МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Тольяттинский государственный университет»

Институт математики, физики и информационных технологий

Кафедра «Алгебра и геометрия»

Направление подготовки 44.03.05 «Педагогическое образование»

Направленность (профиль) «Математика и информатика»

БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА

на тему **«МЕТОДИЧЕСКАЯ СХЕМА ОБУЧЕНИЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ТЕМЕ «ОКРУЖНОСТЬ И КАСАТЕЛЬНЫЕ К ОКРУЖНОСТИ» В КУРСЕ ГЕОМЕТРИИ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ»**

Студент М.Р. Магдеев ____________

Руководитель д.п.н., профессор Р.А. Утеева ____________

Консультант к.п.н., А.В. Кириллова ____________

Допустить к защите

Заведующий кафедрой д.п.н., профессор Р.А.Утеева ____________

«____» _________2017 г.

Тольятти 2017

АННОТАЦИЯ

Целью бакалаврской работы является выявление методических особенностей обучения теме «Окружность и касательные к окружности» в курсе геометрии основной школы и разработка методических рекомендаций по данной теме.

Изучение окружностей является одной из важнейших тем планиметрии. В курсе геометрии основной школы данная тема изучается в 7-8 классах. Знания и практические навыки, полученные в результате изучения темы «Окружность и касательные к окружности», в дальнейшем широко используются, как в геометрии, так и в смежных науках.

Бакалаврская работа состоит из введения, двух глав, заключения, списка литературы.

Глава I посвящена методическим основам обучения теме «Окружность и касательные к окружности» в курсе геометрии основной школы. Выявлены основные цели и задачи обучения рассматриваемой теме в курсе геометрии основной школы. Представлен анализ программы и школьных учебников по теме «Окружность и касательные к окружности».

В главе II представлены методические рекомендации по изучению темы «Окружность и касательные к окружности» в курсе геометрии основной школы. Указано планирование темы «Окружность и касательные к окружности» для учащихся основной школы. Раскрыта методика введения понятий «окружность», «касательная к окружности», методика обучения основным свойствам и теоремам по теме, методика обучения решению задач по теме.

Список литературы содержит 35 наименований.

ABSTRACT

The title of the bachelor's work is"Methods of teaching the topic "Circle and tangents to the circle" in the course of geometry of the main school".

The aim of the bachelor's work is to reveal the methodological peculiarities of teaching the topic "Circle and tangents to the circle" in the course of geometry of the main school and the development of methodological recommendations on this topic.

The study of the circle is one of the most important topics of planimetry. In the course of the geometry of the main school, this topic is studied in grades 7-8. The knowledge and practical skills obtained as a result of studying the topic "Circle and tangents to the circle" are subsequently widely used, both in geometry and in related sciences.

Bachelor's work consists of an introduction, two chapters, conclusion, a list of literature.

Chapter I is devoted to the methodological foundations of teaching the topic "Circle and tangents to the circle" in the course of geometry of the main school. The main goals and objectives of teaching the topic in the course of geometry of the main school are revealed. The analysis of the program and school textbooks on the topic "Circle and tangents to the circle" is presented.

Chapter II presents methodological recommendations for studying the topic "Circle and tangents to the circle" in the course of geometry of the main school. The planning of the theme "Circle and tangents to the circle" for students of the basic school is presented. The technique of introduction of concepts "circle", "tangent to a circle", a technique of training to the basic properties and theorems on a topic, a technique of training to the solvingexercises on a topic is presented.

The list of references contains 35 items.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность исследования. Изучение окружностей является одной из важнейших тем планиметрии. В курсе геометрии основной школы данная тема изучается в 7-8 классах. Знания и практические навыки, полученные в результате изучения темы «Окружность и касательные к окружности», в дальнейшем широко используются, как в геометрии, так и в смежных науках.

Окружность известна человечеству с древнейших времен. Первобытным людям очень важна была форма предметов, которые их окружали. Благодаря форме и цвету, они могли различать съедобные и несъедобные грибы и ягоды, деревья, подходящие для строительства и деревья, которые годятся лишь на дрова, вкусные фрукты и орехи от горьких или ядовитых.

Свои названия круг и окружность получили только в Древней Греции, хотя были известны задолго до Античности. Философы древнего мира придавали окружности большое значение. Древние греки видели в ней венец совершенства. Античные ученые рассматривали прямые и окружности как единственный пример «совершенных» кривых, поэтому в геометрии считались допустимыми только построения с помощью циркуля и линейки, а движение планет моделировалось как наложение вращений по окружностям. Теории окружностей посвящена III книга «Начал» Евклида.

Окружность, наряду с прямой, является самой распространённой кривой практически во всех областях человеческой деятельности. История ее исследования и применения уходит в глубокую древность; особенную важность придало этой теме изобретение колеса.

Окружность уникальна тем, что каждая ее точка равноудалена от центра. Именно благодаря этому свойству изобретение колеса стало возможным, потому что все точки обода колеса должны быть на одинаковом расстоянии от оси. Достоверно известно, что тележное колесо существовало в Месопотамии еще в 3500-3000 гг. до н. э.

В дальнейшем, развитие теории окружностей привело к созданию тригонометрии, теории колебаний и многих других практически важных разделов науки и техники.

Проблема исследования состоит в выявлении методических особенностей изучения темы «Окружность и касательные к окружности» в курсе геометрии основной школы.

Объект исследования: процесс обучения геометрии в курсе основной школы.

Предмет исследования: методические особенности обучениятеме «Окружность и касательные к окружности» в курсе геометрии основной школы.

Цель исследования: выявить методические особенности обучения теме «Окружность и касательные к окружности» в курсе геометрии основной школы и разработать методические рекомендации по данной теме.

Задачи исследования:

1. Обосновать цели и задачи обучения теме «Окружность и касательные к окружности» в курсе геометрии основной школы.
2. Выполнить анализ программы и школьных учебников по теме «Окружность и касательные к окружности».
3. Раскрыть методику обучения основным понятиям и свойствам по теме «Окружность и касательные к окружности» в курсе геометрии основной школы.

Для решения задач были использованы следующие **методы исследования**: анализ учебно-методической литературы, работ по истории математики, школьных программ, учебников и учебных пособий, изучение опыта работы отечественной школы.

Практическую значимость результатов исследования составляют методические рекомендации по обучению теме «Окружность и касательные к окружности» в курсе геометрии 7-8-х классов, которые могут быть использованы студентами в ходе педагогической практики в школе.

На защиту выносятся: методические рекомендации по обучению теме «Окружность и касательные к окружности» в курсе геометрии основной школы.

Бакалаврская работа состоит из введения, двух глав, заключения, списка литературы.

Во введении сформулированы основные характеристики исследования: актуальность, проблема, объект, предмет, цель, задачи и методы исследования.

Глава I посвящена методическим основам обучения теме «Окружность и касательные к окружности» в курсе геометрии основной школы. Выявлены основные цели и задачи обучения рассматриваемой теме в курсе геометрии основной школы. Представлен анализ программы и школьных учебников по теме «Окружность и касательные к окружности».

В главе II представлены методические рекомендации по изучению темы «Окружность и касательные к окружности» в курсе геометрии основной школы. Дается планирование темы «Окружность и касательные к окружности» для учащихся основной школы. Раскрыта методика введения понятий «окружность», «касательная к окружности», методика обучения основным свойствам и теоремам по теме, методика обучения решению задач по теме.

В заключении сформулированы основные результаты и выводы проведённого исследования.

Список литературы содержит 35 наименований.

ГЛАВА I. МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОБУЧЕНИЯ ТЕМЕ «ОКРУЖНОСТЬ И КАСАТЕЛЬНЫЕ К ОКРУЖНОСТИ» В КУРСЕ ГЕОМЕТРИИ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ

§1. Основные цели и задачи обучения теме «Окружность и касательные к окружности» в курсе геометрии основной школы

В школьном курсе геометрии тема «Окружность и касательные к окружности» изучается либо полностью в седьмом, либо в седьмом и восьмом классе, в зависимости от учебной программы.

В программе, составленной на основе учебника Л.С. Атанасяна [14], изучение окружности начинается в седьмом классе, *в параграфе «Задачи на построение»*. Непосредственно рассмотрению окружности и ее элементов посвящен один урок.

В **результате** изучения темы учащиеся должны:

–знать определение окружности;

–уметь объяснить, что такое центр окружности, радиус, хорда, диаметр, дуга окружности;

– уметь выполнять построение окружности и основных ее элементов.

В восьмом классе изучается *касательная к окружности*. Этой теме отведен параграф, рассчитанный на три часа.

В **результате** изучения темы учащиеся должны:

–знать возможные случаи взаимного расположения прямой и окружности;

– знать определение касательной;

– знать свойство и признак касательной, уметь их доказывать;

– уметь применять полученные теоретические знания при решении задач.

В программе авторов И.М. Смирновой и В.А. Смирнова [23] отмечается, что основные цели обучения геометрии ***в предметном направлении*** *состоят в следующем*:

– получение геометрических знаний и практических навыков, которые необходимы для дальнейшего образования, изучения смежных наук, применения в повседневной жизни;

– закладка фундамента для математического развития, формирование механизмов мышления, характерных для математической деятельности.

Случаи взаимного расположения прямой и окружности, относящиеся к теме «Окружность и касательные к окружности» изучаются по программе у данных авторов в седьмом классе.

По программе И.М. Смирновой и В.А. Смирнова понятия «окружность» и «касательная к окружности» рассматриваются в теме *«Окружность и геометрические места точек».*

В этой теме изучаются понятия окружности и круга; элементы окружности и круга: центр, радиус, диаметр, хорда; взаимное расположение прямой и окружности; касательная и секущая к окружности; взаимное расположение двух окружностей; понятие о геометрическом месте точек; построения с помощью циркуля и линейки.

§2. Анализ учебников геометрии по теме исследования

Для того чтобы сравнивать содержание различных школьных учебников по геометрии, в первую очередь, нужно сделать акцент на том, какие цели и задачи обучения геометрии наиболее актуальны в последние годы. В настоящее время основная цель обучения геометрии достаточна обширна и, помимо развития логического мышления учащихся, включает в себя общекультурные, научные, прикладные задачи. Проводя анализ учебников геометрии основной школы, необходимо установить, насколько каждый из них соответствует современным целям и задачам обучения геометрии.

После изучения того, как преподносится тема «Окружность и касательные к окружности» в учебниках курса геометрии основной школы, был проведен анализ некоторых из них, результаты которого представлены ниже.

1. *Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев. Геометрия. 7-9 класс.*

Впервые у Л.С. Атанасяна окружность встречается еще в седьмом классе. Сначала дается определение **окружности** как геометрической фигуры, состоящей из всех точек плоскости, расположенных на заданном расстоянии от данной точки [10, с. 43]. После этого в учебнике говорится, что данная точка называется **центром окружности**, а отрезок, соединяющий центр с какой-либо точкой окружности – **радиусом окружности** (Рис. 1).

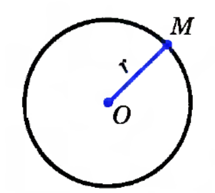


Рис. 1.

Далее вводится определение **хорды**, как отрезка, соединяющего две точки окружности и **диаметра**, как хорды проходящей через центр окружности. Диаметр окружности в два раза больше ее радиуса. Центр окружности является серединой любого диаметра.

Затем авторами учебника вводится понятие **дуги**. Говорится, что любые две точки окружности делят ее на две части, и каждая из этих частей называется дугой окружности.

Для изображения окружности на чертеже пользуются циркулем.

Круг, в учебнике Л.С. Атанасяна, определяется как часть плоскости, ограниченная окружностью.

На этом теоретическая часть данной темы заканчивается, и на протяжении нескольких следующих уроков ученики решают задачи на построение.

К продолжению темы окружности авторы данного учебника возвращаются только в *восьмом классе*.

Здесь авторы предлагают начать с изучения вопроса *взаимного расположения прямой и окружности.* Прямая и окружность, в зависимости от их взаимного расположения, могут иметь различное количество общих точек. Л.С. Атанасян делает естественный вывод, что если *прямая проходит через центр окружности, то она пересекает окружность в двух точках*. Остается рассмотреть варианты, в которых прямая не проходит через центр окружности.

Проводится прямая *p,* не проходящая через центр *O* окружности радиуса *r*. К прямой р проводится перпендикуляр. Буквой *d* обозначается длина этого перпендикуляра, т.е. расстояние от центра окружности до прямой *p*.

Затем, авторы учебника исследуют *возможные варианты взаимного расположения прямой и окружности в зависимости от соотношения между d и r*. Всего таких варианта три:

1) $d<r$. Прямая и окружность имеют две общие точки.

2) $d = r$. Прямая и окружность имеют одну общую точку.

3) $d > r$. Прямая и окружность не имеют общих точек.

И только теперь, после рассмотрения всех вариантов взаимного расположения прямой и окружности, вводится, собственно, определение касательной к окружности.

Касательной к окружности называется прямая, имеющая с окружностью только одну общую точку. Их общая точка называется точкой касания (Рис. 2) [10, с. 166].

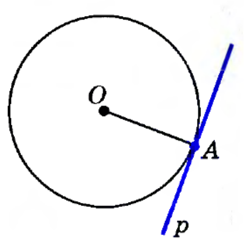


Рис. 2.

Далее в учебнике приводятся теорема о свойстве касательной и теорема, обратная теореме о свойстве касательной. Обе с доказательствами.

Всего на теоретическую часть данной темы авторы рекомендуют отвести два урока, а третий полностью посвятить закреплению изученного материала при помощи решения задач и небольшой самостоятельной работы [14, с. 134]. Л.С. Атанасян и соавторы считают, что теоретический материал данной главы обычно не вызывает затруднения у учеников, зато задачи, изучаемые в этой теме, служат основой для многих дальнейших задач в школьном курсе геометрии. Следовательно, учителю необходимо сделать основной упор на практической части темы.

2. *А.Д. Александров, А.Л. Вернер, В.И. Рыжик, Т.Г. Ходот. Геометрия. 7 класс.*

А.Д. Александров. Геометрия. 8 класс.

В учебнике А.Д. Александрова окружность начинают изучать в самом начале седьмого класса.

Сначала авторы дают определение окружности. Звучит оно так: «**Окружностью** с центром O и радиусом R называется фигура, которая состоит из всех точек плоскости, удаленных от точки O этой плоскости на расстояние R» [9, с. 35].

Затем дается определение центра окружности и ее радиуса. **Радиус окружности** в данном учебнике определяется как любой отрезок, соединяющий центр окружности с точкой на окружности, причем все эти отрезки – радиусы одной окружности – равны между собой.

Далее А.Д. Александров вводит определение **круга**, как фигуры, состоящей из всех точек плоскости, удаленных от центра не больше, чем на расстояние радиуса.

Центром и радиусом круга называются центр и радиус окружности, которая его ограничивает.

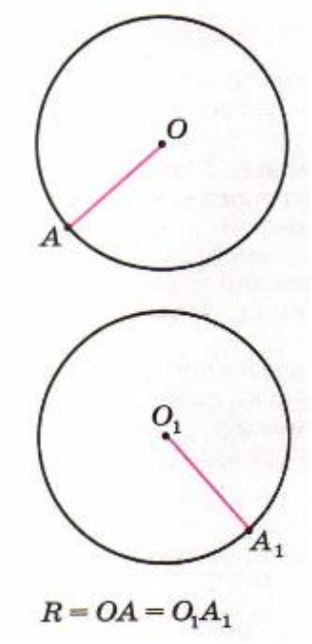


Рис. 3.

Две окружности называются **равными**, если равны их радиусы (Рис. 3).

В заключение теоретической части первого урока говорят о концентрических окружностях, т.е. окружностях с одним и тем же центром.

Для закрепления материала сразу же предлагаются задачи, причем разного типа, начиная с устных задач, продолжая задачами на построение и понимание теории, заканчивая задачами на практическое применение геометрии. Все задачи разбиты по категориям, что позволяет учителю удобно выбирать разносторонние задачи для решения.

На втором уроке, который называется «Части окружности и круга», ученики знакомятся с **дугой**. «Если на окружности взять две точки, то они разобьют окружность на две части. Каждая из них называется дугой окружности, а данные точки – концами этих дуг» [9, с. 38].

Далее, с **хордой**, как отрезком, соединяющим две точки окружности. Хорда, соединяющая концы дуги, называется стягивающей эту дугу.

Диаметром называется хорда, проходящая через центр окружности. Диаметр разбивает круг на два полукруга, а его концы разбивают окружность на две полуокружности.

Вводятся понятия сектора и сегмента круга.

Далее идет множество разнообразных задач, а также этимологическая справка о происхождении тематических терминов.

Как уже видно, исходя из двух уроков, учебник А.Д. Александрова подразумевает более глубокое и детальное изучение темы, по сравнению с учебником Л.С. Атанасяна.

На *трех последующих уроках* изучают осевую симметрию, задачи на построение, сферу и шар.

Закрывается тема большой *контрольной работой*, на которой проверяются знания, изучаемые в этом параграфе. После этого, к теме окружности авторы вернутся только в восьмом классе.

На первом уроке по данной теме в восьмом классе А.Д. Александров перечисляет несколько свойств хорд:

Свойство 1. Диаметр перпендикулярен хорде, не являющейся диаметром, тогда и только тогда, когда он проходит через середину хорды.

Свойство 2. Хорды одной окружности равны тогда и только тогда, когда они равноудалены от центра.

Свойство 3. Хорды данной окружности равны тогда и только тогда, когда они стягивают равные центральные углы.

К каждому из свойств приводится его доказательство.

И, наконец, на втором уроке мы переходим к теме *«Касание прямой и окружности»*. Авторы учебника сразу же дают определение **касательной**. Это прямая, имеющая только одну общую точку с окружностью [1, с. 151]. Эта точка называется **точкой касания**. Потом изучаются свойство и признак касательной с доказательствами.

В отличие от рассматриваемого до этого учебника Л.С. Атанасяна, здесь все варианты взаимного расположения прямой и окружности рассматриваются уже после введения понятия касательной.

На следующих уроках авторский коллектив учебника знакомит школьников с градусной мерой дуги окружности, вписанными углами.

На каждом уроке, после изучения теории, авторы рекомендуют сразу же закреплять полученные знания решением задач. Все задачи приведены по окончанию параграфа, посвященного окружности. Их тут почти сотня, всех типов и уровней сложности. Благодаря такому подходу, учебник А.Д. Александрова и соавторов обладает высоким уровнем гибкости, так как учитель может подобрать задачи для учеников любого уровня.

Завершает параграф контрольная работа по теме.

3. *А.В. Погорелов. Геометрия. 7-9 класс.*

В учебнике А.В. Погорелова окружность и касательную к окружности изучают в седьмом классе. Автор учебника начинает параграф определением: «**Окружностью** называется фигура, которая состоит из всех точек плоскости, равноудаленных от данной точки. Эта точка называется **центром окружности»** [21, с. 55].

Радиусом называется расстояние от точек окружности до ее центра, а также любой отрезок, соединяющий точку окружности с ее центром.

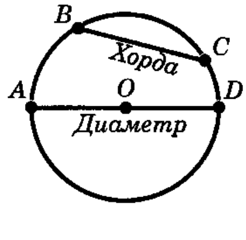


Рис. 4.

Хордой называется отрезок, соединяющий две точки окружности. **Диаметром** – хорда, проходящая через центр окружности (Рис. 4).

Сразу после данных определений ученикам предлагается решить задачу на доказательство того, что диаметр окружности, проходящий через середину хорды, перпендикулярен хорде.

Отметим, что в учебнике А.В. Погорелова является повсеместной практикой встраивать в теоретическую часть практические задания. Такой шаг позволяет сразу учиться пользоваться свежеполученными теоретическими знаниями, применять их на практике.

Следующей темой в учебнике А.В. Погорелова является «Окружность, описанная около треугольника». После нее авторы переходят, собственно, к касательной к окружности.

Касательной называется прямая, проходящая через точку окружности, перпендикулярно к радиусу, проведенному в эту точку. Данная точка называется т**очкой касания** (Рис. 5).

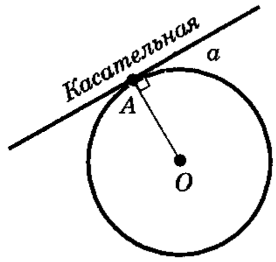


Рис. 5.

Далее ученикам предлагается решить задачу на доказательство того, что касательная к окружности не имеет с ней других общих точек, кроме точки касания. На этом тема заканчивается. Кратко и лаконично.

На следующем уроке изучается окружность, вписанная в треугольник. После нее – несколько уроков, посвященных задачам на построение. На этом А.В. Погорелов и соавторы заканчивают тему окружности.

Что касается практической части изучения темы, то в учебнике А.В. Погорелова задачи присутствуют, но их количество относительно невелико.

Поэтому учителю, работающему по данному учебнику, возможно, стоит воспользоваться сторонними задачниками в дополнение к практическим заданиям учебника.

4. И.Ф. Шарыгин. Геометрия. 7-9 класс.

В учебнике И.Ф. Шарыгина окружность изучают в седьмом классе. На первом уроке по данной теме авторы дают основные определения, связанные с окружностью и кругом.

«**Окружностью** называется замкнутая плоская кривая, состоящая из всех точек плоскости, удаленных от данной точки Она данное расстояние» [29, с. 60]. Точка О называется центром окружности, а расстояние от точки О до точки окружности – ее радиусом.

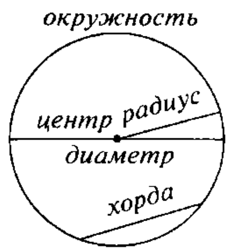


Рис. 6.

Радиусом также называют любой отрезок, соединяющий центр окружности с точкой на окружности.

Кругом называется фигура, ограниченная окружностью.

Хордой называется отрезок, соединяющий две точки окружности.

Диаметром окружности называется хорда, проходящая через центр окружности (Рис. 6).

Далее автор учебника утверждает, что окружность и круг обладают многими замечательными свойствами. Например, наличием у окружности и круга центра и бесконечного множества осей симметрии.

Затем следует теорема об осях симметрии окружности.

В конце темы предлагается множество задач.

В следующем параграфе изучаются основные свойства треугольника и окружности. Вообще, далее в этом учебнике треугольник и окружность изучаются параллельно, что, возможно, может запутать школьников.

Следующий урок начинается с изучения свойств треугольника, далее мы переходим к свойствам окружности [29, с. 71].

Перпендикуляр, опущенный на хорду окружности из центра этой окружности, делит хорду пополам.

Диаметр окружности, перпендикулярный хорде, делит эту хорду пополам.

Затем И.Ф. Шарыгин переходит к пересечению двух окружностей, а также окружности и прямой.

Сначала автор учебника говорит нам, что на основании многократных наблюдений мы знаем, что две окружности или окружность и прямая могут пересечься не более, чем в двух точках. Но всё же, считает он, это свойство нужно доказать. После этого следует теорема о числе точек пересечения окружностей и прямых с доказательством.

Теоретическая часть завершена, следует большое количество задач, большинство из которых посвящены треугольникам, но есть и несколько задач по окружности.

К изучению окружности мы возвращаемся через урок. И в этот раз, собственно, мы подходим к теме касательной к окружности. Автор сразу выдает нам определение. «Если прямая имеет единственную общую точку с окружностью, то такая прямая называется **касательной к окружности**» [29, с. 94].

Также о такой прямой говорят, что она касается окружности.

Точкой касания называется общая точка окружности и касательной.

Затем школьники изучают характеристическое свойство касательной к окружности и решают задачи из списка предложенных. Окружности в нем посвящены лишь немногие задачи.

Еще через несколько уроков ученикам предлагается тема «Задачи на построение», где тоже встречается окружность.

На этом изучение окружности в учебнике И.Ф. Шарыгина заканчивается.

Подводя итог, отметим, что данный учебник примечателен тем, что в нем встречается несколько свойств окружности, не изучаемых в других учебниках.

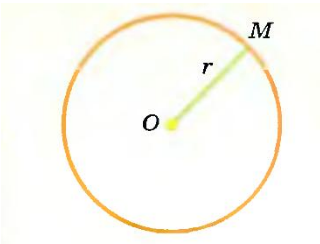
Недостатком, для учителя является краткость изучения темы «Касательная к окружности», а также общая отрывочность изучения окружности, разброс основных понятий темы между разными уроками.

5. В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев, В.В. Прасолов. Геометрия. 7 класс.

В учебнике В.Ф. Бутузова и соавторов за седьмой класс окружности посвящена целая глава, в которой разбираются все основные темы, связанные с окружностью. Такой подход создателей учебника не может не импонировать, поскольку позволяет ученикам сосредоточиться на окружности и систематизировать все полученные знания.

Первый урок по теме начинается с определения окружности.

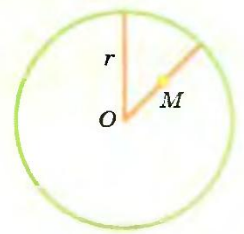
«**Окружностью** называется геометрическая фигура, состоящая из всех точек плоскости, расположенных на заданном расстоянии от данной точки» [5, с. 78].



Окружность радиуса r с центром O

Данную точку называют **центром окружности**, а отрезок, соединяющий центр с какой-либо точкой окружности, **радиусом окружности**. Из определения окружности вытекает, что все радиусы равны друг другу.

Кругом называется часть плоскости, ограниченная окружностью (Рис. 7).



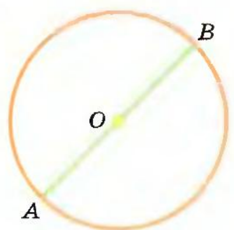
Круг содержит точку O и все точки M, для которых $OM \leqslant r$

Рис. 7.

Диаметром называется отрезок, соединяющий две точки окружности и проходящий через ее центр.

Так как центр окружности является серединой диаметра, то диаметр окружности в два раза больше, чем ее радиус (Рис. 8).

Затем авторы учебника рассказывают, что для построения окружности пользуются циркулем, а для проведения окружности на местности – веревкой и двумя колышками.



Отрезок AB — диаметр окружности

Рис. 8.

В завершение теоретической части первого урока, доказываем, что никакие три точки окружности не лежат на одной прямой.

На следующем уроке авторы учебника подробно останавливаются на взаимном расположении прямой и окружности.

Рассматриваем окружность с центром O радиуса r и прямую a.

Если прямая aпроходит через точку O, то она пересекает окружность в двух точках – концах диаметра, лежащего на этой прямой.

В противном случае, проводим перпендикуляр OH к прямой a и обозначим его длину, т.е. расстояние от центра окружности до прямой a, буквой d. В зависимости от соотношения между d и r, прямая и окружность могут иметь различное количество общих точек.

Возможны три случая.

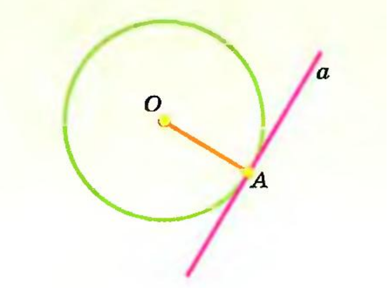
Случай 1. $d<r$. Прямая и окружность имеют две общие точки.

Случай 2. $d = r$. Прямая и окружность имеют только одну общую точку.

Случай 3. $d>r$. Прямая и окружность не имеют общих точек.

Таким образом, авторы подвели учеников к теме касательной к окружности.

Касательной к окружности называется прямая, которая имеет только одну точку с данной окружностью. Эта точка называется **точкой касания** прямой и окружности (Рис. 9).



Прямая a — касательная к окружности, A — точка касания

Рис. 9.

После определения изучаются теоремы о свойстве касательной и обратная ей теорема.

На следующем уроке изучаются хорды и дуги.

Хордой называется отрезок, соединяющий две точки окружности.

Отмечаем на окружности две любые точки A и B. Прямая AB разделяет окружность на две части, каждая из которых называется **дугой окружности**.

Далее, на этом и последующих уроках, изучаются полуокружности, центральный угол, угол между касательной и хордой, вписанный угол.

Следующий параграф посвящен задачам на построение.

После каждого параграфа и в конце главы, посвященной окружности, прилагаются как задачи обычного уровня, так и задачи повышенной сложности.

В целом, тема окружности в учебнике В.Ф. Бутузова и соавторов не сильно отличается от того, как эта тема изучается в учебнике Л.С. Атанасяна. Но здесь вся тема окружности проходится в седьмом классе, хорошо структурирована и компактна размещена.

В учебнике Л.С. Атанасяна теоретическая часть представлена достаточно кратко и компактно. В связи с этим, усвоение новых знаний для учеников не должно представлять трудности.

С другой стороны, такое решение ограничивает самостоятельную логическую деятельность учащихся. Основное внимание в учебнике уделено практической части. Множество разнообразных упражнений от базовых до продвинутых позволяет как закрепить полученные знания, так и развить математические навыки более способным ученикам.

В курсе А.Д. Александрова, тема «Окружность и касательная к окружности» теоретически освещена наиболее полно, подробно и целостно.

Соответственно, и требования к учащимся выше: учебник рассчитан на более углубленное изучение математики. Задания практической части разбиты по типам и уровням сложности.

Учебник А.В. Погорелова отличается от двух предыдущих интересным подходом к освоению теории: в нее встроены задачи с решениями. Благодаря этому, учащиеся не только получают знания, но и развивают логическое и творческое мышления.

Практическая часть разнообразна, но количество упражнений, достаточно скудно. Этот недостаток компенсируется задачниками, входящими в учебно-методический комплект.

Учебник И.Ф. Шарыгина примечателен тем, что в нем встречается несколько свойств окружности, не изучаемых в других учебниках. Отрицательной стороной является краткость изучения темы «Касательная к окружности», а также общая отрывочность изучения окружности, разброс основных понятий темы между разными уроками.

Тема окружности в учебнике В.Ф. Бутузова и соавторов не сильно отличается от того, как эта тема изучается в учебнике Л.С. Атанасяна. Но здесь вся тема окружности проходится в седьмом классе, хорошо структурирована и компактна размещена.

Подводя итог, отметим, что методика преподавания темы «Окружность и касательная к окружности» в каждом из учебников имеет свои преимущества и недостатки. Конечный выбор остается за учителем, исходя из его предпочтений и методов преподавания.

Выводы по первой главе

1. Обоснованы цели и задачи обучения теме «Окружность и касательные к окружности в основной школе. В школьном курсе геометрии тема «Окружность и касательные к окружности» изучается либо полностью в седьмом, либо в седьмом и восьмом классе, в зависимости от учебной программы. В результате изучения темы, учащиеся должны знать определение окружности; уметь объяснять, что такое центр окружности, радиус, хорда, диаметр, дуга окружности; уметь выполнять построение окружности и основных ее элементов; знать возможные случаи взаимного расположения прямой и окружности; знать определение, свойство и признак касательной; уметь применять полученные знания при решении задач. Знания и практические навыки, полученные в результате изучения темы «Окружность и касательные к окружности», в дальнейшем широко используются, как в геометрии, так и в смежных науках.

2. Выполнен анализ программы и школьных учебников по теме «Окружность и касательные к окружности». В учебнике Л.С. Атанасяна теоретическая часть представлена достаточно кратко и компактно. В связи с

этим, усвоение новых знаний для учеников не должно представлять трудности. Основное внимание в учебнике уделено практической части.

В курсе А.Д. Александрова тема «Окружность и касательная к окружности» теоретически освещена наиболее полно, подробно и целостно. Соответственно, и требования к учащимся выше: учебник рассчитан на более углубленное изучение математики.

Учебник А.В. Погорелова отличается от двух предыдущих интересным подходом к освоению теории: в нее встроены задачи с решениями. Благодаря этому, учащиеся не только получают знания, но и развивают логическое и творческое мышления.

Учебник И.Ф. Шарыгина примечателен тем, что в нем встречается несколько свойств окружности, не изучаемых в других учебниках.

Тема окружности в учебнике В.Ф. Бутузова и соавторов не сильно отличается от того, как эта тема изучается в учебнике Л.С. Атанасяна. Но здесь вся тема окружности проходится в седьмом классе, хорошо структурирована и компактна размещена.

Таким образом, анализ вышеперечисленных учебников показал, что методика обучения теме «Окружность и касательная к окружности» в каждом из них имеет свои преимущества и недостатки.

ГЛАВА II. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ОБУЧЕНИЮ ТЕМЕ «ОКРУЖНОСТЬ И КАСАТЕЛЬНЫЕ К ОКРУЖНОСТИ» В КУРСЕ ГЕОМЕТРИИ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ

§3. Планирование темы «Окружность и касательные к окружности» в курсе геометрии основной школы

В данном параграфе рассмотрим варианты планирования темы «Окружность и касательная к окружности» разными авторами школьных учебников геометрии 7-9 классов.

1. *Программа авторов И.М. Смирновой и В.А. Смирнова* [23] (Табл. 1).

Таблица 1

Содержание темы «Окружность и касательная к окружности» в учебнике И.М. Смирновой и В.А. Смирнова, 7 класс

Основное содержание по темам	**Характеристика основных видов деятельности ученика (на уровне учебных действий)**
3. Окружность и геометрические места точек (16 часов)	
Понятия окружности и круга. Элементы окружности и круга: центр, радиус, диаметр, хорда. Взаимное расположение прямой и окружности. Касательная и секущая к окружности. Взаимное расположение двух окружностей. Понятие о геометрическом месте точек. Примеры геометрических мест точек на плоскости. Построения с помощью циркуля и линейки. Примеры задач на построение.	Знать определение круга, окружности и их основных элементов. Уметь строить окружность, ее радиус, диаметр, хорду. Распознавать по рисунку расположение прямой и окружности, двух окружностей. Уметь привести примеры геометрических мест точек. Решать задания, связанные с нахождением геометрических мест точек. Уметь выполнять построения с помощью циркуля и линейки.

2. *Календарно-тематическое планирование по учебнику Л.С. Атанасяна* (Таблицы 2-3) [14]. Окружность и ее основные элементы изучаются в параграфе «Задачи на построение».

Таблица 2

Содержание темы «Окружность и касательная к окружности» в учебнике Л.С. Атанасяна, 7 класс

Глава II. Треугольники	**14 часов**
§4. Задачи на построение	2 часа
Решение задач	2 часа
Контрольная работа №2	1 час
Итого	5 часов

Таблица 3

Содержание темы «Окружность и касательная к окружности» в учебнике Л.С. Атанасяна, 8 класс

ГлаваVIII. Окружность	**17 часов**
§1. Касательная к окружности	3 часа
Решение задач	2 часа
Контрольная работа №5	1 час
Итого	6 часов

Итак, в целом на изучение темы «Окружность и касательная к окружности» разными авторами отводится от 11 до 16 часов.

§4. Методика введения понятий «окружность» и «касательная к окружности»

С понятием «окружность» учащиеся сталкиваются в седьмом классе. Окружность – единственная из кривых линий, рассматриваемая в элементарном курсе геометрии [8, с. 129]. Изучение окружности рекомендуется начать с систематизации сведений, знакомых учащимся из курса математики предыдущих классов.

Введение понятия «окружность» не требует каких-то особенных приготовлений. Необходимо последовательно дать определение окружности и основных ее элементов: центра, радиуса, хорды, диаметра. Теоретическая часть изучения данной темы обычно не вызывает затруднений у школьников. Важно научить учащихся выполнять построение окружности, закрепить на практике представление об окружности.

Касательную к окружности в курсе геометрии основной школы изучают в седьмом, либо в восьмом классе. Некоторые авторы учебников сразу дают готовое определение касательной, другие же сначала рассказывают о всех возможных случаях взаимного расположения прямой и окружности, и на основе этого вводят определение касательной.

При изучении взаимного расположения окружности и прямой важное методическое значение имеет теорема о том, что окружность не может иметь более двух общих точек с прямой, способствующая разрушению неправильных интуитивных представлений, что является одной из целей преподавания математики [3, с. 147].

Автор многих статей по методике преподавания математики В.М.Финкельштейн считает, что проблемой является то, что в школьных учебниках геометрии учащимся предлагается готовое определение касательной [25]. Так как школьники не участвуют в составлении определения, у них не остается другого выхода, кроме как заучивать его.

Для того, чтобы учащиеся не просто выучили, но и поняли, крепко усвоили новый материал, учителю нужно заинтересовать их и привлечь к его открытию. Одним из способов это сделать является совместная работа учителя и учеников. Роль учителя будет состоять в задании наводящих вопросов. Если ученики не могут сразу ответить на поставленный им наводящий вопрос, учитель предлагает более «прозрачный».

Учитель: До того, как мы начнем изучать новую тему, предлагаю вам решить подготовительную **задачу**. На доске начерчен рисунок. Посмотрите на него и ответьте, *сколько общих точек имеют две прямые – параллельные, пересекающиеся, и совпадающие* (Рис. 10)*?*

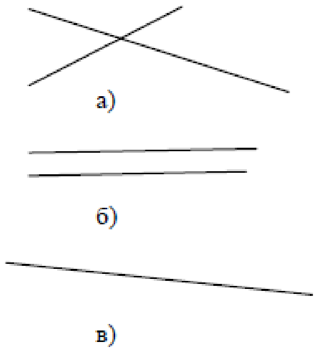


Рис. 10.

Обучающиеся: Если прямые параллельны, то они не имеют общих точек. Если прямые пересекаются, у них одна общая точка. Если совпадают, то у них общих точек бесконечно много.

Учитель: Верно. Переходим к прямой и окружности. Для начала решим задачу. Постройте в своих тетрадях прямую и окружность. Какого их взаимное расположение?

Обучающийся: Я построил два рисунка, на одном из них прямая пересекает окружность, а на другом не пересекает.

Учитель: Это происходит из-за того, что прямые могут быть расположены по-разному. Важно обратить внимание на расстояние от центра окружности до прямой. Посмотрите на мой рисунок. Прямая может быть удалена от центра окружности на расстояние большее, чем ее радиус, меньшее, чем ее радиус и равное ее радиусу. Класс, на ваш взгляд, *какое количество общих точек с окружностью имеет прямая* a*, прямая* b *и прямая p* (Рис. 11)*?*

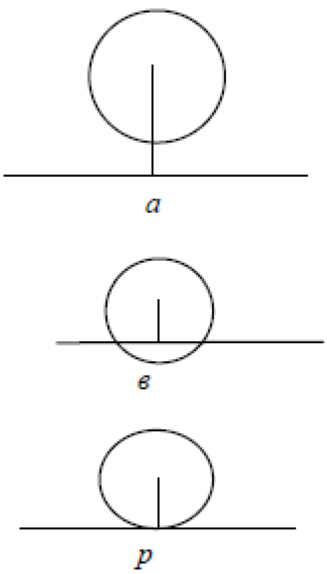
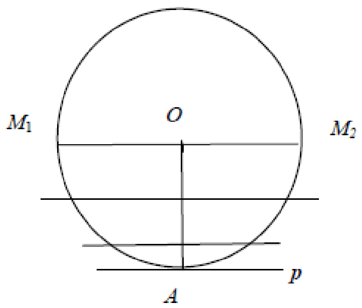


Рис. 11.

Обучающиеся: Окружности и прямая *a* не имеют общих точек, прямая *b* имеет две общие точки с окружностью, а прямая р… Возможно, у них одна общая точка, а возможно, они имеют множество общих точек. Я не уверен.

Учитель: Нам принципиально важно знать, сколько общих точек имеет с окружностью прямая *p*. Для того, что прояснить данный вопрос, нам нужно разобраться, как получилась эта прямая. Для этого строим другую окружность. Отметим радиус *OA* и проведем прямую через центр окружности, перпендикулярно радиусу *OA*. Эта прямая пересекает окружность в двух точках: M_1 и M_2 (Рис. 12). Далее, мы будем двигать



прямую M_1M_2 так, чтобы сблизить ее с точкой *A*, но, чтобы при этом прямая M_1M_2 оставалась перпендикулярной радиусу. Класс, скажите, что при этом происходит с точками пересечения прямой и окружности?

Рис. 12.

Обучающиеся: Точки сближаются друг с другом. Расстояние между ними уменьшается.

Учитель: К чему в конечном итоге приведет сближение точек, когда прямая M_1M_2будет удалена от центра окружности на расстояние, точно равное радиусу окружности?

Обучающиеся: Полагаем, эти точки совпадут, соединятся в одну точку. Сейчас мы понимаем, для чего мы перемещали прямую M_1M_2. По всей видимости, окружность и прямая *p* имеют только одну общую точку.

Учитель: Хорошо, у нас появилось предположение. Запишем его: «Прямая, имеющая с окружностью общую точку и перпендикулярная ее радиусу, проведенному в эту точку, других общих точек с окружностью не имеет».

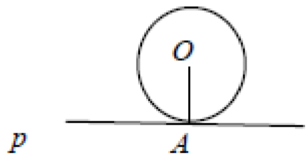


Рис. 13.

Но мы не можем быть уверены в правильности нашего предположения, пока не проверим его. Выполним рисунок. Нарисуем окружность (Рис. 13), построим радиус *OA*, и построим прямую *p*, перпендикулярную радиусу. Что дано, что требуется доказать?

Обучающиеся: Дана окружность, прямая *p*, их общая точка *A*и тот факт, что прямая *p*перпендикулярна радиусу *OA*. Мы должны доказать то, что любая другая точка прямой *p*не лежит на окружности.

Учитель: Посмотрим, какие данные мы имеем. Нам дана окружность. Кто вспомнит, *каким свойством обладают точки окружности?*

Обучающиеся: Все точки окружности равноудалены от центра.

Учитель: Как нам доказать, что любая другая точка прямой *p* не лежит на окружности?

Обучающиеся: Мы должны взять на прямой *p* другую точку и удостовериться, что расстояние от центра окружности до этой точки не равно радиусу окружности.

Учитель: Правильно. Берем на прямой *p*произвольную точку, не совпадающую с точкой *A*, скажем, точку *B*. *Как мы можем найти расстояние от этой точки до центра окружности* (Рис. 14)*?*

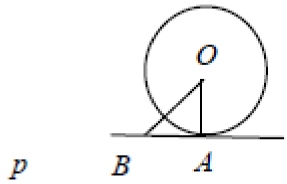


Рис. 14

Обучающиеся: Нужно соединить точку В с центром. Отложим отрезок *OB*. Теперь мы должны доказать, что отрезок *OB* не равен *OA*.

Учитель: *OA* – это перпендикуляр к прямой *p*. *OB* также является перпендикуляром?

Обучающиеся: Не является

Учитель: Почему?

Обучающиеся: Потому что из точки *O* к прямой *p* возможно провести только один, единственный перпендикуляр. Следовательно, OB – наклонная.

Учитель: Верно. Получается, что из точки *O* к данной прямой проведены перпендикуляр *OA* и наклонная *OB*.

Обучающиеся: А наклонная всегда больше перпендикуляра. Из этого следует, что точка *B* удалена от центра на большее расстояние, чем точка *A*. А значит, мы можем сделать вывод, что она не лежит на окружности. Точка *A* – единственная общая точка прямой и окружности, что и требовалось доказать.

Учитель: Подведем итог: мы взяли произвольную точку прямой *p*, не совпадающую с точкой *A*. Мы доказали, что эта точка не лежит на окружности. Из этого следует, что все точки прямой *p*, за исключением точки *A*, не лежат на окружности. А значит, **прямая *p* и окружность имеют только одну общую точку.** Прямой, которая пересекает окружность только в одной точке, дали специальное название – касательная.

Определение касательной звучит так: «*Прямая, имеющая с окружностью только одну общую точку, называется касательной к окружности в точке А».* Только что проведенное нами доказательство показывает, что касательная к окружности действительно существует. В отличие от касательной, прямую, которая пересекает окружность в двух точках, называют секущей.

При данном подходе определение касательной для учеников не появляется из ниоткуда. Учитель, задавая наводящие вопросы, приводя примеры, помогает учащимся самим сначала высказать предположение о существовании единственной общей точки прямой и окружности, а затем и доказать этот факт. Лишь после этого учитель зачитывает определение.

Если же ученики сразу получат готовое определение, велика вероятность того, что они усвоят его не полностью. Еще известный и выдающийся математик и педагог Александр Яковлевич Хинчин писал, что усилия учителя должны быть направлены на то, чтобы побудить «школьника усваивать материал в порядке активной работы над ним, всеми средствами насыщая эту работу элементами самостоятельности и хотя бы скромного творчества» [26, с. 124].

Для закрепления понятий «окружность» и «касательная к окружности» и при проверке усвоения этих понятий в конце изучения темы можно предложить обучающимся 7 класса тест авторов И.М. Смирновой и В.А. Смирнова [24].

Тест «Окружность и круг»

1. Сколько радиусов имеет окружность?

   1) 1.

   2) 2.

   3) 4.

   4) Бесконечно много.

2. Что является пересечением двух диаметров одной окружности?

   1) Радиус.

2) Центр.

3) Диаметр, делящий угол между ними пополам.

4) Хорда.

3. Сколько окружностей можно провести через одну точку?

1) Ни одной.

2) 1.

3) 2.

4) Бесконечно много.

4. Сколько окружностей можно провести через две точки?

1) Ни одной.

2) 1.

3) 2.

4) Бесконечно много.

5. Найдите наименьший радиус окружности, которую можно провести через точки A и B.

1) $\frac{1}{4}AB$.

2) $\frac{1}{2}AB$.

3) AB.

4) Нет наименьшего.

6. Какому неравенству удовлетворяют точки C, принадлежащие кругу с центром в точке O и радиусом R?

1) $OC<R$.

2) $OC\leq R$.

3) $OC\geq R$.

4) $OC=R$.

7. Какому неравенству удовлетворяют точки D, не принадлежащие кругу с центром в точке O и радиусом R?

1) $OD>R$.

2) $OD\geq R$.

3) $OD=R$.

4) $OD<R$.

8. Наибольшее и наименьшее расстояния от точки вне окружности до точек окружности равны соответственно 21 см и 5 см. Найдите радиус окружности.

1) 8 см.

2) 16 см.

3) 26 см.

4) 39 см.

9. Наибольшее и наименьшее расстояния от точки, расположенной внутри окружности до точек окружности равны соответственно 18 см и 13 см. Найдите радиус окружности.

1) 2,5 см.

2) 5 см.

3) 15,5 см.

4) 31 см.

10. Радиус окружности меньше диаметра на 11 см. Найдите диаметр данной окружности.

1) 5,5 см.

2) 11 см.

3) 16,5 см.

4) 22 см.

11. Сколько касательных к данной окружности можно провести через точку, принадлежащую ей.

1) 0.

2) 1.

3) 2.

4). Бесконечно много.

12. Сколько касательных к данной окружности можно провести через точку вне окружности.

1) 0.

2) 1.

3) 2.

4). Бесконечно много.

13. Как расположены относительно друг друга прямая a и окружность (O; 15 см), если OH=22,5 см, где $OH \perp a$ и $H \in a$?

1) Не имеют общих точек.

2) Пересекаются.

3) Касаются.

4) Параллельны.

14. Как расположены относительно друг друга прямая b и окружность (O; 36 см), если расстояние от точки O до прямой b равно 18 см?

1) Не пересекаются.

2) Пересекаются.

3) Касаются.

4) Не имеют общих точек.

15. Как расположены относительно друг друга прямая и окружность, диаметр которой равен 48 см, если расстояние от ее центра до данной прямой равно 24 см?

1) Не пересекаются.

2) Пересекаются.

3) Касаются.

4) Не имеют общих точек.

§5. Методика обучения основным свойствам и теоремам по теме

После введения определения касательной к окружности, переходим к ее свойствам.

Начнем с теоремы о свойстве касательной, а также с теоремы, обратной теореме о свойстве касательной. Эти теоремы изучаются в обязательном порядке в любом учебнике, так как являются основными по данной теме.

Автор учебника по методике преподавания математики, В.Г. Чичигин рекомендует также сделать акцент на изучение теоремы о том, что через три данные точки, не лежащие на одной прямой, можно провести окружность и притом только одну. Изучать эту теорему он предлагает при помощи решения задач [27].

Сначала напоминаем, что прямая линия на плоскости определяется или задается двумя точками.

Поставим такой же вопрос относительно окружности: *сколько необходимо задать точек и как следует их расположить, чтобы через них можно было провести окружность и притом только одну?*

Получить ответы на эти вопросы можно при помощи решения соответствующих задач.

Задача 1. Через данную точку на плоскости провести окружность.

Учащиеся выполняют эту работу и попутно выясняют, что данная задача имеет бесконечное множество решений. При этом становится понятно, что за центры окружностей можно принимать любую точку плоскости, кроме данной точки; в таком случае все окружности, проходящие через данную точку, могут иметь как равные, так и неравные радиусы.

Если же искомые окружности проводить одним и тем же радиусом, то легко заметить, что центры всех окружностей в этом случае будут лежать на окружности, проведенной тем же радиусом из данной точки как из центра;

эта окружность есть геометрическое место точек – центров окружностей, проходящих через данную точку и имеющих равные радиусы.

Задача 2. Через две данные точки на плоскости провести окружность.

Сделав предварительный анализ задачи, школьники приходят к следующим выводам: по условию задачи данные две точки должны лежать на искомой окружности, а значит они должны быть равно удалены от центра той же окружности на расстояние, равное ее радиусу. Исходя из этого, центр искомой окружности будет лежать на перпендикуляре, проведенном из середины отрезка, соединяющего данные точки. Этот перпендикуляр является геометрическим местом точек, каждая из которых равно удалена от двух данных точек.

После проведения анализа легко определить и *план решения задачи:*

1) соединить отрезком данные точки;

2) разделить отрезок пополам, построив соответствующий перпендикуляр;

3) за центр искомой окружности принять произвольную точку построенного перпендикуляра;

4) радиусом, равным расстоянию выбранной точки до одной из данных точек, провести окружность с центром в выбранной точке.

После того, как учащиеся выполнят все эти построения, они получают искомую окружность, удовлетворяющую поставленным условиям, что можно легко доказать.

Исследовав решение этой задачи, учащиеся приходят к выводу, что задача имеет бесконечное множество решений.

Из анализа решения вытекают *следующие выводы:*

1) через две точки можно провести бесконечное множество окружностей;

2) их центры расположены на одной и той же прямой, перпендикулярной к отрезку, соединяющему две данные точки и проходящей через его середину;

3) эта прямая есть геометрическое место точек – центров всех окружностей, проходящих через две данные точки.

Задача 3. Через три данные точки, не лежащие на одной прямой, провести окружность.

Для того, чтобы построить искомую окружность надо определить положение ее центра и знать радиус. Приняв во внимание, что данные три точки не лежат на одной прямой, проведем следующий анализ:

1) для того, чтобы искомая окружность проходила через одну пару заданных точек, ее центр должен лежать на перпендикуляре, проходящем через середину отрезка, соединяющего эту пару точек.

2) чтобы та же окружность проходила через вторую пару точек, центр ее должен лежать на втором перпендикуляре, проходящем через середину отрезка, соединяющего вторую пару точек.

3) наконец, чтобы искомая окружность проходила через обе пары точек, а значит, через три данные точки, ее центр должен находиться одновременно на обоих перпендикулярах, т.е в точке их пересечения.

По итогам анализа мы определили положение центра искомой окружности, а найти ее радиус не составит труда.

Теперь мы можем составить *план решения данной задачи:*

1) соединить отрезком одну пару данных точек;

2) построить перпендикуляр к нему через его середину;

3) соединить отрезком другую пару данных точек;

4) построить перпендикуляр к нему, проходящий через его середину;

5) принять точку пересечения обоих перпендикуляров за центр искомой окружности;

6) соединить его с одной из данных точек отрезком, который принимается за радиус искомой окружности;

7) построить окружность.

После того, как учащиеся выполнят построение, они смогут привести доказательство и исследование. При данных условиях задача всегда имеет решение, так как все этапы решения задачи выполнимы, а так как перпендикуляры могут пересечься только в одной точке, решение будет только одно.

Таким образом, по итогам решения трех задач можно сформулировать **теорему:** *«Через три данные точки, не лежащие на одной прямой, можно провести окружность и притом только одну»*.

§6. Методика обучения решению задач по теме

Тема «Окружность и касательные» к окружности имеет высокую практическую значимость. Задачи, изучаемые в этой теме, являются основой для решения многих последующих задач в школьном курсе геометрии. Для качественного закрепления материала по данной теме предлагается набор задач, который ученики будут решать во время изучения темы «Окружность и касательные к окружности».

В седьмом классе, учащиеся впервые изучают определение окружности, основные элементы окружности. Необходимо закрепить у школьников знание элементов окружности, умение построить радиус, диаметр, хорду окружности. Для этого предлагается решить следующие задачи:

Задача 1. *Докажите, что любой луч, исходящий из центра окружности, пересекает окружность в одной точке*.

Решение: Так как на луче можно отложить единственный отрезок данной длины, то любой луч пересечет окружность ровно на расстоянии радиуса от центра окружности. Никакой иной точки окружности на луче быть не может. Утверждение доказано.

Задача 2. *Докажите, что прямая, проходящая через центр окружности, пересекает окружность в двух точках*.

Решение: Прямую можно представить как два луча, имеющих общее начало, угол между которыми равен 180°. Таким образом, задача доказывается аналогично предыдущей.

Задача 3. *1) Из точки данной окружности проведены диаметр и хорда, равная радиусу. Найдите угол между ними.*

2) Из точки данной окружности проведены две хорды, равные радиусу. Найдите угол между ними.

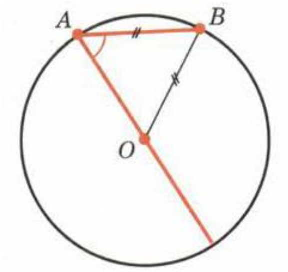


Рис. 15.

Решение: 1) По условию, $OB = BA = OA$, а значит $\triangle AOB$ – равносторонний (Рис. 15), из чего следует, что $\angle OAB = 60°$.

2) По аналогии с п.1, $\angle OAC = 60°$ (Рис. 16);

$\angle BAC = \angle OAB + \angle OAC = 60° + 60° = 120°$.

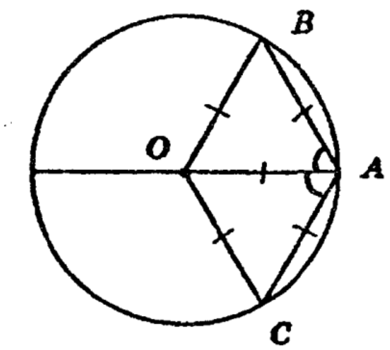


Рис. 16.

Задача 4. *Какие из отрезков, изображенных на рисунке являются: а) хордами окружности; б) диаметрами окружности; в) радиусами окружности?*

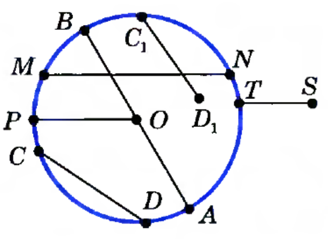


Рис. 17.

Решение: а) Хордами (Рис. 17) являются *MN*, *CD*, *AB*; б) диаметром является *AB*; в) радиусами являются *OP*, *OA*, *BO*.

Задача 5. *Отрезок MK – диаметр окружности с центром O, а MP и PK – равные хорды этой окружности. Найдите $\angle POM$.*

Решение: Так как $MP = PK$ (Рис. 18), значит треугольник MPK – равнобедренный. $MO = OK$ – радиусы, следовательно PO является медианой равнобедренного треугольника MPK, опущенной на основание. По свойству равнобедренного треугольника, PO является высотой и биссектрисой и $\angle MOP = 90°$.

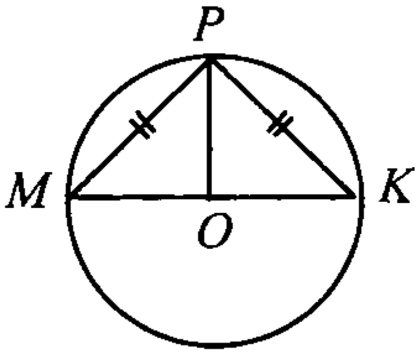


Рис. 18.

Задача 6. *Отрезки AB и CD – диаметры окружности с центром O. Найдите периметр треугольника AOD, если известно, что CB = 13 см, AB = 16 см.*

Решение: Рассмотрим $\triangle COB$ и $\triangle AOD$ (Рис. 19). $AO = OB = OC = OD$ (как радиусы), $\angle 1$ и $\angle 2$ вертикальные, а значит $\angle 1 = \angle 2$. Из вышеизложенного следует, что $\triangle COB = \triangle AOD$ по второму признаку равенства треугольников. А значит, $AD = CB = 13$ см и $AO = OB = OC = OD = 8$ см. Теперь находим периметр:

$P_{AOD} = AO + OD + AD = 8 + 8 + 13 = 29$ см.

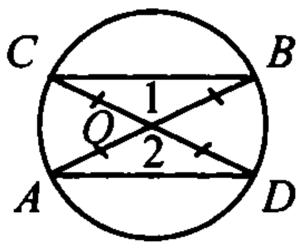


Рис. 19.

Задача 7. *На окружности с центром O отмечены точки A и B так, что $\angle AOB$ – прямой. Отрезок BC – диаметр окружности. Докажите, что хорды AB и AC равны.*

Решение: Рассмотрим $\triangle BOA$ и $\triangle COA$ (Рис. 20); сторона OA–общая, $CO = OD$–радиусы, $\angle COA=\angle BOA = 90°$. Следовательно, $\triangle COA = \triangle BOA$ по

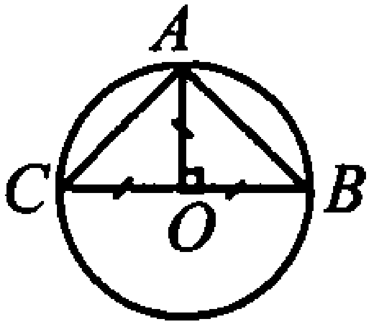


Рис. 20.

первому признаку равенства треугольников. Значит, $AC = AB$, ч.т.д.

Задача 8. *На прямой даны две точки A и B. На продолжении луча BA отложите отрезок BC так, чтобы BC = 2AB.*

Решение: Окружность с центром в точке B и радиусом AB пересекает прямую AB в двух точках (Рис. 21). Одна из них A, а вторую назовем точкой O. Теперь проведем окружность с таким же радиусом, но с центром в точке O. Точка пересечения второй окружности с прямой AB, не совпадающая с

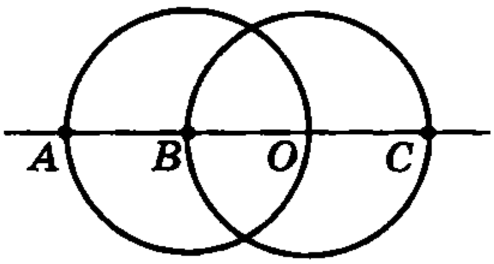


Рис. 21.

точкой B –точка C. Отрезок BC–искомый, так как $AB = BO = OC$, $AB = \frac{1}{2}BC$ и $BC = 2AB$.

Задача 9. *Даны прямая a, точка B, не лежащая на ней, и отрезок PQ (*Рис. 22*). Постройте точку M на прямой a так, чтобы BM = PQ.*

Всегда ли задача имеет решение?

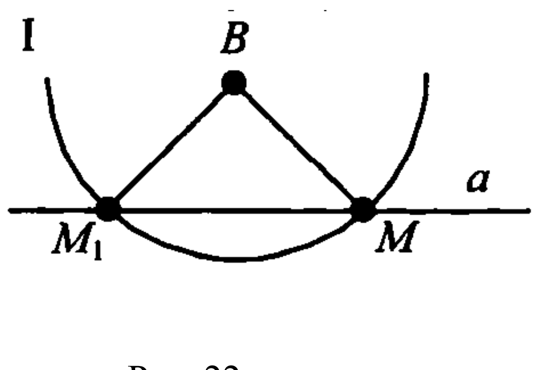


Рис. 22.

Решение: Возможны три случая:

1) На прямой (Рис. 23) есть две точки, которые удалены от B на расстояние PQ.

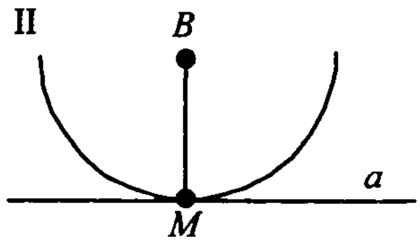


Рис. 23.

2) Одна точка на прямой, удаленная отB на расстояние PQ.

3) Не существует такой точки на прямой a. $PQ= BM$ – радиус окружности с центром в точке B, так мы строили точку M. В третьем случае задача не имеет решения.

Задача 10. *Даны окружность, точка A, не лежащая на ней, и отрезок PQ. Постройте точку M на окружности так, чтобы AM = PQ. Всегда ли задача имеет решение?*

Решение: Построение делаем аналогично предыдущей задаче (Рис. 24).

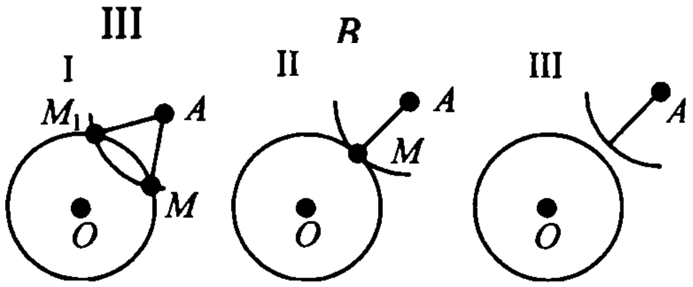


Рис. 24.

В третьем случае задача не имеет решения.

Задача 11. *Постройте окружность данного радиуса, проходящую через данную точку с центром на данной прямой.*

Решение: Построить окружность можно тремя способами (Рис. 25). От этого зависит будет ли окружность пересекать прямую в двух точках, в одной точке, илине будет пересекать ни в одной.

I случай. Центром построенной нами окружности может быть или *B*, или *C*, значит, задача имеет два решения.

II случай. Центром построенной нами окружности будет*D*, значит задача имеет только одно решение.

III случай. Задача не имеет решения, т.к. на прямой *l*нет точки, удаленной от *A* на расстояние *R*.

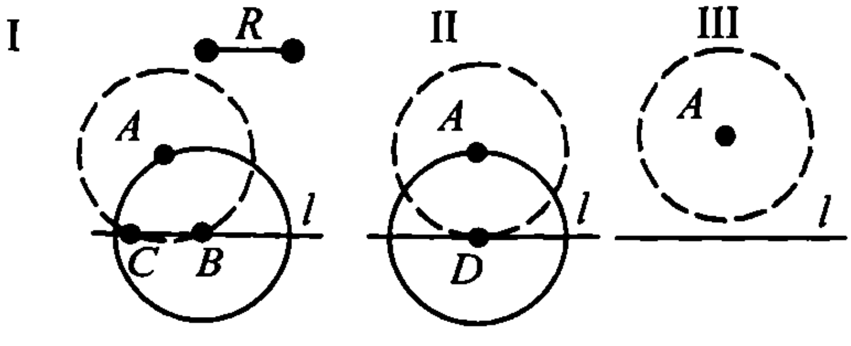


Рис. 25.

Понятие касательной к окружности изучается в седьмом, либо в восьмом классе, в зависимости от учебной программы. Ученикам необходимо закрепить знания о взаимном расположении прямой и окружности, о том, что такое касательная, научиться использовать ее свойства. Для этого предлагаются решить следующие задачи.

Задача 1. *Какие углы образует хорда AB, равная радиусу окружности, с касательной в точке A?*

Решение: Исходя из условия задачи (Рис. 26), $OB = OA = AB$, а значит, учитывая что треугольник *ABO* – равносторонний,$\angle OAB = 60°$.

Так как $OA \perp a$, то$\angle BAK = 90° - 60° = 30°$.

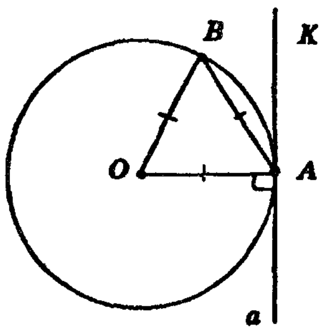


Рис. 26.

Задача 2. *Найдите углы, под которыми пересекаются прямые, касающиеся окружности в концах хорды, равной радиусу.*

Решение: $\angle ABK = \angle BAK = 30°$ (аналогично предыдущей задаче). Зная, что сумма внутренних углов треугольника равна 180°, получаем (Рис. 27):

$\angle BKA = 180° - (\angle BAK + \angle ABK) = 180° - 30° - 30° = 120°$;

$\angle BKF = 180° - 120° = 60°$ (т.к. $\angle BKF$ и $\angle BKA$ смежные).

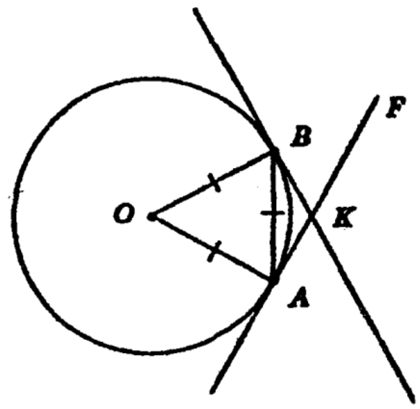


Рис. 27.

Задача 3. *1) Точки A, B, C лежат на прямой, а точка O – вне прямой (Рис. 28). Могут ли два треугольника AOB и BOC быть равнобедренными с основаниями AB и BC? Обоснуйте ответ.*

2) Могут ли окружность и прямая пересекаться более чем в двух точках?

Решение: 1) Допустим, $\triangle AOB$ и $\triangle BOC$ – равнобедренные, следовательно, $AO = OB = OC$, и $\angle A = \angle C = \angle ABO = \angle OBC$, а это возможно только в том случае, если $\angle ABO = \angle OBC = 90°$, потому что они смежные, то есть их сумма равна 180°, но в таком случае $\angle A = \angle C = 90°$, что невозможно, потому что тогда сумма углов треугольника будет более 180°.

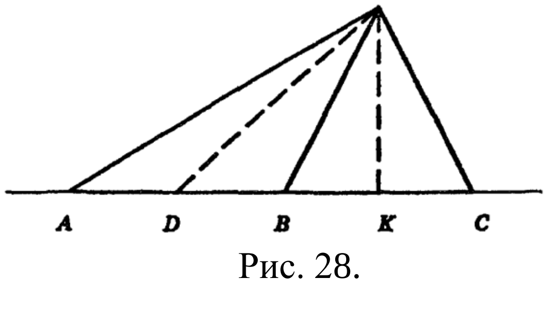


Рис. 28.

2) Допустим, прямая *a* пересекает окружность с центром в точке *O* хотя бы в трех точках *A*, *B*, *C*. Значит, точки *A*, *B*, *C* принадлежат окружности, и *OA* = *OB* = *OC*, так как являются радиусами окружности, и лежат на прямой *a*. Треугольники *OAB* и *BOC* являются равнобедренными. В п.1 уже было доказано, что это невозможно, а значит, предположение не верно. Окружность и прямая не могут пересекаться более чем в двух точках.

Задача 4. *1) Через точку A окружности с центром O проведена прямая, не касающаяся окружности. OB – перпендикуляр, опущенный на данную прямую. На продолжении отрезка AB отложен отрезок BC, равный отрезку AB (*Рис. 29*). Докажите, что точка C лежит на окружности.*

2) Докажите, что если прямая имеет с окружностью только одну общую точку, то она является касательной к окружности в этой точке.

Решение: 1) Из того, что прямая *a* не касается окружности, но проходит через ее центр, следует что она пересекает окружность в двух точках. В треугольнике *AOC*: *OB* – медиана (т.к. *AB* = *BC* (по условию) и высота (т.к. *OB*⊥*a* (по условию)). Получается, что треугольник *AOC* – равнобедренный. Из вышенаписанного следует, что *OA* = *OC*, а значит точка

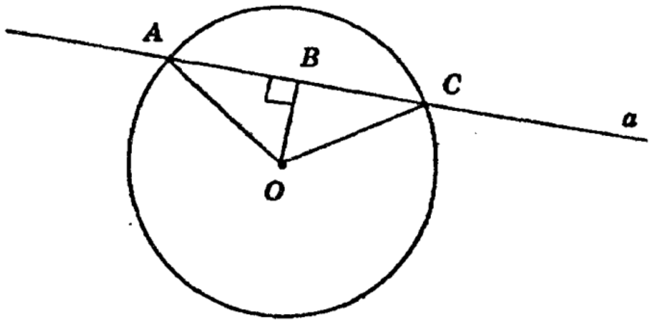


Рис. 29.

C принадлежит окружности.

2) Пусть прямая *a* и окружность имеют лишь одну общую точку *A*, но при этом прямая *a* не является касательной. Значит, она не перпендикулярна радиусу *OA*. Из этого следует, что из точки *O* возможно провести к прямой

перпендикуляр *OB*, который не совпадает с *OA*. На продолжении отрезка *AB* отложим отрезок *BC*, равный отрезку *AB*.

Из п.1 нам известно, что точки *A* и *C* лежат на окружности. Но по условию прямая*a*и окружность

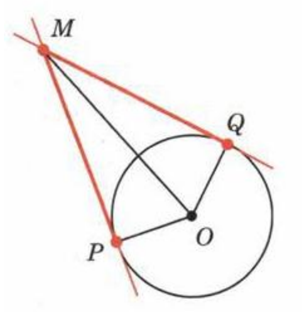


Рис. 30.

имеют только одну общую точку. Противоречие.

Задача 5. *1) Из одной точки проведены две касательные к окружности. Докажите, что отрезки касательных MP и MQ (*Рис. 30*) равны. 2) Докажите, что через одну точку не может проходить больше двух касательных к окружности.*

Решение: 1) В $\triangle OPM$ и $\triangle OQM$ (Рис. 31):

OM – общая,

OP = *OQ*, так как являются радиусами окружности,

$OP \perp MP$, $OQ \perp MQ$ (потому что *MP* и *MQ* являются касательными).

Следовательно, $\triangle OPM = \triangle OQM$ по первому признаку равенства

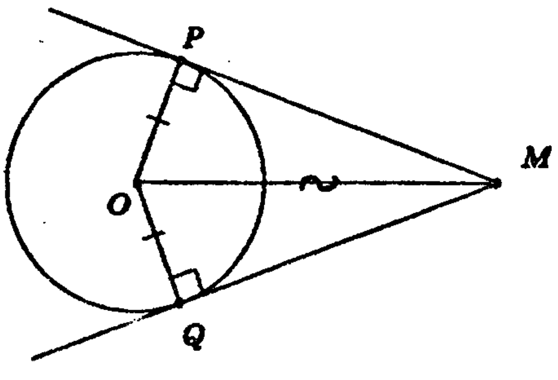


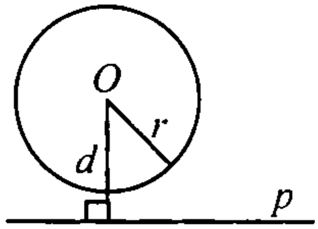
Рис. 31.

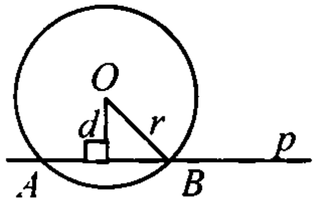
треугольников. Откуда *MP* = *MO*.

Задача 6. *Пусть* d *– расстояние от центра окружности радиуса* r *до прямой* p. *Каково взаимное расположение прямой* p *и окружности, если: а)* r *= 16 см,* d *= 12 см; б)* r *= 5 см,* d *= 4,2 см; в)* r *= 7,2 дм,* d *= 3,7 дм; г)* r *= 8 см,* d *= 1,2 дм; д)* r *= 5 см,* d *= 50 мм?*

Решение: а), б), в) Так как $r > d$, то прямая и окружность пересекаются в двух точках (Рис. 32).

г) r = 8 см, d = 1,2 дм, т.е. d = 12 см и $r < d$, следовательно, прямая и окружность не имеют общих точек (Рис. 33).





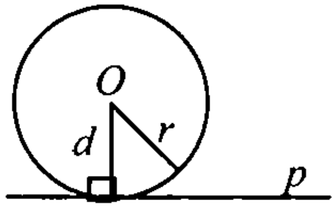


Рис. 32. Рис. 33. Рис. 34.

д) Так как r = 5 см, d = 50 мм, т.е. d = 5 см и $r = d$, то прямая и окружность касаются (Рис. 34).

Задача 7. *Расстояние от точки A до центра окружности меньше радиуса окружности. Докажите, что любая прямая, проходящая через точку A, является секущей по отношению к данной окружности.*

Решение: 1) Допустим, что $l \perp OA$, тогда $d<r$ и l – секущая (по определению).

2) Пусть l не $\perp$ OA, значит $OK \perp$ $\triangle OAK$ – прямоугольный, т.к. OA – гипотенуза, то $OA>OK$; $R>OA$, $r>OK$ (по условию), а значит l–секущая по

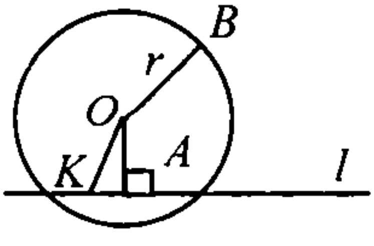


Рис. 35.

определению (Рис. 35), ч.т.д.

Задача 8. *Даны квадрат OABC, сторона которого равна 6 см, и окружность с центром в точке O радиуса 5 см. Какие из прямых OA, AB, BC и AC являются секущими по отношению к этой окружности?*

Решение: *OA* проходит через центр окружности (Рис. 36), значит, *OA*– секущая. *OABC* – квадрат со стороной 6 см, значит *AB* = *BC* = 6 см и находятся на расстоянии *OA* = *OC* = 6 см. Так как *R*равен 5 см и 6 > 5, значит,

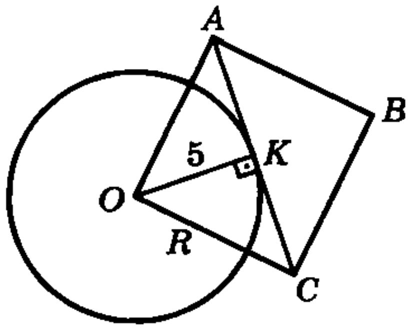


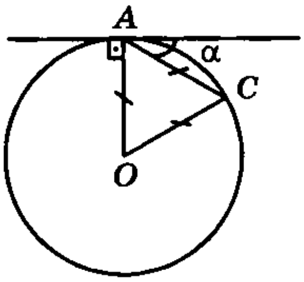
Рис. 36.

AB и *BC* не являются секущими.

$OK = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}\sqrt{OA^2 + OC^2} = 3\sqrt{2}$см.

Задача 9. *Через точку A окружности проведены касательная и хорда, равная радиусу окружности. Найдите угол между ними.*

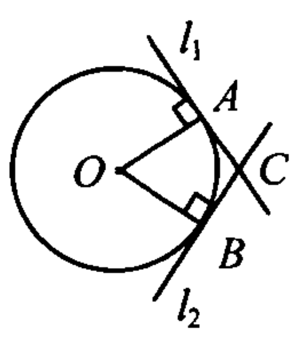
Решение: *AC* – хорда, равная *R (*Рис. 37*)*, т.е. *AC* = *OC* = *AO* (по условию). ∠*AOC* = 60° (т.к. треугольник *AOC*– равносторонний). Значит, ∠*a* = 90° и 60° = 30°.



Задача 10. *Через концы хорды AB, равной радиусу окружности, проведены две касательные, пересекающиеся в точке C (Рис. 38). Найдите ∠ACB.*

Рис. 37.

Решение: 1) *AB* = *OA* = *OB* = *R*, ∠*A* = ∠*B* = ∠*O* = 60°.



2) Из свойства касательных $OA \perp l_1$, $OB \perp l_2$, значит, ∠*CAB* = ∠*CBA* = 90° – 60° = 30°.

3) △*ABC*: ∠*A*+ ∠*B* + ∠*C* = 180°, т.е. ∠*C* = = 180° – 60° = 120°.

Рис. 38.

Задача 11. *Угол между диаметром AB и хордой AC равен 30°. Через точку C проведена касательная, пересекающая прямую AB в точке D (*Рис. 39*). Докажите, что треугольник ACD равнобедренный.*

Решение: 1) $AO = OC = R$, следовательно, треугольник AOC– равнобедренный, т.е. $\angle C = \angle A = 30°$.

2) $OC \perp CD$, следовательно, $\angle ACD = \angle OCA + \angle DCO$.

$\angle ACD = 30° + 90° = 120°$.

3) $\triangle ACD$: $\angle D + \angle A + \angle C = 180°$.

$\angle D + 30° + 120° = 180°$, $\angle D = 30°$, т.е. $\angle A = \angle D = 30°$, следовательно, $AC = CD$ и $\triangle ACD$ – равнобедренный. Ч.т.д.

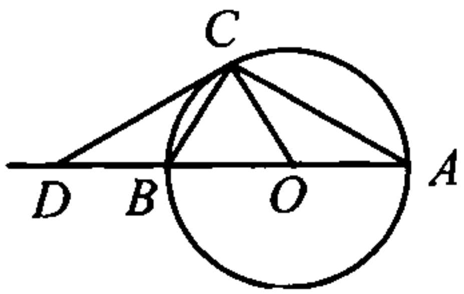


Рис. 39.

Задача 12. *Прямая AB касается окружности с центром O радиуса r в точке B (*Рис. 40*). Найдите AB, если OA = 2 см, а r = 1,5 см.*

Решение: По условию, $\angle B = 90°$, т.е. треугольник OAB–прямоугольный. По

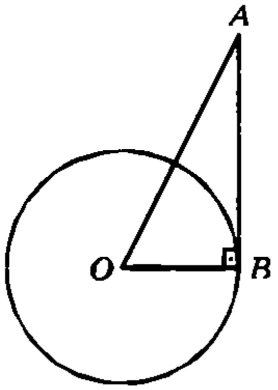


Рис. 40.

теореме Пифагора, $AB^2 = OA^2 - OB^2$.

$AB = \sqrt{OA^2 - OB^2} = \sqrt{4 - (\frac{3}{2})^2} = \frac{\sqrt{7}}{2}$см.

Задача 13. *Прямая AB касается окружности с центром O радиуса r в точке B. Найдите AB, если ∠AOB = 60°, а r = 12 см.*

Решение: AB – касательная (по условию), следовательно,$OA \perp AB$; из $\triangle AOB$: $tg\angle O = \frac{AB}{OB}$, отсюда:

$AB = OB \cdot tg\angle O = 12 \cdot tg\angle 60° = 12\sqrt{3}$см.

Задача 14. *Даны окружность с центром O радиуса 4,5 см и точка A. Через точку A проведены две касательные к окружности* (Рис. 41). *Найдите угол между ними, если OA = 9 см.*

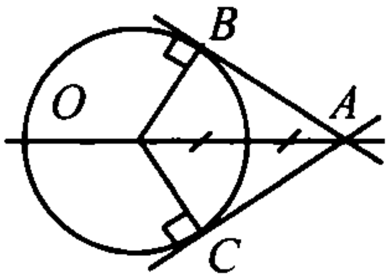


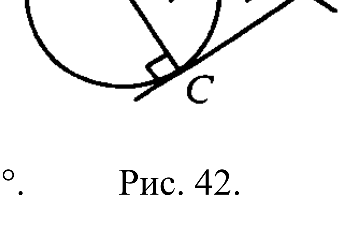
Рис. 41.

Решение: 1) В$\triangle AOB$: $\angle B = 90°$, $OA = 9$, $OB = 4,5$, т.е. $OB = ½\ OA$. Имеем: $\angle OAB = 30°$.

2) Также, из треугольника, $\angle OAC = 30°$.

3) $\angle BAC = \angle OAC + \angle OAB = 30° + 30° = 60°$.

Задача 15. *Отрезки AB и AC являются отрезками касательных к окружности с центром O, проведенными из точки A. Найдите ∠BAC, если середина отрезка AO лежит на окружности* (Рис. 42).



Решение: $OE = OC = OB = R$ ($OA = 2OE = 2R$); $\triangle AOB$: $OB = \frac{1}{2}OA$, следовательно, $\angle BAO = 30°$, а $\angle B = 90°$; AO – биссектриса $\angle BAC$, значит, $\angle BAC = 60°$.

Рис. 42.

Задача 16. *Прямые AB и AC касаются окружности с центром O в точках B и C. Найдите BC, если $\angle OAB = 30°$, $AB = 5$ см (*Рис. 43).

Решение: $AC = AB$; $\angle OAB = \angle CAO = 30°$. Значит, $\angle CAB = 60°$ и $\triangle ABC$–равносторонний. Отсюда $BC = CA = AB = 5$ см.

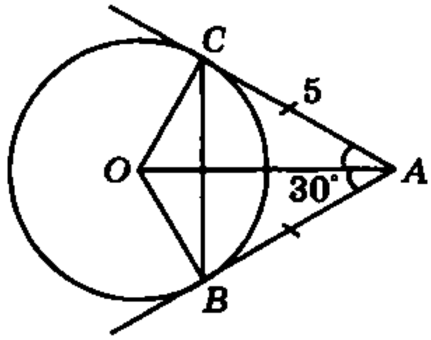


Рис. 43.

Задача 17. *Прямые MA и MB касаются окружности с центром O в точках A и B. Точка C симметрична точке O относительно точки B (*Рис. 44*). Докажите, что $\angle AMC = 3\angle BMC$.*

Решение: 1) В $\triangle OMB$и $\triangle CMB$: MB–общая, OB = BC, значит $\triangle CMB$ = = $\triangle OMB$(по двум катетам), т.е. $\angle OMB = \angle CMB$.

2) $\angle BMO = \angle AMO$ (свойство параллельных отрезков).

3) $\angle AMC = \angle AMO + \angle BMC + \angle OMB$, $\angle AMC = 3 * \angle BMC$, т.к. $\angle OMB =$

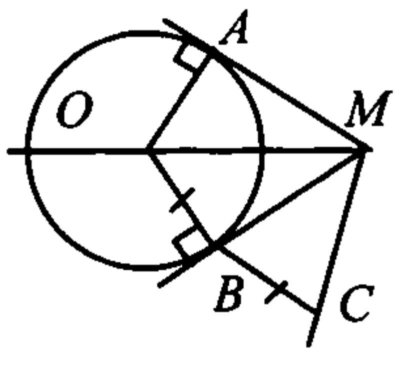


Рис. 44.

$= \angle BMC = \angle AMO$, ч.т.д.

Задача 18. *Из конца диаметра AB данной окружности проведены перпендикуляры AA_1 и BB_1 к касательной, которая не перпендикулярна к* *диаметру AB. Докажите, что точка касания является серединой отрезка A_1B_1.*

Решение: 1) $AA_1 \perp l$, $BB_1 \perp l$, значит$BB_1 \| AA_1$, т.е. *ABCD* – прямоугольнаятрапеция.

2) Т.к. $OC \perp l$, $OC \| AA_1 \| BB_1$, $OA = BO$, $O \in AB$, т.е. по теореме Фалеса *OC* – средняя линия трапеции и$A_1C = CB_1$, ч.т.д.

Задача19. *Отрезок AH – перпендикуляр, проведенный из точки A к прямой, проходящей через центр O окружности радиуса 3 см (*Рис. 45*). Является ли прямая AH касательной к окружности, если: а) OA = 5 см, AH = 4 см; б) ∠HAO= 45°, OA = 4 см; в) ∠HAO = 30°, OA = 6 см?*

Решение: а) *OA* = 5 см, *AH* = 4 см. В △*AHO*: *OA* = 5, *AH* = 4, *OH* = 3, по теореме Пифагора $5^2 = 4^2 + 3^2$; 25 =25, следовательно, треугольник *AHO* – прямоугольный, т.е. ∠*OHA* = 90° и *AH*является касательной.

б) ∠*HAO* = 45°, *OA* = 4 см.

В△ *AHO*: *OH* = 3, *OA* = 4, ∠*HAO* = 45°.

Допустим: ∠*H* = 90°, тогда *AH* = *OH* = 3, т.е. $AO = 3\sqrt{2}$, а это противоречит

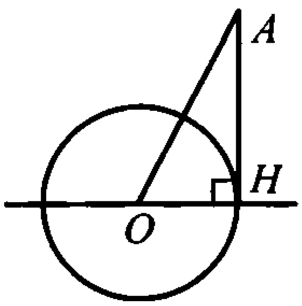


Рис. 45.

условию *AO* = 4, следовательно, предположение неверно и *AH* не является касательной.

в) ∠*HAO* = 30°, *OA* = 6 см.

В△*AHO*: *OA* = 6, *OH* = 3, ∠*A* = 30°.

$OH = \frac{1}{2}OA$, значит, ∠*H* = 90°, т.е. *AH* является касательной.

В заключение анализа практических задач по теме, представим способ решения задачи на построение касательной к данной окружности (O, r), проходящей через данную точку A, предложенный автором статьи в журнале «Математика в школе» [16].

Проанализируем **задачу.** Пусть искомая касательная *AM* построена. Тогда *OM* перпендикулярен *AM*. *AM* является катетом прямоугольного треугольника *OMA*, в котором известны длина гипотенузы *OA* и длина одного из катетов $OM = r$. Отрезок, конгруэнтный AM, найдем, построив прямоугольный треугольник по гипотенузе и катету.

Далее, строим прямоугольный треугольник по гипотенузе и катету, длины которых соответственно равны *OA* и r.

Построим окружность с центром в точке *A* и радиусом *AM*. Полученная окружность пересекается с исходной окружностью в точках M_1 и M_2. Прямые AM_1и AM_2 – искомые касательные к окружности.

Выводы по второй главе

Раскрыта методика обучения основным понятиям и свойствам по теме «Окружность и касательные к окружности» в курсе геометрии основной школы.

Представлены различные варианты календарно-тематического планирования по теме исследования, составленные на основе программы учебников Л.С. Атанасяна , И.М. Смирновой и В.А. Смирнова. В учебнике Л.С. Атанасяна тема «Окружность» проходится в седьмом классе, в параграфе «Задачи на построение», на который отводится 2 часа. Также 2 часа отводится на решение задач по темам всей главы, в том числе и по теме «Окружность». В восьмом классе теме «Касательная к окружности» выделен отдельный параграф, на который отводится 3 часа, также 2 часа выделено на решение задач, в том числе и по теме «Касательная к окружности». В учебнике И.М. Смирновой и В.А. Смирнова окружность и касательные к окружности изучаются в седьмом классе, в теме «Окружность и геометрические места точек». На изучение темы отводится 16 часов.

Разработаны методические рекомендации по введению основных понятий темы «Окружность и касательные к окружности», по обучению основным свойствам и теоремам по теме исследования, представлен набор задач по теме.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сформулируем основные выводы и полученные результаты проведенного исследования:

1. Выявлены цели и задачи обучения теме «Окружность и касательные к окружности». В результате полного изучения темы, учащиеся должны знать и понимать определение окружности; уметь объяснять, что такое центр окружности, радиус, хорда, диаметр, дуга окружности; уметь строить окружность и основные ее элементы; знать возможные случаи взаимного расположения прямой и окружности; знать определение касательной, свойства и теоремы по теме; уметь применять полученные знания на практике, при решении задач.

2. Выполнен анализ программы и школьных учебников по теме «Окружность и касательные к окружности». Методика преподавания темы «Окружность и касательные к окружности» в каждом из учебников имеет свои сильные и слабые стороны. Выбор учебника во многом зависит от целей и задач обучения. В учебнике Л.С. Атанасяна теоретическая часть представлена достаточно кратко и компактно. В связи с этим, усвоение новых знаний для учеников не должно представлять трудности. Основное внимание в учебнике уделено практической части. В курсе А.Д. Александрова тема «Окружность и касательные к окружности» теоретически освещена наиболее полно, подробно и целостно. Соответственно, и требования к учащимся выше: учебник рассчитан на более углубленное изучение математики. Учебник А.В. Погорелова отличается от двух предыдущих интересным подходом к освоению теории: в нее встроены задачи с решениями. Благодаря этому, учащиеся не только получают знания, но и развивают логическое и творческое мышления. Учебник И.Ф. Шарыгина примечателен тем, что в нем встречается несколько свойств окружности, которые не изучают в других учебниках. Изучение темы окружности в учебнике В.Ф. Бутузова и соавторов не сильно отличается от

того, как эта тема освещается в учебнике Л.С. Атанасяна. Но здесь вся тема окружности проходится в седьмом классе, хорошо структурирована и компактна размещена.

3. Представлены различные варианты календарно-тематического планирования по теме исследования, составленные на основе программы учебника Л.С. Атанасяна и учебника И.М. Смирновой и В.А. Смирнова.

В целом на изучение темы большинство авторов отводят от 12 до 16 часов.

4. Разработаны методические рекомендации по изучению темы «Окружность и касательные к окружности» учащимися 7-8 классов. В данном исследовании представлены как методические рекомендации по введению основных понятий темы «Окружность и касательные к окружности», так и по обучению основным свойствам и теоремам по теме.

5. Составлен набор задач для учащихся 7-8 классов, содержащая в себе задачи большинства видов по теме «Окружность и касательные к окружности».

Все это дает основание считать, что задачи, поставленные в исследовании, полностью решены, цель исследования достигнута.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров, А.Д. Геометрия: учеб. пособие для 8 кл. с углубл. изучением математики / А.Д. Александров, А.Л. Вернер, В.И. Рыжик. М: Просвещение, 2002. – 240 с.
2. Андрафанова, Н.В. Инновационные технологии в преподавании геометрии// Личность, семья и общество: вопросы педагогики и психологии. – 2014. - №45. – С. 55-65.
3. Бескин, Н.М. Методика геометрии. – М: Государственное учебно-педагогическое издательство министерства просвещение РСФСР, 1947. – 276 с.
4. Бутузов, В.Ф. Геометрия. 7 класс. Дидактические материалы. / В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев, В.В. Прасолов. – М.: Просвещение, 2010. – 62 с.
5. Бутузов, В.Ф. Геометрия. 7 класс. Учебник. / В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев, В.В. Прасолов. – М.: Просвещение, 2010. – 127 с.
6. Вернер, А.Л. Геометрия. 7 класс. Методические рекомендации для учителя. / А.Л. Вернер, В.И. Рыжик, Т.Г. Ходот. – М.: Просвещение, 2012. – 143 с.
7. Вернер, А.Л. Геометрия. 8 класс. Методические рекомендации. Пособие для учителей. / А.Л. Вернер, В.И. Рыжик. – М.: Просвещение, 2014. – 116 с.
8. Гангнус, Р.В. Геометрия. Методическое пособие для высших педагогических заведений и преподавателей средней школы. / Р.В. Гангнус, Ю.О. Гурвиц. – М: Государственное учебно-педагогическое издательство, 1934. – 321 с.
9. Геометрия. 7 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений / А.Д. Александров, А.Л. Вернер, В.И. Рыжик, Т.Г. Ходот. М.: Просвещение, 2013. – 176 с.

10. Геометрия. 7–9 кл.: учеб. для общеобразоват. организаций / [Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев и др.]. – 5-е изд. – М.: Просвещение, 2015. – 383 с.

11. Евстафьева, Л.П. Геометрия. 7 класс. Дидактические материалы. / Л.П. Евстафьева, В.А. Евстафьев. – М.: Просвещение, 2012. – 125 с.

12. Евстафьева, Л.П. Геометрия. 8 класс. Дидактические материалы. / Л.П. Евстафьева, В.А. Евстафьев. – М.: Просвещение, 2013. – 89 с.

13. Зив, Б.Г. Задачи по геометрии. Пособие для 7–11 классов / Б.Г. Зив, В.М. Мейлер, А.Г. Баханский. М: Просвещение, 2003. – 271 с.

14. Изучение геометрии в 7–9 классах. Пособие для учителей / [Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, Ю.А. Глазков и др.]. – 7-е изд. – М.: Просвещение, 2009. – 255 с.

15. Медяник, А.И. Геометрия. Дидактические материалы. 7 класс. / А.И. Медяник, В.А. Гусев. М: Просвещение, 2010. – 80 с.

16. Мельник, И.Г. Построение касательной к данной окружности // Математика в школе. – 1980. - №5. – С. 46.

17. Мельникова, Н.Б. Дидактические материалы по геометрии. 7 класс. К учебнику Атанасяна Л.С. «Геометрия. 7-9 классы». / Н.Б. Мельникова, Г.А. Захарова. – 5-е изд., перераб. и доп. – М.: Экзамен, 2017. – 128 с.

18. Мельникова, Н.Б. Дидактические материалы по геометрии. 8 класс. К учебнику Атанасяна Л.С. «Геометрия. 7-9 классы». / Н.Б. Мельникова, Г.А. Захарова. – 5-е изд., перераб. и доп. – М.: Экзамен, 2017. – 144 с.

19. Мищенко, Т.М. Дидактические материалы и методические рекомендации для учителя по геометрии. 7 класс. – М.: Экзамен, 2014. – 208 с.

20. Моисеева, Е.П. Геометрия. 7 класс. Поурочные планы по учебнику А.В. Погорелова. – Волгоград: Учитель, 2006. – 122 с.

21. Погорелов, А.В. Геометрия: Учеб. для 7–9 кл. общеобразоват. учреждений. – 2-е изд. – М.: Просвещение, 2001. – 224 с.

22. Скопец, З.А. О построении касательной к окружности // Математика в школе. – 1983. - №5. – С. 59-62.

23. Смирнова, И.М. Геометрия. 7 класс. Методические рекомендации для учителя / И.М. Смирнова, В.А. Смирнов. – М.: Мнемозина, 2015. – 272 с.

24. Смирнова, И.М. Геометрия. Дидактические материалы. 7 класс. / И.М. Смирнова, В.А. Смирнов. – М.: Мнемозина, 2015. – 88 с.

25. Финкельштейн, В.М. Касательная к окружности // Вестник Кемеровского государственного университета. – 2008. – №4. – С. 30-33.

26. Хинчин, А.Я. Педагогические статьи. – М.: Издательство академии педагогических наук РСФСР, 1963. – 203 с.

27. Чичигин, В.Г. Методика преподавания геометрии. Планиметрия. Пособие для учителей средней школы. – М: Государственное учебно-педагогическое издательство министерства просвещение РСФСР, 1959. – 392 с.

28. Шапиро, И.М. Прикладная и практическая направленность обучения математике в средней общеобразовательной школе // Педагог. – 1998. – № 5.

29. Шарыгин, И.Ф. Геометрия. 7-9 классы. Учебник. – М.: Дрофа, 2012. – 464 с.

30. Шевцова, Ю.С. Возможности темы «Окружность» в организации исследовательской деятельности учащихся // Современные образовательные технологии в мировом учебно-воспитательном пространстве. – 2016. - №10. – С. 72-76.

31. Altshiller-Court N. College Geometry: An Introduction to the Modern Geometry of the Triangle and the Circle. – New York, Dover PublicationsInc, 2007.– 336 p.

32. Boyer C. A History of Mathematics / C. Boyer, U. Merzbach. – Wiley, 2011. – 688 p.

33. Johnson R. Advanced Euclidean Geometry. – New York, Dover Publications Inc, 2007. – 319 p.

34. Libeskind S. Euclidean and Transformational Geometry: A Deductive Inquiry. – Jones & Bartlett Publishers, 2007. – 371 p.

35. Ogilvy S. Excursions in Geometry. – New York, Dover Publications Inc, 1991. – 192 p.