МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Тольяттинский государственный университет»

Институт математики, физики и информационных технологий

Кафедра «Алгебра и геометрия»

Направление подготовки 44.03.05 «Педагогическое образование»

Направленность (профиль) «Математика и информатика»

БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА

на тему **«МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ ТЕМЕ «ПОДОБНЫЕ ТРЕУГОЛЬНИКИ» В КУРСЕ ГЕОМЕТРИИ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ»**

Студент	И.А. Белунина	____________________
Руководитель	к.п.н., доцент И.В. Антонова	____________________
Консультант	к.п.н., А.В. Кириллова	____________________

Допустить к защите

Заведующий кафедрой д.п.н., профессор Р.А. Утеева ______________

«____»__________2017 г.

Тольятти 2017

АННОТАЦИЯ

Целью бакалаврской работы является выявление методических особенностей обучения учащихся теме «Подобные треугольники» в курсе геометрии основной школы и разработка системы упражнений по теме исследования.

Для достижения учащимися обязательных результатов освоения программы основного общего образования по математике, повышения качества их математической подготовки необходимы выявление методических особенностей обучения учащихся теме «Подобные треугольники» в курсе геометрии основной школы, а также разработка систем упражнений, формирующих соответствующие понятия в школьном курсе геометрии.

Бакаларская работа состоит из введения, двух глав, заключения, списка литературы и приложений.

Глава I посвящена теоретическим аспектам обучения учащихся теме «Подобные треугольники» в курсе геометрии основной школы. Рассмотрены различные аспекты развития основных понятий, связанных с подобием фигур. Раскрыта методика введения понятия подобных треугольников. Выявлены различные подходы к обучению учащихся теме «Подобные треугольники» в курсе геометрии основной школы. Рассмотрены приемы и методы решения геометрических задач по данной теме.

В главе II представлены методические аспекты обучения учащихся теме «Подобные треугольники» в курсе геометрии основной школы. Разработаны методические рекомендации по обучению данной теме. Представлена разработанная система задач по теме «Подобные треугольники» в курсе геометрии основной школы. Рассмотрены задачи ОГЭ по теме исследования.

Список литературы содержит 50 наименований.

ABSTRACT

The title of the bachelor's thesis is "Methods of Similar triangles topic teaching in the course of geometry of the secondary school".

Currently, there is a large number of methodical literature on the study of similar triangles. The aim of the bachelor's thesis is to give some information about methodical specifics of teaching this topic and creating a system of tasks on this topic.

The object of the bachelor's thesis is the process of teaching geometry in a secondary school course. The subject of the bachelor's thesis is methodical specifics of teaching pupils to the "Similar triangles" topic in the course of geometry of the secondary school.

Firstly, we discuss historical aspects of the notion of similarity development. Then we analyse the theoretical material of school textbooks of different authors on the "Similar triangles" topic and distinguish the main types of tasks on this topic. Next we elucidate different approaches to the introduction of the concept of similar triangles.

The special part of the project gives details about methodical recommendations for "Similar triangles" topic teaching in the course of geometry of the secondary school. We also report the results of analysis of the tasks of the basic state exam on the research topic. Finally, we present the system of tasks on the "Similar triangles" topic in the course of geometry of the secondary school.

To achieve the results of mastering the basic general education program in mathematics, it is necessary to reveal the methodical specifics of teaching pupils to the "Similar triangles" topic in the course of geometry of the secondary school and to develop appropriate systems of tasks. Thus, this gives grounds to believe that the research objectives have been completely solved.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность исследования. Учение о подобии фигур, основывающееся на понятиях отношения и пропорций, было создано в Древней Греции в 5-4 веках до нашей эры. Основы учения о пропорциональности подробно разработал древнегреческий философ Евдокс (около 408 – 355 г. до н.э.), которые систематически изложил в пятой и шестой книгах своего главного труда «Начала» Евклид (около 365 – 300 г. до н.э.). Понятие подобия – одно из важнейших понятий геометрии. Оно широко применяется в практической деятельности. К подобию фигур, в том числе треугольников, обращаются при определении расстояния до недостижимого предмета, принцип подобия используется в устройствах различных инструментов и приборов для измерений [11; 43].

Вместе с этим, согласно примерной основной образовательной программе основного общего образования [30], для обеспечения возможности успешного продолжения образования, выпускник должен получить возможность научиться: оперировать понятиями «подобие», «подобные фигуры», «подобные треугольники»; применять теорему о пропорциональности отрезков при решении задач; использовать отношения для решения задач, возникающих в реальной жизни.

Понятие подобия имеет большое образовательное значение. В школьном курсе математики тема «Подобие фигур» в зависимости от выбранного учебно-методического комплекта вводится в 8 или 9 классе. Данная тема занимает центральное место в изучаемом курсе геометрии, так как сведения о подобных треугольниках широко применяются не только в процессе изучения главы «Подобие фигур», но и в последующих разделах курса, а также в курсе стереометрии.

В настоящее время существует большое количество методической литературы по изучению в основной школе подобных фигур: данная тема имеет место во всех учебниках геометрии. Метод подобия – один из самых эффективных методов решения большого класса задач на доказательство, построение и вычисление. Доказательство теорем с применением подобия намного легче доказательств, которые основываются на признаках равенства треугольников, так как обычно эти доказательства не предполагают каких-либо вспомогательных построений, выполнение которых вызывает у школьников трудности. Решение задач на геометрические преобразования способствует развитию у обучающихся пространственного мышления, воображения, а также научного мировоззрения.

Вместе с этим, отметим, что задачи по теме «Подобие фигур» входят в итоговую аттестацию учащихся по математике.

Проблема исследования состоит в выявлении методических особенностей обучения учащихся теме «Подобные треугольники» в курсе геометрии основной школы.

Объект исследования: процесс обучения геометрии в курсе основной школы.

Предмет исследования: методика обучения учащихся теме «Подобные треугольники» на уроках геометрии в основной школе.

Цель исследования: выявить методические особенности обучения учащихся теме «Подобные треугольники» в курсе геометрии основной школы и разработать систему упражнений по теме исследования.

Задачи исследования:

1. Рассмотреть исторические аспекты развития понятия подобия.

2. Представить анализ теоретического материала школьных учебников геометрии по теме «Подобные треугольники».

3. Выделить основные типы задач по теме «Подобные треугольники» в учебниках разных авторов.

4. Выявить различные подходы к введению понятия подобных треугольников и основных понятий, связанных с ним.

5. Раскрыть различные подходы к методике обучения учащихся теме «Признаки подобия треугольников».

6. Выявить методические особенности обучения учащихся применению понятия подобия при решении задач и к доказательству теорем.

7. Рассмотреть методические особенности обучения данной теме учащихся 8-9 классов.

8. Рассмотреть задачи ОГЭ по теме исследования.

9. Разработать систему задач по теме «Подобные треугольники» для учащихся 8-9 классов.

Для решения задач были использованы следующие **методы исследования**: анализ работ по истории математики, школьных программ, методических пособий, учебников и учебных пособий, изучение опыта работы учителей математики.

Теоретическая значимость исследования состоит в том, что в нем: 1) рассмотрены исторические аспекты развития понятия подобия; 2) представлен анализ теоретического материала школьных учебников геометрии по теме «Подобные треугольники»; 3) выделены основные типы задач по теме исследования в учебниках разных авторов; 4) выявлены различные подходы к введению понятия подобных треугольников и основных понятий, связанных с ним; 5) раскрыты различные подходы к методике обучения учащихся теме «Признаки подобия треугольников»; 6) выявлены методические особенности обучения учащихся применению понятия подобия при решении задач и к доказательству теорем.

Практическая значимость работы заключается в том, что в ней представлена система задач по теме «Подобные треугольники» для учащихся 8-9 классов, которая может использоваться учителями математики основной школы и студентами в ходе прохождения педагогической практики.

Апробация результатов исследования. Теоретические выводы и практические результаты исследования были апробированы на 1-ом этапе научной студенческой конференции «Дни науки» института математики, физики и информационных технологий ТГУ, апрель 2017 г. (диплом за II место).

На защиту выносятся:

1. Методические рекомендации по обучению учащихся теме «Подобные треугольники» в курсе геометрии основной школы.

2. Система задач по теме «Подобные треугольники» в курсе геометрии основной школы.

Бакалаврская работа состоит из введения, двух глав, заключения, списка литературы и Приложений.

Во введении сформулированы основные характеристики исследования: актуальность, проблема, объект, предмет, цель, задачи и методы исследования.

Глава I посвящена теоретическим аспектам обучения учащихся теме «Подобные треугольники» в курсе геометрии основной школы. Рассмотрены различные аспекты развития основных понятий, связанных с подобием фигур. Раскрыта методика введения понятия подобных треугольников. Выявлены различные подходы к обучению учащихся теме «Подобные треугольники» Рассмотрены приемы и методы решения геометрических задач по теме.

В Главе II представлены методические аспекты обучения учащихся теме «Подобные треугольники» в курсе геометрии основной школы. Разработаны методические рекомендации по обучению данной теме. Представлена разработанная система задач по теме «Подобные треугольники» в курсе геометрии основной школы. Рассмотрены задачи ОГЭ по теме исследования.

В заключении сформулированы основные результаты и выводы проведенного исследования.

Список литературы содержит 50 наименований.

В Приложении представлены признаки подобия треугольников и типы задач по теме исследования в учебниках геометрии разных авторов.

ГЛАВА I. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОБУЧЕНИЯ ТЕМЕ «ПОДОБНЫЕ ТРЕУГОЛЬНИКИ» В КУРСЕ ГЕОМЕТРИИ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ

§1. Из истории развития понятия подобия в математике

Понятие *подобия* возникло в глубокой древности. Особенности архитектуры и построений, множество требований и условий работы техники, удобства и правил экономичного возведения сооружений и зданий способствовали возникновению и дальнейшему развитию понятия пропорциональных отрезков. В Древнем Египте построениями, свидетельствующими о том, что египтяне владели немалочисленными знаниями из теории отношений, служат тонкости деталей гробницы Менеса или тех же пирамид в Гизе, которые были возведены в 3-ем тысячелетии до нашей эры. Сохранились и похоронные покои отца фараона Рамсеса II, где есть стена, выложенная сетью квадратов, которая переносит на стену по принципу подобия маленькие картинки в увеличенном виде.

Не стоит упускать из внимания и древние памятные сооружения других государств: дворцы и архитектуру Персии, вавилонские зиккураты, арабские, китайские и другие памятники древнего мира. О том, что отрезки, которые образуются при пересечении прямых другими параллельными между собой прямыми, будут пропорциональными, знали еще вавилонские ученые. Об этом свидетельствуют сохранившиеся таблички из клинописи, в которых и повествуется о способе построения *пропорциональных отрезков* с помощью проведения параллельных прямых к катетам прямоугольного треугольника. Сейчас же это открытие, как нам известно, приписывается Фалесу Милетскому [11, С. 280].

В Древнем Китае изобрели прием, с помощью которого можно измерить высоту недостижимого предмета. Эта задача и ее решение описываются в «Математическом трактате о морском острове» Лю Хуэя. Суть ее заключается в следующем. Наблюдается некий остров, для чего устанавливается два шеста с одинаковой высотой h, которые располагаются друг от друга на расстоянии равном d (Рис. 1). Естественно, рассматривается тот случай, когда оба шеста с островом находятся на одной прямой. Далее говорится, что если человек отойдет от первого шеста на a единиц и ляжет, то его глаза будут наблюдать верхний конец шеста, который в свое время совпадет с вершиной острова. А отойдя от другого шеста на b единиц, человек будет наблюдать второй конец, также совпадающий с вершиной. Требуется найти высоту острова и расстояние между ним и первым шестом [44, С. 192].

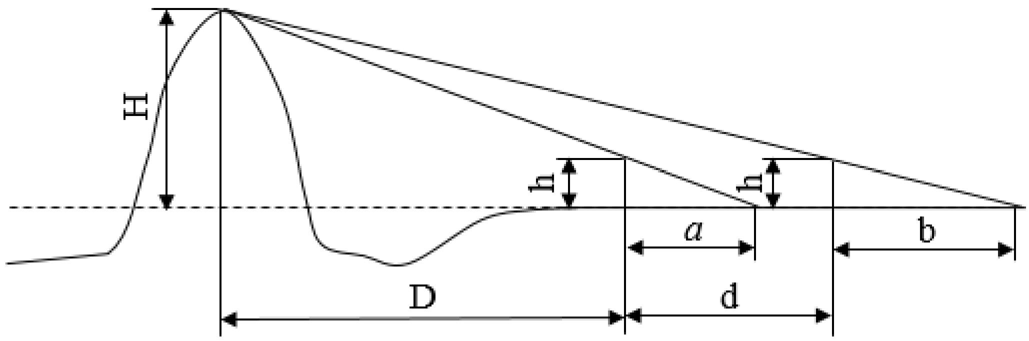


Рис. 1

Обозначим искомую высоту острова через H, а расстояние от него до шеста – через D. Тогда мы имеем две пары подобных прямоугольных треугольников: каждый из двух маленьких с катетом h подобен соответствующему ему большому треугольнику со стороной H. Из подобия одной пары следует пропорция $\frac{D+a}{a} = \frac{H}{h}$, а из второй – $\frac{D+d+b}{b} = \frac{H}{h}$. Поэтому $\frac{D+a}{a} = \frac{D+d+b}{b}$, откуда $D = \frac{ad}{b-a}$. Теперь возвращаемся к 1-ому отношению и находим высоту острова: $H = \frac{dh}{b-a} + h$. Древнекитайский способ измерения высоты недоступного предмета полностью основывался на понятиях отношения и подобия.

Описывает и раскрывает основы учения о *подобии фигур* и древнегреческий математик Евклид (около 365 – 300 г. до н.э.) в VI книге главного своего труда «Начала», который был написан около 300 лет до нашей эры. В это учение, созданное в V-IV веках старого времени, вошли труды таких философов, как Евдокса Книдского, Гиппократа Хиосского, Архита Тарентского и других. Начинается эта книга со слов о том, что *подобными фигурами* являются те, у которых соответственно равны углы и пропорциональны стороны. Вместе с этим, в наших школьных учебниках доказательство признаков подобия треугольников, например, приводится не в той форме, которую предложил Евклид. Мы опираемся на лемму о том, что если в любом треугольнике провести прямую, параллельную основанию, которая пересечет другие стороны, то она будет отсекать треугольник, подобный данному. Это утверждение было впервые введено Клавиусом в его комментариях, которые издались в 1574 году, к Евклидовым «Началам» [11, С. 282].

Как было отмечено, основы учения о пропорциональности подробно разработал древнегреческий философ Евдокс (около 408 – 355 г. до н.э.) – Евклид же их систематически изложил в двадцати пяти предложениях пятой и тридцати трех предложениях шестой книг «Начал». В начале первой из них идут определения, большинство из которых связано с различными отношениями. Шестая же книга содержит учения о планиметрических пропорциях и начинается она с пяти определений, два из которых знакомят нас с понятием подобия фигур и деления отрезка в данном отношении [18, С. 135].

Подобие фигур и его свойства с древних времен применяются и в практической деятельности: в чертежных схемах, при формировании любой географической карты или землемерных работах на местности и т.п.

Всегда имели немалую важность относительно простые и общепонятные пути и способы построения фигуры, подобной данной. Одним из них является «способ палетки», который, как правило, используется при необходимости сделать копию рисунка, картины или портрета. Этот метод был известен еще в Древнем Египте. Чтобы «скопировать» изображение, мы накладываем на него палетку, которая представляет собой просвечивающую насквозь пластинку, разлинованную сетью квадратов. На месте, где мы будем получать копию, чертится временная квадратная сетка, квадраты которой либо меньше, либо больше тех, что на палетке, в зависимости от того, каким образом мы хотим изменить наш рисунок - увеличить или уменьшить. Непостоянную сетку по завершении копирования мы сотрем. Отношение сторон квадратов двух полученных сеток как раз и будет представлять собой коэффициент подобия [11, С. 283].

Французский математик и философ Рене Декарт (1596 – 1650 г.) в одной из своих работ приводил задачу, в которой нужно было, зная единичный отрезок, разделить отрезок a на отрезок b, пользуясь только линейкой и циркулем [5, С. 39].

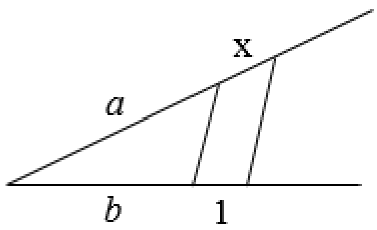


Рис. 2

Решалась эта задача, сводимая к построению некого отрезка $x = \frac{a}{b}$, с помощью составления пропорции $\frac{x}{1} = \frac{a}{b}$ (Рис. 2).

Идея данного способа широко используется с давних времен, более того – она применима и по сей день в строительных и монтажных работах непосредственно на стройплощадке. Например, при устройстве разуклонки кровли или геодезической съемке местности.

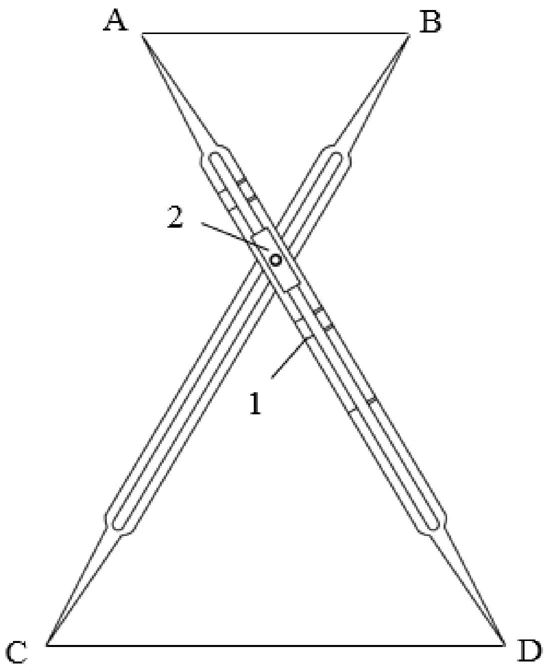


Рис. 3

Еще одним важным открытием, в особенности для такой науки как картография, стал пропорциональный циркуль, который изобрел великий итальянский ученый Галилео Галилей (1564 – 1642). Этот предмет предназначен для того, чтобы уменьшать или увеличивать чертеж в произвольном отношении (Рис. 3). В «Построении геометрическим и военным циркулем» 1606 г. Галилей дал описание своего изобретения, что позволило научным работникам и техникам применять его, чтобы производить различные построения и расчеты [11, С. 284]. Шарнир (2) циркуля устанавливают таким образом, чтобы черта, которую на него наносят в требуемом положении, совпадала с определенным значением K на шкале (1) одной из ножек инструмента. Тогда отношение отрезков $AB{:}CD$ также считается равным K, то есть коэффициенту подобия двух равнобедренных треугольников.

В 1858 году было получено доказательство А.М. Лежандра теоремы Пифагора, которое полностью основывается на понятии подобных треугольников. Доказательство, приведенное Лежандром, интересно тем, что оно требует минимального количества геометрических построений и алгебраических выкладок. Рассмотрим данное доказательство теоремы Пифагора.

Проведем в прямоугольном треугольнике на гипотенузу высоту (Рис. 4), которая разделит ее на два отрезка x и y. Тогда мы получим две пары подобных треугольников (два прямоугольных треугольника с катетом h подобны исходному треугольнику), из подобия которых будут следовать соотношения

$$\frac{x}{a} = \frac{a}{c} \Rightarrow x = \frac{a^2}{c} \quad \text{и} \quad \frac{y}{b} = \frac{b}{c} \Rightarrow y = \frac{b^2}{c}.$$

Но $x + y = c$, то есть $\frac{a^2}{c} + \frac{b^2}{c} = c \;\Rightarrow\; a^2 + b^2 = c^2$. Что нам и требовалось доказать [26, С. 36].

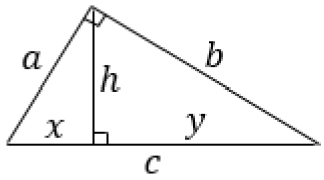


Рис. 4

Таким образом, с понятием *подобия* люди были знакомы 5 тысяч лет назад: подобие широко применялось в строительстве, в измерительных работах. Одинаковые по форме, но различные по величине фигуры нередко встречаются в памятниках Древнего мира. Для построения *пропорциональных отрезков* вавилоняне использовали деление прямых двумя другими параллельными между собой прямыми. С этим способом знакомятся ученики и в наше время – через формулировку всем известной теоремы Фалеса. С древних времен, составляя планы и чертежи, люди также использовали пропорции и отношения. *Признаки подобия* же треугольников впервые были приведены в «Началах» Евклида, но доказывались они в то время иначе.

§2. Анализ содержания теоретического материала темы «Подобные треугольники» в учебниках геометрии

В федеральном государственном образовательном стандарте основного общего образования (ФГОС ООО) [35] отмечается, что в процессе изучения темы «Подобие фигур» учащиеся должны научиться:

- находить значение длины линейного элемента той или иной фигуры, отношения этих элементов и градусные меры углов, используя понятия, свойства и признаки фигур и их элементов, а также различные отношения фигур (равенство, *подобие*, симметрия и т.д.);

- решать задачи на доказательство, пользуясь изученными свойствами фигур и их отношений;

- решать задачи на построение с применением основных алгоритмов построения с помощью циркуля и линейки.

В результате изучения темы выпускник получит возможность:

- овладения основными принципами *метода подобия*;

- овладения навыками решения задач на построение с помощью метода подобия.

В примерной основной образовательной программе основного общего образования [30] указывается, что выпускники также должны научиться:

- оперировать понятием преобразования подобия, владеть приёмами построения фигур с использованием подобия, применять полученные знания и опыт построений в смежных предметах и в реальных ситуациях окружающего мира;

- строить фигуру, подобную данной, пользоваться свойствами подобия для обоснования свойств фигур;

- применять подобие и его свойства для построений и вычислений;

- использовать свойства подобия и равенства фигур при решении задач.

Для анализа содержания теоретического материала темы «Подобные треугольники» были выбраны учебники из федерального перечня учебников, рекомендуемых при реализации обязательной части основной образовательной программы, [37]: «Геометрия. 9 класс» А.Д. Александрова [2], «Геометрия. 7-9 классы» Л.С. Атанасяна [3] и «Геометрия. 7-9 классы» А.В. Погорелова [29].

В отличие от остальных, выбранный *учебник геометрии А.Д. Александрова* является учебником с углубленным изучением математики. По его программе на изучение темы «Подобие», как правило, дается 12 часов, пять из которых отводится на решение задач, и один – на написание контрольной работы [7, С. 84]. Автором предлагается один параграф по данной теме, который в свою очередь разбивается на несколько пунктов, представленных в таблице (Табл. 1).

Таблица 1

Содержание темы «Подобие» в учебнике А.Д. Александрова

Авторы учебника	***Содержание темы***
9 класс (12 ч)	
А.Д. Александров, А.Л. Вернер, В.И. Рыжик [2]	Определение подобия. Гомотетия. Свойства гомотетии. Свойства подобия. Признаки подобия треугольников. Метод подобия. Подобие при изображении плоских фигур. Заполнение плоскости подобными фигурами.

Рассмотрим перечень знаний, которыми должны обладать школьники в момент их первого знакомства с понятием подобия по учебнику А.Д. Александрова.

Базовые знания:

- преобразования фигур;

- движения фигур, их виды и свойства;

- равенство фигур;

- теоремы о единственности движения, о задании движения, о классификации движений;

- теоремы синусов и косинусов;

- два рода движений (первый и второй род);

- симметрия фигур;

- отношения равенства, равновеликости и равносоставленности фигур.

Прежде чем дать определение подобия, автор учебника приводит несколько примеров подобных преобразований (уменьшенная копия чертежа, перенос изображения с фотопленки на фотобумагу и т.д.). Само же определение имеет следующую формулировку.

Определение 1. Подобием фигуры с коэффициентом $k > 0$ называется такое ее преобразование, при котором любым двум точкам X и Y фигуры сопоставляются такие точки X' и Y', что $X'Y' = kXY$ (Рис. 5) [2, С. 161].

Далее учащимся предлагается ознакомиться с понятием *гомотетии*, важным примером подобия, и ее свойствами, изучив которые, ученики самостоятельно смогут доказать первые три свойства подобия. Доказательства четвертого, пятого и шестого свойств приводит учитель.

1. Подобие отрезок переводит в отрезок.

2. Подобие сохраняет величину угла.

3. Подобие переводит треугольник в треугольник. Соответственные стороны этих треугольников пропорциональны, а соответственные углы равны.

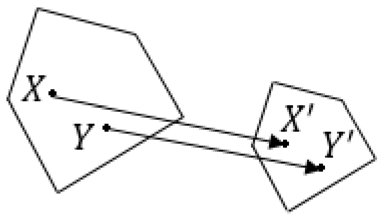


Рис. 5

4. В результате подобия с коэффициентом k площадь фигуры умножается на k^2.

5. Композиция подобий с коэффициентами k_1, k_2 есть подобие с коэффициентом $k_1 k_2$.

Таким образом, установив, что у подобных треугольников равны соответственные углы и пропорциональны соответственные стороны, автор учебника приступает к изложению признаков подобия треугольников.

В качестве первого, второго и третьего признаков подобия треугольников у А.Д. Александрова выступают следующие теоремы соответственно.

Теорема 1. Если стороны одного треугольника пропорциональны сторонам другого треугольника, то эти треугольники подобны [2, С. 166].

Доказательство. Пусть стороны треугольников ABC и $A'B'C'$ пропорциональны, то есть выполняются следующие равенства:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{A'C'}{AC}.$$

Укажем подобие, которое переведет ΔABC в $\Delta A'B'C'$. Сначала переведем ΔABC гомотетией f с любым центром и коэффициентом $k = \frac{A'B'}{AB}$ в $\Delta A_1B_1C_1$ (Рис. 6). Так как $A_1B_1 = kAB,\ \ B_1C_1 = kBC,\ \ A_1C_1 = = kAC$, а из условия следует, что $A'B' = = kAB,\ \ B'C' = kBC$ и $A'C' = kAC,$ то $A'B' = A_1B_1,\ B'C' = B_1C_1,\ A'C' = A_1C_1$. Поэтому $\Delta A'B'C' = \Delta A_1B_1C_1$. По теореме о задании движения, в которой говорится, что для двух заданных равных треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ $(A_1B_1 = AB,\ A_1C_1 = AC,\ B_1C_1 = = BC)$ существует движение плоскости, которое переводит точку A в A_1, B в B_1 и C в C_1, найдется такое движение g, которое переводит $\Delta A_1B_1C_1$ в $\Delta A'B'C'$.

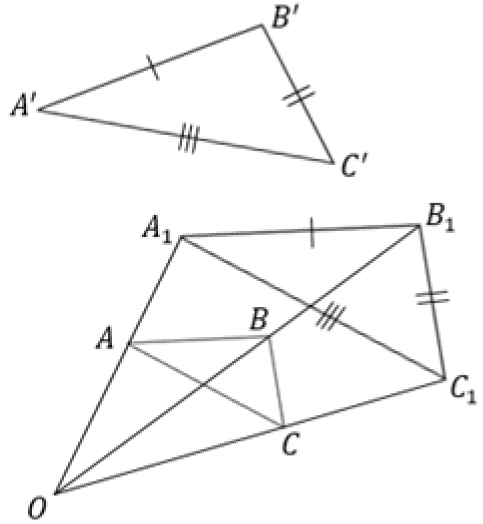


Рис. 6

Выполнив сначала гомотетию f, а затем движение g, мы осуществим подобие $g \circ f$, которое переводит ΔABC в $\Delta A'B'C'$. **Теорема доказана**.

Таким образом, доказательство первого признака подобия основывается на понятии гомотетии и теореме о задании движения.

Теорема 2. Если два угла одного треугольника равны двум углам другого треугольника, то такие треугольники подобны [2, С. 167].

Доказательство. Пусть в треугольниках ABC и $A'B'C'$ $\angle A' = \angle A$ и $\angle B' = B$ (Рис. 7).

Тогда и $\angle C' = \angle C$. По теореме синусов из ΔABC получим, что $\frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B}$. Аналогично, из треугольника $A'B'C'$: $\frac{a'}{b'} = \frac{\sin A'}{\sin B'}$. Так как $\angle A' = \angle A$, то $\sin A' = \sin A$, а так как $\angle B' = \angle B$, то $\sin B' = \sin B$. Поэтому отношения в правых частях составленных равенств равны, а потому $\frac{a}{b} = \frac{a\prime}{b\prime}$. Следовательно, $\frac{a\prime}{a} = \frac{b\prime}{b}$. Аналогично получаем, что $\frac{a\prime}{a} = \frac{c\prime}{c}$. Итак, стороны ΔABC и $\Delta A'B'C'$ пропорциональны. Значит, эти треугольники подобны по первому признаку. **Теорема доказана**.

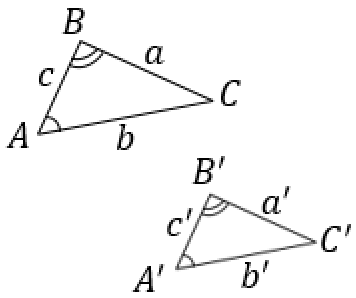


Рис. 7

Теорема 3. Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника и углы, заключенные между этими сторонами, равны, то треугольники подобны [2, С. 167].

Доказательство. Пусть у треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ $a_1 = ka$, $b_1 = kb, \angle C_1 = \angle C$ (Рис. 8).

По теореме косинусов ${c_1}^2 = {a_1}^2 + {b_1}^2 - 2a_1b_1 \cos C_1$, $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$. Так как $a_1 = ka, b_1 = kb$ и $\cos\angle C_1 = \cos\angle C$, то

$${c_1}^2 = k^2a^2 + k^2b^2 - 2k^2ab\cos C = k^2 \ a^2 + b^2 - 2ab\cos C \ = k^2c^2.$$

Поскольку ${c_1}^2 = k^2c^2$, то $c_1 = kc$ и, стало быть, все стороны треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ пропорциональны. Следовательно, эти треугольники подобны по первому признаку. **Теорема доказана**.

Как мы видим, второй и третий признаки подобия треугольников в учебнике А.Д. Александрова доказываются через теоремы синусов и косинусов (соответственно) и уже доказанный первый признак.

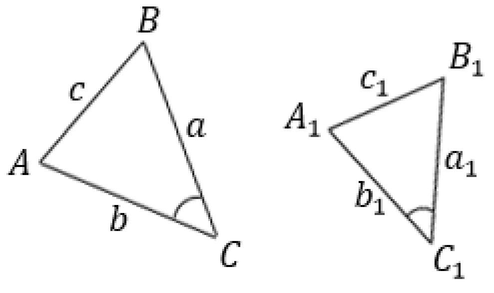


Рис. 8

Заметим, что в учебниках геометрии 60-80-х годов 20 в. имел место и *четвертый признак подобия треугольников*. Например, он рассматривался в учебнике Н.А. Глаголева [9, С. 156].

Теорема 4. Два треугольника подобны, если две стороны одного пропорциональны двум сторонам другого и углы, лежащие против двух соответственно пропорциональных сторон равны и если, кроме того, углы, лежащие против других пропорциональных им сторон, одноименные (то есть или оба острые, или оба тупые).

Доказательство. Пусть $\angle B = \angle B_1$, $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{A_1C_1}{AC}$, $\angle C$ и $\angle C_1$ – острые (Рис. 9). Построим треугольник, подобный треугольнику ABC при коэффициенте подобия $k = \frac{A_1B_1}{AB} = \frac{A_1C_1}{AC}$, приняв за центр подобия точку B. Мы получим $\Delta A'BC'$, в котором $A'B = k \cdot AB, A'C' = k \cdot AC$. Сравним треугольники $\Delta A'BC'$ и $\Delta A_1B_1C_1$. Замещая в равенствах $A'B = k \cdot AB, A'C' = k \cdot AC$ величину k равной ей величиной $k = \frac{A_1B_1}{AB} = \frac{A_1C_1}{AC}$, получим: $A'B = \frac{A_1B_1}{AB} \cdot AB = A_1B_1$, $A'C' = \frac{A_1C_1}{AC} \cdot AC = A_1C_1$.

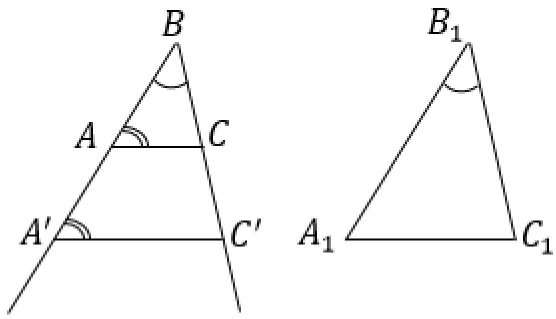


Рис. 9

Таким образом, в $\Delta A'BC'$ и $\Delta A_1B_1C_1$ $\angle B = \angle B_1, A'B = A_1B_1, A'C' =$ $= A_1C_1$, $\angle C_1$ и $\angle C$ – острые, а потому $\Delta A'BC' = \Delta A_1B_1C_1$, следовательно, $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$. **Теорема доказана**.

Нетрудно заметить, что *четвертый признак подобия треугольников* включает в себя равенство двух углов, то есть второй признак подобия по учебнику А.Д. Александрова. Поэтому он и перестал включаться в школьную программу по геометрии.

На следующих уроках по программе учебника А.Д. Александрова, учащиеся, изучая *метод подобия*, решают задачи на построение, а также рассматривают примеры подобия при изображении плоских фигур, знакомятся с масштабом и с некоторыми примерами множеств Жюлио, в основе которых лежит понятие подобия (самоподобия). В конце параграфа автором приводится перечень устных вопросов по пройденному материалу на повторение и список задач по различным рубрикам («дополняем теорию», «смотрим», «рисуем», «планируем», «доказываем», «исследуем», «строим», «применяем геометрию», «рассуждаем», «участвуем в олимпиаде»).

Таким образом, к *вводимым понятиям* параграфа «Подобие» у А.Д. Александрова можно отнести:

- подобие фигур;

- коэффициент подобия;

- гомотетия.

К *вводимым утверждениям*:

1. Свойства гомотетии и подобия.

2. Признаки подобия треугольников.

Теоретический материал по теме «Подобные треугольники» *в учебнике Л.С. Атанасяна* значительно отличается от материалов учебника А.Д. Александрова, так как второй предназначен для классов с углубленным изучением математики. На изучение темы «Подобные треугольники», содержание которой представлено в таблице (Табл. 2), по данному учебнику отводится 19 часов. Два часа отводится на написание контрольных работ после второго и четвертого параграфов.

Рассмотрим базовые знания, которыми должны обладать школьники по учебнику Л.С. Атанасяна.

Базовые знания:

- признаки равенства треугольников;

- теоремы об углах, образованных двумя параллельными прямыми и секущей;

- площадь треугольника;

- отношение отрезков;

- теорема об отношении площадей треугольников, имеющих по равному углу;

- теорема о сумме углов треугольника.

Таблица 2

Содержание темы «Подобные треугольники» в учебнике Л.С. Атанасяна

Авторы учебника	***Содержание темы***	***Кол-во часов***
	8 класс	
Л.С. Атанасян,	§1. Определение подобных треугольников.	2 ч:
В.Ф. Бутузов,	Пропорциональные отрезки.	1
С.Б. Кадомцев,	Определение подобных треугольников.	1
Э.Г. Позняк,	Отношение площадей подобных треугольников.	
И.И. Юдина	§2. Признаки подобия треугольников	5 ч:
[3]	Первый признак подобия треугольников.	2
	Второй признак подобия треугольников.	2
	Третий признак подобия треугольников.	(+1 ч на решение задач)
	§3. Применение подобия к доказательству теорем и решению задач.	7 ч:
	Средняя линия треугольника.	2
	Пропорциональные отрезки в прямоугольном треугольнике.	2
	Практические приложения подобия треугольников.	2
	О подобии произвольных фигур.	1
	§4. Соотношения между сторонами и углами прямоугольного треугольника.	3 ч:
	Синус, косинус и тангенс острого угла прямоугольного треугольника.	1
	Значения синуса, косинуса и тангенса для углов 30°, 45° и 60°.	1

Глава «Подобные треугольники» начинается с параграфа, где дается определение подобных треугольников (определение 2), которое основывается не на преобразовании подобия, а на пропорциональности сходственных сторон и равенстве соответствующих углов, так как с движениями и преобразованиями по учебнику Л.С. Атанасяна учащиеся будут знакомиться гораздо позднее [3].

Определение 2. Два треугольника называются подобными, если их углы соответственно равны и стороны одного треугольника пропорциональны сходственным сторонам другого треугольника [3, С. 138].

Изучив понятие подобных треугольников, признаки подобия, а также рассмотрев задачи на построение и применение подобия при проведении различных измерительных работ на местности, учащиеся знакомятся и с понятием подобия для произвольных фигур.

Определение 3. Фигуры F и F_1 называются подобными, если каждой точке фигуры F можно сопоставить точку фигуры F_1 так, что для любых двух точек M и N фигуры F и сопоставленных им точек M_1 и N_1 фигуры F_1 выполняется равенство $\frac{MN}{M_1N_1} = k,$ где k – одно и то же положительное число для всех точек. При этом предполагается, что каждая точка фигуры F_1 оказывается сопоставленной какой-то точке фигуры F. Число k называется коэффициентом подобия фигур F и F_1[3, С. 151].

На первых уроках необходимо ввести *понятие пропорциональности отрезков*, опираясь на которое после, и будут приводиться определения подобных треугольников и коэффициента подобия. Учащиеся должны научиться формулировать определение подобных треугольников, ознакомиться с теоремой об отношении их площадей, доказать ее, а также уметь приводить примеры подобных треугольников, уметь их распознавать по рисункам.

Изучая *признаки подобия*, учащиеся должны учиться их доказывать и формировать навыки применения этих знаний при решении задач. В отличие от учебника А.Д. Александрова, опорой доказательств признаков подобия треугольников у Л.С. Атанасяна является теорема об отношении площадей треугольников, у которых есть равный угол, а не теоремы косинусов и синусов [4, С. 114]. Также стоит заметить, что признаки подобия треугольников в двух рассмотренных учебниках даются в разном порядке: первый признак подобия у Александрова сопоставляется третьему у Атанасяна, второй – первому, третий – второму.

По программе к данному учебнику на следующих уроках ученики должны учиться формулировать и доказывать теоремы о средней линии треугольника, о пересечении его медиан, о пропорциональных отрезках в прямоугольном треугольнике, уметь объяснить, как применяется метод подобия в задачах на построение и как можно использовать свойства подобия треугольников в измерительных работах на местности [7, С. 20]. В конце главы автором приводятся определения синуса, косинуса и тангенса острого угла прямоугольного треугольника. Раннее ведение этих понятий, в первую очередь, связано с тем, что они необходимы ученикам на уроках физики уже в самом начале 9 класса. Доказательство того, что если два прямоугольных треугольника имеют по равному острому углу, то синусы этих углов равны, косинусы этих углов равны и тангенсы этих углов равны, Л.С. Атанасян приводит именно с использованием понятия подобных треугольников и признаков подобия [4, С. 125].

Можно выделить следующие *вводимые понятия* главы «Подобные треугольники» учебника геометрии Л.С. Атанасяна:

- пропорциональные отрезки;
- подобные треугольники;
- коэффициент подобия;
- средняя линия треугольника;
- среднее геометрическое;
- гомотетия;
- синус, косинус и тангенс острого угла прямоугольного треугольника.

Вводимые утверждения:

1. Теорема об отношении площадей подобных треугольников.

2. Признаки подобия треугольников.

3. Теорема о средней линии треугольника.

4. Теорема о точке пересечения медиан треугольника, которая делит каждую медиану в отношении 2:1, считая от вершины.

5. Утверждения о среднем геометрическом.

6. Основное тригонометрическое тождество.

В содержании теоретических основ темы «Подобные треугольники» *учебника А.В. Погорелова*, содержание которого представлено в таблице (Табл. 3), помимо понятия преобразования подобия, подобия фигур и признаков подобия треугольников, автор предлагает на изучение еще один вопрос – вопрос об углах, которые связаны с окружностью, в котором теоремы о пропорциональности отрезков хорд и секущих окружности доказываются с помощью понятия подобных треугольников. Но несмотря на это, одной из главных задач данного параграфа все равно остается усвоение и формирование у учащихся умения применять признаки подобия треугольников, так как их свойства будут неоднократно встречаться в дальнейшем изучении геометрии [24, С. 9]. На изучение данной темы по учебнику А.В. Погорелова отводится 14 часов.

Два часа отводится на написание контрольных работ по темам «Подобные треугольники» и «Углы, вписанные в окружность».

Теория подобия, в частности гомотетия, в соответствии с программой учебника А.В. Погорелова, и в отличие от учебника А.Д. Александрова с углубленным изучением математики, дается в ознакомительном порядке. То есть формами организации уроков по пунктам «Преобразование подобия» и «Свойства преобразования подобия» могут быть лекция или беседа. Однако, определения подобия и гомотетии учащиеся должны усвоить на уровне практических применений, так как эти понятия и их свойства будут применяться при доказательстве признаков подобия треугольников.

Таблица 3

Содержание темы «Подобие фигур» в учебнике А.В. Погорелова

Авторы учебника	***Содержание темы***	***Количество часов***
9 класс		
А.В. Погорелов [29]	Преобразование подобия. Свойства преобразования подобия.	1
	Подобие фигур.	1
	Признак подобия треугольников по двум углам.	1
	Признак подобия треугольников по двум сторонам и углу между ними.	1
	Признак подобия треугольников по трем сторонам.	1
	Подобие прямоугольных треугольников.	2
	Углы, вписанные в окружность.	2
	Пропорциональность отрезков хорд и секущих окружности.	2
	Измерение углов, связанных с окружностью.	1

Рассмотрим базовые знания, которыми должны обладать школьники по учебнику А.В. Погорелова.

Базовые знания:

- понятие преобразования фигур;

- понятие вектора, его величины и направления;

- признаки равенства треугольников;

- теоремы об углах, образованных двумя параллельными прямыми и секущей.

Определив преобразование подобия, его свойства, коэффициент подобия и гомотетию, А.В. Погорелов дает определение *подобных фигур*: две фигуры называются подобными, если они переводятся друг в друга преобразованием подобия [29, С. 156]. Определение же преобразования подобия в данном учебнике аналогично определению, представленному в учебнике А.Д. Александрова.

Признаки подобия треугольников у А.В. Погорелова изучаются в том же порядке, что и у Л.С. Атанасяна: первый признак – по двум углам, второй признак – по двум сторонам и углу между ними, третий признак – по трем сторонам. Доказательства признаков приводятся в той же форме, что и доказательство первого признака (в учебниках Л.С. Атанасяна и А.В. Погорелова это третий признак) у А.Д. Александрова, через понятие преобразования подобия и гомотетии.

Изучив признаки подобия треугольников, учащиеся приступают к изучению следующего пункта «*Подобие прямоугольных треугольников*», в котором они знакомятся с признаком подобия прямоугольных треугольников, выражениями высоты и катета прямоугольного треугольника через гипотенузу и отрезки, на которые ее делит основание высоты, а также со свойством биссектрисы угла треугольника.

В результате изучения темы «Подобие фигур» по программе к учебнику А.В. Погорелова учащиеся должны научиться: объяснять понятия подобия, коэффициента подобия, гомотетии и подобных фигур; выделять в конфигурации, данной в условии задачи, подобные треугольники; строить простейшие фигуры, гомотетичные данным; формулировать и объяснять признаки подобия треугольников; решать задачи с использованием признаков подобия треугольников; применять понятие подобия при решении задач на построение; решать задачи с использованием утверждений о пропорциональных отрезках в прямоугольном треугольнике [24, С. 10]. Кроме того, формулировать: признак подобия прямоугольных треугольников; свойство катета (что катет есть среднее пропорциональное между гипотенузой и проекцией этого катета на гипотенузу); свойство высоты прямоугольного треугольника, проведенной из вершины прямого угла (что она есть среднее пропорциональное между проекциями катетов на гипотенузу); свойство вписанных углов, опирающихся на одну и ту же дугу [7, С. 37].

Таким образом, можно выделить следующие *вводимые понятия* параграфа «Подобие фигур» учебника геометрии А.В. Погорелова:

- преобразование подобия;
- коэффициент подобия;
- гомотетия;
- подобные фигуры;
- среднее пропорциональное;
- плоский угол, центральный угол;
- дуга окружности;
- вписанный угол.

Вводимые утверждения:

1. Свойства преобразования подобия.
2. Признаки подобия треугольников.
3. Признак подобия прямоугольных треугольников.
4. Утверждения о среднем геометрическом.
5. Свойство биссектрисы треугольника, которая делит противолежащую сторону на отрезки, пропорциональные двум другим сторонам.
6. Теорема о вписанных углах и следствия из нее.
7. Теоремы о свойствах отрезков хорд и секущих окружности.

Таким образом, тема «Подобные треугольники» может изучаться как 8, так и в 9 классе. В отличие от углубленного, рассмотренные учебники базового уровня предполагают изучение теории подобия в ознакомительном порядке: большее внимание уделяется изучению подобных треугольников и их признаков. В зависимости от того, какие утверждения будут использоваться при доказательстве, признаки подобия треугольников могут даваться в различном порядке (Приложение 1). А.Д. Александров и А.В. Погорелов предлагают изучать данную тему с определения понятия преобразования подобия. В учебнике Л.С. Атанасяна предполагается рассмотрение с учащимися на первых уроках понятия подобных треугольников, и только после его изучения, а также - пропорциональных отрезков в прямоугольном треугольнике, задач на построение и признаков подобия треугольников, автор учебника знакомит учеников с подобием произвольных фигур.

В учебнике геометрии А.Д. Александрова с углубленным изучением математики изучение темы «Подобие» осуществляется во второй половине 9 класса, после того, как учащиеся ознакомились с понятием движения, его видами и классификацией. В учебнике А.В. Погорелова теория движений также рассматривается до введения понятия преобразования подобия. Учебник Л.С. Атанасяна знакомит учащихся с теорией движений не просто после изучения темы «Подобные треугольники»: он предполагает ее изучение в 9 классе. После подобия фигур автор считает целесообразным изложить ученикам понятия синуса, косинуса и тангенса острого угла прямоугольного треугольника и перейти к изучению следующей не менее важной геометрической фигуры – окружности.

§3. Типы задач по теме «Подобные треугольники» в учебниках разных авторов

Задачный материал учебника А.Д. Александрова, как и его теория, значительно отличается от задачных материалов остальных учебников геометрии. Данный учебник предназначен для углубленного изучения геометрии, поэтому и подборка заданий в нем шире, нежели в учебниках Л.С. Атанасяна и А.В. Погорелова.

Рассмотрим основные *типы задач* при обучении теме «Подобные треугольники» в рассматриваемых учебниках (Приложение 2).

Л.С. Атанасян вводит понятие гомотетии, но основное внимание, как уже отмечалось ранее, он уделяет понятию подобных треугольников. Соответственно, задачи на применение понятия гомотетии в данном учебнике не рассматриваются. А.Д. Александров же предлагает на данный тип два вида задач: задачи на построение гомотетичной фигуры и на доказательство гомотетичности фигур.

Первыми по учебнику Л.С. Атанасяна были выделены задачи *на применение понятия пропорциональных отрезков*, которые встречаются только в данном учебнике из рассматриваемых. Учащимся предлагается найти отношение отрезков данных длин, или отрезков, изображенных на рисунке. Автор учебника вводит понятие пропорциональных отрезков перед тем, как дать определение подобных треугольников.

А.Д. Александров предоставляет широкий набор задач на применение понятия подобных фигур. Большая их часть представлена в разделе «Исследуем». Учащимся предоставляется возможность подумать над следующими вопросами: подобны ли два четырехугольника, если углы одного равны углам другого; подобны ли две сферы, два куба или два цилиндра; гомотетичны ли квадраты, если их стороны соответственно параллельны; можно ли разбить квадрат на два подобных прямоугольника [2, С. 179]. А.В. Погорелов также предлагает пару задач на применение понятия подобных фигур и гомотетии.

Далее идут задачи *на применение понятия подобных треугольников*. То есть задачи, посредством которых учащиеся должны учиться распознавать подобные треугольники, зная, что у них соответственно равны углы и пропорциональны стороны, а также применять отношение их сторон в решении той или иной задачи.

Задача 1 (№542 из [3, С. 140]). В подобных треугольниках ABC и KMN стороны AB и KM, BC и MN являются сходственными. Найдите стороны треугольника KMN, если $AB = 4$ см, $BC = 5$ см, $CA = 7$ см, $\frac{KM}{AB} = 2{,}1$.

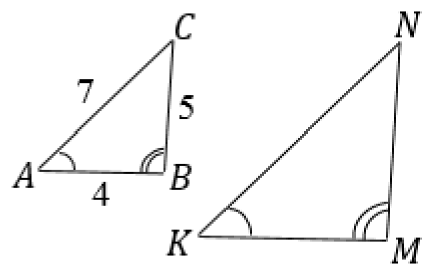


Рис. 10

Решение. Нам известно, что $\Delta ABC \sim \Delta KMN$ (Рис. 10), откуда следует, что

$\frac{KM}{AB} = \frac{MN}{BC} = \frac{NK}{CA} = 2{,}1$. Тогда $KM = 2{,}1 \cdot AB = 2{,}1 \cdot 4 = 8{,}4$ см , $MN = 2{,}1 \cdot$ $\cdot BC = 2{,}1 \cdot 5 = 10{,}5$ см , $NK = 2{,}1 \cdot CA = 2{,}1 \cdot 7 = 14{,}7$ см .

Ответ: 8,4; 10,5; 14,7 см.

Л.С. Атанасян предлагает десять задач *на применение свойства биссектрисы треугольника*. В первой он приводит доказательство данного свойства, следующие пять отводит на составление отношений по свойству биссектрисы треугольника, три задачи – на умение его распознавать, и еще одна задача представляет собой доказательство обратного утверждения свойству биссектрисы.

Задача 2 (№537 из [3, С. 140]). Отрезок AD является биссектрисой треугольника ABC. Найдите BD и DC, если AB =14 см, BC =20 см, AC =21 см.

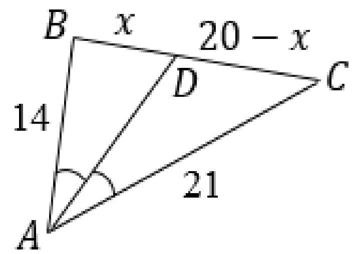


Рис. 11

Решение. По свойству биссектрисы треугольника имеем: $\frac{BD}{AB} = \frac{DC}{AC}$. Пусть $BD = x$ (Рис. 11). Тогда $DC = 20 - x \Longrightarrow \frac{x}{AB} = \frac{20-x}{AC}$,

то есть $x \cdot AC = \ 20 - x \ \cdot AB$, откуда $x = 8$. Тогда $DC = 20 - x = 20 -$ $-8 = 12$ см . **Ответ**: 8 см и 12 см.

А.Д. Александров и А.В. Погорелов предлагают задачи на аналогичное свойство для биссектрисы внешнего угла треугольника.

Задача 3 (№46 из [29, С. 170]). Биссектриса внешнего угла треугольника ABC при вершине C пересекает прямую AB в точке D (Рис. 12). Докажите, что $AD : BD = AC : BC$.

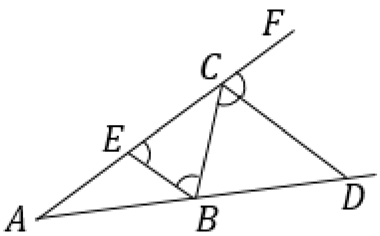


Рис. 12

Решение. Проведем $BE \parallel CD$. Тогда $\angle CBE = \angle BCD$ (как углы накрест лежащие при пересечении параллельных прямых EB и CD и секущей CB). $\angle BEC = \angle DCF = \angle DCB$ (как соответственные углы при пересечении тех же параллельных прямых). $\angle DCF = \angle DCB$ так как CD – биссектриса $\angle BCF$. Значит, ΔECB – равнобедренный и $EC = BC$.

Мы знаем, что если стороны угла пересечены параллельными прямыми, то отсекаемые на сторонах угла отрезки пропорциональны, а значит $\frac{AD}{BD} = \frac{AC}{EC}$. Но так как $EC = BC$, то $\frac{AD}{BD} = \frac{AC}{BC}$. **Ч.Т.Д.**

По программе к учебнику А.В. Погорелова в ходе рассмотрения темы «Подобные треугольники» учащиеся не изучают теорему об отношении площадей подобных треугольников. Л.С. Атанасян же и А.Д. Александров в своих учебниках предлагают задачи *на применение теоремы об отношении площадей подобных треугольников* двух типов: на использование понятия коэффициента подобия в составлении отношения площадей подобных треугольников и на применение теоремы об отношении периметров двух подобных треугольников.

Задача 4 (№544 из [3, С. 140]). Площади двух подобных треугольников равны 75 м^2 и 300 м^2. Одна из сторон второго треугольника равна 9 м. Найдите сходственную ей сторону первого треугольника.

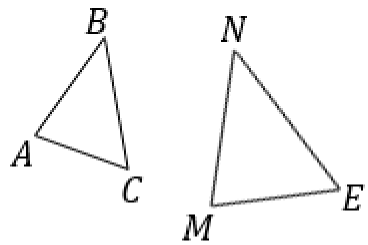


Рис. 13

Решение. Пусть $S_{ABC} = 75$ м^2, $S_{MNE} = 300$ м^2, $ME = 9$ м (Рис. 13). $\Delta ABC \sim \Delta MNE \implies \frac{AB}{MN} = \frac{BC}{NE} = \frac{AC}{ME} = k$.

По теореме об отношении площадей подобных треугольников имеем: $\frac{S_{ABC}}{S_{MNE}} = k^2$, откуда $k = \frac{1}{2}$. Тогда $\frac{AC}{ME} = \frac{1}{2} \Rightarrow AC = \frac{1}{2} \cdot ME = \frac{1}{2} \cdot 9 = 4{,}5$ (м).

Ответ: 4,5 м.

Также авторами рассматриваемых учебников предлагаются задачи *на применение понятия масштаба*. Л.С. Атанасян и А.В. Погорелов включили в материал темы «Подобие» своих учебников только по одной задаче на данную тему. В учебнике А.Д. Александрова их четыре.

Задача 5 (№31.89 из [2, С. 183]). Расстояние между двумя пунктами на плане масштабом $1 : 10\,000$ равно 12 см. Каково оно на самом деле? Каким оно будет на плане масштабом $1 : 5000$? $1 : 25\,000$?

Решение. Масштаб $1:10\,000$ говорит о том, что 1 см на плане соответствует $10\,000$ см на местности. Значит, 12 см будет соответствовать расстояние равное $12 \cdot 10000 = 120\,000$ (см) $=1{,}2$ (км).

Во втором случае 1 см на плане соответствует 5000 см на местности. Тогда 12 см будет соответствовать расстояние $12 \cdot 5\,000 =$ $= 60\,000$ см $= 0{,}6$ (км).

На плане масштабом $1:25\,000$ нужное нам расстояние будет равно $12 \cdot 25000 = 300000$ (см) $= 3$ (км). **Ответ**: 1,2 км, 0,6 км, 3 км.

Задачи *на применение первого признака подобия* (по двум углам) можно разделить на следующие типы: задачи на распознавание первого признака, на применение леммы о подобии треугольников и на применение первого признака подобия при доказательстве подобия различных видов треугольников.

На распознавание первого признака подобия треугольников в учебниках геометрии весьма популярна задача следующего типа.

Задача 6 [21, С. 140]. Дана равнобочная трапеция с основаниями 12 см и 18 см, и длиной диагонали равной 20 см. Вычислить отрезки диагоналей, на которые они делятся точкой их пересечения.

Решение. Пусть $BC = 12$ см, а $AD = 18$ см (рис. 14). Обозначим $OC = x$, тогда $AO = 20 - x$. $\Delta BOC \sim \Delta DOA$ по 1 признаку подобия треугольников, т.к. $\angle BOC = \angle DOA$ (как вертикальные углы), а $\angle BCO = \angle OAD$ (как накрест лежащие углы при пересечении параллельных прямых BC и AD секущей AC). Тогда из подобия этих треугольников следует, что $\frac{OC}{AO} = \frac{BC}{AD}$, то есть $\frac{x}{20-x} = \frac{12}{18}$, откуда $x = OC = 8$ (см), а $AO = 20 - x = 20 - 8 = 12$ (см). **Ответ**: 8 см и 12 см.

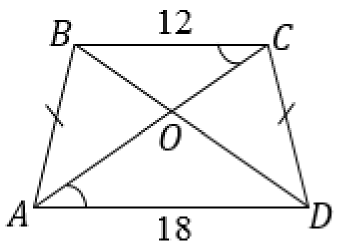


Рис. 14

Задача 7 (№25 из [29, С. 168]). Линия, параллельная основаниям трапеции, делит одну боковую сторону в отношении $m:n$. В каком отношении делит она другую боковую сторону?

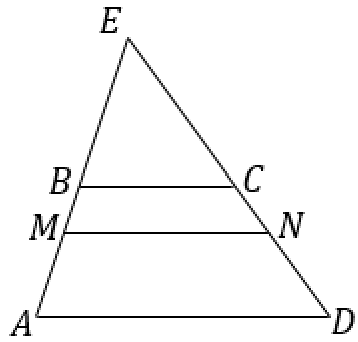


Рис. 15

Решение. Пусть $ABCD$ – трапеция, AD и BC – ее основания, и $MN \parallel AD \parallel BC$, $\frac{AM}{MB} = \frac{m}{n}$ (Рис. 15). Боковые стороны трапеции пересекаются в точке E. По теореме о пропорциональных отрезках, параллельные прямые AD, MN, BC, пересекающие стороны $\angle AED$, отсекают от сторон пропорциональные отрезки, и поэтому: $\frac{AM}{MB} = \frac{DN}{NC} = \frac{m}{n}$. **Ответ**: $\frac{m}{n}$.

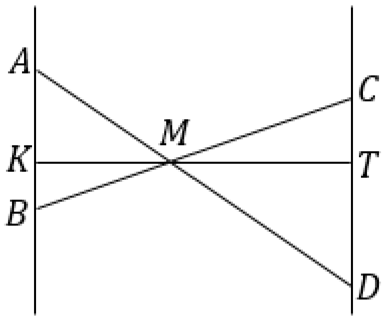


Рис. 16

Нередко учащимся, независимо от того, по какому учебнику они занимаются, приходится сталкиваться со следующей задачей на применение признака подобия треугольников по двум углам, в ходе решения которой школьники приходят к выводу о том, что отношение высот подобных треугольников равно их коэффициенту подобия. В рассматриваемой задаче данное утверждение и доказывается (с использованием теоремы об отношении площадей подобных треугольников).

Задача 8 [15, С. 93]. Расстояния от точки M до параллельных прямых AB и CD (Рис. 16) равны 3 и 5 соответственно. Найдите длину отрезка CD, если $AB = 9$.

Решение. $\Delta AMB \sim \Delta DMC$ по первому признаку подобия треугольников ($\angle AMB = \angle DMC$ как вертикальные, $\angle MBA = \angle MCD$ как накрест лежащие углы при пересечении параллельных прямых AB и CD секущей BC).

$\frac{S_{AMB}}{S_{DMC}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot MK \cdot AB}{\frac{1}{2} \cdot MT \cdot CD} = \frac{MK \cdot AB}{MT \cdot CD}$. Но по теореме об отношении площадей подобных треугольников $\frac{S_{AMB}}{S_{DMC}} = k^2 = \frac{AB}{CD} \cdot \frac{AM}{DM}$. Из всего этого следует, что $\frac{MK}{MT} = \frac{AM}{DM}$, то есть отношение высот подобных треугольников равно коэффициенту подобия. Значит, $\frac{MK}{MT} = \frac{AB}{CD}$, откуда $CD = \frac{MT \cdot AB}{MK} =$ $= \frac{5 \cdot 9}{3} = 15$. **Ответ**: 15.

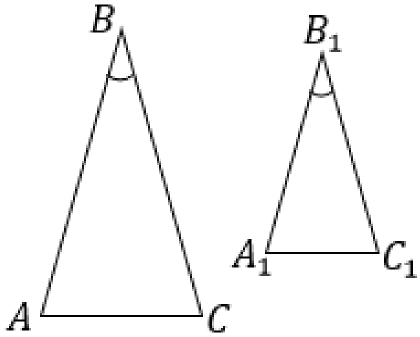


Рис. 17

По программе к учебнику Л.С. Атанасяна объединяется изучение второго и третьего признаков подобия треугольников. Соответственно, в данном учебнике рассматриваются задачи на распознавание второго и третьего признаков одновременно (в тексте одной и той же задачи). *На распознавание второго признака подобия треугольников* (по двум сторонам и углу между ними) А.В. Погорелов предлагает задачи следующего типа.

Задача 9 (№30 из [29, С. 169]). Стороны ΔABC, прилежащие к углу B, в 2,5 раз больше сторон треугольника $A_1B_1C_1$, прилежащих к углу B_1. Углы B и B_1 равны. Найдите AC и A_1C_1, если их сумма равна 4,2 м (Рис. 17).

Решение. $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = 2{,}5$ и $\angle B = \angle B_1 \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$ по второму признаку подобия треугольников, и коэффициент их подобия равен 2,5 по условию. Пусть $A_1C_1 = x$, тогда $AC = 2{,}5x$, но $A_1C_1 + AC = 4{,}2$. Поэтому $x + 2{,}5x = 4{,}2$, откуда $x = 1{,}2$, то есть $A_1C_1 = 1{,}2$ (м). Тогда $AC = 4{,}2 -$ $- A_1C_1 = 3$ (м). **Ответ**: 1,2 м, 3 м.

В учебнике А.В. Погорелова задачи *на применение третьего признака подобия треугольников* (по трем сторонам) можно разбить на два типа: «Подобны ли треугольники?» (например, подобны ли два равносторонних треугольника) и на применение утверждения, что у подобных треугольников периметры относятся как соответствующие стороны.

Задача 10 (№37 из [29, С. 169]). Стороны треугольника равны 0,8м, 1,6м и 2м. Найдите стороны подобного ему треугольника, периметр которого равен 5,5м.

Решение. Пусть $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$, $AB = 0{,}8$ м, $BC = 1{,}6$ м, $AC = 2$ м, P – периметр ΔABC, $P_1 = 5{,}5$ м – периметр $\Delta A_1B_1C_1$ (Рис. 18).

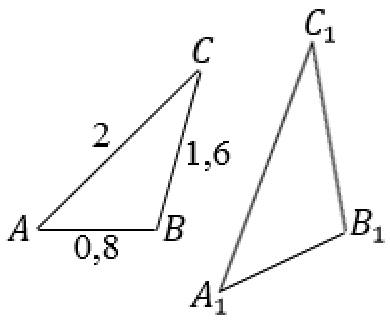


Рис. 18

$P = AB + BC + AC = 0{,}8 + 1{,}6 + 2 = 4{,}4$ (м).

$\frac{P_1}{P} = \frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{A_1C_1}{AC} = k \Rightarrow k = \frac{5{,}5}{4{,}4} = \frac{5}{4}$.

Следовательно, $A_1B_1 = k \cdot AB = \frac{5}{4} \cdot 0{,}8 = 1$ (м); $B_1C_1 = k \cdot BC = \frac{5}{4} \cdot 1{,}6 = 2$ (м); и, соответственно, $A_1C_1 = k \cdot AC = \frac{5}{4} \cdot 2 = 2{,}5$ (м). **Ответ**: 1 м, 2 м и 2,5 м.

Рассмотрим еще одну задачу *на применение признаков подобия треугольников*.

Задача 11 [24, С. 18]. Через вершину B треугольника ABC проведена прямая BD, параллельная AC (Рис. 19). Через точку N, лежащую на стороне BC, проведен луч AN, пересекающий эту прямую в точке D, а медиану BH в точке K. В каком отношении точка K делит медиану BH, если $BN{:}NC = 1{:}2$?

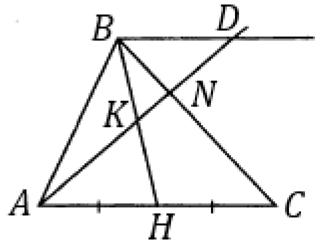


Рис. 19

Решение. $\angle DAC$ и $\angle ADB$ равны как накрест лежащие углы при параллельных прямых AC и BD и секущей AD. $\angle ANC$ и $\angle DNB$ равны как вертикальные. Следовательно, $\Delta ANC \sim \Delta DNB$ по двум углам. Так как $BN{:}NC = 1{:}2$, то $BD = \frac{1}{2}AC$, то есть $AH = BD$.

$\angle AHB$ и $\angle DBH$ равны как накрест лежащие при параллельных прямых AC и BD и секущей BH. $\Delta KAH = \Delta KDB$ по стороне и прилежащим углам ($AH = BD, \angle AHB = \angle DBH, \angle DAC = \angle ADB$). Следовательно, $KH = KB$, а значит, точка K делит медиану BH пополам.

Ответ: 1:1.

В задачах учебника Л.С. Атанасяна *на применение теоремы о средней линии треугольника* можно выделить два типа задач: на распознавание средней линии и на дополнительные построения с целью применения данной теоремы к решению.

Задача 12 (№567 из [3, С. 152]). Докажите, что середины сторон произвольного четырехугольника являются вершинами параллелограмма.

Решение. Пусть нам дан четырехугольник $ABCD$ (Рис. 20), для которого M, N, K, P – середины сторон. Нужно доказать, что $MNKP$ – параллелограмм.

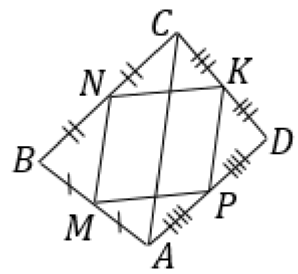


Рис. 20

1) В ΔABC и ΔMBN $\angle B$ – общий, $\frac{BM}{AB} = \frac{BN}{BC} = \frac{1}{2} \Rightarrow$ $\Delta ABC \sim \Delta MBN$ по двум сторонам и углу между ними, то есть $MN \parallel AC$ и $MN = \frac{1}{2}AC$.

2) В ΔABC KP – средняя линия ΔADC, то есть $KP = \frac{1}{2}AC$ и $KP \parallel AC$.

3) Таким образом, $MN = KP = \frac{1}{2}AC$, $AC \parallel KP \parallel MN$, из чего следует, что $MNKP$ – параллелограмм по признаку. **Ч.Т.Д**.

По программам к описанным учебникам геометрии в ходе изучения темы «Подобие» только учебник Л.С. Атанасяна предполагает рассмотрение с учащимися свойства медиан треугольника (о делении их точкой пересечения в отношении 2:1). А.Д. Александров же предусматривает раскрытие данного свойства при изучении темы «Векторный метод», но после того, как школьники познакомились с понятием подобных треугольников и признаками их подобия, автор предлагает вспомнить свойство медиан треугольника и доказать его с помощью подобия.

Рассмотрим задачу *на применение свойства медиан треугольника*.

Задача 13 (№571 из [3, С. 152]). В треугольнике ABC медианы AA_1 и BB_1 пересекаются в точке O. Найдите площадь треугольника ABC, если площадь треугольника ABO равна S (Рис. 21).

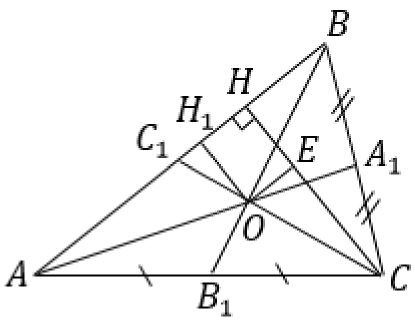


Рис. 21

Решение. $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CH$, $S_{ABO} = \frac{1}{2} AB \cdot OH_1 = \frac{1}{2} AB \cdot HE$, где $HE = OH_1$ и $E \in HC$. Таким образом, мы имеем отношение $\frac{S_{ABC}}{S_{ABO}} = \frac{CH}{HE}$. $\Delta HCC_1 \sim \Delta ECO$ по двум углам, так как $\angle C$ – общий, а $\angle C_1HC = \angle OEC = 90°$ $\Rightarrow \frac{CC_1}{CO} = \frac{CH}{CE} = \frac{3}{2} \Rightarrow CH = \frac{3}{2} CE = \frac{3}{2} \cdot 2 \cdot HE = 3HE$ $\Rightarrow$ $\frac{S_{ABC}}{S_{ABO}} = \frac{CH}{HE} = \frac{3HE}{HE} = 3$. Значит, $S_{ABC} = 3S_{ABO} = 3S$. **Ответ**: 3S.

В учебниках Л.С. Атанасяна и А.В. Погорелова также приводятся задачи *на применение теорем о пропорциональных отрезках в прямоугольном треугольнике*.

Помимо рассмотренных типов задач были выделены также задачи *на применение подобия при решении задач на построение*, которые в свою очередь можно разделить на три *вида*: задачи на применение понятия пропорциональных отрезков; задачи на применение понятия подобных треугольников; задачи на применение понятия пропорциональных отрезков, их отношения и подобных треугольников. Также в учебниках геометрии выделяют задачи *на применение подобия при решении практических задач*: на определение высоты предмета и на определение расстояния до недоступной точки.

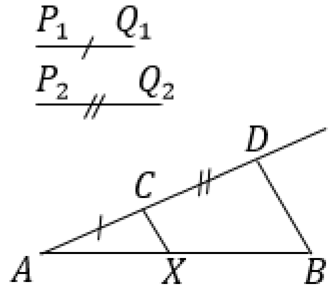


Рис. 22

Задача 14 (№584 из [3, С. 154]). Разделите данный отрезок AB на два отрезка AX и XB, пропорциональные данным отрезкам P_1Q_1 и P_2Q_2.

Решение. Проведем какой-нибудь луч AM, не лежащий на прямой AB, и на этом луче отложим последовательно отрезки AC и CD, равные отрезкам P_1Q_1 и P_2Q_2 (Рис. 22). Затем проведем прямую BD и прямую, проходящую через точку C параллельно прямой BD. Она пересечет отрезок AB в точке X, которая и будет искомой.

Данный тип задач, на применение понятия пропорциональных отрезков и их отношения, как правило, является опорной при изучении задач на построение. Рассмотрим следующий тип задач – *на применение понятия подобных треугольников при решении задач на построение*.

Задача 15 [28, С. 43]. Построить треугольник *ABC*, если даны углы *A* и *C* при основании *AC* и медиана *BD* последнего.

Решение. 1. Сначала построим вспомогательный треугольник произвольного размера подобный искомому, а затем построим треугольник, в который входила бы данная медиана (Рис. 23).

2. На прямой *MN* откладываем отрезок A_1C_1 произвольной длины и при точках A_1 и C_1строим данные углы (с вершинами в точках A_1 и C_1).

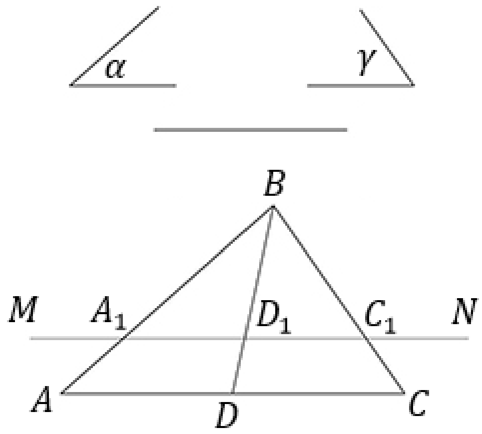


Рис. 23

3. Точка пересечения *B* сторон A_1B и C_1B этих углов – третья вершина вспомогательного треугольника A_1BC_1.

4. Проводим медиану BD_1 к основанию A_1C_1.

5. От той же вершины *B* треугольника, принимаемой за центр подобия, на медиане BD_1 или ее продолжении откладываем медиану *BD* искомого треугольника, равную данному отрезку. Через ее конец D проводим $AC \parallel A_1C_1$. Точки пересечения *A* и *C* этой прямой с продолжениями боковых сторон BA_1 и BC_1 вспомогательного треугольника являются вершинами искомого треугольника. ΔABC – искомый.

Как было отмечено выше, практические задачи проанализированных учебников могут быть двух видов: *на определение высоты предмета* и на *определение расстояния до недоступной точки*.

Рассмотрим пример задачи *на определение высоты предмета*.

Задача 16 [23]. Человек ростом 1,7 м стоит на расстоянии 8 шагов от столба, на котором висит фонарь (Рис. 24). Тень человека равна четырем шагам. На какой высоте (в метрах) расположен фонарь?

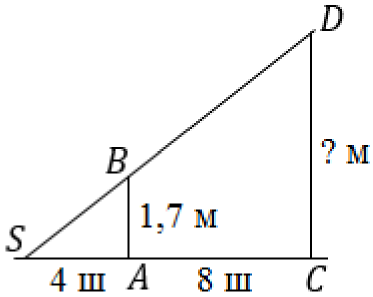


Рис. 24

Решение. По рисунку $AB = 1{,}7$ м, $S = 4$ ш, $AC = 8$ ш.

$CS = AC + AS = 4 + 8 = 12$ ш. $\Delta ABS \sim \Delta CDS$ (по двум углам). Значит, $\frac{AB}{CD} = \frac{AS}{CS}$; откуда $CD = \frac{AB \cdot CS}{AS} = \frac{1{,}7 \cdot 12}{4} = 5{,}1$ м . **Ответ**: 5,1 м.

Рассмотрим второй тип задач на применение подобия при решении практических задач – *на определение расстояния до недоступной точки*.

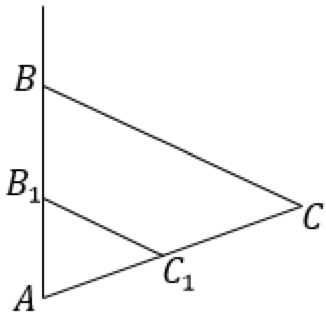


Рис. 25

Задача 17 (№583 из [3, С. 153]). На рисунке (Рис. 25) показано, как можно определить ширину BB_1 реки, рассматривая два подобных треугольника ABC и AB_1C_1. Определите BB_1, если $AC = 100$ м, $AC_1 = 32$ м, $AB_1 = 34$ м.

Решение. $\Delta ABC \sim \Delta AB_1C_1$, следовательно, $\frac{AC}{AC_1} = \frac{AB}{AB_1} = \frac{100}{32}$, $AB = 106{,}25$. Тогда $BB_1 = AB - AB_1 = 106{,}25 - 34 = 72{,}25$ м . **Ответ**: 72,25 м.

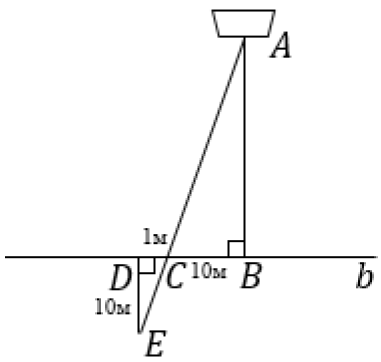


Рис. 26

Задача 18 [33, С. 28]. Используя данные, приведенные на рисунке (Рис. 26), найдите расстояние AB от лодки A до берега b.

Решение. Так как $\angle ABC = \angle EDC = 90°$ и $\angle ACB = \angle ECD$ как вертикальные, следовательно, $\Delta ABC \sim \Delta EDC$.

Тогда $\frac{AB}{ED} = \frac{BC}{DC}$, откуда $AB = \frac{ED \cdot BC}{DC} = 100$ м . **Ответ**: 100 м.

В учебнике А.Д. Александрова не представлено ни одной задачи данного типа, у А.В. Погорелова (в рамках темы «Подобные треугольники») рассматривается всего лишь одна задача.

Таким образом, были выделены основные типы задач при обучении теме «Подобные треугольники», встречающиеся в учебниках А.Д. Александрова [2], Л.С. Атанасяна [3] и А.В. Погорелова [29]. Задачный материал учебника с углубленным изучением математики А.Д. Александрова значительно отличается от остальных не только преобладающим количеством заданий, но и самим их содержанием. Основное внимание автор выделяет понятию гомотетии и подобию произвольных фигур. Задачный материал учебников Л.С. Атанасяна и А.В. Погорелова предполагает детальное изучение учащимися понятия подобных треугольников, признаков их подобия, теорем и свойств, связанных тем или иным образом с данными понятиями – и только потом ознакомление с понятием гомотетии. Л.С. Атанасян не предлагает задач на применение данного понятия. Стоит также отметить, что в отличие от учебников Л.С. Атанасяна и А.В. Погорелова, у А.Д. Александрова задач на применение признаков подобия треугольников сравнительно немного. Отметим, что многие утверждения, которые представлены в остальных учебниках в качестве теории, А.Д. Александров выносит в задачный материал.

§ 4. Методика введения понятия подобных треугольников и основных понятий, связанных с ним

Анализ темы «Подобные треугольники» учебников по геометрии А.Н. Колмогорова, А.П. Киселева и Н.А. Глаголева (а также рассмотренных в §2 и §3 – А.Д. Александрова, Л.С. Атанасяна, А.В. Погорелова) показал, что существует два основных подхода к изучению материала данной темы. В учебнике А.П. Киселева, как и в большинстве последующих учебников элементарной геометрии, был принят следующий порядок изучения темы «Подобие»: подобие фигур, затем – подобное преобразование их. В учебнике Н.А. Глаголева был принят иной порядок: сначала изучается подобное преобразование фигур, то есть гомотетия, и лишь потом – их подобие.

Рассмотрим *методику введения понятия подобных треугольников В.Г. Чичигина.* Изучение темы «Подобие фигур» начинается с изучения *гомотетии,* и первым вводимым понятием являются *гомотетичные точки* и способы их построения. Учащиеся знакомятся с понятием преобразования (в данном случае подобного), образом и прообразом точек, центром гомотетии, коэффициентом гомотетии. После школьники учатся строить фигуру, гомотетичную данному отрезку, который, как известно, определяется двумя точками – своими концами; поэтому сначала учащимся приходится строить гомотетичное отображение именно этих конечных точек; последние и определяют новый отрезок – искомую фигуру. Откуда учащимися делается вывод о том, что фигура, гомотетичная данному отрезку, это отрезок, параллельный данному.

После учащиеся приступают к построению *гомотетичных треугольников*. При этом они должны рассмотреть все возможные случаи расположения центра гомотетии: вне треугольника, в одной из его вершин, на одной стороне и внутри треугольника. Анализ построения также прост: треугольник определяется тремя точками – своими вершинами, и потому решение задач данного типа сводится к построению трех точек, соответственно гомотетичных вершинам представленного треугольника [38, С. 301]. После решения задач на построение треугольника гомотетичного данному учащимися и учителем делаются следующие выводы: 1) фигура, гомотетичная данному треугольнику, есть треугольник; 2) стороны одного треугольника параллельны сходственным сторонам второго треугольника; 3) углы треугольников, заключенные между сходственными сторонами, равны и называются соответственными углами; 4) отношение сходственных сторон треугольников равно коэффициенту гомотетии.

В.Г. Чичигин отмечает, что, закрепив полученные знания решением задач и ознакомлением с примерами практического применения гомотетии в жизни, можно приступать к изучению подобия фигур, а в частности – треугольников.

Прежде всего, пишет автор, нужно установить факт существования подобных фигур. С такой целью учитель дает ученикам задание, построить фигуру, гомотетичную данному многоугольнику относительно данного центра S и с данным коэффициентом k (для простоты как раз таки можно взять треугольник ABC и построить треугольник $A'B'C'$ при $k > 0$ или треугольник $A''B''C''$ при $k < 0$ (Рис. 27)).

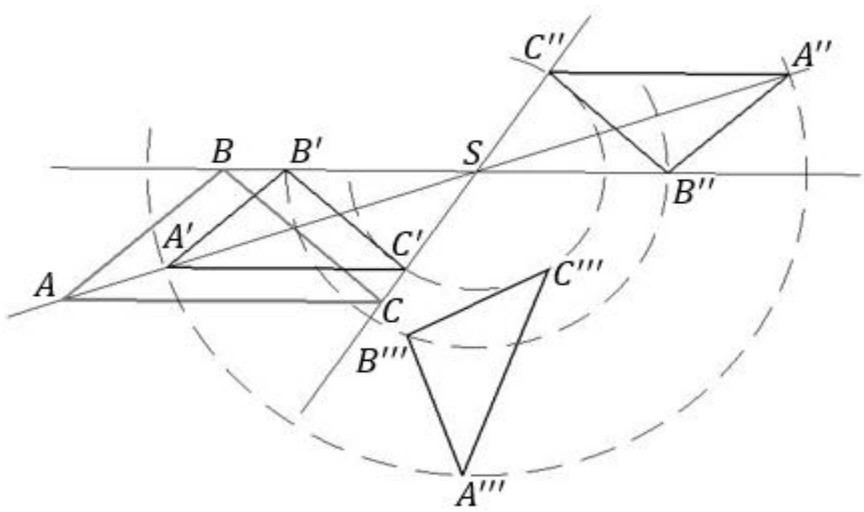


Рис. 27

Затем учащиеся вращают в плоскости чертежа полученную фигуру ($\Delta A'B'C'$ или $\Delta A''B''C''$) около центра гомотетии S на произвольный угол, меньший 180°, оставляя ΔABC в том же положении. $\Delta A'B'C'$ (или $\Delta A''B''C''$) займет на плоскости новое положение – $\Delta A'''B'''C'''$.

$\Delta A'''B'''C'''$ сначала сравнивается с $\Delta A'B'C'$ (или $\Delta A''B''C''$). И выясняется, что они равны, так как $\Delta A'''B'''C'''$ - это смещенный $\Delta A'B'C'$ (или $\Delta A''B''C''$). Но $\Delta A'B'C'$ и ΔABC гомотетичны относительно центра S. Значит, $\Delta A'''B'''C'''$ равен $\Delta A'B'C'$ (или $\Delta A''B''C''$), а последний гомотетичен ΔABC.

На данном этапе учащимся необходимо сообщить, что треугольники $A'''B'''C'''$ и ABC называются *подобными*, и составить *первое определение подобных фигур* (в том числе и треугольников).

Определение 4. Если одна из двух данных фигур равна третьей фигуре, которая гомотетична второй данной фигуре, то данные фигуры подобны [38, С. 307].

Продолжая работать с тем же чертежом (Рис. 27), учащиеся рассматривают сначала только гомотетичные фигуры и перечисляют их основные свойства: взаимно однозначное соответствие точек, пропорциональность сходственных сторон, равенство соответственных углов и параллельность сходственных сторон. После поворота $\Delta A'B'C'$ (или $\Delta A''B''C''$) новый $\Delta A'''B'''C'''$ сравнивается с данным ΔABC и выясняется, что первые три свойства гомотетичных фигур сохраняются в ΔABC и $\Delta A'''B'''C'''$, но параллельность сходственных сторон не сохраняется; нет и гомотетии этих фигур. Учащиеся делают вывод о том, что отличительным свойством гомотетии фигур является параллельность всех их сходственных сторон, и отсутствие этого свойства или его нарушение вызывает отсутствие или нарушение гомотетии фигур.

Так учащиеся формулируют *второе определение подобных фигур*.

Определение 5. Фигуры называются подобными, если между их точками существует взаимно однозначное соответствие, сходственные стороны их пропорциональны и соответственные углы равны [38, С. 307].

Из данного определения школьники должны освоить, что гомотетично-расположенные фигуры всегда подобны, то есть гомотетия фигур есть частный случай их подобия.

Для выяснения понятия подобия фигур (в нашем случае треугольников) и закрепления этого понятия В.Г. Чичигин рекомендует решить с учащимися несколько задач на доказательство следующего типа: *Если один треугольник* *подобен другому, а второй подобен третьему треугольнику, то первый треугольник подобен третьему*.

Дано: $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta A_2B_2C_2$,

$\Delta A_2B_2C_2 \sim \Delta A_3B_3C_3$.

Доказать: $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta A_3B_3C_3$.

Доказательство. Из определения подобия вытекает: 1) взаимно однозначное соответствие точек:

$A_1 \longleftrightarrow A_2 \longleftrightarrow A_3,\ B_1 \longleftrightarrow B_2 \longleftrightarrow B_3,\ C_1 \longleftrightarrow C_2 \longleftrightarrow C_3$.

2) равенство соответственных углов:

$\angle A_1 = \angle A_2 = \angle A_3,\ \ \angle B_1 = \angle B_2 = \angle B_3,\ \ \angle C_1 = \angle C_2 = \angle C_3$.

3) пропорциональность сходственных сторон:

$\frac{A_1B_1}{A_2B_2} = \frac{B_1C_1}{B_2C_2}$ или $\frac{A_1B_1}{B_1C_1} = \frac{A_2B_2}{B_2C_2}$,

$\frac{A_2B_2}{A_3B_3} = \frac{B_2C_2}{B_3C_3}$ или $\frac{A_2B_2}{B_2C_2} = \frac{A_3B_3}{B_3C_3}$.

Откуда: $\frac{A_1B_1}{B_1C_1} = \frac{A_3B_3}{B_3C_3}$ или $\frac{A_1B_1}{A_3B_3} = \frac{B_1C_1}{B_3C_3}$.

Следовательно, $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta A_3B_3C_3$. **Ч.Т.Д.**

Представим *методику введения понятия подобных треугольников А.П. Киселева.* Тему «Подобные треугольники» автор предлагает изучать после главы «Окружность», начав с *понятия измерения величин*, так как для введения понятия подобных треугольников необходимо знать о пропорциональности отрезков, а по программе рассматриваемого учебника на момент перехода к новой главе «Подобные фигуры», школьники учатся, сравнивая между собой два отрезка, определять, равны ли они между собой, и если не равны, то какой из них больше. Поэтому первая задача, которую ставит автор учебника перед учителем и учащимися: установить точное понятие о длине отрезка и найти способы выражать эту длину с помощью чисел.

Изучение *понятия подобных фигур*, как уже отмечалось выше, А.П. Киселев предлагает начинать с простейшего из случаев, а именно с подобия треугольников. Приведя примеры из реальной жизни фигур, которые имеют разные размеры, но одинаковую форму, и тем самым подготовив учащихся к восприятию нового для них понятия – подобия, автор знакомит школьников с определением подобных треугольников через привычные нам равенство углов и отношение сходственных сторон [16, С. 118]. Также А.П. Киселев рекомендует с помощью доказательства следующей *леммы* показать, что подобные треугольники как таковые возможны.

Лемма. Прямая (DE, рис. 28) параллельная какой-нибудь стороне (AC) треугольника (ABC), отсекает от него треугольник (DBE), подобный данному.

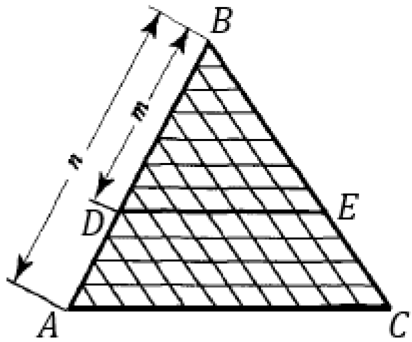


Рис. 28

Доказательство. Пусть в ΔABC прямая DE параллельна стороне AC. Тогда нам нужно доказать, что $\Delta DBE \sim \Delta ABC$. Следуя определению подобных треугольников, предстоит доказать что соответственные углы ΔABC и ΔDBE равны и сходственные стороны их пропорциональны.

1) Углы треугольников соответственно равны, поскольку $\angle B$ – общий, а $\angle D = \angle A$ и $\angle E = \angle C$, как соответственные углы при параллельных DE и AC и секущих AB и CB.

2) Докажем, что сходственные стороны ΔDBE и ΔABC пропорциональны, то есть что $\frac{BD}{BA} = \frac{BE}{BC} = \frac{DE}{AC}$.

Для этого придется рассмотреть два случая.

1. Стороны AB и DB имеют одну и ту же меру. Разделим AB на части, равные общей мере. Тогда BD разделится на некоторое целое число таких делений. Положим, этих частей имеется m в BD и n в AB. Проведем из точек деления прямые, параллельные AC, и другие прямые, параллельные BC. Тогда BE и BC разделятся на равные части, которых будет m в BE и n в BA. Точно так же DE разделится на m одинаковых частей, а AC на n одинаковых частей, причем части DE равны частям AC (как противоположные стороны параллелограммов). Теперь очевидно, что

$$\frac{BD}{BA} = \frac{m}{n}; \quad \frac{BE}{BC} = \frac{m}{n}; \quad \frac{DE}{AC} = \frac{m}{n}.$$

Следовательно, $\frac{BD}{BA} = \frac{BE}{BC} = \frac{DE}{AC}$.

2. Стороны AB и DB не имеют общей меры (Рис. 29). Найдем приближенное значение каждого из отношений $\frac{BD}{BA}$ и $\frac{BE}{BC}$, сначала с точностью до $\frac{1}{10}$, затем до $\frac{1}{100}$, и после будем последовательно увеличивать степень точности в 10 раз. С такой целью разделим сторону AB сначала на 10 равных частей и через точки деления проведем прямые, параллельные AC. Тогда сторона BC разделится также на 10 равных частей. Предположим, что $\frac{1}{10}$ доля AB укладывается в BD m раз, причем остается остаток, меньший $\frac{1}{10}AB$.

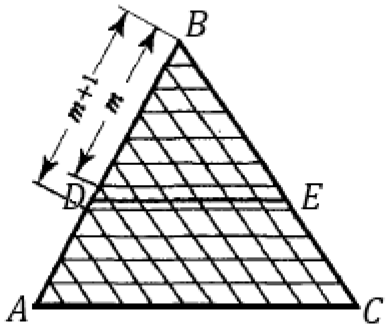


Рис. 29

Тогда, как мы видим из рис. 29, $\frac{1}{10}$ доля BC укладывается в BE также m раз и остается остаток меньше $\frac{1}{10}BC$. Следовательно, с точностью до $\frac{1}{10}$ имеем:

$$\frac{BD}{AB} = \frac{m}{10}; \quad \frac{BE}{BC} = \frac{m}{10}.$$

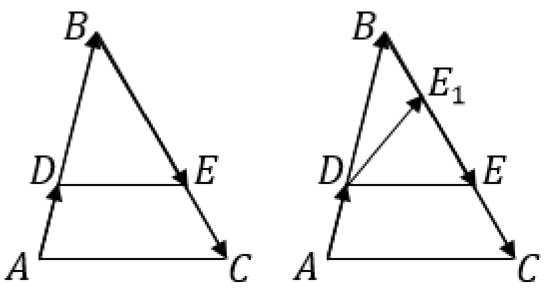
Далее, разделим AB на 100 равных частей и сделаем предположение, что $\frac{1}{100}AB$ укладывается m_1 раз в BD. Проводя опять через точки деления прямые, параллельные AC, убеждаемся, что $\frac{1}{100}BC$ укладывается в BE также m_1 раз. Поэтому с точностью до $\frac{1}{100}$ имеем: $\frac{BD}{BA} = \frac{m_1}{100}$ и $\frac{BE}{BC} = \frac{m_1}{100}$. Повышая далее степень точности в $10, 100, \ldots$ раз, убеждаемся, что приближенные значения соотношений $\frac{BD}{BA}$ и $\frac{BE}{BC}$, которые мы вычислили с произвольной, но одинаковой десятичной точностью, равны. А значит, значения этих отношений выражаются одной и той же бесконечной десятичной дробью, и тогда $\frac{BD}{BA} = \frac{BE}{BC}$.

Точно так же, проводя через точки деления стороны AB прямые, параллельные стороне BC, найдем, что $\frac{BD}{BA} = \frac{DE}{AC}$.

И, таким образом, мы имеем: $\frac{BD}{BA} = \frac{BE}{BC} = \frac{DE}{AC}$.

Лемма доказана [16, С. 120].

Приведенное доказательство А.П. Киселева, В.А. Гусев считает достаточно «трудным», хоть оно и усваивается учащимися. В своей статье «*О нестандартной математической деятельности при изучении геометрии в школе*» [13] автор приводит другой вариант доказательства данной леммы с использованием векторного аппарата. Отметим, что тема «Векторы», как правило, изучается в основной школе до темы «Подобные треугольники».



а) б)

Рис. 30

Равенство соответствующих углов в статье В.А. Гусева доказывается аналогично. Далее автор вводит векторные обозначения (Рис. 30, а). Векторы DB и AB коллинеарны по определению, значит, существует некоторое число $x,$ что $DB = x \cdot AB$ и по свойству коллинеарных векторов $\frac{DB}{AB} = x$. Коллинеарны и векторы BE и $BC,$ а значит $BE = y \cdot BC$ и $\frac{BE}{BC} = y$.

По наглядным соображениям можно сделать предположение, что $x = y$. Для доказательства данного предположения воспользуемся методом от противного и допустим, $x \neq y$. Умножим BC на x: $BE_1 = x \cdot BC$ (Рис. 30, б).

$DE_1 = DB + BE_1 = x \cdot AB + x \cdot BC = x \cdot \ AB + BC\ = x \cdot AC$. То есть, $DE_1 \parallel AC$ по свойству коллинеарных векторов. Но посмотрим на рис.30(б). Мы получили, что $DE \parallel AC$ и $DE_1 \parallel AC$. Это противоречит аксиоме параллельности прямых и, значит, наше предположение было неверным. Тогда $x = y,$ DE_1совпадает с DE и $DE = x \cdot AC$.

$DB = x \cdot AB, BE = x \cdot BC, DE = x \cdot AC,$ значит, $\frac{DB}{AB} = \frac{BE}{BC} = \frac{DE}{AC} = x.$ Следовательно, $\Delta DBE \sim \Delta ABC$, что и требовалось доказать.

По мнению автора, это доказательство трудно назвать «легким» для учеников, но в то же время оно служит отличным примером нестандартной математической деятельности [13].

После того, как учащиеся изучили три признака подобия треугольников и их доказательства (данный вопрос будет освещен в §5 работы), А.П. Киселев рекомендует ознакомить учащихся с примерами практического применения понятия подобных треугольников в окружающем нас мире: дать представление о делительном циркуле, о поперечном масштабе. В.Г. Чичигин на данном этапе предлагает решить с учениками задачу следующего типа.

Задача 19 [38, С. 312]. Одно плечо шлагбаума имеет длину 1 *м*, а другое – 4 *м*. На сколько поднимается конец длинного плеча, когда конец короткого опустится на $\frac{3}{4}$ *м* (Рис. 31)?

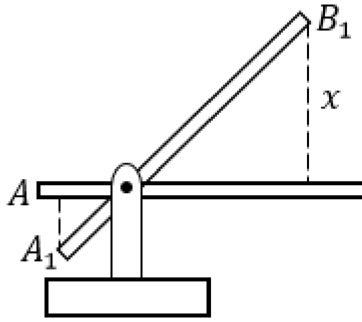


Рис. 31

Вместе с этим, задачи на нахождение расстояния между двумя точками на местности, расстояние до недостигаемого предмета. Учащиеся не только осознают значимость понятия подобия в реальной жизни, но и совершенствуют навыки применения признаков подобия треугольников, учатся распознавать подобные треугольники. Коэффициент подобия А.П. Киселев предлагает определять после теоремы об отношении периметров подобных многоугольников.

Коэффициент подобия – очень важное понятие, и напрасно авторы учебников и учителя им пренебрегают. Выясним, в чем заключаются методические преимущества введения этого понятия. Эти преимущества двоякого рода:

- технические, позволяющие достичь упрощений при решении задач;

- принципиальные, способствующие лучшему уяснению понятия подобия фигур (в частности треугольников).

Рассмотрим задачу: *стороны треугольника равны 2, 4 и 5, а периметр подобного ему треугольника равен 33; определить стороны второго треугольника*. Так как периметр первого треугольника равен $2 + 4 + 5 = 11$, то сразу можно определить коэффициент подобия

$$k = \frac{11}{33} = \frac{1}{3};$$

следовательно, стороны второго треугольника в три раза больше сходственных сторон первого треугольника. Разумеется, предварительно должно быть доказано, что не только отношение сходственных сторон, но также отношение сходственных высот, биссектрис, периметров и вообще любых линейных сходственных элементов равно коэффициенту подобия.

Н.М. Бескин отмечает, что если не пользоваться коэффициентом подобия, то приходится искомые отношения приравнивать отношениям известных отрезков. При использовании же коэффициента подобия мы не связываем его с отношением каких-нибудь определенных отрезков, а рассматриваем его как число, характеризующее данную пару подобных фигур.

Принципиальное значение коэффициента подобия заключается в следующем: коэффициент подобия есть символ, закрепляющий и в удобной форме фиксирующий ту важнейшую мысль, что в подобных фигурах любые сходственные отрезки имеют одно и то же отношение. Ученики, не ознакомленные с этим понятием, нуждаются в особом доказательстве того, что в подобных треугольниках сходственные высоты пропорциональны сходственным сторонам, а после этого доказательства они будут сомневаться, относится ли это свойство также к сходственным биссектрисам или медианам. У учеников, привыкших к коэффициенту подобия, такие недоразумения никогда не возникнут [6, С. 153].

Таким образом, существует *два* основных *подхода к методике введения понятия подобных треугольников*: сначала изучается подобие фигур (на примере подобных треугольников), а потом – подобное преобразование их; или сначала изучается подобное преобразование фигур, то есть гомотетия, и лишь потом – их подобие. Чаще изучение подобных фигур начинается все-таки с подобия треугольников. И, как считает Н.М. Бескин, существенным недостатком прохождения данного раздела геометрии в средней школе является то, что учителя обычно ограничиваются подобием треугольников и многоугольников, когда необходимо дать учащимся общее понятие о подобии. «Учитель, исключающий это понятие из курса геометрии, делает большую ошибку», – пишет Н.М. Бескин [6, С. 152]. Независимо от выбранного подхода к обучению данной теме, учителю нужно устанавливать с учащимися сам факт существования подобных фигур: нужно доказывать, что подобные треугольники как таковые возможны, с помощью леммы, которая к тому же лежит в основе доказательств признаков подобия треугольников. Также важным понятием, которому необходимо уделять особое внимание, является понятие коэффициента подобия.

§5. Различные подходы к методике обучения учащихся теме «Признаки подобия треугольников»

Признаки подобия треугольников, как уже было отмечено в §2 работы, могут вводиться в различном порядке в зависимости от того, какие утверждения будут использоваться при их доказательстве. Уже были приведены доказательства признаков подобия треугольников по материалу учебника А.Д. Александрова, в основе первого из которых лежит понятие гомотетии и теорема о задании движения, а в основе второго и третьего – теоремы синусов и косинусов, и уже доказанный первый признак подобия. Рассмотрим другие подходы к признакам подобия треугольников.

Как отмечает В.Г. Чичигин, установление *признаков подобия треугольников* и их применение к решению разного рода задач теоретического и практического характера в дальнейшем – основной и важнейший вопрос при изучении понятия подобия треугольников [38, С. 309].

При изучении подобия треугольников мы поступаем подобно тому, как при изучении треугольников - сначала были установлены признаки их равенства: вместо того чтобы в каждом отдельном случае выяснять наличие всех условий, входящих в определение подобия двух треугольников, выясняют признаки подобия треугольников, то есть выявляют достаточные условия, при наличии которых данные треугольники будут подобны.

Рассмотрим учебник А.П. Киселева, поскольку именно он на протяжении многих десятилетий оставался образцом строгости, четкости и доступности изложения геометрии в школе [12, С. 310].

А.П. Киселев предлагает следующую *схему доказательства признаков подобия треугольников*: на стороне одного из данных треугольников от соответственной вершины, которая принимается за центр гомотетии, откладывается сходственная сторона другого треугольника; через полученную точку проводится секущая прямая, параллельная другой стороне треугольника, до пересечения с третьей его стороной; получается новый треугольник, гомотетичный первому, а поэтому и подобный ему. Доказывается равенство нового и второго данного треугольников, из чего следует заключение о том, что второй треугольник подобен первому.

Рассмотрим доказательства признаков подобия треугольников по предложенной схеме.

Теоремы. Если в двух треугольниках: 1) *два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого* или

2) *две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого и углы, лежащие между этими сторонами, равны* или

3) *если три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого, то такие треугольники подобны*.

В такой форме представлены три признака подобия треугольников в учебнике А.П. Киселева.

Доказательство. 1) пусть даны ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$, у которых $\angle A = \angle A_1, \angle B = \angle B_1$ и, следовательно, $\angle C = \angle C_1$ (Рис. 32).

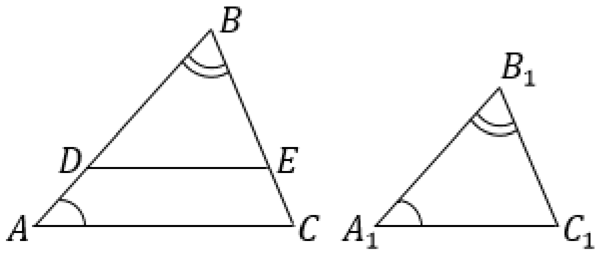


Рис. 32

Отложим на AB отрезок BD, равный A_1B_1, и проведем $DE \parallel AC$. Тогда получим вспомогательный ΔDBE, который, согласно доказанной лемме в §4 работы, подобен ΔABC. С другой стороны, $\Delta DBE = \Delta A_1B_1C_1$, так как у них $BD = A_1B_1$ (по построению), $\angle B = \angle B_1$ (по условию) и $\angle D = \angle A_1$ (поскольку $\angle D = \angle A$ и $\angle A = \angle A_1$). Но очевидно, что если из двух равных треугольников один подобен третьему, то и другой ему подобен; следовательно $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta ABC$.

2) пусть даны ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$, у которых $\angle B = \angle B_1$ и $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$. Отложим на отрезке AB отрезок BD, равный A_1B_1, и проведем $DE \parallel AC$ (Рис. 33). Тогда получим вспомогательный ΔBDE, подобный ΔABC. Докажем, что он равен $\Delta A_1B_1C_1$. Из подобия ΔABC и ΔDBE следует: $\frac{AB}{DB} = \frac{BC}{BE}$. Сравнивая эту пропорцию с данной ($\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$), замечаем, что первые отношения обеих пропорций одинаковы ($DB = A_1B_1$ по построению); следовательно, остальные отношения этих пропорций также равны, то есть $\frac{BC}{B_1C_1} = \frac{BC}{BE}$. Но если в пропорции предыдущие члены равны, то должны быть равны и последующие члены, значит $B_1C_1 = BE$. Мы видим, что ΔDBE и $\Delta A_1B_1C_1$ имеют по равному углу ($\angle B = \angle B_1$), заключенному между соответственно рав-

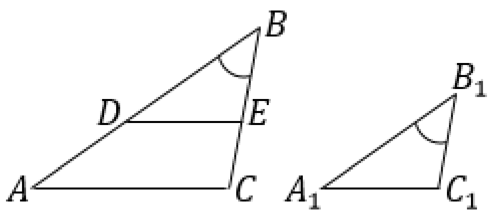


Рис. 33

ными сторонами; значит, эти треугольники равны. Но $\Delta DBE \sim \Delta ABC$, поэтому и $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta ABC$.

3) пусть даны ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$, у которых $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$ (Рис. 34) Сделав построение такое же, как и прежде, покажем, что $\Delta DBE = \Delta A_1B_1C_1$. Из подобия ΔABC и ΔDBE следует: $\frac{AB}{DB} = \frac{BC}{BE} = \frac{AC}{DE}$. Сравнивая этот ряд отношений с данным, замечаем, что первые отношения у них равны, следовательно, и остальные отношения равны, и потому $\frac{BC}{B_1C_1} = \frac{BE}{BE}$, откуда $B_1C_1 = BE$, и $\frac{AC}{A_1C_1} = \frac{AC}{DE}$, откуда $A_1C_1 = DE$. Мы видим, что ΔDBE и $\Delta A_1B_1C_1$ имеют по три соответственно равные стороны; значит, они равны. Но $\Delta DBE \sim \Delta ABC$, следовательно, и $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta ABC$ [16, С. 121].

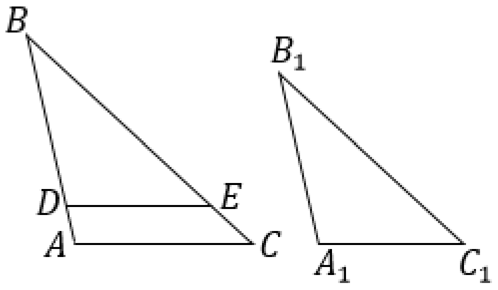


Рис. 34

В.Г. Чичигин замечает, что откладывать можно не только сторону меньшего треугольника на сходственной стороне большего, но и наоборот: на стороне меньшего треугольника можно отложить сходственную сторону большего, но при этом придется продолжить стороны первого треугольника (Рис. 35); то же откладывание можно сделать не на стороне треугольника, а на ее продолжении за ту же вершину (Рис. 36) [38, С. 311].

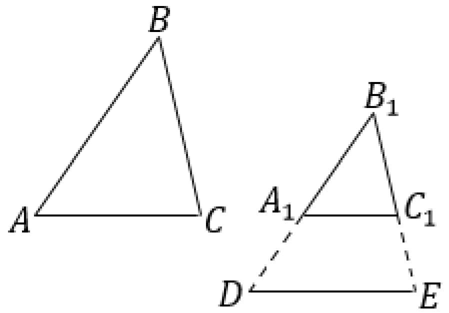


Рис. 35

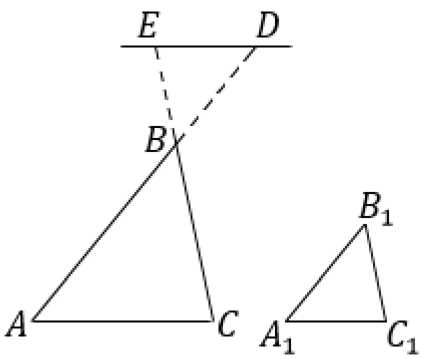


Рис. 36

В учебнике А.Н. Колмогорова порядок признаков подобия треугольников излагается в следующей последовательности: первый признак подобия – по трем сторонам, второй – по двум сторонам и углу между ними, третий – по двум углам.

Доказательства теорем – признаков подобия треугольников – приводятся аналогичным образом, с помощью построения гомотетичного одному из данных треугольников, с опорой на основную теорему о подобных треугольниках [17, С. 235].

И.Ф. Шарыгин в своем учебнике приводит снова другую последовательность признаков подобия треугольников: первый признак подобия – по двум сторонам и углу между ними, второй – по двум углам, третий – по трем сторонам [39, С. 214]. Доказательства признаков подобия треугольников автор приводит аналогично упомянутым выше.

Основой доказательства признака подобия треугольников по двум углам, представленного в учебнике Л.С. Атанасяна (в данном учебнике рассматриваемый признак является первым и лежит в основе доказательства двух других), является теорема об отношении площадей треугольников, имеющих по равному углу. Рассмотрим это доказательство.

Доказательство. Пусть даны ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$, такие, что $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$ (Рис. 37). По теореме о сумме углов треугольника $\angle C = 180° - -\angle A - \angle B$, $\angle C_1 = 180° - \angle A_1 - \angle B_1$, и значит, $\angle C = \angle C_1$. То есть, углы ΔABC соответственно равны углам $\Delta A_1B_1C_1$.

Поскольку $\angle A = \angle A_1$ и $\angle C = \angle C_1$, то по теореме об отношении площадей треугольников, имеющих по равному углу: $\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{AB \cdot AC}{A_1B_1 \cdot A_1C_1}$ и $\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = = \frac{CA \cdot CB}{C_1A_1 \cdot C_1B_1}$. А из этого следует отношение $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$. Аналогично, используя равенства $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, получим $\frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1}$. Таким образом, стороны ΔABC пропорциональны сторонам $\Delta A_1B_1C_1$. **Теорема доказана** [3, С. 141].

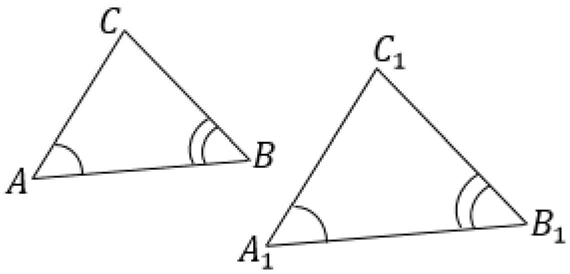


Рис. 37

Таким образом, существует несколько *подходов к обучению учащихся признакам подобия треугольников*. Во-первых, сам порядок теорем – признаков подобия – может быть различным: признак подобия треугольников по двум сторонам и углу между ними может выступать как первым признаком (например, в учебнике И.Ф. Шарыгина), вторым (учебники Л.С. Атанасяна и А.Н. Колмогорова), так и третьим (в учебнике А.Д. Александрова). Опорой доказательств признаков подобия треугольников также могут служить разные утверждения. Самой распространенной схемой доказательства признаков подобия треугольников в учебниках геометрии является способ построения гомотетичного треугольника (гомотетичного одному из данных) и доказательства равенства нового и второго данного треугольника. В основе этой схемы лежит основная теорема о подобных треугольниках.

§6. Методика обучения учащихся применению понятия подобия при решении задач и к доказательству теорем

Понятие подобия может применяться при доказательстве многих теорем: теоремы *о средней линии треугольника*, *о медианах треугольника, о высоте прямоугольного треугольника, разбивающей его на два подобных треугольника* и других.

Л.С. Атанасян пишет, что при изучении параграфа «Применение подобия к доказательству теорем и решению задач» цель учителя – показать учащимся применение подобия треугольников при доказательстве различных теорем и выработать у учеников навыки использования теории подобных треугольников при решении разнообразных задач [4, С. 119].

Раскроем методические особенности обучения учащихся *применению подобия к доказательству теорем*.

Ю.М. Колягин отмечает, что в процессе решения учебных математических задач следует уделять особое внимание актуализации опорных знаний учащихся. Весьма полезны специально подобранные задания, которые в свою очередь составлены так, чтобы научить школьников умело пользоваться прошлым опытом при поиске решения новой задачи [19, С. 190]. Так, Л.С. Атанасян, прежде чем перейти к доказательству *теоремы о средней линии треугольника*, предлагает повторить с учащимися второй признак подобия треугольников (по двум сторонам и углу между ними) и познакомить их с идеей доказательства посредством устного решения следующей задачи.

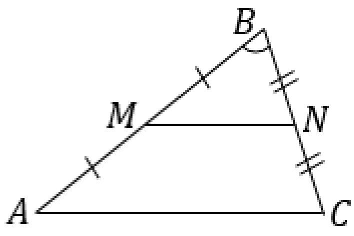


Рис. 38

Задача 20 [4, С.120]. На рисунке точки M и N – середины сторон AB и BC треугольника ABC (Рис. 38). Докажите, что $MN \parallel AC$.

Решение. $\Delta MBN \sim \Delta ABC$ по двум сторонам и углу между ними: $\angle B$ – общий и $\frac{BM}{AB} = \frac{BN}{BC} = \frac{1}{2} \Rightarrow \angle BMN = \angle BAC,$ а они соответственные при прямых MN и AC и секущей $AB \Rightarrow MN \parallel AC$. **Ч.Т.Д**.

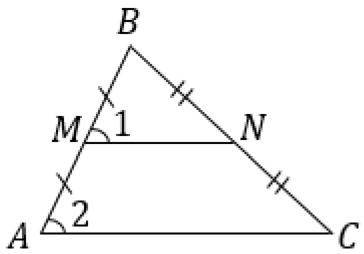


Рис. 39

После рассмотрения этой задачи, можно приступать к доказательству новой для учащихся теоремы.

Теорема 5. Средняя линия треугольника параллельна одной из его сторон и равна половине этой стороны [3, С. 145].

Доказательство. Пусть MN – средняя линия треугольника ABC (Рис. 39). Тогда нам нужно доказать, что $MN \parallel AC$ и $MN = \frac{1}{2}AC$.

Треугольники BMN и BAC подобны по двум сторонам и углу между ними ($\angle B$ – общий, $\frac{BM}{BA} = \frac{BN}{BC} = \frac{1}{2}$), поэтому $\angle 1 = \angle 2$ и $\frac{MN}{AC} = \frac{1}{2}$. Из равенства углов 1 и 2 следует, что $MN \parallel AC,$ а из второго равенства – что $MN = \frac{1}{2}AC$. **Теорема доказана**.

С помощью подобных треугольников Л.С. Атанасян предлагает доказать с учащимися *теорему о медианах треугольника*.

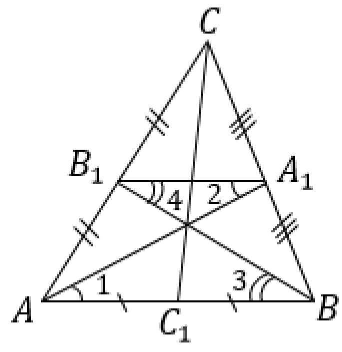


Рис. 40

Теорема 6. Медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит каждую медиану в отношении 2:1, считая от вершины [3, С. 146].

Доказательство. Пусть дан произвольный треугольник *ABC*. Точка O – точка пересечения его медиан AA_1 и BB_1 (Рис. 40). Проведем среднюю линию A_1B_1 этого треугольника. Отрезок A_1B_1 параллелен стороне AB, поэтому углы 1 и 2, и углы 3 и 4 равны как накрест лежащие углы при пересечении параллельных прямых AB и A_1B_1 секущими AA_1 и BB_1. Следовательно, ΔAOB и ΔA_1OB_1 подобны по двум углам, и, следовательно, их стороны пропорциональны:

$$\frac{AO}{A_1O} = \frac{BO}{B_1O} = \frac{AB}{A_1B_1}.$$

Так как $AB = 2A_1B_1$, то $AO = 2A_1O$ и $BO = 2B_1O$. Таким образом, точка O пересечения медиан AA_1 и BB_1 делит каждую из них в отношении 2:1, считая от вершины. Аналогично доказывается, что точка пересечения медиан BB_1 и CC_1 делит каждую из них в отношении 2:1, считая от вершины, и, следовательно, совпадает с точкой *О*. **Теорема доказана**.

Данную теорему можно доказать и другим способом, предложенным В. Дубровским в статье «*Шесть доказательств теоремы о медианах*» в журнале «Квант» [14, С. 36]. Автор формулирует данную теорему в следующем виде: *Медианы* AA_1, BB_1 *и* CC_1 *треугольника* ABC *пересекаются в некоторой точке* M, *причем каждая из них делится этой точкой в отношении 2:1, считая от вершины, то есть* $AM : MA_1 = |BM|:|MB_1| = |CM|:|MC_1| = 2.$

Доказательство. Пусть K – середина отрезка AM, B' - точка пересечения прямой BM со стороной AC. Нам достаточно доказать, что $AB' = B'C$. Через точки K и A_1 параллельно прямой BM проведем отрезки KL и A_1N (Рис. 41). Поскольку $AK = KM = |MA_1|$ и $CA_1 = = A_1B$, то по теореме Фалеса получаем $AL = LB' = B'N = NC$. Отсюда $AB' = = B'C$. **Теорема доказана**.

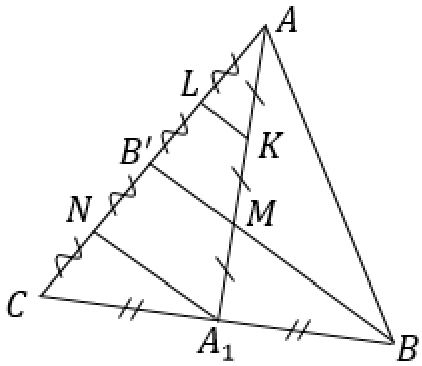


Рис. 41

Кроме этого, Л.С. Атанасян в своем учебнике приводит следующую теорему, которая также доказывается с использованием подобных треугольников.

Теорема 7. Высота прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла, разделяет треугольник на два подобных прямоугольных треугольника, каждый из которых подобен данному треугольнику [3, С. 147].

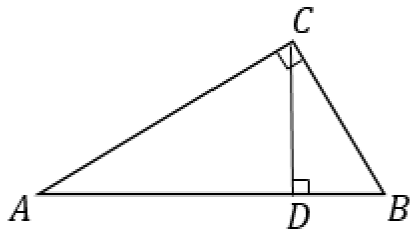


Рис. 42

Доказательство. Пусть дан прямоугольный ΔABC, у которого $\angle C$ прямой, CD – высота, проведенная из вершины прямого угла к гипотенузе. Докажем, что $\Delta ABC \sim \Delta ACD$, $\Delta ABC \sim \Delta CBD$, $\Delta ACD \sim \Delta CBD$ (Рис. 42).

$\Delta ABC \sim \Delta ACD$ по первому признаку подобия треугольников ($\angle A$ – общий, $\angle ACB = \angle ADC = 90°$). Точно также подобны ΔABC и ΔCBD ($\angle B$ – общий, $\angle ACB = \angle BDC = 90°$), поэтому $\angle A = \angle BCD$. ΔACD также подобен ΔCBD по первому признаку подобия (углы с вершиной D прямые, $\angle A = \angle BCD$). **Теорема доказана**.

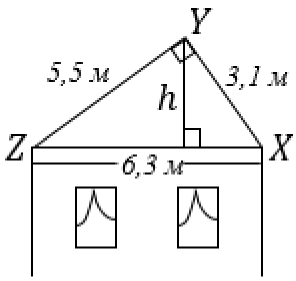


Рис. 43

Р. Ларсон в учебнике геометрии после изучения данной теоремы предлагает учащимся ознакомиться с ее практическим применением в реальной жизни: например, с ее помощью можно найти высоту крыши дома (Рис. 43) [49, С. 528].

В учебнике И.Ф. Шарыгина данная теорема не доказывается: подобие треугольников ABC, ACD и CBD автор считает очевидным, так как оно непосредственно следует из признака подобия треугольников по двум углам (второй признак подобия треугольников по учебнику автора). Сразу предлагается переходить к *теореме о соотношениях в прямоугольном треугольнике* [39, С. 230].

1. Высота прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, есть среднее пропорциональное для отрезков, на которые делится гипотенуза этой высотой.

2. Катет прямоугольного треугольника есть среднее пропорциональное для гипотенузы и отрезка гипотенузы, заключенного между катетом и высотой, проведенной из вершины прямого угла [29, С. 160].

Доказательство. 1. $\Delta ADC \sim \Delta CBD$ (Рис. 42), следовательно $\frac{AD}{CD} = \frac{CD}{DB}$, а значит $CD^2 = AD \cdot DB$, то есть $CD = \sqrt{AD \cdot DB}$. **Ч.Т.Д**.

2. Действительно, $\Delta ABC \sim \Delta ACD$ (Рис. 42), следовательно $\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AD}$, а значит, $AC = \sqrt{AB \cdot AD}$. **Ч.Т.Д**.

Б. Гейдман в статье «*Гомотетия и замечательные точки в треугольнике*» журнала «Квант» [8, С. 48] рекомендует решить следующую задачу про трапецию, в которой также применяется понятие подобия.

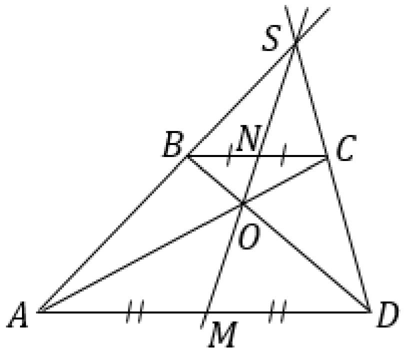


Рис. 44

Задача 21. Докажите, что прямая, проходящая через точку пересечения продолжений боковых сторон трапеции и точку пересечения ее диагоналей, проходит через середины оснований трапеции.

Доказательство. Нарисуем трапецию, продолжим ее боковые стороны, проведем диагонали, соединим середины оснований (Рис. 44). Мы видим, что образуется много пар подобных треугольников. Попробуем решить данную задачу, используя гомотетию. Пусть S – точка пересечения продолжений боковых сторон AB и CD трапеции $ABCD$, O – точка пересечения ее диагоналей. Рассмотрим две гомотетии: H_S с центром S и H_O с центром в точке O, переводящие основание AD трапеции в основание BC. Середина M отрезка AD и в той и в другой гомотетии перейдет в середину N отрезка BC, а потому точки M и N лежат на прямой OS, проходящей через центры гомотетии H_S и H_O.

Разберем это решение подробнее. Гомотетия H_S задается своим центром S и парой соответствующих точек A и B. По свойству гомотетии прямая AD при этом перейдет в параллельную ей прямую BC. Образ точки D будет находиться на прямой BC. С другой стороны, точка, соответствующая точке D, лежит на прямой SD, проходящей через центр гомотетии S.

Таким образом, гомотетия H_S переводит точку D в точку пересечения прямых BC и SD, то есть в точку C, а основание трапеции AD – в основание BC: $H_S\ AD\ = BC$.

Аналогично доказывается, что $H_O\ AD\ = CB$ (гомотетия H_O задается центром O и парой соответствующих точек A и C). Середину отрезка гомотетия переводит в середину образа этого отрезка, так как при гомотетии все расстояния между точками умножаются на одно и то же число, равное модулю коэффициента гомотетии.

И, наконец, середины оснований трапеции, как соответствующие точки гомотетии, лежат на прямой, проходящей через ее центр. **Ч.Т.Д**.

Отметим, что приведенное доказательство можно изучать с учащимися, которые обучаются геометрии по учебникам А.Д. Александрова или А.В. Погорелова.

Рассмотрим применение подобия при доказательстве *теоремы о произведении отрезков пересекающихся хорд*.

Теорема 8. Если две хорды окружности пересекаются, то произведение отрезков одной хорды равно произведению отрезков другой хорды [3, С. 170].

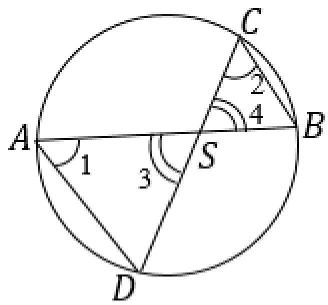


Рис. 45

Доказательство. Пусть хорды AB и CD пересекаются в точке S (Рис. 45). Докажем, что $AS \cdot BS = CS \cdot DS$. Рассмотрим ΔADS и ΔCBS.

В этих треугольниках углы 1 и 2 равны, так как они вписанные и опираются на одну и ту же дугу BD, а углы 3 и 4 равны как вертикальные. По первому признаку подобия (по двум углам) $\Delta ADS \sim \Delta CBS$. Значит, $\frac{AS}{CS} = \frac{DS}{BS}$, или $AS \cdot BS = CS \cdot DS$. **Теорема доказана**.

Учебник А.В. Погорелова предполагает изучение приведенного свойства пересекающихся хорд в рамках данной темы, поскольку доказательство данной теоремы (а также теоремы о секущих окружности) полностью опирается на подобие треугольников, из-за чего не приходится предварительно вводить какие-либо новые понятия, что делает процесс объяснения вводимых свойств и их усвоения учащимися проще. Рассмотрим *свойство секущих окружности*, которое также доказывается с помощью применения понятия подобия.

Теорема 9. Если из точки P к окружности проведены две секущие, пересекающие окружность в точках A, B и C, D соответственно, то $AP \cdot BP =$ $= CP \cdot DP$ [29, С. 164].

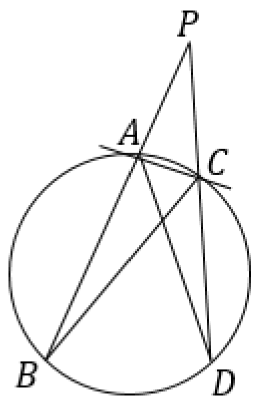


Рис. 46

Доказательство. Пусть точки A и C – ближайшие к точке P точки пересечения секущих с окружностью (Рис. 46). $\Delta PAD \sim \Delta PCB$ по первому признаку подобия треугольников (по двум углам): $\angle P$ – общий, а углы при вершинах B

и D равны, так как они вписанные и опираются на одну дугу. Значит, $\frac{PA}{PC} = \frac{PD}{PB}$. Следовательно, $PA \cdot PB = PC \cdot PD$. **Теорема доказана**.

Т.М. Мищенко замечает, что сформулированные в виде теорем 8 и 9 утверждения являются задачами, с решением которых учащиеся вполне могут справиться самостоятельно. Поэтому автор рекомендует предложить ученикам разобрать данные теоремы самостоятельно по учебнику [24, С. 41].

Раскроем методические особенности обучения учащихся *применению подобия к решению задач*.

Л.С. Атанасян на этапе изучения применения подобия при решении задач выделяет следующую образовательную цель: показать учащимся применение подобных треугольников при решении задач на построение циркулем и линейкой [4, С. 119].

Для того, чтобы выяснение сущности *метода подобия* для учащихся значительно упростилось, В.Г. Чичигин вначале рекомендует посредством решения элементарных задач повторить построение фигур, подобных данной фигуре, и гомотетичное преобразование данной фигуры в искомую при заданном коэффициенте подобия, а после этого приступать к решению задач на построение с полным применением метода подобия [38, С. 316]. Причем при решении каждой задачи необходимо следовать строго определенному плану. Рассмотрим основные этапы решения задачи на построение, приведенные в книге В.Г. Чичигина.

Пусть нашей задачей будет: построить треугольник, зная два его угла и медиану стороны, заключенной между вершинами данных углов.

I. *Анализ*. Строится треугольник, который принимается за искомый; отмечаются данные углы и строится соответствующая медиана.

Если не учитывать задание медианы, то задача сводится к построению треугольника по двум углам (бесконечное множество решений).

На медиане от одного из ее концов откладывается отрезок, равный данной медиане. Если отрезок откладывать от вершины, то потом через свободный конец проводится прямая, параллельная соответствующей стороне, и продолжаются две другие стороны треугольника (если это будет нужно); если же откладывать отрезок от конца медианы на стороне треугольника, то потом через другой конец данной медианы проводятся прямые, параллельные двум сторонам треугольника, а третья сторона продолжается (если в этом будет надобность).

Таким образом, в результате анализа составляется план построения.

II. *Построение* (по плану).

III. *Доказательство* (свойства гомотетии, подобия).

IV. *Исследование*: а) всегда имеется решение (способ построения); б) единственное решение (два угла и линейный элемент) [38, С. 317].

Ю.И. Акшонова пишет, что учащиеся также должны быть знакомы с применением подобия треугольников *в измерительных работах на местности*, так как важным моментом модернизации современного математического образования является усиление прикладной направленности школьного курса математики. Другими словами, в учебные программы необходимо включать *задачи с практическим содержанием*, которые и показывают прикладной характер математических знаний, активизируют мыслительную деятельность и способствуют развитию интереса у учащихся к математике как к предмету [1, С. 21].

Кроме того, в федеральном государственном образовательном стандарте основного общего образования (ФГОС ООО) [35] отмечается, что в результате изучения математики ученик должен *научиться*:

- решать несложные практические расчетные задачи;

- использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни для решения практических задач, связанных с нахождением геометрических величин.

Решение геометрических задач с практическим содержанием *позволяет*:

- усилить практическую направленность изучения школьного курса геометрии;

- выработать необходимые навыки решения практических задач, умения оценивать и находить величины, их приближенные значения;

- сформировать представления о соотношениях размеров реальных объектов и связанных с ними геометрических величин;

- повысить интерес, мотивацию и, как следствие, эффективность изучения геометрии [33, С. 4].

В конце учебного года в удобное время Л.С. Атанасян рекомендует провести с учащимися практическое занятие по проведению измерительных работ на местности [4, С. 124]. Примеры и решения основных типов задач по данной теме приведены в §3 работы.

Таким образом, многими авторами учебников в раздел «Подобные треугольники» вводятся разного рода теоремы и утверждения, доказательства которых опираются на понятие подобия. Так, Л.С. Атанасян включает в содержание рассматриваемой главы теоремы о средней линии треугольника, о медианах треугольника, о высоте прямоугольного треугольника, разбивающей его на два подобных треугольника (последнюю И.Ф. Шарыгин приводит в своем учебнике без доказательства в силу ее очевидности). Утверждения, связанные с пропорциональными отрезками в прямоугольном треугольнике, рассматриваются Л.С. Атанасяном, А.В. Погореловым, А.П. Киселевым и И.Ф. Шарыгиным, причем доказываются они аналогичным образом. А.В. Погорелов также включает в содержание темы «Подобные треугольники» свойства пересекающихся хорд и двух секущих окружности, поскольку их доказательства полностью опираются на понятие подобия треугольников.

Метод подобия также применяется при решении задач на построение циркулем и линейкой и в измерительных работах. Во всех рассмотренных учебниках геометрии методика решения задач на построение одинакова.

ВЫВОДЫ ПО ПЕРВОЙ ГЛАВЕ

1. Рассмотрены исторические аспекты развития понятия подобия. С понятием *подобия* люди были знакомы уже 5 тысяч лет назад: подобие широко применялось в строительстве, в измерительных работах. Одинаковые по форме, но различные по величине фигуры нередко встречаются в памятниках Древнего мира. Для построения *пропорциональных отрезков* вавилоняне использовали деление прямых двумя другими параллельными между собой прямыми. С этим способом знакомятся ученики и в наше время – через формулировку всем известной теоремы Фалеса. *Признаки подобия* треугольников впервые были приведены в «Началах» Евклида.

2. Представлен анализ теоретического материала школьных учебников разных авторов по теме «Подобные треугольники». Тема «Подобные треугольники» может изучаться как 8, так и в 9 классе. В отличие от углубленного, рассмотренные учебники базового уровня предполагают изучение теории подобия в ознакомительном порядке: большее внимание уделяется изучению подобных треугольников и их признаков. В зависимости от того, какие утверждения будут использоваться при доказательстве, признаки подобия треугольников могут даваться в различном порядке (Приложение 1).

Учебник геометрии А.Д. Александрова с углубленным изучением математики предполагает изучение темы «Подобие» во второй половине 9 класса, после того, как учащиеся ознакомились с понятием движения, его видами и классификацией. В учебнике А.В. Погорелова теория движений также рассматривается до введения понятия преобразования подобия. После рассмотрения понятия движения автор раскрывает тему «Векторы», и только потом приступает к изучению теории подобия фигур. Учебник Л.С. Атанасяна же знакомит учащихся с теорией движений не просто после изучения темы «Подобные треугольники» - он предполагает ее изучение в 9 классе.

3. Выделены основные типы задач по теме «Подобные треугольники» в учебниках разных авторов (Приложение 2). Задачный материал учебника с

углубленным изучением математики А.Д. Александрова значительно отличается от остальных не только преобладающим количеством заданий, но и самим их содержанием. Основное внимание автор выделяет понятию гомотетии и подобию произвольных фигур. Задачный же материал учебников Л.С. Атанасяна и А.В. Погорелова предполагает детальное изучение учащимися понятия подобных треугольников, признаков их подобия, теорем и свойств, связанных тем или иным образом с данными понятиями – и только потом ознакомление с понятием гомотетии.

4. Выявлены различные подходы к введению понятия подобных треугольников и основных понятий, связанных с ним. Существует два основных подхода к методике введения понятия подобных треугольников: сначала изучается подобие фигур (на примере подобных треугольников), а потом – подобное преобразование их; или сначала изучается подобное преобразование фигур, то есть гомотетия, и лишь потом – их подобие. Важным понятием, которому необходимо уделять особое внимание, является понятие коэффициента подобия.

5. Раскрыты различные подходы к методике обучения учащихся теме «Признаки подобия треугольников». Порядок теорем – признаков подобия – может быть различным: признак подобия треугольников по двум сторонам и углу между ними может выступать как первым признаком, вторым, так и третьим. Опорой доказательств признаков подобия треугольников также могут служить разные утверждения. В основе самой распространенной схемы доказательства признаков подобия треугольников лежит основная теорема о подобных треугольниках.

6. Выявлены методические особенности обучения учащихся применению понятия подобия к доказательству теорем и при решении задач. Многими авторами учебников в раздел «Подобные треугольники» вводятся разного рода теоремы и утверждения, доказательства которых опираются на понятие подобия. Так, Л.С. Атанасян включает в программу рассматриваемой главы

теоремы о средней линии треугольника, о медианах треугольника, о высоте прямоугольного треугольника, разбивающей его на два подобных треугольника. Утверждения, связанные с пропорциональными отрезками в прямоугольном треугольнике, рассматриваются Л.С. Атанасяном, А.В. Погореловым, А.П. Киселевым и И.Ф. Шарыгиным. А.В. Погорелов также включает в программу темы «Подобные треугольники» своего учебника свойства пересекающихся хорд и двух секущих окружности.

Метод подобия также применяется при решении задач на построение циркулем и линейкой и в измерительных работах. В рассмотренных учебниках геометрии этапы решения задач на построение и примеры к ним совпадают.

ГЛАВА II. МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ОБУЧЕНИЯ ТЕМЕ «ПОДОБНЫЕ ТРЕУГОЛЬНИКИ» В КУРСЕ ГЕОМЕТРИИ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ

§7. Методические рекомендации по обучению теме «Подобные треугольники» в курсе геометрии основной школы

Рассмотрев перечень учебников геометрии для 8-9 классов Л.С. Атанасяна [3], А.Д. Александрова [2] и А.В. Погорелова [29], рекомендованных к использованию при реализации обязательной части основной образовательной программы [37], а также учебники геометрии А.Н. Колмогорова, А.П. Киселева и Н.А. Глаголева, за основу мы взяли учебник Л.С. Атанасяна.

На тему «*Подобные треугольники*» в школьном курсе геометрии по ученику Л.С. Атанасяна отводится 19 часов, три из которых предназначены для изучения соотношений между сторонами и углами прямоугольного треугольника в последнем параграфе главы. Так, материал главы является традиционным для любого курса планиметрии: пропорциональность отрезков, подобные треугольники, признаки подобия треугольников, отношение площадей подобных треугольников и подобие произвольных фигур. Т.М. Мищенко считает, что одна из основных задач рассматриваемой главы – усвоение учениками признаков подобия треугольников и формирование умения применять их при решении задач, поскольку свойства подобных треугольников будут часто применяться в дальнейшем при изучении и планиметрии, и стереометрии [25, С. 83].

Л.С. Атанасян при изучении первого параграфа главы «Подобные треугольники» рекомендует ввести *понятие пропорциональных отрезков* и, опираясь на него, дать определение подобных треугольников. Автор считает целесообразным распределить данный материал по урокам следующим образом: на первом уроке, повторив свойства пропорций, ознакомить учащихся с пропорциональными отрезками и со свойством биссектрисы треугольника; на втором уроке дать определение подобных треугольников, а также теорему об отношении площадей подобных треугольников [4, С. 114].

Т.М. Мищенко обращает внимание на то, что формирование умения применять *понятие пропорциональности* и навыка записи отношения различных величин является методической задачей не только геометрии, но и алгебры, поэтому нужно серьезно подойти к закреплению данных навыков. Наряду с заданиями, в которых нужно указать, чему равно отношение одного отрезка к другому, автор рекомендует выполнять и упражнения по готовым чертежам, где требуется определить, как относится площадь заштрихованных квадратов к площади незаштрихованных (Рис. 47) [25, С. 86].

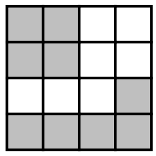


Рис. 47

Н.Н. Мудрякова рекомендует перед введением понятия пропорциональных отрезков в ходе фронтального опроса вспомнить с учащимися: что называют *отношением двух чисел*; что показывает отношение; о чем говорит то, что отношение AB и CD равно $3:7$; что называют пропорцией; основное свойство пропорции [27]. Д. Александр также предлагает начинать изучение понятия пропорциональных отрезков с повторения *пропорций* и их свойств, посредством решения элементарных примеров, с чем у учащихся не должно возникнуть никаких трудностей: $\frac{x}{8} = \frac{5}{12}$; $\frac{x+2}{5} = \frac{4}{x-1}$ [46, С. 220].

Перед введением определения подобных треугольников, также вводится *понятие сходственных сторон*. При его введении, необходимо обращать внимание учащихся на то, что сходственные стороны лежат против равных углов. То есть, если в условии задачи говорится, что «треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны, и у них $\angle A = \angle A_1, \angle B = \angle B_1, \angle C = \angle C_1$ ...», то ученики должны уметь записать отношение сходственных сторон: $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$.

В.В. Родителева предлагает учащимся самостоятельно подойти к определению подобных треугольников. Сначала учащимся показывается пара вырезанных из бумаги равных треугольников – ученики подтверждают их равенство наложением друг на друга. После чего учащимся выдаются пары различных подобных между собой треугольников, чтобы в ходе анализа они выясняли, что в предложенных им фигурах общего [31].

В качестве первого *определения подобных фигур* С. Ланг рекомендует принять следующее утверждение: *две фигуры в плоскости подобны, когда одна из них сравнима с другой*. Так, например, любые два круга подобны друг другу. Рассмотрев примеры подобных фигур (четырехугольников, любых произвольных фигур), автор предлагает учащимся приступить к изучению понятия подобных треугольников и выявлению их свойств и признаков [48, С. 245].

Т. Купер считает, что *понятие подобия треугольников* следует понимать не только в терминах равных углов и пропорциональных сторон – учащиеся должны осознавать сам *процесс*, который производит такую же форму треугольника посредством его расширения. Для этого предлагается, если имеется такая возможность, использовать на уроках изучения нового материала наглядное представление подобия с помощью света электрического фонаря (светильника) (Рис. 48), падающего на треугольник, который в свою очередь будет отбрасывать тень, подобную ему, на плоскость [47, С. 253].

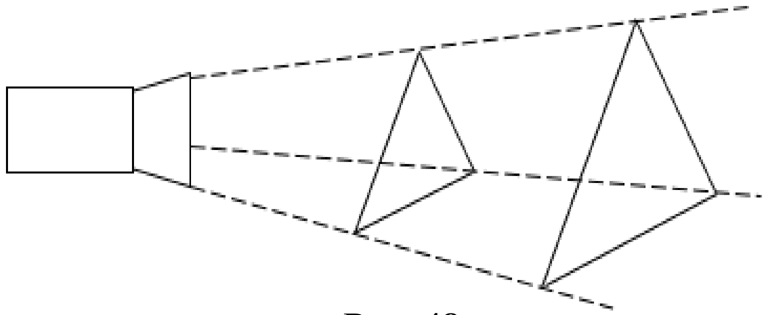


Рис. 48

Ознакомившись с определениями подобных треугольников, коэффициентом подобия, и закрепив полученные знания решением устных и полуустных задач, учащиеся переходят к формулировке *теоремы об отношении площадей подобных треугольников*. Перед ее доказательством автор учебника рекомендует еще раз вспомнить теорему об отношении площадей треугольников, которые имеют по равному углу, так как именно она лежит в основе доказательства.

Таким образом, в результате изучения параграфа, ученики *должны знать* определения подобия, коэффициента подобия, пропорциональных отрезков, подобных треугольников. Все перечисленные понятия школьники должны научиться объяснять, теорему об отношении площадей подобных треугольников – формулировать и доказывать. Также учащиеся должны распознавать на чертежах подобные треугольники, изображать их и обозначать, применять при решении задач изученные определения и теорему.

По программам к учебникам А.В. Погорелова, как и А.Д. Александрова, определение подобных треугольников дается через преобразование подобия, поэтому здесь первыми вводимыми определениями окажутся: преобразование подобия, гомотетия и подобие фигур [24, С. 10]. В результате изучения первых параграфов учащиеся должны будут *научиться*: выделять в конфигурации, данной в задаче, подобные треугольники; объяснять понятия гомотетии, подобия, коэффициента гомотетии, коэффициента подобия, подобных фигур; строить точки и простейшие фигуры, гомотетичные данным; объяснять различие между преобразованием движения и подобия; а также применять данные понятия при решении задач.

На изучение следующего параграфа «*Признаки подобия треугольников*» Л.С. Атанасян выделяет 5 часов. Его назначением является рассмотрение трех признаков подобия треугольников и формирование у учеников навыков применения этих признаков при решении задач. Т.М. Мищенко отмечает, что данная тема одна из важнейших во всем курсе планиметрии, и именно по этой причине необходимо уделить максимальное количество внимания формированию практических умений и навыков [25, С. 91].

К материалу второго параграфа автор учебника предлагает следующее распределение по часам: два урока выделить на первый признак подобия треугольников (по двум углам), следующие два урока – на второй (по двум сторонам и углу между ними) и третий (по трем сторонам) признаки, и еще один урок – на решение задач. После этого Л.С. Атанасян рекомендует провести контрольную работу.

Поскольку *первый признак подобия треугольников* лежит в основе доказательств второго и третьего признаков подобия треугольников, то учителю его доказательство предлагается провести самому. При доказательстве теоремы, нужно воспроизвести для учащихся определение подобных треугольников, чтобы они поняли, что для доказательства подобия треугольников необходимо доказать равенство углов и пропорциональность сходственных сторон.

После того, как первый признак подобия треугольников будет доказан, Т.М. Мищенко рекомендует решить с учащимися следующую задачу [25, С. 92]: *В трапеции $ABCD$ проведены диагонали AC и BD. Докажите, что треугольники COB и AOD подобны* (Рис. 49).

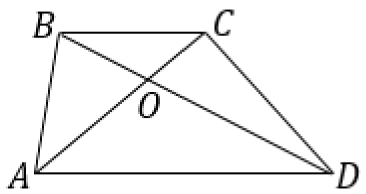


Рис. 49

Дано: $ABCD$ – трапеция;

AC и BD – диагонали;

$CA \cap DB$ в точке O.

Доказать: $\Delta COB \sim \Delta AOD$.

Доказательство. Рассмотрим ΔAOD и ΔBOC: $\angle AOD = \angle BOC$ – вертикальные; $\angle BCA = \angle CAD$ – накрест лежащие при пересечении параллельных прямых BC и AD и секущей $AC \Rightarrow \Delta COB \sim \Delta AOD$ по двум углам. **Ч.Т.Д.**

Н.В. Юрлавина считает целесообразным начинать уроки, посвященные изучению признаков подобия треугольников, с задач по готовым чертежам (Рис. 50), где будет требоваться найти неизвестные величины (те или иные элементы треугольников), обозначенные через x, y, z [42].

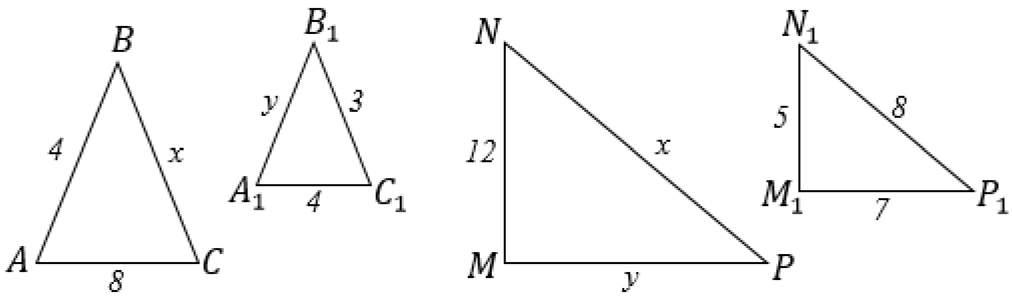


Рис. 50

Нами установлено, что признаки подобия треугольников могут вводиться в различном порядке, и поэтому следует обратить внимание учеников на геометрически грамотную ссылку на первый признак подобия треугольников: *по двум углам*.

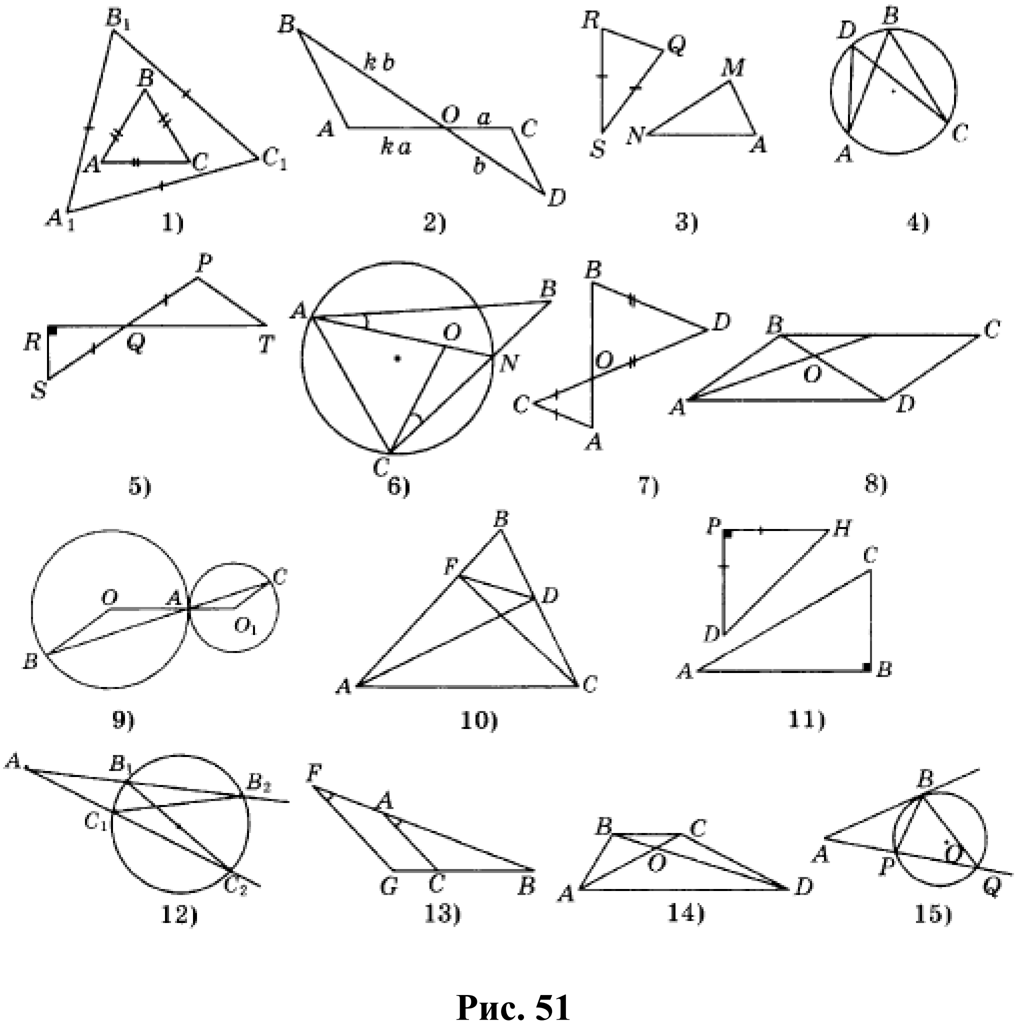


Рис. 51

На втором уроке Л.С. Атанасян рекомендует провести небольшую самостоятельную работу обучающего характера. Теоремы, которые выражают второй и третий признаки подобия треугольников, также предлагается провести самому учителю.

На последнем уроке по изучению параграфа «Признаки подобия треугольников», перед самостоятельной работой Т.М. Мищенко рекомендует провести повторение всех трех признаков подобия треугольников с использованием плаката, изображенного выше на Рис. 51.

Учитель должен сопровождать данную работу следующими вопросами: 1) Какие из приведенных пар треугольников подобны? 2) Почему эти треугольники подобны? 3) Подобны ли треугольники под номерами 3, 5, 11 и почему? [25, С. 95]

Иногда учащиеся сталкиваются с проблемой запоминания формулировок признаков подобия треугольников. В.Г. Чичигин приводит в книге «Методика преподавания геометрии. Планиметрия» таблицу (Табл. 4), с помощью которой как ученикам, так и учителям, можно составлять признаки подобия треугольников с учетом определенного признака равенства треугольников и наблюдать условия изменения признака равенства треугольников на признак подобия треугольников [38, С. 310].

Таблица 4

Анализ признаков равенства и признаков подобия треугольников

Признаки равенства треугольников	***Изменяются или заменяются***	***Признаки подобия треугольников***
1. $\angle A = \angle A_1$; $\angle B = \angle B_1$; $c = c_1$	$c = c_1$ (исключается)	1. $\angle A = \angle A_1$; $\angle B = \angle B_1$
2. $\angle C = \angle C_1$; $a = a_1$; $b = b_1$	$\frac{a}{a_1} = k$ и $\frac{b}{b_1} = k$	2. $\angle C = \angle C_1$; $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = k$
3. $a = a_1$; $b = b_1$; $c = c_1$	$\frac{a}{a_1} = k$; $\frac{b}{b_1} = k$; $\frac{c}{c_1} = k$	3. $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1} = k$

В результате изучения данного параграфа ученики *должны научиться* формулировать и доказывать признаки подобия треугольников, иллюстрировать их, а также применять признаки подобия треугольников при решении задач на вычисление и доказательство.

Как отмечалось ранее, признаки подобия треугольников по программам к учебникам А.В. Погорелова и А.Д. Александрова доказываются с помощью преобразования подобия. Для учащихся обучающихся геометрии по материалам учебника А.В. Погорелова, все три признака подобия треугольников объединены общей идеей доказательства и проводятся по следующему плану [24, С. 9]:

1. Треугольник $A_1B_1C_1$подвергается преобразованию подобия, например гомотетии с коэффициентом подобия $k = \frac{AB}{A_1B_1}$. При этом получается некий третий треугольник $A_2B_2C_2$.

2. Доказывается равенство треугольников ABC и $A_2B_2C_2$.

3. Доказывается, что треугольник $A_1B_1C_1$переводится в треугольник ABC преобразованием подобия, то есть что $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$ по определению.

Далее учащимся предлагается познакомиться с *применением подобия к доказательству теорем и решению задач*, на изучение которого Л.С. Атанасян выделяет 7 часов. В данном параграфе рассматриваются прикладные аспекты применения понятия подобия к доказательству ряда теорем, к решению широкого класса задач (на вычисление, на доказательство, на построение, на измерение недоступных объектов и расстояния до них). Автор учебника рекомендует следующее распределение материала по урокам: 2 часа – на теорему о средней линии треугольника и свойство медиан треугольника; 2 часа – на теоремы о пропорциональных отрезках в прямоугольном треугольнике и деление отрезка в данном отношении; 2 часа – на решение задач на построение с использованием метода подобия; 1 час – на измерительные работы на местности и понятие подобия произвольных фигур [4, С. 120].

Т.М. Мищенко считает полезным вводить *понятие средней линии треугольника* на наглядном уровне. То есть, отметить в треугольнике середину одной стороны, середину другой, соединить эти точки и получившийся отрезок назвать средней линией треугольника. После уже сформулировать определение данного понятия учащимся под запись [25, С. 100]. Для того, чтобы проверить правильно ли усвоили ученики определение, следует выполнить работу по заранее заготовленным чертежам: предложить учащимся найти на рисунках треугольники, в которых проведена средняя линия (в набор обязательно нужно включить контрпримеры). Доказательство теоремы о средней линии треугольника учащиеся могут провести самостоятельно, или же разобрать с помощью текста учебника.

Теорему о свойстве медиан треугольника Л.С. Атанасян рекомендует доказать самому учителю. На следующем уроке для установления уровня усвоения учащимися изученных теорем, считается целесообразным дать устные задачи следующего типа:

1. *На Рисунке* 52 $ABCD$ *– трапеция* ($AD \parallel BC$): $AD = 2BC, BM = MK$, $CN = NK, BC = 6$ см. *Найдите* PQ.

2. *На Рисунке* 53 AA_1, BB_1, CC_1 *– медианы треугольника* ABC. *Докажите, что: а)* $S_{AOC_1} = S_{BOC_1}$; *б)* $S_{AOB} = 2S_{A_1OB}$; *в)* $S_{AOC_1} = \frac{1}{6}S_{ABC}$.

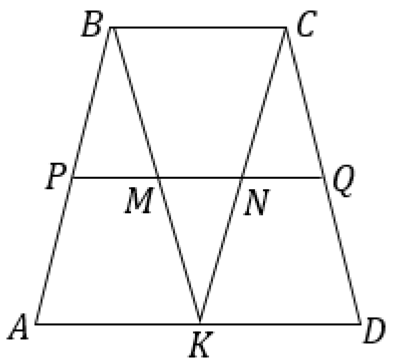


Рис. 52

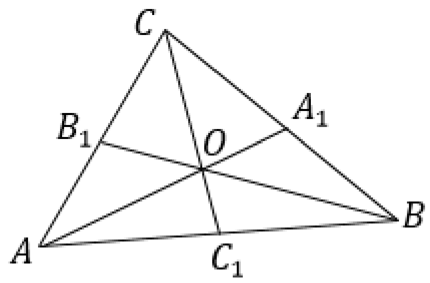


Рис. 53

На следующем уроке автор рекомендует провести проверочную самостоятельную работу.

Перед тем как перейти к утверждениям о пропорциональных отрезках в прямоугольном треугольнике Т.М. Мищенко предлагает рассмотреть *признаки подобия прямоугольных треугольников*, которые можно предложить сформулировать самим учащимся. Для доказательства данных утверждений ученикам достаточно предложить решить следующие задачи [25, С. 102].

1. Доказать, что два прямоугольных треугольника подобны, если они имеют по одному равному острому углу.

2. Доказать, что два прямоугольных треугольника подобны, если их катеты пропорциональны.

Для рассмотрения пропорциональных отрезков в прямоугольном треугольнике Л.С. Атанасян считает полезным ввести *понятие среднего геометрического (среднего пропорционального) двух отрезков*.

Далее рассматриваются *задачи на построение*. Под задачами на построение понимаются такие задачи, при решении которых нужно построить геометрическую фигуру, удовлетворяющую условиям задачи, с помощью циркуля и линейки без делений. При решении данных задач применяется *метод подобия*, который заключается в следующем: на основании некоторых данных строят фигуру, подобную искомой, а затем, используя остальные данные, строят искомую фигуру.

Л.П. Шебанова отмечает, что задачи на построение приобщают школьников к анализу и самостоятельным исследованиям, способствуют пониманию происхождения различных геометрических объектов и фигур, возможностей их преобразования. Формирование у учащихся понятий и представлений о пространстве – одна из важнейших задач развития школьников в процессе обучения. Развитие пространственного мышления в процессе обучения школьников необходимо с первого дня в школе [40, С. 417]. Именно решение задач на построение, считает Е.Ю. Трубина, формирует у учащихся умение организовывать свою учебную деятельность. В ходе решения таких задач школьники учатся ставить перед собой цель, планировать с помощью каких умений они будут находить ответ. Задачи на построение способствуют развитию логического мышления и геометрической интуиции [34, С. 85].

Перед тем как приступить к решению задач на построение методом подобия, желательно напомнить учащимся об основных задачах на построение с помощью выполнения следующего задания: *начертите остроугольный* *треугольник ABC, постройте медиану AM, биссектрису AD и высоту AH треугольника ABC; прямую BN, параллельную медиане AM.* Причем, как отмечает Л.С. Атанасян, не обязательно требовать от учеников фактического выполнения построений циркулем и линейкой – достаточно, чтобы они указали в каждом случае последовательность операций, которые они собираются выполнять для решения той или иной задачи [4, С. 123].

Автор считает целесообразным решить в классе задачу №589 с оформлением на доске и в тетрадях учащихся.

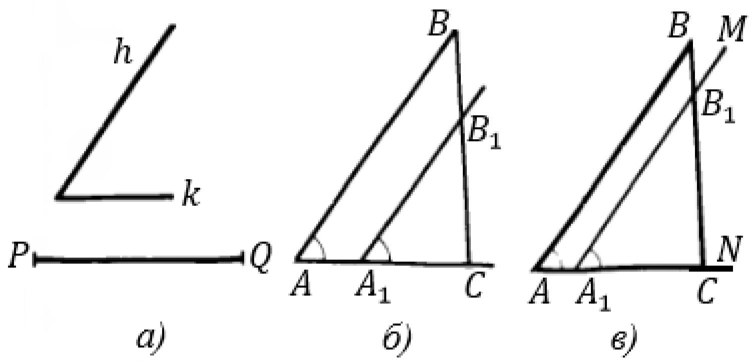


Рис. 54

Дано: отрезок PQ, $\angle hk$ (Рис. 54, а).

Построить: ΔABC: $\angle A = \angle hk, BC = PQ, AB{:}AC = 2{:}1$.

Анализ (устно). Пусть ΔABC – искомый (Рис. 54, б). Тогда любой треугольник $A_1B_1C_1$, в котором $A_1B_1 \parallel AB$ $A_1 \in AC, B_1 \in BC$, подобен треугольнику ABC по двум углам ($\angle A_1 = \angle A, \angle C -$ общий). Значит, $A_1B_1{:}A_1C = 2{:}1$, $\angle A_1 = \angle hk$. Таким образом, достаточно построить какой-нибудь треугольник A_1B_1C, в котором $A_1B_1{:}A_1C = 2{:}1, \angle A_1 = \angle hk$, а затем отложить на луче CB_1 отрезок $CB = PQ$ и через точку B провести прямую, параллельную прямой A_1B_1. Точка A пересечения этой прямой с прямой A_1C является вершиной искомого треугольника.

Построение. 1. Строим угол MA_1N, равный данному углу hk (Рис.54, в).

2. Отмечаем произвольную точку C на луче A_1N.

3. На луче A_1M откладываем отрезок A_1B_1, равный $2A_1C$.

4. На луче CB_1 откладываем отрезок CB, равный данному отрезку PQ.

5. Через точку B проведем прямую, параллельную A_1B_1. Она пересекает прямую A_1C в точке A. Треугольник ABC – искомый.

Доказательство. $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C$ по двум углам ($\angle A = \angle A_1 = \angle hk$, так как $AB \parallel A_1B_1$, $\angle C$ −общий), поэтому $AB : AC = A_1B_1 : A_1C = 2:1$. Треугольник ABC − искомый, так как $\angle A = \angle hk, BC = PQ$ по построению и $AB : AC = 2:1$.

Исследование (устно). Указанный способ решения задачи показывает, что задача всегда имеет решение. Все треугольники, удовлетворяющие условиям задачи, подобны по двум пропорциональным сторонам и углу между ними $\angle A = \angle hk, AB : AC = 2:1$, следовательно, их углы соответственно равны, а так как в любом из этих треугольников $BC = PQ$, то все они равны по второму признаку равенства треугольников. Таким образом, задача имеет единственное решение.

Если в конце второго урока по этой теме остается время, Л.С. Атанасян рекомендует провести проверочную самостоятельную работу.

Объяснять учащимся, как определяется высота предмета, Т.М. Мищенко советует на примере решения задачи №579 [3, С. 153]. *Для определения высоты столба A_1C_1, изображенного на рисунке, использован шест с вращающейся планкой. Чему равна высота столба, если* $BC_1 = 6,3$ м, $BC = 3{,}4$ м, $AC = 1{,}7$ м? (в решении данной задачи целесообразно использовать признак подобия прямоугольных треугольников, который был доказан ранее) Как определяется расстояние до недоступной точки, можно показать на примере решения задачи 582 этого же учебника. *Для определения расстояния от точки A до недоступной точки B на местности выбрали точку C и измерили отрезок AC, углы BAC и ACB. Затем построили на бумаге треугольник $A_1B_1C_1$, подобный треугольнику ABC. Найдите AB, если $AC = 42$ м, $A_1C_1 = 6{,}3$ см, $A_1B_1 = 7{,}2$ см* [25, С. 102]. При составлении самостоятельных работ по данной теме полезно использовать работу И.М. Смирновой и В.А. Смирнова «Геометрические задачи с практическим содержанием» [33].

По программе к учебнику Л.С. Атанасяна подобие произвольных фигур дается в ознакомительном порядке, поэтому данный урок считается целесообразным организовать в форме беседы.

К вопросу понятия подобия произвольных фигур, следует заметить, что иногда подобные треугольники определяют отдельно, как треугольники с соответственно равными углами, и только в дальнейшем доказывают пропорциональность сторон с помощью обобщенной теоремы Фалеса, как, например, писал в своей книге А.Ю. Давидов [12, С. 24] и как предлагает «на первое время» основывать определение подобных треугольников на одном из двух условий Ф. Аллен, после доказывая второе условие [50, С. 295]. Отметим, что это свойство при поверхностном отношении может привести к большим недоразумениям. Н.М. Бескин пишет, что учитель должен обращать внимание учеников на то, что если для подобия треугольников равенства углов (или пропорциональности сторон) достаточно, то в случае подобия многоугольников этого недостаточно. Например, два прямоугольника, изображенные на Рис. 55, не подобны, хотя углы у них и одинаковые [6, С. 157].

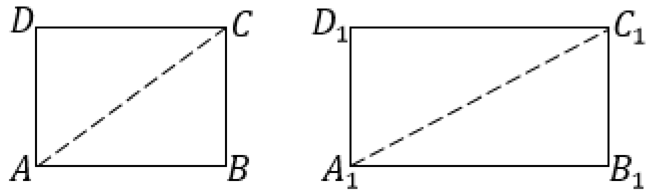


Рис. 55

Таким образом, при обучении учащихся теме «Подобные треугольники» необходимо уделять внимание формированию у учеников практических умений и навыков применения понятия подобных треугольников – в особенности признаков подобия треугольников – при решении задач на вычисление и доказательство, так как свойства подобных треугольников будут часто применяться в дальнейшем при изучении как планиметрии, так и стереометрии; наглядности и доступности объяснения нового материала. В основном, доказательства теорем, свойств, следствий учителю следует проводить и объяснять самостоятельно, за исключением некоторых утверждений, не требующих точных и громоздких записей.

При обучении учащихся тебе «Подобные треугольники» нужно серьезно подойти к закреплению навыков применения понятия пропорциональности и записи отношения различных величин. При составлении самостоятельных работ необходимо уделять внимание задачам практического характера, с этой целью полезно использовать работу «Геометрические задачи с практическим содержанием» И.М. Смирновой и В.А. Смирнова [33]. Для того, чтобы у учащихся не возникало трудностей при запоминании признаков подобия треугольников, целесообразно использовать таблицу, представленную в книге В.Г. Чичигина [38]. Не стоит забывать о важности метода подобия при решении задач на построение, которую отмечали в своих статьях Л.П. Шебанова [40] и Е.Ю. Трубина [34].

§8. Анализ задач ОГЭ по теме исследования

В модуле «Геометрия» **части 1** основного государственного экзамена по математике в задании №13 включают задания на определение истинности (ложности) утверждений, связанных с понятием подобных треугольников.

Задача 22 [36]. Какое из следующих утверждений верно?

1) Если два угла одного треугольника равны двум углам другого треугольника, то такие треугольники подобны.

2) Две окружности пересекаются, если радиус одной окружности больше радиуса другой окружности.

3) Средняя линия трапеции равна сумме её оснований.

В ответ запишите номер выбранного утверждения.

Ответ: 1.

Задача 23 [45]. Какие из следующих утверждений верны?

1) Все диаметры окружности равны между собой.

2) Угол, вписанный в окружность, равен соответствующему центральному углу, опирающемуся на ту же дугу.

3) Любые два равносторонних треугольника подобны.

В ответ запишите номера выбранных утверждений без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

Ответ: 13.

Для того, чтобы решить задания данного типа, учащимся необходимо знать определение подобных треугольников и их свойства, признаки подобия треугольников. Ученики должны быстро и грамотно оперировать с понятиями, связанными с подобием треугольников, чтобы у них оставалось больше времени на выполнение второй части заданий экзамена.

Нами были выделены основные типы задач, которые встречаются в **части 2** основного государственного экзамена по теме исследования:

1) задачи на выделение признаков подобия треугольников:

Задача 24 [45]. Отрезки AB и DC лежат на параллельных прямых, а отрезки AC и BD пересекаются в точке M. Найдите MC, если $AB = 16$, $DC = 24$, $AC = 25$ (Рис. 56).

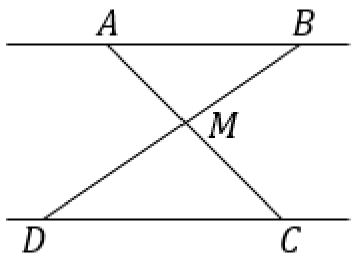


Рис. 56

Решение:

1) рассмотрим ΔAMB и ΔCMD. $\Delta AMB \sim \Delta CMD$ по двум углам ($\angle AMB = \angle CMD$ как вертикальные углы, $\angle ABM = \angle CDM$ как накрест лежащие углы при параллельных прямых AB, DC и секущей BD).

2) составим отношение сходственных сторон подобных треугольников AMB и CMD: $\frac{AM}{CM} = \frac{MB}{MD} = \frac{AB}{CD}$.

3) пусть $AM = x$, значит, $MC = 25 - x$. Тогда мы имеем следующее отношение: $\frac{x}{25-x} = \frac{16}{24}$.

4) решим полученное уравнение: $24x = 16\ \ 25 - x$

$24x = 400 - 16x,\ 40x = 400,\ \ x = 10 \Rightarrow MC = 25 - x = 25 - 10 = 15.$

Ответ: 15.

Задача 25 [20]. В параллелограмме $ABCD$ длина отрезка AB равна 4. Биссектриса угла A пересекает сторону BC в точке K, а продолжение стороны CD в точке E. Найдите длину отрезка KC, если $EC = 1$.

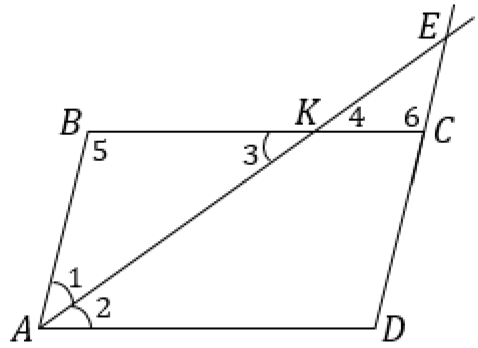


Рис. 57

Решение: 1) $\angle 1 = \angle 2$, так как AK – биссектриса угла A. $\angle 2 = \angle 3$ как накрест лежащие при параллельных прямых BC и AD и секущей AK. Отсюда, $\angle 1 = \angle 3$. Значит, $\Delta ABK -$ равнобедренный, $BK = AB = 4$ (Рис. 57).

2) $\Delta ABK \sim \Delta ECK$ по двум углам ($\angle 3 = \angle 4$ как вертикальные, $\angle 5 = \angle 6$ как накрест лежащие при параллельных прямых AB и CD и секущей BC).

Значит, $KC = EC = 1$. **Ответ**: 1.

2) задачи на доказательство подобия треугольников:

Задача 26 [36]. В треугольнике ABC с тупым углом ABC проведены высоты AA_1 и CC_1. Докажите, что треугольники A_1BC_1 и ABC подобны.

Решение: 1) рассмотрим ΔABA_1 и ΔCBC_1. $\Delta ABA_1 \sim \Delta CBC_1$ по двум углам ($\angle AA_1B = \angle CC_1B = 90°$, $\angle ABA_1 = \angle CBC_1$ как вертикальные углы).

2) составим отношение сходственных сторон подобных треугольников ABA_1 и CBC_1: $\frac{AA_1}{CC_1} = \frac{A_1B}{C_1B} = \frac{AB}{CB}$ (Рис. 58).

3) преобразуем равенство $\frac{A_1B}{C_1B} = \frac{AB}{CB}$ к следующему виду:

$\frac{A_1B}{C_1B \cdot AB} = \frac{1}{CB} \Rightarrow \frac{A_1B}{AB} = \frac{C_1B}{CB}$.

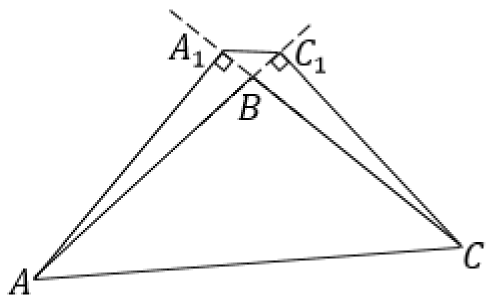


Рис. 58

Откуда $\Delta A_1BC_1 \sim \Delta ABC$ по двум сторонам и углу между ними. **Ч.Т.Д.**

Задача 27 [45]. Основания BC и AD трапеции $ABCD$ равны соответственно 9 и 36, $BD = 18$. Докажите, что треугольники CBD и BDA подобны.

Решение: 1) $\angle CBD = \angle ADB$ как накрест лежащие углы при параллельных прямых BC, AD (основания трапеции $ABCD$) и секущей BD (Рис. 59).

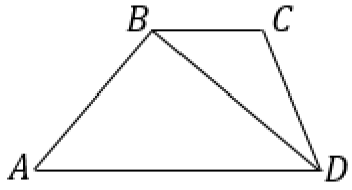


Рис. 59

2) проверим, верно ли равенство $\frac{BC}{BD} = \frac{BD}{AD}$.

$\frac{9}{18} = \frac{18}{36}$. $\Rightarrow$ равенство двух отношений действительно верно.

А значит, $\Delta CBD \sim \Delta BDA$ по двум сторонам и углу между ними ($\angle CBD = = \angle ADB$, $\frac{BC}{BD} = \frac{BD}{AD}$). **Ч.Т.Д.**

3) задачи на применение признаков подобия прямоугольных треугольников:

Задача 28 [36]. Точка H является основанием высоты, проведенной из вершины прямого угла B треугольника ABC к гипотенузе AC. Найдите AB, если $AH = 5, AC = 20$.

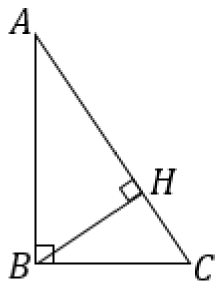


Рис. 60

Решение: 1) рассмотрим два прямоугольных треугольника AHB и ABC (Рис. 60).

$\Delta AHB \sim \Delta ABC$ по острому углу ($\angle A$ −общий).

2) составим отношение сходственных сторон подобных треугольников AHB и ABC: $\frac{AH}{AB} = \frac{HB}{BC} = \frac{AB}{AC}$.

3) $\frac{AH}{AB} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow AB^2 = AH \cdot AC \Rightarrow AB^2 = 5 \cdot \cdot 20 = 100,$ откуда $AB = 10$. **Ответ**: 10.

Приведенные задачи направлены на применение как понятия среднего пропорционального в прямоугольном треугольнике, так и самой теории подобных треугольников.

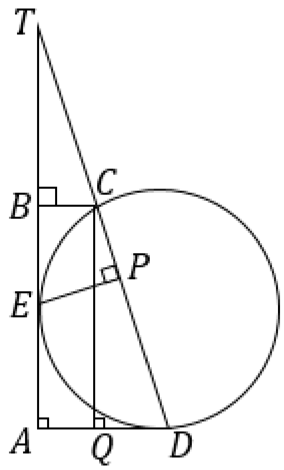


Рис. 61

Задача 29 [45]. В трапеции $ABCD$ боковая сторона AB перпендикулярна основанию BC. Окружность проходит через точки C и D и касается прямой AB в точке E. Найдите расстояние от точки E до прямой CD, если $AD = 8, BC = 4$ (Рис. 61).

Решение: 1) рассмотрим прямоугольные треугольники TBC и TAD. Они подобны по острому углу ($\angle T$- общий). Значит, $\frac{TB}{TA} = \frac{BC}{AD} = \frac{TC}{TD} = \frac{1}{2} \Rightarrow TC = CD$.

2) по теореме о касательной и секущей $TE^2 = TD \cdot TC$. Тогда $TE^2 = = 2CD \cdot CD$, то есть $TE^2 = 2CD^2$, откуда $TE = \sqrt{2}CD$.

3) рассмотрим прямоугольные треугольники TPE и CQD, они также подобны по острому углу.

Составим отношение их сходственных сторон

$\frac{TP}{CQ} = \frac{PE}{QD} = \frac{TE}{CD}$, а так как $TE = \sqrt{2}CD$, то мы имеем отношение:

$\frac{PE}{QD} = \frac{\sqrt{2}CD}{CD} \Rightarrow PE = \sqrt{2}QD = \sqrt{2} \cdot 4 = 4\sqrt{2}$. **Ответ**: $4\sqrt{2}$.

Во второй части ОГЭ по математике встречаются задачи на: выделение признаков подобия треугольников; применение признаков подобия прямоугольных треугольников; также имеются задачи на доказательство (на доказательство подобия двух треугольников). Для решения данных задач учащимся необходимо знать не только понятие подобных треугольников, их свойства и признаки подобия, но и признаки подобия прямоугольных треугольников, теорему об отношении площадей подобных треугольников, но и уметь составлять отношение сходственных сторон и оперировать с данными отношениями.

§9. Система задач по теме «Подобные треугольники» в курсе геометрии основной школы

Задачи – это основное средство, которое используется при формировании знаний, умений и навыков учащихся в процессе обучения математике.

Посредством решения задач помимо образовательной цели, мы выполняем также развивающую и воспитательную цели.

Обучающие задачи (направленные непосредственно на формирование знаний, умений и навыков учеников), прежде всего, имеют связь с формированием элементов теоретических знаний, а также умений, которые с ними взаимосвязаны. К теоретическим знаниям, которые формируются при изучении математики, Е.И. Лященко относит *понятия и их определения, теоремы и их доказательства, правила* (алгоритмы). В ходе решения задач, направленных на *усвоение понятий*, формируются, к примеру, следующие умения: выделение существенных признаков понятий, анализ структур определений, использование существенных признаков и свойств понятий, а также фактов, полученных при изучении того или иного понятия, в различных ситуациях [22, С. 69].

При формировании выделенных элементов теоретических знаний и овладении учащимися соответствующими им видами деятельности речь должна идти не об одной задаче, а о *системе задач*, которая и обеспечит всеобъемлющее усвоение учебного материала. Г.И. Саранцев приводит в учебном пособии [32] требования к системам задач на формирование понятий, на усвоение теоремы и ее доказательства. Е.И. Лященко выделяет требования к системам задач на: усвоение понятия и его определения; усвоение теоремы и ее доказательства; усвоение правил.

Так, в учебном пособии Г.И. Саранцева указано, что задачи при формировании понятий призваны:

- способствовать мотивации введения понятия;

- выявлять существенные свойства понятия;

- способствовать их усвоению;

- способствовать усвоению терминологии, символики, пониманию смысла каждого слова в определении;

- запоминанию определения;

- овладению объемом понятия;

- раскрывать взаимосвязи понятия с другими понятиями;

- обучать применению понятия.

Решение задач также должно обеспечить овладение учащимися умениями: распознавать объекты, принадлежащие понятию; выводить следствия из принадлежности объекта понятию; переходить от определения понятия к его признакам [32, С. 129].

Приведем составленную систему задач *на формирование понятия подобных треугольников* для учащихся 8-9 классов, соответствующую требованиям, представленным в пособии Г.И. Саранцева.

Задача 1. На рисунке 62 показано, как можно определить ширину реки AD, построив на местности два подобных треугольника – ΔABC и ΔDFC. Определите AD, если $BC = 50$ м, $FC = 16$ м и $DC = 17$ м. (**Ответ**: ≈ 36 м.)

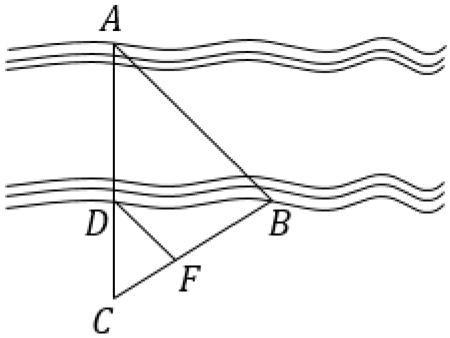


Рис. 62

Указание. Требуется обозначить $AD = x$, и составить отношение сходственных сторон подобных треугольников ABC и DFC.

Задача 2. Постройте треугольник, подобный данному с коэффициентом подобия: а) 2; б) $\frac{1}{4}$.

Задача 3 [39, С. 225]. На клетчатой бумаге изображено несколько пар треугольников (Рис. 63). Докажите, что треугольники в каждой паре подобны.

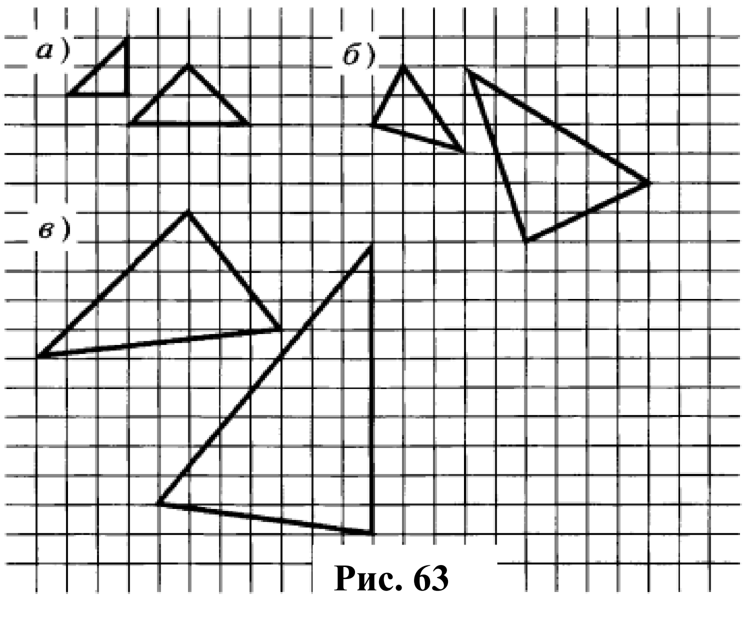


Рис. 63

Задача 4 [39, С. 219]. В подобных треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ (Рис. 64) запишите равенство отношений сходственных сторон и найдите неизвестные элементы x, y.

Решение. $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1} \Rightarrow \frac{x+4}{4} = \frac{y+6}{y} = \frac{12}{3}$.

$\frac{x+4}{4} = 4 \Rightarrow x + 4 = 16 \Rightarrow x = 12;$

$\frac{y+6}{y} = 4 \Rightarrow y + 6 = 4y \Rightarrow 6 = 3y \Rightarrow y = 2.$

Ответ: $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}; x = 12, y = 2.$

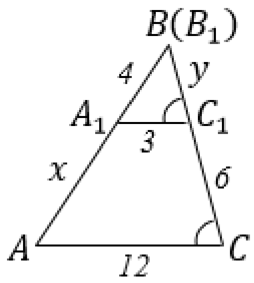


Рис. 64

Задача 5. Укажите пары подобных треугольников и докажите их подобие (Рис. 65).

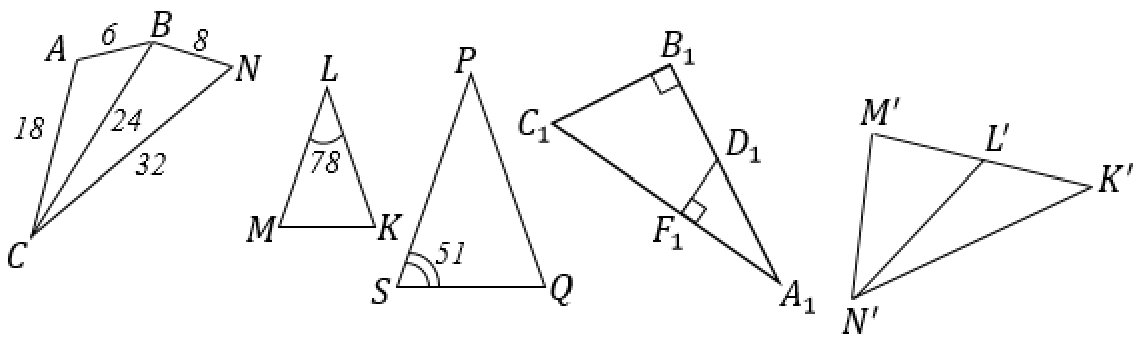


Рис. 65

Решение. 1) $\Delta ABC \sim \Delta BNC$ по трем сторонам: $\frac{AB}{BN} = \frac{BC}{NC} = \frac{AC}{BC}$ $\frac{6}{8} = \frac{24}{32} = \frac{18}{24}$; 2) $\Delta MLK \sim \Delta SPQ$ по двум углам: поскольку ΔMLK равнобедренный, то $\angle M = \angle K = 51°$, $\angle P = 180° - 2 \cdot 51° = 78°$, то есть $\angle L = \angle P$ и $\angle M = \angle S$; 3) $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta A_1F_1D_1$ по двум углам: $\angle A_1$ – общий, $\angle B_1 = \angle F_1 = 90°$;

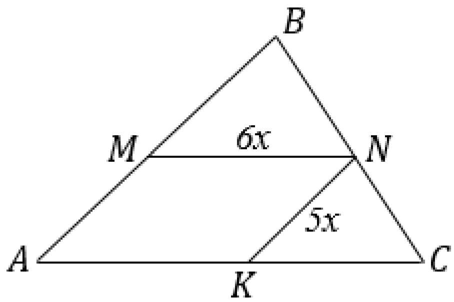


Рис. 66

4) $\Delta M'N'L' \sim \Delta M'K'N'$ по двум углам: $\angle M'$ – общий, $\angle M'N'L' = \angle M'K'N'$.

Задача 6. Заполните пропуски: *1*. Два треугольника называются _________, если их углы соответственно равны и стороны одного треугольника пропорциональны _________ сторонам другого треугольника. *2*. Два треугольника называются подобными, если их углы __________ и стороны одного треугольника __________ сходственным сторонам другого треугольника.

Задача 7 [41]. В треугольник вписан параллелограмм, угол которого совпадает с углом треугольника. Стороны треугольника, заключающие этот угол, равны 20 см и 25 см, а параллельные им стороны параллелограмма относятся, как $6{:}\,5$. Определите стороны параллелограмма.

Решение. Пусть $\angle A$ – общий угол треугольника ABC и параллелограмма $AMNK,\ AB = 25$ см, $AC = 20$ см (Рис. 66). Так как $MN{:}\,NK = 6{:}\,5 \Rightarrow MN = AK = 6x, NK = AM = 5x$. $\Delta MBN \sim \Delta ABC$ по двум углам ($\angle B -$ общий, $MN \parallel AK$ как противоположные стороны параллелограмма, значит, $\angle BMN = \angle BAC$ как соответственные при параллельных прямых MN и AK и секущей AB) $\Rightarrow \frac{MB}{AB} = \frac{BN}{BC} = \frac{MN}{AC} \Rightarrow \frac{25-5x}{25} = \frac{6x}{20}$, откуда $x = 2 \Rightarrow MN = 6 \cdot 2 = 12$ см , $NK = 5 \cdot 2 = 10$ см .

Ответ: 12 см и 10 см.

Задача 8 [24, С. 31]. Докажите, что если луч, проведенный из вершины треугольника, делит противолежащую сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам, то этот луч является биссектрисой угла при данной вершине треугольника.

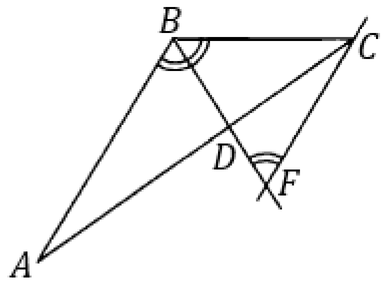


Рис. 67

Решение. Пусть нам дан ΔABC. Проведем через C прямую CF, параллельную AB (Рис. 67). $\Delta ABD \sim \Delta CFD$, поскольку $\angle ADB = \angle CDF$, как вертикальные углы; $\angle ABD = \angle CFD$ как накрест лежащие при параллельных прямых AB и CF и секущей BF. Следовательно, $\frac{AD}{AB} = \frac{CD}{CF}$, а по условию $\frac{AD}{AB} = \frac{CD}{CB}$, откуда $\frac{CD}{CF} = \frac{CD}{CB}$ и $CF = CB$. Значит, $\Delta BCF -$ равнобедренный и $\angle CBD =$ $= \angle CFD$, а значит, и $\angle CBD = \angle ABD$. Следовательно, BD – биссектриса. **Ч.Т.Д**.

Задача 9 [10, С. 128]. В треугольнике ABC, стороны которого - a, b, c, проведена параллельно AC прямая MN так, что $AM = BN$. Определите MN.

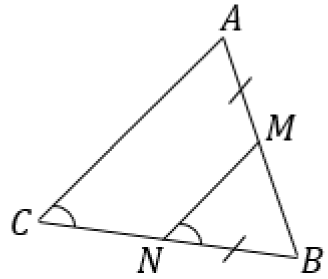


Рис. 68

Решение. $\Delta ABC \sim \Delta MBN$ по двум углам ($\angle B -$ общий, $\angle ACB = \angle MNB$ как соответственные углы при параллельных прямых AC и NM и секущей BC) $\Rightarrow$ $\frac{AB}{MB} = \frac{AC}{MN} = \frac{BC}{BN}$ (Рис. 68). Пусть $AM = BN = x,$ тогда (с учетом того, что $BC = a, AC = b, AB = c$) $\frac{c}{c-x} = \frac{b}{MN} = \frac{a}{x}$, откуда $MN = \frac{b(c-x)}{c}$, но в то же время $MN = \frac{bx}{a}$. Значит, $\frac{b(c-x)}{c} = \frac{bx}{a}$, откуда $x = \frac{ac}{a+c} \Rightarrow MN = \frac{b}{a} \cdot \frac{ac}{a+c} = \frac{bc}{a+c}$.

Ответ: $\frac{bc}{a+c}$.

Задача 10 [3, С. 161]. На стороне AD параллелограмма $ABCD$ отмечена точка K так, что $AK = \frac{1}{4}KD$. Диагональ AC и отрезок BK пересекаются в точке P. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$, если площадь треугольника APK равна 1 см^2.

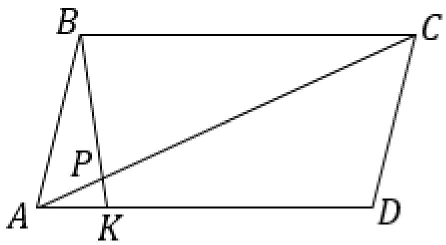


Рис. 69

Решение. Рассмотрим ΔAPK и ΔCPB (Рис. 69). $\Delta APK \sim \Delta CPB$ по двум углам ($\angle APK = \angle CPB$ как вертикальные, $\angle PAK = \angle PCB$ как накрест лежащие при параллельных прямых AD и BC и секущей AC) $\Rightarrow \frac{BP}{PK} = \frac{BC}{AK}$. По условию $AK = \frac{1}{4}KD \;\Rightarrow\; AK = \frac{1}{5}AD = \frac{1}{5}BC \Rightarrow \frac{BC}{AK} = 5 \Rightarrow$ по теореме об отношении площадей подобных треугольников $\frac{S_{CPB}}{S_{APK}} = 25 \;\Rightarrow\; S_{CPB} = 25$ см^2 . Рассмотрим ΔABP и ΔAPK: они имеют одну и ту же высоту, опущенную из точки A на BK, обозначим ее через h и тогда $S_{APK} = \frac{1}{2}h \cdot PK$ и $S_{ABP} = \frac{1}{2}h \cdot BP$.

Мы уже выяснили, что $\frac{BC}{AK} = \frac{BP}{PK} = 5 \Rightarrow PK = \frac{1}{5}BP$, значит, $S_{APK} = \frac{1}{2}\ h\ \cdot \frac{1}{5}BP$, откуда $BP = \frac{10S_{APK}}{h} = \frac{10}{h}$. Тогда $S_{ABP}\ = \frac{1}{2} \cdot\ h\ \cdot \frac{10}{h}\ = 5\ \ \text{см}^2$.

$S_{ABCD}\ = 2S_{ABC} = 2\ \ S_{ABP} + S_{CPB}\ \ = 2\ \ 5 + 25\ \ = 60\ \ \text{см}^2$. **Ответ**: 60 см^2.

Таким образом, представленная система задач на формирование понятия подобных треугольников для учащихся 8-9 классов включает задачи на: №1 –мотивацию введения понятия; №2, №3, №4 – выявление существенных свойств понятия; №4 и №5 – усвоение терминологии и символики; №6 – запоминание определения; №5 – овладение объемом понятия; №7, №8 – раскрытие взаимосвязи понятия с другими понятиями; №9, №10 – применение понятия. Кроме того, задачи №3, №5 направлены на овладение учащимися умением распознавать объекты, принадлежащие понятию; №4 – умение выводить следствия из принадлежности объекта понятию; №3 – переходить от определения понятия к его признакам. Также стоит отметить, что в представленной системе задач имеются задачи на доказательство (№5, №8), задача на построение (№2) и задача на измерение (№3).

ВЫВОДЫ ПО ВТОРОЙ ГЛАВЕ

1. Рассмотрены методические особенности обучения данной теме учащихся 8-9 классов. При обучении учащихся теме «Подобные треугольники» необходимо уделять внимание формированию у учеников практических умений и навыков применения понятия подобных треугольников – в особенности признаков подобия треугольников – при решении задач на вычисление и доказательство, так как свойства подобных треугольников будут часто применяться в дальнейшем при изучении как планиметрии, так и стереометрии; наглядности и доступности объяснения нового материала. В основном, доказательства теорем, свойств, следствий учителю следует проводить и объяснять самостоятельно.

При обучении учащихся тебе «Подобные треугольники» нужно серьезно подойти к закреплению навыков применения понятия пропорциональности и записи отношения различных величин. При составлении самостоятельных работ необходимо уделять внимание задачам практического характера, и с этой целью полезно использовать работу «Геометрические задачи с практическим содержанием» И.М. Смирновой и В.А. Смирнова. Для того, чтобы у учащихся не возникало трудностей при запоминании признаков подобия треугольников, можно использовать таблицу, представленную в книге В.Г. Чичигина, с помощью которой можно составлять признаки подобия треугольников с учетом определенного признака равенства треугольников и наблюдать условия изменения признака равенства треугольников на признак подобия треугольников. Не стоит забывать о важности метода подобия при решении задач на построение, которую отмечали в своих статьях Л.П. Шебанова и Е.Ю. Трубина.

2. Рассмотрены задачи ОГЭ по теме исследования. Во второй части ОГЭ по математике встречаются задачи на: выделение признаков подобия треугольников; применение признаков подобия прямоугольных треугольников; а также имеются задачи на доказательство (на доказательство подобия двух треугольников). При решения таких задач ученики должны знать не только понятие подобных треугольников, их свойства и признаки подобия, но и признаки подобия прямоугольных треугольников, теорему об отношении площадей подобных треугольников, а также должны уметь составлять отношение сходственных сторон и оперировать с данными отношениями.

3. Разработана система задач на формирование понятия подобных треугольников для учащихся 8-9 классов в соответствии с требования Г.И. Саранцева. Кроме того, данная система задач включает в себя задачи на: построение объектов, удовлетворяющих указанным свойствам; измерение, распознавание подобных треугольников; применение изученной теоремы об отношении площадей подобных треугольников. В систему задач также включены задача, демонстрирующая применение понятия подобных треугольников при доказательстве утверждений, и задача практического характера.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сформулируем основные выводы и полученные результаты проведенного исследования:

1. Рассмотрены исторические аспекты развития понятия подобия. Определено, что с понятием подобия люди были знакомы уже 5 тысяч лет назад; в Древнем мире был известен метод построения пропорциональных отрезков с помощью параллельных прямых; признаки подобия треугольников впервые были приведены в «Началах» Евклида.

2. Представлен анализ теоретического материала школьных учебников разных авторов по теме «Подобие фигур». Определено, что данная тема может изучаться как 8, так и в 9 классе. В учебниках геометрии базового уровня большее внимание уделяется изучению подобных треугольников и их признаков, а не понятиям гомотетии и подобию произвольных фигур. В зависимости от выбранного учебно-методического комплекта последовательность изучения признаков подобия треугольников в школьном курсе геометрии имеет существенные отличия.

3. Выделены основные типы задач по теме «Подобие фигур» в учебниках геометрии разных авторов.

4. Выявлены различные подходы к введению понятия подобных треугольников и основных понятий, связанных с ним. Существует два основных подхода к методике введения понятия подобных треугольников: сначала изучается подобие фигур (на примере подобных треугольников), а потом – подобное преобразование их; или сначала изучается подобное преобразование фигур, то есть гомотетия, и лишь потом – их подобие. Важным понятием, которому необходимо уделять особое внимание, является понятие коэффициента подобия.

5. Раскрыты различные подходы к методике обучения учащихся теме «Признаки подобия треугольников». Выявлено, что порядок теорем – признаков подобия – может быть различным. Опорой доказательств признаков

подобия треугольников также могут служить разные утверждения. В основе самой распространенной схемы доказательства признаков подобия лежит основная теорема о подобных треугольниках.

6. Выявлены методические особенности обучения учащихся применению понятия подобия к доказательству теорем и при решении задач. Авторами учебников в раздел «Подобные треугольники» вводятся разного рода теоремы и утверждения, доказательства которых опираются на понятие подобия. Так, Л.С. Атанасян включает в содержание изучаемой главы теоремы о средней линии треугольника, о медианах треугольника, о высоте прямоугольного треугольника, разбивающей его на два подобных треугольника. Утверждения, связанные с пропорциональными отрезками в прямоугольном треугольнике, рассматриваются Л.С. Атанасяном, А.В. Погореловым, А.П. Киселевым и И.Ф. Шарыгиным. А.В. Погорелов также включает в содержание темы «Подобные треугольники» своего учебника свойства пересекающихся хорд и двух секущих окружности. В рассмотренных учебниках геометрии этапы решения задач на построение и примеры к ним совпадают.

7. Рассмотрены методические особенности обучения данной теме учащихся 8-9 классов. При обучении учащихся теме «Подобные треугольники» необходимо уделять внимание формированию у учеников практических умений и навыков применения понятия подобных треугольников – в особенности признаков подобия треугольников – при решении задач на вычисление и доказательство; наглядности и доступности объяснения нового материала. Большую часть доказательств теорем, свойств, следствий учителю рекомендуется проводить самостоятельно.

При обучении учащихся тебе «Подобные треугольники» целесообразно серьезно подойти к закреплению навыков применения понятия пропорциональности. Необходимо уделять внимание задачам практического характера. Для того, чтобы у учащихся не возникало трудностей при запоминании формулировок признаков подобия треугольников, можно использовать таблицу, с помощью которой можно составлять признаки подобия треугольников с учетом определенного признака равенства треугольников и наблюдать условия изменения признака равенства треугольников на признак подобия треугольников.

8. Рассмотрены задачи ОГЭ по теме исследования. В первой части ОГЭ по математике есть задание на определение истинности (ложности) утверждений на понятия, связанные с понятием подобных треугольников. Во второй части встречаются задачи на: выделение признаков подобия треугольников; применение признаков подобия прямоугольных треугольников; а также имеются задачи на доказательство (доказательство подобия двух треугольников).

9. Разработана система задач на формирование понятия подобных треугольников для учащихся 8-9 классов в соответствии с требования Г.И. Саранцева. Кроме того, данная система задач включает в себя задачи на: построение объектов, удовлетворяющих указанным свойствам; измерение, распознавание подобных треугольников; применение изученной теоремы об отношении площадей подобных треугольников. В систему задач также включены задача, демонстрирующая применение понятия подобных треугольников при доказательстве утверждений, задачи на построение и измерение.

Все это дает основание считать, что задачи, поставленные в исследовании, полностью решены.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Акшонова, Ю.И. Методические аспекты обучения учащихся решению геометрических задач с практическим содержанием [Электронный ресурс] / Ю.И. Акшонова, Е.Б. Майнагашева// Проблемы и перспективы образования XXI века. - 2016. - № 7. - С. 20-26. – Режим доступа: https://elibrary.ru/download/elibrary_26427244_26576669.pdf. - Последнее обновление 06.06.2017.

2. Александров, А.Д. Геометрия [Текст]: учеб. пособие для 9 кл. с углубл. изучением математики / А.Д. Александров, А.Л. Вернер, В.И. Рыжик. – М.: Просвещение, 2004. – 240 с.

3. Атанасян, Л.С. Геометрия. 7-9 классы [Текст]: учеб. для общеобразоват. учреждений / Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев и др. – 20-е изд. – М.: Просвещение, 2010. – 384 с.

4. Атанасян, Л.С. Изучение геометрии в 7 – 9 классах [Текст]: пособие для учителей / Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, Ю.А. Глазков и др. – 7-е изд. – М.: Просвещение, 2009. – 255 с.

5. Баврин, И.И., Фрибус Е.А. Старинные задачи [Текст]: кн. для учащихся / И.И. Баврин, Е.А. Фрибус. – М.: Просвещение, 1994. – 128 с.

6. Бескин, Н.М. Методика геометрии [Текст]: учебник для педагогических институтов / Н.М. Бескин. – М.: Учпедгиз, 1947. – 276 с.

7. Бурмистрова, Т.А. Геометрия. Сборник рабочих программ. 7 – 9 классы [Текст]: пособие для учителей общеобразов. организаций / [сост. Т.А. Бурмистрова]. – 2-е изд., дораб. – М.: Просвещение, 2014. – 95 с.

8. Гейдман, Б. Гомотетия и замечательные точки в треугольнике / Б. Гейдман // Квант. – 1977. - № 10.

9. Глаголев, Н.А. Элементарная геометрия. Планиметрия. Для 6-8 классов семилетней и средней школы [Текст] / Н.А. Глаголев. – Ч.1. – М.: Учпедгиз, 1954. – 236 с.

10. Глаголев, Н.А. Геометрия. Учебник и сборник задач для 8 и 9 классов [Текст] / Н.А. Глаголев, А.П. Киселев, Н. Рыбкин. – 5-е изд. – Киев: Радянська школа, 1966. – 196 с.

11. Глейзер, Г.И. История математики в школе [Текст]: пособие для учителей / Г.И. Глейзер. – М.: Просвещение, 1964. – 376 с.

12. Гусев, В.А. Методика обучения геометрии: учеб. пособие для студ. высш. пед. учеб. заведений [Текст] / В.А. Гусев, В.В. Орлов, В.А. Панчищина и др.; под ред. В.А. Гусева. – М.: Издат. центр «Академия», 2004. – 368 с.

13. Гусев, В.А. О нестандартной математической деятельности при изучении геометрии в школе [Электронный ресурс] / В.А. Гусев, И.С. Малинина // Ярославский педагогический вестник. – 2013. - №4. – С. 35-39. – Режим доступа: https://elibrary.ru/download/elibrary_21377695_94593026.pdf. – Последнее обновление 28.05.2017.

14. Дубровский, В. Шесть доказательств теоремы о медианах / В. Дубровский // Квант. - 1978. - № 4.

15. Звавич, Л.И. Тесты по геометрии. 8 класс: к учебнику Л.С. Атанасяна, В.Ф. Бутузова, С.Б. Кадомцева и др. «Геометрия. 7-9 классы» / Л. И. Звавич, Е. В. Потоскуев. – М.: Издательство «Экзамен», 2013. – 158, [2] с.

16. Киселев, А.П. Геометрия [Текст] / А.П. Киселев; под ред. Н.А. Глаголева. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 328 с.

17. Колмогоров, А.Н. Геометрия [Текст]: учеб. пособие для 6-8 классов средней школы / А.Н. Колмогоров, А.Ф. Семенович, Р.С. Черкасов; под ред. А.Н. Колмогорова. – М.: Просвещение, 1979. – 383 с.

18. Кольман, Э. История математики в древности / Э. Кольман. – М.: Физматлит, 1961. – 236 с.

19. Колягин, Ю.М. Методика преподавания математики в средней школе. Общая методика [Текст]: учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. Институтов / Ю.М. Колягин. – М.: Просвещение, 1975. – 462 с.

20. Лысенко, Ф.Ф. Математика. ОГЭ-2016. 9 класс. Тематический тренинг [Текст]: учебно-методическое пособие / Ф.Ф. Лысенко; под ред. Ф.Ф. Лысенко, С.Ю. Кулабухова. – Ростов н/Д: Легион, 2015. – 384 с.

21. Ляпин, С.Е. Методика преподавания математики в восьмилетней школе/ С. А. Гастева, Б. И. Крельштейн, С. Е. Ляпин, М. М. Шидловская; под общ. ред. С. Е. Ляпина. - М. : Просвещение, 1965. - 742, [1] с.

22. Лященко, Е.И. Лабораторные и практические работы по методике преподавания математики [Текст]: учеб. Пособие для студентов физ.-мат. спец. пед. ин-тов / Е.И. Лященко, К.В. Зобкова, Т.Ф. Кириченко и др.; под ред. Е.И. Лященко. – М.: Просвещение, 1988. - 223 с.

23. Мигачева, Г.А. Геометрические задачи практического содержания в вариантах ГИА [Электронный ресурс] / Г.А. Мигачева // Фестиваль педагогических идей «Открытый урок» 2003-2016. – Режим доступа: http://festival.1september.ru/articles/611249/ - Последнее обновление 06.06.2017.

24. Мищенко, Т.М. Дидактические материалы и методические рекомендации для учителя по геометрии: 9 класс: к учебнику Ф.В. Погорелова «Геометрия. 7-9 классы». ФГОС (к новому учебнику) / Т. М. Мищенко. – М.: Издательство «Экзамен», 2015.

25. Мищенко, Т.М. Тематические тесты по геометрии: учебное пособие к учебникам Л.С. Атанасяна и др. «Геометрия. 7-9 классы», А.В. Погорелова «Геометрия. 7-9 классы», И.Ф. Шарыгина «Геометрия. 7-9 классы»: 8-й кл. / Т.М. Мищенко. – М.: АСТ: Астрель; Владимир: ВКТ, 2011. – 175, [1] с.

26. Московкин, В.М. Теорема Пифагора. Четыре новых доказательства [Электронный ресурс]/ В.М. Московкин// Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика. - 2016. - № 20 (241). - С. 34-41. – Режим доступа: http://elibrary.ru/download/elibrary_27258025_88796365.pdf. - Последнее обновление 11.05.2017.

27. Мудрякова, Н.Н. Урок геометрии в 8-м классе по теме «Определение подобных треугольников» [Электронный ресурс] / Н.Н. Мудрякова // Фестиваль педагогических идей «Открытый урок» 2003-2016. – Режим доступа: http://festival.1september.ru/articles/517600/ - Последнее обновление 28.05.2017.

28.Покровский, Т.П. Метод подобия в решении задач на построение / Т.П. Покровский // Математика в школе. - 1952. - № 6.

29. Погорелов, А. В. Геометрия. 7–9 классы [Текст]: учеб. для общеобразоват. организаций / А. В. Погорелов. – 2-е изд. – М.: Просвещение, 2014. – 240 с.

30. Примерная основная образовательная программа основного общего образования. Одобрена решением федерального учебно-методического объединения по общему образованию / М-во образования и науки РФ. – М.: Просвещение, 2015. – 560 с.

31. Родителева В.В. Урок математики по теме «Подобные треугольники» [Электронный ресурс] / В.В. Родителева // Фестиваль педагогических идей «Открытый урок» 2003-2016. – Режим доступа: http://festival.1september.ru/articles/211749/ - Последнее обновление 28.05.2017.

32. Саранцев, Г.И. Общая методика преподавания математики [Текст]: учеб. пособие для студентов мат. спец. пед. вузов и университетов / Г.И. Саранцев. – Саранск: Тип. «Крас. Окт.», 1999. - 208 с.

33. Смирнова, И.М., Смирнов В.А. Геометрические задачи с практическим содержанием / И.М. Смирнова, В.А. Смирнов. – М.: МЦНМО, 2015. – 2-е изд., доп. – 216 с.

34. Трубина, Е.Ю., Арапко И.М. Формирование умения решать задачи на построение через развитие регулятивных учебных действий / Е.Ю. Трубина, И.М. Арапко // Психология и педагогика: методика и проблемы практического применения. – Новосибирск: ООО ЦРНС, 2016. – №50-2. – С. 84-89.

35. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования: Приказ Мин. образования и науки РФ от 17.12.2010 г. №1897. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://минобрнауки.рф/документы/938 - Последнее обновление 06.06.2017.

36. Федеральный институт педагогических измерений [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://fipi.ru/ - Последнее обновление 11.05.2017.

37. Федеральный перечень учебников, рекомендованных к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ начального общего, основного общего, среднего общего образования» / Приказ Министерства образования и науки РФ. – М.: Просвещение, 2014. - 164 с.

38. Чичигин, В.Г. Методика преподавания геометрии. Планиметрия [Текст]: пособие для учителей средней школы / В.Г. Чичигин. – М.: Учпедгиз, 1959. – 392 с.

39. Шарыгин, И.Ф. Геометрия. 7-9 кл. [Текст]: учеб. для общеобразоват. учреждений / И.Ф. Шарыгин. – М.: Дрофа, 2012. – 462, [2] с.

40. Шебанова, Л.П., Янсуфина З.И. Развитие пространственного мышления учащихся в процессе обучения решению геометрических задач на построение [Электронный ресурс] / Л.П. Шебанова, З.И. Янсуфина // Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона. - 2012. - № 14. - С. 417-422. – Режим доступа: https://elibrary.ru/download/elibrary_26231335_55830514.pdf. - Последнее обновление 06.06.2017.

41. Шестаков С. Билеты и задачи. Геометрия. 8-11 классы / С. Шестаков // Математика в школе. - 1999. - № 16.

42. Юрлавина Н.В. Разработка урока по геометрии в 8-м классе по теме «Подобные треугольники» [Электронный ресурс] / Н.В. Юрлавина // Фестиваль педагогических идей «Открытый урок» 2003-2016. – Режим

доступа: http://festival.1september.ru/articles/104404/ - Последнее обновление 28.05.2017.

43. Юшкевич, А.П. История математики с древнейших времен до начала XIX столетия: в 3-х т. / А.П. Юшкевич. - М.: Наука, 1970. - 303 с. - 2 т.

44. Юшкевич, А.П. Хрестоматия по истории математики. Арифметика и алгебра. Теория чисел. Геометрия [Текст]: пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. ин-тов. / А.П. Юшкевич. - М.: Просвещение, 1976. - 318 с.

45. Ященко, И.В. ОГЭ-2016 : Математика : 10 тренировочных вариантов экзаменационных работ для подготовки к основному государственному экзамену в 9 классе / Высоцкий И.Р., Рослова Л.О., Смирнов В.А. и др. под редакцией Ященко И.В. - Москва: АСТ: Астрель, 2016. - 78, [2] с.

46. Alexander, D. Elementary geometry for college students. 5th ed. / Daniel C. Alexander, Geralyn M. Koeberlein. – Belmont: Brooks/Cole, Cengage learning, 2011. – 605 p.

47. Cooper, T. Geometry: Space and shape in the primary school / Tom Cooper. - Brisbane C.A.E., 1986. - 281 p.

48. Lang, S. Geometry. 2nd ed. / Serge Lang, Gene Murrow. - New York: Springer-Verlag New York, Inc., 1988. - 391 p.

49. Larson, R. Geometry / Ron Larson, Laurie Boswell, Lee Stiff. - Evanston: McDougal Littell, a division of Houghton Mifflin Company, 2004.

50. School Mathematics Study Group. Geometry. Teacher’s commentary, part II / Frank B. Allen, Edwin C. Douglas, Donald E. Richmond and others. - New Haven and London: Yale University Press, 1961. - 608 p.

Приложение 1

Признаки подобия треугольников в учебниках геометрии

Таблица 1

Признаки подобия треугольников

Авторы учебника	*Первый признак подобия треугольников*	*Второй признак подобия треугольников*	*Третий признак подобия треугольников*
А.Д. Александров, А.Л. Вернер, В.И. Рыжик [2]	Если стороны одного треугольника пропорциональны сторонам другого треугольника, то эти треугольники подобны (*по трем сторонам*).	Если два угла одного треугольника равны двум углам другого треугольника, то такие треугольники подобны (*по двум углам*).	Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника и углы, заключенные между этими сторонами, равны, то треугольники подобны (*по двум сторонам и углу между ними*).
Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев, Э.Г. Позняк, И.И. Юдина [3]	Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого треугольника, то такие треугольники подобны (*по двум углам*).	Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника и углы, заключенные между этими сторонами, равны, то такие треугольники подобны (*по двум сторонам и углу между ними*).	Если три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого, то такие треугольники подобны (*по трем сторонам*).
А.В. Погорелов [29]	Если два угла одного треугольника равны двум углам другого треугольника, то такие треугольники подобны (*по двум углам*).	Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника и углы, образованные этими сторонами, равны, то треугольники подобны (*по двум сторонам и углу между ними*).	Если стороны одного треугольника пропорциональны сторонам другого треугольника, то такие треугольники подобны (*по трем сторонам*).

Приложение 2

Типы задач по теме «Подобные треугольники» в учебниках разных авторов

Таблица 2

Типы задач

Тип задачи	Задачный материал учебника А.Д. Александрова[2]	Задачный материал учебника Л.С. Атанасяна[3]	Задачный материал учебника А.В. Погорелова[29]
На применение понятия пропорциональных отрезков	-	533, 534	-
На применение понятия подобных фигур	На доказательство подобия фигур: 31.23, 31.32, 31.33. «Подобны ли фигуры?»: 31.50, 31.51, 31.52-31.58, 31.60 - 31.65.	-	7,9
На применение понятия подобных треугольников (работа с определением подобных треугольников)	31.15, 31.16, 31.24-31.26, 31.66, 31.70, 31.71(а)	Выявление признаков подобия треугольников: 541. Выявление свойств подобных треугольников: 542.	5,6
На применение свойства биссектрисы треугольника (биссектриса треугольника делит противоположную сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам треугольника)	На применение аналогичного свойства для биссектрисы внешнего угла: 31.41, 31.42.	На составление отношений по свойству биссектрисы: 536, 537, 606-608. На умение распознавать свойство биссектрисы: 538, 539, 540. На доказательство утверждения, обратного свойству биссектрисы треугольника: 609.	На применение аналогичного свойства для биссектрисы внешнего угла: 45, 46.
На применение теоремы об отношении площадей подобных треугольников	На применение отношения сходственных сторон (коэффициента подобия) в составлении отношения площадей подобных треугольников: 31.34(б), 31.38(б), 31.72. На применение теоремы об отношении периметров двух по-	На применение отношения сходственных сторон (коэффициента подобия) в составлении отношения площадей подобных треугольников: 543, 544, 545. На применение теоремы об отношении периметров двух подобных треугольни-	-

	добных треугольников: 31.34(а), 31.38(а).	ков: 547, 548, 549. На применение понятия масштаба с использованием теоремы об отношении площадей подобных треугольников: 546.	
На применение понятия масштаба	31.89-31.92	546	4
На применение первого признака подобия треугольников (по двум углам)	На распознавание первого признака подобия треугольников: 31.10, 31.11. На применение первого признака подобия при доказательстве пропорциональности отрезков, полученных при пересечении прямых другими параллельными между собой прямыми: 31.12, 31.13. На применение первого признака подобия при доказательстве подобия различных видов треугольников: 31.67.	На распознавание первого признака подобия треугольников: 550, 551, 552(а). На применение первого признака подобия при доказательстве пропорциональности отрезков, полученных при пересечении прямых другими параллельными между собой прямыми: 556, 557, 558, 610. На применение первого признака подобия при доказательстве подобия различных видов треугольников: 553(а, б), 561.	21-24, 42. На применение признаков подобия равнобедренных треугольников: 10, 11. На распознавание первого признака подобия треугольников: 12, 13, 14. На применение леммы о подобии треугольников (прямая, параллельная какой-нибудь стороне треугольника, отсекает от него треугольник, подобный данному): 15, 16, 18-20, 26-28. На применение первого признака подобия при доказательстве пропорциональности отрезков, полученных при пересечении прямых другими параллельными между собой прямыми: 17, 25.
На применение второго признака подобия треугольников (по двум сторонам и углу между ними)	-	На распознавание второго и третьего признаков подобия треугольников: 559, 560, 613.	30-33
На применение третьего признака подобия треугольников (по трем сторонам)	-		«Подобны ли треугольники?»: 34, 35. На применение утверждения, что у подобных треуголь-

			ников периметры относятся, как соответствующие стороны: 36-38.
На применение признаков подобия треугольников по выбору учащихся	На распознавание признаков подобия треугольников: 31.15, 31.16, 31.68(а).	552(б, в), 553(в), 554, 555, 611, 605, 562, 563, 614	-
На применение теоремы о средней линии треугольника	31.48(а)	На распознавание средней линии треугольника: 564, 565, 566. На дополнительные построения для применения теоремы: 567-569, 617, 618.	-
На применение подобия при решении практических задач	31.88, 31.96. На определение высоты предмета: 31.94(в), 31.95. На определение расстояния до недоступной точки: 31.94(а, б, г).	612. На определение высоты предмета: 579, 580, 581. Задачи на определение расстояния до недоступной точки: 582, 583.	44
На применение подобия при решении задач на построение	На применение понятия пропорциональных отрезков и их отношения: 31.14, 31.75-31.77. На применение понятия подобных треугольников: 31.29, 31.78(а, б, в).	На применение понятия пропорциональных отрезков и их отношения: 584, 585. На применение понятия подобных треугольников: 586, 587. На применение понятия пропорциональных отрезков, их отношения и подобных треугольников: 588, 589, 590.	-