МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Тольяттинский государственный университет»

Институт математики, физики и информационных технологий

Кафедра «Алгебра и геометрия»

Направление подготовки 44.03.05 «Педагогическое образование»

Направленность (профиль) «Математика и информатика»

БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА

на тему **«МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ ЭЛЕМЕНТАМ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ В 5-9 КЛАССАХ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ»**

Студент М.А. Бойкова ____________________

Руководитель к.т.н., доцент Н.А. Сосина ____________________

Консультант к.п.н., А.В. Кириллова ____________________

Допустить к защите

Заведующий кафедрой д.п.н., профессор Р.А. Утеева ______________

«____»__________2017 г.

Тольятти 2017

АННОТАЦИЯ

Целью бакалаврской работы является выявление методических особенностей обучения учащихся элементам теории вероятностей в основной школе, разработка методических рекомендаций по обучению данной теме учащихся 5-9 классов.

В работах, посвященных проблеме формирования математических понятий в школе, она рассматривается преимущественно односторонне, поэтому необходимы дополнительные методические разработки, которые учитывали бы специфику математических упражнений, формирующих соответствующие понятия в школьном курсе алгебры, и при этом сохраняли достаточно высокий общий уровень математического образования.

Бакалаврская работа состоит из введения, двух глав, заключения и списка литературы.

Глава I посвящена целям введения элементов теории вероятностей в школьный курс. Анализируются программы и учебники по теме исследования. Выявляются различные формы, методы и средства обучения элементам теории вероятностей в школьном курсе математики.

В *главе II* составлены методические рекомендации по обучению элементам теории вероятностей, статистики и комбинаторики в 5-9 классах основной школы.

Список литературы содержит 44 наименования.

ABSTRACT

The aim of the bachelor's work is to identify methodological specifics of teaching the elements of the probability theory of the main general education school, to develop methodological recommendations of teaching this topic to students of grades 5-9.

In works devoted to the problem of the formation of mathematical concepts in the school, it is considered primarily one-sided, and therefore additional methodological developments are needed that take into account the specifics of the mathematical exercises that form the corresponding concepts in the school course of algebra, while maintaining a sufficiently high general level of mathematical education.

Bachelor's work consists of an introduction, two chapters, a conclusion and a list of literature.

Chapter I is devoted to the goals of introducing elements of probability theory into the school course. Programs and textbooks on the research topic are analyzed. Various forms, methods and means of teaching elements of probability theory in the school course of mathematics are revealed.

In Chapter II, methodological recommendations of the elements of probability theory, statistics and combinatorics teaching in grades 5-9 of the basic school were compiled.

References contain 44 items.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность исследования. Теория вероятностей играет огромную роль как в науке и прикладной деятельности, так и в повседневной жизни. Как следствие, возникает необходимость включения стохастической линии в школьный курс математики.

В 60-е годы появилось множество методических работ по введению теории вероятности и математической статистики в школьный курс обучения. Однако уже в 70- годы эти темы пришлось полностью исключить из обязательной программы, в виду неподготовленности школы к их восприятию. В 80-х годах отдельные элементы теории вероятности были включены в программы математического образования профильных классов. А в следующее десятилетие элементы теории вероятностей и математической статистики вошли в обязательную программу школьного курса математики.

В последние годы произошли положительные сдвиги в сфере внедрения стохастической линии в рамках школьного образования. Соответствующая содержательная линия вошла в утвержденный стандарт базового и полного среднего образования.

Современная концепция школьного образования ориентирована на учет индивидуальности учащегося, его интересов и склонностей. Этот фактор вызвал изменения в требованиях к математической подготовке ученика, возникла необходимость внедрения интерактивных методик преподавания математики. Развитие у учащихся вероятностной интуиции и статистического мышления стало насущной задачей, так как важно не только обучение математике, но и формирование личности посредством математики.

Федеральные Государственные Образовательные Стандарты основного общего образования [37] ориентированы, прежде всего, на становление личностных характеристик выпускника, владеющего математическими рассуждениями, умениями решать задачи; применяющего математические знания в повседневной жизни. Согласно ФГОС, изучение учащимися алгебры должно отражать: 1) формирование представлений о статистических закономерностях в реальном мире и о различных способах их изучения, о простейших вероятностных моделях; 2) развитие умений извлекать информацию, представленную в таблицах, на диаграммах и графиках, описывать и анализировать массивы числовых данных с помощью статистических характеристик, использовать понимание вероятностных свойств окружающих явлений при принятии решений.

Задачи по теме «Теория вероятностей и статистика» входят в итоговую аттестацию учащихся основной школы: в части первой они встречаются в заданиях № 14,15,18,19.

В теории и методике обучения математики вопросам методики обучения учащихся теме «Теория вероятности и статистика» в курсе алгебры основной школы посвящены исследования таких авторов, как Е.А. Бунимовича, В.А. Булычева [2], Ю.Н. Тюрина [36], И.Р. Высоцкого [7], И.В. Ященко [36], М.В. Ткачевой [32], С.В. Щербатых [39], и др. Также следует отметить, что большой вклад в методику обучения стохастической линии внесли такие иностранные авторы, как Алан Карр [42], Марек Физц [40], Эрик Леман [43], Прасанна Сахо [44], Эдвин Джейнс [41] и др.

Все вышесказанное определяет актуальность темы исследования.

Кроме того, актуальность темы исследования обусловлена сложившимся к настоящему времени *противоречием* между необходимостью обучения учащихся теме «Теория вероятностей и статистика» на уроках алгебры в соответствии с требованиями ФГОС основного общего образования и фактическим состоянием методики ее обучения учащихся в курсе алгебры основной школы.

Проблема исследования состоит в выявлении методических особенностей обучения учащихся теме «Теория вероятностей» в курсе алгебры основной школы.

Объект исследования: процесс обучения математике в основной школе.

Предмет исследования: методические особенности обучения учащихся теме «Теория вероятностей» в курсе алгебры основной школы.

Цель бакалаврской работы: выявить методические особенности обучения учащихся теме «Теория вероятностей» в курсе алгебры основной школы.

Задачи исследования:

1. Раскрыть цели обучения элементам теории вероятностей и математической статистики в школьном курсе алгебры основной школы.
2. Рассмотреть исторические аспекты введения стохастической линии в школьный курс математики.
3. Выполнить анализ статей и учебной литературы, посвященных введению и апробации стохастической линии в школьном курсе математики.
4. Раскрыть методику изучения элементов математической статистики.
5. Представить методику изучения элементов теории вероятностей.
6. Описать методику изучения элементов комбинаторики.

Для решения задач были использованы следующие **методы исследования**: анализ учебно-методической литературы, работ по истории математики, школьных программ, методических пособий, учебников и учебных пособий, изучение опыта работы отечественной школы.

Теоретическая значимость исследования состоит в том, что в нем выявлены методические особенности обучения учащихся теме «Теория вероятностей» в курсе алгебры основной школы.

Практическую значимость результатов исследования составляют методические рекомендации обучения теме «Теория вероятностей» учащихся 5-9-х классов, которые могут быть использованы учителями математики основной школы и студентами педагогических направлений подготовки в ходе педагогической практики.

На защиту выносятся: методические рекомендации по обучению учащихся теме «Теория вероятностей» в курсе алгебры основной школы.

Бакалаврская работа состоит из введения, двух глав, шести параграфов, заключения, списка литературы.

Во введении сформулированы основные характеристики исследования: актуальность, противоречие, проблема, объект, предмет, цель, задачи и методы исследования.

Глава I посвящена теоретическим аспектам обучения учащихся теме «Теория вероятностей» в курсе алгебры основной школы. Рассмотрены цели и исторические аспекты введения стохастической линии в школьный курс математики. Выполнен анализ статей и учебной литературы, посвященных введению и апробации стохастической линии в школьном курсе математики.

В Главе II представлены методические аспекты обучения учащихся теме «Теория вероятностей» в курсе алгебры основной школы. Разработаны методические рекомендации обучения комбинаторике, теории вероятностей и статистике.

В заключении сформулированы основные результаты и выводы проведённого исследования.

Список литературы содержит **44** наименований.

ГЛАВА I.ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОБУЧЕНИЯ ЭЛЕМЕНТАМ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ В 5-9 КЛАССАХ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ

§1. Цели обучения элементам теории вероятностей в курсе математики основной школы

Одним из мотивирующих факторов введения элементов комбинаторики, статистики и теории вероятностей в курс средней школы является их связь с реальными жизненными ситуациями.

Вероятностный характер каких-либо событий и явлений во многом определяет поведение человека, следовательно, возникает необходимость формирования соответствующих практических ориентиров, а также развития у учащихся, как общей вероятностной интуицией, так и конкретными способами оценки данных. Учащимся необходимо уметь извлекать, анализировать и обрабатывать разнообразную, а иногда противоречивую информацию, принимать обоснованные решения в ситуациях со случайными исходами, оценивать шансы на успех и степень риска. Необходимость формирования вероятностного мышления у учащихся обусловлена и тем, что весь комплекс социально-экономических наук развивается на вероятностно-статистической основе. Изучение вероятностно – статистической линии благоприятно влияет на развитие интеллектуальных способностей учащихся, способствует развитию интереса к предмету, а также усиливает прикладной аспект курса математики [34, С.3**]**.

Основной целью обучения стохастической линии в 5-9 классах средней школы является развитие стохастического мышления и повышении уровня математической культуры у учащихся, а также формирование представлений об элементах комбинаторики, статистики и теории вероятностей как средства описания процессов и явлений реального мира.

Значимость обучения стохастической линии определяется обширным внедрением прикладной математики в различные сферы деятельности человека. Методы и результаты стохастики используются не только в естественных и технических науках, но и в таких науках, как экономика, демография, социология, археология, лингвистика, и многих других. В настоящее время, без верных представлений о случайных событиях и их вероятностях невозможна продуктивная деятельность человека в какой-либо сфере жизни [29, С.120].

Установление учащимися, под компетентным руководством учителя, разносторонних связей стохастики с различными науками, такими как естествознание, а также с техническими и гуманитарными дисциплинами, является одним из средств достижения поставленной цели [1, С. 13].

Введение элементов стохастической линии в курс математики является одним из важнейших аспектов модернизации содержания образования, так как роль вероятностно - статистических знаний и навыков в современном мире повышается [35,С. 26].

Без применения теории вероятности – основы стохастической линии - сегодня не мыслится принятие любого сколь - либо значимого решения по самым разнообразным проблемам в социокультурной и научно-производственной сферах [34, С. 6].

§2. Из истории введения стохастической линии в школьный курс математики

Начиная с первой половины XIX века, в России было сделано несколько попыток введения элементов теории вероятностей в школьный курс математики. Элементы стохастики периодически на короткий срок вводились в школьный курс математики. Появлялись даже учебники, содержащие элементы теории вероятностей и статистики. В Санкт-Петербурге был издан первый в России учебник по теории вероятностей "Основы математической теории вероятностей" в 1846 году В.Я. Буняковским[4]. В 1902г. для средних учебных заведений была опубликована программа теории вероятностей, составленная П.С. Флоровым, а в 1907 г. -

разработанная Брандтом. На съездах директоров и попечительских советов коммерческих училищ, состоявшихся в 1901-1902 гг., было предложено ввести преподавание политической арифметики, куда должны были войти теория сложных процентов, теория соединений и теория вероятностей [38, С. 157].

Попытки введения элементов статистики и теории вероятностей в школьную математику предпринимались в России и после революции 1917 года - создается единая трудовая школа с тремя ступенями образования, объединенными единой программой. Третья ступень предполагала разделение на три направления: гуманитарное, естественно-математическое, техническое. Программа технического направления содержала разделы основ теории вероятностей (сумма и произведение вероятностей, математическое ожидание). На двух других направлениях также изучались основы теории вероятностей, но большее внимание уделялось обработке статистических данных.

В 1925 г. элементы теории вероятностей были включены для школ II ступени в учебник "Арифметика" в качестве эксперимента, но впоследствии, в течение длительного периода в средних школах изучались лишь элементы комбинаторики [37, С. 65].

Попытка ввести элементы теории вероятностей в период реформ 60-70 гг. на формально-логическом уровне, также не удалась. Материал оказался сложным для восприятия учащимися, методика подачи материала была не отработана и не способствовала развитию логического мышления и вероятностной интуиции учащихся.

Вопрос о совершенствовании математического образования в отечественной школе был поставлен в начале 60-х годов XX века выдающимися математиками А.Н. Колмогоровым, И.И. Кикоиным, А.И. Маркушевичем, Б.В. Гнеденко, А.Я. Хинчиным. Б.В. Гнеденко писал: «Давно назрел и не терпит дальнейших отлагательств вопрос о введении в школьный курс математики элементов вероятностно-статистических знаний. Законы жёсткой детерминации, на изучение которых целиком ориентировано школьное образование, лишь односторонне раскрывают сущность окружающего мира. Случайный характер многих событий и явлений действительности оказывается за пределами внимания наших школьников. В результате этого их представления о характере многих природных и общественных процессов носят односторонний характер и неадекватны современной науке. Необходимо познакомить учащихся со статистическими законами, раскрывающими многогранные связи бытия предметов и явлений».

В 80-х годах, благодаря реформам школьного образования элементы теории вероятностей и статистики вошли в программы профильных классов, в частности, физико-математического и естественнонаучного, а также в качестве факультативного курса изучения математики. В этот период появляются авторские разработки факультативных курсов по теории вероятностей.

Введение элементов теории вероятностей в обязательный курс школьной математики.

Первые попытки ввести элементы вероятности в школьные учебники средней школы осуществляются в 1990-е. Первый учебник, целиком посвященный теории вероятностей, создают Е.А. Бунимович и В.А. Булычев[2]. Однако изложение вероятностно-статистического материала в них, не носит систематического характера, а учителя, чаще всего, не обращаются к этим разделам, не включают их в учебный план.

В 2003 г. было принято решение о включении элементов теории вероятностей и статистики в школьный курс математики общеобразовательной школы . Принятый Министерством образования в 2003 г. документ предусматривал постепенное, поэтапное включение этих разделов в школьные курсы, давая возможность преподавательскому сообществу подготовиться к соответствующим изменениям [3, С. 8].

В 2004–2008 гг. выходит ряд учебных пособий, дополняющих существующие учебники алгебры. Авторы учебных и методических пособий Тюрин Ю.Н. [36], Горлач Б.А. [10], Макарычев Ю.Н. [22], Ткачева М.В. [32], и др.

В 2007 году теория вероятностей становится обязательным элементом в школах. В соответствии с государственными стандартами общего образования первого поколения с 2010 года задания стохастической линии включены в контрольные измерительные материалы по математике.

В 2015 года решением федерального учебно-методического объединения по общему образованию принята «Примерная основная образовательная программа основного общего образования» [28].

В настоящее время теория вероятностей завоевала очень серьезное место в науке и прикладной деятельности. Её идеи, методы и результаты пронизывают все естественные и технические науки, экономику, планирование, связи, организацию производства, а также лингвистику, социологию, психологию. На сегодняшний день продуктивная деятельность людей невозможна ни в одной сфере жизни общества без достаточно развитых представлений о случайных событиях и их вероятностях, без верного представления о том, что явления и процессы, с которыми мы часто имеем дело, подчиняются сложным законам теории вероятностей.

§3. Анализ статей и учебной литературы, посвященных введению и апробации стохастической линии в школьном курсе математики

В настоящее время существуют проблемы с реализацией вероятностно - статистического материала в школьных учебниках, так как эта линия была введена в школьный курс математики относительно недавно. Проанализировав реализации стохастической линии, предлагаемой авторами различных учебников и учебных пособий, можно сделать вывод, что концепции этой линии значительно отличаются. Каждый автор имеет различный подход к изучению элементов стохастической линии. В одних учебных комплектах приоритетное внимание уделяется вероятностным понятиям, в других – статистическим, в третьих – понятия рассматриваются отдельно.

Подробный анализ учебной и методической литературы приводится в статье *И. Баландиной, «Стохастическая линия в средней школе: начнем с анализа»* И. Баландина отмечает, к реализации нового содержания в действующих учебниках авторы подошли по-разному. Некоторые из авторов элементы стохастики включили в учебники, заключив материал в отдельные параграфы. Другие авторы поместили новое содержание в дополнительные главы к учебникам, оформив материал в виде вкладышей [1, С. 15].

Рассмотрим построение вероятностно-статистической линии в некоторых учебных комплектах и в учебных пособиях для базовой школы.

Комплект учебников: «Математика, 5» [15], *«Математика, 6» под редакцией Г.В. Дорофеева, И.В. Шарыгина* [16]; *«Алгебра, 7»* [12] *«Алгебра, 8»* [13] *и «Алгебра, 9»* [14] *под редакцией Г.В. Дорофеева.*

В учебном комплекте *«Математика, 5»* под редакцией Г.В. Дорофеева, И.В. Шарыгина построение стохастической линии начинается с элементов комбинаторики. Предлагаются простые примеры и задачи на подсчет числа вариантов, для иллюстрации решения используется дерево возможных вариантов. Далее автор вводит понятие *«Случайное событие»*. С помощью примеров из жизни, из случайных событий выделяются *достоверные, невозможные и равновероятные события.* В последней главе учебника авторы обращаются к элементам статистики, где учащиеся осваивают построение, чтение и анализ таблиц. Кроме того, рассматривается построение столбчатых диаграмм.

В учебнике *«Математика, 6»* под редакцией Г.В. Дорофеева авторы повторяют тему «Таблицы и диаграммы», знакомят учащихся с круговыми диаграммами. Элементам комбинаторики в данном учебном комплекте отводится два параграфа: логика перебора и правило умножения.

Рассматривается метод кодирования. Определение вероятности события вводится в последней главе учебника через понятие относительной частоты.

В учебном комплекте *«Алгебра, 7»* под редакцией Г.В. Дорофеева на основе примеров из различных жизненных ситуаций вводятся основные статистические характеристики: среднее значение, мода, размах. В учебнике рассматриваются элементы комбинаторики; задачи на вычисление частоты наступления события, а также простейшие задачи на вычисление вероятности симметрического события.

В учебнике *«Алгебра, 8»* под редакцией Г.В. Дорофеева вводится еще одна статистическая характеристика - медиана; вводится классическое определение «вероятности случайного события».

В учебнике *«Алгебра, 9»* под редакцией Г.В. Дорофеева авторы возвращаются к элементам статистики. Вводятся такие понятия, как генеральная совокупность, выборка, репрезентативная выборка, объем выборки, ранжирование. Рассматривается еще один способ графического представления результатов — полигоны. Добавляются новые статистические характеристики: выборочная дисперсия и среднеквадратическое отклонение.

В заключение анализа данного комплекта, можно отметить, что в отличие от других комплектов учебников, стохастическая линия выстраивается с 5 по 9 класс. Авторы большей части учебной литературы, обращаются к элементам стохастической линии, лишь с 7 класса. Кроме того, в каждом классе в учебный комплект входят: учебник, рабочая тетрадь, дидактические материалы, методические пособия для учителя.

Комплект учебников: «Математика, 5» [17], *«Математика,6»* [18] *авторы И.И. Зубарева, А.Г. Мордкович.*

В учебнике «Математика, 5» в последней главе рассматриваются элементы теории вероятностей - случайные события (достоверные, невозможные); элементы комбинаторики.

В учебнике «Математика, 6» вводится классическое определение вероятности, но при этом не рассматривается понятие частоты.

И. Баландина [1] отмечает, что подборка задач из раздела комбинаторики в учебнике не совсем удачная, кроме того, решение комбинаторных задач осуществляется только методом перебора. Изучение материала по комбинаторике на начальной стадии лучше проводить на простых примерах, имеющих наглядную основу. Один из недостатков рассматриваемого учебного комплекта – отсутствие частотного определения вероятности.

Учебное пособие «Алгебра: элементы статистики и теории вероятностей» авторы Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк под редакцией С.А. Теляковского [22] предназначено для учащихся 7–9-х классов. Изложение стохастического материала в учебном пособии начинается в *7-м* классе с элементов статистики: среднее арифметическое, мода, размах. Далее рассматривается построение, анализ таблиц, диаграмм. В *8-м* классе рассматриваются полигоны и гистограммы. Вводятся новые понятия: генеральная совокупность, выборка, объем выборки, репрезентативность. В *9-м* классе рассматриваются элементы комбинаторики и начальные сведения из теории вероятностей. Комбинаторные задачи в данном пособии решаются методом перебора; вводятся следующие понятия: перестановки, размещения, сочетания. Классическое определение вероятности вводится на основе примеров, в которых рассматривается понятие относительная частота и введено понятие статистическая вероятность. Данное учебное пособие имеет дифференцированный подход в обучении, в пособие присутствуют задания различного уровня сложности.

По мнению И. Баландиной, для того чтобы у учащихся сформировать начальные стохастические представления, элементы теории вероятностей и комбинаторику необходимо изучать на много раньше, чем предлагают авторы учебного пособия [1].

Методические рекомендации к учебнику даны в статьях Ю.Н. Макарычева и Н.Г. Миндюк [23]. В статье В.Н. Студенецкой и О.М. Фадеевой [30] анализируется содержание рассматриваемого учебника, предлагаются некоторые рекомендации, цель которых помочь учителю разобраться в материале и изложить, не допустив ошибок.

В методическом пособии М.В. Ткачевой «Элементы статистики и вероятность» [32] сначала вводится классическое определение вероятности события, далее вводится понятие относительной частоты. Введению в комбинаторику начинается в 1-й главе 7-го класса. Во 2-й главе 8-го класса вводятся элементы теории вероятностей: случайные события, вероятность события, относительная частота. В 3-ей главе 9-го класса изучаются дискретные и непрерывные случайные величины, а также элементы статистики: таблицы распределения случайной величины, генеральная совокупность и выборка, мода, медиана, размах.

По мнению И. Баландиной [1], данное пособие имеет некоторые недостатки. Авторы пособия элементы статистики излагают по завершению материала: сначала рассматривается классическое определение вероятности и только после этого вводится понятие частоты. Статистические характеристики необходимые для обработки статистических данных содержатся в конце учебника.

Также методические рекомендации к первой главе данного учебного пособия можно найти в статье М.В. Ткачевой [32].

В методическом пособии А.Г. Мордковича, П.В.Семенова «События, вероятности. Статистическая обработка данных» [26] изложение материала начинается с комбинаторики. Комбинаторные задачи решаются при помощи таблиц и деревьев возможных вариантов. На примерах вводится понятие сочетания, также объясняется формула для вычисления числа сочетаний. Классическое определение вероятности в данном пособии предшествует введению элементов статистики. В пособии рассматривается схема Бернулли.

Некоторые замечания к содержанию данного пособия излагаются в статье В.М. Студенецкой и О.М. Фадеевой [30].

Понятие вероятность довольно удачно вводится в учебном пособии *«Вероятность и статистика» авторы Е.А. Бунимович, В.А. Булычев* [2].

Начинается пособие с рассмотрения случайных событий и сравнения вероятности их наступления. Затем, с помощью эксперимента рассматривается понятие частоты, анализируются таблицы частот и строятся гистограммы. Статистическое определение вероятности предшествует классическому определению.

Пункт «Вероятность и комбинаторика» содержит правила умножения, вычитания, сочетания и число сочетаний, которые применяются при вычислении вероятности. В пункте «Точка тоже бывает случайной» рассматривается геометрическое определение вероятности. В последнем пункте рассматриваются вопросы статистического оценивания и прогнозирования. Последний пункт имеет практическое значение, содержит ряд интересных задач, непосредственно связанных с реальной жизнью.

Учебное пособие Ю.Н.Тюрина, А.А. Макарова «Теория вероятностей и статистика» [36] предназначено для учащихся 7–9-х классов. Большой акцент уделяется чтению, построению и анализу таблиц и диаграмм. Рассматриваются столбчатая, круговая диаграммы, а также диаграмма рассеивания. Вводятся основные статистические характеристики: мода, медиана, размах, среднее, дисперсия. После определения вероятности вводится частота события. Далее, рассматриваются элементарные события: равновозможные и противоположные. Рассматриваются теоремы сложения и умножения вероятностей. Вводятся элементы комбинаторики, формулы числа перестановок и числа сочетаний.

Анализу имеющейся учебной литературы, содержащей элементы стохастики, посвящена статья *А.Д. Нахмана*, вышедшая в 2013г. , *Стохастическая линия как инновационная содержательно-методическая линия в курсе математики*[27]. По результатам анализа учебного материала различных авторов, автор статьи делает вывод, что наилучшим образом раздел математики под названием «Статистика» представлен в учебниках 5-9 классов под редакцией Дорофеева Г.В., в котором наиболее подробно рассматриваются новые термины, а статистические понятия вводятся уже с 5 класса. Упомянутые книги написаны с постоянной опорой на здравый смысл и на жизненный опыт учащихся. В них предусмотрена разнообразная практическая деятельность читателя. Учащиеся учатся оценивать вероятность наступления несложных случайных событий сначала на качественном уровне, а количественные подсчеты вероятностей происходит позднее [27].

Выводы по первой главе

Сформулируем основные выводы и полученные результаты по первой главе:

1. Анализ цели введения стохастической линии показал, что в связи с переходом на рыночную экономику и изменением социально-экономической ситуации в стране, возникла необходимость в специалистах, умеющих работать с современными технологиями в динамично изменяющихся внешних условиях при воздействии случайных факторов, умеющих оценивать ситуацию и оперативно принимать обоснованные решения в ситуациях неопределенности. В результате изменился социальный заказ учебным заведениям. Следствием этих изменений стало принятие новых федеральных государственных образовательных стандартов, определяющих направления подготовки школьников к жизни в современных социально-экономических условиях. Существенные изменения произошли в математическом образовании, возросла потребность в обучении теории вероятностей, математической статистике, к теории случайных процессов и к применению вероятностно-статистических методов.

2. Анализ истории введения стохастической линии в школьный курс математики показал, что первые попытки ввести элементы вероятности в

школьные учебники средней школы были осуществлены в 90-е годы, когда за авторскими разработками факультативных курсов по теории вероятностей, последовал выход первого учебника, целиком посвященного теории вероятностей [2]. Но изложение вероятностно-статистического материала в имеющейся на тот момент литературе, не носило систематического характера и не предусматривалось учебным планом. Только в 2003 г. было принято решение о включении элементов теории вероятностей и статистики в школьный курс математики общеобразовательной школы, а в апреле 2015 года была принята Примерная основная образовательная программа основного общего образования [28]. Согласно этой программе учащиеся в процессе обучения должны научиться извлекать, интерпретировать и преобразовывать информацию, представленную в таблицах и на диаграммах, отражающую свойства и характеристики реальных процессов и явлений; учащиеся должны иметь представление о статистических характеристиках, вероятности случайного события, комбинаторных задачах, о роли закона больших чисел в массовых явлениях, о роли практически достоверных и маловероятных событий.

3. Анализ статей и учебной литературы, посвященных введению и апробации стохастической линии в школьном курсе математики показал, что поскольку вероятностно-статистическая линия была введена в школьный курс математики сравнительно недавно, то в настоящее время еще существуют проблемы с реализацией этого материала в школьных учебниках. Проведенный анализ реализации стохастической линии, предлагаемой авторами различных учебников и учебных пособий, демонстрирует, что концепции этой линии значительно отличаются. Авторы разных учебных пособий по-разному подходят к изучению составляющих стохастической линии. В одних учебниках на первый план выдвигаются вероятностные понятия, в других – статистические, в третьих – все понятия рассматриваются отдельно.

ГЛАВА II. МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ОБУЧЕНИЯ УЧАЩИХСЯ ЭЛЕМЕНТАМ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ В 5-9 КЛАССАХ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ

§4. Методика изучения элементов математической статистики

Методика изучения статистики в 5- 6 классах

Согласно Примерной основной образовательной программе основного общего образования учащиеся в 5-6 классах по теме «Математическая статистика» научатся *на базовом уровне* [28, С. 79]:

- представлять данные в виде таблиц, диаграмм;
- читать информацию, представленную в виде таблицы, диаграммы;

на базовом и углубленном уровне [28, С. 82]*:*

- оперировать понятиями: таблицы данных, столбчатые и круговые диаграммы, среднее арифметическое;
- извлекать, информацию, представленную в таблицах, на диаграммах;
- строить диаграммы на основе данных, составлять таблицы;
- извлекать, интерпретировать и преобразовывать информацию, представленную в таблицах и на диаграммах, отражающую свойства и характеристики реальных процессов и явлений;

В базовом курсе математики основной школы вероятностно-статистическая линия в существующих учебниках раскрывается по-разному. Хороший анализ учебной литературы по теме статистика представлен в статье Т. А. Долматовой, О. С. Истифиной «Методический анализ изучения элементов статистики в курсе математики основной школы»[11].

В 5 классе по учебнику «Математика» Виленкина Н.Я. [5] на изучение круговых диаграмм отводится всего 2 часа, в учебниках Зубаревой И.И., Мордковича А.Г. [17] изучается только введение в теорию вероятности. В учебнике по математике для 5 класса Дорофеева Г.В. [15], напротив, разделу статистики выделен целый параграф под названием «Таблицы и диаграммы» и отводится на изучение материала 3 часа. При изучении данного параграфа школьникам предоставляется возможность не только научиться считывать таблицы, и составлять таблицы и диаграммы. Отводится время на закрепление материала.

Таким образом, в 5 классе элементы статистики более подробно рассмотрены в учебнике «Математика» под редакцией Дорофеева Г.В и Шарыгина И.Ф. [15].

В 6 классе по учебнику Виленкина Н.Я. [6] на элементы статистики отводится 2 часа в темах «Столбчатые диаграммы» и «Графики», в учебнике под редакцией Мордковича А.Г. [18] изучаются только элементы теории вероятности. В учебнике под редакцией Дорофеева Г.В. закрепляется тема круговых и столбчатых диаграмм [16].

Методика изучения темы «Таблицы и диаграммы»

В *5 классе* желательно начать изучение стохастической линии с рассмотрения таблиц. Внимание учащихся необходимо обратить на то, что когда сведений очень много, их нужно упорядочивать. *Таблица* – самый простой способ упорядочить данные. Таблицами являются: страницы школьного дневника, расписание уроков, оглавление учебника. Таблицы позволяют облегчить поиск необходимой информации.

Тема урока «Таблицы»

Цели урока:

– сформировать умения и навыки работы с таблицей: научить учащихся извлекать информацию из таблиц, анализировать полученную информацию.

– выработать умения строить таблицы, заполнять в таблице пустые графы (строки, столбцы).

– воспитать усидчивость, терпение.

Учитель в начале урока предлагает ученикам небольшую игру: классу предлагается разделить на 2 команды и каждая команда получает текст задачи, изложенный на карточке. Побеждает та команда, которая первой справится с заданием. Игра заключается в том, что для одной команды на карточке изложен текст задачи, для другой команды текст задачи представлен в виде таблицы.

Задача для 1-ой команды

Володя опросил своих одноклассников и выяснил, какое количество времени в день каждый из одноклассников проводит перед компьютером. Оказалось, что четырем одноклассникам Володи родители не разрешают пользоваться компьютером. Пятеро одноклассников проводят за компьютером не более часа в день, шесть одноклассников - два часа; три ученика из класса Володи проводят за компьютером три часа в день, остальные же 2 проводят за компьютером четыре часа в день и более. По полученным сведениям подготовьте ответы на следующие вопросы:

1. Какое количество учеников в классе Володи?
2. Сколько одноклассников Володи проводят у компьютера 2 часа в день?
3. Сколько одноклассников Володи проводят у компьютера менее 2 часов?
4. Сколько одноклассников Володи проводят у компьютера более 2 часов?

Задача для 2-ой команды

Формулировка задачи для второй команды: Володя провел опрос среди учеников своего класса с целью выяснить, сколько времени в день они проводят за компьютером. Полученные результаты он представил в виде Таблицы 1:

Таблица 1

Результаты опроса одноклассников

Количество часов, проводимых одноклассниками у компьютера	0	1	2	3	Более 3
Число одноклассников	4	5	6	3	2

Воспользуйтесь сведениями из таблицы и ответьте на вопросы:

1. Какое количество учеников в классе Володи?
2. Сколько одноклассников Володи проводят у компьютера 2 часа в день?

3. Сколько одноклассников Володи проводят у компьютера 2 часа и меньше?

4. Сколько одноклассников Володи проводят у компьютера 2 часа и больше?

В ходе игры учащиеся должны заметить, что использование таблиц позволяет найти решение на много быстрее, чем использование текстового условия. Таким образом, структурирование данных значительно повышает эффективность и скорость при решении задач.

За тем учащимся можно предложить вспомнить, с какими таблицами учащиеся встречались раньше (таблицы сложения и умножения чисел, таблицы спряжения глаголов, график дежурства, страницы дневника).

Необходимо проанализировать с учащимися простейшие таблицы, показать, что таблицы очень часто встречаются в повседневной жизни (календари, меню в столовой, график работы магазина и т.д.), поэтому необходимо уметь пользоваться таблицами, а также самим уметь классифицировать материал и заносить в таблицы. Пояснить, что таблицы содержат строки и столбцы, а строки и столбцы могут иметь свои названия. Предложить учащимся привести свои примеры таблиц.

Для формирования у учащихся умения извлекать и анализировать информацию, представленную в таблице, можно рассмотреть следующие задачи.

Задача № 2. Результаты наблюдения за погодой в течение пяти месяцев представлены в Таблице 2.

Таблица 2

Результаты наблюдения за погодой в течение пяти месяцев

Погода	Месяцы					Всего
	Ноябрь	Декабрь	Январь	Февраль	Март	
Пасмурно	8	6	12	9	8	
Переменная облачность	12	17	8	14	12	
Ясно	10	8	11	5	11	

Необходимо заполнить последний столбец.

По данным, занесенным в таблицу 2, требуется ответить на вопросы:

1. Определить месяцы, в которых одинаковое количество ясных дней?
2. Определить месяц, содержащий больше всего пасмурных дней?
3. Определить количество ясных дней за пять месяцев?
4. Определить количество ясных дней за всю зиму?
5. Каких дней ясных или пасмурных было больше в ноябре?

В результате учащиеся получают навыки работы со строками и со столбцами, учатся суммировать данные таблицы.

В 6 классах рассматриваются задачи непосредственно направленные на работу с таблицами, формируются умения представлять необходимую информацию в виде таблицы. От чтения таблиц учащиеся должны перейти к заполнению таблиц.

В качестве домашнего задания учащимся можно предложить составить анкету, в которую можно включить самые разнообразные вопросы: ваши любимые фильмы, игры, конфеты, количественный состав семьи, какое количество времени тратят ученики вашего класса на выполнение домашней работы, сколько дней рождения одноклассников или друзей в каждом месяце года и т.д. Анкету оформить в виде таблицы и опросив друзей, членов семьи или одноклассников, результаты опроса занести в составленную таблицу.

Формированию умений представлять необходимую информацию в виде таблицы может способствовать решение следующих задач.

Задача №3. Вожатый в конце смены спросил, сколько книг члены его отряда прочитали за смену. Вася прочитал 1 книгу, а Таня – в 3 раза больше. Настя прочитал 6 книг; Сережа не прочитал ни одной книги за смену; Аня прочитала на две книги больше, чем Вася; Света и Катя прочитали одинаковое количество книг, при этом каждая из них прочитала в два раза больше, чем Марина; а Марина прочитала на одну книгу меньше, чем Таня. Постройте таблицу, занесите в таблицу количество прочитанных книг каждым из учеников.

Задача № 4. Четыре студента Петров, Иванов, Сидоров и Быстров на время летних каникул устроились работать разносчиками пиццы. Хозяйка пиццерии пообещала выплатить в конце августа хорошую премию тому из студентов, которому удастся разнести большее количество выпечки. В конце сезона у хозяйки пиццерии были следующие данные: студент Петров в июне развез 270 пицц, а за два оставшихся месяца он развез пицц в полтора раза больше, чем за первый месяц. Иванов в июне развез пицц в два раза меньше, чем в августе, в то же время в августе он развез на 20 пицц больше, чем Петров в том же месяце и на 10 меньше, чем Сидоров в июле. В июле Иванов развез 300 пицц. Сидоров в июне развез 230 пицц, а в июле на 30 больше, в августе Сидоров развез столько же пицц, сколько разве в этом же месяце Петров. Быстров каждый месяц развозил ровно столько пицц, сколько развез пицц Петров в августе. Кто из студентов получит премию от хозяйки пиццерии?

Решение подобных заданий с помощью таблиц позволит учащимся анализировать условие задачи, строить таблицы и выполнять несложные арифметические действия, а также заметить, насколько удобнее работать с таблицей, чем с громоздким текстом.

В дальнейшем следует увеличивать трудность заданий. Можно предложить для анализа и построения более сложные таблицы.

В таблицу включен столбик или строка «Всего» или «Итого», которые содержат сумму, так как в таблице для анализа информации необходимо просуммировать содержащиеся в ней данные.

Можно рассмотреть турнирные таблицы, в которых записывается ход соревнования и его результаты.

Задача №5. Итоги шахматного турнира с четырьмя участниками представлены в турнирной Таблице 3:

Таблица 3

Итоги шахматного турнира

№	Фамилия	1	2	3	4	Очки	Место
1	Серегин В..		0	0	2		
2	Орлов А.	2		1	2		
3	Иванов Е.	2	1		0		
4	Ежов Т.	0	0	2			

Победитель партии получает 2 очка, проигравший – 0, ничья оценивается в один бал.

По таблице 3 могут быть заданы следующие вопросы:

1. Какое количество партий сыграл каждый участник?
2. С каким счетом сыграл Иванов с каждым из участников?
3. Посчитав, сколько очков набрал каждый участник, заполнить столбец «Очки».
4. Определить, как распределились места между участниками, заполнить столбец «Место».

Методика изучения темы «Диаграммы»

Когда сведений очень много, их нужно упорядочивать. Таблица - самый простой способ упорядочить данные. Таблицы облегчают поиск необходимых сведений, не заставляя изучать всю имеющуюся информацию. Однако таблицы не дают наглядного представления о соотношении величин. Для этого служат различные диаграммы: столбиковые, круговые, рассеивания и др. Диаграммы используются для наглядного, запоминающегося изображения и сопоставления данных.

Тема урока «Диаграммы»

Цели урока:

– ввести понятие «диаграмма», продемонстрировать различные виды диаграмм;

– научить читать и строить диаграммы.

На практике гораздо чаще приходится сталкиваться с таблицами, с диаграммами в повседневной жизни встречаются на много реже. Диаграмма для учеников пятого класса совершенно новое понятие, которое необходимо объяснить на конкретных примерах. Можно рассмотреть следующую задачу.

Задача №1. Среди учеников пятых классов проведен опрос по теме «Любимое время года». Результаты опроса занесены в Таблицу 4. По этой таблице можно составить диаграмму (Рис. 1):

Таблица 4

Результаты опроса учеников пятых классов

Время года	Количество человек
Лето	13
Весна	5
Зима	5
Осень	8

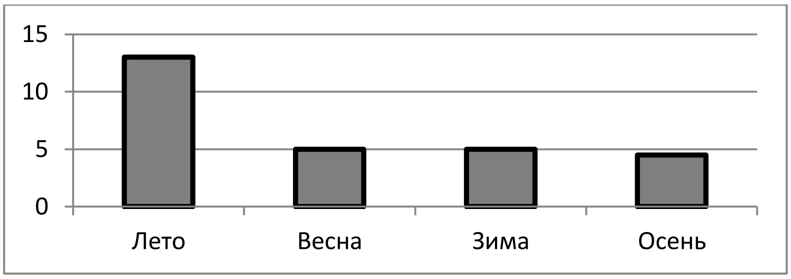

Рис. 1. Диаграмма с результатами опроса учеников пятых классов.

Учащимся можно предложить сравнить таблицу и диаграмму.

1. Как вы думаете, с помощью таблицы или диаграммы удобнее проводить сравнение данных?

2. В каком виде представление информации для вас наиболее понятно – в форме таблицы или в форме диаграммы?

3. Встречались ли вы раньше с диаграммами. Где используются диаграммы?

4. Определим понятие «Диаграмма» - изображение количественного соотношения каких-либо величин в наглядном виде.

5. Существуют различные виды диаграмм. Название диаграммы зависит от того, какая геометрическая фигура используется для представления информации. Диаграмма может быть линейной, круговой, столбиковой, конусной, цилиндрической и т. д. На рисунке 1 представлена столбиковая диаграмма

Приведем другие примеры диаграмм.

Задача №2. Известно распределение доходов в одной из семей, состоящей из трех человек. По данным построены две диаграммы (Рис. 2,

Рис.3). Рассмотрим рисунки 2 и 3. На рисунках 2 и 3 одна и та же информация о распределении расходов 3 человек в месяц дана в виде *гистограммы*.

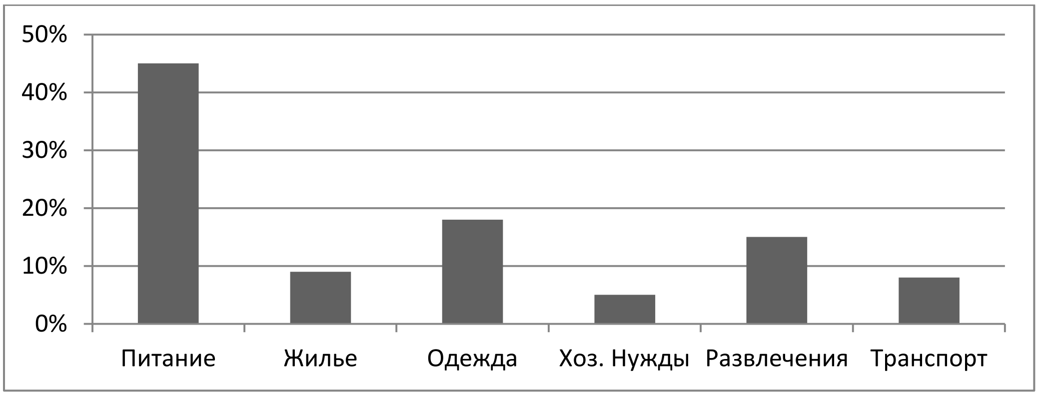

Рис. 2. Диаграмма 1 о распределении расходов 3 человек в месяц.

Учащимся можно предложить ответить на вопросы:

1. Расскажите, какая информация на этих диаграммах расположена горизонтально? А вертикально?
2. С помощью, каких фигур демонстрируется информация о расходах на диаграмме?
3. На каком из рисунков диаграмма удобнее для чтения?

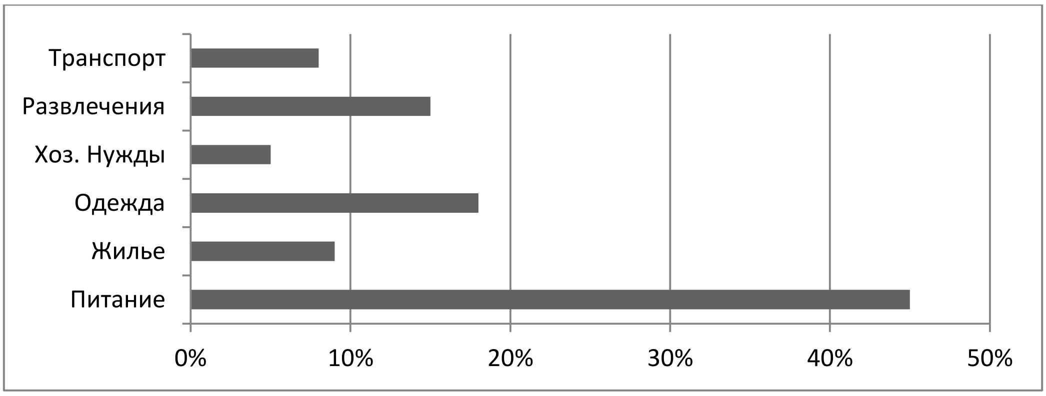

Рис. 3. Диаграмма 2 о распределении расходов 3 человек в месяц.

Для построения диаграмм можно использовать разные геометрические фигуры. Например, информацию о доходах семьи, состоящей из трех человек, и представленную в таблице и на рисунках 2 и 3. Можно представить диаграмму в виде конусов (Рис. 4) - *конусная диаграмма*.

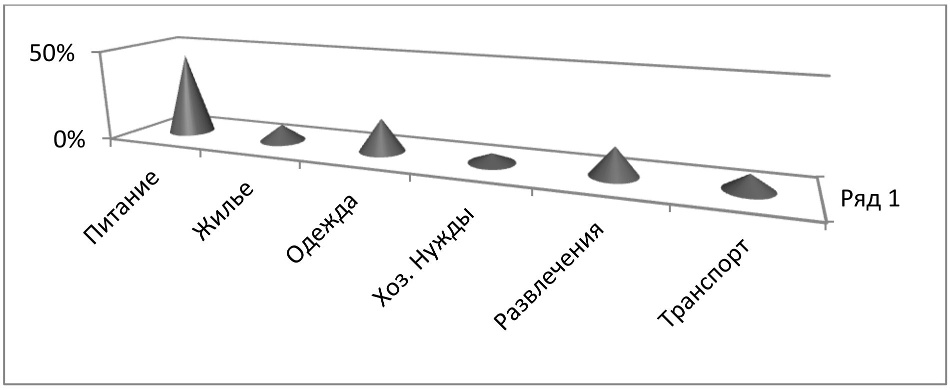

Рис. 4. Конусная диаграмма о распределении расходов 3 человек в месяц.

Можно представить в виде цилиндров - *цилиндрическая диаграмма* (Рис.5).

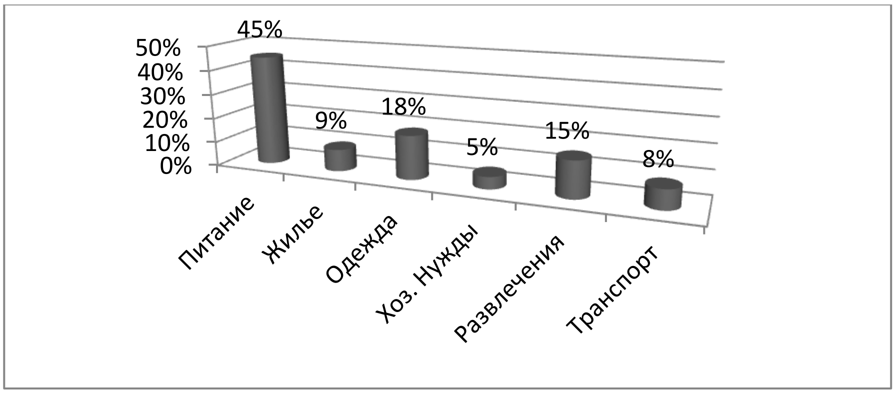

Рис. 5. Цилиндрическая диаграмма о распределении расходов 3 человек в месяц

Можно представить в виде долей круга, где каждая часть круга это доля определенного вида расхода - *круговая диаграмма* (Рис.6).

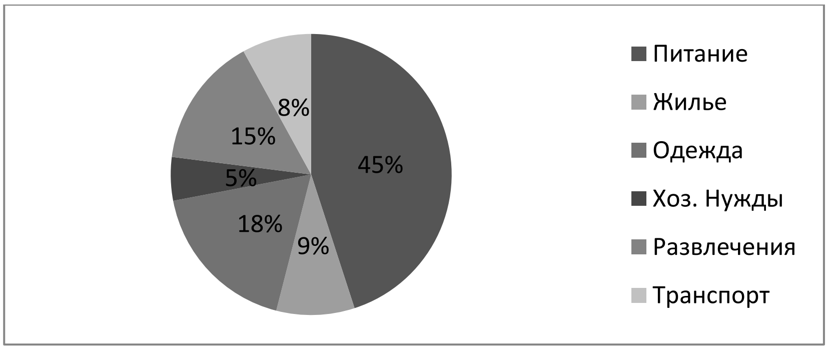

Рис. 6. Круговая диаграмма о распределении расходов 3 человек в месяц

Можно закрепить умение читать диаграммы с помощью следующей задачи.

Задача №3. Ученикам предлагается ответить на вопросы, используя данные диаграммы (Рис. 7)

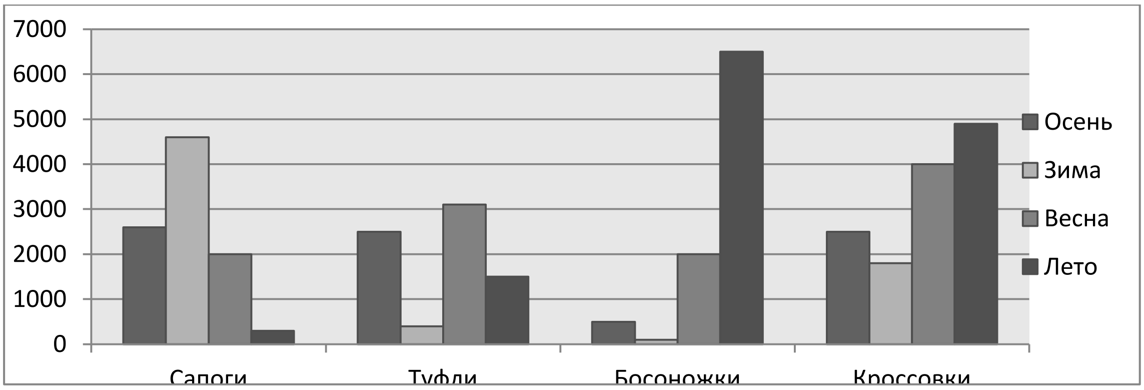

Рис. 7. Диаграмма продажи товаров в разные времена года.

Вопросы к диаграмме:

1. Наиболее продаваемый вид товара летом (весной, осенью, зимой)…
2. В какое время года лучше всего продаются туфли (сапоги, босоножки, кроссовки)?
3. В какое время года хуже всего продаются туфли (сапоги, босоножки, кроссовки)?
4. Какой вид обуви лучше всего продается летом (весной, осенью, зимой)?
5. Какой товар имеет спрос во все времена года?
6. Что лучше продается осенью – сапоги или босоножки?
7. Во сколько раз кроссовки продаются весной лучше, чем босоножки?
8. Какие товары одинаково продается весной?

Задача №4. Ученикам предлагается ответить на вопросы, используя данные диаграммы (рис. 8).

Рис. 8. Диаграмма содержания белков в продуктах.

1. Верно ли утверждение, что в яблоках содержится наименьшее количество белков?

2. Расположите продукты в порядке увеличения в них белков.

3. Какой продукт на первом месте по содержанию белков?

4. Какой продукт на последнем месте по содержанию белков?

5. На сколько в картофеле белков больше, чем в мёде?

6. На сколько в сметане белков меньше, чем в рисе?

Задача №5.. Ученикам предлагается ответить на вопросы, используя данные диаграммы (Рис. 9).

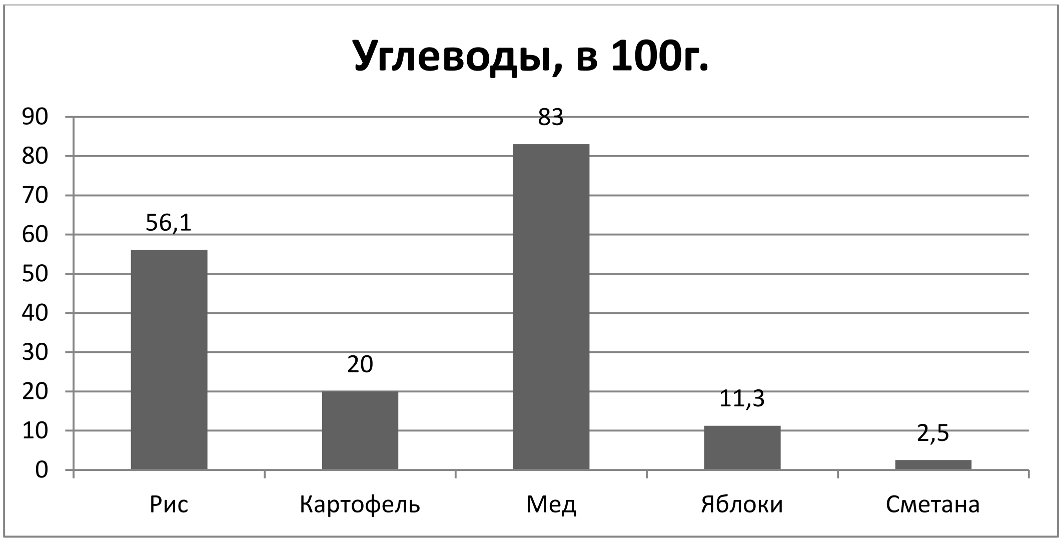

Рис. 9. Диаграмма содержания углеводов в продуктах.

1. Верно ли утверждение, что среди данных продуктов, рис является основным источником углеводов?

2. В каком продукте содержится наибольшее количество углеводов?

3. В каком продукте содержится наименьшее количество углеводов?

4. На сколько в яблоках содержится углеводов больше, чем в сметане?

5. На сколько в рисе содержится углеводов меньше, чем в мёде?

6. Какой продукт по количеству углеводов находится на втором месте?

В заключение урока можно задать вопросы учащимся

1. Приведите примеры диаграмм.

2. Более наглядной и удобной формой для прочтения информации являются таблицы или диаграммы?

Методика изучения статистики в 7-9 классах

Согласно Примерной основной образовательной программе основного общего образования учащиеся в 7-9 классах по теме «Математическая статистика» научатся *на базовом уровне* [28, С. 88]:

– иметь представление о статистических характеристиках;

– представлять данные в виде таблиц, графиков, диаграмм;

– читать информацию, представленную в виде таблицы, диаграммы, графика;

– определять основные статистические характеристики;

– иметь представление о роли закона больших чисел в массовых явлениях;

– сравнивать основные статистические характеристики, полученные в процессе решения прикладной задачи, изучения реального явления;

на базовом и углубленном уровне [28, С. 99]:

- оперировать понятиями: круговые и столбчатые диаграммы, таблицы данных, среднее арифметическое, медиана, размах выборки, наибольшее и наименьшее значения выборки , дисперсия и стандартное отклонение, случайная изменчивость;
- извлекать информацию, представленную в таблицах, на диаграммах, графиках;
- составлять таблицы, строить диаграммы и графики на основе данных;
- представлять информацию с помощью кругов Эйлера;
- извлекать, интерпретировать и преобразовывать информацию, представленную в таблицах, на диаграммах, графиках, отображающую свойства и характеристики реальных процессов и явлений;
- определять статистические характеристики выборок по таблицам, диаграммам, графикам, выполнять сравнение в зависимости от цели решения задачи;

В учебниках 7 класса под редакцией Мордковича А.Г. [24], элементы статистики не изучаются. В учебнике под редакцией Дорофеева Г.В. в 7 классе [12] рассматривается пункт под названием «Статистические характеристики». В 7 классе продолжают формироваться первоначальные представления о статистике, заложенные в 5-6 классах, в теме таблицы и диаграммы. Здесь школьники знакомятся с такими статистическими характеристиками, как мода, размах, среднее арифметическое. Представленные в учебнике упражнения позволят школьникам не только упражняться в вычислении статистических характеристик, но и продемонстрируют возможности их применения на практике, познакомят с различными содержательными интерпретациями. На изучение этого пункта отводится 2 часа.

В учебнике 7 класса под редакцией Макарычева Ю.Н. [19] статистические характеристики рассматриваются как отдельный параграф. Здесь автор вводит понятия статистических характеристик, таких как среднее арифметическое, размах и мода, и лишь потом дает определение статистике как науке, которая занимается получением, обработкой и анализом количественных данных о разнообразных массовых явлениях, происходящих в природе и обществе. Понятие «медиана» разъясняется на доступных учащимся примерах из жизни. На изучение статистических характеристик в учебнике под редакцией Макарычева Ю.Н. отводится 4 часа.

В учебнике 8 класса под редакцией Макарычева Ю.Н. [20] рассматривается отдельный параграф под названием «Элементы статистики». Здесь дается определение *частоты*, *таблицы частот*, а также понятия *относительной частоты* (отношение частоты к общему числу данных в ряду, выраженное в процентах), *таблицы относительных частот*. Данные понятия закрепляются выполнением заданий из учебника. Отводится на изучение материала 4 часа.

В учебнике 8 класса под редакцией Дорофеева Г.В. [13] выделена целая глава под названием «Вероятность и статистика», где в первом параграфе дается определение статистическим характеристикам. Автор дает определения и рассматривает на примерах такие характеристики, как размах, среднее арифметическое, медиана, частота, обучает составлению таблицы частот. Закрепляется изучение данной темы выполнением соответствующих упражнений из учебника. Отводится на изучение статистических характеристик 2 часа.

В учебнике для 9 класса под редакцией Макарычева Ю.Н. [21] элементы статистики не рассматриваются. В учебнике для 9 класса под редакцией Дорофеева Г.В. [14] последней изучается глава «Статистика и вероятность», где статистике выделяется целых 4 параграфа и отводится 6 уроков. Здесь даются понятия генеральной совокупности и выборки, полигону частот, ранжированию данных, интервальному ряду, школьники учатся строить гистограмму, изучают среднее квадратичное отклонение выборочную дисперсию.

В учебнике для 9 класса под редакцией А.Г. Мордковича [25] изучению статистики выделяется параграф. В этом параграфе автор дает определения таким понятиям, как ряд данных, кратность варианты, варианта измерения, объем измерения, частота варианты, многоугольника или полигона распределения данных, многоугольника частот, моды измерения, размаха измерения. Закрепляются понятия выполнением соответствующих заданий. По тематическому планированию на изучение данной темы отводится 3 часа.

Тема урока «Среднее арифметическое, мода, размах»

Цели урока:

– познакомить учащихся с основными статистическими характеристиками: среднее арифметическое, мода, размах;

– выработать умения вычислять основные статистические характеристики для конкретного ряда данных, а также из таблиц и диаграмм;

– выработать умения вычислять основные статистические характеристики в повседневной жизни.

Для школьников очень актуален вопрос о том, какая оценка выйдет у них за триместр. Поэтому в качестве первого примера на вычисление статистических характеристик можно взять ряд чисел, составленный из оценок, полученных за триместр. Оценки каждому учащемуся можно выписать на доске в виде ряда. Показать, как вычисляется среднее значение оценки для одного из учащихся, например для Петровой Маши. А дальше учащиеся должны определить основные статистические характеристики каждый для своего ряда.

Определим понятие мода. *Мода* – это значение во множестве наблюдений, которое встречается наиболее часто**.** Моду вычисляют при изучении спроса на продукцию. Например, менеджер спортивного магазина, просматривая отчет о продаже кроссовок, отследил размеры продаваемых кроссовок в течение одного рабочего дня: 35, **39**, 41, 34, **39**, 38, 37, **39**, 37, 38, **39**, 36, 37, 38, 34, **39, 39,** 40, 38. За день было продано больше всего кроссовок 39 размера, а именно шесть пар, т. е мода в данном примере равна 6. Этот вывод важен для правильной организации поставок продукции в магазин.

Для изучения спроса важно также знать показатели, определяющие разброс значений: наименьшее и наибольшее значения, также размах. *Размах* – это разность наибольшего и наименьшего значений ряда данных. Например, в школьной столовой выпекают пирожки. Шеф-повар в течение 10 дней записывал себе в блокнот количество проданных пирожков. В результате получился ряд чисел: 98, 65, 101, 75, 114, 99, 87, **120,** 102, 89; размах для этого ряда равен 120-65=55. Изучив ряд чисел, шеф-повар делает вывод, что больше, чем 120 пирожков в день не следует выпекать. Кроме того, при выпечке 120 пирожков в день 55 пять из них могут быть не проданы.

Необходимо обратить внимание учащихся на то, что вывод, сделанный по одному из статистических показателей, может привести к ошибке. Известно, что на планете Меркурий средняя температура равна плюс 15 градусам, но из этого не следует, что на Меркурии человек может жить.

Минимальная температура на Меркурии достигает -150 градусов, а максимальная +150. Размах температур равен 300 градусов. Конечно же, такой перепад температур для жизни человека не пригоден. Но полученные данные очень важны при проектировании спутников. Материалы, из которых изготавливают спутники для Меркурия и приборы, должны выдерживать минимальные и максимальные температуры.

После того, как будет раскрыт на примерах смысл статистических характеристик, необходимо перейти к задачам, имеющим практическое значение, для вычисления среднего арифметического, моды, размаха.

Задача №1. Для определения пригодности почвы на двух участках А и Б, фермер рассмотрел, имеющиеся сведения об урожайности картофеля (ц/га) за два последних года.

Участок А: 75, 110, 55, 125, 175, 45, 195, 105, 55, 80, 70, 110, 35, 85, 45, 190, 140.

Участок Б: 120, 110, 130, 100, 100, 105, 135, 130, 130, 120, 110, 115,115. Какое поле для посадки картофеля предпочтет фермер?

Решение. Посчитав среднее значение, можно сделать вывод, что на *участке А* средняя урожайность немного выше, чем на *участке Б* . Но стоит обратить внимание, что на *участке А* урожайность, по сравнению со средним значением, колеблется, поэтому важен и другой статистический показатель – размах ряда. На *участке А* разброс значений урожайности больше чем на *участке Б* . На *участке А* размах равен 195-35 = 160, а на *участке Б* размах равен 135-100 = 35. Анализируя полученные данные, фермер должен сделать вывод, что лучше выбрать меньшее значение средней урожайности, но при этом гарантировать большую ее стабильность.

Задача №2. В универмаге, в отделе мужской обуви в течение дня производился учет размеров купленной обуви. Получен следующий результат: 44, 40, 43, 39, 42, 45, 45, 41, 43, 43, 41, 42, 46, 40, 45, 42, 39, 42, 45, 42, 43, 44, 44, 41, 42. Какой размер обуви пользуется спросом?

Решение. Очевидно, что в задаче требуется определить моду, то есть, определить какой размер обуви чаще всего встречается.

Для решения задачи предложить учащимся составить таблицу.

Задача №3. Цех по производству мороженого работает круглосуточно и без выходных. Выручка, полученная от реализации продукции за июнь, составила 90 390 000 рублей. Какова в июне средняя выручка за сутки?

Решение. Анализируя задачу, делаем вывод, что требуется найти среднее значение выручки, получаемой цехом при реализации продукции, произведенной за сутки. В предыдущих задачах учащиеся имели дело непосредственно с рядом данных.

В рассматриваемой задаче сумма выручки за 30 дней составила 90 390 000 рублей. Следовательно, средняя выручка цеха за сутки будет равна 3 013 000 штук мороженого (90 390 000: 30).

Задача №4. Ряд состоит из десяти чисел**.** Среднее арифметическое ряда равно 15. Приписали еще одно число 37. Определить среднее арифметическое полученного ряда чисел?

Решение. Так как число членов ряда 10, а среднее арифметическое равно 15, то сумма членов ряда будет равна 15·10= 150. При добавлении числа 37, сумма увеличилась и стала равна 187 (150+37). Число членов ряда при этом увеличилось на один и стало равно 11. Значит, среднее арифметическое нового ряда равно 187 : 11= 17.

Учащиеся также должны научиться вычислять статистические характеристики по данным, представленным в таблицах и диаграммах.

В учебнике 7 класса под редакцией Макарычева Ю.Н. [19] дается определение понятия «медиана». Медиана определяется сначала для упорядоченного ряда данных. При этом различают два случая. В первом случае число членов ряда нечетное, тогда медианой является число, записанное в середине ряда. А во втором случае число членов ряда четное, тогда медианой будет являться среднее арифметическое двух чисел, записанных в середине ряда. Понятие медианы можно отработать на задаче №2 варьируя данные из условия.

В 8-9 классах у учащихся необходимо сформировать умения оперировать методами подсчета статистических характеристик, понимание значимости статистики, как науки в современной жизни человека.

§5. Методика изучения элементов теории вероятностей

Авторы статьи «О теории вероятностей и статистике в школьном курсе» Е.А. Бунимович, Ю.Н. Тюрин, П.В. Семенов, В.А. Булычев, А.А. Макаров, А.Г. Мордкович, И.Р. Высоцкий, И.В. Ященко [3] проанализировали опыт преподавания элементов теории вероятностей и математической статистики в школьном курсе математики и дали ряд рекомендаций по введения понятий, обозначений и методике преподавания. Приведем выдержки из статьи [3].

Базовым понятием теории вероятности является *«случайный эксперимент»*, или *случайный опыт.* Данные понятия являются равносильными.

В результате случайного эксперимента может произойти или не произойти то или иное *элементарное событие*. Опыт оканчивается одним и только одним из элементарных событий. Наряду с термином «элементарное событие» можно в качестве синонима употреблять и термин «элементарный исход».

Для общего обозначения различных элементарных событий авторы статьи рекомендуют использовать начальные строчные буквы латинского алфавита: a, b, c, d. Заглавные начальные буквы латинского алфавита: A, B, C и т.д. принято оставлять для обозначения произвольных событий. Эти же буквы с чертой над ними, что говорит о том, что эти события являются противоположными событиями A, B, C и т.д.

Названия элементарных событий, как и событий вообще, удобны для записи выражения их вероятности. Так вероятности указанных выше элементарных событий записываются как: $P(a)$, $P(b)$, $P(c)$, $P(d)$. $P(a)$ – число, приписываемое элементарному событию а.

Перечисляя все возможные элементы окончания случайного эксперимента (опыта), приходим к совокупности всех элементарных событий. Эту совокупность часто называют *пространством элементарных событий*. Слово пространство здесь следует рассматривать как образное выражение, призванное вызвать геометрические ассоциации. Эту совокупность называют множеством всех элементарных исходов.

Каждое случайное событие за исключением невозможного события состоит из элементарных событий, или исходов. Про исходы, при которых происходит событие А, обычно говорят, что они благоприятствуют событию А. Сами такие исходы называют благоприятствующими событию А, или благоприятными для А.

Важно, чтобы учащиеся понимали, что случайные события состоят из элементарных случайных событий. Так запись $A = \{a, b, c\}$ говорит, что событие А состоит из трех элементарных событий a, b, c. Чтобы подчеркнуть, что речь идет именно о совокупности (множестве) элементарных исходов в записи $A = \{a, b, c\}$ используются фигурные, а не круглые скобки. Элементарные исходы a, b, c при этом называются благоприятствующими наступлению события А. Вероятность случайного события обозначают $P(A)$. Вероятность любого случайного события – это конкретное число. Вероятность события может быть любым числом между нулем и единицей. То есть для любого случайного события верно соотношение: $0 \leq P(A) \leq 1$ [3,С.10].

Авторы статьи предлагают избегать использования в школьном курсе измерения вероятностей событий в процентном соотношении. Четкое представление о том, что вероятность не может быть больше единицы позволяет учащимся избегать ошибок при вычислении вероятностей. Среди всех случайных событий выделяют два особых вида событий.

Достоверные события, те, которые в результате эксперимента происходят непременно, и *невозможные события*, те, которые в результате эксперимента точно не происходят. Как события, относящиеся к случайному эксперименту, они тоже называются случайными. При этом вероятность невозможного события всегда равна нулю, а вероятность достоверного события всегда равна единице.

На практике часто интересуют различные комбинации событий и их вероятности. В школьном курсе рассматриваются такие понятия, как «противоположное событие», «объединение событий» и «пересечение событий». Рассматриваются и простейшие комбинации этих операций над событиями.

Авторы статьи рекомендуют не употреблять в школьных учебниках обозначения « + » и « · », «\», « - » для операций с событиями. Например, вместо выражения «$A - B$», подразумевающего события, включающее все элементарные исходы события A, которых одновременно нет в событии B, вместо громоздкой формулы, следует писать: «Произошло событие A, при том, что события B не произошло» (кратко A, но не B).

В статье «Преподавание теории вероятностей и статистики в школе» [34] авторы Тюрин Ю.Н., Макаров А.А., Высоцкий И.Р., Ященко И.В. рекомендуют начинать знакомство с элементами теории вероятностей с простых примеров, в которых число возможных событий невелико, тем самым, не привлекать к решению комбинаторику. Учащиеся должны знать и понимать, что основным способом определения вероятности события в содержательных примерах на практике является частотный подход.

Далее, переходя к математическому описанию случайных явлений, необходимо обратить внимание на понятие случайного опыта и на его важность для всей последующей математической формализации случайности. Описание случайного опыта подводит к выбору подходящего пространства элементарных событий и возможному способу задания на нем вероятностей элементарных событий.

Авторы статьи [34] обращают внимание на то, что одному и тому же физическому опыту, превращая его в математический случайный эксперимент, можно приписать различные исходы и их вероятности. Для пояснения сказанного, рассмотрим простой пример: опыт с последовательным подбрасыванием игрального кубика. Множество элементарных событий в данном случайном эксперименте здесь состоит из шести событий: выпадение 1; 2; 3; 4; 5 и 6. Логично считать все эти шесть элементарных исхода равновозможными и приписать им одинаковые вероятности равные 1/6. Но если в этом опыте нас интересует лишь выпадение четного числа очков, то можно ввести и иное множество исходов: 2; 4 и 6. Правильные (согласованные с частотами в реальном эксперименте) вероятности этих элементарных исходов равны 1/3.

Однако, отмечают авторы статьи [31], было бы совершенно неверно с методической точки зрения ограничиваться в школьном курсе обсуждением только тех случайных опытов, элементарные события в которых только равновозможны. Это часто приводит к формированию устойчивого ложного представления, что интересующее учащегося событие всегда имеет вероятность, равную одной второй, так как это событие «либо произойдет, либо не произойдет».

Необходимо обратить внимание учащихся и на то, что на практике многие элементарные события не являются равновозможными. Кроме того, на этапе первого знакомства с основными вероятностными понятиями следует всячески избегать нечетких формулировок в вероятностных задачах. Необходимо, чтобы условия случайного опыта формулировались ясно и недвусмысленно.

В учебной литературе, как это отмечалось выше, методика введения элементов теории вероятностей различная. В учебнике авторов Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, С.Б. Суворова «Алгебра 9» [21] элементы теории вероятностей рассматриваются в §12 «начальные сведения из теории вероятностей». Рассматриваются такие вопросы, как относительная частота случайного события, вероятность равновозможных событий и в пункте «для тех, кто хочет знать больше» – сложение и умножение вероятностей. В 12 параграфе приводится историческая справка о зарождении и развитии теории вероятностей, об основоположниках и ученых, которые внесли большой вклад в развитие теории вероятностей. На примере игрального кубика вводится понятие относительной частоты события.

Для введения понятия «вероятность события» в данном учебнике используется статистический подход. В пункте «для тех, кто хочет знать больше» рассматривается сложение несовместных событий произведение независимых событий.

В учебнике авторов А.Г. Мордкович, П.В. Семенов «Алгебра 9» [25] элементы теории вероятностей рассматриваются в главе 5 «Элементы комбинаторики, статистики и теории вероятностей». Понятия «случайное событие» и «вероятность» вводятся на примере игры в орлянку. Вводится понятие «геометрическая вероятность». Для введения понятия «вероятность» применяется классический подход, но в заключительном параграфе раскрывается связь между классическим и статистическим определениями вероятности событий.

Анализируя учебную и методическую литературу, следует отметить, что одна из важнейших задач, стоящих перед учителем – это формирование понимания упорядоченности случайных фактов, устойчивости в мире случайностей. Для формирования вероятностно-статистического стиля мышления, необходимо представить вероятность, как «теоретически ожидаемое» значение частоты при большом числе наблюдений. При этом построение связи между вероятностью и ее эмпирическим прообразом — частотой приводит к пониманию статистической устойчивости частоты. Необходимо также сформировать понимание того, что количественную оценку возможности наступления того или иного события можно произвести предварительно, до проведения эксперимента, используя правила и законы теории вероятностей.

В 5-6 классах учащихся следует подвести к пониманию таких понятий, как «вероятнее», «менее вероятно», «равновозможно». Предварительно можно научить детей различать понятия: «возможно да» или «обязательно да» (наверняка), «необязательно да» или «обязательно нет». Проделывая это в игровой форме, можно обучить учащихся составлению качественной оценки шансов наступления случайного события, при этом формируя само понятие случайного события. Шансы наступления событий необходимо оценивать, привлекая предыдущий опыт и интуицию. Учащиеся должны осознать, что вероятность события можно измерить так же, как и другие величины: длину, массу, время и т. д. Кроме того, с помощью эксперимента рекомендуется продемонстрировать, что относительная частота события обладает свойством устойчивости. С ростом числа опытов частота события имеет тенденцию стабилизироваться вблизи некоторого числа. После проведения экспериментов с монетами, шарами, игральными костями и т.п., можно вводить формулы классической вероятности. Через определенный период времени учащиеся смогут решать задачи по теории вероятностей, не прибегая к эксперименту.

Методика изучения теории вероятностей в 7-9 классах

Согласно Примерной основной образовательной программе основного общего образования учащиеся в 7-9 классах по теме «Теория вероятностей» научатся *на базовом уровне* [28, С. 88]:

– иметь представление о вероятности случайного события;

– оценивать вероятность события в простейших случаях;

– иметь представление о роли практически достоверных и маловероятных событий;

– оценивать вероятность реальных событий и явлений в несложных ситуациях.

на базовом и углубленном уровне [28, С. 99]*:*

– решать задачи по комбинаторике и теории вероятностей на основе использования изученных методов и обосновывать решении;

– оперировать понятиями: случайный опыт, случайный выбор, испытание, элементарное случайное событие (исход), классическое определение вероятности случайного события, операции над случайными событиями;

– решать задачи на вычисление вероятности с подсчетом количества вариантов с помощью комбинаторики;

– оценивать вероятность реальных событий и явлений.

В *7-9 классах* необходимо усилить уровень строгости в изложении материала. Можно начать с классической схемы, то есть с опыта с конечным числом равновозможных исходов. Рассмотрим возможный вариант введения понятия «вероятность».

Тема урока: «Понятие «вероятность». Случайные события».

Цели урока:

– обеспечить знакомство с такими понятиями, как испытание, исход, случайное событие, достоверное событие, невозможное событие;

– развить умения определять достоверность, невозможность событий;

– дать начальное представление о том, что такое вероятность наступления события;

– сформировать умение подсчитывать вероятность наступления событий, которые могут появиться в результате испытаний, обладающих симметрией возможных исходов;

– повысить познавательный интерес.

Урок следует начать с введения таких терминов, как *достоверные, невозможные и случайные события,* посредством примера**.** К примеру, при подбрасывании игральной кости, достоверно, что число выпавших очков будет натуральным числом. Невозможно, что это число равнялось 8, и возможно, что оно будет равно 4, а при подбрасываниях будут выпадать другие значения: 1,2,3,5 или 6.

Случайным событием называется такой исход эксперимента или наблюдения, который при реализации данного комплекса условий может произойти, а может и не произойти.

1. Выпадение герба или цифры при подбрасывании одной монеты.
2. Выпадение двух очков при бросании игральной кости.
3. Выпадение восьми очков при бросании игральной кости.

Невозможным называется событие, если оно не может наступить при реализации данного комплекса условий и обозначается также как и пустое множество: Ø. Иными словами, невозможное событие состоит из пустого множества исходов.

1. Выпадение цифры и герба одновременно при подбрасывании одной монеты.
2. Выпадение более 6 очков при подбрасывании игральной кости.

Следует обратить внимание учащихся на то, что случайные события при одних и тех же условиях могут произойти, а могут и не произойти. При этом у одних случайных событий шансов произойти больше (значит, они более вероятные – ближе к достоверным), а у других меньше (они менее вероятные – ближе к невозможным). Таким образом, вероятность можно трактовать как степень возможности наступления того или иного события.

Ясно, что более вероятные события происходят чаще, чем менее вероятные. Следовательно, вероятности наступления событий можно сравнивать по частоте, с которой они происходят.

Можно рассмотреть следующую задачу: требуется на специальной вероятностной шкале расположить события в порядке возрастания вероятности их появления.

Событие А: при подбрасывании игральной кости выпадет 2 очка;

Событие В: при подбрасывании игральной кости выпадет нечетное количество очков;

Событие C: при подбрасывании монеты выпадет орел или решка;

Событие D: при подбрасывании игральной кости выпадет 7 очков;

Событие E: при подбрасывании игральной кости выпадет число, неравное 3.

Итак, слева расположим невозможные события, так как вероятность их наступления практически равна нулю. Проанализировав данные события, можно сделать вывод, что невозможным будет *событие D*. Справа расположим достоверное событие – *событие C*. Все остальные события являются случайными – их следует расположить на шкале в порядке возрастания степени их появления. Для этого необходимо выяснить, какие из событий более вероятны, а какие менее вероятны. Начнем с *события B*: когда мы подбрасываем игральную кость, каждая из 6 граней имеет равные шансы оказаться верхней. Нечетное число очков – на трёх гранях кубика, на трёх других – четное. Значит, вероятность наступления *события B* равна половине (3 из 6). Поэтому расположим *событие B* посередине шкалы.

У *события A* только один шанс из 6, поэтому *событие C* будет расположено на шкале левее *события B*.

Наступление *события E* более вероятно (5 из 6), чем у *событий A, B, D*, но менее вероятно, чем у *события C*.

Таким образом, получим шкалу (Рис.10):

Рис. 10. Шкала событий.

На построенной вероятностной шкале нет числовых меток, делений, шкала на рисунке 10 - это лишь наглядная имитация числовой шкалы, которая позволяет получить первые навыки вычисления степени возможности наступления (вероятности) того или иного события.

В теории вероятностей существует несколько определений вероятности. Которые рассматриваются в зависимости от того, каким условиям удовлетворяют испытания. Вот одно из них.

Проводится испытание, удовлетворяющее условиям:

1. число исходов испытания конечно (равно n);
2. исходы испытания являются несовместными;
3. исходы испытания являются равновозможными.

Определение 1. Вероятностью события называется число равное отношению числа исходов испытания, благоприятствующих данному событию, к числу всех исходов испытания.

Обычно вероятность события *A* обозначают *P(A)*. Таким образом,

$$P(A) = \frac{m}{n} \qquad (1)$$

где m – число исходов испытания, благоприятствующих событию *A*;

n – число всех исходов данного испытания[15,С. 146].

Задача №1. В книге 456 страниц. Какова вероятность того, что порядковый номер наудачу открытой страницы будет оканчиваться цифрой 3?

Решение. Опыт: случайно открыта книга на i-ой странице, $i = 1, \ldots, 456$.

Событие *A*: «Номер случайно открытой страницы оканчивается цифрой 3».

Определим n - число всех исходов данного испытания. Так как книгу можно открыть на любой странице, то число всех равновозможных, единственно возможных и несовместных исходов $n = 456$.

Определим m - число исходов испытания, благоприятствующих событию *A*. В каждом десятке одна страница оканчивается на 3, всего десятков 45. Кроме того, среди последних 6 страниц, есть одна, оканчивающаяся на 3, значит, всех благоприятствующих исходов будет $45 + 1 = 46$; $m = 46$. Рассчитаем вероятность события *A:*

$P(A) = \frac{46}{456} \approx 0{,}013$.

Задача №2. На шести одинаковых карточках написаны буквы *А*, *В*, *М*, *О*, *С*, *К*. Ребенок, не умеющий читать, строит из карточек паровозик (выстраивает буквы, отобранные случайным образом, в ряд). Какова вероятность того, что:

а) выстроится слово *МОСКВА*;

б) первые три буквы образуют слово *СОК*.

Решение. а) Опыт: 6 букв *А*, *В*, *М*, *О*, *С*, *К* разложили в ряд.

Событие *А:* «Выстроено из карточек слово *МОСКВА*».

Общее число исходов: $n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$ *(подсчет числа возможных исходов рассматривается в 7 классе в разделе «Комбинаторика» в теме «Перестановки»)*;

Число исходов благоприятствующих событию $m = 1$;

Отсюда $P(A) = \frac{1}{720}$

б) Опыт: разложили в ряд три случайно отобранные карточки.

Событие *В:* «Выстроено из карточек слово *СОК*».

$n = 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 360;\ m = 1;\ P(B) = \frac{1}{360} \approx 0{,}003$.

Задача №3. В урне 10 шаров с номерами от 1 до 10. Какова вероятность вынуть шар,

а) номер которого не превышает 8;

б) номер которого не меньше 7;

в) номер которого не превышает 10;

г) номер которого 15.

Решение: Опыт: наугад из урны вынут шар.

а) Событие A : «Номер шара не превышает 8».

$n = 10;\ m = 8;\ P(A) = \frac{8}{10} = 0{,}8$.

б) Событие *B:* «Номер шара не меньше 7».

$n = 10;\ m = 4;\ P(B) = \dfrac{4}{10} = 0{,}4.$

в) Событие *C:* «Номер шара не превышает 10».

$n = 10;\ m = 10,$ т.к. номер любого шара, находящегося в урне, не превышает 10; $P(C) = \dfrac{10}{10} = 1$, т.е. событие *C* – достоверное.

г) Событие *D*: «Номер шара 15».

$n = 10,\ m = 0,$ т.к. в урне нет шара с номером 15; $P(D) = \dfrac{0}{10} = 0$, т.е. событие *D* – невозможное.

Задачи для самостоятельного решения:

Задача №4. Двузначное число выбирается случайным образом. Какова вероятность того, что это число оказалось: а) кратным 5; б) простым; в) составным; г) взаимно простым с числом 120?

Задача №5. У Веры две одинаковые пары перчаток. Перед прогулкой она наугад берет две перчатки. Какова вероятность того, что они окажутся парными (т.е. на разные руки)?

Вера потеряла одну из перчаток на улице, и теперь у неё осталось всего три перчатки. Перед прогулкой она снова выбирает две перчатки случайным образом. Какова на этот раз вероятность, что они окажутся парными?

Задача 6. Для украшения елки принесли коробку, в которой находится 10 красных, 7 зеленых, 5 синих и 8 золотых шаров. Из коробки вынимают наугад один шар. Какова вероятность того, что шар окажется: а) красным; б) золотым; в) красным или золотым?

§6. Методика изучения элементов комбинаторики

Согласно Примерной основной образовательной программе основного общего образования учащиеся в 7-9 классах по теме «Комбинаторика» научатся *на базовом уровне* [28, С. 88]:

– иметь представление о комбинаторных задачах;

– решать простейшие комбинаторные задачи методом прямого и организованного перебора;

– оценивать количество возможных вариантов методом перебора;

– решать задачи по комбинаторике и теории вероятностей на основе использования изученных методов и обосновывать решение;

на базовом и углубленном уровне [28, С. 99]:

– оперировать понятиями: факториал числа, перестановки и сочетания, треугольник Паскаля; применять правило произведения при решении комбинаторных задач;

– решать задачи на вычисление вероятности с подсчетом количества вариантов с помощью комбинаторики;

– решать задачи по комбинаторике и теории вероятностей на основе использования изученных методов и обосновывать решение.

Комбинаторикой называют раздел математики, изучающий задачи следующего типа: сколько комбинаций, удовлетворяющих тем или иным условиям, можно составить из элементов данного множества.

Еще раз обратимся к статье [3] *«О теории вероятностей и статистике в школьном курсе»*. Авторы статьи, анализируя накопленный опыт по введению стохастической линии в школьный курс математики, отмечают, что главная задача элементов комбинаторики в школьной программе заключается в том, что учащиеся получают представление о вариативности. Приобретают навыки подсчета числа возможных вариантов, которые могут возникнуть на практике, в различных жизненных ситуациях. Решать комбинаторные задачи авторы статьи в школьном курсе советуют начинать с перечисления возможных вариантов, получаемых естественным путем, а не с заучивания формальных обозначений. Например, предложить учащимся перечислить все возможные варианты бутербродов из двух различных сортов хлеба и трех сортов колбасы. В ряде случаев удобно и наглядно использование дерева вариантов. Комбинаторное правило умножения может быть получено из практических задач интуитивно, путем естественным и понятным. Аналогично можно подойти и к задачам на перестановки. Учащихся на простых примерах нужно подвести к выводу о том, что при перестановке трех элементов на первое место может быть поставлен один из трех элементов, на второе – один из двух оставшихся, а на последнее – только один, не выбранный ранее. Учащиеся должны научиться выписывать все возможные перестановки и лишь затем переходить к формульному описанию числа перестановок с помощью факториала числа n, т.е. n!. Вычисление факториала встречается во многих комбинаторных задачах, поэтому формальное вычисление факториала необходимо закрепить. Говоря о формальных комбинаторных обозначениях в школьном курсе, авторы статьи считают, что следует ограничиться их минимальным числом. А именно, факториалом числа n! и числом сочетаний C_n^k. А такие обозначения, как P_n – для числа перестановок, и A_n^k – для числа размещений использовать не обязательно, чтобы не вносить дополнительную путаницу и формализм. [3, С.8].

В статье [7] «*Типичные ошибки в преподавании теории вероятностей и статистики» авторы И.Р. Высоцкий, И.В Ященко* отмечают, что многим учителям математики свойственно переоценивать роль комбинаторики в преподавании теории вероятностей. Часто учитель формально излагает комбинаторные факты и формулы, а затем предлагает задачи со словом «вероятность» в качестве примера применения. Пример: у Буратино в правом кармане 4 серебряных и 2 золотые монеты. Буратино, не глядя, перекладывает три каких-то монеты в левый карман. Какова вероятность того, что обе золотые монеты оказались в одном кармане?

Эта задача, появляясь в разных формулировках в разных сборниках и на экзаменах, вызвала массу обсуждений. Как выяснилось, большинство специалистов видят в ней комбинаторную задачу со следующим решением. Общее число комбинаций из 6 монет по 3 равно C_6^3. Выбрать две золотые монеты из двух и одну серебряную из четырех и положить их в левый карман можно $C_2^2 \cdot C_4^1$ способами. Столько же есть способов положить эти выбранные монеты в правый карман. Получаем:

$$p = \frac{2C_2^2 \cdot C_4^1}{C_6^3} = \frac{2 \cdot 1 \cdot 4}{20} = 0{,}4 \qquad (2)$$

Авторы статьи подчеркивают, что подобное решение – это типичное проявление проблемы: вероятность в вузах часто преподается как приложение комбинаторики, и этот подход проецируется на школу. Мы не против комбинаторики. Но важнее воспитание вероятностного мышления. Давайте учить в первую очередь этому. Недолгое раздумье позволяет резко упростить множество возможных исходов. Нам неважно, где оказалась первая золотая монета. Давайте рассмотрим возможные размещения второй. Мысленно присвоим золотым монетам номера 1 и 2. Первая золотая монета окажется в каком-то кармане. В этот карман, кроме нее, попадут еще две монеты из пяти оставшихся. Значит, вероятность того, что вторая золотая монета случайно окажется в том же кармане, равна 2/5= 0,4 .

Важно то, что отсутствие комбинаторики не сужает класс возможных задач. В изучении и преподавании теории вероятностей комбинаторика должна играть вспомогательную роль, и нужна она там, где вероятностные пространства обширные и без нее нельзя обойтись. Нужно использовать хорошие и важные задачи с простыми вероятностными множествами, а не наполнять голову школьника комбинаторными отношениями, выдавая их за суть науки [7, С. 9-10].

Методика введения элементов комбинаторики в школьный курс математики у разных авторов значительно отличается.

В комплекте учебников по алгебре для общеобразовательных учреждений авторов Ю.Н. Макарычева, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешкова, С.Б. Суворовой под редакцией С.А. Теляковского элементы комбинаторики вводятся в учебнике «Алгебра, 9» [21]. Комбинаторике отводится §11 «Элементы комбинаторики» пятой главы «Элементы комбинаторики и теории вероятностей». В §11 приводятся примеры решения комбинаторных задач, в том числе с помощью «дерева решения», определяются понятия «перестановки», «размещения», «сочетания», обосновываются формулы для вычисления числа перестановок, размещений, сочетаний.

В учебнике «Алгебра 9» авторы А.Г. Мордкович, П.В. Семенов[25] вводят элементы комбинаторики в §18 «Комбинаторные задачи» пятой главы «Элементы комбинаторики, статистики и теории вероятностей». В отличии от учебника«Алгебра 9» под редакцией С.А. Теляковского [21], А.Г. Мордкович, П.В. Семенов не вводят понятия размещения и сочетания, оставляют рассмотрение данных вопросов в 10-11 классах.

В §18 решаются простейшие комбинаторные задачи с помощью «дерева вариантов», с помощью «правила умножения» для двух испытаний. Вводятся понятия: «факториал», «перестановка». В примерном тематическом планировании на элементы комбинаторики отводится три часа.

Придерживаясь, методики, предложенной в комплекте учебников под редакцией А.Г. Мордковича, рассмотрим введение комбинаторных понятий.

Урок на тему «Элементы комбинаторики» (5 класс)

Цели занятия:

– сформировать начальные навыки составления и подсчета числа комбинаторных наборов;

– продемонстрировать решение комбинаторных задач с помощью рассуждений;

– сформировать начальные навыки решения комбинаторных задач с помощью построения дерева возможных вариантов.

Формирование комбинаторных навыков, нужно начинать как можно раньше, уже в начальных классах. В пятом классе можно начать решать комбинаторные задачи, используя метод перебора возможных вариантов. В жизни каждого ученика часто возникают моменты, когда необходимо осуществить выбор какой-либо одной комбинации из нескольких возможных (выбрать для обеда набор из трех блюд; выбрать членов команды для игры в футбол; выбрать факультативы и т. д.). Идея комбинаторики раскрывается с помощью операции перебора. С помощью операций перебора учащихся можно научить выявлять закономерности, сформировать комбинаторные понятия и подготовить к выводу формул комбинаторики. Важно также обратить внимание учащихся на то, что способы перебора возможных вариантов могут быть различными, необходимо подобрать такой способ, при использовании, которого все варианты будут рассмотрены и не повторятся.

На начальном этапе при решении задач такие понятия, как сочетания, перестановки и размещения, можно не вводить, важно, чтобы учащиеся понимали какого типа набор (упорядоченный, неупорядоченный, подчиняющийся тем или иным свойствам, из какого количества элементов и т.д.) необходимо осуществить при решении данной задачи.

Второй этап решения задачи, это подсчет количества возможных вариантов. Задачи на подсчет количества возможных вариантов можно решать с помощью дерева решений. Дерево решений также является наглядной иллюстрацией правила умножения, являющегося основным принципом решения комбинаторных задач.

Для того, чтобы у учащихся сформировать навыки систематического перебора учителю необходимо начинать с самых простейших задач.

Задача №1. На тарелке лежат 3 яблока и 2 груши. Сколько существует способов выбора одного плода? Сколько существует способов выбора двух плодов: яблоко и груша?

Решение. На доске можно изобразить три яблока разного цвета: красного, желтого и белого. Одну грушу раскрасить зеленым цветом, вторую грушу – коричневым. Ответ на первый вопрос не вызовет затруднений. Для того, чтобы пояснить ответ на второй вопрос, можно предложить ученикам изобразить все возможные пары плодов яблоко и груша.

Делаем вывод: если яблоко можно выбрать тремя способами, а грушу можно выбрать двумя способами, то выбор «либо яблоко, либо груша» можно осуществить 3+2 способами; пару яблоко и груша можно выбрать $2*3$ способами.

Задача №3. Три подруги, Аня, Света и Катя, купили два билета в филармонию. Сколько существует различных вариантов посетить филармонию?

Решение. Для решения задачи следует рассмотреть всевозможные пары девочек, то есть рассмотреть не упорядоченные множества из двух элементов, содержащиеся в трех элементном множестве. На следующем этапе задачу можно усложнить, добавив в условие задачи номера мест в билетах, то есть предложить множества из двух элементов упорядочить.

Задача №4. Три подруги, Аня, Света и Катя, купили два билета в филармонию на 11-е и 12-е места пятого ряда партера. Сколько существует способов занять эти два места? Записать все возможные варианты.

Решение. В решении данной задачи можно использовать результаты предыдущей задачи. В предыдущей задаче не учитывался порядок, а теперь с учетом порядка, на каком месте будет сидеть та или иная девочка. Рассмотрим тот вариант, когда в филармонию пошли Аня и Света, в этом случае возможно два варианта занять места в партере: 11-ое место – Аня, 12-ое место – Света и наоборот 11-ое место Света, а 12-ое Аня. Таким образом, два элемента мы можем упорядочить двумя способами. Получаем, что каждому варианту решения предыдущей задачи соответствуют два решения исходной задачи. Итого 6 вариантов.

Задача №5. Подругам Ане, Свете и Кате повезло, они купили 3 билета на симфонический концерт в филармонию на 10-е, 11-е и 12-е места пятого ряда партера. Сколько существует способов занять перечисленные места подругами?

Решение. В приведенной задаче для того, чтобы узнать, сколько существует способов рассадить трех подруг на три разных места, необходимо создать упорядоченные трехэлементные множества, то есть, как и в задаче №4, необходимо знать, какое место занимает каждая из подруг.

Предположим, что на 10 месте сидит Аня, тогда на оставшиеся два места двух оставшихся девочек мы можем рассадить двумя способами. Для случаев, когда на десятом месте сидит Света или сидит Катя, рассуждаем аналогично. В результате получаем 6 вариантов. Следовательно, для упорядочивания трех элементов существует шесть способов.

В задачах №1-№5 число возможных вариантов не велико и все возможные варианты можно было просто перечислить. Но в тех случаях, когда число вариантов довольно большое и зачастую даже сложно вычислить их число, процедура перебора должна быть упорядочена. Во избежание повторений или потери в решении необходимо выработать алгоритм перебора возможных вариантов.

Задача №6. Из цифр 1,2,3 составляются двузначные числа. Сколько таких чисел можно составить?

Решение. Будем выписывать все возможные двузначные числа в порядке возрастания, в результате мы не повторимся и не пропустим ни одно двузначное число, составленное из имеющихся трех цифр.

Необходимо обратить внимание учащихся на то, что задача будет иметь разные решения в зависимости от того, будут повторяться цифры при составлении двузначных чисел или нет. Обычно в условии задачи указывается: возможны повторения элементов или нет.

В рассматриваемой задаче это условие не оговорено, поэтому решим задачу для каждого из возможных случаев. Обратим внимание учащихся на то, что в каждом из решений количество двузначных чисел будет различно, то есть условия повторяемости и не повторяемости необходимо учитывать при решении задач.

Задача №7. Буратино заявил, что 32 буквы в алфавите совсем не нужны, он и из двух букв «я» и «ю» составит сколько угодно слов для общения. Ребята давайте проверим, прав ли Буратино.

Решение. В этой задаче предполагается возможность повторения в слове одной и той же буквы. Самые простейшие слова – это слова из одной буквы, таких слов всего два «я» и «ю». Если слова содержит две буквы, то таких слов ровно четыре: «яя», «яю», «юя», «юю».

Дальнейший перебор возможных вариантов лучше всего осуществлять с помощью *дерева решений*. Строить дерево решений будем от корня, из которого «вырастают» первые две ветви с буквами «я» и «ю» (первые буквы слова). Из каждой первой буквы слова вырастают еще по две веточки с буквами «я» и «ю» (вторые буквы слова). У нас уже четыре ветви второго яруса. За тем из каждой ветви вырастают еще по две ветви третьего яруса «я» и «ю» (третьи буквы слова). Получилось дерево (рис. 11), правда, вверх ногами, но это неважно. Главное, что мы увидели, что двух букв для общения очень мало при этом слов, содержащих одну букву из имеющихся двух – два, слов, содержащих две буквы – четыре, слов, содержащих три буквы – восемь и т.д. И чем больше букв в слове, тем сложнее слово воспринимается.

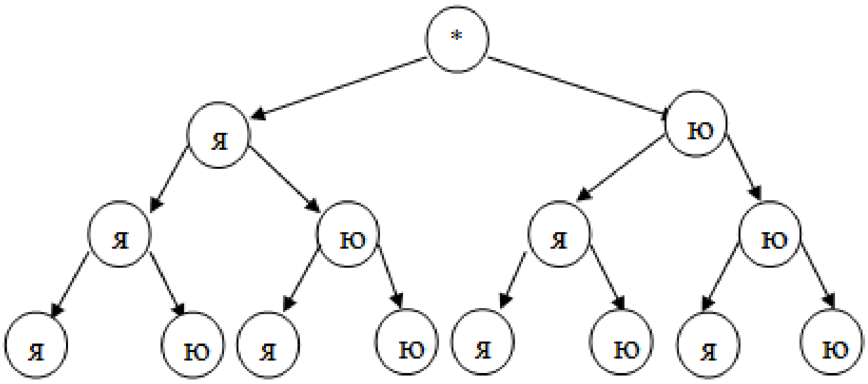

Рис.11. Дерево решений.

Полученные слова можно прочитать, двигаясь от корня дерева решений по ветвям.

Необходимо обратить внимание учащихся на то, что дерево решений позволяет перечислить все возможные варианты, избежать потерь и повторений.

Урок на тему «Элементы комбинаторики» (6 класс)

Цели занятия:

– сформировать умения и навыки составления и подсчета числа комбинаторных наборов, в том числе с помощью рассуждений и с помощью дерева возможных вариантов;

– научить учащихся применять кодирование при решении комбинаторных задач;

– познакомить учащихся с правилами суммы и произведения при подсчете числа возможных вариантов;

– научить применять правила суммы и произведения при решении комбинаторных задач.

Задача №1. Сколько стран могут использовать флаг, состоящий из трех вертикальных полос равной ширины, разного цвета (зеленого, красного, желтого) в качестве государственного. Флаги должны отличаться друг от друга.

Решение. Задачу можно решить методом перебора вариантов, с помощью «дерева решений», а можно прибегнуть к кодированию. Для этого каждый из трех возможных цветов закодируем: зеленый цвет назовем буквой «З»; красный цвет – буквой «К»; желтый – «Ж».

Выполнив кодирование, решение задачи мы можем записать следующим образом: «ЗКЖ», «ЗЖК», «КЖЗ», «КЗЖ», «ЖКЗ», «ЖЗК». Мы перебрали все возможные варианты составления флага, воспользовавшись условным обозначением.

Задача №2. Восемь одноклассников обменялись при встрече рукопожатиями. Сколько всего было сделано рукопожатий?

Решение. Для решения задачи можно использовать метод непосредственного перебора, что сделать и не допустить ошибку довольно сложно. Для решения задачи используем кодирование.

Каждому однокласснику дадим номер от 1 до 8, а рукопожатия закодируем. Например, число 17 будет означать, что первый одноклассник обменялся рукопожатием с седьмым. Заметим, что числа 17 и 71 обозначают одно и то же рукопожатие, выберем меньшее из чисел.

Полученные коды выпишем в следующем виде:

12, 13, 14, 15, 16, 17, 18,

23, 24, 25, 26, 27, 28,

34, 35, 36, 37, 38,

45, 46, 47, 48,

56, 57, 58,

67, 68,

78.

Вычислим число рукопожатий: 7+6+5+4+3+2+1=28

Для подсчета числа возможных вариантов можно рассмотреть еще одну задачу с применением кодирования.

Задача №3. Мама попросила Алену помочь в составлении меню обеда для всей семьи. На первое мама предложила выбрать одно из двух блюд: суп или рассольник. На второе у Алены был выбор между тефтелями и котлетами. В качестве гарнира мама предлагала гречку, овсянку или макароны. А на десерт мама могла испечь пирожки или булочки. Сколько различных вариантов в составлении меню было у Алены?

Решение. Решим задачу, объединяя метод построения дерева возможных вариантов и метод кодирования. Осуществим кодирование:

«С»- суп,

«Р» - рассольник,

«Т» - тефтели,

«К» - котлеты,

«Г» -гречка,

«О» - овсянка,

«М» - макароны,

«П» -пирожки,

«Б» - булочки.

Корень дерева, обозначим (*), дерево вариантов примет вид (рис.12).

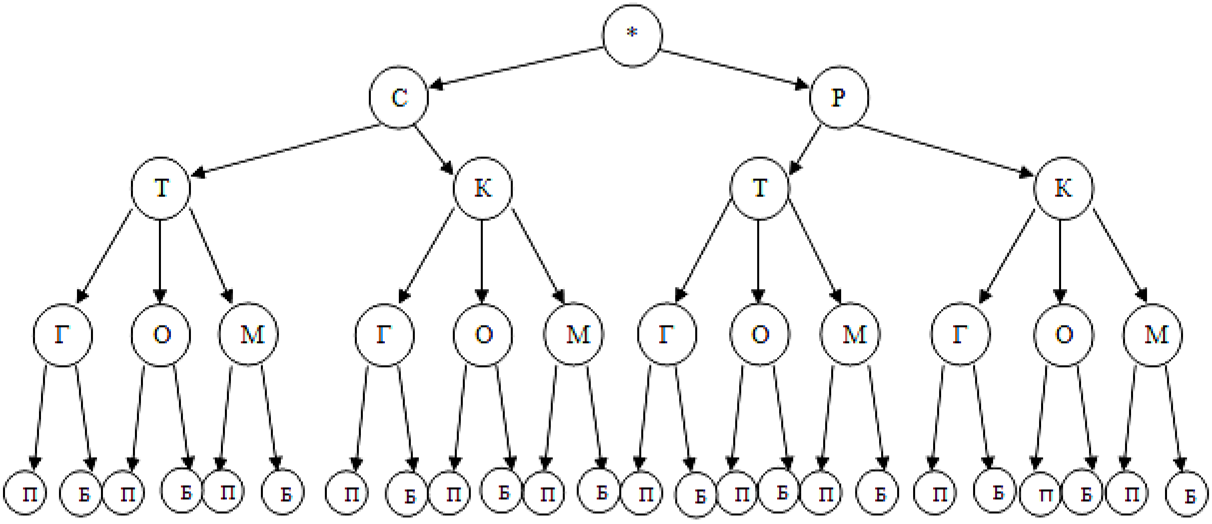

Рис.12. Дерево решений.

Ответ на вопрос легко прослеживается по дереву возможных вариантов: вариант возможного меню читается сверху вниз. Получили 24 вариантов меню из списка, предложенных мамой возможных блюд.

Кроме того, с помощью дерева решений демонстрируется принцип умножения, используемый в комбинаторике. На первом этапе не обязательно давать формулировку принципа, можно просто разъяснить его суть. Первое блюдо можно выбрать двумя способами. К каждому из двух первых блюд можно присоединить одно из двух вторых блюд. К каждому второму блюду можно присоединить один из трех возможных гарниров. Наконец, к каждому из гарниров можно присоединить один из двух десертов: $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 = 24$

Для подсчета комбинаторных наборов в некоторых случаях используется правило суммы.

Задача №4. Сколько существует способов выбора дежурного, если в классе 14 мальчиков и 16 девочек.

Решение. Выбрать одного мальчика из 14 можно четырнадцатью способами, а одну девочку из 16 мы можем шестнадцатью способами. Тогда выбрать одного дежурного мальчика или девочку можно (14+16) способами.

Для подсчета вариантов использовалось *правило суммы*: если объект, a можно выбрать m способами, а объект b - k способами, то выбор «либо a, либо b» можно осуществить $m+k$ способами.

Задача №5. Из класса нужно выделить двух дежурных, одного мальчика и одну девочку. Сколько существует способов для выбора пары дежурных одного мальчика и одной девочки, если в классе 16 девочек и 14 мальчиков?

Решение. Выбрать одну девочку из 16 мы можем шестнадцатью способами. К каждой девочке мы можем в пару поставить одного из 14 мальчиков, т. е пару один мальчик и одна девочка можно составить $16*14$ способами.

Для подсчета вариантов использовалось *правило произведения*: если объект, a можно выбрать m способами, а объект b - k способами, то пару a и b можно выбрать $m*k$ способами.

Урок на тему «Элементы комбинаторики» (9 класс)

Цели урока:

- сформировать умения пользоваться правилами суммы и произведения при составлении и подсчете числа комбинаторных наборов;
- познакомить учащихся с понятием факториал числа;
- развитие логического мышления учащихся.

На практике очень часто встречаются задачи, в которых нужно подсчитать число всех возможных вариантов расположения каких-либо предметов или число всех возможных способов осуществления какого-либо действия. Сколько существует способов расположить 50 человек в очереди в кассу за билетами в кино? Сколько существует способов распределить призовые места между участниками соревнований? Сколько существует способов составить график дежурства в классе? Подобные задачи называются комбинаторными.

Осуществлять комбинаторные вычисления приходится специалистам в различных областях науки, техники, в социальной сфере: программисту при составлении программ, логисту при выстраивании логистической цепочки, агроному при планировании посевов, диспетчеру при составлении графика движения поездов, шеф-повару при планировании меню, любому конструктору, биологу, химику и т.д. Осуществлять комбинаторные вычисления приходится каждому из нас и в повседневной жизни. Например, имея определенную сумму денег при посещении продуктового магазина, мы просчитываем различные комбинации покупки товара. Очень важно знать комбинаторику современным экономистам, а также всем специалистам, которым приходится просчитывать риски возможных потерь. Это связано с тем, что большое количество задач по теории вероятностей решается с использованием комбинаторных методов.

При комбинаторных расчетах часто применяются два правила (принципа): умножения и сложения. Правила звучат следующим образом.

Если элемент x из множества X может быть выбран m способами и после каждого такого выбора элемент y из множества Y может быть выбран n способами, то один элемент x или y может бать выбран $m+n$ способами.

Если элемент x из множества X может быть выбран m способами и после каждого такого выбора элемент y из множества Y может быть выбран n способами, то элементы x и y могут бать выбраны $m \cdot n$ способами.

Сформулированы принципы сложения и умножения для двух множеств, но эти принципы могут быть обобщены на любое конечное число множеств.

Задача №1. В магазине продаются синие, красные, черные и зелёные ручки, а также фломастеры 12 разных цветов. Сколько существует способов покупки одного экземпляра пишущего средства? Сколькими способами можно купить ручку и фломастер?

Решение. Для ответа на первый вопрос воспользуемся принципом сложения. Одну ручку можно выбрать четырьмя способами. Один фломастер можно выбрать двенадцатью способами. Один экземпляр пишущего средства можно купить 4+12=16 способами.

Приведем рассуждения для ответа на второй вопрос. К каждой выбранной ручке, можно выбрать фломастер двенадцатью способами. Так как ручек всего 4, то количество способов купить ручку и фломастер равно $4 \times 12 = 48$.

Задача №2. В классе двадцать человек. Сколько существует способов выбора старосты и ответственного за дежурство?

Решение. В задаче важно, кто из учеников будет старостой, а кто ответственным за дежурство. Если Алексей выбран старостой, а Марина ответственной за дежурство, то это один вариант, Марина – староста, Алексей - ответственной за дежурство, это другой вариант.

Решая задачу, рассуждаем следующим образом. Старосту из 20 учеников можно выбрать двадцатью способами. После выбора старосты в качестве ответственного за дежурство можно выбрать только одного из 19 оставшихся учеников, это можно сделать девятнадцатью способами. Согласно правилу произведения, общее количество числа возможных выборов (староста, ответственный за дежурство) будет равно $20 \cdot 19 = 380$.

Задача №3. Сколько существует способов поставить на шахматную доску белую и чёрную ладьи, чтобы они не «били» друг друга?

Решение. Для белой ладьи выбор поля может быть сделан 64-мя способами. Независимо от этого выбора белая ладья «бьёт» 15 полей, поэтому для чёрной ладьи остаётся $64-15 = 49$ возможных полей. Согласно правилу произведения общее количество способов поставить белую и чёрную ладьи равно $64 \cdot 49 = 3136$.

Используя закон умножения, часто нужно вычислить произведения натуральных чисел по порядку, начиная с 1. Произведение всех натуральных чисел от 1 до числа *n* называется ***«факториалом числа n»*** и обозначается *n!*

Принято, что 0!=1

1!=1

2!=2·1=2

3!=3·2·1=6

4!=4·3·2·1=24

5!=5·4·3·2·1=120

6!=6·5·4·3·2·1=720

Задача № 4. Вычислить значения выражений: а) 5!+4!; b) $\frac{7!-5!}{4!}$

а) 5!+4!=5·4·3·2·1+4·3·2·1=120+24=144;

в) $\frac{7!-5!}{4!}=\frac{4!\cdot5\cdot6\cdot7-4!\cdot5}{4!}=\frac{4!(210-5)}{4!}=205.$

Выполняется следующее равенство

n!=n(n−1)!=n(n−1)(n−2)!=n(n−1)(n−2)(n−3)! и т.д.

Задача № 5. Сократить дробь.

$$\frac{(n+1)!}{(n-2)!}=\frac{(n-2)!\cdot(n-1)\cdot n\cdot(n+1)}{(n-2)!}=(n-1)\cdot n\cdot(n+1)=n^3-n$$

При увеличении значения n, значение n! стремительно возрастает. Знак факториала удобно использовать, если нужно записывать большие числа.

Задача № 6. Сколькими различными способами можно составить список учеников, если в нём должно быть 25 различных учеников?

1·2·3·...·24·25=25!

Ответ: Список можно составить 25! различными способами.

Выводы по второй главе

1. Разработаны методические рекомендации по обучению теме «Математическая статистика». Определено, что при обучении учащихся теме «Математическая статистика» необходимо уделять внимание формированию у учащихся практических навыков извлечения

информации, представленной в таблицах, на диаграммах; составлять таблицы, строить диаграммы на основе данных; определять основные статистические характеристики числовых наборов.

2. Разработаны методические рекомендации по обучению теме «Теория вероятностей». Определено, что при обучении учащихся теме «Теория вероятностей» необходимо уделять внимание формированию у учащихся практических навыков оценивания вероятности события на простейших примерах, встречающихся в повседневной жизни.

3. Разработаны методические рекомендации по обучению теме «Комбинаторика». Определено, что при обучении учащихся теме «Комбинаторика» необходимо уделять внимание формированию у учащихся практических навыков оценивания количества возможных вариантов методом перебора или создания дерева возможных вариантов. И только после этого переходить к формализованному решению.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрим выполнение задач, поставленных во введении к данной дипломной работе:

1. Раскрыты цели обучения элементам теории вероятностей и математической статистики в школьном курсе алгебры основной школы.
2. Рассмотрены исторические аспекты введения стохастической линии в школьный курс математики.
3. Выполнен анализ статей и учебной литературы, посвященных введению и апробации стохастической линии в школьном курсе математики.
4. Раскрыта методика изучения элементов математической статистики.
5. Представлена методика изучения элементов теории вероятностей.
6. Описана методика изучения элементов комбинаторики.

Все это дает основание считать, что задачи, поставленные в исследовании, полностью решены.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баландина, И. Стохастическая линия в средней школе: Начнем с анализа / И. Баландина // Математика. –2009. – №14. –С. 12-19.

2. Бунимович, Е.А. Вероятность и статистика. 5-9 классы [Текст]: учебное пособие для общеобразовательных учебных заведений / Е.А. Бунимович, В.А. Булычев. — М.: Дрофа, 2002. — 160 с.

3. Бунимович, Е.А. О теории вероятностей и статистики в школьном курсе / Е.А. Бунимович, В.А. Булычев, Ю.Н. Тюрин, А.А. Макаров, И.Р. Высоцкий, И.В. Ященко // Математика в школе. - 2009. - №7. – С. 3 – 14.

4. Буняковский, В.Я. Основания математической теории вероятностей. – С.-Петербург. Типография Императорской Академии Наук. – 1846. –479 с.

5. Виленкин, Н.Я. Математика. 5 класс [Текст]: учеб. для общеобразоват. учреждений / Н.Я. Виленкин, В.И. Жохов, А.С. Чесноков, С.И. Шварцбурд. – 31-е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2013. – 280 с.: ил.

6. Виленкин, Н.Я. Математика. 6 класс [Текст]: учеб. для общеобразоват. учреждений / Н.Я. Виленкин, В.И. Жохов, А.С. Чесноков, С.И. Шварцбурд. – 30-е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2013. – 288 с.: ил.

7. Высоцкий, И.Р. Типичные ошибки в преподавании теории вероятностей и статистики/ И.Р. Высоцкий, И.В. Ященко //Математика в школе, 2014 г. - №4. – С. 32-43 Режим доступа: http://ptlab.mccme.ru/sites/ptlab.mccme.ru/files/vysockiy_yashchenko_tipich_osh_v_prep_tv_dlya_fraktala.pdf- Последнее обновление 08.05.2017.

8. Гнеденко Б.В. Очерк по истории теории вероятностей. - М.: Эдиториал УРСС. – 2001. – 88 с.

9. Гнеденко, Б.В. Политехнические аспекты преподавания математики в средней школе / Б.В. Гнеденко // На путях обновления школьного курса математики. – М., 1978. – С.154.

10. Горлач, Б.А. Теория вероятностей и математическая статистика [Текст]: учебное пособие / Б.А. Горлач. - СПб.: Лань, 2013. - 320 с.

11. Долматова, Т.А. Методический анализ изучения элементов статистики в курсе математики основной школы / Т. А. Долматова, О. С. Истифина.- 2016. - №2(40). - С. 38-44.

12. Дорофеев, Г.В. Алгебра. 7 класс [Текст]: учебник для общеобразовательных учебных заведений/Г.В. Дорофеев, С.Б. Суворова, Е.А. Бунимович, Л.В. Кузнецова, С.С. Минаева. – М.: Дрофа, 2003. – 278 с.

13. Дорофеев, Г.В. Алгебра. 8 класс [Текст]: учебник для общеобразовательных учебных заведений/Г.В. Дорофеев, С.Б. Суворова, Е.А. Бунимович, Л.В. Кузнецова, С.С. Минаева. – М.: Дрофа, 2000. – 282 с.

14. Дорофеев, Г.В. Алгебра. 9 класс [Текст]: учебник для общеобразовательных учебных заведений/Г.В. Дорофеев, С.Б. Суворова, Е.А. Бунимович, Л.В. Кузнецова, С.С. Минаева. – М.: Дрофа, 2002. – 286 с.

15. Дорофеев, Г.В. Математика. 5 класс [Текст]: учебник для общеобразовательных учебных заведений/Г.В. Дорофеев, И.В. Шарыгин. – М.: Дрофа, 2001. – 288 с.

16. Дорофеев, Г.В. Математика. 6 класс [Текст]: учебник для общеобразовательных учебных заведений/Г.В. Дорофеев, С.Б. Суворова, Е.А. Бунимович, Л.В. Кузнецова, С.С. Минаева. – М.: Дрофа, 2001. – 264 с.

17. Зубарева, И.И. Математика. 5 класс [Текст]: учеб. для общеобразоват. учреждений / И.И. Зубарева, А.Г. Мордкович. – 14-е изд., испр. и доп. – М. : Мнемозина, 2013. – 270 с. : ил.

18. Зубарева, И.И. Математика. 6 класс [Текст]: учеб. для общеобразоват. учреждений / И.И. Зубарева, А.Г. Мордкович. – 14-е изд., испр. и доп. – М. : Мнемозина, 2014. – 264 с. : ил.

19. Макарычев, Ю.Н. Алгебра. 7 класс [Текст]: учеб. для общеоразоват. Учреждений / Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, С.Б. Суворова; под ред. С.А. Теляковского. – 18-е изд. – М. : Просвещение, 2009. – 240 с.: ил.

20. Макарычев, Ю.Н. Алгебра. 8 класс [Текст]: учеб. для общеоразоват. учреждений / Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, С.Б. Суворова; под ред. С.А. Теляковского. – 15-е изд. – М.: Просвещение, 2007. – 271 с. : ил.

21. Макарычев, Ю.Н. Алгебра. 9 класс [Текст]: учеб. для общеоразоват. Учреждений / Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, С.Б. Суворова; под ред. С.А. Теляковского. – 18-е изд. – М.: Просвещение, 2000. – 272 с. : ил.

22. Макарычев, Ю.Н. Алгебра: элементы статистики и теории вероятностей [Текст]: учебное пособие для учащихся 7-9 классов / Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк. –3-е изд. - М.: Просвещение, 2005. - 78 с.

23. Макарычев, Ю.Н. Начальные сведения из теории вероятностей в школьном курсе алгебры / Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк //Математика в школе. - 2004. - №7. - С. 24.

24. Мордкович, А. Г. Алгебра. 7 класс. В 2 ч. Ч. 2 [Текст]: задачник для общеобразоват. учреждений / А. Г. Мордкович и др.; под ред. А. Г. Мордковича. — 17-е изд., стер. — М.: Мнемозина, 2013. — 271 с. : ил.

25. Мордкович, А. Г. Алгебра. 9 класс. В 2 ч. Ч. 2 [Текст]: задачник для общеобразоват. учреждений / А. Г. Мордкович и др.; под ред. А. Г. Мордковича. — 12-е изд., стер. — М.: Мнемозина, 2010. — 223 с. : ил.

26. Мордкович, А.Г. События. Вероятности. Статистическая обработка данных. Доп. параграфы к курсу алгебры 7-9 кл. / А.Г. Мордкович, П.В. Семенов. - 5-е изд. - М.: 2008. - 112 с.

27. Нахман, А.Д. Стохастическая линия как инновационная содержательно-методическая линия в курсе математики / А.Д. Нахман // Актуальные инновационные исследования: наука и практика. –2009. –№3-4. –12 с.

28. Примерная основная образовательная программа основного общего образования. Одобрена решением федерального учебно-методического объединения по общему образованию / М-во образования и науки РФ. – М.: Просвещение, 2015. – 560 с.

29. Седова, Н.С. О сформированности стохастической компетентности учителя математики / Н.С. Седова // Вестник Псковского Государственного Университета. Серия: Естественные и физико - математические науки. –2010. – №10. – С.111-126.

30. Студенецкая, В.Н. Статистика и теория вероятностей на пороге основной школы / В.Н. Студенецкая, О.М. Фадеева //Математика в школе. - 2004. - №6. - С. 64.

31. Тарасевич, А. К. Особенности изучения основ теории вероятностей в школьном курсе математики // Научно-методический электронный журнал «Концепт». – 2016. – Т. 11. – С. 1946–1950. – URL: http://e-koncept.ru/2016/86416.htm.

32. Ткачева, М.В. Элементы статистики и вероятность [Текст]: учебное пособие для 7-9 классов/ М.В. Ткачева, Н.Е. Федорова. - 2-е изд. - М.: 2005. - 112 с.

33. Тюрин, Ю.Н. Преподавание теории вероятностей и статистики в школе/ Ю.Н. Тюрин, А.А. Макаров, И.Р. Высоцкий, И.В. Ященко // Математика в школе, 2009г. №7 – С. 14-31.

34. Тюрин, Ю.Н. Преподавание теории вероятностей и статистики в школе/ Ю.Н Тюрин, А.А.Макаров, И.Р.Высоцкий, И.В.Ященко// Математика в школе.- 2009. – №7. – С. 2 – 6.

35. Тюрин, Ю.Н. Теория вероятностей и статистика [Текст]: методическое пособие для учителя / Ю. Н. Тюрин, А. А. Макаров, И. Р. Высоцкий, И. В. Ященко. – М: МЦНМО МИОО. – 2008. –52 с.

36. Тюрин, Ю.Н. Теория вероятностей и статистика [Текст]: учебное пособие для общеобразовательных учебных заведений/ Ю.Н. Тюрин, А.А. Макаров, И.Р. Высоцкий, И.В. Ященко.- М.: 2008. - 256 с.

37. Федеральный государственный образовательный стандарт общего основного образования / М-во образования и науки РФ. – М.: Просвещение, 2010. - 50 с. – Режим доступа: http://минобрнауки.рф/документы/938 - Последнее обновление 06.05.2017.

38. Щербатых, С.В. Об опыте обучения элементам комбинаторики, статистики и теории вероятностей в дореволюционной школе России // Психология образования в поликультурном пространстве. – 2010. – №4. – С.154-163.

39. Щербатых, С.В. Методическая система обучения стохастике в профильных классах общеобразовательной школы :дис. доктора педагогических наук : 13.00.02 / Щербатых Сергей Викторович; [Место защиты: Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова].- Москва, 2011.- 438 с.

40. Fisz, Marek. Probability Theory and Mathematical Statistics/ Krieger Pub Co.-1980.- 677 p.

41. Jaynes, E.T. Probability Theory: The Logic Of Science / Cambridge University Press.- 2003.- 759 p.

42. Karr, A. F. Probability/ Springer-Verlag New York.- 1993.-283 p.

43. Lehmann, E.L. Elements of Large-Sample Theory/ Springer.- 2004.-631 p.

44.Sahoo, Prasanna. Probability Theory and Mathematical Statistics/ University of Louisville.- 2013.- 698 p.