МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Тольяттинский государственный университет»

Институт математики, физики и информационных технологий

Кафедра «Алгебра и геометрия»

Направление подготовки 44.03.05 «Педагогическое образование»

Направленность (профиль) «Математика и информатика»

БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА

на тему **«МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ ВЕКТОРНОМУ МЕТОДУ В КУРСЕ ГЕОМЕТРИИ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ»**

Студент ______В.А. Мельникова____ ___________________

Руководитель д.п.н., профессор С.Н. Дорофеев ___________________

Консультант ____к.п.н., А.В. Кириллова___ ___________________

Допустить к защите

Заведующий кафедрой д.п.н., профессор Р.А. Утеева _____________

«____»__________2017 г.

Тольятти 2017

АННОТАЦИЯ

Цель исследования: выявить методические особенности обучения школьников векторному методу в курсе геометрии основной школы и разработать систему упражнений по теме исследования.

Объектом исследования является процесс обучения школьников геометрии в основной школе.

Предметом исследования стала методика обучения школьников векторному методу в курсе геометрии основной школы.

Бакалаврская работа состоит из введения, двух глав, заключения, списка литературы и 5 приложений.

Глава I посвящена теоретическим основам обучения векторному методу. Рассмотрены исторические аспекты развития векторного исчисления. Выявлены различные подходы к определению понятия «вектор». Проанализированы цели обучения векторному методу. Выделены требования, предъявляемые к знаниям, умениям и навыкам учащихся по теме «Векторы». Рассмотрены различные формы, методы и средства обучения векторному методу. Выявлена сущность рассматриваемого метода и проиллюстрировано его применение к решению задач.

В *Главе II* представлены методические основы обучения векторному методу. Выполнен анализ содержания темы «Векторы и их применение к решению задач». Рассмотрены методические рекомендации по обучению теме. Разработана система упражнений для учащихся 8-9 классов. Представлены результаты эксперимента, проведенного на базе одной из общеобразовательных школ, который показал недостаточный уровень умения решать задачи по теме «Векторы и векторный метод».

Предложенные материалы могут быть полезны для учителей математики, студентов и школьников.

Список литературы содержит 52 наименования.

ABSTRACT

The title of the bachelor’s thesis is “Method of teaching to the vector method in the course of geometry of the secondary school”.

The aim of the work is to reveal the methodological features of teaching pupils to the vector method in the course of geometry of the secondary school and to make a system of exercises on the topic of research.

The object of the bachelor’s thesis is the process of teaching pupils to geometry in the secondary school.

The subject of the bachelor’s thesis is the method of teaching pupils to the vector method in the course of geometry of the secondary school.

The bachelor’s thesis consists of an introduction, 2 chapters, a conclusion, a list of references and 5 appendices.

The first chapter of the thesis describes theoretical principles of teaching to the vector method. We consider history of development of vectors in Math and education. We compare different approaches to the definition of vector. We also analyze goals of teaching to the vector method. We study requirements for the knowledge, skills of pupils on the topic "Vectors". Next we cover different forms, methods and resources of teaching to the vector method and demonstrate the feasibility of it.

In *the second chapter* we present methodical principles of teaching to the vector method. We analyze pupil’s books, discuss methodological recommendations for teaching to the vector method. We develop a system of exercises on the topic of research. We also report the results of experiments conducted to explore level of pupil’s knowledge. We ascertain very low level of pupil’s knowledge on the topic of research.

All materials can be useful for school Math teachers, students and pupils.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы исследования. Векторы - достаточно «молодой» вопрос, включенный в школьный курс геометрии со второй половины XX столетия. Отвечая потребностям физики, геодезии, географии и ряду других наук, векторы превратились в мощный метод решения задач и доказательства теорем. Они служат одним из способов установления связи линейных и угловых величин наряду с тригонометрическими функциями, также связи алгебры с геометрией.

Изучение векторов на плоскости позволяет реализовать в курсе геометрии межпредметные и внутрипредметные связи, способствует систематизации знаний, обогащению опыта поиска решений задач, так как предоставляет новый *векторный метод решения,* в частности, планиметрических задач. Изучение векторного метода представляет собой своеобразный познавательный интерес, так как на его основе можно в дальнейшем ввести координаты на плоскости.

Традиционный курс геометрии подразделяется на планиметрию и стереометрию, в связи с этим векторы изучаются дважды – сначала на плоскости, затем в пространстве. Н.Л. Стефанова [24, С. 340] отмечает нецелесообразность подобной дифференциации, так как происходит дублирование некоторых вопросов. Автор указывает два выхода из сложившейся ситуации:

1. Исключить тему «Векторы» из курса геометрии основной школы и включить ее только в курс старшей школы. Недостаток этого предложения заключается в том, что у учащихся могут возникнуть трудности при изучении других дисциплин, в частности, физики, а во-вторых, выпускники основной школы не получат даже минимальных знаний по этой теме, что, безусловно, скажется на общем уровне математической культуры.

2. Включить минимальные сведения о векторах в пространстве в курс геометрии основной школы.

В геометрии существуют различные трактовки определения вектора, с которыми мы познакомимся в рамках исследования, выделен круг задач, решаемых векторным методом. Данный метод является одним из эффективных методов решения геометрических задач и обладает высоким потенциалом, способствующим умственному развитию школьников, однако изучение этой темы в школьном курсе геометрии крайне ограничено по времени.

Таким образом, возникает **противоречие** между необходимостью обучения решению планиметрических задач векторным методом и недостаточным количеством уроков, отводимых на практику по заданной теме, поэтому многие школьники испытывают затруднения в применении векторного аппарата.

Все вышеприведенные аргументы определяют актуальность темы исследования.

Проблема исследования состоит в выявлении методических особенностей обучения векторному методу в курсе геометрии основной школы.

Объект исследования: процесс обучения школьников геометрии в основной школе.

Предмет исследования: методика обучения школьников векторному методу в курсе геометрии основной школы.

Цель исследования: выявить методические особенности обучения школьников векторному методу в курсе геометрии основной школы и разработать систему упражнений по теме исследования.

Гипотеза исследования основана на том, что систематическое формирование у учащихся умений и навыков, которые являются структурными элементами векторного метода, приведет к более успешному усвоению школьниками данного метода, повысит их общую математическую подготовку, обеспечит достижение минимума основной образовательной программы по математике.

Задачи исследования:

1. Рассмотреть исторические аспекты развития векторного исчисления в математической науке и образовании.

2. Выявить различные подходы к определению понятия «вектор».

3. Проанализировать цели обучения векторному методу.

4. Выделить требования, предъявляемые к знаниям, умениям и навыкам учащихся по теме «Векторы».

5. Рассмотреть различные формы, методы и средства обучения векторному методу.

6. Выявить сущность векторного метода и проиллюстрировать его применение к решению задач.

7. Выполнить анализ содержания темы «Векторы и их применение к решению задач» в школьных учебниках.

8. Рассмотреть методические рекомендации по обучению векторному методу учащихся 8-9 классов.

9. Разработать систему упражнений по теме «Векторный метод» для учащихся 8-9 классов.

10. Провести диагностическую работу на базе одной из общеобразовательных школ г.о. Тольятти.

Для решения сформулированных задач были использованы следующие **методы исследования**: анализ учебно-методической литературы, работ по истории математики, примерных образовательных программ, нормативных актов, а также изучение опыта учителей математики, работающих в 8-9 классах общеобразовательной школы, самостоятельное решение задач, тестирование учащихся.

Теоретическая значимость исследования состоит в том, что в результате выявлены методические особенности обучения векторному методу в курсе геометрии основной школы.

Практическую значимость результатов исследования составляют методические рекомендации по обучению векторному методу и разработанная система упражнений, которые могут быть использованы учителями математики и студентами педагогических направлений подготовки.

Апробация результатов работы. Теоретические выводы и практические результаты исследования были представлены на первом и втором этапах научной студенческой конференции «Дни науки» института математики, физики и информационных технологий ТГУ (г.о. Тольятти, апрель 2017 г., диплом за 1 место на I этапе).

На защиту выносятся:

1. Методические рекомендации по обучению векторному методу в курсе геометрии основной школы.

2. Система упражнений по теме «Векторный метод» для учащихся 8-9 классов.

Бакалаврская работа состоит из введения, двух глав, заключения, списка литературы и 5 приложений.

Во введении раскрывается актуальность исследования, выявляется противоречие, ставится проблема, определяются объект, предмет, ставится цель, формулируется гипотеза, основные задачи исследования, указывается методологическая база, теоретическая и практическая значимость исследования.

Глава I посвящена теоретическим основам обучения векторному методу в курсе геометрии основной школы. Рассмотрены исторические аспекты развития векторного исчисления в математической науке и образовании. Выявлены различные подходы к определению понятия «вектор». Проанализированы цели обучения векторному методу. Выделены требования, предъявляемые к знаниям, умениям и навыкам учащихся по теме «Векторы». Рассмотрены различные формы, методы и средства обучения векторному методу. Выявлена сущность векторного метода и проиллюстрировано его применение к решению задач.

В **Главе II** представлены методические основы обучения векторному методу в курсе геометрии основной школы. Выполнен анализ содержания темы «Векторы и их применение к решению задач». Рассмотрены методические рекомендации по обучению векторному методу учащихся 8-9 классов. Разработана система упражнений по теме «Векторный метод» для учащихся 8-9 классов. Представлены результаты диагностической работы, проведенной на базе одной из общеобразовательных школ г.о. Тольятти.

В заключении приведены основные результаты и выводы проведенного исследования.

Список литературы содержит 52 наименования.

ГЛАВА I. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОБУЧЕНИЯ ВЕКТОРНОМУ МЕТОДУ В КУРСЕ ГЕОМЕТРИИ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ

§1. История развития векторного исчисления в математической науке и образовании

Учение о векторах почти до конца XIX века называли геометрическим анализом или исчислением, так как предпосылкой формирования основных понятий учения о векторах являлась теоретическая и практическая геометрия.

Представление величин ненаправленными отрезками можно встретить в древнегреческой математике. Например, в «Началах» Евклида операции над отрезками осуществляются так же, как и сложение и вычитание величин, умножение величин сводится к построению прямоугольника на соответствующих отрезках. Пифагорейцы сводили вопросы алгебры и арифметики к геометрическим задачам [10, С. 88].

Декарт представлял дискретные величины – число, длина, площадь и др. - в виде отрезков и вводил действия с ними. Вследствие того, что Декарт рассматривал, как и Евклид, только ненаправленные отрезки и применял их как числа, исчисление отрезков развивалось крайне медленно [10, С. 88].

В 1679 году Лейбниц выдвинул идею создания исчисления, подобного современному векторному. Необходимость нового «геометрического исчисления» возникает в XIX столетии в связи с бурным развитием естествознания. В трудах в области физики для наглядного представления сил использовались направленные отрезки такими учеными, как Леонардо да Винчи, Галилео Галилей, Симон Стевин, Кеплер [10, С. 88].

В Таблице 1 представлены пути исторического развития векторного исчисления [10, С. 89].

Таблица 1

Пути исторического развития векторного исчисления

№ п/п	Название направления	Область изучения
	Геометрическое	Отрезки и их исчисления
	Физическое	Векторные величины
	Алгебраическое	Расширение понятия операции

Впервые начала исчисления направленных отрезков были изложены норвежцем Весселем в «Опыте об аналитическом представлении направления и его применениях». Этот труд был первым сочинением, посвященным толкованию комплексных чисел [10, С. 89]. Цель ученого состояла в том, чтобы создать удобный аппарат решения геодезических задач [46, С. 64]. Вессель полагал, что переход от арифметики к геометрическому анализу расширит геометрические операции, а также облегчит доказательство теорем [10, С. 90]. Математик понимал, что создание исчисления отрезков требует обобщения алгебры таким образом, чтобы не было противоречий с уже имеющейся теорией [46, С. 65]. Свои методы исчисления ученый использует при выводе формул прямолинейной тригонометрии, при решении сферических треугольников и многоугольников [10, С. 90].

Вессель не стал останавливаться на изучении плоскости и попытался обобщить комплексные числа, чтобы представить векторы в трехмерном пространстве. Однако это удалось позднее У. Гамильтону [46, С. 65].

Стоит отметить, что работа Весселя оказала огромное влияние на развитие математики, хотя стала широко распространена только после перевода на французский язык в 1897 году [46, С. 65].

Книга Л. Карно (1803) сыграла свою роль в развитии векторного исчисления. Одним из основных понятий, изложенных в этом труде, является понятие геометрического количества в значении направленного отрезка. Карно рассматривал не только положительные и отрицательные отрезки на одной прямой, но и отрезки с любым направлением, что способствовало развитию векторного исчисления на шаг вперед [10, С. 90].

Интересным фактом является то, что обозначение вектора с помощью черты ($\overline{AB}$) было введено Карно [10, С. 90], а обозначение вектора с помощью стрелки (AB) введено О. Коши в 1853 году [39, С. 342]. Обозначение $|\overline{AB}|$ для длины вектора ввел Ганс в 1905 году [5, С. 16].

Немецкий математик А. Мебиус в сочинении «Барицентрическое исчисление» (1827) впервые представлял геометрическое количество АВ в виде разности точек $(B - A)$. Швейцарский математик Жан Арган называет направленные отрезки направленными линиями, применяет свои методы при решении задач геометрии, алгебры и механики. Свои идеи Арган изложил в труде «Опыт о способе изображения мнимых количеств в геометрических построениях» (1806) [10, С. 91]. Согласно источникам [5, С.16] Арган образовал термин «модуль» от латинского modulus – «мера» (1814), затем эту терминологию применял Коши.

Следующий скачок в развитии векторного исчисления связан с именами У. Гамильтона и Г. Грассмана. Гамильтон изучал комплексные числа, создал учение о кватернионах, именно он впервые употребил термин *«вектор»,* который образован от латинского vehere – «нести», vector – «несущий» [5, С. 16], и производил с ними различные операции в трехмерном пространстве. В «Лекциях о кватернионах (1853) Гамильтон изложил основы векторной алгебры и векторного анализа. В этом сочинении встречаются такие понятия, как скаляр, скалярное произведение, векторное произведение [10, С. 91], которые знакомы нам из курса геометрии школы, а также курса аналитической геометрии.

Независимо от Гамильтона Грассман изложил основы векторного исчисления в работе «Учение о протяженности» (1844), в которой речь идет об n-мерном евклидовом пространстве. Векторы он называл *палочками,* скалярное произведение векторов – *внутренним* (a | b), а векторное произведение – *внешним* [a, b] [10, С. 92]. Ученый ввел единичные векторы

e_1, e_2, e_3, направленные по осям координат, и разложение вектора в виде $x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$ [5, С. 16].

Современный вид векторному исчислению придали американский физик Дж. Гиббс, который вслед за Гамильтоном обозначал векторы греческими буквами, и английский физик О. Хевисайд, который предложил обозначение векторов жирными буквами (1891). Хевисайд считал удачным обозначение вектора и его длины одинаковыми буквами [5, С. 16]. В последней четверти XIX столетия происходит слияние воедино всех трех путей исторического развития векторного исчисления - алгебраического, геометрического, физического - оно становится самостоятельной областью математики [10, С. 92].

Помимо векторной алгебры, изучающей постоянные векторы, Гамильтон создал векторный анализ, изучающий векторные функции. Векторное исчисление находит свое применение в теории электромагнитного поля, гидродинамике, теоретической механике, аналитической и дифференциальной геометрии [10, С. 92-93].

Несмотря на огромную работу, которая была проделана математиками разных времен, векторное исчисление с большим трудом пробивает себе дорогу в высшее и среднее образование. Английский ученый У. Томпсон (1824-1907) до конца жизни был противником преподавания векторного метода, считая, что данный метод «зашифровывает» математические и физические положения, скрывает суть дела. Он призывал выписывать векторные формулы в координатной форме. Наш соотечественник А.Н. Крылов (1863-1945) придерживался похожей точки зрения в начале своей трудовой деятельности, однако спустя время ученый изменил позицию по этому вопросу [11, С. 54].

Сторонником векторного метода был профессор П.О. Сомов, его книга «Векторный анализ и его приложения» (1907) содержала неточности, но была методически ясной, этот труд долгое время оставался единственным пособием по этой теме в нашей стране [11, С. 54].

Ведущую роль в распространении векторного метода сыграла книга «Основы векторного исчисления. Векторная алгебра» (1931) советского математика Я.С. Дубнова (1887-1957). В работе автор приводит доказательства новых операций векторной алгебры, примеры и упражнения для самостоятельной работы. В начале 50-х годов прошлого столетия Я.С. Дубнов рекомендовал при преподавании аналитической геометрии в высшей школе планиметрию излагать координатным методом, а стереометрию – векторным языком, поэтому школьный учебник Дубнова по геометрии (1934) не включает понятие вектора [11, С. 55].

Для педагогических институтов первый учебник аналитической геометрии (с векторной содержательной линией) был написан А.М. Лопшицем (1948). В этом же году вышла книга «Курс аналитической геометрии» на векторной основе Н.М. Бескина [11, С. 55].

Векторы проникали в школьный курс геометрии с большим трудом, это характерно не только для отечественного, но и для зарубежного образования. В распространенном в старших классах в США учебнике Э.Э. Моиза и Ф.Л. Даунса векторы вообще не изучаются. При повторном издании в учебник добавлены минимальные сведения о векторах как параллельных переносах. В итальянских учебниках «Числа», «Геометрия» Э. Кастельнуово (1974) векторы не используются. Французская школа предполагает изучение векторов, операций над ними начиная с 1965 года. Известен экспериментальный курс бельгийского педагога «Современная математика» (60-е годы XX века), в котором изложены векторы [11, С. 56].

В 1963 году В.Г. Болтянский и И.М. Яглом написали новый учебник по геометрии, он был методически грамотно построен, содержал достаточное количество разноплановых задач, сопровождался методическим пособием для учителя, но этот учебник просуществовал только 2 года из-за отсутствия преемственности [11, С. 56].

Введение векторов в наше школьное образование связано с именем А.Н. Колмогорова. Благодаря работам А.Н. Колмогорова и З.А. Скопеца была подтверждена значимость понятия вектора для школьного курса геометрии, необходимость изучения векторного метода, отмечена важность реализации межпредметных связей. Пробный учебник под редакцией В.Г. Болтянского, М.Б. Воловича, Л.Д. Семушина содержал более глубокие сведения о векторных темах, включал большое количество геометрических задач, решаемых векторным методом [11, С. 56].

Таким образом, мы видим, что сегодня векторный метод решения геометрических задач укрепил свое положение в школьном преподавании, что является большим достижением в области математического образования и, безусловно, результатом многолетней работы ряда ученых [11, С. 57].

§2. Различные подходы к определению понятия «вектор» в курсе геометрии основной школы

Известно, что существуют различные подходы к определению понятия «вектор», рассмотрим некоторые из них.

А.Н. Колмогоров, А.Ф. Семенович, Р.С. Черкасов под вектором понимают параллельный перенос, а, в частности, под нулевым вектором - параллельный перенос на нулевое расстояние. Параллельный перенос определяется упорядоченной парой точек (A, B), а отображение точки A на точку B обозначают в виде стрелки [17, С. 196]. А.Д. Александров в статье [3, С. 44] считает преимуществом такой трактовки то, что параллельный перенос представляет свободный вектор и все векторные операции согласуются с векторным исчислением, однако в задачах учебника под редакцией А.Н. Колмогорова фигурируют направленные отрезки, поэтому возникает противоречие. Недостаток трактовки вектора как параллельного переноса, по мнению Ю. М. Колягина [18, С. 201], заключается в том, что представление о векторе как о геометрическом преобразовании не всегда согласуется с физическими представлениями о векторных величинах, такая формулировка также подвергалась критике Академией наук СССР [11, С. 57].

В. Г. Болтянский, И. М. Яглом в [4, С. 293] приводят несколько определений понятия вектора. Авторы называют вектором геометрический объект, который характеризуется направлением и длиной, но считают такое определение слишком абстрактным. С другой стороны, вектором можно называть параллельный перенос, который в свою очередь как раз характеризуется направлением и длиной. Под параллельным переносом (Рис. 1) авторы понимают преобразование плоскости (в планиметрии) или пространства (в стереометрии), которое переводит каждую точку A плоскости (пространства) в точку A′, что выполнены условия:

1. Отрезок AA' параллелен прямой l, которая задана.

2. $AA' = a$.

3. Направление отрезка AA' совпадает с заданным на l направлением.

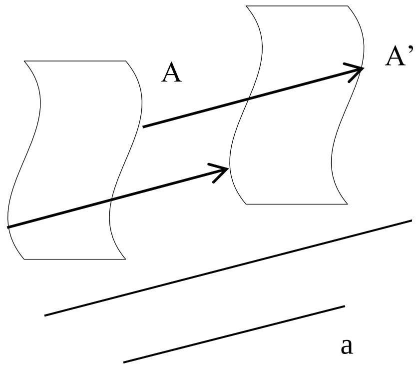


Рис. 1

Это определение логически корректное, но представление о векторе как о геометрическом преобразовании (как у А.Н. Колмогорова) недостаточно наглядное.

Другими словами, вектор – это семейство (бесконечное множество) всех параллельных между собой одинаково направленных отрезков, которые имеют одинаковую длину [4, С. 294]. А.Д. Александров в статье [3, С. 41] отмечает, что такое представление не имеет соответствия ни приложениям, ни общему пониманию понятия «свободный вектор».

И.М. Смирнова [38] рассматривает понятие вектора в контексте изучения параллельного переноса – преобразования плоскости, характеризующегося величиной и направлением, под вектором в этом учебнике понимается направленный отрезок, у которого указаны начало и конец.

Л. С. Атанасян в [6] делает акцент на физических величинах, которые характеризуются не только числом, но и направлением, и называет их векторными величинами или векторами для краткости. В качестве примера автор приводит физическую задачу, после чего переходит к геометрическому толкованию понятия вектора как отрезка, у которого один из концов назван началом, а другой - концом. Атанасян считает целесообразным остановиться на понятии нулевого вектора, он пишет, что любую точку плоскости можно считать вектором, но нужно также обращать внимание на обозначения (точка M и нулевой вектор MM).

В учебнике А.В. Погорелова [30] вектором называется направленный отрезок, под нулевым вектором понимается вектор, начало и конец которого совпадают. Стоить отметить, что автор упоминает о 2 обозначениях векторов – над буквами может ставиться как стрелка, так и черта $(AB, \overline{AB})$. В дальнейшем Погорелов все же использует второе обозначение вектора. Автор широко использует координаты при изложении векторов.

В.А. Гусев, Ю.М. Колягин, Г. Л. Луканкин определяют вектор как направленный отрезок, приводя в качестве примера физические величины – силу, скорость, ускорение, причем рассматриваемые направленные величины преимущественно связаны с какой-либо точкой. В математике же чаще говорят о свободных векторах и рассматривают их как направленные отрезки [12, С. 6].

И.Ф. Шарыгин [44] рассматривает две точки A и B и называет вектором направленный отрезок, у которого A является началом, а B – концом, причем автор подчеркивает различие между вектором AB и отрезком AB. Одна и та же пара точек A и B может задавать два одинаковых по длине и противоположных по направлению вектора AB и BA.

А.Г. Мерзляк [23] напоминает, что многие величины, с которыми знакомы учащиеся, такие как масса, площадь, объем, длина определяются числовыми значениями, поэтому их называют скалярными величинами или просто скалярами. Затем автор обращается к курсу физики и как иллюстрацию приводит силу, скорость, ускорение, вес, которые помимо числового значения имеют и направление. Именно такие величины принято называть векторными. Вектором, или направленным, отрезком А.Г. Мерзляк называет отрезок, для которого указано, какая точка является началом, а какая – концом.

В учебнике А.Д. Александрова [2] сказано, что величины, известные учащимся, могут быть двух видов. Одни могут определяться своими численным значениями, их называют скалярами, а другие могут иметь не только численное значение, но и направление, их называют векторами.

Анализируя работы своих коллег и предшественников, А.Д. Александров в статье [3, С. 44] приходит к выводу, что направленные отрезки называют векторами, но определять вектор как направленный отрезок неверно. По его мнению, не следует так же определять вектор как параллельный перенос. Автор считает, что прежде чем вводить определение вектора, нужно определить направленный отрезок и равенство направленных отрезков, а потом плавно перейти к тому, что вектор – направленный отрезок, рассматриваемый с точностью до выбора его начала, иными словами, равные направленные отрезки представляются изображением одного и того же вектора.

К примеру, зарубежный автор Хоффманн [51, С. 1-2] считает, что определять вектор как объект, имеющий величину и направление, недостаточно. Согласно этому определению вектором можно считать стрелу лучника, что неверно. «Стрела» - это изображение вектора, но не сам вектор.

Как мы видим, во многих учебных курсах вектор определяется как направленный отрезок, в связи с этим векторы считаются равными, если они имеют одинаковую длину и направление. Однако не следует принимать такую трактовку как математически корректную, так как равные векторы по сути – это один и тот же вектор. Если мы принимаем данное выше определение вектора, то отождествляем понятия равенства и эквивалентности. При равенстве два математических объекта совпадают, а эквивалентность означает отношение, обладающее свойствами рефлексивности, симметричности, транзитивности [18, С. 199].

§3. Цели обучения векторному методу

Согласно ФГОС основного общего образования [40] предметные результаты изучения области «Математика», в частности, «Геометрия» должны отражать:

1. Овладение геометрическим языком; развитие умения использовать его для описания предметов окружающего мира; развитие пространственных представлений, изобразительных умений, навыков геометрических построений.

2. Формирование систематических знаний о плоских фигурах и их свойствах; развитие умений моделирования реальных ситуаций на языке геометрии, исследования построенной модели с использованием геометрических понятий и теорем, аппарата алгебры, решения геометрических и практических задач.

3. Развитие умений применять изученные понятия, результаты, методы для решения задач практического характера и задач из смежных дисциплин.

В методике обучения математике понятие «вектор» является связующим элементом между метрикой и направлением [19, С. 150]. Векторы нашли распространение в прикладных областях знаний, сыграли важную роль в геометрии. Мощный аппарат векторной алгебры позволяет упростить сложные геометрические понятия, доказательства теорем и предлагает принципиально новый эффективный метод решения геометрических задач [25, С. 389].

Основными целями обучения векторному методу в общеобразовательной школе являются:

1. Предложить новый метод решения геометрических задач на вычисление и доказательство.

2. Показать применение векторного аппарата в различных предметных областях, в частности, в физике, химии, географии.

3. Способствовать формированию у школьников диалектико-материалистического мировоззрения, а также умения обобщать и конкретизировать.

4. Способствовать формированию у учащихся гибкости, критичности, целенаправленности, рациональности мышления [19, С. 150].

Необходимость обучения векторному методу в планиметрии обусловлена тем, что векторный аппарат придает решению задач и доказательству теорем, в условии которых векторы явно не проявляются, краткость и изящество, позволяет учащимся избежать некоторых ошибок и трудностей [18, С. 211] и имеет воспитательное значение [35, С. 104].

Таким образом, цели обучения векторному методу полностью отвечают требованиям, предъявляемым ФГОС основного общего образования по математике.

§4. Требования к знаниям, умениям и навыкам учащихся по теме «Векторы»

Для того чтобы продуктивно решать планиметрические задачи векторным методом, учащимся необходимо:

– *знать* следующие понятия - вектор, его начало и конец, одинаково (противоположно)направленные, равные векторы, модуль вектора, нулевой вектор, (не)коллинеарные векторы, скалярное произведение векторов, угол между ненулевыми векторами;

– *уметь выполнять* основные действия над векторами в геометрической форме (сложение, вычитание, умножение на число);

– *уметь представлять* вектор в виде суммы, разности двух векторов, в виде произведения вектора на число;

– *овладеть* переводом геометрических терминов на язык векторов и обратно; переводом условия задачи на язык векторов; упрощением системы векторных равенств; заменой векторных равенств алгебраическими [19, С. 151-152].

Для того чтобы приобрести необходимые знания, умения и навыки, можно изучать не только отечественную, но и зарубежную литературу, например, [50, С.3-5], [49].

Изучив примерную образовательную программу основного общего образования [33] по математике, нами было выяснено, что понятие вектора является обязательным для изучения. В зависимости от направления деятельности общеобразовательного учреждения учащиеся имеют возможность изучать математику на базовом, расширенном и углубленном уровнях.

Проанализируем содержание *Приложения 1*, в котором представлены планируемые результаты изучения темы «Векторы». Как мы можем заметить, знаний, умений и навыков, полученных в результате изучения темы «Векторы» на базовом уровне, будет недостаточно для освоения векторного метода решения задач. Расширенный уровень изучения охватывает достаточно широкий круг вопросов, поэтому можно познакомить учащихся с некоторыми элементами векторного метода. На углубленном уровне изучения учащиеся должны овладеть векторным методом и применять его к решению задач на вычисление и доказательство.

Стоит отметить, что ОГЭ 2017 по математике [41] не содержит заданий, направленных на проверку освоения векторного метода, несмотря на это, общий понятийный аппарат и обязательный минимум умений и навыков по теме «Векторы» все же необходимы для успешного выполнения модуля «Геометрия».

Рассмотрим примеры задач из первой части ОГЭ 2017 по теме «Векторы на плоскости».

Пример 4.1. Две стороны прямоугольника $ABCD$ равны 28 и 21. Найдите длину вектора AC (№ 2347 из [47, С. 315]).

Решение:

ΔABC – прямоугольный, AC – гипотенуза, по теореме Пифагора $AC^2 = AB^2 + BC^2$ найдем $AC = 35$. По определению имеем, что длиной вектора называется длина отрезка, изображающего вектор, $=>$ $AC = 35$.

Ответ: 35.

Пример 4.2. Две стороны прямоугольника $ABCD$ равны 4 и 22. Найдите скалярное произведение векторов AB и AD (№ 2365 из [47, С. 315]).

Решение:

AB и AD – смежные стороны прямоугольника $=> AB \perp AD$, значит, $AB \perp AD$. Мы знаем, что если векторы перпендикулярны, то их скалярное произведение $AB \cdot AD = 0$.

Ответ: 0.

Представленные выше задачи являются своего рода пропедевтическими для успешного освоения векторного метода, так как без знания необходимого понятийного аппарата и владения минимальными умениями и навыками освоение векторного метода окажется невозможным.

§5. Формы, методы и средства обучения векторному методу в курсе геометрии основной школы

Деятельность учащихся по усвоению содержания образовательных программ осуществляется в разнообразных формах, характер которых обусловлен рядом факторов: цели и задачи обучения, количество учащихся, место и время учебной работы, обеспеченность учебниками и учебными пособиями.

Рассмотрим определение организационной формы обучения с точки зрения И.М. Чередова. *Организационная форма обучения* есть конструкция процесса обучения, характер которой обусловлен его содержанием, методами, приемами, средствами, видами деятельности учащихся. Другими словами, *формы обучения* – это конструкции отрезков процесса обучения, реализующихся в сочетании управляющей деятельности учителя и управляемой учебной деятельности учащихся, направленной на получение знаний о мире и развитие различных умений и навыков [39, С.215].

В современной дидактике организационные формы подразделяют на фронтальные, групповые и индивидуальные.

При *фронтальной форме* обучения учитель управляет деятельностью класса, определяет единый темп работы, которая ориентирована на среднего ученика, слабые отстают, а сильные теряют интерес.

При *групповой форме* обучения учитель управляет деятельностью групп класса. Класс делят на звеньевые, бригадные, кооперованно-групповые, дифференцированно-групповые. Звеньевые группы предполагают постоянный состав участников независимо от заданий. Бригадные группы предполагают временный состав участников в зависимости от характера заданий. Кооперованно-групповое деление класса предполагает, что каждая группа выполняет часть общего задания. Дифференцированно-групповая форма объединяет учащихся с примерно одинаковым уровнем знаний, умений и навыков. Парная форма также относится к групповым.

Индивидуальная форма не предполагает непосредственного контакта учащихся с другими, подразумевает самостоятельное выполнение одинаковых для всего класса заданий. Если же учащиеся выполняют задания в соответствии со своими образовательными возможностями, то такая форма обучения носит название индивидуализированной.

В [39, С.221] отмечается, что в современной общеобразовательной практике чаще всего используются фронтальная и индивидуальная организационные формы, гораздо реже групповая и парная формы.

М.Д. Виноградова и И.Б. Первин отмечают, что не всякая работа, которая проходит в коллективе, является *коллективной*. Х.Й. Лийметс утверждает, что коллективная работа возникает на базе дифференцированной групповой работы [37, С.222].

С позиции целостности образовательного процесса основной формой организации обучения является *урок*. Урок обеспечивает организационную четкость и непрерывность учебной работы. Данная форма является экономически выгодной, позволяет использовать влияние классного коллектива на деятельность каждого ученика.

Рассмотрим, что в педагогической науке понимается под понятием «методы обучения».

По В.И. Андрееву, *методы обучения* – это методы преподавания и методы учения. *Методы преподавания* – это система приемов и правил педагогической деятельности, применение которых учителем позволяет повысить эффективность управления деятельностью учащихся. *Методы учения* - это система приемов и правил учения, применение которых повышает эффективность самоуправления личности ученика в процессе решения учебных задач. Приемы носят частный подчиненный характер по отношению к понятию метода, то есть соотносятся как часть и целое. В одних случаях метод выступает как самостоятельный путь решения педагогической задачи, а в других – как прием.

Например, беседа является одним из основных методов убеждения, но в то же время методическим приемом [37, С.232], к которому часто прибегают на уроках геометрии. Мищенко в [26, С.158] рекомендует объяснить материал темы «Понятие вектора» в форме беседы через систему упражнений, а в процессе решения вводить новую терминологию, правила. Автор пособия предлагает рассмотреть правила сложения векторов в форме беседы.

Выделим различные подходы к классификации методов обучения.

Перцептивный подход (Е.А. Голант, Н.М. Верзилин, С.Г. Шаповаленко) – подход, за основу которого берется источник передачи информации и характер ее восприятия – словесные, наглядные, практические.

Управленческая концепция (М.А. Данилов, Б.П. Есипов) – концепция, за основу которой берутся дидактические задачи, решаемые на определенном этапе обучения, - методы приобретения знаний, формирования умений и навыков, применения знаний, закрепления, проверки знаний, умений и навыков.

Логический подход (А.Н. Алексюк) – подход, основа которого предусматривает логику изложения материала учителем и логику восприятия его учащимися, - индуктивные и дедуктивные.

Гностический подход (И.Я. Лернер, М.Н. Скаткин) – подход, основой которого является характер познавательной деятельности учащихся, - информационно-рецептивные, репродуктивные, проблемного изложения, *эвристические, исследовательские* [37, С.233].

Рассмотрим более подробно эвристический метод.

Эвристический метод в обучении в узком смысле означает *эвристическую беседу* – вопросно-ответную форму обучения, при которой учитель не сообщает готовых знаний, а поставленными вопросами побуждает учащихся самостоятельно делать некоторые выводы, опираясь на ранее изученный материал [24, С.217].

Считается, что эвристическая беседа – прогрессивный метод обучения, который противостоит «зубрежке». В системе вопросов эвристической беседы ключевое место занимают проблемные вопросы, которые направляют мысль учащихся на преодоление несоответствий между имеющимися у них знаниями и новыми фактами, выявляющимися в ходе беседы. Беседа повторительного характера не является эвристической. Во время эвристической беседы происходит противоречивый процесс движения мысли учащихся от неполного знания к достоверному знанию [24, С.217].

Н.В. Метельский [24, С.217] отмечает, что учителя математики чаще на практике применяют малоэффективные традиционные методы, а не эвристическую беседу и другие нестандартные методы, и пропагандирует его использовать при обучении.

Н.В. Метельский [24, С.218] также приводит ряд требований, которым должна удовлетворять система вопросов в эвристической беседе:

– вопросы должны быть логически последовательными, краткими, точными;

– нельзя допускать двойных вопросов, неопределенности и двусмысленности;

– вопросы не должны быть подсказывающими и должны давать простор для размышления всего класса.

Ответы учеников должны быть полными и точными, желательно привлекать больше учеников для ответов.

Рассмотрим примерную схему вопросов эвристической беседы при доказательстве теоремы: «Сложение векторов переместительно для двух векторов a и b». Пусть $a = OA, b = OB$, причем O, A, B не лежат на одной прямой.

1. Что дано? Что требуется доказать в теореме?

2. Как мы убеждались в истинности закона переместительности для чисел?

3. Нельзя ли применить тот же прием здесь? Как?

4. Какой мы знаем способ нахождения суммы векторов?

5. Как записывается в виде формулы правило треугольника?

6. От какой точки надо отложить OB, чтобы можно было применить правило треугольника? Сделайте это.

7. Укажите полученную сумму векторов.

8. Как найти сумму векторов $b + a$? Сделайте это.

9. Укажите полученный результат. В чем вы убедились?

Так, мы получили новое правило сложения векторов - правило параллелограмма.

10. Для какого случая доказана теорема?

11. Какие еще могут быть случаи?

12. Можно ли свести к рассмотренному случаю тот случай, когда начала двух данных векторов различны?

13. Можно ли считать этот случай доказанным?

14. Был ли доказан нами переместительный закон сложения двух чисел в арифметике?

15. Как находят сумму двух векторов по правилу параллелограмма?

16. Когда удобно применять это правило?

Ученикам не придется скучать и отвлекаться, потому что они постоянно будут думать над вопросами учителя, освоят новый материал более осознанно и прочно, обретут опыт рассуждения и поиска, по наблюдениям Метельского [24, С.219].

Рассмотрим в качестве иллюстрации следующую задачу:

В трапеции $ABCD$ *углы* A *и* B *равны по* 90°*, а стороны* $AB = 2$, $BC = 1$, $AD = 4$. *Докажите, что диагонали этой трапеции взаимно перпендикулярны.*

Е.И. Лященко [19, С.154] предлагает следующие вопросы для обсуждения:

1. Что нужно доказать на геометрическом языке?
2. Что для этого достаточно доказать на векторном языке?
3. Есть ли в условии задачи векторы AC и BD?
4. Каким образом можно получить векторы AC и BD?
5. Что такое скалярное произведение векторов?
6. О чем свидетельствует полученный результат?

Предполагаемые ответы учащихся:

1. Нужно доказать, что $AC \perp BD$.
2. $AC \cdot BD = 0$.
3. В условии задачи нет векторов AC и BD.

4. Необходимо задать направление отрезков AC и BD, представить векторы AC и BD в виде суммы векторов - $AC = AB + BC,\ BD = AD - AB$.

5. Под скалярным произведением мы понимаем произведение длин векторов на косинус угла между ними - $AC \cdot BD = \ AB + BC \quad AD - AB \ = AB \cdot AD - AB^2 + BC \cdot AD + BC \cdot AB = 0 - 4 + 4 + 0 = 0$.

6. $AC \cdot BD = 0 => AC \perp BD$.

Данную задачу, по мнению Е.И. Лященко, нужно решить разными способами, не связанными с векторами, а затем сравнить все варианты и оценить эффективность каждого из них.

Каюмов О.Р. в [15, С.24] с сожалением говорит о том, что в учебниках геометрии нет диалогов, поэтому весь теоретический материал в статье он излагает в виде диалога Золушки и Феи, которые в несколько адаптированном виде знакомят читателей с особенностями векторного методами решения задач. На вопрос Золушки, можно ли обойтись без многомерных пространств, Фея ответила, что можно, но с ними проще, и привела в качестве примера задачу, в которой нет даже намеков на векторы.

Выделяют также кибернетический подход (Т.А. Ильина, Л.Н. Ланда) – подход, основание которого предполагает выделение методов алгоритмизации и программированного обучения [37, С.233]. Мищенко в [26, С.160] считает целесообразным дать описание способа откладывания от некоторой точки M вектора, равного данному AB, в виде алгоритма по шагам:

1. Через точку M провести прямую, параллельную AB.

2. Отложить на этой прямой от точки M отрезки MN и MN'.

3. Выбрать тот отрезок, который сонаправлен с вектором AB.

По мнению Мищенко, описание алгоритмов построения суммы двух векторов (правило треугольника, правило параллелограмма), суммы n векторов нужно дать по шагам.

В обучении главную роль играет мышление, но нельзя обойтись без чувственного познания. Дидактически принцип наглядности в обучении математике важен потому, что приходится иметь дело с пространственными формами и количественными отношениями реального мира. На основе ощущений у учеников формируются образные представления, отвлеченные математические понятия, усваиваются абстрактные математические отношения и зависимости [24, С.238].

Под *дидактическими средствами* чаще всего понимаются учебные и наглядные пособия, демонстрационные устройства, технические средства. Все же термин имеет более широкое значение – совокупность методов, форм содержания, способствующих достижению целей образования [37, С.235]. Дидактические средства бывают как для учителей, так и для учащихся. Первые представляют собой предметы, используемые учителем для эффективной реализации целей образования. Вторые - индивидуальные средства учащихся, учебники, пособия, письменные принадлежности.

В частности, в планиметрии широко распространены таблицы, плакаты по отдельным темам. К примеру, Мищенко считает, что полезно при объяснении материала по теме «Сложение векторов» использовать плакат, на котором представлено само построение суммы векторов и приводятся соответствующие правила. [26, С.162].

Информатизация современного общества оказывает влияние на все сферы общественной жизни, в том числе и на образование. Основным техническим средством передачи и переработки информации в настоящее время является компьютер, выступающий в качестве инструмента построения знания.

Особый интерес представляет роль компьютерных технологий в обучении геометрии, их использование способно повысить эффективность обучения за счет наглядного представления информации, оказывающего положительное влияние на формирование и развитие гибкого геометрического мышления.

Применение компьютера при обучении геометрии позволяет выявить специфические способы организации учебной деятельности, повысить интерес учащихся к геометрии; включить в процесс обучения новые типы задач; повысить объективность контроля знаний учащихся; успешно сочетать коллективные и индивидуальные методы обучения; предоставить учащимся возможности самоконтроля [20, С. 34-37].

Проблему выбора форм, методов и средств обучения учителю приходится решать при подготовке к каждому уроку. Следует иметь в виду, что ни один из методов обучения, несмотря на все достоинства, не может стать универсальным, единственным, всеобъемлющим.

Педагогический процесс требует разнообразия, причем не только от урока к уроку, но и на одном и том же уроке. Решающим критерием при выборе форм, средств и методов обучения служит возможность обеспечения приемлемой степени активности и самостоятельности мышления. Учителю необходимо следить за разработкой современных методов обучения, творчески применять их на уроках, а учащимся необходимо проявлять интерес, постоянное положительное отношение к урокам математики и деятельное желание трудиться на них [24, С.216]. Взаимная работа учителя и учеников – ключ к повышению эффективности обучения математике.

§6. Сущность векторного метода и его применение к решению задач

Существует два типа геометрических задач, которые могут быть решены векторным методом: аффинные и метрические.

Понимание условия коллинеарности двух векторов позволяет в векторной форме решать *аффинные задачи* [31, С. 203] (принадлежность точек прямой, отрезку, параллельность, деление отрезка в данном отношении) [39, С. 353].

Аффинные задачи условно можно разделить на «прямые» и «обратные». Прямые задачи – это те, в которых известно, что три точки принадлежат одной прямой, в них нужно установить или проверить соотношения между длинами отрезков. В обратных задачах наоборот требуется установить принадлежность точек прямой при известных соотношениях между длинами отрезков [43, С. 476].

Понимание свойств скалярного произведения, условия перпендикулярности двух векторов позволяет в векторной форме решать *метрические задачи* [31, С. 203] (взаимное расположение прямых, вычисление длины отрезка, величины угла, площадей) [39, С. 341].

Хотя векторный метод позволяет, как мы видим, решать широкий круг геометрических задач, но все же не стоит забывать, что он не является универсальным, к решению некоторых задач этот метод оказывается неприменим или малоэффективен [25, С. 386].

Умение применять векторный метод в конкретных случаях оказывается достаточно сложным, поэтому первоначально очень важно выявить его структуру.

В результате изучения специальной литературы [19, С. 151], [2, С. 56], [35, С.105-106] мы можем выделить *основные этапы решения задач векторным методом,* которые представлены в Таблице 2.

Таблица 2

Этапы решения задач векторным методом

№ п/п	Суть этапа
1.	Записать геометрические понятия и отношения на векторном языке: введение векторов, системы координат при необходимости; выбор базисных векторов; разложение выбранных векторов по базису.
2.	Составить векторное равенство (систему равенств) и преобразовать его/упростить, используя законы векторной алгебры.
3.	Перевести полученный векторный результат на геометрический язык и истолковать его смысл.

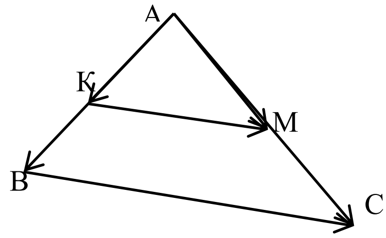
Проанализировав задачный материал учебников геометрии, а также учебно-методических пособий и математических журналов, мы выполнили подборку теорем и задач на вычисление и доказательство, которые успешно могут быть решены с привлечением векторного аппарата.

Векторный метод при доказательстве теорем

Теорема 1. Средняя линия треугольника параллельна одной из его сторон и равна ее половине (Рис. 2) [2, С. 57].

Дано: $\Delta\, ABC, AM = MC, AK = KB.$

Доказать: $KM||BC, KM = \frac{1}{2}BC.$



Доказательство: **Рис. 2**

Известно, что точки K и M – середины сторон AB и AC $\Delta\, ABC$.

На первом этапе запишем условие теоремы в векторной форме:

$$AK = \frac{1}{2}AB,\ AM = \frac{1}{2}AC$$

На втором этапе воспользуемся известным нам правилом треугольника

$$KM = -AK + AM = -\frac{1}{2}AB + \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}\ \ AC - AB\ \ = \frac{1}{2}BC$$

$$KM = \frac{1}{2}BC \qquad (1)$$

мы получили векторное решение.

На третьем этапе мы должны дать толкование полученному результату в исходных терминах теоремы. Равенство (1) говорит нам о том, что векторы KM и BC коллинеарны, то есть $KM||BC,$ и $KM = \frac{1}{2}BC.$ **Ч.Т.Д.**

Теорема 2. Диагонали прямоугольника (Рис. 3) имеют равные длины (Задача из [25, С. 385]).

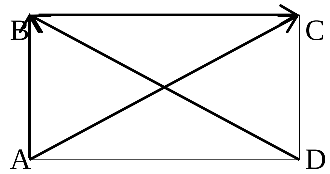


Рис. 3

Дано: $ABCD$ – прямоугольник.

Доказать: $AC = DB$**.**

Доказательство:

Известно, что $ABCD$ – прямоугольник, AC, BD – диагонали.

На первом этапе запишем условие задачи в векторной форме:

$$a = AB = DC, \qquad b = BC = AD, \qquad AB \cdot BC = 0.$$

На втором этапе воспользуемся правилом треугольника для сложения векторов:

$$AC = a + b$$
$$DB = a - b$$

Найдем квадраты диагоналей: $\begin{matrix} AC^2 = AC^2 = (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \\ DB^2 = DB^2 = (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \end{matrix}.$

Используем свойства скалярного произведения $ab = 0$, так как $a \perp b$, и

упрощаем: $\begin{matrix} AC^2 = a^2 + b^2 \\ DB^2 = a^2 + b^2 \end{matrix}.$

На третьем этапе мы должны дать толкование полученным результатам в исходных терминах задачи. Мы получили, что

$$AC^2 = DB^2 => AC^2 = DB^2 => AC = DB.$$ **Ч.Т.Д.**

Теорема 3. Квадрат любой стороны треугольника (Рис. 4) равен сумме квадратов двух других сторон без удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними - $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$ – теорема косинусов (Задача № 3 из [4, С. 332]).

Дано: $\Delta ABC, a, b, c$ – стороны ΔABC.

Доказать: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$.

Доказательство:

На первом этапе введем векторы: $a = CB$, $b = CA, c = AB$.

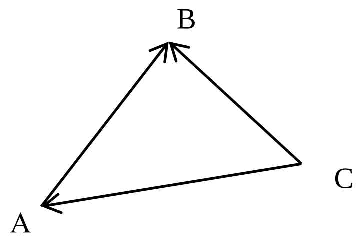


Рис. 4

На втором этапе выразим вектор $c = a - b$. Найдем скалярный квадрат:

$$c^2 = |c|^2 = (a-b)^2 = a^2 - 2a \cdot b + b^2 = \ a^{\ 2} - 2\ a\ \cdot\ b\ \cos C + \ b^{\ 2}.$$

На третьем этапе мы должны дать толкование полученным результатам в исходных терминах задачи. Перейдем от длин векторов к длинам отрезков и получим: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$. **Ч.Т.Д.**

Теорема 4. Стороны треугольника (Рис. 4) пропорциональны синусам противолежащих углов - $\frac{\sin A}{a} = \frac{sinB}{b} = \frac{\sin C}{c}$ – теорема синусов (Задача № 4 из [4, С. 332]).

Дано: ΔABC, a, b, c – стороны ΔABC.

Доказать: $\frac{\sin A}{a} = \frac{sinB}{b} = \frac{\sin C}{c}$.

Доказательство:

На первом этапе введем векторы: $a = CB$, $b = CA$, $c = AB$.

На втором этапе выразим вектор $a = b + c$. Домножим обе части на $(b - c)$, получим

$$a \quad b - c \quad = (b + c)(b - c)$$

$$a \cdot b - a \cdot c = b^2 - c^2$$

$$a \;\cdot\; b \;\cos C - \; a \;\cdot\; c \;\cos B = b^2 - c^2.$$

Вынесем a за скобку, получим:

$$a \quad b \;\cos C - \; c \;\cos B \quad = b^2 - c^2.$$

Вместо a подставим формулу проекций $a = b\,cos\,C + c\;\;cos\,B,$ получим:

$$b \;\cos C + \; c \;\cos B \quad b \;\cos C - \; c \;\cos B \quad = b^2 - c^2$$

$$b^{\;2}(\cos \mathrm{C})^2 - \; c^{\;2} \;\cos B^{\;\;2} = b^2 - c^2.$$

Сгруппируем слагаемые, вынесем общий множитель за скобку, воспользуемся основным тригонометрическим тождеством, получим:

$$b^{\;2} \;\; 1 - \;\cos \mathrm{C}^{\;\;2} \;\; = \; c^{\;2}(1 - \;\cos B^{\;\;2})$$

$$b^{\;2}(sin\,\mathrm{C})^2 = \; c^{\;2}(sin\,B)^2$$

$$b \;\; sin\,\mathrm{C} = \; c \;\; sin\,B$$

$$\frac{sin\,B}{b} = \frac{sin\,\mathrm{C}}{c}.$$

Аналогично доказывается и равенство:

$$\frac{sin\,A}{a} = \frac{sin\,\mathrm{C}}{c}.$$

Значит,

$$\frac{sin\,A}{a} = \frac{sin\,B}{b} = \frac{sin\,\mathrm{C}}{c}.$$

На третьем этапе мы должны дать толкование полученным результатам в исходных терминах задачи. Перейдем от длин векторов к длинам отрезков и получим: $\frac{\sin A}{a} = \frac{sinB}{b} = \frac{\sin C}{C}$. **Ч.Т.Д.**

Теорема 5. Все высоты треугольника (Рис. 5) или их продолжения пересекаются в одной точке [2, С. 59].

Дано: ΔABC, $l_a \perp BC$, $l_b \perp AC$, $l_c \perp AB$.

Доказать: $M = l_a \cap l_b \cap l_c$.

Доказательство:

I случай

На первом этапе введем векторы MA и BC, где $M \in l_a$.

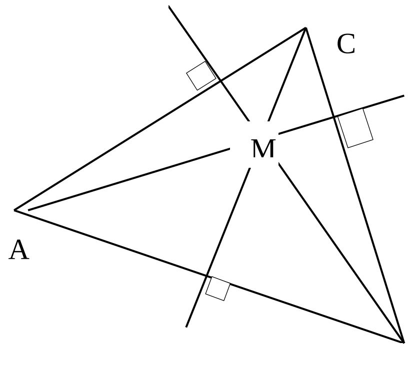


Рис. 5

На втором этапе выразим вектор $BC = BM + MC = MC - MB$. По условию $l_a \perp BC => MA \cdot BC = 0 <=> MA \cdot\ \ MC - MB\ \ = 0\ => MA \cdot MC = MA \cdot MB$. (*)

II случай

На первом этапе введем векторы MB и AC, где $M \in l_b$.

На втором этапе выразим вектор $AC = AM + MC = MC - MA$. По условию $l_b \perp AC => MB \cdot AC = 0 <=> MB \cdot\ \ MC - MA\ \ = 0 => MB \cdot MC = MB \cdot MA$. (**)

III случай

На первом этапе введем векторы MC и AB, где $M \in l_c$.

На втором этапе выразим вектор $AB = AM + MB = MB - MA$. По условию $l_c \perp AB => MC \cdot AB = 0 <=> MC \cdot\ \ MB - MA\ \ = 0 => MC \cdot MB = MC \cdot MA$. (***)

На третьем этапе мы должны дать толкование полученным результатам в исходных терминах задачи, подытоживая случаи I-III. Итак, если выполняется (*), (**), (***), то $M \in l_a,\ M \in l_b,\quad M \in l_c => M = l_a \cap l_b \cap l_c$. **Ч.Т.Д.**

Векторный метод в решении аффинных задач

Пример 6.1. Точка A_1 лежит на стороне BC, а точка B_1 - на стороне AC треугольника ABC (Рис. 6). O – точка пересечения отрезков AA_1 и BB_1, причем $\frac{AO}{OA_1} = \frac{BO}{OB_1} = \frac{2}{1}$. Докажите, что AA_1 и BB_1 – медианы треугольника (Самостоятельная работа-36 Задача №2 из [13, С. 82]).

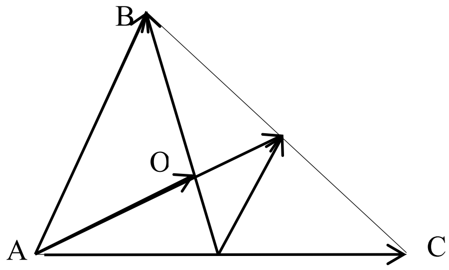


Рис. 6

Дано: $\Delta\, ABC, A_1 \in BC, B_1 \in AC,$
$O = AA_1 \cap BB_1, \frac{AO}{OA_1} = \frac{BO}{OB_1} = \frac{2}{1}$.

Доказать: AA_1 и BB_1 – медианы $\Delta\, ABC$.

Доказательство:

Известно, что $A_1 \in BC, B_1 \in AC$.

На первом этапе запишем условие задачи в векторной форме:

$$AO = 2OA_1, \qquad OB = 2B_1O.$$

На втором этапе воспользуемся известным нам правилом треугольника. Рассмотрим вектор AB:

$$AB = AO + OB = 2OA_1 + 2B_1O = 2\ B_1O + OA_1\ \ = 2B_1A_1.$$

$$AB = AC + CB = yB_1C + xCA_1, \text{где } AC = yB_1C,\ CB = xCA_1.$$

Выразим вектор $B_1A_1 = B_1C + CA_1 =>$

$$yB_1C + xCA_1 = 2\ B_1C + CA_1\ \ = 2B_1C + 2CA_1$$

$$y - 2\ B_1C = \ x - 2\ A_1C => x = 2, y = 2.$$

На третьем этапе мы должны дать толкование полученным результатам в исходных терминах задачи. Если отрезок AB вдвое больше отрезка B_1A_1, то B_1A_1 – средняя линия, а значит, $A_1, B_1 -$ середины отрезков BC и AC, то есть AA_1 и BB_1 – медианы $\Delta\, ABC$. **Ч.Т.Д.**

Пример 6.2. Диагонали параллелограмма $ABCD$ (Рис. 7) пересекаются в точке O. Точка K лежит на стороне BC, а E – на AD, причем $\frac{BK}{KC} = \frac{DE}{AE} = \frac{1}{2}$. Докажите, что O – середина KE (Самостоятельная работа-36 Задача №1 из [13, С. 72]).

Дано: $ABCD$ – параллелограмм,

$K \in BC, E \in AD, \frac{BK}{KC} = \frac{DE}{AE} = \frac{1}{2}$.

Доказать: O – середина KE.

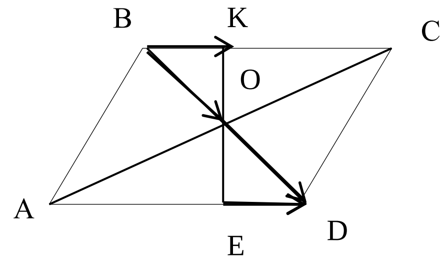


Рис. 7

Доказательство:

Известно, что $K \in BC, E \in AD, \frac{BK}{KC} = \frac{DE}{AE} = \frac{1}{2}$.

На первом этапе запишем условие задачи в векторной форме:

$$2BK = KC, \qquad 2ED = AE, \qquad BC = AD.$$

На втором этапе воспользуемся известным нам правилом сложения векторов:

$$BC = BK + KC = BK + 2BK = 3BK,$$

$$AD = AE + ED = 2ED + ED = 3ED.$$

Из выше указанных равенств заключаем, что $BK = ED$. Вспоминаем правило треугольника для сложения векторов. Рассмотрим векторы BK и ED:

$$BK = BO + OK,$$

$$ED = EO + OD = EO + BO.$$

На третьем этапе мы должны дать толкование полученным результатам в исходных терминах задачи. Если $BK = ED, BO = OD$, то $EO = OK \;=>\; O$ – середина KE. **Ч.Т.Д.**

Пример 6.3. На стороне AD и на диагонали AC параллелограмма $ABCD$ (Рис. 8) отметили соответственно M и N так, что $AM = \frac{1}{5}AD$ и $AN = \frac{1}{6}AC$.

Докажите, что точки M, N, B лежат на одной прямой (Задача № 574 из [23, С. 133]).

Дано: $ABCD$ – параллелограмм,

$AM = \frac{1}{5}AD$, $AN = \frac{1}{6}AC$.

Доказать: $N \in BM$.

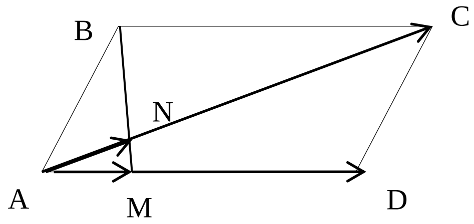


Рис. 8

Доказательство:

Если мы докажем, что векторы MN и MB коллинеарны, то сможем утверждать, что точки M, N, B лежат на одной прямой.

На первом этапе запишем условие задачи в векторной форме:

$$AM = \frac{1}{5}AD, \qquad AN = \frac{1}{6}AC.$$

На втором этапе воспользуемся правилом треугольника для векторов:

$$AC = AB + AD,$$

$$AN = \frac{AB + AD}{6}.$$

Выразим векторы MB, MN:

$$MB = MA + AB = -AM + AB = -\frac{1}{5}AD + AB,$$

$$MN = MA + AN = -AM + AN = -\frac{1}{5}AD + \frac{AB + AD}{6}.$$

Выполним упрощения:

$$MN = -\frac{1}{5}AD + \frac{1}{6}AB + \frac{1}{6}AD = -\frac{1}{30}AD + \frac{1}{6}AB = \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{5}AD + AB\right) = \frac{1}{6}MB.$$

На третьем этапе мы должны дать толкование полученным результатам в исходных терминах задачи. Мы получили, что $MN = \frac{1}{6}MB$, то есть MB, MN коллинеарны $=>$ точки M, N, B лежат на одной прямой. **Ч.Т.Д.**

Пример 6.4. Используя векторы, докажите, что середины диагоналей (Рис. 9) четырехугольника и точка пересечения отрезков, соединяющих середины противоположных сторон, лежат на одной прямой (Задача № 908 из [6, С.226]).

Дано:

$ABCD$ – четырехугольник,

$AF = FC, BE = ED,$

где AC, BD – диагонали,

$PG = GQ.$

Доказать:

$F, G, E \in \alpha.$

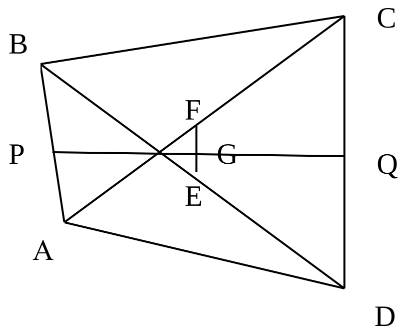


Рис. 9

Доказательство:

Пусть E, F – середины диагоналей четырехугольника $ABCD$, G – точка пересечения средних линий. Пусть O – произвольная точка, тогда введем векторы $OG = \frac{1}{2}\ OP + OQ\ , OE = \frac{1}{2}\ OA + OC\ , OF = \frac{1}{2}\ OB + OD\ , OQ = \frac{1}{2}\ OC + OD\ , OP = \frac{1}{2}\ OA + OB\ .$

Далее преобразуем имеющиеся векторные равенства: $OG = \frac{1}{2}\frac{1}{2}\ OA + OB + OC + OD\ \ = \frac{1}{2}\ OE + OF\ $. Так, $2OG = OE + OF, 2OG - OE - OF = 0.$

Полученный результат свидетельствует о том, что точки F, G, E лежат на одной прямой. **Ч.Т.Д.**

Пример 6.5. В параллелограмме $ABCD$ (Рис. 10) проведены две параллельные хорды AK и CL ($K \in BC,\ L \in DA$). Докажите, что хорды DK и BL параллельны (Задача № 24.16 из [2, С. 69]).

Дано:

$ABCD$ – параллелограмм,

$K \in BC, L \in DA$, $AK||CL.$

Доказать:

$DK||BL.$

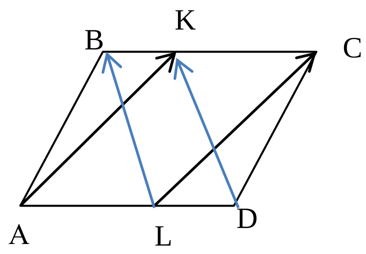


Рис. 10

Доказательство:

На первом этапе введем векторы AK, LC, KC, AL. По условию прямые AK и LC параллельны, $KC||AL$, так как $ABCD$ – параллелограмм, значит,

$AKCD$ – параллелограмм, на векторном языке это будет выглядеть следующим образом:

$$AK = LC,\ KC = AL \qquad (1)$$

На втором этапе выразим векторы

$$LB = LA + AB,$$

$$DK = DC + CK.$$

Векторы $AB = DC$ по условию, векторы $LA = CK$ из (1)=> $LB = DK$.

На третьем этапе мы должны дать толкование полученным результатам в исходных терминах задачи. Векторы $LB = DK$, значит, $LB =\ DK$ и $LB||DK$. **Ч.Т.Д.**

Векторный метод в решении метрических задач

Пример 6.6. В четырехугольнике $ABCD$ (Рис. 11) диагонали AC и BD перпендикулярны и пересекаются в точке O. Известно, что $OB = OC = 1$, $OA = 2, OD = 3$. Найдите угол между прямыми AB и DC (Задача № 615 из [23, С. 144]).

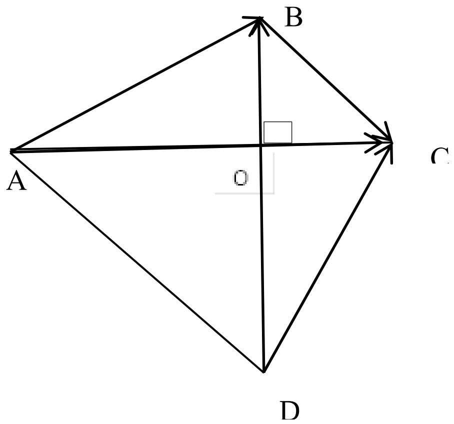


Рис. 11

Дано: $ABCD$ – четырехугольник,

$AC \perp BD, OB = OC = 1,\ OA = 2, OD = 3$.

Найти: $\angle(AB; DC)$.

Решение:

Рассмотрим ΔAOB:

по теореме Пифагора $AO^2 + BO^2 = AB^2$, где $OA = 2$,

$OB = 1$, найдем $AB = \sqrt{5}$. Аналогично для ΔCOD по теореме Пифагора $CO^2 + OD^2 = CD^2$ находим $CD = \sqrt{10}$.

Далее используем векторный метод.

На первом этапе введем векторы: AB, AO, OB, DC, DO, OC.

На втором этапе воспользуемся правилом треугольника для суммы двух векторов:

$$AB = AO + OB$$
$$DC = DO + OC$$

Найдем скалярное произведение векторов AB и DC:

$$AB \cdot DC = \ AB \ \cdot \ DC \ \cos \propto = \ AO + OB \quad DO + OC$$
$$= \ AO \ \cdot \ OC \ + \ OB \ \cdot \ DO \ = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 3 = 5.$$

Найдем угол $\propto$, подставив в формулу $AB \cdot DC = \ AB \ \cdot \ DC \ \cos \propto$ известные данные:

$$5 = \sqrt{5} \cdot \sqrt{10} \cos \propto$$
$$\cos \propto = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\propto = 45^{\mathrm{o}}.$$

На третьем этапе мы должны дать толкование полученным результатам в исходных терминах задачи. Мы нашли угол между векторами AB и DC, который равен $\propto = 45^{\mathrm{o}}$, а эти векторы являются направляющими для прямых AB и DC $=> \propto = 45^{\mathrm{o}}$ – искомый угол.

Ответ: 45^{o}.

Пример 6.7. В треугольнике ABC (Рис. 12) проведена медиана BD. Известно, что $\angle DBC = 90^{o}$, $BD = \frac{\sqrt{3}}{4} AB$. Найдите $\angle ABD$ (Задача № 616 из [23, С. 144]).

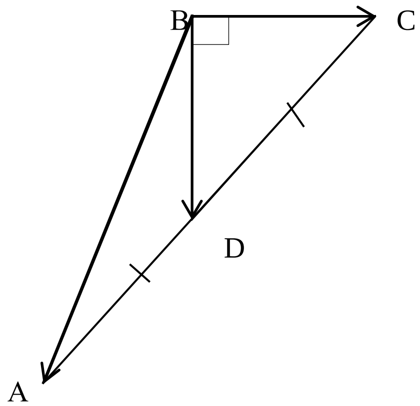


Рис. 12

Дано: $\Delta ABC, BD$ – медиана,

$\angle DBC = 90^{o}, BD = \frac{\sqrt{3}}{4} AB.$

Найти: $\angle ABD$.

Решение:

На первом этапе введем векторы: $BD,\ BC,$ BA.

На втором этапе воспользуемся ранее выведенными соотношениями для медианы треугольника:

$$BD = \frac{1}{2}\ BA + BC\ .$$

Далее умножим обе части равенства на BD, получим

$$BD^2 = \frac{1}{2}\ BD \cdot BA + BD \cdot BC\ \ = \frac{1}{2}(BD \cdot BA).$$

$$BD^2 = \frac{1}{2}\ BD\ \cdot\ BA\ \cos\angle ABD.$$

Известно, что $BD = \frac{\sqrt{3}}{4}AB$, значит,

$$\frac{\sqrt{3}}{4}AB\ ^2 = \frac{1}{2}\ \frac{\sqrt{3}}{4}AB\ \cdot\ BA\ \cos\angle ABD$$

$$\cos\angle ABD = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\angle ABD = 30^o.$$

На третьем этапе мы должны дать толкование полученным результатам в исходных терминах задачи. Мы нашли, что угол между векторами $BD,\ BA$ равен 30^o => угол между отрезками BD и BA равен 30^o.

Ответ: 30^o.

Пример 6.8. В прямоугольном равнобедренном треугольнике (Рис. 13) проведены медианы из вершин острых углов. Найдите острый угол между этими медианами (Задача № 1069 из [6, С. 273]).

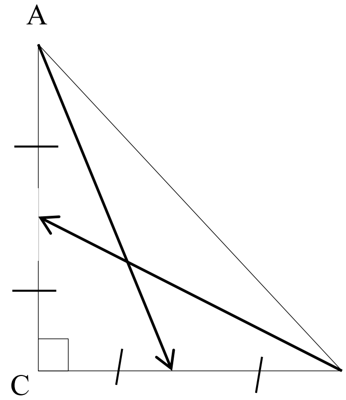


Рис. 13

Дано: $\Delta ABC, \angle C = 90^o,$

$BC = AC,\ AA_1, BB_1$ – медианы.

Найти: $\angle(AA_1; BB_1)$.

Решение:

Найдем длину отрезка медианы AA_1 из ΔAA_1C по теореме Пифагора $CA_1{}^2 + AC^2 =$ $= AA_1{}^2$, пусть $BC = AC - x$, тогда $AA_1 = \sqrt{(\frac{x}{2})^2 + x^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}x$. Аналогично найдем длину медианы BB_1 из ΔBB_1C: $BB_1 = \frac{\sqrt{5}}{2}x$.

Далее используем векторный аппарат.

На первом этапе введем векторы: $AA_1,\ BB_1,\ AC,\ CA_1,\ BC,\ CB_1$.

На втором этапе воспользуемся правилом треугольника для суммы векторов:

$$\begin{matrix} AA_1 = AC + CA_1 \\ BB_1 = BC + CB_1 \end{matrix}.$$

Найдем скалярное произведение векторов

$$AA_1 \cdot BB_1 = \ AC + CA_1 \quad BC + CB_1 \ = \ AC \ \cdot \ CB_1 \ + \ CA_1 \ \cdot \ BC \ = x^2. \quad (1)$$

С другой стороны,

$$AA_1 \cdot BB_1 = \ AA_1 \ \cdot \ BB_1 \ \cos\propto = \frac{\sqrt{5}}{2}x \cdot \frac{\sqrt{5}}{2}x\cos\propto, \quad (2)$$

где $\propto$ - угол между AA_1, BB_1. Приравняем (1) и (2), получим

$$\frac{\sqrt{5}}{2}x \cdot \frac{\sqrt{5}}{2}x\cos\propto = x^2$$

$$\cos\propto = \frac{4}{5}\ , \propto = arccos\frac{4}{5}.$$

На третьем этапе мы должны дать толкование полученным результатам в исходных терминах задачи. Мы нашли угол между векторами AA_1, BB_1, который равен $\propto = arccos\frac{4}{5}$, а эти векторы являются направляющими для прямых, содержащих медианы AA_1, BB_1, значит, $\propto = arccos\frac{4}{5}$ – искомый угол.

Ответ: $arccos\frac{4}{5}$.

Пример 6.9. Используя скалярное произведение, найти в данном треугольнике (Рис. 14) длину медианы (Задача № 24.1 из [2, С. 67]).

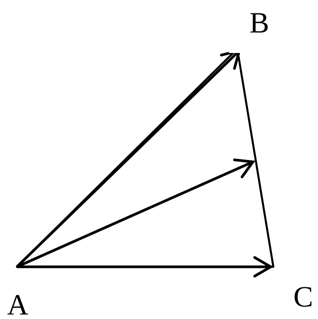


Рис. 14

Дано:

ΔABC, AA_1 – медиана,

a, b, c – длины сторон ΔABC.

Найти:

AA_1 .

Решение:

Основным для нахождения длин отрезков векторным методом является $|a|^2 = a^2$. Воспользуемся тем, что AA_1 – медиана, поэтому $AA_1 = \frac{1}{2}\ AB + AC$.

Скалярный квадрат AA_1 получается возведением обеих частей в квадрат:

$$AA_1{}^2 = \ \frac{1}{2}\ AB + AC \quad {}^2 .$$

$$AA_1{}^2 = \frac{1}{4}\ AB^2 + 2AB \cdot AC + AC^2 \ \ = \frac{1}{4}\ c^2 + 2cb + b^2$$

$$= \frac{1}{4}\ c^2 + b^2 + 2cb\cos A \ \ = \frac{1}{4}\ \ c^2 + b^2 + 2cb\frac{c^2 + b^2 - a^2}{2cb}$$

$$= \frac{1}{4}\ 2c^2 + 2b^2 - a^2\ .$$

Тогда $AA_1 = \frac{1}{2}\ \ \overline{2c^2 + 2b^2 - a^2}$.

Ответ: $AA_1 = \frac{1}{2}\ \ \overline{2c^2 + 2b^2 - a^2}$.

Итак, мы выяснили, что выделяют аффинные и метрические задачи, которые могут быть решены с применением аппарата векторной алгебры; проанализировали основные этапы решения задач векторным методом. В качестве примера привели доказательства с помощью векторов известных ранее теорем из курса геометрии основной школы, а также подобрали и решили планиметрические задачи векторным методом.

Выводы по первой главе

В первой главе были получены следующие результаты:

1. Рассмотрены исторические аспекты развития векторного исчисления в математической науке и образовании. Было выяснено, что еще в Древней Греции математики выполняли действия с отрезками. В XIX столетии в связи с бурным развитием естествознания появилась необходимость оформления векторного исчисления в том виде, каким мы его принимаем сейчас. Термин «вектор» был введен Гамильтоном, обозначение вектора с помощью черты ($\overline{\mathrm{AB}}$) было введено Карно, а обозначение вектора с помощью стрелки (AB) - О. Коши. Векторы с большим трудом пробивали себе дорогу в образовательную систему. Благодаря усилиям ученых (В.Г. Болтянский, И.М. Яглом, А.Н. Колмогоров, З.А. Скопец) они заняли почетное место в школьной и вузовской программах.

2. Выявлены различные подходы к определению понятия «вектор» в курсе геометрии основной школы. Во многих учебных курсах встречается определение вектора как направленного отрезка (Л.С. Атанасян, А.В. Погорелов), но такая трактовка является далеко не единственной. Помимо той трактовки, которая была представлена выше, вектор рассматривают как параллельный перенос (А.Н. Колмогоров, А.Ф. Семенович, Р.С. Черкасов), бесконечное множество направленных отрезков. Считается, что у каждой формулировки есть как достоинства, так и недостатки (степень наглядности, логичность, соответствие представлениям о векторных величинах).

3. Рассмотрены государственные стандарты основного общего образования по математике. Проанализированы цели обучения векторному методу в курсе геометрии основной школы. Итак, векторный аппарат предлагает новый метод решения геометрических задач на вычисление и доказательство, способствует реализации межпредметных связей.

4. Выделены требования, предъявляемые к знаниям, умениям и навыкам учащихся по теме «Векторы» в зависимости от уровня изучения геометрии: базового, расширенного (базовый + профильный), углубленного.

Согласно Примерной образовательной программе по математике учащиеся должны овладеть векторным методом на профильном уровне изучения геометрии. Был изучен спецификатор ОГЭ-2017 по математике.

5. Рассмотрены различные формы, методы и средства обучения векторному методу. Основной формой организации обучения является урок. Одними из ведущих методов обучения векторному методу являются эвристическая беседа, система правил и алгоритмов. Были рассмотрены примеры эвристической беседы, алгоритмов при обучении векторам и векторному методу. При организации обучения геометрии целесообразно использовать различные наглядные пособия: таблицы, плакаты, карточки, рабочие тетради на печатной основе. В настоящее время в образовательном процессе активно применяются компьютерные технологии.

6. Выявлена сущность векторного метода решения планиметрических задач. Векторный метод включает в себя три основных этапа (перевод языка условия задачи на векторный язык, выполнение действий над векторными выражениями, перевод полученного результата на исходные термины задачи). Проиллюстрировано применение векторного метода при доказательстве теорем, решении аффинных и метрических задач.

ГЛАВА II. МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОБУЧЕНИЯ ВЕКТОРНОМУ МЕТОДУ В КУРСЕ ГЕОМЕТРИИ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ

§7. Анализ содержания темы «Векторы и их применение к решению задач» в учебниках геометрии, рекомендованных Минобрнауки РФ

Рассмотрев перечень учебников геометрии основной школы, рекомендованных к использованию в образовательных учреждениям согласно приказам Министерства образования и науки РФ № 253 от 31.03.2014 г. [42] и № 38 от 26.01.2016 г. [32], мы в качестве базового выбрали учебник под редакцией Л.С. Атанасяна. Кроме того, мы сравнили учебные программы к пособиям разных авторских коллективов.

На тему «Векторы» в основном курсе геометрии по учебнику Л.С. Атанасяна [6] отводится 8 часов. Практически все содержание темы сосредоточено в главе IX учебника, за исключением темы «Скалярное произведение векторов» (2 часа), которая представлена в XI главе пособия.

Основная *цель изучения векторов в данном курсе* – это знакомство учащихся с векторным методом решения задач. Задачный материал в первую очередь направлен на закрепление введенных понятий, их свойств и законов [26, С. 156].

Теперь более подробно изучим структуру темы «Векторы» в учебнике *Л.С. Атанасяна*. На §1 «Понятие вектора» выделен 1 час. Мищенко отмечает [26, С. 156], что понятие вектора у Л.С. Атанасяна вводится на наглядном уровне: «Направленный отрезок называется вектором».

В результате изучения §1 главы IX учебника учащиеся должны научиться:

– изображать, распознавать, обозначать со(противоположно) направленные, равные векторы;

– уметь объяснять вышеназванные понятия;

– откладывать от любой точки вектор, равный данному;

– познакомиться с понятием «модуль вектора» [26, С. 157].

На втором уроке рассматривают §2 «Сложение векторов». В этом параграфе учащиеся знакомятся с операциями над векторами, их свойствами, узнают правила треугольника, параллелограмма для суммы двух векторов и правило многоугольника для суммы n – векторов. Для успешного решения задач векторным методом необходимо прочно освоить геометрические правила сложения векторов.

В результате изучения §2 главы IX учебника учащиеся должны научиться:

– находить сумму / разность двух векторов, заданных геометрически;

– объяснять правила треугольника, параллелограмма, многоугольника для суммы векторов;

– применять при решении задач на нахождение суммы / разности переместительный и сочетательный законы [26, С. 160].

На §3 «Умножение вектора на число. Применение векторов к решению задач» отводится 3 часа. На уроке №2 учащиеся познакомились с двумя операциями – сложением и вычитанием векторов, в рамках темы §3 вводится операция – умножение вектора на число, свойства данной операции. Особое внимание Мищенко [26, С. 163] рекомендует уделить теореме о средней линии трапеции.

В результате изучения §3 главы IX учебника учащиеся должны научиться:

– изображать и распознавать среднюю линию на чертежах, знать ее свойства;

– формулировать свойства умножения вектора на число;

– применять сочетательный и распределительный законы при решении задач на нахождение произведения вектора на число [26, С. 164].

Заметим, что изученные на данном этапе линейные операции над векторами являются подспорьем курса аналитической геометрии [52, С.60].

Пункт «Применение векторов к решению задач» содержит 5 задач. Задачу № 788 [6] «Дан произвольный треугольник ABC. Докажите, что существует треугольник, стороны которого соответственно параллельны и равны медианам треугольника ABC» авторы приводят в качестве примера. Сначала рассмотрим решение этой задачи, которое предлагается в учебнике [6], а затем оформим решение с учетом этапов векторного метода.

Решение 1:

Пусть AA_1, BB_1, CC_1 – медианы треугольника ABC. Тогда $AA_1 = \frac{1}{2}\ \ AB + AC\ $, $BB_1 = \frac{1}{2}\ \ BC + BA\ $, $CC_1 = \frac{1}{2}\ \ CA + CB\ $. Сложив эти равенства, получим $AA_1 + BB_1 + CC_1 = \frac{1}{2}\ \ \ AB + BA\ \ +\ \ AC + CA\ \ +\ \ BC + CB\ \ \ \ = 0$.

Отсюда следует, что если мы построим сумму векторов $AA_1,\ BB_1,\ CC_1$ по правилу многоугольника, то получим треугольник MNP (Рис. 15-16), удовлетворяющий условиям задачи. **Ч.Т.Д.**

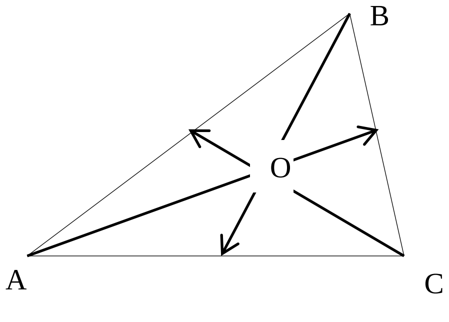


Рис. 15

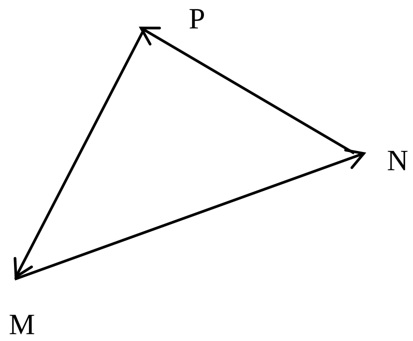


Рис. 16

Решение 2:

Известно, что AA_1, BB_1, CC_1 – медианы ΔABC, то есть $AB_1 = B_1C$, $BA_1 = A_1C$, $AC_1 = C_1B$. Если такой треугольник MNP существует, то выполняется $AA_1 + BB_1 + CC_1 = 0$ – по правилу многоугольника.

На первом этапе запишем условие задачи в векторной форме:

$$AB_1 = \frac{1}{2}AC, \qquad BA_1 = \frac{1}{2}BC, \qquad AC_1 = \frac{1}{2}AB.$$

На втором этапе воспользуемся правилом треугольника для сложения векторов:

$$AA_1 = AC + CA_1 = AC + \frac{1}{2}CB$$
$$BB_1 = BC + CB_1 = -CB + \frac{1}{2}CA = -CB - \frac{1}{2}AC \qquad (1)$$
$$CC_1 = CA + AC_1 = CA + \frac{1}{2}AB = -AC + \frac{1}{2}AB$$

Сложим равенства совокупности (1), получим

$$AA_1 + BB_1 + CC_1 = AC + \frac{1}{2}CB - CB - \frac{1}{2}AC - AC + \frac{1}{2}AB$$
$$= -\frac{1}{2}CB - \frac{1}{2}AC + \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}\ \ AB + BC + CA\ \ = \frac{1}{2}AA = 0.$$

На третьем этапе мы должны дать толкование полученным результатам в исходных терминах задачи. Мы выяснили, что существует такой треугольник MNP (Рис. 16), у которого стороны равны медианам треугольника ABC AA_1, BB_1, CC_1. **Ч.Т.Д.**

Нетрудно заметить, что второй вариант оформления решения иллюстрирует специфику векторного метода решения задач.

Остальные 4 задачи этого пункта предлагаются для самостоятельного решения. Рассмотрим решение этих задач векторным методом, делая акцент на каждом этапе.

Пример 7.1. На сторонах треугольника ABC (Рис. 17) построены параллелограммы ABB_1A_2, BCC_1B_2, ACC_2A_1. Докажите, что существует треугольник, стороны которого соответственно параллельны и равны отрезкам A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 (Задача № 789 из [6, С. 212]).

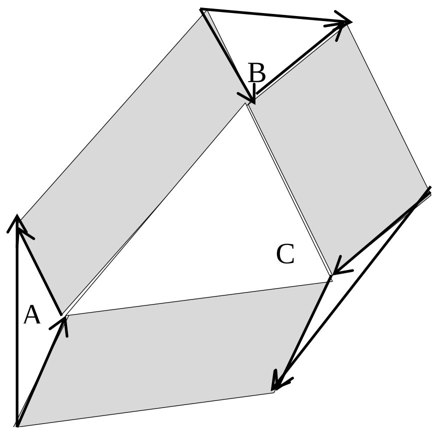


Рис. 17

Дано: $\Delta\, ABC$, ABB_1A_2, BCC_1B_2, ACC_2A_1 – параллелограммы.

Доказать: $\exists\Delta MNP,\ A_1A_2||MN,$
$B_1B_2||MP, C_1C_2||NP.$

Доказательство:

Если такой треугольник MNP существует, то сумма векторов, отложенных на сторонах данного треугольника, равна нулевому вектору, иными словами, нам нужно доказать, что $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$

На первом этапе введем векторы $A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2.$

На втором этапе воспользуемся известным нам правилом сложения векторов:

$$\begin{aligned} A_1A_2 &= A_1A + AA_2 \\ B_1B_2 &= B_1B + BB_2 \\ C_1C_2 &= C_1C + CC_2 \end{aligned} \qquad (1)$$

По условию задачи $ABB_1A_2,\ BCC_1B_2,\ ACC_2A_1$ – параллелограммы, значит,

$$AA_2 = BB_1,\ CC_1 = BB_2,\ AA_1 = CC_2. \qquad (2)$$

Сложим равенства (1), получим $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = A_1A + AA_2 + B_1B + BB_2 + C_1C + CC_2$. Воспользовавшись (2), имеем

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = A_1A + BB_1 + B_1B + CC_1 + C_1C + AA_1 = 0.$$

На третьем этапе мы должны дать толкование полученным результатам в исходных терминах задачи. Итак, мы выяснили, что существует такой треугольник MNP, у которого стороны параллельны отрезкам A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2. **Ч.Т.Д.**

Пример 7.2. Докажите, что отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции (Рис. 18), параллелен ее основаниям и равен полуразности оснований (Задача №790 из [6, С. 212]).

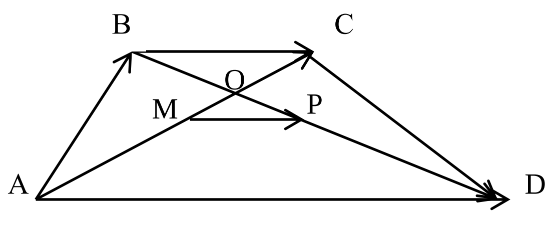


Рис. 18

Дано: ABCD – трапеция,
$BC||AD, BP = PD, AM = MC.$

Доказать: $MP||BC, MP||AD,$

$MP = \frac{1}{2}(AD - BC).$

Доказательство:

Известно, что точки M и P – середины отрезков диагоналей AC и BD трапеции ABCD.

На первом этапе запишем условие задачи в векторной форме:

$$BC \uparrow\uparrow AD, \qquad AM = MC, \qquad BP = PD.$$

На втором этапе воспользуемся известным нам правилом многоугольника. С одной стороны, $MP = -AM + AB + BP = -AM + AB + PD$. С другой стороны, $MP = MC + CD - PD = AM + CD - PD$. Сложим полученные равенства и выразим MP:

$$MP = \frac{AB+CD}{2} \qquad (1)$$

Выразим $AB = AD - CD - BC$. Подставим это выражение в (1):

$$MP = \frac{AD-CD-BC+CD}{2} = \frac{AD-BC}{2}$$ - векторное решение. (2)

На третьем этапе мы должны дать толкование полученному результату в исходных терминах задачи. Равенство (2) говорит нам о том, что векторы $MP \uparrow\uparrow AD$, поэтому $MP||AD$, так как $BC \uparrow\uparrow AD$, $AD - BC = AD - BC$, поэтому $MP = \frac{1}{2}(AD - BC)$. **Ч.Т.Д.**

Пример 7.3. Докажите, что отрезки, соединяющие середины противоположных сторон произвольного четырехугольника (Рис. 19), точкой пересечения делятся пополам (Задача № 791 из [6, С. 213]).

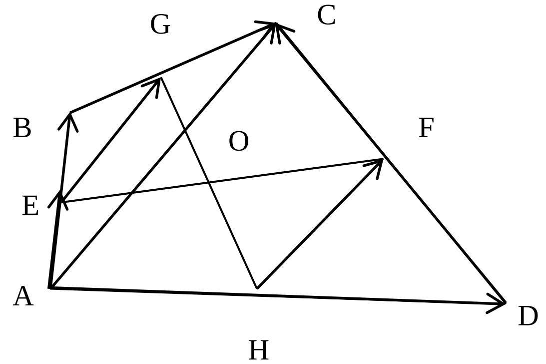


Рис. 19

Дано: ABCD – четырехугольник,

$O = GH \cap EF,\ AE = EB, BG = GC, CF = FD, AH = HD.$

Доказать: $EO = OF, GO = OH.$

Доказательство:

Известно, что $AE = EB, BG = GC, CF = FD, AH = HD$.

На первом этапе запишем условие задачи в векторной форме:

$$AE = EB, \qquad BG = GC, \qquad AH = HD, \qquad DF = FC.$$

На втором этапе воспользуемся известным нам правилом треугольника. Рассмотрим вектор AC:

$$AC = AB + BC = AD + DC.$$

Рассмотрим векторы EG, HF:

$$EG = EB + BG = \frac{1}{2}AB + \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}AC,$$

$$HF = HD + DF = \frac{1}{2}AD + \frac{1}{2}DC = \frac{1}{2}AC.$$

Мы видим, что $EG = HF$.

На третьем этапе мы должны дать толкование полученным результатам в исходных терминах задачи. Векторы EG и AC коллинеарны, то есть $EG||AC$, векторы HF и AC коллинеарны, то есть $HF||AC$, $EG = HF =>$ $EGFH$ – параллелограмм $=> \ EO = OF, GO = OH$. **Ч.Т.Д.**

В задаче № 792 [6] авторы предлагают учащимся доказать теорему о средней линии треугольника (доказательство рассмотрено выше).

Урок №6 Мищенко [26] рекомендует посвятить систематизации и обобщению знаний, на уроке №7 выполнить контрольную работу, а урок №8 обозначен как резервный.

Тема «Скалярное произведение векторов» представлена у Л.С. Атанасяна после темы «Соотношение между сторонами и углами треугольника» и перед темой «Длина окружности и площадь круга». На ее изучение, как уже говорилось ранее, отводится 2 часа. В изучаемом параграфе вводится новая операция над векторами - скалярное произведение, которое определяется через длины векторов и угол между ними.

В результате изучения §3 главы XI учебника учащиеся должны научиться:

– объяснять определение скалярного произведения векторов, его свойства и угла между векторами;

– устанавливать перпендикулярность прямых;

– применять скалярное произведение векторов при решении задач на вычисление и доказательство [28, С. 49].

Скалярное произведение векторов занимает почетное место в курсе аналитической геометрии. С трактовкой этого понятия, а также свойствами можно ознакомиться, например, в [48, С.14].

В качестве иллюстрации применения скалярного произведения к решению задач приведем № 1056.

Пример 7.4. Докажите, что диагонали ромба (Рис. 20) взаимно перпендикулярны (Задача № 1056 из [6, С. 271]).

Дано: $ABCD$ – ромб.

Доказать: $AC \perp BD$.

Доказательство:

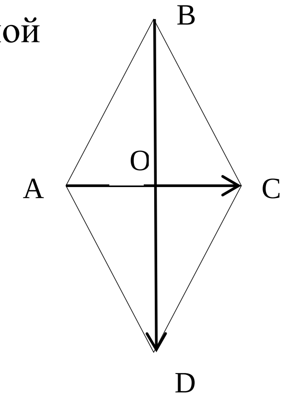


Рис. 20

На первом этапе запишем условие задачи в векторной форме:

$$AB = DC, \qquad AD = BC.$$

На втором этапе воспользуемся правилом треугольника для сложения векторов:

$$AC = AB + AD$$
$$BD = -AB + AD$$

Найдем скалярное произведение векторов

$$AC \cdot BD = \quad AD + AB \quad AD - AB \quad = AD^2 - AB^2.$$

Так как $AD \ = \ AB \ = a \Rightarrow AC \cdot BD = a^2 - a^2 = 0 \Rightarrow AC \perp BD$.

На третьем этапе мы должны дать толкование полученным результатам в исходных терминах задачи. Мы выяснили, что $AC \perp BD$, значит, $AC \perp BD$. **Ч.Т.Д.**

Тема «Векторы» в учебном пособии *А.В. Погорелова* [30] расположена в §10, далее векторный аппарат не встречается в курсе планиметрии. На изучение векторов выделено 10 часов.

Основная *цель изучения векторов в данном курсе* может быть сформулирована так же, как и по учебнику геометрии Л.С. Атанасяна. Автор пособия [27, С. 179] Т.М. Мищенко считает, что при изучении темы следует обратить особое внимание на формирование умений учащихся выполнять действия над векторами, как в координатной, так и геометрической формах.

Рассмотрим структуру темы «Векторы» в учебнике А. В. Погорелова. На пункт «Абсолютная величина и направление вектора. Равенство векторов» выделено 2 часа. Мищенко [27, С. 179] отмечает, что формулировка вектора как направленного отрезка опирается на рисунок из пункта 91 учебника, здесь же вводится обозначение вектора.

В результате изучения пунктов 91 и 92 учебника учащиеся должны научиться:

– изображать и отмечать на чертежах векторы;

– откладывать от точки вектор, равный данному;

– объяснять определения следующих понятий: векторы, одинаково (противоположно) направленные, равные векторы;

– объяснять понятие модуля вектора [27, С. 179].

На уроке №2 вводятся координаты вектора, определяющие его с точностью до равенства, другими словами, они задают множество одинаково направленных векторов, имеющих равные длины.

В результате изучения пункта 93 учащиеся должны научиться:

– находить координаты вектора по координатам его конца и начала;

– вычислять длину вектора в координатной форме;

– решать простейшие задачи в координатной форме [27, С. 183].

На уроке №3 учащиеся знакомятся с темой «Сложение векторов. Сложение сил». В данном пункте 94 вводится операция над векторами – сложение, причем оно сразу рассматривается как в координатной, так и геометрической формах (правило треугольника и параллелограмма).

В результате изучения пункта 94 учащиеся должны научиться:

– строить сумму (разность) векторов в геометрической форме;

– находить сумму (разность) векторов в координатной форме;

– объяснять переместительный, сочетательный законы сложения векторов [27, С. 186].

На уроках № 4-5 вводится новая операция над векторами – умножение на число. Определение умножения вектора на число дается в координатной форме, затем выясняется, как меняется длина и направление вектора при умножении на положительное (отрицательное) число.

В результате изучения пункта 96 учащиеся должны научиться:

– строить вектор ka при известном векторе a, заданном геометрически;

– находить координаты ka при известных координатах вектора a;

– объяснять два распределительных закона умножения вектора на число [27, С. 189].

На уроке №6 вводится еще одна операция над векторами – скалярное произведение, оно дается в координатной форме $a, b \; = x_1 x_2 + y_1 y_2$, где $a(x_1, y_1)$, $b(x_2, y_2)$, а также как произведение длин векторов на косинус угла между ними - $a, b \; = |a| \cdot |b| \cos \propto$.

В результате изучения пункта 98 учащиеся должны научиться:

– объяснять понятие скалярного произведения, угла между векторами;

– формулировать условие перпендикулярности векторов;

– вычислять скалярное произведение, угол между векторами [27, С. 195].

Материал «Разложение вектора по координатным осям» не относится к программному, поэтому рассматривается в ознакомительном порядке.

Решим следующую задачу из учебника А.В. Погорелова.

Пример 7.5. Докажите, что сумма квадратов диагоналей параллелограмма (Рис. 21) равна сумме квадратов его сторон (Задача № 38 из [30, С. 143]).

Дано: $ABCD$ – параллелограмм.

Доказать: $AC^2 + DB^2 = 2AB^2 + 2AD^2$.

Доказательство:

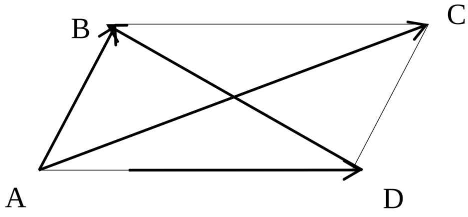


Рис. 21

На первом этапе введем векторы:

AD, AB, AC, DB.

На втором этапе воспользуемся правилом треугольника для векторов:

$$AC = AB + AD,$$

$$DB = -AD + AB.$$

Возведем эти равенства в квадрат, получим:

$$AC^2 = (AB + AD)^2 = AB^2 + 2AB \cdot AD + AD^2$$
$$DB^2 = (AB - AD)^2 = AB^2 - 2AB \cdot AD + AD^2.$$

Сложим эти равенства почленно: $AC^2 + DB^2 = 2AB^2 + 2AD^2$.

На третьем этапе мы должны дать толкование полученным результатам в исходных терминах задачи. У параллелограмма противолежащие стороны равны, получается, что сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов его сторон, то есть $AC^2 + DB^2 = 2AB^2 + 2AD^2$. **Ч.Т.Д.**

Урок №7 Мищенко [27, С. 198] рекомендует провести как урок систематизации и обобщения знаний и посвятить решению задач.

На уроке № 8 проводится контрольная работа по теме «Векторы». Уроки № 9-10 Мищенко [27, С. 206] выделяет как резервные.

Тема «Векторы и координаты» представлена в I главе учебника А.Д. Александрова, А.Л. Вернера, В.И. Рыжика [1] на ее изучение отводится 20 часов, причем из них 6 часов выделено на действия с векторами в координатной форме [9, С. 59]. Следует отметить, что в содержании фигурирует тема «Векторный метод» по сравнению с вышерассмотренными учебниками.

На уроке №1 учащиеся знакомятся с темой «Скалярные и векторные величины. Направленные отрезки», в §1.1 формулируются понятие вектора, модуля вектора, понятие коллинеарных, ортогональных векторов [9, С. 59].

На уроке №2 рассматривается тема «Сонаправленность и равенство векторов», в §1.2 формулируется определение сонаправленных / противоположно направленных векторов. Урок №3 посвящен теме «Равенство векторов», в §1.3 формулируется признак равенства двух векторов. На уроке №4 формулируется определение нуль-вектора, угла между векторами (в §1.4-1.5) [1].

На уроке №5 учащиеся переходят к изучению операции сложения векторов, рассматривая §2.1 «Правило треугольника. Определение сложения векторов», в результате чего они должны научиться выполнять сложение векторов по правилу треугольника и правилу параллелограмма (§2.2), использовать переместительный и сочетательный законы сложения векторов. На уроке №6 формулируется определение вычитания векторов, противоположных векторов (§2.3).

На уроке №7 вводится новая операция над векторами – умножение на число (§3.1 – 3.2).

Урок №8 посвящен *наиболее интересной* для нас теме «Векторная алгебра и векторный метод» (§4.1), в результате изучения которого учащиеся получат возможность применять новый метод к решению геометрических задач [9, С. 60].

Следующие 6 уроков (№№9-14) отводятся на работу с векторами в координатной форме. На уроке № 15 вводится понятие косинуса, доказывается теорема косинусов. На уроках № 16-17 вводится новая операция над векторами – скалярное произведение, учащиеся должны научиться применять его для вычисления длин векторов, угла между ними. Уроки №18-19 [9, С. 60] рекомендует посвятить решению задач по теме «Векторы и координаты». На заключительном уроке №20 учащиеся выполняют контрольную работу по теме.

Рассмотрим содержание темы «Векторы и координаты» в учебнике А.Д. Александрова, А.Л. Вернера, В.И. Рыжика [2] для 9 классов с *углубленным изучением математики.* Тема представлена в IV главе учебника, на ее изучение отводится 26 часов [9, С. 82].

На уроках №1-3 учащиеся рассматривают §18 «Векторы», который состоит из следующих пунктов: «Понятие вектора», «Направленные отрезки», «Сонаправленные отрезки и векторы», «Равенство векторов» «Откладывание вектора, равного данному», «Нулевой вектор».

В результате изучения §19, на который выделено у [9, С. 82] 2 часа, учащиеся должны научиться складывать два вектора по правилу треугольника, правилу параллелограмма, познакомиться со свойствами сложения векторов, с определением вычитания двух векторов, понятием противоположного вектора.

На уроках №6-7 вводится новая операция над векторами – умножение на число (§20), изучается характерное свойство коллинеарных векторов. Уроки №8-10 посвящены решению задач по материалу, рассмотренному на предыдущих уроках.

В рамках уроков №11-13 учащиеся рассматривают §21 («Угол между ненулевыми векторами», «Определение проекции вектора на ось», «Вычисление проекции вектора на ось», «Свойство проекций векторов на ось»). На следующих 3 уроках №14-16 учащиеся работают с векторами в координатной форме (§22). На уроках №17-18 вводится новая операция над векторами – скалярное умножение (§23), в результате изучения которого учащиеся должны знать определение скалярного произведения, его выражение через координаты, а также свойства скалярного произведения.

Наиболее интересными для нас являются уроки №19-24, которые как раз посвящены теме нашего исследования, в рамках этих уроков рассматривается «Векторный метод. Решение задач» (§24), как мы видим, на нее отводится 6 часов. На последних уроках №25-26 учащиеся выполняют контрольную работу по теме «Векторы» [9, С. 82].

Обратимся к решению следующей задачи векторным методом из рассматриваемого пособия.

Пример 7.6. Дан треугольник ABC (Рис. 22). Пусть точка K лежит на AB, а точка L лежит на AC. Пусть $\frac{AK}{AB} = \frac{AL}{AC}$. Докажите, что $KL||BC$. Вычислите $\frac{KL}{BC}$ (Задача № 24.43 из [2, С. 71]).

Дано: $\Delta\, ABC, K \in AB, L \in AC,$
$\frac{AK}{AB} = \frac{AL}{AC} = k.$

Доказать: $KL||BC.$

Найти: $\frac{KL}{BC}$.

Доказательство:

Известно, что $K \in AB, L \in AC.$

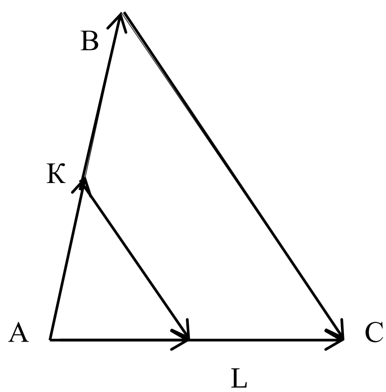


Рис. 22

На первом этапе запишем условие задачи в векторной форме:

$$AK = kAB, \qquad AL = kAC.$$

На втором этапе воспользуемся известным нам правилом треугольника

$$KL = -AK + AL = -kAB + kAC = k\ \ -AB + AC\ \ ,$$

$$BC = -AB + AC.$$

Мы получили, что $KL = kBC$ – векторное решение. (1)

На третьем этапе мы должны дать толкование полученному результату в исходных терминах задачи. Равенство (1) говорит нам о том, что векторы KL и BC коллинеарны, то есть $KL||BC$ – **Ч.Т.Д.** $\frac{KL}{BC} = k$ – **искомое отношение**.

В заключение рассмотрим *Приложение 2*, в которой представлено сравнение учебных пособий по параметрам «Количество часов на тему», «Класс».

Таким образом, проведенный нами анализ содержания темы «Векторы и их применение к решению задач» показал, что основное внимание в рассмотренных учебниках геометрии уделяется определению понятия «вектор», линейным операциям над векторами, их свойствам.

Безусловно, во всех четырех рассматриваемых учебниках есть упоминание о *векторном методе решения геометрических задач*, однако в пособиях под редакцией Л.С. Атанасяна, А.В. Погорелова и А.Д. Александрова (для общеобразовательных классов) векторный метод излагается в ознакомительном порядке, на практике ему уделяется мало времени. В учебнике под редакцией А.Д. Александрова (для классов с углубленным изучением математики) векторный метод занял почетное место в главе «Векторы и координаты».

Общее количество часов, выделенных на раздел «Векторы» по учебникам под редакцией А.Д. Александрова, превышает количество часов, выделенных по учебникам Л.С. Атанасяна, А.В. Погорелова, почти вдвое.

§8. Методические рекомендации по обучению векторному методу в курсе геометрии основной школы

Рассмотрим методику обучения векторному методу в курсе геометрии основной школы.

В.А. Гусев в пособии [25, С.386] отмечает такую же степень значимости векторного метода, как и метода составления уравнений. Как мы уже установили ранее, векторы появились в школьной программе лишь во второй половине прошлого столетия, поэтому и векторный метод считается достаточно новым для учащихся.

Для того чтобы учащиеся смогли эффективно освоить векторный метод, автор дает следующие рекомендации:

1. Для развития познавательного интереса учащихся необходимо продемонстрировать целесообразность применения векторов к решению задач и доказательству теорем на специально подобранных задачах.

2. Необходимо обучать учащихся некоторым *эвристикам* (Схема 1), которые помогут создать у них навык в применении векторного метода. Под *эвристиками* автор понимает систему определенных правил, которые помогают найти ключ к решению задачи.

3. Обучать векторному методу нужно на простых задачах без отвлечения на трудности геометрического содержания.

Геометрический язык		**Векторный язык**
$AB\|\|CD$	<=>	$AB = kCD$
Точки $A, B, C \in \alpha$	<=>	$AB = kBC$ $AC = kAB$
$\frac{AC}{AB} = \frac{m}{n}$	<=>	$AC = \frac{m}{n}AB$
$AB \perp CD$	<=>	$AB \cdot CD = 0$
Вычислить длину отрезка $\|AB\|$	<=>	$AB^2 = \|AB\|^2$
Вычисление величины угла	<=>	$\cos\angle\ a, b \ = \frac{a \cdot b}{\|a\| \cdot \|b\|}$

Схема 1. Перевод геометрических фактов на векторный язык и векторных соотношений на геометрический язык.

Г.И. Саранцев в [34, С. 147-150] отмечает, что термин «эвристика» имеет несколько значений, но все же останавливается на способе, применение которого может привести к отысканию нужного метода решения задачи или доказательства теоремы. Автор рекомендует записывать эвристики в специальную тетрадь или сделать плакат, использовать данные материалы в процессе решения задач или доказательства теорем.

Е.И. Лященко в пособии для студентов [19, С.152-153] выделяет, хотя и условно, следующие основные этапы формирования векторного метода (Таблица 3) в курсе геометрии основной школы:

Таблица 3

Название этапа	**Цель этапа формирования векторного метода**
Подготовительный	Овладеть основными понятиями, умениями и навыками по теме «Векторы»
Мотивационный	Показать необходимость овладения векторным методом на примере задач, которые невозможно или трудно решить другими методами
Ориентировочный	Разъяснить суть векторного метода, выделить основные компоненты на примере решенной этим методом задачи.
Этап овладения компонентами метода	Формировать отдельные компоненты векторного метода на примере специально подобранных задач
Этап формирования метода «в целом»	Решить задачи, в которых применяются компоненты векторного метода

Приведем примеры задач и упражнений по формированию векторного метода из учебных пособий по геометрии.

Подготовительный этап

Пример 8.1. Начертите векторы AB, CD, EF так, чтобы:

a) AB, CD, EF были коллинеарны и $AB = 1$, $CD = 2{,}5$, $EF = 4{,}5$.

b) AB и EF были коллинеарны, AB и CD были не коллинерны и $AB = 3$, $CD = 1{,}5$, $EF = 1$ (Задача №740 из [6, С. 197]).

Решение представлено на Рис. 23.

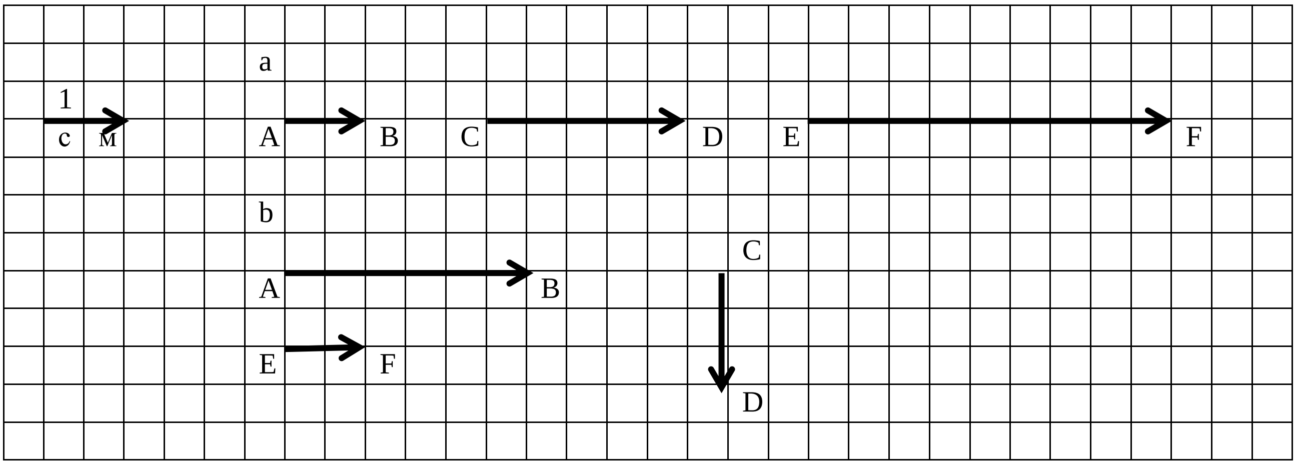


Рис. 23

Пример 8.2. В прямоугольнике $ABCD$ (Рис. 24) $AB = 3$ см, $BC = 4$ см, М – середина стороны AB. Найдите длины векторов $AB, BC, DC, MC, MA, CB, AC$ (Задача №745 из [6, С. 197]).

Решение:

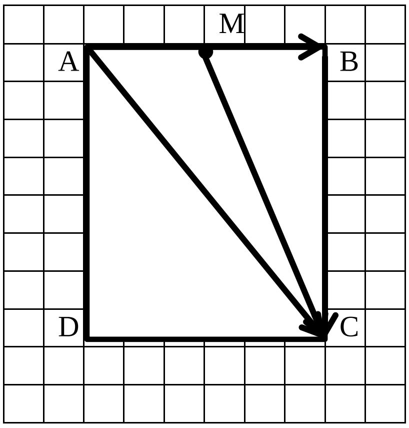


Рис. 24

$$AB = 3, \ |BC| = 4, \ DC = 3,$$

$$MC = \sqrt{4^2 + 1{,}5^2} = \sqrt{18{,}25},$$

$$MA = 1{,}5,$$

$$CB = 4,$$

$$AC = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

Пример 8.3. Начертите попарно неколлинеарные векторы x, y, z и постройте векторы $x + y$, $y + z, x + z$ (Задача №754 из [6, С. 197]).

Решение представлено на Рис. 25.

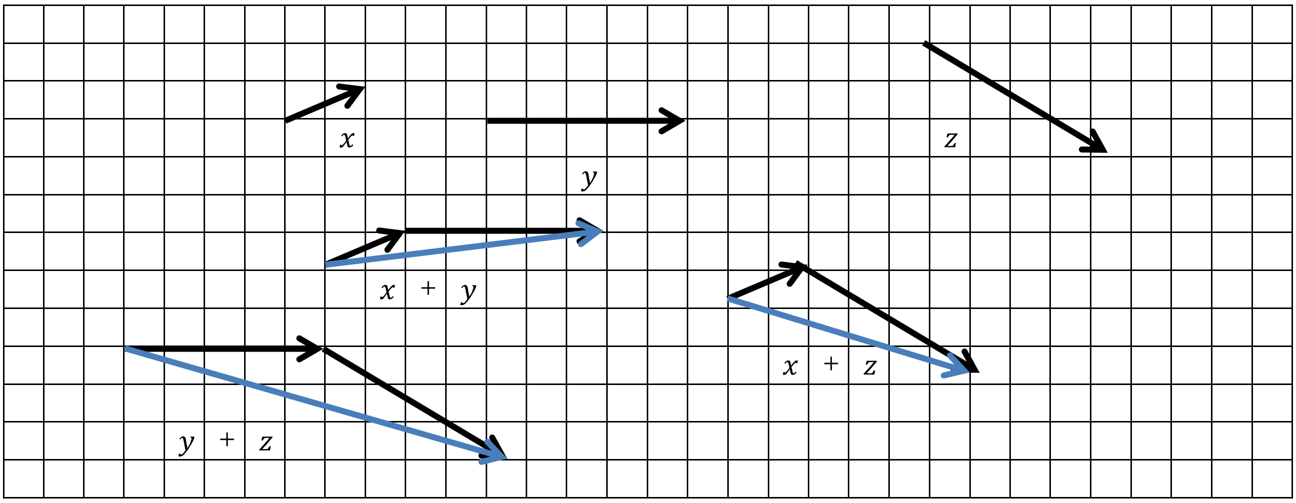


Рис. 25

Пример 8.4. Начертите попарно неколлинеарные векторы a, b, c, d, e и, пользуясь правилом многоугольника, постройте вектор a $+b+$ c$+d+$ e (Задача №755 из [6, С. 204]).

Решение представлено на Рис. 26.

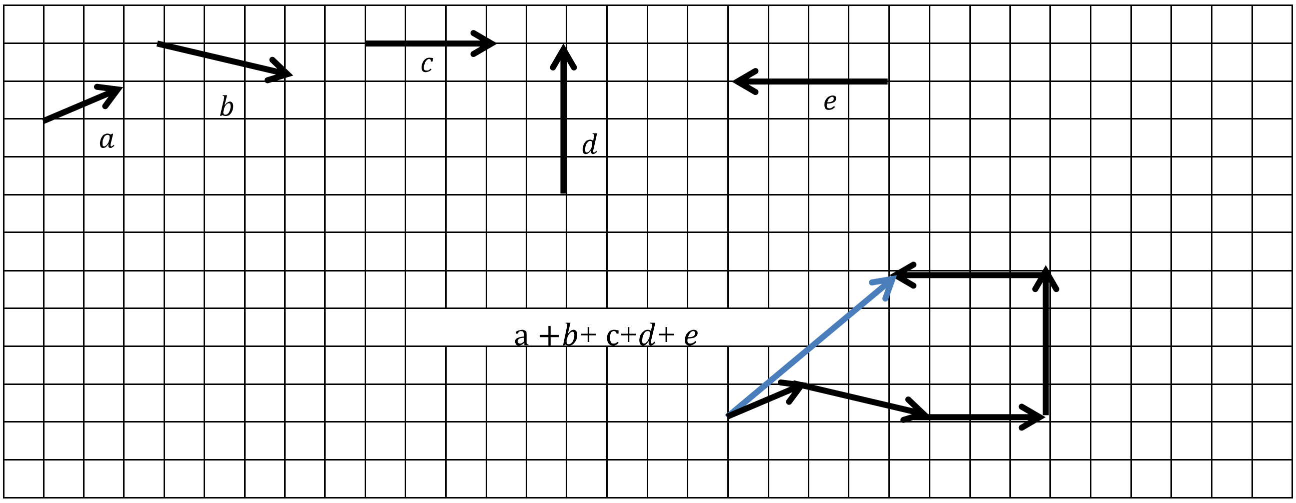


Рис. 26

Пример 8.5. Пользуясь правилом многоугольника, упростите выражения (Задача №764 из [6, С. 205]):

1) $AB + BC - MC + MD - KD = AB + BC + CM + MD + DK = AK$.

2) $CB + AC + BD - MK + KD = AC + CB + BD + DM = AM$.

Пример 8.6. Начертите два неколлинеарных вектора x и y и постройте векторы $x + 2y$, $\frac{1}{2}y + x$, $3x + \frac{1}{2}y$ (Задача №776 из [6, С. 210]).

Решение представлено на Рис. 27.

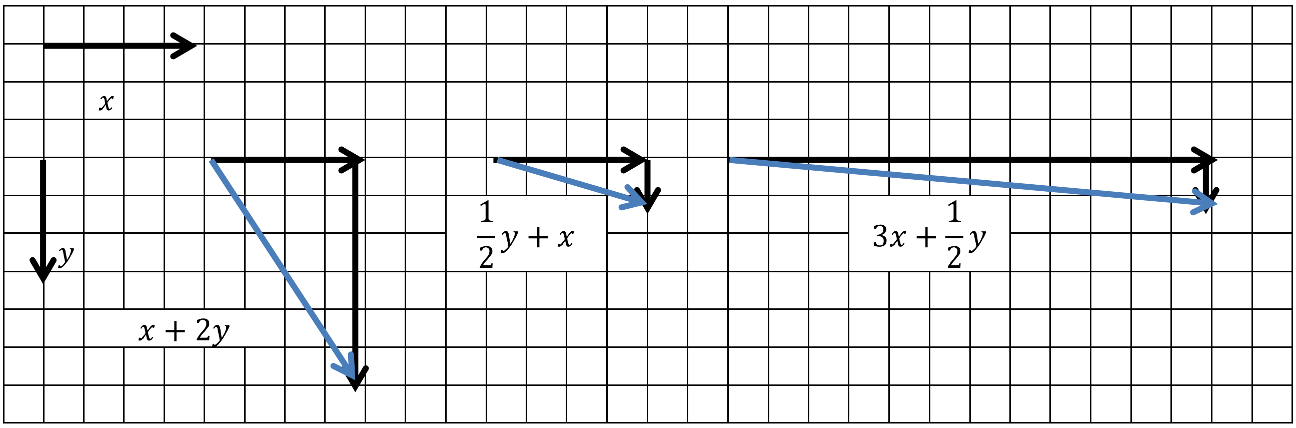


Рис. 27

Пример 8.7. Пусть $x = m + n$, $y = m - n$. Выразите через m и n векторы $2x - 2y$, $2x + \frac{1}{2}y$ (Задача №781 из [6, С. 211]).

Решение:

1. $2x - 2y = 2(m + n) - 2(m - n) = 2m + 2n - 2m + 2n = 4n$

2. $2x+\frac{1}{2}y=2(m+n)+\frac{1}{2}(m-n)=2m+2n+\frac{1}{2}m-\frac{1}{2}n=\frac{5}{2}m+\frac{3}{2}n.$

Пример 8.8. Отрезки AA_1, BB_1, CC_1 – медианы треугольника ABC. Выразите векторы AA_1, BB_1, CC_1 через векторы $a = AC$ и $b = AB$ (Задача №786 из [6, С. 212]).

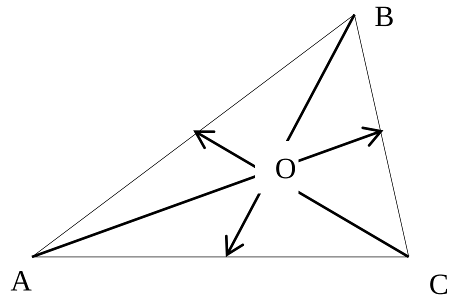


Рис. 28

Дано:

ΔABC, $AB_1 = B_1C$, $BA_1 = A_1C$, $AC_1 = C_1B$.

Найти:

Векторы AA_1, BB_1, CC_1 через векторы $a = AC$ и $b = AB$

Решение:

С одной стороны, вектор $AA_1 = AC + CA_1$, с другой стороны, $AA_1 = AB + BA_1$ (Рис. 28). Сложим полученные равенства:

$$2AA_1 = AC + CA_1 + AB + BA_1$$

$$AA_1 = \frac{AC + AB}{2} = \frac{a+b}{2}.$$

Аналогично для векторов BB_1, CC_1:

$$BB_1 = \frac{BA+BC}{2} = \frac{BA+BA+AC}{2} = \frac{2BA+AC}{2} = -AB + \frac{AC}{2} = -b + \frac{a}{2}.$$

$$CC_1 = \frac{CA+CB}{2} = \frac{CA+CA+AB}{2} = \frac{2CA+AB}{2} = -AC + \frac{AB}{2} = -a + \frac{b}{2}.$$

Ответ: $AA_1 = \frac{a+b}{2}$, $BB_1 = \frac{a}{2} - b$, $CC_1 = \frac{b}{2} - a$.

Пример 8.9. Точка O – середина медианы EG треугольника DEF (Рис. 29). Выразите вектор DO через векторы $a = ED, b = EF$ (Задача №787 из [6, С. 212]).

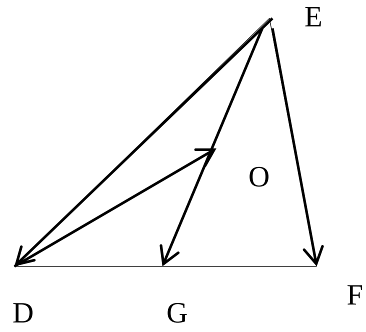


Рис. 29

Решение:

$$EO = \frac{1}{2}EG = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\;\; ED + EF \;\;= \frac{1}{4}\;\; a + b \;\;.$$

$$DO = DE + EO = -a + \frac{1}{4}\;\; a + b \;\;= -\frac{3}{4}a + \frac{1}{4}b.$$

Ответ: $DO = -\frac{3}{4}a + \frac{1}{4}b$.

Пример 8.10. Диагонали квадрата $ABCD$ пересекаются в точке O. Найдите угол между векторами AB и AC, AB и DA (Задача №1039 из [6, С. 269]).

Решение:

$$AB, AC = 45°$$

$$AB, DA = 90°.$$

Пример 8.11. В равностороннем треугольнике ABC со стороной a проведена высота BD. Вычислите скалярное произведение векторов $AB \cdot AC$, $AC \cdot BD$ (Задача №1042 из [6, С. 269]).

Решение:

$$AB \cdot AC = |AB| \cdot |AC| \cos 60° = \frac{a^2}{2}$$

$$AC \cdot BD = \;\; AC \;\;\cdot\;\; BD \;\; \cos 90° = 0.$$

Ответ: $\frac{a^2}{2}$, 0.

Пример 8.12. Вычислите скалярное произведение векторов a и b, если $a = 3p - 2q$, $b = p + 4q$, где p и q – единичные взаимно перпендикулярные векторы (Задача №1053 из [6, С. 270]).

Решение:

$$a \cdot b = \;\; 3p - 2q \;\;\; p + 4q \;\; = 3p^2 + 12pq - 2pq - 8q^2 = 3 - 8 = -5.$$

Ответ: -5.

Упражнения 8.1-8.2 выполняется при изучении понятий «векторы», «коллинеарные и неколлинеарные векторы», «длина вектора». В упражнениях 8.3-8.4 осуществляется непосредственное построение суммы векторов. В упражнении 8.5 используются некоторые свойства сложения векторов. В упражнении 8.6 осуществляется построение произведения вектора на число, построение суммы векторов. В упражнениях 8.7-8.9 предполагается выполнение действий с векторами. В упражнениях 8.10-8.12 осуществляется вычисление угла между векторами, а также скалярного произведения векторов.

Н.Б. Мельникова в своей статье [21, С.25-27] считает, что одной из важных задач изучения темы «Векторы» в курсе геометрии является формирование аппарата, являющегося своего рода подспорьем для изучения материала в области физики. Однако с векторными величинами учащиеся знакомятся в курсе физики раньше, чем на уроках геометрии. Такая последовательность расположения программного материала позволяет учащимся опираться на уже имеющиеся знания векторных величин и обоснованно вводить основные понятия данной темы.

Автор указанной выше статьи [21] дает следующие рекомендации, которые учителя математики могут применять при обучении теме «Векторы»:

1. На начальном этапе освоения темы учащиеся должны знать, что материал, связанный с векторными величинами, который изучается или будет изучаться в курсе физики, получит свое толкование и объяснение в рамках курса геометрии. Дело в том, что понятия «вектор» и «векторная величина» связаны между собой, но не являются тождественными. Физика оперирует векторными величинами, которые задаются указанием размера и направления в пространстве, поэтому направленный отрезок (вектор) является только удобным наглядным изображением векторной величины, которая характеризует какое-то свойство тела, явления, процесса, её можно измерить [45, С.42].

2. При введении понятия вектора полезно вспомнить, какие физические векторные величины уже известны учащимся, например, перемещение и скорость. В курсе физики 7 класса подчеркивается, что «сила – физическая

величина, значит, ее можно измерить» [29, С.56] и вводится обозначение F. Целесообразно предупредить учащихся, что в разных источниках встречаются разные обозначения векторов ($s, \overline{a}$).

3. Необходимо уделить внимание терминам «абсолютная величина вектора», «модуль вектора», «длина вектора».

4. Сложение векторов по правилу треугольника и параллелограмма в геометрии нужно доказывать.

5. При изучении пункта «Разложение векторов по осям координат» нужно вспомнить понятие коллинеарных векторов, например, $\mathrm{a}_1\mathrm{e}_1$ и e_1. Согласно теореме любой вектор а можно представить в виде суммы векторов, коллинеарных координатным векторам, то есть $\mathrm{a} = \mathrm{a}_1\mathrm{e}_1 + \mathrm{a}_2\mathrm{e}_2$, где $\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2$ – координаты вектора а.

Шурыгин В.Ю., Шурыгина И.В. в [45, С.42] отмечают, что в школьном курсе геометрии подробно изучают сложение и вычитание векторов, умножение вектора на число, скалярное произведение векторов, но совершенно не рассматривают такое важное для физики понятие, как проекция вектора на ось. При решении физических задач необходимо осуществлять переход от векторных уравнений и законов к скалярным выражениям. Чаще всего это выполняется при помощи проектирования векторных уравнений на оси выбранной системы координат. В связи с этим введением понятия проекции вектора на ось и отработкой навыков нахождения проекций векторов приходится заниматься на уроках физики или при проведении интегрированных уроков.

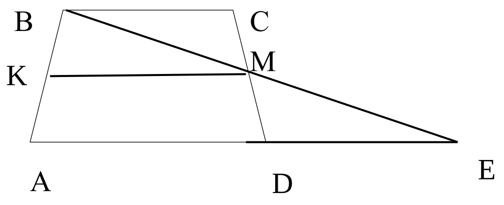
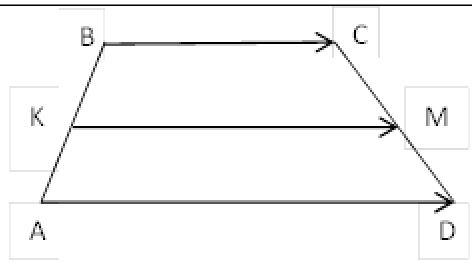
Мотивационный этап

Рассмотрим традиционное и векторное доказательства известной теоремы о средней линии трапеции (Таблица 4).

Теорема. Средняя линия трапеции параллельна ее основаниям и равна их полусумме [2, С. 57], [30, С. 74-75] .

Таблица 4

Различные доказательства теоремы о средней линии трапеции

Традиционное доказательство	**Векторное доказательство**
Дано: ABCD – трапеция, $BC\|\|AD, AK = KB, DM = MC$ **Доказать:** $KM\| \ BC, \ KM \ \|AD$ $KM = \frac{1}{2}(BC + AD)$	
 **Рис. 30**	 **Рис. 31**
Доказательство: Пусть $ABCD$ – трапеция, проведем прямую BM через М - середину CD. $E = AD \cap BM$. Рассмотрим ΔBCM и ΔDME: $CM = MD$, $\angle BMC = \angle DME$ – вертикальные, $\angle EDM = \angle BCD$ – накрест лежащие при $BC\|\|AD =>$ ΔBCM=ΔDME по второму признаку. Значит, $BC = DE$, $BM = ME$. Получаем, что KM – средняя линия ΔABE, другими словами, $KM = \frac{1}{2}AE = \frac{1}{2} \ AD + DE \ = \frac{1}{2} \ AD + BC$. **Ч.Т.Д.**	**Доказательство:** Известно, что точки K и M – середины сторон AB и CD. Введем векторы $BC \uparrow\uparrow AD, KA = -KB,$ $DM = -CM.$ Воспользуемся известным нам правилом многоугольника. С одной стороны, $KM = KA + AD + DM$, с другой стороны, $KM = KB + BC + CM$. Сложим полученные равенства и выразим KM, получим $KM = \frac{AD+BC}{2}$. Полученное выше равенство говорит нам о том, что $KM \uparrow\uparrow AD$, поэтому $KM\|\|AD$, так как $BC \uparrow\uparrow AD$, то $AD + BC \ = AD + BC$, поэтому $KM = \frac{1}{2}(BC + AD)$. **Ч.Т.Д.**

Традиционное решение предложенной задачи охватывает следующие темы:

- понятие трапеции, ее свойства;
- проведение дополнительных построений;
- свойства вертикальных углов;
- свойства параллельных прямых (равенство накрест лежащих углов);
- признаки равенства треугольников;
- преобразование геометрических равенств.

Учащиеся знакомятся с понятием и свойствами трапеции в курсе геометрии 8 класса, свойствами вертикальных и смежных углов, свойствами параллельных прямых и признаками равенства треугольников - в курсе геометрии 7 класса. Если учащиеся недостаточно усвоили этот материал, имеют значительные пробелы в знаниях, то при доказательстве теоремы о средней линии трапеции некоторые моменты ребятам будут непонятны. Систематическое изучение геометрии – ключ к ее успешному освоению.

Векторное решение предложенной задачи охватывает следующие темы:

– понятие трапеции, ее свойства;
– понятие коллинеарных, противоположных векторов;
– представление вектора в виде суммы векторов;
– преобразование векторных равенств.

Как мы видим, большая часть вопросов изучается в рамках одного раздела «Векторы», ученики в меньшей степени опираются на ранее изученный материал, поэтому освоить азы векторного метода смогут и слабые ученики.

Ориентировочный этап

Анализ деятельности применения векторов в конкретных ситуациях позволяет выделить в ее структуре основные действия (компоненты), которые определяют содержание упражнений на овладение векторным методом [36, С.120].

Боженкова Л.И. в статье [8, С. 98-102] рассматривает обучение учащихся векторному методу с помощью знаковых моделей – схем, таблиц, формул. Автор отмечает, что блок-схемы выступают в качестве наглядного способа фиксации связей между данными и искомыми объектами, поэтому оформим решение следующей задачи, используя схему (Схема 2).

Пример 8.13. Докажите, что если в четырехугольнике *ABCD* диагонали, пересекаясь, делятся пополам (в точке О), то этот четырехугольник — параллелограмм (Задача № 4 из [35, С. 115]).

Дано: $ABCD$ – четырехугольник,

$O = AC \cap BD$, $AO = OC$, $BO = OD$ (Рис. 32).

Доказать: $ABCD$ – параллелограмм.

Доказательство:

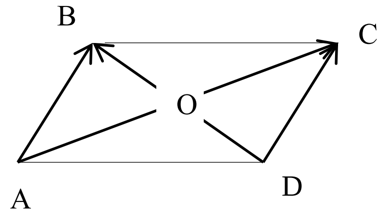


Рис. 32

Схема 2. Решение задачи 8.13 с помощью знаковых моделей.

На примере решенной задачи мы выделили основные компоненты векторного метода, разъяснили его суть.

Этап овладения компонентами метода

Каждое из выделенных выше действий определяет соответствующий ему вид упражнений, в процессе выполнения которых учащиеся будут овладевать векторным методом.

Пример 8.14. Запишите в векторном виде (Задача 24.59 из [2, С. 73]):

a) точки A и B совпадают ($AB = 0$);

a) прямые AB и CD параллельны ($AB = kCD$);

b) точка X лежит на отрезке AB ($AX = kXB$);

c) три точки M, N, P лежат на одной прямой ($MN = kMP$);

d) три точки A, B, C являются вершинами треугольника ($AB + BC + CA = 0$);

e) точка C – середина отрезка AB ($AC = \frac{1}{2}AB$);

f) точка K лежит на отрезке AB и делит его в отношении $\frac{p}{q}$ ($\frac{AK}{KB} = \frac{p}{q}$).

Пример 8.15. Используя скалярное произведение, запишите в векторном виде (Задача 24.60 из [2, С. 73]):

a) точки A и B совпадают ($AB \cdot AB = 0 \cdot 0 = 0$);

b) прямые AB и CD перпендикулярны ($AB \cdot CD = 0$);

c) $\angle ABC > 90^o, \angle MPK < 90^o (AB \cdot BC < 0,\ \ MP \cdot PK > 0)$;

d) точка X лежит на прямой AB ($|AX| \cdot |AB|$).

В 8.14-8.15 осуществляется перевод терминов и отношений с геометрического языка на векторный.

Пример 8.16. Каков геометрический смысл векторных соотношений (Задача 24.61 из [2, С. 73]):

a) $AC = BD$ (Отрезки AC и BD параллельны и равны);

b) $PQ = kST$ (Прямые PQ и ST параллельны);

c) $AK = \varphi AB$ (Точки A, K, B лежат на одной прямой);

d) $MN = \frac{1}{2}MK$(N - середина отрезка MK);

e) $AB = BC$ (B – середина отрезка AC);

f) $AB = -AC$ (A - середина отрезка CB).

В упражнении 8.16 осуществляется перевод терминов и отношений с векторного языка на геометрический.

Пример 8.17. $ABCD$ – параллелограмм (Рис. 33), O – точка пересечения его диагоналей. Изобразите векторы: [35, С. 111]

a) $AO + CB$;

b) $AO - DC$;

c) $OD + AB$;

d) $AD - BC$.

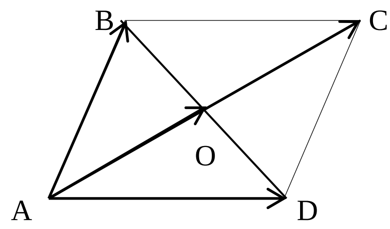


Рис. 33

Решение:

a) $AO + CB = OC + CB = OB$;

b) $AO - DC = AO + CD = BA + AO = BO$;

c) $OD + AB = AB + BO = AO$;

d) $AD - BC = AD + CB = 0$.

Пример 8.18. Дан пятиугольник $ABCDE$ (Рис. 34). Представьте AD в виде суммы двух, трех векторов, заданных вершинами этого многоугольника [35, С. 111].

Решение:

$$AD = AE + ED = AB + BC + CD$$

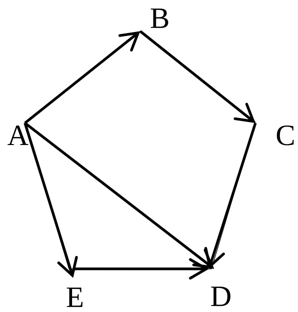


Рис. 34

Пример 8.19. Дан ΔABC. Представьте вектор AC в виде разности векторов BA и BC [35, С. 111].

Решение:

$$AC = BC - BA.$$

Пример 8.20. Отрезок MN (Рис. 35) делится точкой R на две части в отношении $\frac{3}{1}$. Выразите вектор RN через MR [35, С. 111].

Рис. 35

Решение:

$$RN = 3MR.$$

Пример 8.21. Упростите выражения: [35, С. 113]

a) $AB + AD + DN + NM = AB + AM$;

b) $AC - BC - PM - AP + BM = AC + CB + MP + PA + BM = 0.$

Пример 8.22. Длина гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC (Рис. 36) равна с. Вычислите сумму $AB \cdot AC + BC \cdot BA + CA \cdot CB$ [35, С. 113].

Решение:

$$AB \cdot AC + BC \cdot BA + CA \cdot CB = AB \cdot AC + BC \cdot BA + 0 =$$

$$= AB\ \ AC - BC\ \ = AB\ \ AC + CB\ \ = AB^2 = c^2.$$

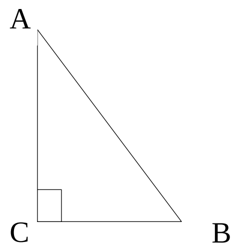


Рис. 36

В упражнениях 8.17-8.22 проиллюстрирован второй этап решения задач векторным методом – представление вектора в виде суммы (разности) двух векторов, произведения вектора на число, преобразования векторных равенств.

Саранцев Г.И. утверждает [36,С.114], что повышенное внимание указанным выше задачам облегчает использование векторов в конкретных ситуациях, к тому же вызывают определенную умственную деятельность [36, С.116]. В процессе решения этих типов задач вырабатываются критерии использования векторов для доказательства некоторых зависимостей, но эти критерии не сообщаются учащимся в готовом виде, ученики овладевают ими в процессе решения задач.

Автор в [36, С.126] отмечает, что формирование многих умений, являющихся компонентами умения применять векторный аппарат, действующие учебники по геометрии обеспечивают недостаточным образом. Умения представлять вектор в виде суммы, разности двух векторов, произведения вектора на число и осуществление сложения, вычитания, умножения вектора на число являются обратными, как и перевод с геометрического языка на векторный и перевод с векторного языка на геометрический. Обратные ассоциации играют важную роль в осуществлении мыслительных процессов, они позволяют осознавать многообразие связей между изучаемыми понятиями [36, С.127].

Процесс формирования умений, приведенных выше, осуществляется в два этапа. На первом этапе учащиеся непосредственно выполняют операции с векторами, на втором – осуществляют в уме, причем, по мнению Г.И. Саранцева, эффективным является совместное формирование взаимно обратных умений.

Г.И. Саранцев выделяет три уровня формирования умений выполнять операции над векторами:

– материализованный (формирование взаимно обратных умений);

Пример 8.23. Дан четырехугольник $ABCD$. Найдите сумму векторов AB, BD, DC [36, С.128].

Пример 8.24. Дан четырехугольник $ABCD$. Представьте вектор AC в виде суммы трех векторов, определяемых вершинами этого четырехугольника [36, С.128].

– материализованный и умственный (выполнение упражнений на представление вектора в виде комбинации других векторов осуществляется мысленно, а нахождение суммы, разности, произведения вектора на число – на материализованном уровне);

Пример 8.25. Представьте вектор MN в виде суммы трех векторов, одним из которых является PK [36, С.128].

Пример 8.26. Даны три вектора MP, PK, KN. Постройте сумму этих векторов [36, С.128].

– умственный (формирование взаимно обратных умений осуществляется только в уме, учащиеся овладевают навыком преобразования векторных равенств, используя свойства операций с векторами).

Пример 8.27. Найдите сумму векторов $AB + BA + CD + MN + DC + NM$ [36, С.128].

Пример 8.28. Представьте вектор AB в виде суммы векторов $DA + DC + CB$ [36, С.128].

Этап формирования метода «в целом»

Решим задачи, в которых применяются компоненты векторного метода.

Пример 8.29. Доказать, что середины оснований и точка пересечения диагоналей трапеции (Рис. 37) лежат на одной прямой (Задача № 2 из [14, С. 29]).

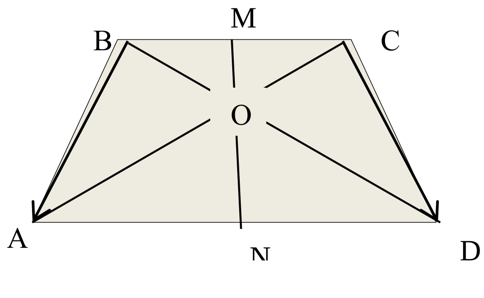


Рис. 37

Дано: $ABCD$ – трапеция,

$BM = MC, AN = ND, O = AC \cap BD.$

Доказать: $O \in MN.$

Доказательство:

Рассмотрим ΔBOC и ΔAOD, $\Delta BOC \sim \Delta AOD$ по первому признаку $\Rightarrow \frac{OA}{OC} = \frac{OD}{OB} = k.$

Введем векторы: $OA = kOC, \quad OD = kOB.$

Выразим вектор, используя соотношение для медианы треугольника -

$$ON = \frac{1}{2}\ \ OA + OD\ \ = \frac{1}{2}\ \ kOC + kOB\ \ = \frac{1}{2}kOM.$$

Так, $ON = \frac{1}{2}kOM \Rightarrow O \in MN.$ **Ч.Т.Д.**

Пример 8.30. На сторонах AB и AC произвольного треугольника ABC заданы точки M и N с известными пропорциями $\frac{AM}{AB} = \frac{2}{5}, \frac{AN}{AC} = \frac{1}{3}$. Отрезки NB и MC пересекаются в точке K (Рис. 38). Требуется найти отношение $\frac{NK}{NB}, \frac{MK}{MC}$ [15].

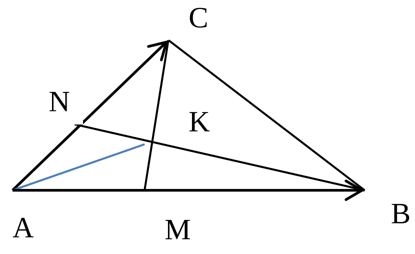


Рис. 38

Дано:

$\Delta ABC, M \in AB, N \in AC,$

$\frac{AM}{AB} = \frac{2}{5}, \frac{AN}{AC} = \frac{1}{3}. K = NB \cap MC.$

Найти:

$\frac{NK}{NB}, \frac{MK}{MC}.$

Решение:

Обозначим через $x = \frac{NK}{NB}, y = \frac{MK}{MC}$. Далее введем векторы $AB = a$, $AC = b$. Разложим вектор AK по векторам a и b:

$$AK = AN + NK = \frac{1}{3}b + xNB = \frac{1}{3}b + x\ \ NA + AB\ \ = \frac{1}{3}b + x\ \ -\frac{1}{3}b + a\ \ =$$

$xa + \frac{1}{3}(1-x)b$ – вдоль отрезка NB. (1)

$AK = AM + MK = \frac{2}{5}a + yMC = \frac{2}{5}a + y\ \ -\frac{2}{5}a + b\ \ = \frac{2}{5}\ \ 1 - y\ \ a + yb$ – вдоль отрезка MC. (2)

У равных векторов (1) и (2) соответственные коэффициенты при a и b должны быть равными в силу единственности разложения по базису.

Составим систему:

$$\begin{aligned} x &= \frac{2}{5}\ \ 1 - y \\ \frac{1}{3}\ \ 1 - x\ \ &= y \end{aligned}$$

Решив систему, получим $x = \frac{4}{13}, y = \frac{3}{13}$. Вернемся к первоначальным обозначениям: $\frac{NK}{NB} = \frac{4}{13}, \frac{MK}{MC} = \frac{3}{13}$.

Ответ: $\frac{NK}{NB} = \frac{4}{13}, \frac{MK}{MC} = \frac{3}{13}$.

Мы рассмотрели достаточное количество задач, которые способствуют формированию векторного метода у учащихся основной школы.

Естественно, если возникает вопрос, в какой ситуации целесообразно использовать векторный аппарат. Ответ на него можно найти в работах Г.И. Саранцева [35], В.А. Гусева [12], Е.В. Колесниковой [16].

Г.И. Саранцев считает векторный метод эффективным:

– при доказательстве параллельности прямых и отрезков;

– при делении отрезка в данном отношении;

– при выяснении принадлежности трех точек одной прямой;

– при доказательстве перпендикулярности прямых и отрезков;

– при доказательстве зависимостей между длинами отрезков;

– при нахождении величины угла [36, С.116].

Е.В. Колесникова в статье [16, С.31] отмечает, что приведенные выше типы задач наиболее многочисленны и могут служить образцами для учащихся, что навыки, приобретенные при решении, можно переносить на более сложные задачи. Традиционные методы решения связаны с необходимостью дополнительных построений или громоздкими тригонометрическими преобразованиями.

Итак, обучать учащихся основной школы векторному методу необходимо на специально подобранных задачах, которые способствуют развитию познавательного интереса к предложенной теме, также целесообразно обучать школьников некоторым эвристикам, которые помогают найти решение задачи.

На подготовительном этапе формирования векторного метода полезно решать задачи на построение коллинеарных, неколлинеарных векторов, вычисление длины векторов, построение суммы векторов по правилу треугольника, многоугольника, параллелограмма, построение произведения вектора на число, упрощение векторных равенств, нахождение угла между векторами, вычисление скалярного произведения. На данном этапе целесообразно продемонстрировать межпредметные связи математики с другими науками, в частности с физикой.

На мотивационном и ориентировочном этапах разумно организовать процесс обучения векторному методу с помощью знаковых моделей – схем и таблиц, чтобы проиллюстрировать особенности данного метода.

На этапе овладения компонентами векторного метода необходимо уделять внимание следующим умениям:

– переводить геометрические термины на язык векторов и обратно;

– выполнять операции над векторами;

– представлять вектор в виде суммы, разности векторов;

– представлять вектор в виде произведения вектора на число;

– преобразовывать векторные соотношения;

– переходить от соотношения между векторами к соотношению между их длинами и наоборот;

– выражать длину вектора через его скалярный квадрат;

– выражать величину угла между векторами через их скалярное произведение.

На этапе формирования метода «в целом» полезно решить типовые задачи, в которых применение векторного аппарата позволяет упростить сложные геометрические понятия, доказательства теорем и избежать некоторых ошибок и трудностей.

§9. Система упражнений по теме «Векторный метод» в курсе геометрии основной школы

Задачи являются одним из основных средств, которые используются при обучении математике для формирования знаний, умений и навыков учащихся. Посредством решения задач реализуется как образовательная, так и воспитательная и развивающая цели.

По функциональному назначению в процессе обучения выделяют обучающие и контролирующие задачи. Обучающие задачи связаны с формированием элементов теоретических знаний (понятия, теоремы, доказательства, правила) и связанных с ними умений. Задачи на формирование правил несут большую нагрузку на формирование практических навыков, так как в процессе решения таких задач приобретаются вычислительные навыки, навыки преобразования выражений. Задачи, связанные с формированием умений и навыков учащихся, называют *упражнениями*. Контролирующие задачи чаще включаются в проверочные и контрольные работы [19, С.68-69].

Анализируя работы своих коллег, Г.И. Саранцев [36, С.9] указывает следующие требования к упражнениям:

– должны являться *носителем действий*;

– должны выступать *как средство связи теории с практикой*;

– должны выступать как *средство усвоения знаний*;

– должны выступать в процессе обучения *способом стимулирования и мотивации* учебно-познавательной деятельности;

– должны выступать как *способ организации и управления учебно-познавательной деятельностью* учащихся (репродукция, эвристика, исследование);

– должны выступать как форма проявления почти всех групп методов обучения;

– должны предшествовать запоминанию определения понятия, так как необходимо сначала усвоить существенные свойства этого понятия.

Таким образом, упражнения – многоаспектное явление обучения, выступающее способом целенаправленного развития ученика [36, С.9-13].

Для формирования теоретических знаний и овладения учащимися особыми видами деятельности одной задачи недостаточно, должна быть выстроена целая система задач, которая обеспечит более прочное усвоение программного материала [19, С.68-69].

В пособии для студентов [19, С.68-69] под редакцией Е.И. Лященко отмечены особенности построения систем задач на усвоение понятия и его определения, теоремы и доказательства, правил.

Рассмотрим *компоненты системы упражнений*, представленные в книге Г.И. Саранцева [36, С.18-20]. Одним из компонентов являются *цели выполнения упражнений*. Автор приводит пример – обучение векторному методу – это общая цель, а формирование умения переводить геометрический язык на вектор – это частная цель.

Достижение цели требует *владения определенными действиями*. Г.И. Саранцев выделяет, что в системе упражнений на векторы должны быть предусмотрены следующие действия:

1. Перевод геометрического языка на векторный и обратно.

2. Выполнение операций над векторами.

3. Представление вектора в виде суммы, разности векторов, произведения вектора на число.

4. Преобразование векторных соотношений.

5. Переход от соотношения между векторами к соотношению между их длинами и наоборот.

6. Выражение длины вектора через его скалярный квадрат.

7. Выражение величины угла между векторами через их скалярное произведение.

В качестве компонента системы упражнений должна выступать *умственная деятельность учащихся*. Указанные выше действия 1-7 адекватны деятельности использования векторов в различных ситуациях, однако формирование действий 1,5 не предусмотрено, по мнению автора, в школьных учебниках геометрии, что, безусловно, затрудняет овладение векторным методом.

Следующий важный компонент системы упражнений – *строение совокупности упражнений, порядок их выполнения*.

Организационные формы выполнения упражнений входят в число компонентов системы, так как данный компонент связан с целями использования упражнений, их структурой, с учебной деятельностью учащихся, содержанием упражнений. В *Приложении 3* отражен функциональный характер вышеназванных компонентов системы упражнений.

При отборе задач Г.И. Саранцев в пособии [34, С.189] рекомендует учитывать следующие положения:

1. Необходимо чередовать упражнения, так как упрочение ошибочной ассоциации начинается после выполнения трех однотипных упражнений.

2. Необходимо формировать умение владеть каким-либо действием во всех возможных ситуациях, так как выполнение упражнений на овладение действием в некоторой ситуации не обеспечивает успеха в применении этого действия в другой ситуации.

3. В совокупность упражнений, выполнение которых требует прямых действий, следует включать упражнения на обратные действия. Этим

достигается быстрое переключение мышления школьников с прямых на обратные действия и наоборот.

4. Необходимо включать упражнения на выполнение действия как на материализованном, так и умственном этапе.

Упражнения на перевод с геометрического языка на векторный и обратно

1. Отрезки KN и PR параллельны. Запишите это соотношение в векторной форме.

2. Точки A, B, C принадлежат одной прямой. Как это соотношение можно записать с помощью векторов AC и AB? Какие другие векторные соотношения можно записать?

3. Точка C принадлежит отрезку AB, причем $\frac{AB}{CB} = \frac{m}{n}$. Что означает это на векторном языке?

4. Известно, что $CD = \alpha AB$. Каково геометрическое толкование этого равенства?

5. Отрезки KN и PR перпендикулярны. Запишите это соотношение в векторной форме.

6. Известно, что $AB^2 = 0$. Что можно сказать о расположении точек A и B?

7. Известно, что точка O является серединой отрезка AB. Запишите это соотношение в векторной форме.

8. Как расположены точки A, B, C, если $OC = \frac{1}{2}\ \ OA + OB$?

9. Каков геометрический смысл тождества $2ab = a^2 + b^2 - \ \ a - b\ \ ^2$?

Отметим, что №1-4 выполняются при изучении коллинеарных векторов, №8 – при изучении суммы и разности векторов, №9 – при изучении скалярного произведения векторов. Выполнение упражнений данного типа способствуют формированию пространственного мышления [36, С.121].

Упражнения на выполнение операций с векторами

10. Дан вектор AB. Постройте векторы $2AB, -\frac{1}{2}AB$.

11. Даны векторы MN и KL. Постройте вектор $\frac{MN}{2} + 3KL$.

12. О – точка пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$. Найдите х, если $AB = xCD, AC = xAO$.

В упражнениях № 10-11 осуществляется построение суммы, разности векторов, произведения вектора на число. В упражнении №12 требуется мысленно выполнить операции с векторами [36, С.121].

Упражнения на представление вектора в виде суммы или разности векторов

13. Представьте AB в виде суммы двух, трех векторов.

14. Дан пятиугольник $ABCDE$. Выразите CA через векторы AB и BC. Выразите AD через векторы AB, BC, DC.

15. $ABCD$ – трапеция, BC и AD – основания. Выразите CD через BA и разность векторов AD и BC.

16. Представьте вектор AB в виде суммы следующих векторов: AC, DC, BD.

Упражнения этого типа ориентированы на формирование умения представлять векторы в виде суммы / разности векторов, упражнение №13 предусматривает мысленное выполнение действий, упражнения №14-16 предусматривает как непосредственное, так и мысленное выполнение действий с векторами [36, С.122].

Упражнения на представление вектора в виде произведения вектора на число

17. Через середину стороны BC равностороннего треугольника ABC проведен перпендикуляр DK к стороне AC. Выразите DK через векторы AB и AC.

18. Вектор CD коллинеарен вектору AB, $\frac{|CD|}{|AB|} = k$. Выразите один вектор через другой.

19. Точки K, D, E соответственно середины сторон AB, BC, CA треугольника ABC. Выразите вектор AD через вектор: $KB + KE$.

20. $ABCD$ – произвольный четырехугольник. M и N – середины диагоналей BD и AC. Докажите, что $2MN = DC + BA$.

В упражнениях № 19-20 выполняется не только представление вектора в виде произведения на число, но и представление вектора в виде суммы, разности векторов [36, С.123].

Упражнения на переход от соотношения между векторами к соотношению между их длинами и обратно

21. Дан параллелограмм $ABCD$. Выразите вектор MN через векторы AB и AD, если $BM = \frac{2}{3}BO$ и $CN = \frac{1}{2}CO$, где O – точка пересечения диагоналей параллелограмма.

22. В параллелограмме $ABCD$ точки K и L делят стороны AB и AD в отношении $\frac{1}{4}$. Выразите KL через AB и AD.

23. В треугольнике ABC имеем: AM, BD – медианы, а O – точка их пересечения. Выразите AB через векторы AM и DB.

Упражнения такого типа предполагают владение умениями переводить геометрический язык на векторный и обратно, выполнять сложение, вычитание векторов, умножение вектора на число, производить обратные действия на умственном этапе. Данные упражнения поднимают учащихся на более высокую ступень в овладении векторным методом [36, С.124].

Упражнения на преобразования векторных равенств

24. Упростите выражение $AB + MN + BC + CA + PQ + NM$, $AC - BC - PM - AP + BM$.

25. Окружность с центром O точками A, B, C, D, E, F делится на шесть равных дуг. Докажите, что $OA + OB + OC + OD + OE + OF = 0$.

26. О – точка пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$. Упростите выражения $AB + DO \;\; + OA$.

27. OA и OB – неколлинеарные единичные векторы. Найдите скалярное произведение $(OA + OB)(OA - OB)$.

28. Упростите выражение $(a + b - c)(a - b + c)$, если вектор b перпендикулярен вектору c.

29. Четырехугольник $ABCD$ – квадрат. Упростите выражение $(AB - 3BC)^2$.

В упражнениях №24-26 используются свойства сложения векторов. Упражнения №27-29 иллюстрируют свойства скалярного произведения векторов [36, С.125].

Упражнения на нахождение длины вектора и величины угла между векторами

30. Известно, что $c = a + b$, $\;\; a, b \;\; = 30^o$, $|a| = 5$, $\;\; b \;\; = 3$. Найдите $|c|$.

31. В треугольнике ABC имеем: $AC = 8$, $AB = 12$, $\angle A = 52^o$. Найдите длину медианы AD.

32. Известно, что векторы $a + 2b$ и $5a - 4b$ взаимно перпендикулярны. Какой угол образуют векторы a и b, если $|a| = |b| = 1$.

33. Дан треугольник MNP. Известно, что $MN = NP = 3, MP = 4$. Найдите $\angle MNP$.

34. В треугольнике ABC имеем: $AC = b, AB = c, \angle BAC = \alpha$. Найдите BC.

35. Определите длину отрезка AB, если $A \;\; 2; 1 \;\; , B \;\; 3; 5 \;\;$. [36, С.125]

36. Определите угол между векторами a и b, если $a = \;\; -3; -3 \;\; , b = \;\; 1; -7 \;\;$ [6, С.269].

В предложенных упражнениях используются определение и свойства скалярного произведения, понятие длины отрезка, понятие угла между векторами.

Упражнения на применение векторного метода в конкретных ситуациях

37. На отрезке AC построены два произвольных параллелограмма $ABDC$ и $ACKL$. Докажите, что четырехугольник $BDKL$ – параллелограмм.

38. В окружность $(O; R)$ вписан четырехугольник $ABCD$. Докажите, что если $AB^2 + CD^2 = 4R^2$, то диагонали этого четырехугольника перпендикулярны [36, С.126].

39. Точки K,L,M,N – середины сторон BC,CD,DE,EA пятиугольника ABCDE, точки P и Q – середины отрезков KM и LN. Докажите, что отрезки PQ и AB параллельны, и найдите отношение их длин (Задача № 1 из [14, С. 21]).

40. На сторонах AB и BC треугольника ABC во внешнюю сторону построены квадраты $ABMN$ и $BCKF$. Докажите, что медиана BD треугольника ABC перпендикулярна MF (Задача № 617 из [23, С. 144]).

Условия предложенных задач наводят на метод их выполнения, именно с упражнений такого типа следует начинать применять векторный метод в конкретных ситуациях. Ответы и решения представлены в *Приложении 4*.

§10. Результаты проведения диагностической работы

Диагностическая работа проводилась на базе МБУ «Школа № 1 имени Виктора Носова» г. о. Тольятти в период преддипломной практики (02.05 - 14.05.2017гг.). В эксперименте участвовали 40 учащихся 9 классов, которые занимаются по учебнику геометрии под редакцией Л.С. Атанасяна.

Цель эксперимента - определить уровень владения учащимися 9 классов отдельными компонентами векторного метода, а также векторным методом «в целом».

Учащимся была предложена работа (представлена ниже), в которой представлены следующие типы задач:

1. На перевод геометрического языка на векторный и обратно (№ 1-4).

2. На выполнение операций с векторами (№5).

3. На преобразование векторных равенств (№6, 9).

4. На представление вектора в виде суммы/разности векторов (№7).

5. На представление вектора в виде произведения вектора на число, на переход от соотношения между векторами к соотношению между их длинами и обратно (№8).

6. На нахождение длины вектора и величины угла между векторами (№10).

7. На применение векторного метода в конкретной ситуации (аффинная задача) (№11).

8. На применение векторного метода в конкретной ситуации (метрическая задача) (№12).

Ознакомимся с текстом работы.

Диагностическая работа на тему

«Векторный метод в курсе геометрии основной школы»

Инструкция

Задания диагностической работы выполняются на отдельном листе. Условия заданий переписывать не нужно. Задачи можно решать в любом порядке, но предварительно нужно указывать номер. Время выполнения 45 минут.

В заданиях 1-4 выберите правильный ответ.

1. Точка A принадлежит отрезку BC. Запишите это соотношение в векторной форме [37].

а)$BA = \alpha BC, \alpha < 0$;

б)$BA = \alpha BC, 0 < \alpha < 1$;

в)$AB = \alpha BC, \alpha > 1$.

2. Прочитайте запись на геометрическом языке $AM = \alpha AB$ [36].

а)Точка M принадлежит отрезку AB;

б)Точка M и точка B совпадают;

в) Точка M принадлежит прямой AB.

3. Отрезки AB и MK параллельны. Запишите это соотношение в векторной форме [36]

а) $AB = \mu MK$;

б)$AB = MK$;

в)$MB = \mu AK$.

4. Запишите в векторной форме условие перпендикулярности отрезков AB и PK [36].

а)$AB = kPK$;

б) $AB \cdot PK = 0$;

в) $AB \cdot PK > 0$;

г) $AB \cdot PK < 0$.

В заданиях 5-12 запишите подробное решение.

5. Даны векторы MN и KL. Постройте вектор $3MN - \frac{1}{2}KL$ [37].

6. Найдите $AB + BA + CD + KL + DC + LK,\ \ OA + BC + DO + CD$ [37].

7. Представьте вектор AB в виде суммы следующих векторов DA, DC, CB [36].

8. В параллелограмме $ABCD$ точки K и L делят стороны AB и AD в отношении $\frac{2}{3}$. Выразите KL через AB и AD [36].

9. Длина гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC равна с. Вычислите сумму $AB \cdot AC + BC \cdot BA + CA \cdot CB$ [36].

10. * Известно, что векторы $a + 2b$ и $5a - 4b$ взаимно перпендикулярны. Какой угол образуют векторы a и b, если $|a| = |b| = 1$ [36].

11. * Докажите, что середины оснований трапеции и точка пересечения продолжения ее боковых сторон лежат на одной прямой [6].

12. * В треугольнике ABC известно, что $\angle C = 90^o$, $AC = 1$, $BC = \sqrt{2}$. Докажите, что его медианы AK и CM перпендикулярны [23].

Ответы и решения заданий диагностической работы представлены в *Приложении 5*. В Табл. 6 Представим критерии оценивания данной работы.

Таблица 6

Критерии оценивания диагностической работы

Номер задания	**Максимальный балл**	**Комментарии**
1.	1	Дан правильный ответ
2.	1	Дан правильный ответ
3.	1	Дан правильный ответ
4.	1	Дан правильный ответ
5.	3	Правильно построен вектор $3MN$ – 1 балл, правильно построен вектор $-\frac{1}{2}KL$ – 1 балл, правильно построена сумма векторов $3MN - \frac{1}{2}KL$.
6.	2	За каждое верное упрощение 1 балл
7.	1	Дан правильный ответ
8.	3	Правильно выражены векторы AK, AL – 1 балл, правильно представлен вектор KL в виде суммы векторов $KA + AL$ – 1 балл, правильно выполнены соответствующие преобразования – 1 балл
9.	2	Использовано свойство скалярного произведения ($CA \cdot CB = 0 <=> CA \perp CB$) – 1 балл, правильно выполнены соответствующие преобразования – 1 балл
10. *	5	Правильно сделана запись условия перпендикулярности в векторной форме – 1 балл, правильно выполнены соответствующие преобразования – 1 балл, правильно использовано понятие скалярного произведения – 1 балл, правильно найден косинус угла между векторами – 1 балл, правильно найден угол между векторами – 1 балл
11. *	5	Правильно сделан схематический рисунок – 1 балл, доказано подобие треугольников – 1 балл, выражены векторы OM, ON (медианы треугольников) через стороны треугольников – 1 балл, использовано понятие коллинеарности векторов OA, OD – 1 балл, правильно переведен векторный результат на геометрический язык – 1 балл
12. *	5	Правильно сделан схематический рисунок – 1 балл, правильно найдена длина гипотенузы треугольника – 1 балл, правильно выражены в векторной форме медианы треугольника – 1 балл, правильно вычислено скалярное произведение векторов – 1 балл, правильно переведен векторный результат на геометрический язык – 1 балл
Итого	30	

Таблица 7

Шкала перевода первичных баллов в 5-балльную систему

Оценка	Количество баллов
«2»	<12
«3»	12-15
«4»	16-21
«5»	22-30

Отметим, что для получения отличной оценки (Табл. 7) вовсе не обязательно решать все задания, мы учитываем индивидуальные особенности учащихся, ограничения по времени выполнения.

В Табл. 8 представим результаты выполнения диагностической работы.

Таблица 8

Результаты выполнения диагностической работы учащимися 9 классов

Номер задания	**Выполнили правильно полностью**	**Выполнили правильно частично**	**Выполнили неправильно**	**Не приступили к выполнению**
1.	87,5%(35)	-	12,5%(5)	0%(0)
2.	42,5%(17)	-	57,5%(23)	0%(0)
3.	67,5%(27)	-	32,5%(13)	0%(0)
4.	52,5%(21)	-	47,5%(19)	0%(0)
5.	37,5(15)	12,5%(5)	40%(16)	10%(4)
6.	40%(16)	32,5(13)	15%(6)	12,5%(5)
7.	57,5%(23)	-	25%(10)	17,5%(7)
8.	40%(16)	7,5%(3)	5%(2)	47,5%(19)
9.	0%(0)	10%(4)	0%(0)	90%(36)
10.	0%(0)	0%(0)	0%(0)	100%(40)
11.	0%(0)	0%(0)	0%(0)	100%(40)
12.	0%(0)	0%(0)	0%(0)	100%(40)

Остановимся детально на результатах выполнения учащимися 9 классов заданий предложенной диагностической работы. Абсолютное большинство учащихся (87,5%) справилось с заданием №1, в котором нужно было перевести геометрические соотношения на векторный язык. Обратное действие (перевод векторного соотношения на геометрический язык) вызвало затруднение, задание №2 успешно выполнили только 42,5% учащихся.

Задание №3 аналогично по типу заданию №1, однако процент выполнения несколько ниже – 67,5. В задании №4 необходимо вспомнить понятие скалярного произведения и угла между векторами, около половины участников, а именно 52,5%, смогли выбрать правильный ответ среди предложенных.

Чтобы успешно выполнить задание №5, нужно владеть такими понятиями, как произведение вектора на число, противоположный вектор, уметь строить сумму векторов по правилу треугольника или параллелограмма. Лишь 37,5% учащихся справились с данным заданием. Менее половины учащихся (40%) умеют преобразовывать векторные равенства (задание №6), использовать свойства суммы векторов, хотя с обратной операцией (представление вектора в виде суммы / разности векторов – задание №7) справились 57,5 % участников. Задание №8 успешно выполнили только 40% учащихся. Выполнение этого блока заданий предполагает установление порогового значения удовлетворительной оценки, причем допускается одна ошибка.

Задание №9 смогли частично выполнить лишь 10% учеников, полностью - 0%. Задания №10-12 оказались учащимся не под силу, никто даже не сделал попытку решить задачи, хотя время позволяло.

После проверки диагностической работы были выставлены следующие оценки (Табл. 9) согласно критериям, приведенным в *Таблице 7*.

Таблица 9

Количественные результаты выполнения диагностической работы

Оценка	Количество учащихся, получивших оценку
«2»	60% (24)
«3»	40% (16)
«4»	0% (0)
«5»	0% (0)

Итак, результаты диагностической работы показали, что учащиеся общеобразовательных классов слабо владеют базовым понятийным аппаратом и навыками по теме «Векторы», испытывают затруднения при выполнении обратных действий с векторами и совсем не владеют векторным методом «в целом».

Как правило, тема «Векторы» изучается в начале 9 класса, поэтому к концу учебного года учащиеся забывают данный раздел, для закрепления материала отводится достаточно мало времени, к тому же ОГЭ-2017 по математике содержит небольшое количество заданий на базовые операции с векторами, в связи с чем и не уделяется должное внимание предложенной теме.

Выводы по второй главе

Во второй главе были получены следующие результаты:

1. Выполнен анализ содержания темы «Векторы и их применение к решению задач» в учебниках геометрии под редакцией Л.С. Атанасяна, А.В. Погорелова, А.Д. Александрова. Основное внимание в рассмотренных учебниках уделяется определению понятия «вектор», линейным операциям над векторами, их свойствам. В учебных пособиях для общеобразовательных классов векторный метод решения задач излагается в ознакомительном порядке, на практике ему отводится мало времени, как правило, данный метод более подробно изучается в математических классах.

2. Рассмотрены методические рекомендации по обучению векторному методу учащихся 8-9 классов. Определено, что обучать учащихся векторному методу необходимо на специально подобранных задачах, условия которых наводят на метод их решения и в которых применение векторного аппарата позволяет упростить сложные геометрические понятия, доказательства теорем и избежать некоторых ошибок и трудностей. Полезно выделить класс задач, которые могут быть решены векторным методом (доказательство принадлежности точек прямой, отрезку, параллельности прямых и отрезков, деление отрезка в данном отношении, установление взаимного расположения прямых, вычисление длины отрезка, величины угла). Целесообразно обучать некоторых эвристикам, которые помогут найти ключ к решению задачи.

В процессе обучения учащихся векторному методу необходимо закрепить понятийный аппарат и базовые умения и навыки по теме «Векторы», продемонстрировать межпредметные связи, использовать схемы и таблицы, уделить внимание упражнениям, которые являются компонентами векторного метода, решить типовые аффинные и метрические задачи.

3. Разработана система упражнений по теме «Векторный метод» для учащихся 8-9 классов. В систему включены упражнения по формированию

умений владеть специальными действиями (перевод геометрического языка на векторный и обратно, выполнение операций над векторами, представление вектора в виде суммы, разности векторов, произведения вектора на число, преобразование векторных соотношений, переход от соотношения между векторами к соотношению между их длинами и наоборот, выражение длины вектора через его скалярный квадрат, выражение величины угла между векторами через их скалярное произведение), упражнения на прямые и обратные действия, упражнения на выполнение действия на материализованном и умственном этапе.

4. Представлены результаты эксперимента, проведенного на базе МБУ «Школа № 1» г. о. Тольятти, в результате которого можно сделать вывод о недостаточном уровне умения решать задачи по теме «Векторы и векторный метод». Так, из 40 человек только 16 смогли преодолеть установленное пороговое значение, остальные же вовсе не справились с заданием. Учащиеся слабо владеют базовым понятийным аппаратом и навыками по теме «Векторы», испытывают затруднения при выполнении обратных действий с векторами и совсем не владеют векторным методом «в целом».

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключении сформулируем выводы и полученные результаты проведенного исследования.

1. Рассмотрены исторические аспекты развития векторного исчисления в математической науке и образовании. Было выяснено, что еще в Древней Греции математики выполняли действия с отрезками. В XIX столетии в связи с бурным развитием естествознания появилась необходимость оформления векторного исчисления в том виде, каким мы его принимаем сейчас. Благодаря усилиям ученых векторы заняли почетное место в школьной и вузовской программах.

2. Выявлены различные подходы к определению понятия «вектор» в курсе геометрии основной школы. В учебниках встречается определение вектора как направленного отрезка, параллельного переноса, бесконечного множества направленных отрезков. Считается, что у каждой формулировки есть как достоинства, так и недостатки (степень наглядности, логичность, соответствие представлениям о векторных величинах).

3. Рассмотрены государственные стандарты основного общего образования по математике. Проанализированы цели обучения векторному методу в курсе геометрии основной школы. Векторный аппарат предлагает новый метод решения геометрических задач на вычисление и доказательство, способствует реализации межпредметных связей, а также развитию гибкости и рациональности мышления.

4. Выделены требования, предъявляемые к знаниям, умениям и навыкам учащихся по теме «Векторы» в зависимости от уровня изучения геометрии. Согласно Примерной образовательной программе учащиеся должны овладеть векторным методом на углубленном уровне изучения геометрии. Был изучен спецификатор ОГЭ-2017 по математике. В ОГЭ-2017 не представлены задачи, которые проверяют степень освоения учащимися векторного метода решения планиметрических задач, но встречаются задачи,

в которых используются базовый понятийный аппарат и базовые умения по теме «Векторы».

5. Рассмотрены различные формы, методы и средства обучения векторному методу. Одними из ведущих методов обучения векторному методу являются эвристическая беседа, система правил и алгоритмов. При организации обучения геометрии целесообразно использовать различные наглядные пособия: таблицы, плакаты, карточки, рабочие тетради на печатной основе.

6. Выявлена сущность векторного метода решения планиметрических задач. Векторный метод включает в себя три основных этапа (перевод языка условия задачи на векторный язык, выполнение действий над векторными выражениями, перевод полученного результата на исходные термины задачи). Проиллюстрировано применение векторного метода при доказательстве теорем, решении аффинных и метрических задач.

7. Выполнен анализ содержания темы «Векторы и их применение к решению задач» в учебниках геометрии. Основное внимание в учебных пособиях уделяется определению понятия «вектор», линейным операциям над векторами, их свойствам. В общеобразовательных классах векторный метод решения задач излагается в ознакомительном порядке, а в математических классах подробно.

8. Рассмотрены методические рекомендации по обучению векторному методу учащихся 8-9 классов. Определено, что обучать учащихся векторному методу необходимо на специально подобранных задачах, в которых применение векторного аппарата позволяет упростить сложные геометрические понятия. Полезно выделить класс задач, которые могут быть решены векторным методом. Целесообразно обучать некоторых эвристикам, которые помогут найти ключ к решению задачи.

В процессе обучения учащихся векторному методу необходимо закрепить понятийный аппарат и базовые умения и навыки по теме «Векторы», продемонстрировать межпредметные связи, использовать схемы и таблицы, уделить внимание упражнениям, которые являются компонентами векторного метода, решить типовые аффинные и метрические задачи.

9. Разработана система упражнений по теме «Векторный метод» для учащихся 8-9 классов. В систему включены упражнения по формированию умений владеть специальными действиями, упражнения на прямые и обратные действия, упражнения на выполнение действия на материализованном и умственном этапе.

10. Представлены результаты диагностической работы, которая показала недостаточный уровень умения решать задачи по теме «Векторы и векторный метод», так как у учащихся плохо сформированы базовый понятийный аппарат и навыки по теме «Векторы».

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров, А.Д. Геометрия. 9 класс [Текст]: учеб. для общеобразоват. организаций / А.Д. Александров и др. – М.: Просвещение, 2014. – 175 с.

2. Александров, А.Д. и др. Геометрия [Текст]: учеб. пособие для 9 кл. с углубл. изуч. математики / А.Д. Александров, А Л. Вернер, В. И. Рыжик. – М.: Просвещение, 2004. – 240 с.

3. Александров, А.Д. Что же такое вектор? /А.Д. Александров// Математика в школе. – 1984. – № 5. – С. 39.

4. Александров, П. С. Энциклопедия элементарной математики. Кн. 4. Геометрия [Текст] / П. С. Александров. и др. – М. : Гос. изд-во физико-матем. лит., 1963. – 568 с.

5. Александрова, Н.В. Математические термины. Справочник [Текст] /Н.В. Александрова. - М.: Высш. школа, 1978. – 190 с.

6. Атанасян, Л. С. Геометрия [Текст]: учеб. для 7-9 кл. общеобразоват. учреждений / Л. С. Атанасян. и др. – М. : Просвещение, 2010. – 384 с.

7. Афанасьева, Т. Л. Геометрия. 9 класс [Текст]: поурочные планы по учебнику Л.С. Атанасяна [и др.] / Т. Л. Афанасьева, Л. А. Тапилина. – Волгоград : Учитель, 2013. – 167 с.

8. Боженкова, Л.И. Обучение учащихся векторному и координатно-векторному методу с помощью знаковых моделей/ Л.И. Боженкова// Математические структуры и моделирование. – Омск, 1999. - № 4. - С. 98-103.

9. Бурмистрова, Т. А. Геометрия. Сборник рабочих программ. 7-9 классы [Текст]: пособие для учителей общеобразоват. учреждений / Т. А. Бурмистрова. – М. : Просвещение, 2014. – 95 с.

10. Глейзер, Г.И. История математики в школе 9-10 классов [Текст]: пособие для учителей / Г.И. Глейзер. – М.: Просвещение, 1853. – 351 с.

11. Глейзер, И.И. К истории вопроса об изучении векторов / И.И. Глейзер // Математика в школе. – 1986. – № 5. – С. 54.

12. Гусев, В.А. Векторы в школьном курсе геометрии [Текст]: пособие для учителей / В.А. Гусев. - М.: Просвещение, 1976. – 48 с.

13. Зив, Б.Г. Геометрия. Дидактические материалы. 8 класс [Текст] / Б.Г. Зив, В.М. Мейлер. – 13-е изд. – М.: Просвещение, 2010. – 159 с.

14. Ионин, Ю., Некрасов В. Векторы в геометрических задачах/Ю. Ионин // Квант. – 1985. - №10. – С. 21.

15. Каюмов, О.Р. Диалоги о векторном методе. Аффинные задачи/ О.Р. Каюмов // Математика в школе. - 2015. - № 8. - С. 24-34.

16. Колесникова, Е.В. Векторный метод в курсе геометрии основной школы [Электронный ресурс] / Е.В. Колесникова // Певзнеровские чтения. - 2013. - № 1. - С. 27-33. - Режим доступа: http://elibrary.ru/download/elibrary_21695756_70567300.pdf - Последнее обновление 09.05.2017.

17. Колмогоров, А. Н. Геометрия [Текст]: учебное пособие для 6-8 классов средней школы/А.Н. Колмогоров и др. – М.: Просвещение, 1979. – 348с.

18. Колягин, Ю. М. Методика преподавания математики в средней школе: частные методики [Текст]: учеб. пособия для студ. физ.-мат. фак. пед. институтов / Ю. М. Колягин. и др. – М. : Просвещение, 1977. – 480 с.

19. Лященко, Е. И. Лабораторные и практические работы по методике преподавания математики [Текст]: учеб. пособие для студентов физ.-мат. спец. пед. Ин-тов / Е. И. Лященко. и др. – М. : Просвещение, 1988. – 223 с.

20. Машунина, Г.А. Применение компьютера на уроках геометрии / Г.А. Машунина // Педагогическое образование на Алтае. - 2001. - № 1. - С. 34-37.

21. Мельникова, Н.Б. Об изучении темы: «Векторы на плоскости» / Н.Б. Мельникова // Математика в школе. – 1986. – № 3. – С. 26–27.

22. Мельникова, Н.Б. Поурочное планирование по геометрии: 8 класс: к учебнику А. В. Погорелова, «Геометрия 7-9 классы» [Текст] /Н.Б. Мельникова. – М.: Экзамен, 2009. - 382 с.

23. Мерзляк, А.Г. Геометрия: 9 класс [Текст]: учебник для учащихся общеобразовательных организаций / А.Г. Мерзляк и др. – М.: Вентана-Граф, 2014. – 240 с.

24. Метельский, Н.В. Дидактика математики: Общая методика и ее проблемы [Текст]: учеб. пособие для вузов / Н.В. Метельский. – Мн.: Изд-во БГУ, 1982. – 256 с.

25. Мишин, В. И. Методика преподавания математики в средней школе: Частная методика [Текст]: учеб. пособие для студентов пед. ин-тов по физ.-мат. спец / В. И. Мишин. и др. – М. : Просвещение, 1987. – 416 с.

26. Мищенко, Т.М. Дидактические материалы и методические рекомендации для учителя по геометрии: 8 класс: к учебнику Л.С. Атанасяна и др. «Геометрия.7-9 классы». ФГОС (к новому учебнику) [Текст]/ Т.М. Мищенко. – М: Издательство «Экзамен», 2016. – 174 с.

27. Мищенко, Т.М. Дидактические материалы и методические рекомендации для учителя по геометрии: 8 класс: к учебнику А.В. Погорелова «Геометрия.7-9 классы» [Текст]/ Т.М. Мищенко. – М: Издательство «Экзамен», 2014. – 206 с.

28. Мищенко, Т.М. Дидактические материалы и методические рекомендации для учителя по геометрии: 9 класс: к учебнику Л.С. Атанасяна и др. «Геометрия.7-9 классы». ФГОС (к новому учебнику) [Текст]/ Т.М. Мищенко. – М: Издательство «Экзамен», 2017. – 142 с.

29. Перышкин, А.В. Физика. 7 кл. [Текст]: учеб. для общеобразоват. учеб. заведений /А.В. Перышкин. - М.: Дрофа, 2002. - 192 с.

30. Погорелов, А.В. Геометрия. 7-9 классы [Текст]: учеб. для общеобразоват. организаций / А.В. Погорелов.– М.: Просвещение, 2014. – 240 с.

31. Потоскуев, Е.В. Геометрический компонент профессиональной подготовки учителя математики в педагогическом вузе [Текст]: учебно-методическое пособие / Е.В. Потоскуев. - Тольятти: ТГУ, 2009. – 400с.

32. Приказ Минобрнауки России от 26 января 2016 г. № 38 «О внесении изменений в федеральный перечень учебников, рекомендованных к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ начального общего, основного общего, среднего общего образования, утвержденный приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 31 марта 2014 г. № 253» [Электронный ресурс]. - Режим доступа: http://fpu.edu.ru/files/contentfile/82/prikaz-n-38-ot-26.01.2016.pdf - Последнее обновление 23.04.2017.

33. Примерная основная образовательная программа основного общего образования [Электронный ресурс]. - Режим доступа: http://fgosreestr.ru/wpcontent/uploads/2015/06.pdf - Последнее обновление 29.05.2017.

34. Саранцев, Г.И. Методика обучения математике: методология и теория: учеб. пособие для студентов бакалавриата высших учебных заведений по направлению «Педагогическое образование» (профиль «Математика») [Текст] / Г.И. Саранцев. – Казань: Центр инновационных технологий, 2012. – 292 с.

35. Саранцев, Г.И. О методике решения планиметрических задач / Преподавание геометрии в 6-8 классах [Текст]: сб. статей / Г.И. Саранцев. - М.: Просвещение, 1979. - С.102-116.

36. Саранцев, Г.И. Упражнения в обучении математике [Текст]/ Г.И. Саранцев – М.: Просвещение, 1995. – 240с.

37. Сластенин, В.А. Педагогика [Текст]: учеб. пособие для студ. высш. пед. учеб. заведений / В.А. Сластенин и др. – М.: Издательский центр «Академия», 2007. – 576 с.

38. Смирнова, И.М. Геометрия. 7-9 классы [Текст]: учеб. для общеобразоват. учреждений/ И.М. Смирнова, В.А. Смирнов. – М.: Мнемозина, 2007. – 376 с.

39. Стефанова, Н. Л. Методика и технология обучения математике. Курс лекций [Текст]: пособие для вузов / Н. Л. Стефанова, Н. С. Походова. – М. : Дрофа, 2005. – 416 с.

40. Федеральный государственный образовательный стандарт общего основного образования [Электронный ресурс]. - Режим доступа: http://минобрнауки.рф/документы/938. - Последнее обновление 19.12.2016

41. Федеральный институт педагогических измерений. [Электронный ресурс]. - Режим доступа: http://www.fipi.ru/oge-i-gve-9/demoversii-specifikacii-kodifikatory. - Последнее обновление 19.12.2016.

42. Федеральный перечень учебников, рекомендуемых к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ начального общего, основного общего, среднего общего образования [Электронный ресурс]. - Режим доступа: фпу.рф/upload/Приложение_к_Приказу_№253_от_31 _марта _2014.pdf - Последнее обновление 23.04.2017.

43. Цыпкин, А.Г. Справочное пособие по математике с методами решения задач для поступающих в вузы [Текст] / А.Г. Цыпкин, А.И. Пинский. – М.: Оникс, Мир и Образование, 2007. – 640с.

44. Шарыгин, И.Ф. Геометрия. 7-9 кл. [Текст]: учеб. для общеобразоват. учреждений / И.Ф. Шарыгин. – М.: Дрофа, 2012. – 462 с.

45. Шурыгин, В.Ю., Шурыгина И.В. Активизация межпредметных связей физики и математики как средство формирования метапредметных компетенций школьников / В.Ю. Шурыгин //Карельский научный журнал. - 2016. - Т. 5. - № 4 (17). - С. 41-44.

46. Юшкевич, А. П. История математики с древнейших времен до начала XIX столетия. В 3 т. Т. 3. Математика XVIII столетия [Текст]/ А. П. Юшкевич. – М. : Наука, 1972. – 498 с.

47. Ященко, И.В. ОГЭ: 3000 задач с ответами по математике. Все задания части 1[Текст] / И.В. Ященко и др. – М.: Издательство «Экзамен», МЦНМО, 2017. – 479 с.

48. Borisenko, A. I., Tarapov, I. E. Vector and Tensor Analysis with Applications. - Courier Corporation, 1968. – 288pp.

49. Colley, S.J. Vector Calculus. - Pearson Prentice Hall, 2006. – 551 pp.

50. Copeland, H. Geometry, algebra and trigonometry by vector. – USA, 1962. – 298pp.

51. Hoffmann, B. About Vectors. - Courier Corporation, 1975. – 135 pp.

52. Konev, V.V. Linear Algebra, Vector Algebra and Analytical Geometry. Textbook. - Tomsk: TPU Press, 2009. - 114 pp. - Режим доступа: http://portal.tpu.ru/SHARED/k/KONVAL/Textbooks/Tab1/Konev-Linear_Algebra_Vector_Algebra_and_Analytical_Geome.pdf - Последнее обновление 28.05.2017.

Приложение 1

Планируемые результаты изучения темы «Векторы»

Таблица 10

Предполагаемые знания, умения и навыки учащихся
в зависимости от уровня изучения геометрии

Предполагаемые знания, умения и навыки	**Уровень изучения геометрии**		
	Базовый	**Расширенный**	**Углубленный**
Учащиеся должны оперировать понятиями			
вектор	+	+	+
сумма векторов	+	+	+
разность векторов		+	+
произведение вектора на число	+	+	+
угол между векторами		+	+
скалярное произведение векторов		+	+
Учащиеся должны выполнять			
действия над векторами (сложение, вычитание, умножение на число)		+	+
вычисление скалярного произведения		+	+
определение в простейших случаях угла между векторами		+	+
разложение вектора на составляющие		+	+
Учащиеся должны применять			
векторы для решения простейших задач на вычисление скорости относительного движения	+	+	+
векторы для решения геометрических задач на вычисление длин, углов		+	+
векторы для решения задач по смежным учебным дисциплинам		+	+
Учащиеся должны владеть			
векторным методом на плоскости для решения задач на вычисление и доказательства			+
умением доказывать известные геометрические факты и получать новые свойства известных фигур с помощью векторов			+

Приложение 2

Сравнительный анализ программ к учебникам геометрии по теме «Векторы и их применение к решению задач»

Таблица 11

Результаты анализ программ к учебникам геометрии

Авторы учебников	Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев и др.	А.В. Погорелов	А. Д. Александров, А.Л. Вернер, В.И. Рыжик (общеобразоват.)	А. Д. Александров, А.Л. Вернер, В.И. Рыжик (углубленный)
Количество часов на предложенную тему	8ч+2ч	10ч	14ч+6ч	26ч
Класс, в котором предусмотрено изучение данной темы	9	8	9	9

Приложение 3

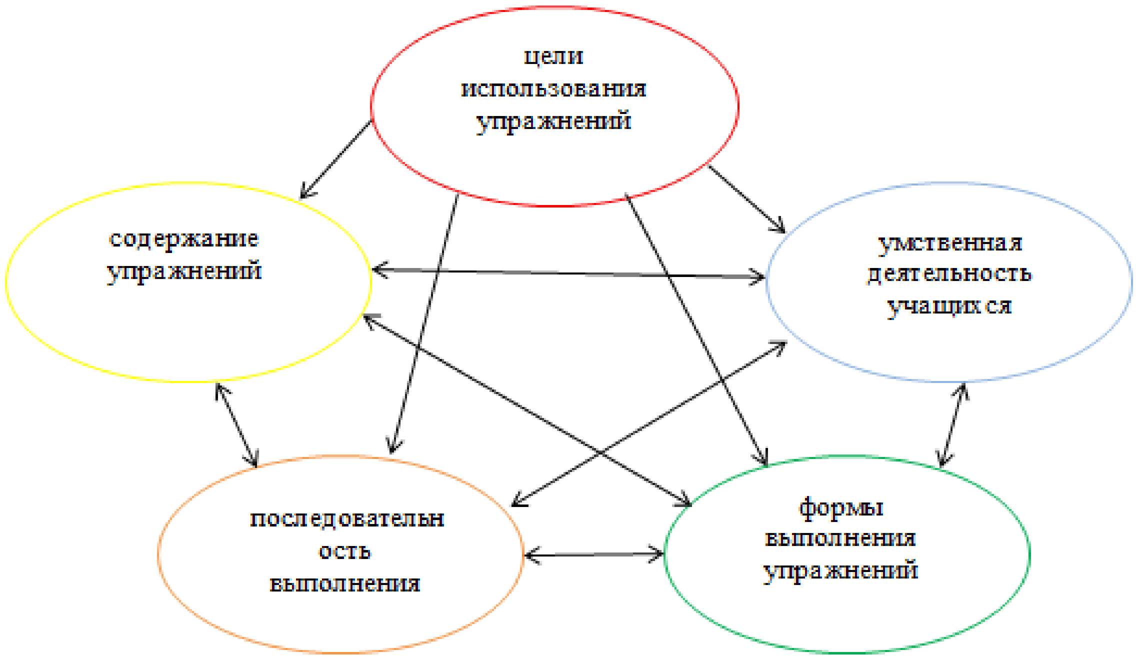


Схема 3. Взаимосвязь цели использования упражнений с их содержанием, последовательностью и формами выполнения и умственной деятельностью учащихся.

Приложение 4

Ответы и указания решения к системе упражнений по теме «Векторный метод» в курсе геометрии основной школы

1. $KN = \mu PR$.

2. $AB = \propto AC,\ \ AB = \beta BC,\ \ AC = \gamma BC,\ \ AC = \delta AB$.

3. $AB = \frac{m}{n} CB$.

4. Прямые CD и AB параллельны.

5. $KN \cdot PR = 0$.

6. Точки A и B совпадают.

7. $AO = \frac{1}{2} AB$.

8. $A, B, C \in$ одной прямой.

9. Удвоенное скалярное произведение a и b равно следующей разности: суммы площадей квадратов, построенных на направленных отрезках, изображающих a и b, и площади квадрата, построенного на направленном отрезке, изображающем вектор $a - b$.

10. Комментарии к решению представлены на Рис. 39.

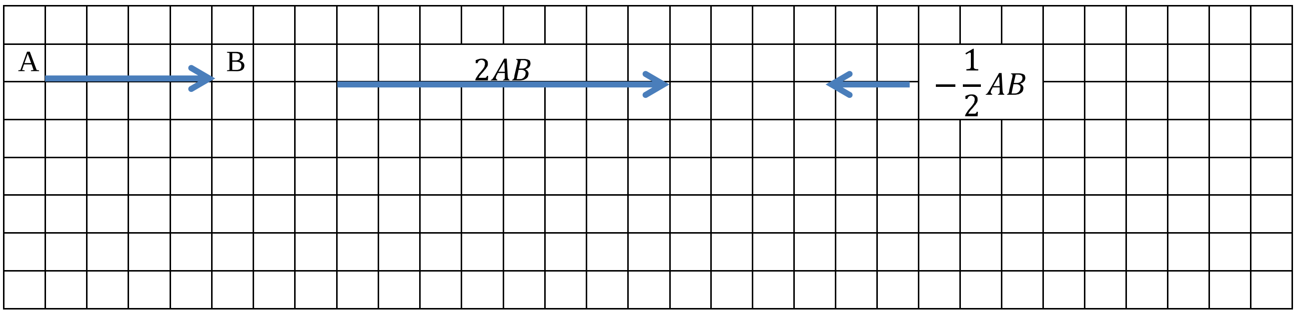


Рис. 39

11. Комментарии к решению представлены на Рис. 40.

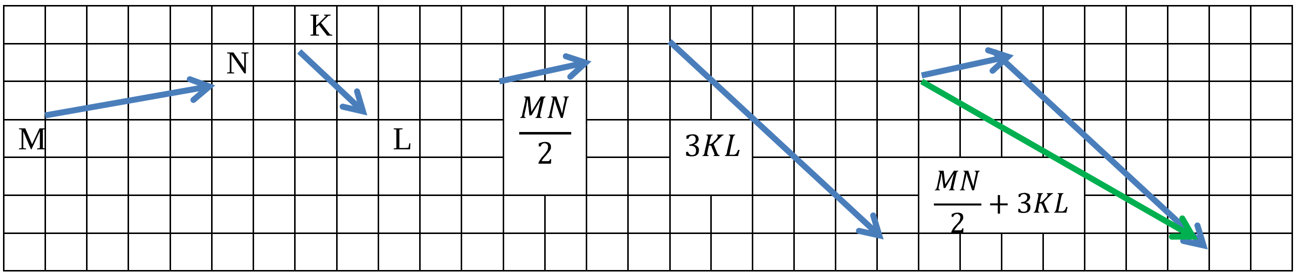


Рис. 40

12. $x = -1$; $x = 2$.

13. $AB = AC + CB = AC + CD + DB$.

14. $CA = -BC - AB$; $AD = AB + BC - DC$.

15. $CD = CB + BA + AD = BA + \; AD - BC \;$.

16. $AB = AC + CD + DB = AC - DC - BD$.

17. Из вершины B треугольника ABC проведем высоту BH. $\Delta BHC \sim \Delta DKC$ по двум углам $=> DK = \frac{1}{2}BH$, так как $BD = DC$. Выразим вектор $BH = BA + AH = -AB + \frac{1}{2}AC$; $DK = \frac{1}{2}BH = \frac{1}{2} \; -AB + \frac{1}{2}AC \; = \frac{1}{4}AC - \frac{1}{2}AB$.

18. $CD = kAB$.

19. $KD = KB + KE$; $AD = AK + KD$. Векторы AK и KB равны, поэтому $AD = KB + KB + KE = 2KB + KE$.

20. $MN = MB + BA + AN$ – с одной стороны, $MN = MD + DC + CN$ – с другой стороны. Сложим оба равенства, получим с учетом противоположных векторов $MN = \frac{BA+DC}{2}$.

21. $AC = AB + AD$; $BD = BA + AD$; $MN = MO + ON = \frac{1}{3}BO + \frac{1}{2}OC = \frac{1}{6}BD + \frac{1}{4}AC = \frac{1}{6} \; AD - AB \; + \frac{1}{4} \; AB + AD \; = \frac{5}{12}AD + \frac{1}{12}AB$.

22. $AK = \frac{1}{4}AB$; $AL = \frac{1}{4}AD$; $KL = KA + AL = -AK + AL = -\frac{1}{4}AB + \frac{1}{4}AD = \frac{1}{4}BD$.

23. $AM = \frac{1}{2} \; AB + AC \;$; $AD = \frac{1}{2}AC = AB + BD$;

$$AM = \frac{1}{2}(AB + 2 \; AB + BD \;)$$

$$2AM = 3AB + 2BD$$

$$AB = \frac{2AM - 2BD}{3}$$

$$AB = \frac{2}{3} \; AM + DB \; .$$

24. PQ; 0.

26. DB.

27. 0.

28. $a^2 - b^2 - c^2$.

29. $10AB^2$.

30. $\sqrt{34 + 15\sqrt{3}}$.

31. $2\sqrt{13 + 12\cos 52^o}$.

32.

$$(a + 2b)(5a - 4b) = 0$$

$$5a^2 + 6ab - 8b^2 = 0$$

$$5|a| \cdot |a| + 6|a| \cdot |b| \cos(a, b) - 8|b| \cdot |b| = 0$$

$$5 + 6\cos(a, b) - 8 = 0$$

$$\cos(a, b) = \frac{1}{2}$$

$$(a, b) = 60^o$$

33. По теореме косинусов

$$MP^2 = MN^2 + NP^2 - 2MN \cdot NP \cos\angle MNP \Rightarrow$$

$$\cos\angle MNP = \frac{1}{9} \Rightarrow$$

$$\angle MNP = arccos\frac{1}{9}.$$

34. $BC = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha}$.

35. $AB = \sqrt{17}$.

36.

$$\cos\alpha = \frac{a \cdot b}{|a| \cdot |b|}$$

$$\cos\alpha = \frac{18}{\sqrt{18} \cdot \sqrt{50}} = \frac{3}{5}$$

$$\alpha = arccos\frac{3}{5}.$$

37.

Дано:

$ABDC, ACKL -$ параллелограммы,

Доказать:

$BDKL$ – параллелограмм.

Доказательство:

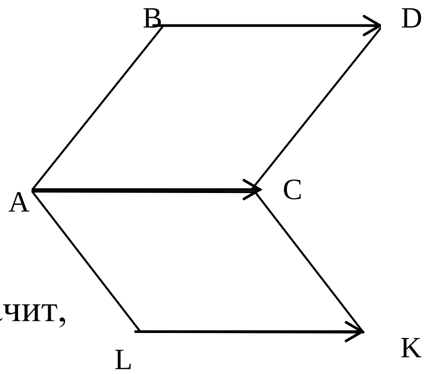


Рис. 41

Введем векторы AC, BD, LK (Рис. 41).

По условию $ABDC$ – параллелограмм, значит, $AC = BD$ (1). Аналогично $ACKL$ – параллелограмм, значит, $AC = LK$ (2). Из (1) и (2) следует, что $BD = LK$ (3).

Дадим толкование равенству (3): данная запись говорит нам о том, что $BD \parallel LK$ и $BD = LK =>$ $BDKL$ - параллелограмм. **Ч.Т.Д.**

38.

Дано:

(O; R) – окружность,

$ABCD$ – четырехугольник,

$AB^2 + CD^2 = 4R^2$ (Рис. 42).

Доказать:

$AC \perp BD$.

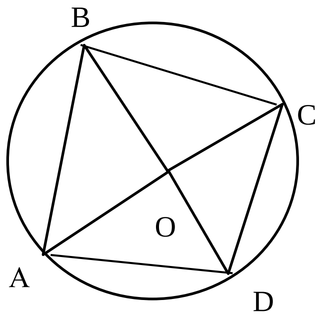


Рис. 42

Доказательство:

Введем векторы AB, CD, OB, OA, OD, OC. Выразим векторы $AB = OB - OA$ и $CD = OD - OC$, подставим полученные выражения в соотношение, данное в условии задачи:

$$AB^2 + CD^2 = (OB - OA)^2 + (OD - OC)^2 = 4R^2 - 2\ \ OB \cdot OA + OD \cdot OC\ \ .$$

С учетом условия получаем, что $OB \cdot OA + OD \cdot OC = 0\ \ 1$, $\angle AOB + \angle COD = 180^o,$ значит, $\angle BOC + \angle AOD = 180^o$. Из последнего следует, что $OB \cdot OC + OA \cdot OD\ \ 2$.

Вычтем из (1) (2), получим $OB\ \ OA - OC\ \ - OD\ \ OC - OA\ \ = 0$,

$$OA - OC\ \ \ OB - OD\ \ = 0$$

$$CA \cdot DB = 0.$$

Итак, скалярное произведение векторов $CA \cdot DB = 0$, значит, диагонали $AC \perp BD$. **Ч.Т.Д.**

39.

Дано: $ABCDE$ – пятиугольник (Рис. 43), $BK = KC$, $CL = LD$, $DM = ME$, $EN = NA$, $PK = MP$, $NQ = QL$.

Доказать: $PQ \parallel AB$.

Найти: $\frac{PQ}{AB}$.

Доказательство:

На первом этапе введем векторы PQ, AB.

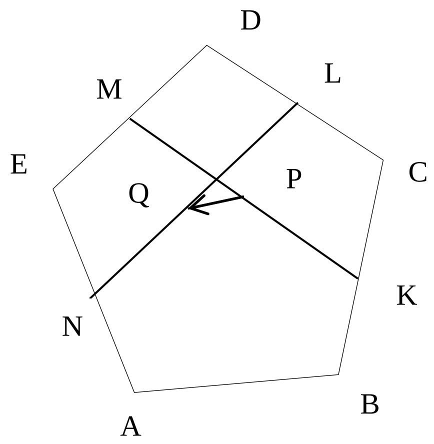


Рис. 43

На втором этапе возьмем произвольную точку O такую, что выполняется $OZ = \frac{1}{2}(OX + OY)$, где Z – середина отрезка XY.

Выразим вектор PQ:

$$PQ = OQ - OP = \frac{1}{2}\ \ OL + ON\ \ - \frac{1}{2}\ \ OK + OM\ \ =$$

$$= \frac{1}{2}\ \ \frac{1}{2}\ \ OC + OD\ \ + \frac{1}{2}\ \ OA + OE\ \ - \frac{1}{2}\ \ OB + OC$$

$$- \frac{1}{2}\ \ OD + OE\ \ \ \ = \frac{1}{4}\ \ OA - OB\ \ = -\frac{1}{4}AB.$$

На третьем этапе мы должны дать толкование полученным результатам в исходных терминах задачи. Итак, мы получили, что $PQ = -\frac{1}{4}AB$, значит, векторы PQ и AB коллинеарны, другими словами, $PQ \parallel AB$ – **Ч.Т.Д.** $\frac{PQ}{AB} = \frac{1}{4}$ – **искомое отношение**.

Ответ: $\frac{1}{4}$.

40.

Дано: $\Delta ABC, BD$ – медиана,

$ABMN$ и $BCKF$ – квадраты.

Доказать: $BD \perp MF$.

Доказательство:

На первом этапе введем векторы: $BD,\ BA,\ BC,\ MF$ Рис. 44 .

На втором этапе воспользуемся соотношениями для медианы треугольника, правилом треугольника для суммы двух векторов:

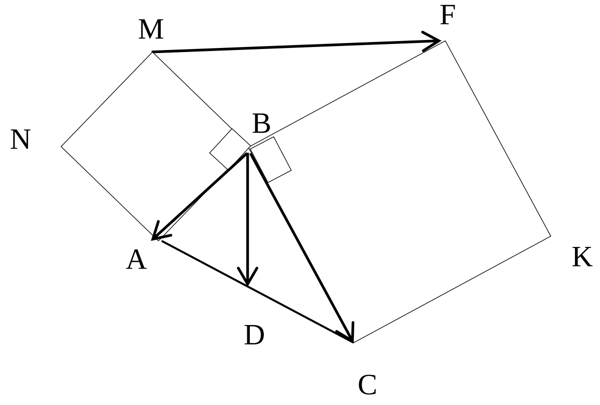


Рис. 44

$$BD = \frac{1}{2}(BA + BC)$$

$$MF = MB + BF = BF - BM.$$

Найдем скалярное произведение векторов BD и MF:

$$BD \cdot MF = \frac{1}{2}\ BA + BC\quad BF - BM\ = \frac{1}{2}\ BA \cdot BF - BC \cdot BM\ .$$

Найдем отдельно скалярное произведение $BA \cdot BF$ и $BC \cdot BM$:

$$BA \cdot BF = |BA| \cdot |BF| \cos \angle ABF = |BA| \cdot |BF| \cos(\angle ABC + 90^o)$$

$$BC \cdot BM = \ BC\ \cdot\ BM\ \cos \angle CBM = \ BC\ \cdot\ BM\ \cos(\angle ABC + 90^o)$$

Получается, что $BA\ =\ BM$, так как $ABMN$ – квадрат, аналогично $|BF| =$ $BC\ => BA \cdot BF = BC \cdot BM$.

Вернемся к скалярному произведению векторов BD и MF:

$$BD \cdot MF = \frac{1}{2}\ BA \cdot BF - BC \cdot BM\ = \frac{1}{2} \cdot 0 = 0.$$

На третьем этапе мы должны дать толкование полученным результатам в исходных терминах задачи. Итак, скалярное произведение $BD \cdot MF = 0 \leftrightarrow BD \perp MF => BD \perp MF$. **Ч.Т.Д.**

Приложение 5

Ответы и указания решения к задачам диагностической работы

1. б
2. в
3. а
4. б
5. Комментарии к решению представлены на Рис. 45.

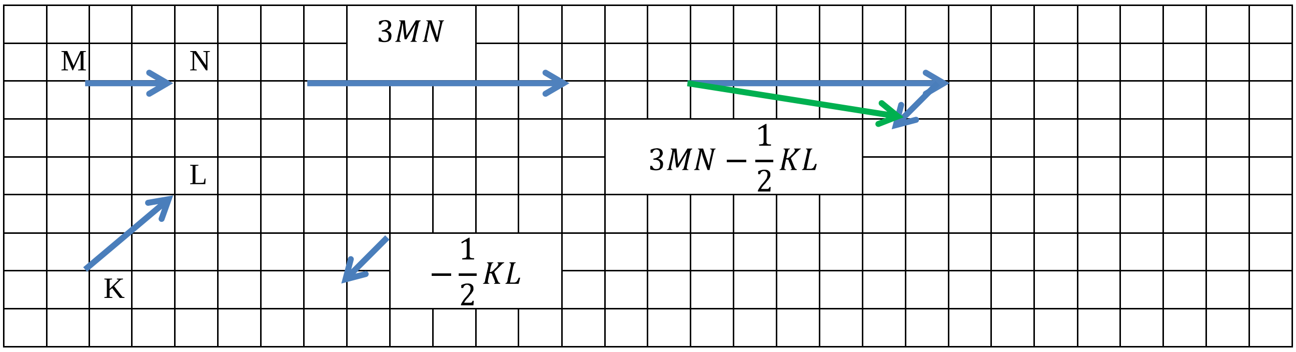


Рис. 45

6. 0; BA.
7. $AB = -DA + DC + CB$.
8.

$$AK = \frac{2}{3}AB, \quad AL = \frac{2}{3}AD,$$

$$KL = KA + AL = -\frac{2}{3}AB + \frac{2}{3}AD = -\frac{2}{3}\ \ AB - AD\ \ = -\frac{2}{3}\ \ AB + DA$$

$$= -\frac{2}{3}DB = \frac{2}{3}BD.$$

9. $AB \cdot AC + BC \cdot BA + CA \cdot CB = AB\ \ AC - BC\ \ + 0 = AB \cdot AB = c^2$.

10.

$$a + 2b \quad 5a - 4b \quad = 0$$

$$5a^2 + 6ab - 8b^2 = 0$$

$$5\ a\ \cdot\ a\ + 6\ a\ \cdot\ b\ \cos a, b - 8\ b\ \cdot\ b\ = 0$$

$$5 + 6 \cos a, b - 8 = 0$$

$$\cos a, b = \frac{1}{2}$$

$$a, b = 60^o$$

Ответ: 60^o.

11.

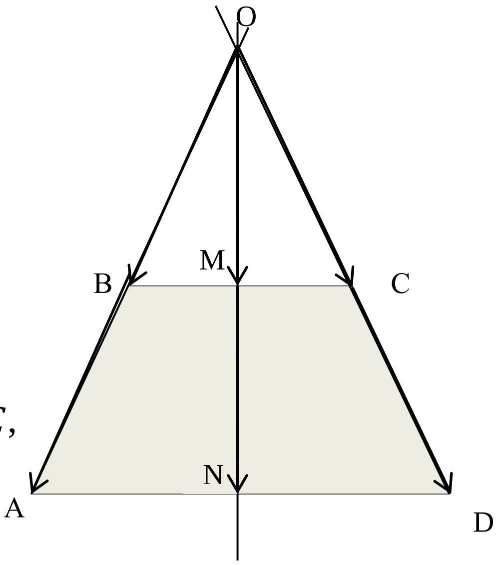


Рис. 46

Дано: $ABCD$ – трапеция, $BM = MC, AN = ND$.

Доказать: $O, M, N \in \alpha$.

Доказательство:

Известно, что M – середина BC, N – середина AD, то есть OM – медиана ΔBOC, ON – медиана ΔAOD.

На первом этапе введем векторы: OM, OB, OC, ON, OD, OA (Рис. 46).

На втором этапе воспользуемся ранее выведенными соотношениями для медианы треугольника:

$$\begin{aligned} OM &= \frac{1}{2}\ OB + OC \\ ON &= \frac{1}{2}\ OD + OA \end{aligned} \qquad (1)$$

Векторы OB и OA коллинеарны, то есть можно записать $OB = kOA$. Аналогично OC и OD коллинеарны, то есть можно записать $OC = pOD$.

Далее рассматриваем ΔBOC и ΔAOD: $\Delta BOC \sim \Delta AOD$ по первому признаку (по двум углам). Получается, что $\frac{OB}{OA} = \frac{OC}{OD} => k = p$.

Вернемся к равенствам (1):

$$OM = \frac{1}{2}\ OB + OC\ = \frac{1}{2}\ kOA + pOD\ = \frac{1}{2}k\ OD + OA\ = kON.$$

На третьем этапе мы должны дать толкование полученным результатам в исходных терминах задачи. Мы получили, что $OM = kON$, то есть векторы OM и ON коллинеарны $=> O, M, N \in \alpha$. **Ч.Т.Д.**

12.

Дано: $\Delta ABC, \angle C = 90^o$,

$AC = 1, BC = \sqrt{2}$.

Доказать: $AK \perp CM$.

Доказательство:

Известно, что AK и CM – медианы ΔABC. По теореме Пифагора $AC^2 + BC^2 = AB^2$, где $AC = 1$, $BC = \sqrt{2}$, найдем гипотенузу $AB = \sqrt{3}$.

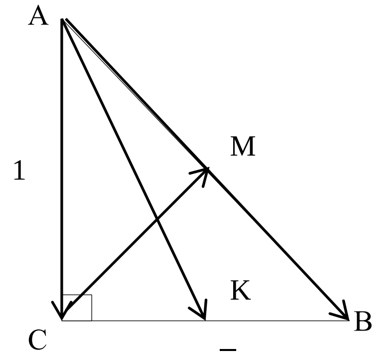


Рис. 47

На первом этапе введем векторы: $AK,\ CM,\ AB,\ AC,\ CB$ (Рис. 47).

На втором этапе выразим медианы треугольника через его стороны:

$$AK = \frac{1}{2}\ \ AC + AB$$
$$CM = \frac{1}{2}(CB - AC)$$

Найдем скалярное произведение векторов AK и CM:

$$AK \cdot CM = \frac{1}{4}\ \ AC + AB \quad CB - AC\ \ .$$

После раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых получим:

$$AK \cdot CM = \frac{1}{4}\ \ AB \cdot CB - 2AC^2\ \ = \frac{1}{4}\ \ \ AB\ \cdot\ CB\ \cos\angle B - 2\ AC\ \cdot\ AC$$

$$= \frac{1}{4}\quad \sqrt{3} \cdot\ \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} - 2 \cdot 1\quad = 0.$$

На третьем этапе мы должны дать толкование полученным результатам в исходных терминах задачи. Мы получили, что скалярное произведение векторов $AK \cdot CM = 0 => AK \perp CM$. **Ч.Т.Д.**