r в представлении делимости целых чисел a и b используется геометрическая интерпретация с помощью координатной прямой. Здесь же рассматриваются задачи на разбиение множества целых чисел на классы, полученных в результате их деления на некоторое натуральное число. Для решения таких задач вводится понятие принципа Дирихле. Также в этом пункте рассматривается понятие наибольшего общего делителя (НОК в учебнике не изучается), причем его явного определения авторы не дают. Примечательно, что НОД в учебнике учат находить *только* алгоритмом Евклида.

В следующем пункте перечислены признаки делимости на 2, на 5, на 4, на 3, на 9 и на 11. Также здесь представлено такое необычное свойство: «Если натуральное число делится на каждое из двух взаимно простых чисел, то оно делится на их произведение» [17, С. 118].

В последнем пункте параграфа даются понятия простых и составных чисел, а также теорема о бесконечности множества простых чисел с доказательством.

§3. Методические особенности обучения основным понятиям теории делимости в школьном курсе математики

3.1. Обучение элементам теории делимости в начальной школе

В начале изучения темы «Теория делимости» на пропедевтическом уровне начальной школы, необходимо учитывать такие важные аспекты как: правильная мотивация учебного материала, простота и наглядность его изложения (в форме диалога, беседы и т. д.), а также выработка активной познавательной и исследовательской деятельности учащихся.

Для любого преподавателя важно понимать, что очевидное и простое математическое высказывание, такое как $3 \cdot 2 = 6$ имеет множество значений. Для начала число 3 в примере может означать 3 реальных предмета, 3 группы объектов, точку на числовой линии или просто абстрактное число.

То же самое относится к числам 2 и 6, то есть числа в этом примере являются обобщениями всех троек, двоек и шестерок в разных контекстах.

Таким образом, для учащихся младших классов пример типа $3 \cdot 2 = 6$ часто мало что значит, пока не задан нужный контекст. Аналогичное рассуждение применимо и к простейшим правилам деления. Следовательно, вся работа по ранней стадии умножения и деления должна выполняться посредством практических задач, с участием детей, реальных объектов или математического аппарата, в котором контекст задач полностью очевиден. Аналогично, процессы работы с умножением и делением также должны, по большей части, содержать некоторое представление о выполняемых действиях [24, С. 3].

Операция деления в начальной школе рассматривается как арифметическое действие, обратное умножению.

С теоретико-множественной точки зрения смыслу деления соответствует операция разбиения множества на равночисленные ему подмножества.

Поэтому в начальных классах учащиеся для наглядности чаще всего используют какие-либо предметы и раскладывают их на равные части, и тем самым находят результаты простейших делений.

В 3 классе дети знакомятся с правилами взаимосвязи компонентов деления, которые являются обязательными для нахождения неизвестных компонентов деления при решении уравнений:

1) *Если делитель умножить на частное, то получится делимое.*

2) *Если делимое разделить на частное, то получится делитель.*

Тема «Деление с остатком» идет перед изучением алгоритма деления «в столбик». С математической точки зрения деление с остатком является более общим случаем, нежели деление без остатка. Учащиеся производят целочисленное деление, если у них в результате этого самого деления, остаток оказался равен нулю. Так как в начальной школе операция деления трактуется как обратное операции умножения действие, то, соответственно, изучению деления с остатком предшествует изучение целочисленного деления. Конкретный смысл действия деления в общем смысле раскрывается в процессе выполнения операции разбиения множества на равночисленные ему подмножества. При таких операциях не всегда возможно получение равночисленных подмножеств. Для доказательства учитель снова вынужден возвращаться к предметным действиям, манипулируя небольшим количеством предметов, чтобы продемонстрировать учащимся возможность получения неделимого остатка.

Пример 3. 13 карандашей разложили в две коробки поровну. Сколько карандашей в каждой коробке?

Выполняя предметные действия в соответствии с заданной ситуацией, дети убеждаются в том, что выполнить такое разбиение множества карандашей невозможно. Остается один карандаш, который нельзя распределить поровну в две коробки.

На основании выполнения подобных заданий, учитель вводит новую запись, позволяющую определить роль оставшихся в процессе распределения предметов:

13 : 2 = 6 (остаток 1) и поясняет, что действие, записанное таким образом, называют «деление с остатком».

В данной записи: 13 – делимое, 2 – делитель, 6 – неполное частное от деления 13 на 2, 1 – остаток.

Для проверки правильности выполненного деления следует:

1. Умножить неполное частное на делитель (6 · 2).
2. К полученному произведению прибавить остаток (12 + 1 = 13).

Также учителем объясняется основное требование к делению с остатком: «При делении остаток **всегда** должен быть меньше делителя».

3.2. Обучение элементам теории делимости в общеобразовательной школе

Тема на делимость чисел изучается в 5-6 классах. При изучении этой темы рассматриваются следующие вопросы: делимость натуральных чисел; признаки делимости на 2, 3, 5, 9, 10; простые и составные числа; разложение натурального числа на простые множители; наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное; деление с остатком.

Основная цель изучения темы – познакомить учащихся с основными понятиями делимости чисел (делитель, простое число, разложение на множители, признаки делимости), сформировать навыки их использования. При изучении данной темы можно уделять значительное внимание формированию у учащихся простейших доказательных умений. Доказательство свойств и признаков делимости вначале проводятся на характерных числовых примерах, а затем могут быть распространены на общий случай. При этом учащиеся получают первый опыт доказательства теоретических положений со ссылкой на другие теоретические положения.

Учитель математики И.Е. Феоктистов в своей статье в журнале «Математика в школе» провел анализ темы «Делимость чисел» по учебнику алгебры для 8 класса за авторством Макарычева Ю.Н., Миндюка Н.Г. и др., а также выделил ключевые понятия, которыми должен владеть учащийся после изучения нового материала [30].

Определение 4.

Целое число a делится на целое число b, не равное нулю, если существует целое число k, такое, что $a = bk$ [7, С. 31].

В этом случае число a называется кратным числа b, а число b – делителем числа a. Обозначение $a \vdots b$ читается: «a делится на b», «a кратно b» или «b – делитель a». Рассматриваются следующие с*войства делимости.*

1. Если $a \neq 0$, то $a \vdots a$.

2. Если $b \neq 0$, то $0 \vdots b$.

3. Если $a \vdots b$ и $b \vdots c$, то $a \vdots c$, где $b \neq 0$ и $c \neq 0$.

4. Если $a \vdots b$ и $b \vdots a$, то либо $a = b$, либо $a = –b$ (или, иначе $|a| = \mathrm{b}$).

По мнению И.Е. Феоктистова, результатом изучения пункта «Делимость. Свойства делимости» должны стать знание определения делимости целого числа a на целое и отличное от нуля число b, свойств делимости, умение доказывать эти свойства, используя определение делимости, а также умение применять термины «a делится на b», «a кратно b», «b – делитель a», умение применять свойства делимости для решения задач. При изучении свойств делимости суммы и произведения, учащиеся должны знать и уметь доказывать эти свойства, уметь применять их при решении задач.

Деление с остатком

Помимо уже разобранного ранее алгоритма Евклида, в некоторых учебных программах по математике средней школы может оказаться *принцип Дирихле*.

В учебнике алгебры Макарычева для 8 класса данная тема отсутствует (она предложена И.Е. Феоктистовым), поэтому предлагаем ее рассмотреть.

При разбиении множества, состоящего из m элементов, на n классов ($m > n$) хотя бы в один из классов попадет более одного элемента (аналогичная и общепринятая формулировка: если m кроликов сидят в n

клетках и $m > n$, то хотя бы в одной клетке сидит более одного кролика).

В результате изучения материала этого пункта учащиеся должны знать определение остатка от деления целого числа a на натуральное число b, формулировку теоремы о единственности неполного частного и остатка, уметь формулировать принцип Дирихле, находить неполное частное и остаток при делении целого числа на натуральное (в частности, при делении отрицательного числа на натуральное), а также уметь применять алгоритм Евклида для нахождения НОД (a, b) [30, С. 51].

Принцип Дирихле используется учащимися при разбиении множества целых чисел на различные классы в зависимости от остатков, получаемых при делении на натуральное число n.

Арифметика остатков.

Данная тема предложена автором статьи для преподавания в классах с *углубленным* изучением математики.

В некоторых случаях при решении задач на делимость полезными оказываются арифметические свойства, позволяющие в различных числовых выражениях заменять числа их остатками от деления на то или иное натуральное число. Правомерность подобных действий обеспечивает так называемая «арифметика остатков», основы которой заложил Леонард Эйлер, а позднее продолжил Карл Гаусс.

Итак, при делении на натуральное число b существует ровно b различных остатков – от 0 до b – 1, и потому всякое целое число a единственным образом представляется в виде $a = bq + r$.

В этом случае множество целых чисел разбивается на b так называемых *классов по модулю* b. Числа, принадлежащие одному классу, называют *сравнимыми* по модулю b.

Если два целых числа a_1 и a_2 при делении на b дают один и тот же остаток r, то эти числа принадлежат одному классу по модулю b, то есть сравнимы по модулю b. Если $a_1 = bq_1 + \mathrm{r}$ и $a_2 = bq_2 + \mathrm{r}$, то пишут $a_1 \equiv a_2 \pmod{b}$.

Свойства сравнимости

Для любых целых чисел a, b, c и любого натурального числа n верно:

1. $a \equiv a \pmod{n}$

2. Если $a \equiv b \pmod{n}$, то $b \equiv a \pmod{n}$.

3. Если $a \equiv b \pmod{n}$, $b \equiv c \pmod{n}$, то $a \equiv c \pmod{n}$.

Первое свойство – *рефлексивность* вполне очевидно. Его доказывает равенство $(a - a) \equiv n$.

Второе свойство – *симметричность* сравнений – также очевидно. Оно означает, что если число a имеет такой же остаток при делении на число n, что и число b, то и число b имеет такой же остаток при делении на число n, что и число a.

Третье свойство – *транзитивность* – означает, что если числа a и b при делении на n дают равные остатки, числа b и c при делении на n дают равные остатки, то числа a и c при делении на n дают равные остатки [30].

3.3. Обучение элементам теории делимости в классах с углубленным изучением математики

В классах с углубленным изучением математики определение делимости чисел не отличается от определений из других, обычных учебников. Однако оно не дается сразу, а выводится благодаря рассуждениям о невыполнимости деления на некоторых числовых множествах.

Сначала выполняется систематизация знаний о числовых множествах, которые уже знакомы учащимся. Первым идет множество натуральных чисел, то есть чисел, используемых для счета предметов. Это множество обозначается буквой **N**. Приводя примеры, учащиеся видят, какие изученные ими операции выполнимы на этом множестве. Это операции сложения, умножения и возведения в натуральную степень. Также видно, что не всегда разность натуральных чисел выполнима на данном множестве.

Рассматриваемое далее множество целых чисел **Z** трактуется как расширение множества натуральных чисел, на котором выполнима операция разности, с добавлением нуля и отрицательных чисел.

Итак, целые числа также можно складывать, перемножать, возводить в степень, а также находить их разность. Однако операция деления не всегда выполняется ни во множестве натуральных, ни во множестве целых чисел.

Видно, что в классах с углубленным изучением больше времени уделяется элементам теории чисел. Помимо этого в программе представлены доказательства для каждого из свойств делимости, доказательство бесконечности множества простых чисел и доказательство о единственности неполного частного q и остатка r при делении a на b с остатком ($a = bq + r$).

Также здесь более расширенно изучается тема «Признаки делимости». К таким известным признакам, как деление на 2, 5 и 10 прибавились менее распространенные признаки деления на 8, на 9, на 25 и на 125.

В курсе углубленного изучения методы получения НОД и НОК не отличаются от ранее встреченных – они также находятся путем выписывания простых множителей в каноническом разложении.

Однако в отличие от обычных занятий, в углубленном курсе математики рассматриваются свойства НОД и НОК, а также правило НОК $(a; b) \cdot$ НОД $(a; b) = ab$, причем с доказательством.

Некоторые из задач, которые могут встретиться в курсе углубленного изучения математики, можно решить методом математической индукции. Также этот метод часто используют при решении задач на суммирование, при доказательстве различных тождеств и при решении геометрических задач. Ниже приведена формулировка этого метода [30, С. 20].

Пусть надо доказать, что некоторое предложение P выполняется при любом натуральном n.

1) Проверим, выполняется ли P для $n = 1$, т.е. установим истинность $P(1)$. Если $P(1)$ истинно, то

2) Предположим, что при $n = k$ истинно $P(k)$, т.е. предложение P истинно для натурального числа k.

3) Установим, истинно ли предложение P для следующего натурального числа $n = k + 1$, иными словами проверим истинность импликации (следствия) $P(k) \Rightarrow P(k + 1)$.

4) Если из $P(k)$ следует $P(k + 1)$, то предложение P является верным для любого натурального числа.

Пример 4. Доказать, что при любом натуральном значении n число вида $7^n + 3n - 1$ делится на 9.

Решение: следуя вышеописанному алгоритму,

1) При $n = 1$ имеем $7 + 3 - 1 = 9$ – делится на 9.

2) Предположим, что $7^k + 3k - 1$ делится на 9 и

3) докажем, что $7^{k+1} + 3(k + 1) - 1$ делится на 9:

$7^{k+1} + 3k + 2 = 7 \cdot 7^k + 7 \cdot 3k - 7 + 7 - 7 \cdot 3k + 3k + 2 =$

$= 7(7^k + 3k - 1) - 18k + 9$. Каждое из трех слагаемых полученной суммы делится на 9: $7(7^k + 3k - 1)$ – по нашему предположению, $18k$ и 9 кратны 9.

4) согласно методу математической индукции $7^n + 3n - 1$ делится на 9 при любых натуральных значениях n.

Выводы по первой главе

1. В ходе написания работы была рассмотрена история возникновения и развития первых элементов теории делимости. Проведя анализ исторического материала, можно сделать вывод, что Пифагор и его последователи из пифагорейской школы заложили основы теории чисел, ранней теории делимости и базовых принципов арифметики.

2. Был проведен анализ изучения темы «Элементы теории делимости» в различных учебниках и учебных пособиях по математике и алгебре общеобразовательной школы. Среди них:

- «Математика 5 класс. Часть 1» – Г.В. Дорофеев, Л.Г. Петерсон [7].
- «Математика. 5 класс» – Н.Я. Виленкин, В.И. Жохов [2].
- «Математика. 6 класс» – И.И. Зубарева, А.Г. Мордкович [12].
- «Дополнительные главы по курсу математики. Учебное пособие по факультативному курсу для учащихся 7-8 классов» – К.П. Сикорский [29].
- «Алгебра. Углубленное изучение. 8 класс» – А.Г. Мордкович [22].
- «Алгебра. 8 класс: Учебник для школы и классов с углубленным изучением математики» – Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк [17].

Как было установлено, в целом, тема «Элементы теории делимости» подробно изучается в курсе математики для 5-6 классов, однако также встречается в учебниках для углубленного курса математики и алгебры, в которых помимо расширенной теории представлены комплексные системы задач различных уровней сложности.

3. Выделены основные понятия и особенности обучения теме «Элементы теории делимости» в классах начальной, общеобразовательной школы, а также в классах с математическим уклоном: определение делимости, свойства делимости, простые и составные числа, наибольший общий делитель, наименьшее общее кратное и т.п.

ГЛАВА II. МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ОБУЧЕНИЮ ТЕМЕ «ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ДЕЛИМОСТИ» В КУРСЕ АЛГЕБРЫ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ

§4. Методические рекомендации по обучению теме «Элементы теории делимости» в школьном курсе математики

4.1. Определение делимости чисел

Первое знакомство школьников с операцией деления имеет место еще в начальной школе. После изучения базовых арифметических операций сложения и вычитания, а также умножения (как краткой формой записи повторяющегося сложения), они знакомятся с последней, и наиболее сложной операцией «деление». В начальных классах учащимся важно показать, что деление математически обратно умножению. Делается это с помощью простейших задач, в которых требуется, например, разделить какое-то количество предметов между двумя и более людьми, причем поровну. Следует отметить, что все задачи начальных классов рассматривают только деление поровну, то есть нацело. Не лишним будет ввести понятие «натуральные числа» (на данном этапе они единственные рассматриваемые) – числа, которые мы используем при счете всех объектов. Число 0 встречается в примерах и задачах, однако уже здесь важно отметить, что его мы при счете не используем, и начинаем сразу с единицы [23].

В более старших классах, при введении отрицательных чисел, важно запомнить, что они есть противоположные натуральным числам, и что их деление также обратно их умножению (например, делению -5 : (-5) = 1 будет обратна операция умножения 1 · (-5) = -5).

В 5-6 классах при знакомстве с дробями важно донести ученикам, что операция деления представима в виде обыкновенной дроби (и положительной, и отрицательной), то есть, например, записи $a : b$ и $\frac{a}{b}$

равносильны. В начале изучения темы «Обыкновенные дроби» следует выделить достаточно времени на изучение целых и дробных чисел. Очень важно объяснить, что ранее рассматриваемые натуральные числа, и им противоположные (отрицательные) есть числа целые, и даже их можно представить в виде дроби, разделив на единицу: 2 = $\frac{2}{1}$ или -4 = $\frac{-4}{1}$. Здесь мы и введем понятие «множество рациональных чисел», то есть дробных чисел вида $\frac{a}{b}$, где a – любое целое положительное или отрицательное, а b – любое натуральное число.

Параллельно с этим можно вводить понятие «множество целых чисел», состоящее из всех натуральных чисел, им противоположных и нуля.

Ноль обязательно входит во множество целых чисел, так как он **всегда** является результатом сложения любого натурально числа a со своим противоположным числом -a. Более подробно числовые множества рассматриваются в курсе алгебры 7 класса средней школы.

Итак, очевидно, что результат от суммы, разности или произведения двух целых чисел также будет целым числом. Однако при делении можно и не получить целого числа.

Целое число a делится на целое число b, если существует такое целое число c, что $a = b \cdot c$. Иначе говоря, a делится на b, если результатом их деления также является целое число.

$$a : b = c$$

Здесь делимое a называется *кратным* b, b называется *делителем* a, и результат деления a на b – *частным* c.

Сразу после введения этого определения делимости учащимся следует задать такие вопросы как: «почему 16 ⁝ 4?» и «почему 16 не делится на 5?»

Используя введенное определение делимости, учащиеся ответят, что в первом случае делимость выполнима, так как существует такое целое число 4, что 4 · 4 = 16, а во втором случае делимость невыполнима, так как не существует такого целого c, чтобы выполнялось равенство $5c = 16$.

Следует обратить внимание на то, что в определении делимости акцентируется внимание на том, что существует такое число $c \in \mathbf{Z}$, что $a = bc$, но о его единственности ничего не сказано.

Таким образом, при использовании определения делимости достаточно показать, что существует хотя бы один, объект с указанным свойством, а привычный и очевидный нам факт единственности подлежит строгому доказательству. И именно единственность частного позволяет ввести обозначение $a : b$ [9].

4.2. Свойства делимости суммы, разности и произведения чисел

Целью изучения этого пункта является ознакомление с простейшими свойствами делимости чисел, а непосредственная задача педагога – это подготовить учащихся к доказательству делимости суммы, разности и произведения.

В результате изучения материла слабые ученики должны знать формулировки и уметь применять эти свойства при выполнении заданий, а сильные ученики должны уметь их доказывать, опираясь на определение делимости чисел [24].

Все свойства делимости (так же как и само определение делимости) учащимся уже должны быть известны. Так, свойство «Если $a \neq 0$, то $a \vdots a$» фактически является следствием из умножения числа a на единицу, а свойство «Если $b \neq 0$, то $0 \vdots b$» просто показывает возможность деления нуля на любое число b, отличное от нуля ($0 \vdots b = 0$ так как $0 \cdot b = 0$), объясняемое еще в 3-ем классе начальной школы. Вся новизна материала заключается только в том, что все эти и последующие свойства делимости строго доказываются.

При объяснении этих свойств, критически важно демонстрировать их на конкретных примерах, а также применять в решении школьных задач.

В учебнике Г.К. Муравина [25] для 6 класса, в одном из заданий в качестве теоремы указано следующее:

«Если n делится на d, а d, в свою очередь, делится на c, то n тоже делится на c» [25, С. 58].

Это – одно из свойств делимости, которое называется *транзитивность*: если $n \vdots d$ и $d \vdots c$, то $n \vdots c$.

Для этого свойства, следует сделать запись на доске: «$12 \vdots 6$ и $6 \vdots 3 \Rightarrow 12 \vdots 3$»

Также делимость обладает такими свойствами как:

рефлексивность, то есть любое целое число делится само на себя: $a \vdots a$,

антисимметричность, $a \vdots b$ и $b \vdots a$, то либо $a = b$, либо $a = -b$.

Например, числа a и b одинаково делятся друг на друга без остатка, только если $a = b = \pm 5$ или $a = 5$, $b = -5$ ($a = -5$, $b = 5$).

Свойство делимости суммы натуральных чисел. Если каждое слагаемое делится на некоторое число, то и вся сумма делится на это число [12, С. 172].

Если $a \vdots b$ *и* $c \vdots b$, *то* $(a + c) \vdots b$.

Например, $8 \vdots 4$, $24 \vdots 4 \Rightarrow (8 + 24) \vdots 4$.

Если в сумме целых чисел все слагаемые, кроме одного, делятся на некоторое число, то сумма не делится на это число [18, с. 36].

Например, $4 \vdots 2$, $6 \vdots 2$, 7 не делится на 2 $\Rightarrow$ сумма $(4 + 6 + 7)$ не делится на 2.

Свойство делимости разности натуральных чисел. Если и уменьшаемое, и вычитаемое делятся на некоторое число, то и разность делится на это число.

Если $a \vdots b$ *и* $c \vdots b$, *то* $(a - c) \vdots b$.

Например, $27 \vdots 3$, $15 \vdots 3 \Rightarrow (27 - 15) \vdots 3$.

Свойство делимости произведения натуральных чисел

Если хотя бы один из множителей делится на некоторое число, то и произведение делится на это число.

Если $a \vdots b$ *или* $c \vdots b$, *то* $(a \cdot c) \vdots b$.

Например, $10 \vdots 5$, а $4 \vdots 5 \Rightarrow (10 \cdot 4) \vdots 5$.

Результатом изучения этой темы должно стать умение учащихся пользоваться свойствами делимости чисел; также они должны уметь применять свойства делимости суммы, разности и произведения при решении различных задач.

В этом пункте продолжается дальнейшее рассмотрение свойств делимости, которые применяются при решении разнообразных задач. Некоторые из этих задач уже рассматривались в курсе 7 класса, например, задачи на доказательство в пункте 22 «Вычисления. Доказательство тождеств» в учебнике Ю.Н. Макарычева [16, С. 135]. Но, стоит заметить, что в 7 классе решение этих задач опиралось на интуитивные представления учащихся о делимости чисел, без строгих определений и знаний свойств делимости. Возвращаясь к этим задачам в 8 классе, учащиеся уже осознанно применяют свойства делимости. Кроме того, ряд задач носит принципиально новый характер [30].

При объяснении свойств нужно снова напомнить учащимся, то на множестве целых чисел определены операции сложения, вычитания и умножения, то есть сумма, разность и произведение любых целых чисел также является целым числом.

После доказательства каждого из свойств, не лишним будет задать учащимся конкретные вопросы, которые будут побуждать их к использованию свойств делимости. Например, «Что можно сказать о делимости на 11 числа (121 + 33)?» или «Почему сумма (125 + 525 + 23) не делится на 5?» и т.д. Обязательно нужно обратить внимание учеников на то, что обратное свойству делимости суммы утверждение *не верно*, так как не верно, что если $(a + c) \vdots b$, то $a \vdots b$ и $c \vdots b$. Для доказательства этого достаточно привести один контрпример.

В учебнике Ю.Н. Макарычева за 8 класс свойство делимости разности чисел a и b доказывается через представления разности через сумму $a + (-b)$ [18, С. 36], то есть имеется в виду если $b \vdots c$, то и $-b \vdots c$. Однако учащимся можно показать и более продвинутое доказательство.

Доказательство. Если $a \vdots c$, то существует такое целое число k, что $a = ck$. Если $b \vdots c$, то существует такое целое число l, что $b = cl$.

Тогда $a - b = ck - cl = c(k - l)$, где $(k - l)$ - целое число (как разность двух целых чисел).

И по определению делимости чисел получаем, что $(a - b) \vdots c$ [30].

Свойства делимости суммы и разности схожи по содержанию и доказательству, поэтому их часто формируют в одно свойство делимости: если $a \vdots b$ и $c \vdots b$, то $(a \pm c) \vdots b$. В некоторых случаях это свойство может пригодится при решении задач следующего типа: известно что $a \vdots c$, требуется доказать, что $b \vdots c$. В этом случае доказывается, что $(a + b) \vdots c$ или $(a - b) \vdots c$, после чего делается вывод о том, что b делится на c.

В доказательстве свойства о неделимости суммы целых чисел применяется *метод от противного.* Рекомендуется точно определить что дано, а что требуется доказать, после чего сформулировать противоположное утверждение.

Дано: $a \vdots d$, $b \vdots d$, c не делится на d.

Доказать: сумма чисел $(a + b + c)$ не делится на d.

Доказательство. Предположим, что $(a + b + c) \vdots d$. Так как $a \vdots d$ и $b \vdots d$, то по свойству делимости суммы получим $(a + b) \vdots d$. Так как по допущению $(a + b + c) \vdots d$ и $(a + b) \vdots d$, то разность этих чисел (по свойству делимости разности) также делится на d, то есть $[(a + b + c) - (a + b)] \vdots d$, то есть $c \vdots d$.

Но утверждение $c \vdots d$, противоречит условию. Следовательно, допущение не верно, а верно то, что сумма $(a + b + c)$ не делится на d, что и требовалось доказать [30].

4.3. Деление с остатком

Если же деление целых чисел не выполняется «нацело», то имеет место деление «с остатком». Деление с остатком удобнее представить учащимся теоремой.

Теорема 1.

Для любого целого числа a и натурального числа b существует единственная пара целых чисел q и r таких, что выполняются два условия:

$a = bq + r$ и $0 \le r < b$ [18, С. 47]. Число q есть *неполное частное*, а r – *остаток* от деления a на b.

Обязательное условие: $0 \le r < b$ означает, что остаток должен быть натуральным числом и меньше делителя.

Так как в школьном курсе математики множество натуральных чисел изучается значительно раньше, чем множество целых чисел, сначала не рассматривается тот случай деления, при котором делимое меньше делителя (то есть не изучается деление меньшего числа на большее), так как при этом неполным частным будет ноль, который не является натуральным числом.

Учащимся из курса математики 5-6 класса известно деление натуральных чисел с остатком. Именно это деление и лежало в основе выделения целой части из неправильной дроби. Обобщение понятия деления натуральных чисел с остатком до понятия деления целого числа на натуральное – и есть цель данного пункта. Кроме того, в пункте показывается, что представление числа a в виде $a = b \cdot q + r$ единственно. Поскольку доказательство этого утверждения излишне сложно для учащихся 8 класса, авторы учебника ограничились лишь геометрической иллюстрацией к этому доказательству [18, С. 48].

Деление с остатком используется в решении задач нахождения наибольшего общего делителя двух натуральных чисел.

Речь идет об алгоритме Евклида, основанном на том, что если

$a = bq + r$, то НОД(a; b) = НОД(b; r).

Объяснение материала можно начать с уже известного учащимся материала. Например, если 67 разделить на 5 в столбик, то в частном получится 13, а в остатке будет 2. Это записывается как: 67 : 5 = 13 (ост. 2).

Запись 67 : 5 = 13 (ост. 2) можно заменить другой записью, принятой в математике: $67 - 2 = 13 \cdot 5$ или $67 = 13 \cdot 5 + 2$. Итак, остатком от деления целого числа a на натуральное число b является такое целое число r, что $(a - r) \vdots b$ и $0 \le r < b$ (т.е. остаток не превосходит делителя). В случае если a кратно b, то считают, что остаток равен нулю. Поэтому следует обратить внимание учащихся, что выражения «делится», «делится нацело» и «делится с нулевым остатком» считаются одинаковыми.

Стоит также указать на то, что меньшее натуральное число всегда можно разделить с остатком на большее.

Если a и b – натуральные числа, причем, $a < b$, то в равенстве $a = b \cdot 0 + a$ число 0 является неполным частным, а само число a - остатком. При этом равенство $0 \leq r < b$ выполнено по условию. Например, $4 : 9 = 0$ (ост. 4), то есть $4 = 9 \cdot 0 + 4$.

Далее с учащимися рассматривается *теорема о делении с остатком*: для любого целого числа a и натурального числа b существует единственная пара целых чисел q и r, таких, что $a = bq + r$, где $0 \leq r < b$.

Алгоритм деления уголком убеждает нас в том, что натуральное число всегда можно разделить с остатком на натуральное число. Кроме того, остаток и неполное частное определяются однозначно - не может получиться ни двух разных остатков, ни различных неполных частных. Существование частного и остатка следует из самого алгоритма деления уголком: когда «кончится» делимое a, «внизу» получится «остаток», а «под уголком» – неполное частное. На этом основано аналитическое доказательство существования частного и остатка [30, С. 52].

4.4. Признаки делимости

В школьном курсе математики тему «Признаки делимости натуральных чисел» учащиеся проходят в 6-ом классе, когда они уже умеют делить натуральные числа и хорошо владеют понятием «кратность».

В результате изучения материала учащиеся должны уметь формулировать признаки делимости натуральных чисел и применять их в действиях с обыкновенными дробями. Сильные ученики должны уметь обосновывать признаки делимости на конкретных примерах.

Признаки делимости – это алгоритмы, позволяющие определить, является ли одно число кратным другому. Они были введены, в первую очередь, чтобы облегчить учащимся процесс нахождения кратных чисел, что требовало больших затрат времени, если приходилось работать с большими числами. В учебниках Н.Я. Виленкина [3] и Г.К. Муравина рассматриваются только признаки делимости чисел на 2, 5,10, 3 и на 9 (у Муравина также есть признак делимости на 4 и на 6).

Остальные признаки делимости не рассматривались ввиду своей сложности относительно других.

Некоторые признаки делимости:

1. Если запись натурального числа оканчивается четной цифрой, то это число четно (делится без остатка на 2), а если запись числа оканчивается нечетной цифрой, то это число нечетно [3].

2. Число N делится на 4, если двузначное число, образованное цифрами из разрядов единиц и десятков числа N, делится на 4, и наоборот [35].

3. Если запись натурального числа оканчивается цифрой 0 или 5, то это число делится без остатка на 5. Если же запись числа оканчивается иной цифрой, то число без остатка на 5 не делится.

4. На 9 делятся те, и только те числа, сумма цифр которых кратна 9 [25, С. 71].

При объяснении темы «Признаки делимости» учащихся следует подвести к тому, чтобы цель занятия они сформулировали самостоятельно. Например, на доске можно записать числа 100, 350, 2040, 3350 и т. д. Используя наводящие вопросы, можно побудить учеников заметить некоторые закономерности (например, что запись чисел оканчивается нулем), строить гипотезы и обобщать ранее изученный материал (всякое натуральное число, что оканчивается цифрой 0, делится без остатка на десять).

Для того чтобы у учащихся сложилось целостное представление об изучаемой теме, имеет смысл задавать им вопросы о практическом значении изучаемой темы (данная тема поможет без долгих вычислений быстро определить, является ли число кратным заданному) [1, С. 18].

Таким образом, учащиеся самостоятельно формулируют тему и цель урока (признак делимости на 10. Познакомиться с признаком делимости на 10, исследовать числа и сформулировать признаки делимости на другие числа). Далее можно подталкивать учеников к самостоятельному анализу признаков делимости.

Как было установлено, записанные ранее на доске числа нацело делятся на 10. С помощью наводящих вопросов учителя, учащиеся вспоминают все делители числа 10, и приходят к выводу, что эти числа делятся также и на 2, и на 5. Учителем приводятся примеры чисел, делящихся на 2, но не делящихся на 5 и 10, а также делящихся на 5, но не делящихся на 2 и 10. Таким образом, учащиеся самостоятельно отмечают взаимосвязи межу числами, их свойствами и признаками, при этом развивая свое аналитическое мышление. Таким образом, можно объяснить сразу три признака делимости за один урок, и по такой же методике и некоторые другие признаки, например на 3 и на 9 [1].

4.5. Простые и составные числа

Тема «Простые и составные числа» встречается в школьных учебниках по математике за 6 класс и идет сразу же после признаков делимости и до темы «Наибольший общий делитель» (у Г.К. Муравина [25] – после темы «НОД»).

В этом пункте изучаются понятия простого и составного чисел, формируются умения раскладывать натуральные числа на простые множители, что является базисом к последующему изучению тем «Наибольший общий делитель» и «Наименьшее общее кратное».

Натуральное число является *простым*, если оно больше 1 и не делится ни на какое натуральное число, кроме 1 и самого себя [32].

Примерами простых чисел являются 2, 3, 5, 7, 11, 13, … .

Составное число – это натуральное число, которое больше 1, и при этом, не являющееся простым. Всякое составное число представимо в виде произведения двух натуральных чисел, каждое из которых больше 1 (например, **4** = 2 · 2, **6** = 2 · 3, **8** = 4 · 2, **9** = 3 · 3, **10** = 2 · 5, …).

Как видно из этих определений, число 1 не является ни простым, ни составным, так как оно имеет только один делитель – само это число [3, С. 17].

Если представить 1 как произведение 1 = 1 · 1, то это будет противоречить Основной теореме арифметики, а точнее ее критерию единственности разложения на множители (каждое натуральное число представимо в виде произведения простых сомножителей, причем эти сомножители должны быть различны) [29].

Разложение определенного числа на простые множители производится учащимися вручную, в столбик, где в левой части записываются результаты последовательного деления этого числа на простые делители, которые записываются в правой части. Первым простым сомножителем всегда должен быть *наименьший* делитель числа. Операция разложения на простые множители используется и в дальнейших темах, таких как «НОД» и «НОК».

4.6. Наибольший общий делитель. Взаимно простые числа

Основными задачами учащихся при изучении данной темы являются:

- практика и совершенствование использования алгоритма нахождения НОД двух чисел путем их разложения на простые множители;

- формирование способностей к корректировке допущенных ошибок;

- ознакомление с *алгоритмом Евклида* (в качестве второго способа нахождения НОД двух положительных целых чисел).

Наибольшим общим делителем (НОД) двух чисел a и b называется такое наибольшее натуральное число, на которое нацело делится как число a, так и число b.

Алгоритм нахождения НОД двух натуральных чисел [12, С. 199]:

1) разложить данные числа на простые множители;

2) выписать все простые числа, которые одновременно входят в каждое из полученных разложений;

3) каждое из выписанных простых чисел взять с наименьшим из показателей степени, с которыми оно входит в разложения данных чисел;

4) записать произведение полученных степеней.

Пример 5. Найти НОД (11 088; 13 068).

Решение. $11\,088 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 7^1 \cdot 11^1$; $13\,068 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 11^2$.

Из этих разложений числа с наименьшими показателями степени это 2^2, 3^2 и 11^1. Поэтому НОД $(11\,088; 13\,068) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 11 = 396$.

Таким же способом находится НОД трех и более натуральных чисел.

Отыскание НОД двух натуральных чисел путем разложения их на простые множители несложно сделать, если эти числа невелики. Однако для ряда многозначных чисел найти их канонические разложения на простые множители бывает трудно. Поэтому существует способ отыскания НОД, требующий лишь выполнения последовательного деления с остатком. Этот способ предложил Евклид, и его называют *алгоритмом Евклида* [20, С. 6].

В рассмотренных нами учебниках для 6 и 7 классов алгоритм Евклида не рассматривается (за исключением учебника Г.К. Муравина для 6 класса) – НОД находится только путем разложения на простые множители, однако этот метод нужно рассматривать с классами с углубленным изучением математики.

Нахождение НОД двух чисел a и b с *помощью алгоритма Евклида:*

1) производится деление «уголком» большего числа на меньшее (предположим, что $a > b$);

2) если остаток от деления a на b оказался не равен нулю, то выполняется последующее деление, где делимым выступает b, а делителем выступает остаток r (если числа разделились нацело, то число b является наибольшим общим делителем чисел a и b);

3) следует аналогично выполнять дальнейшее деление до тех пор, пока остаток r_n не будет равен нулю. Тогда НОД исходных чисел a и b будет последний остаток от деления, не равный нулю.

Например, найти НОД (64; 48) с помощью алгоритма Евклида.

$$\begin{array}{r|l} -64 & 48 \\ \underline{48} & 1 \\ -48\ \ & 16 \\ \underline{48}\ \ & 3 \\ 0\ \ \ \ & \end{array}$$

НОД (64; 48) = 16 (последний отличный от нуля остаток).

Если у двух натуральных чисел a и b НОД равен единице, то такие числа называются *взаимно простыми* числами.

Пример 6. НОД (30; 19) = ?

Решение. 30 = $\underline{1}$ · 2 · 3 · 5, 19 = 19 · $\underline{1}$

НОД (30; 19) = 1 ⇒ 30 и 19 – взаимно простые числа.

Теорема о делимости взаимно простых чисел. Если число n делится на каждое из двух взаимно простых чисел a и b, то оно делится и на их произведение $a \cdot b$ [29, С. 24].

4.7. Наименьшее общее кратное

Наименьшим общим кратным (НОК) двух чисел a и b называется наименьшее натуральное число, которое кратно и a, и b.

Алгоритм нахождения НОК двух натуральных чисел [12, С. 205]:

1) разложить данные числа на простые множители;

2) выписать все простые числа, которые входят хотя бы в одно из полученных разложений;

3) каждое из выписанных простых чисел взять с наибольшим из показателей степени, с которыми оно входит в разложения данных чисел.

4) записать произведение полученных степеней.

Пример 7. Найти НОК (1470; 588).

Решение. $1470 = 2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^1 \cdot 7^2$, $588 = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 7^2$.

В этих разложениях числа с наибольшими показателями степени это 2^2, 3^1, 5^1 и 7^2, поэтому НОК (1470; 588) = $2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^1 \cdot 7^2 = 2940$.

Однако такому алгоритму может предшествовать и более простой метод нахождения наименьшего общего кратного.

В своем учебнике для 6 класса [25], Г.К. Муравин представляет учащимся НОК как общий знаменатель двух различных обыкновенных дробей.

Благодаря такому подходу, можно вывести следствие, что наименьшее общее кратное двух взаимно простых чисел равно их *произведению*.

Например, НОК (11; 13) = 11 · 13 = 143.

Теорема 2.

Произведение двух любых натуральных чисел a и b равно произведению их НОД и НОК: $a \cdot b$ = НОД (a; b) · НОК (a; b).

Это тождество позволяет учащимся найти наименьшее общее кратное двух положительных чисел, взяв произведение двух целых чисел и разделив его на их наибольший общих делитель [34].

Доказательство этой теоремы не предоставляется в обычных школьных учебниках ввиду своей сложности для учащихся 6 класса, поэтому возьмем его из книги «Дополнительные главы по курсу математики для 7-8 классов» [29, С. 42].

Доказательство. Обозначим НОД (a; b) через d: $d = (a, b)$.

Тогда $a = kd$, $b = ld$, где k и l – взаимно простые числа. Пусть теперь n – некоторое общее кратное чисел a и b. Так как n делится на a и на b, то $n = ua$ и $n = vb$, где u, v – некоторые натуральные числа. Таким образом, $n = ukd$, $n = vld$, откуда находим: $\frac{n}{d} = uk$, $\frac{n}{d} = vk$.

Мы видим, что $\frac{n}{d}$ есть натуральное число, делящееся на k и на l. Так как k и l взаимно просты, то по теореме о делимости взаимно простых чисел, число $\frac{n}{d}$ делится на произведение kl, то есть $\frac{n}{d} = ckl$, где c – некоторое натуральное число. Освобождаясь от знаменателя, получаем $n = ckld$.

Итак, любое натуральное число u, являющееся общим кратным чисел a и b, имеет вид $n = ckld$, где c – некоторое натуральное число.

Так как $c \geq 1$, то любое общее кратное n чисел a и b удовлетворяет неравенству $n \geq kld$. Но число kld само является общим кратным чисел a и b.

В самом деле, $kld = l \cdot kd = la$, то есть kld делится на a; точно так же $kld = k \cdot ld = kb$, то есть kld делится на b. Мы видим, что kld является наименьшим общим кратным чисел a и b: $[a, b] = kld$.

Умножив это равенство на число $(a, b) = d$, мы получаем:

$$[a, b] \cdot (a, b) = kld \cdot d = kd \cdot ld = ab.$$

Теорема доказана.

Следствие 1 из теоремы о произведении НОД на НОК [29]:

Наименьшее общее кратное двух натуральных чисел a, b можно находить по формуле

$$\text{НОК}\ (a; b) = \frac{a \cdot b}{\text{НОД}(a; b)}.$$

Следствие 2. Пусть, a и b – два натуральных числа и n_0 – их наименьшее общее кратное. Натуральное число n в том и только в том случае является общим кратным чисел a и b, если оно является кратным числа n_0.

В самом деле, как видно при доказательстве теоремы, $n = ckld$, где c – натуральное число. Но $n_0 = \text{НОК}\ (a; b) = kld$. Значит, $n = cn_0$, то есть n является кратным числа n_0.

§5. Разработка элективного курса для учащихся 8 класса

5.1.Цели и задачи элективного курса

Программа по математике для классов с углубленным изучением математики предполагает проведение обязательных курсов по выбору обучаемых – элективных курсов [6].

Курс по выбору «Делимость чисел» ориентирован на учащихся 8 классов с углубленным изучением математики, показавших на уроках алгебры хорошую успеваемость, и проявляющих интерес к расширенному изучению учебного материала по теме «Элементы теории делимости».

Частью программы элективного курса является повторение ранее изученного материала по данной теме, а также ознакомление с темами, не подлежащими обязательному изучению в курсе основной школы.

Цели данного элективного курса:

1. Развитие математических и аналитических способностей учащихся;

2. Развитие навыков самостоятельной работы учащихся;

3. Помощь в овладении специальными техническими умениями для достижения поставленных элективным курсом задач.

Задачи элективного курса:

1. Обеспечить усвоение понятий различных элементов теории делимости, таких как делимость чисел, деление целого числа с остатком, НОД, НОК, простые число и составные числа, сравнимость чисел по модулю.

2. Научить учащихся применять полученные знания для решения задач.

3. Научить учащихся самостоятельной работе с научным текстом.

4. Поспособствовать развитию образного, логического и ассоциативного мышления учащихся.

5.2. Общая характеристика курса

Задачи элементарной теории чисел имеют значительный образовательный и развивающий потенциал. При этом они доступны учащимся начиная с 5 и по 11 класс. Так, задачи на делимость могут быть использованы как средство развития логического и математического мышления. Большинство из них не решается по известным алгоритмам. Их решение включает выдвижение гипотез и их проверку, применение аналитико-синтетических поисковых схем. Например, для решения задачи: «Найдите все натуральные числа n такие, что для любых взаимно простых делителей a и b числа n число $a + b - 1$ также является делителем числа n» необходимо выдвинуть гипотезу: «решением будут натуральные числа n, являющиеся степенью простого числа, и число 12» и доказать ее методом от противного [4].

При решении задач элементарной теории чисел применяются разнообразные математические методы. В частности, некоторые задачи можно решить несколькими способами. Среди таких задач для учителя математики особенно значимы задачи, представленные в школьных учебниках. В зависимости от темы изучения они могут быть решены разными способами. Именно поэтому важнейшим показателем предметной компетентности учителя математики является владение различными способами решения задач [4, С. 86].

Чтобы учитель математики мог организовать работу по изучению элементов теории чисел в курсе математики средней школы, а также организовать внеклассную работу на этом содержании для учащихся, интересующихся математикой, он должен быть готов решать соответствующие предметные задачи, в том числе повышенного уровня сложности [5].

Так как в школьной программе 8 класса по алгебре сама теория делимости практически не рассматривается, а рассматриваются только ее элементы (в начале учебного года изучается деление дробей, далее – деление многочленов и разложение многочленов на множители), то целесообразно создать элективный курс, посвященный этой теме.

Кроме этого, решение задач элементарной теории чисел предполагает хорошее владение формальным математическим языком. В ходе их решения требуется постоянное перекодирование информации с математического на естественный язык и обратно.

Внедрение этого элективного курса по выбору в учебную программу можно подать как повторение всего ранее изученного, либо представить его как возможность ознакомится с задачами на тему «Теория делимости» из программы ЕГЭ. Ведь в последние годы на ЕГЭ регулярно предлагаются задачи на целочисленность. Абсолютное большинство задач уровня С7 посвящены указанной тематике. Эти задачи очень интересные, развивающие, требующие, с одной стороны, как сообразительности, так и фундаментальных знаний, с другой – делимость чисел учащиеся изучают в 5-6 классах, естественно на детском уровне, а задачи С7 – олимпиадные или полуолимпиадные [10].

5.3. Место элективного курса в учебном плане

На изучение элективного курса «Делимость чисел» отводится не менее 17 часов из расчета 1ч в неделю. Уроки проводятся в форме лекций занятий и практикумов по решению задач.

Заключительный урок отведен на проведение контрольной работы, итоги которой покажут уровень усвоения учащимися содержания всего элективного курса. Критерии оценки контрольных работ следующие:

- для оценки «3» необходимо правильно решить как минимум 3 задания из номеров 1-4;

- для оценки «4» необходимо решить 4 первых задания и как минимум одно из заданий 5-6 (на доказательство);

- для оценки «5» необходимо решить первые 6 шесть заданий и хотя бы задание 7.

Задачи 1-4 взяты из пособия «Дидактические материалы по алгебре для 8 класса с углубленным изучением математики [19, С. 12 – 15]».

Задачи 5-6 взяты из статьи «Индукция. Метод математической индукции и его эквиваленты [14, С. 20 – 21]».

Задачи 7-8 взяты из открытого банка заданий ЕГЭ.

В *приложениях* представлены учебно-тематический план элективного курса (*Приложение 1*), содержание тем элективного курса «Делимость чисел» для учащихся 8 класса (*Приложение 2*), а также примерные задания для контрольной работы по итогам этого курса (*Приложение 3*).

§6. Примеры задач школьного курса с решениями

6.1. Система задач для 5-6 классов

В рассмотренных учебниках знакомство учащихся с новым материалом осуществляется в большинстве случаев через систему заданий. В процессе их выполнения учащиеся получают возможность самостоятельно или с минимальной помощью учителя познакомиться с новым свойством, сформулировать правило или ввести новый термин.

При решении задач этого курса, учащиеся должны научиться употреблять термин «делитель» не в привычном для них смысле одного из компонентов деления, а в связи с возможностью деления числа нацело в связке «делитель-кратное» [24] и деления числа с остатком в связке «делитель и неполное частное-кратное». Кроме того, понятия НОД и НОК применяются учащимися при решении задач на сокращение дробей и на их приведение к общему знаменателю.

Задачи 1-3 взяты из книги «Математика. 5 класс» за авторством Н.Я. Виленкина, В.И. Жохова и др. [2, С. 83 – 90].

Задача 1. На изготовление одной детали робот тратит 2 мин 15 с. Сколько таких деталей он может изготовить за 9 суток непрерывной работы?

Решение. Представим время, необходимое для создания одной детали в секундах: 2 мин 15 с = $2 \cdot 60 + 15 = 135$ с. Теперь также представим 9 суток в секундах: $9 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 = 777\ 600$ с. Наконец, разделим это время на время, затрачиваемое для создания одной детали:

$777\ 600 : 135 = 5760$

Ответ: за 9 суток робот создаст 5760 деталей.

Задача 2. По железной дороге нужно перевезти 750 т зерна. Сколько для этого потребуется вагонов, вмещающих каждый по 60 т зерна? В скольких вагонах, вмещающих по 40 т, можно перевезти это же зерно?

Решение. Разделим общее количество зерна на вместительность одного вагона (60 т):

1) 750 : 60 = 12 (ост 30) – потребуется 12 вагонов вместимостью 60 т, и один дополнительный вагон для перевозки оставшихся 30 т зерна;

2) 750 : 40 = 18 (ост 30) – аналогично.

Ответ: для перевозки 750 т зерна в первом случает потребуется 13 вагонов, во втором – 19 вагонов.

Задача 3. Найдите делимое, если неполное частное 25, делитель 8, остаток 5.

Решение: Деление чисел a и b с остатком представимо в виде $a = b \cdot c + r$, где a – делимое, b – делитель, c – неполное частное, r – остаток от деления. Поэтому $a = 8 \cdot 25 + 5 = 205$.

Ответ: делимое равно 205.

Задачи 4-11 и вопросы взяты из книги «Математика. 6 класс» за авторством Г.К. Муравина [25, С. 59 – 86].

Задача 4. Придумайте пример, который опровергает утверждение:

1) Если произведение двух натуральных чисел делится на некоторое число, то хотя бы одно из них делится на это число.

Решение. 2 · 3 = 6. По свойству рефлексивности, произведение 6 можно поделить само на себя (6 : 6 = 1). Но ни 2, ни 3 не делятся на 6 без остатка;

2) Если ни одно из двух натуральных чисел не делится на некоторое число, то и их произведение не делится на это число.

Решение. 4·15 = 60. 4 и 15 не делятся на 6, но их произведение 60 делится.

Задача 5. Подберите пример, опровергающий следующее утверждение:

1) Если ни уменьшаемое, ни вычитаемое не делятся на некоторое число, то и разность на это число не делится.

Решение. 17 - 7 = 10 (17 и 7 не делятся на 10, но их разность делится);

2) Если разность двух чисел делится на некоторое число, то и уменьшаемое, и вычитаемое делятся на это число.

Решение. 15 - 3 = 12 (12 делится на 2, но 15 и 3 – нет).

Задача 6. Докажите, что числа 67 925, 67 064, 46 521 являются составными.

Доказательство.

1) 67 925 – так как у этого числа в разряде единиц стоит цифра 5, это означает, что оно делится на 5. Так как любое натуральное число делится на 1 и на само себя, можно утверждать, что у числа 67 925 как минимум три делителя. Число составное;

2) 67 064 – так как у этого числа в разряде единиц стоит четная цифра 4, это означает, что число делится на 2. Как минимум у числа 67 064 три делителя – 1, 2, 67 064, а, значит, оно составное;

3) 46 521 – сумма цифр этого числа равна 4 + 6 + 5 + 2 + 1 = 18. Число 18 кратно 3, а, значит, 3 является одним из делителей числа 46 521. Два других делителя – 1 и оно само.

Задача 7. Найдите:

1) НОК (a; b), если НОД (a; b) = 10, $a \cdot b = 300$.

Решение. Подставляя известные значения, в формулу, найденную в параграфе «Взаимно простые числа», можно легко найти НОК, НОД или произведение $a \cdot b$.

$a \cdot b$ = НОД (a; b) · НОК (a; b)

300 = 10 · НОК (a; b)

НОК (a; b) = 30;

2) НОД (a; b), если НОК (a; b) = 420, $a \cdot b = 5040$.

5040 = НОД (a; b) · 420

НОД (a; b) = 12.

Вопрос 1. В вазе лежит 30 конфет. Сколько конфет нужно добавить, чтобы 7 мальчиков смогли разделить их поровну между собой?

Ответ: нужно добавить 40 конфет – (30 + 40) : 7 = 10.

Вопрос 2. Какое число является делителем всех натуральных чисел?

Ответ: 1.

Вопрос 3. У какого числа меньше всего делителей?

Ответ: у числа 1. Его единственным делителем будет оно само.

Вопрос 4. Может ли число иметь только 2 делителя?

Ответ: у всех простых чисел только 2 делителя.

Вопрос 5. Может ли делитель какого-либо натурального числа быть большего этого числа?

Ответ: нет, не может.

Вопрос 6. Почему равенство $m = 2n$ называют формулой четного числа?

Ответ: потому что равенство обязывает какое-либо число умножить на 2, что будет делать его четным, так как оно будет делиться на 2.

Например, $n = 5$. 5 – простое число, не делящееся на 2. Подставив его в формулу, получаем: $m = 2 \cdot 5 = 10$. $10 \vdots 2$, значит число 10 – четное.

Задача 8. Найдите наименьшее трехзначное число, кратное числу 54.

Ответ: 108.

Задача 9. Найдите наибольший двузначный делитель числа 100.

Ответ: 50.

Задача 10. С конечной остановки по разным маршрутам отправляются одновременно два автобуса. Первый возвращается каждые 40 мин, а второй – каждые 60 мин. Через какое наименьшее время они окажутся вместе на конечной остановке?

Решение: требуется найти НОК (40; 60). Для этого разложим на простые множители оба числа:

$40 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5$

$60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$

НОК (40; 60) = $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 3 = 120$ (мин)

Ответ: оба автобуса будут на остановке через 2 часа.

Задача 11. На склад привезли 37 пачек учебников, по 24 учебника в каждой пачке. Можно ли поровну распределить эти учебники между тремя книжными магазинами?

Решение: Нужно узнать, сколько всего учебников:

$24 \cdot 37 = 888$

По свойству делимости произведения натуральных чисел, если хотя бы один из множителей делится на некоторое число, то и произведение делится на это число. Так как 24 : 3 = 8, то 888 : 3 = 296.

Ответ: по 296 учебнику каждому магазину.

Задачи 12-15, представленные ниже, взяты из книги «Математика. 6 класс» за авторством Н.Я. Виленкина, В.И. Жохова и др. [3, С. 12 – 26]

Задача 12. Подтвердите примерами следующее свойство суммы:

1) если каждое слагаемое кратно числу a, то и сумма кратна числу a.

Пример. 2 + 4 = 6 (a = 2);

2) если только одно слагаемое суммы не кратно числу a, то сумма не кратна числу a.

Пример. 25 + 11 = 36 (a = 5).

Задача 13. Докажите, что:

1) если a кратно b, а b кратно c, то a кратно c.

Доказательство.

a = 48; b = 12; c = 4

$48 \vdots 12$ и $12 \vdots 4 \Rightarrow 48 \vdots 4 = 12$;

2) если a и b делятся на 6, то и $a + b$ делится на 6.

a = 12, b = 36

$12 : 6 = 2, 36 : 6 = 6 \Rightarrow 12 + 36 = 48 : 6 = 8.$

Задача 14. Решите задачу:

1) Я задумал число. Если его увеличить в 11 раз и результат

2) уменьшить на 2,75, то получится 85,25. Какое число я задумал?

Решение: Составим уравнение. Пусть, загаданное число – x.

$$x \cdot 11 - 2{,}75 = 85{,}25$$

$$x \cdot 11 = 85{,}25 + 2{,}75$$

$$x \cdot 11 = 88$$

$$x = 88 : 11$$

$$x = 8$$

Ответ: загаданное число – 8.

3) Я задумал число. Если его увеличить на 9,2 и результат увеличить в 11 раз, то получится 110. Какое число я задумал?

Решение:

$$(x + 9{,}2) \cdot 11 = 110$$

$$x + 9{,}2 = 110 : 11$$

$$x + 9{,}2 = 10$$

$$x = 10 - 9{,}2$$

$$x = 0{,}8$$

Ответ: загаданное число – 0,8.

Задача 15. Может ли площадь квадрата выражаться простым числом, если длина его стороны выражается натуральным числом?

Ответ: нет, не может. Площадь квадрата находится по формуле: S кв. = a^2, где a – сторона квадрата. Если взять за сторону квадрата любое число, большее 1, то по формуле придется возводить это число в квадрат, то есть умножать само на себя. К примеру, положим, что сторона квадрата равна 2 (натуральное и *простое* число). Тогда S кв. = 2 · 2 = 4. 4 – не простое число. Если принять за сторону квадрата 1, то S кв. = 1 · 1 = 1 – не простое число.

Вопрос 7. Может ли выражаться простым числом объем куба, длина ребра которого выражается натуральным числом?

Ответ: нет, не может. Известно, что объем куба вычисляется по формуле: V куб. = H^3, где H – ребро куба. Нет такого простого числа, которое бы получалось путем возведения какого угодно числа в третью степень. Например, ребро куба равно 3. По формуле, V куб. = 3^3 = 27. 27 – не простое число, так как у него целых 4 делителя: 1, 3, 9, 27.

Вопрос 8. Существует ли прямоугольник, стороны которого выражаются натуральными числами, а периметр – простым числом?

Ответ: Периметр прямоугольника: P прям. = 2 (a + b), где a и b – стороны прямоугольника. Видно, что если для нахождения периметра нужно умножить сумму сторон на 2, значит, 2 будет его третьим делителем. Значит, периметр не будет простым числом.

Вопрос 9. Известно, что число m делится на 9. Простым или составным является число m?

Ответ: если бы число m было простым, оно делилось бы только на 1 на само себя. Число 9 делится на 1 и на само себя, но также и на 3. Так как делителя три – число составное.

Вопрос 10. Ребята получили на новогодней елке одинаковые подарки. Во всех подарках вместе было 123 апельсина и 82 яблока. Сколько ребят присутствовало на елке? Сколько апельсинов и сколько яблок было в каждом подарке?

Решение: чтобы узнать, сколько детей было на елке, следует найти НОД (123; 82). $123 = \underline{3} \cdot 41$, $82 = \underline{2} \cdot 41$, НОД (123; 82) = 41 – всего было детей; 123 : 41 = 3 (ап.); 82 : 41 = 2 (ябл.);

Ответ: на елке присутствовал 41 человек; у каждого в подарке было по 3 апельсина и 2 яблока.

6.2. Система задач для 7-8 классов

Задачи 16-18, представленные ниже, взяты из книги «Алгебра. 7 класс» за авторством С.М. Никольского [27, С. 8].

Задача 16. Докажите, что 2 – единственное четное простое число.

Доказательство. Любое четное число делится на 2, то есть его можно представить в виде произведения двух сомножителей, каждый из которых не равен 1. Следовательно, число 2 является единственным четным простым числом.

Задача 17. Докажите, что найдется такое натуральное число n, для которого $n^2 - n + 41$ является составным числом.

Доказательство. Пусть, $n = 41$, тогда $n^2 - n + 41 = n^2 - 41 + 41 = n^2$. Число вида n^2 всегда является составным.

Задача 18.

а) Докажите, что одно из трех соседних нечетных чисел делится на 3.

б) Известно, что p, $p + 2$, $p + 4$ – простые числа. Найдите p. Докажите, что других p не существует.

Доказательство а). Пусть x не делится на 3. Тогда остаток от деления $x : 3$ будет равен либо 1, либо 2. В случае если *остаток 1*, тогда $x = 3k + 1$, следующее нечетное число $3k + 3$ делится на 3. В том случае, если *остаток 2*, тогда $x = 3k + 2$, следующие нечетные числа $x = 3k + 4$ и $x = 3k + 6$. Последнее делится на 3.

Доказательство б). Если р = 3, тогда 3, 5, 7 – ряд чисел.

В ряде p, $p + 2$, $p + 4$ одно из чисел обязательно делится на 3, значит, чтобы ряд состоял только из простых чисел, необходимо чтобы $p = 3$.

Задачи 19-21, представленные ниже, взяты из книги «Задачи повышенной трудности в курсе алгебры 7-9 классов» за авторством Н.П. Кострикиной [15, С. 43 – 45].

Задача 19. При делении натурального числа a на натуральное число b в частном получили c и в остатке d. Выясните, могут ли все числа a, b, c и d оказаться нечетными.

Решение: По условию задачи имеем $a = bc + d$. Предположим, что все числа a, b, c, d нечетны. Тогда число bc – нечетное число (произведение двух нечетных чисел есть число нечетное), число $bc + d$ – четное число (сумма двух нечетных чисел есть число четное). Получили, что число $a = bc + d$ есть число четное, то есть наше предположение ошибочно.

Ответ: все числа a, b, c и d оказаться нечетными не могут.

Задача 20. К некоторому двузначному числу слева и справа приписали по единице. В результате получили число, в 23 раза больше первоначального. Найдите это двузначное число.

Решение: Пусть искомое двузначное число $\overline{ab}$. По условию задачи составим уравнение: $\overline{1ab1} = 23 \cdot \overline{ab}$. Имеем $1000 + 10\overline{ab} + 1 = 23 \cdot \overline{ab}$, откуда $13 \cdot \overline{ab} = 1001$, $\overline{ab} = 77$.

Ответ: искомое двузначное число равно 77.

Задача 21. В двузначном числе зачеркнули одну цифру. Получилось число в 31 раз меньшее первоначального. Какую цифру и в каком числе зачеркнули?

Решение: Из двузначных чисел, кратных 31 (31, 62, 93), выбираем числа, удовлетворяющие условию задачи: после зачеркивания одной цифры числа получаем число в 31 раз меньше первоначального. Этому условию удовлетворяют все двузначные числа, кратные 31. Действительно, зачеркнув в них цифру десятков, будем иметь числа 1, 2 и 3, которые в 31 раз меньше чисел 31, 62 и 93 соответственно.

Ответ: 31, 62, 93; зачеркнуть нужно первую цифру.

Задачи 22-23, представленные ниже, взяты из книги «Дополнительные главы по курсу математики для 7-8 классов» за авторством К.П. Сикорского [29, С. 13 – 43].

Задача 22. Доказать, что ни при каком целом n число $n^2 + 1$ не делится на 3.

Решение: При $n = 3q$ имеем: $n^2 + 1 = 9q^2 + 1$, откуда видно, что $n^2 + 1$ дает при делении на 3 остаток 1 и, значит, не делится на 3. Далее, при $n = 3q + 1$ имеем: $n^2 + 1 = (3q + 1)^2 + 1 = 9q^2 + 6q + 2 = 3(3q^2 + 2q) + 2$;

это число дает при делении на 3 остаток 2, т.е. опять не делится на 3. Наконец, при $n = 3q + 2$ имеем:

$$n^2 + 1 = (3q + 2)^2 + 1 = 9q^2 + 12q + 5 = 3(3q^2 + 4q + 1) + 2;$$

это число опять дает при делении на 3 остаток 2, т.е. на 3 не делится.

Ответ: в любом случае число $n^2 + 1$ на 3 не делится.

Задача 23. Найти наименьшее общее кратное чисел 645 и 381.

Решение: НОК (645; 381) = $\frac{645 \cdot 381}{\text{НОД}(645; 381)}$. Найдем НОД (645; 381) с помощью алгоритма Евклида. Разделив 645 на 381 с остатком, получим:

$645 = 381 \cdot 1 + 264$, где $q_1 = 1$, $r_1 = 264$. Далее разделим 381 на 264:

$381 = 264 \cdot 1 + 117$, где $q_2 = 1$, $r_2 = 117$. Далее разделим 264 на 117:

$264 = 117 \cdot 2 + 30$, где $q_3 = 2$, $r_3 = 30$. Далее разделим 117 на 30:

$117 = 30 \cdot 3 + 27$, где $q_4 = 3$, $r_4 = 27$. Далее разделим 30 на 27:

$30 = 27 \cdot 1 + 3$, где $q_5 = 1$, $r_5 = 3$. Далее разделим нацело 27 на 3:

$27 = 3 \cdot 9 + 0$, где $q_6 = 9$, $r_6 = 0$.

Последний отличный от нуля остаток – $r_5 = 3 \Rightarrow$ НОД (645; 381) = 3.

НОК (645; 381) = $\frac{645 \cdot 381}{\text{НОД}(645; 381)} = \frac{645 \cdot 381}{3} = 215 \cdot 381 = 81\,915$.

Ответ: НОК (645; 381) = 81 915.

6.3. Система задач для 9 класса

Задачи 24-27 взяты из книги «Задачи повышенной трудности в курсе алгебры 7-9 классов» за авторством Н.П. Кострикиной [15, С. 190 – 192].

Задача 24. Докажите, что ни при каком натуральном n значение выражения $n^2 + 5n + 16$ не делится на 169.

Решение: Предположим противное: пусть уравнение $n^2 + 5n + 16 = 169k$, где k и n – натуральные числа, имеет решение.

Имеем $n^2 + 5n + 16 - 169k = 0$.

$D = 25 - 4(16 - 169k) = 4 \cdot 169k - 39 = 13 \cdot (52k - 3)$.

Очевидно, что D не является квадратом натурального числа, поскольку D кратно 13, но не кратно 13^2 ($52k - 3$ не делится на 13). Следовательно, уравнение $n^2 + 5n + 16 = 169k$ не имеет не только натуральных, но и рациональных решений ни при каких натуральных n и k. Получили противоречие с нашим предположением. Следовательно, утверждение задачи доказано.

Задача 25. Дано многозначное число $\overline{abc \dots kxyz}$. Отделив от него трехзначное число, образованное тремя последними цифрами, получим два числа: $\overline{abc \dots k}$ и $\overline{xyz}$. Докажите, что если разность полученных чисел делится на 7 (или на 11, или на 13), то и данное число делится на 7 (или на 11, или на 13).

Решение: Имеем:

$\overline{abc \dots kxyz} = 1000\,\overline{abc \dots k} + \overline{xyz} = 1001\,\overline{abc \dots k} - \overline{abc \dots k} + \overline{xyz} =$

$= 1001\,\overline{abc \dots k} + (\overline{xyz} - \overline{abc \dots k})$.

Так как число 1001 делится на 7, 11 и 13, то, используя признак делимости суммы (если каждое слагаемое делится на какое-либо число, то и сумма делится на это число), легко докажем сформулированный в задаче общий признак делимости чисел на 7, 11 и 13.

Задача 26. Докажите, что сумма кубов трех последовательных натуральных чисел делится на 9.

Решение: Пусть $a - 1$, a, $a + 1$ – три последовательных натуральных числа, где $a \in \mathbf{N}$, $a > 1$. Имеем $(a - 1)^3 + a^3 + (a + 1)^3 = 3a(a^2 + 2)$. Докажем, что произведение $a(a^2 + 2)$ кратно 3.

I способ. $a(a^2 + 2) = a(a^2 - 1 + 3) = a(a^2 - 1) + 3a = (a - 1)a(a + 1) + 3a$. Так как произведение трех последовательных чисел делится на 3 и $3a$ кратно 3, то $a(a^2 + 2)$ кратно 3.

II способ. Разобьем множество натуральных чисел a на три класса: $a = 3k$, $a = 3k + 1$, $a = 3k + 2$.

1) Если $a = 3k$, то очевидно, что $a(a^2 + 2)$ кратно 3.

2) Если $a = 3k + 1$, то $a(a^2 + 2) = (3k + 1)(9k^2 + 6k + 3)$ кратно 3.

3) Если $a = 3k + 2$, то $a(a^2 + 2) = (3k + 2)(9k^2 + 12k + 6)$ кратно 3.

Поскольку произведение $a(a^2 + 2)$ кратно 3, то $3a(a^2 + 2)$ кратно 9, что и требовалось доказать.

Задача 27. Докажите, что значение выражения $n^5 - 5n^3 + 4n$ делится на 120 при любых натуральных n.

Решение: $n^5 - 5n^3 + 4n = n(n^4 - 5n^2 + 4) = n(n^2 - 4)(n^2 - 1) =$

$= (n - 2)(n - 1)n(n + 1)(n + 2).$

Мы получили произведение пяти последовательных натуральных чисел, которое всегда кратно 120 ($120 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$). Утверждение доказано.

Выводы по второй главе

1. Программа по математике для классов с углубленным изучением математики предполагает проведение обязательных курсов по выбору обучаемых – элективных курсов. Разработанный нами элективный курс по теме «Делимость чисел» направлен на повторение пройденного материала и получение учащимися более новых знаний по этой теме. Итоговая контрольная работа должна отразить уровень подготовки учащихся к решению аналогичных задач на делимость при сдаче выпускных школьных экзаменов (ЕГЭ).

2. Формирование учебных действий учащихся возможно через решение задач и упражнений различных видов.

В параграфе 6 приведены наборы школьных задач для разных классов из следующих учебников и учебных пособий:

- «Математика. 5 класс» – Н.Я. Виленкин, В.И. Жохов и др. [2]
- «Математика. 6 класс» – Г.К. Муравин [25].
- «Математика. 6 класс» – Н.Я. Виленкин, В.И. Жохов и др. [3]
- «Алгебра. 7 класс» – С.М. Никольский [27].
- «Дополнительные главы по курсу математики для 7-8 классов» – К.П. Сикорский [29].
- «Задачи повышенной трудности в курсе алгебры 7-9 классов» – Н.П. Кострикина [15].

По этим задачам видно, насколько различны они друг от друга по содержанию. Учащиеся сначала изучают теорию, а затем укрепляют свои познания элементов теории делимости решая текстовые задачи, доказывают высказывания с помощью примеров или опровергают их контрпримерами. Благодаря этому у них не только развиваются вычислительные умения, но и формируется аналитическое мышление.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В процессе проделанной работы в соответствии с ее целями и задачами были получены следующие выводы и результаты:

1. Пропедевтика, то есть введение в теорию делимости происходит еще в начальной школе, когда учащиеся изучают доли, пытаясь разделить количество каких-либо предметов между собой или выделяя часть или несколько частей от одного предмета.

2. В нынешней учебной структуре основными для изучения теории делимости являются 5 и 6 классы. В последующих классах средней школы встречаются только элементы теории делимости, такие как деления дробей, разложение многочленов на множители и деление многочленов.

3. При изучении теории делимости важно соблюдать правильную последовательность подачи материала, для его полноценного усвоения учащимися. К примеру, нельзя рассматривать темы НОД и НОК не изучив тему «Простые и составные числа».

4. Элективный курс по теме «Теории делимости» может быть использован для объяснения учащимся с высокой успеваемостью тех тем, которые не обязательны для усвоения на текущей учебной стадии, но которые обязательно пригодятся в дальнейшем.

5. Изложение элементов теории делимости в школьных учебниках мало чем отличается друг от друга. Все определения элементарны и их сложно представить в каком-то ином, непривычном виде. Сделав выбор в пользу одного учебника, тем самым педагог не упустит чего-то важного из другого. Однако при разработке факультативных занятий и элективных курсов, правильный выбор учебной литературы крайне важен. Наилучшим вариантом будет выбор методических и дидактических дополнений от автора выбранного школьного учебника.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Велетень, О.С. Формирование универсальных учебных действий обучающихся 6 класса в процессе изучения темы «Признаки делимости» // Педагогическое образование в России - 2013. - № 5. – С. 16 – 19.
2. Виленкин, Н.Я. Математика. 5 класс: учебник для учащихся общеобразовательных учреждений / Н.Я. Виленкин, В.И. Жохов, А.С. Чесноков, С.И. Шварцбурд. – Москва: Мнемозина, 2013. – 280 с.
3. Виленкин, Н.Я. Математика. 6 класс: учебник для учащихся общеобразовательных учреждений / Н.Я. Виленкин, В.И. Жохов, А.С. Чесноков, С.И. Шварцбурд. – Москва: Мнемозина, 2013. – 288 с.
4. Волкова, Т.С. Задачи элементарной теории чисел в содержании профессиональной подготовки современного учителя математики // Вестник ТГПУ - 2015. - № 7. – С. 85 – 88.
5. Волкова, Т.С. Исследование умений будущих учителей математики решать задачи по элементарной теории чисел // Вестник КГУ им. Н.А. Некрасова - 2014. – Том 20. – С. 118 – 121.
6. Глухова, О.Ю. Делимость чисел в элективных курсах // Актуальные проблемы гуманитарных и естественных наук - 2015. - № 7-2. – С. 58 – 61.
7. Дорофеев, Г.В. Математика 5 класс. Часть 1 / Г.В. Дорофеев, Л.Г. Петерсон. – 2011. – 175 с.
8. Дорофеев, Г.В. Математика: учебник для 6 класса общеобразовательных учреждений / Г. В. Дорофеев, И. Ф. Шарыгин, С. Б. Суворова [и др.] – Москва: Просвещение, 2007. – 270 с.
9. Жафяров, А.Ж. Алгоритм и принципы изучения темы «Делимость целых чисел» на компетентной основе // Сибирский педагогический журнал - 2013. - № 5. – С. 134 – 143.
10. Жафяров, А.Ж. Компетентностный подход к изучению школьного курса алгебры // Педагогическое образование и наука - 2011. - № 8. – С. 64 – 68.

11. Зайко, В.В. Реализация преемственности в изучении натуральных чисел и дробей на начальной и основной ступенях обучения // Вестник Адыгейского государственного университета. Серия 3: Педагогика и психология - 2008. - № 5. – С. 143 – 150.

12. Зубарева, И.И. Математика. 6 класс: учебник для учащихся общеобразовательных учреждений / И.И. Зубарева, А.Г. Мордкович. – Москва: Мнемозина, 2009. – 264 с.

13. История математики: в 3-х т. Т. 1. С древнейших времен до начала Нового времени / Под ред. А.П. Юшкевича; Москва: Наука, 1970. – 352 с.

14. Канин, Е.С. Индукция. Метод математической индукции и его эквиваленты // Математика для школьников – 2009. - № 3. – С. 20 – 25.

15. Кострикина, Н.П. Задачи повышенной трудности в курсе алгебры 7-9 классов: Книга для учителя / Н.П. Кострикина. – Москва: Просвещение, 1991. – 239 с.

16. Макарычев, Ю.Н. Алгебра. 7 класс: учебник для учащихся общеобразовательных учреждений / Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, И.Е. Феоктистов. – 8-е изд. – Москва: Мнемозина, 2008. – 335 с.

17. Макарычев, Ю.Н. Алгебра. 8 класс: учебник для школы и классов с углубленным изучением математики / Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков. – 6-е изд. – Москва: Мнемозина, 2006. – 367 с.

18. Макарычев, Ю.Н. Алгебра. Дополнительные главы к школьному учебнику. 8 класс: учебное пособие для учащихся и классов с углубленным изучением математики / Под ред. Г.В. Дорофеева. – 2-е изд. – Москва: Просвещение, 1996. – 207 с.

19. Макарычев, Ю.Н. Дидактические материалы по алгебре для 8 класса с углубленным изучением / Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк. – Москва: Просвещение, 1998. – 143 с.

20. Миракова, Т.Н. Развивающие задачи на уроках математики в V-VIII классах: пособие для учителя / Т.Н. Миракова. – Львов: Журнал «Квантор», 1991. – 95 с.

21. Михелович, Ш.Х. Теория чисел / Ш.Х. Михелович. – Москва: Высшая школа, 1967. – 336 с.

22. Мордкович, А.Г. Алгебра. Углубленное изучение. 8 класс: учебник. – 3-е изд. / А.Г. Мордкович. – Москва: Мнемозина, 2006. – 256 с.

23. Муравин, Г.К. Математика. 5 класс: учебник / Г.К. Муравин, О.В. Муравина. – Москва: Дрофа, 2014. – 318 с.

24. Муравин, Г.К. Математика. 6 класс: методическое пособие к учебнику Г.К. Муравина, О.В. Муравиной «Математика. 6 класс» / Г.К. Муравин, О.В. Муравина. – Москва: Дрофа, 2010. – 271 с.

25. Муравин, Г.К. Математика. 6 класс: учебник / Г.К. Муравин, О.В. Муравина. – Москва: Дрофа, 2014. – 319 с.

26. Муравин, Г.К. Программа курса математики для 5-11 классов общеобразовательных учреждений / Г.К. Муравин, О.В. Муравина. – Москва: Дрофа, 2007. – 158 с.

27. Никольский, С.М. Алгебра: Учебник для 7 класса общеобразовательных учреждений / С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин. – 4-е изд. – Москва: Просвещение, 2003. – 285 с.

28. Рабочие программы. Математика 5-9 классы: учебно-методическое пособие / сост. О.В. Муравина. – Москва: Дрофа, 2012. – 126 с.

29. Сикорский, К.П. Дополнительные главы по курсу математики. Учебное пособие по факультативному курсу для учащихся 7-8 классов / К.П. Сикорский. – Москва: Просвещение, 1974. – 367 с.

30. Феоктистов, И.Е. Делимость чисел // Математика в школе - 2009. - № 8. – С. 47 – 58.

31. Childs L. A. Concrete Introduction to Higher Algebra. Third Edition. - Springer, 2000. – PP. 3 – 6.

32. Goodman F. Algebra. Abstract and Concrete. - Iowa City, IA, 2015. – PP. 25 – 28.

33. Harris A. Multiplication & Division. - 2001. – PP. 3 – 9.

34. Kolitsch S. Greatest Common Factors and Least Common Multiples with Venn Diagrams / S. Kolitsch, L. Kolitsch. - The University of Tennessee, 2013. – PP. 1 – 6.

35. Sultan A. The Mathematics that Every Secondary School Math Teacher Needs to Know / A. Sultan, A. Artzt. - Routledge, 2010. – PP. 25 – 27.

Приложение 1

Учебно-тематический план элективного курса

«Делимость чисел» для учащихся 8 класса

Таблица 4

Тематическое планирование элективного курса

№ п/п	Наименование тем	Всего часов	Количество часов	
			лекции	*практика*
1	Свойства делимости	2	1	1
2	Признаки делимости	2	1	1
3	Теорема о делении с остатком	2	1	1
4	Основная теорема арифметики	2	1	1
5	Алгоритм Евклида	2	1	1
6	Индукция	3	1	2
7	Решение типовых задач ОГЭ	2		2
8	Контрольная работа	2		2
	Итого	17	6	11

Приложение 2

Содержание тем элективного курса «Делимость чисел»

для учащихся 8 класса

Таблица 5

Тематика и наименование тем элективного курса

№ п/п	Наименование тем	Содержание тем
1	Свойства делимости	Делимость целых чисел. Доказательства свойств делимости суммы, разности и произведения.
2	Признаки делимости	Применение признаков делимости на 2, 3, 4, 5, 7, 9, 10, 11, 13, 25 для решения задач.
3	Теорема о делении с остатком	Понятие о делении с остатком. Теорема о делении с остатком.
4	Основная теорема арифметики	Основная теорема арифметики. Доказательство о единственности разложения натуральных чисел на простые множители.
5	Алгоритм Евклида	Наибольший общий делитель, наименьшее общее кратное. Свойства. Алгоритм Евклида.
6	Индукция	Решение задач на делимость методом математической индукции.
7	Решение типовых задач ОГЭ и ЕГЭ	Решение задач на делимость из части С ЕГЭ (Числа и их свойства).
8	Контрольная работа	Проверка усвоения нового материала.

Приложение 3

Примеры заданий для контрольной работы по итогам изучения элективного курса «Делимость чисел» для 8 класса

Таблица 6

Вариант контрольной работы

<table>
<tr><td colspan="2">1. Известно, что $a \in A$ и $b \in A$, где A – множество чисел, кратных 9. Верно ли, что:</td></tr>
<tr><td>I вариант</td><td>II вариант</td></tr>
<tr><td>$a^2 + 3b^2 + 1 \in A$.</td><td>$(a + 3)(b + 3) \in A$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">2. Найдите, если возможно, такую цифру, приписав которую слева и справа к числу 4457 получим шестизначное число:</td></tr>
<tr><td>кратное 12.</td><td>кратное 75.</td></tr>
<tr><td>3. Одно из целых чисел при делении на 7 дает остаток 5, а другое дает остаток 4. Какой остаток получится при делении на 7 их произведения?</td><td>3. Целое число b при делении на 15 дает остаток 9. Какой остаток получится при делении на 15 квадрата этого числа?</td></tr>
<tr><td colspan="2">4. Используя алгоритм Евклида, найдите наибольший общий делитель чисел:</td></tr>
<tr><td>5964 и 8148.</td><td>2784 и 7008.</td></tr>
<tr><td>5. Доказать, что число $n^2 + n + 16$ не делится на 100 при любом целом n.</td><td>5. Доказать, что число $7^n + 3n - 1$ делится на 9 при любом натуральном n.</td></tr>
<tr><td colspan="2">6. Докажите, что при любом натуральном значении n число вида $2^{3^n} + 1$:</td></tr>
<tr><td>делится на 3^{n+1}.</td><td>не делится на 3^{n+2}.</td></tr>
<tr><td colspan="2">7*. Дано трёхзначное натуральное число (число не может начинаться с нуля), не кратное 100.</td></tr>
<tr><td>Может ли частное этого числа и суммы его цифр быть равным 90?</td><td>Может ли частное этого числа и суммы его цифр быть равным 88?</td></tr>
<tr><td colspan="2">8**. Множество A состоит из натуральных чисел. Количество чисел в A больше семи. Наименьшее общее кратное всех чисел из A равно 210. Для любых двух чисел из A их наибольший общий делитель больше единицы. Произведение всех чисел из A делится на 1920 и не является квадратом никакого целого числа. Найти числа, из которых состоит A.</td></tr>
</table>