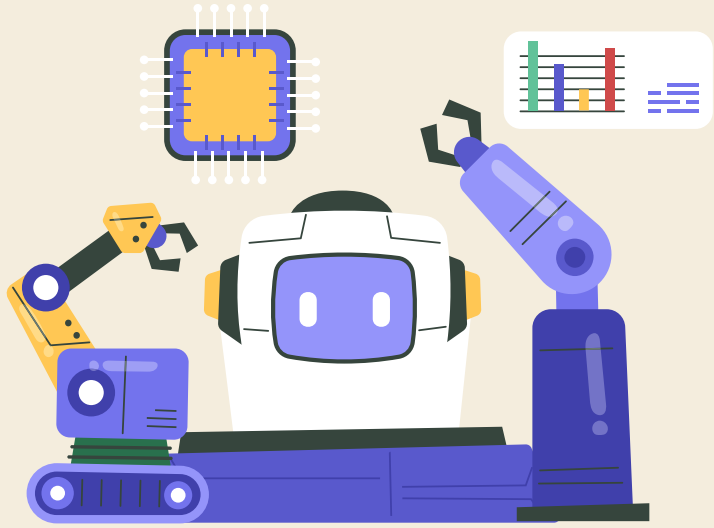
Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Тольяттинский государственный университет

Д.Г. Токарев, Е.С. Глибин

РОБОТОТЕХНИКА

Лабораторный практикум



© Токарев Д.Г., Глибин Е.С., 2025
© ФГБОУ ВО «Тольяттинский государственный университет», 2025

ISBN 978-5-8259-1701-6

УДК 004.31(075.8)
ББК 32.973.26-04

Рецензенты:
д-р техн. наук, профессор, зав. кафедрой
«Сервис технических и технологических систем» Поволжского
государственного университета сервиса *Б.М. Горшков*;
д-р техн. наук, доцент, профессор кафедры
«Промышленная электроника» Тольяттинского
государственного университета *В.П. Певчев*.

Токарев, Д.Г. Робототехника : лабораторный практикум / Д.Г. Токарев, Е.С. Глибин. – Тольятти : Издательство ТГУ, 2025. – 1 оптический диск. – ISBN 978-5-8259-1701-6.

Практикум описывает манипуляторы, применяемые в робототехнике, и их характеристики. Содержит краткие теоретические сведения по изучаемым темам, подробные методические указания по выполнению трех лабораторных работ.

Предназначен для студентов бакалавриата очной формы обучения направления 11.03.04 «Электроника и наноэлектроника» (профили «Промышленная электроника» и «Электроника и робототехника»), в том числе с использованием ДОТ.

Текстовое электронное издание.

Рекомендовано к изданию научно-методическим советом Тольяттинского государственного университета.

Минимальные системные требования: IBM PC-совместимый компьютер: Windows XP/Vista/7/8/10; PIII 500 МГц или эквивалент; 128 Мб ОЗУ; SVGA; CD-ROM; Adobe Acrobat Reader.

© Токарев Д.Г., Глибин Е.С., 2025
© ФГБОУ ВО «Тольяттинский
государственный университет», 2025

Учебное издание

Токарев Дмитрий Геннадьевич
Глибин Евгений Сергеевич

РОБОТОТЕХНИКА

В оформлении издания использована иллюстрация с сайта freepik.com

Редактор О.П. Корабельникова
Технический редактор Н.П. Крюкова
Компьютерная верстка: Е.В. Веселова
Художественное оформление,
компьютерное проектирование: Е.В. Веселова

Дата подписания к использованию 05.06.2025.
Объем издания 4 Мб.
Комплектация издания: компакт-диск, первичная упаковка.
Тираж 50 экз. Заказ № 1-92-22.

Издательство Тольяттинского государственного университета
445020, г. Тольятти, ул. Белорусская, 14,
тел. 8 (8482) 44-91-47, www.tltsu.ru

Содержание

Введение 5

Лабораторная работа 1
Исследование рабочих областей манипуляторов 8

Лабораторная работа 2
Исследование кинематических характеристик двухзвенных манипуляторов 24

Лабораторная работа 3
Исследование характеристик прочности двухзвенных манипуляторов 40

Заключение 56

Приложение А.....57

Введение

В рамках выполнения представленных лабораторных работ по дисциплине «Робототехника» предстоит изучение различных типов управления робототехническими системами и датчиками, обеспечивающими контроль правильности выполнения программ.

Цель освоения дисциплины – овладение навыками анализа функциональных возможностей роботов на основе изучения теоретических основ и конструкций типовых компоновок роботов, а также навыками выбора роботов и их применения.

Задачи:

1. Получение базовых знаний в области организации навигации роботов, за счет которой обеспечиваются движение и ориентация робота в пространстве.
2. Знакомство с областями знаний для робототехнического проектирования, получение теоретических знаний основ проектирования мехатронных систем.
3. Рассмотрение этапов, принципов и систем ведения проектов, а также применения систем автоматизированного проектирования для их моделирования.
4. Получение представления о базовых элементах робототехнических конструкций, используемых при реализации проектов, знакомство с датчиками, измеряющими и контролирующими параметры роботов, что обеспечивает эффективное взаимодействие роботов с окружающей средой.
5. Рассмотрение систем обеспечения навигации и способов организации движения роботов.

После выполнения лабораторных работ студент должен

знать:

а) структуру, классификацию и основные технические показатели роботов;

б) методы расчета собственных свойств манипуляционных механизмов;

в) кинематику базовых исполнительных механизмов манипуляторов;

г) основные конструкции узлов вращения и поступательного перемещения манипуляционных механизмов;

д) типы и характеристики информационных устройств роботов;

уметь:

а) рассчитывать характеристики собственных свойств манипуляционных механизмов;

б) применять типовые конструкции узлов вращения и поступательного перемещения при проектировании манипуляционных механизмов;

в) проводить анализ управляемости манипуляционных механизмов;

г) применять основные требования стандартов к конструкциям роботов;

владеть:

а) методами математического описания геометрии манипуляционных механизмов;

б) методами расчета характеристик собственных свойств манипуляционных механизмов;

в) методами использования базовых исполнительных механизмов при проектировании роботов;

г) методами расчета рабочих органов манипуляторов.

Требования по технике безопасности при выполнении работ

Лабораторные работы, представленные в данном лабораторном практикуме, выполняются на компьютере. При работе на компьютере в лабораториях соблюдайте следующие меры безопасности:

1. Не работайте с компьютером при наличии внешних повреждений корпуса или изоляции силовых кабелей. В этом случае требуется замена кабелей или обращение в сервисный центр.
2. Не кладите на корпус системного блока и не храните на нем разные предметы, особенно тяжелые.
3. Розетки и вилки должны быть цельными, без повреждений.
4. Не включайте компьютер в помещении с высокой влажностью.

5. Не оставляйте работающий ПК без присмотра длительное время.
6. Провода и силовые кабели компьютера должны быть расположены так, чтобы исключить возможность наступить или поставить на них что-то тяжелое.
7. Нельзя работать с компьютером при открытом корпусе системного блока.

Форма отчета по лабораторному занятию

Форма и содержание отчета варьируются в зависимости от лабораторной работы, требования приведены после каждой работы отдельно.

Лабораторная работа 1
ИССЛЕДОВАНИЕ РАБОЧИХ ОБЛАСТЕЙ МАНИПУЛЯТОРОВ

Цели работы: изучить виды кинематических схем двухзвенных манипуляторов; изучить методы построения рабочих областей манипуляторов; научиться строить рабочие области различных манипуляторов.

Используемое оборудование и материалы

1. Персональный компьютер с установленной операционной системой Windows.
2. Прикладная программа «Механика робота – моделирование и исследование роботов и РТ-систем».

Задание

1. Ознакомиться с теоретической частью методического пособия и описанием программы.
2. Выбрать по указанию преподавателя кинематическую схему робота и задать ее параметры.
3. Выбрать вид траектории движения схвата манипулятора и задать его параметры.
4. Задать параметры рабочей области робота таким образом, чтобы траектория движения принадлежала рабочей области выбранной манипуляционной системы.
5. Отобразить рабочую область и траекторию движения схвата робота с помощью инструментов программы. Если траектория схвата робота находится в его рабочей области, то параметры области заданы правильно.
6. При необходимости (для удобства чтения графиков) задать масштаб диаграммы (максимальные и минимальные значения и шаг по осям).
7. Изучить параметры и вывести уравнения кривых, составляющих рабочую область.
8. Выбрать следующий вид траектории движения схвата робота, задать его параметры и выполнить пункты 4–6.
9. Выполнить пункты 3–7 для других схем манипуляторов.

1. Теоретическая часть

Методы построения рабочих областей манипуляторов

Понятие рабочей области (РО) манипулятора (рабочего пространства) относится к важнейшим характеристикам роботов и отражает такое важное свойство манипулятора, как способность выполнения операций перемещения рабочего органа манипулятора с целью осуществления заданных технологических операций, таких как сварка, сборка, окраска и т. д.

По определению, **рабочая область манипулятора** – это геометрическое место пространства или плоскости, где может располагаться орган манипулятора при всех возможных значениях обобщенных координат в степенях подвижности манипулятора.

Построение РО и её границы для произвольных кинематических схем манипуляторов представляет собой сложную задачу.

При построении границ РО широко используются геометрические методы построения. В частности, для плоского манипулятора с вращательными парами граница РО представляет собой совокупность дуг окружностей. При наличии поступательных и вращательных пар граница РО представляется в виде совокупности дуг окружности и отрезков прямых. Для пространственных манипуляторов граница РО представляет собой двумерную поверхность. Для поступательных пар имеет место плоский участок границы: если пары вращательные, то им соответствует участок границы сферической или тороидальной формы. Если одна из пар поступательная, а другая – вращательная, то участок цилиндрической поверхности. Точное аналитическое описание всех этих участков и кривых, по которым они пересекаются для произвольного манипулятора, очень сложно и вряд ли целесообразно.

Для сравнительно простых кинематических схем целесообразно использовать средства машинной графики и отображать РО на экране графического дисплея.

Подавляющее число роботов либо имеют в своем составе перечисленные выше двухзвенные пары, либо кинематическая схема робота может быть сведена к кинематическим схемам рассматриваемых двухзвенников.

Декартовый робот – это двухзвенный робот, имеющий степени подвижности поступательного типа. Второе звено заканчивается схватом, в котором может располагаться груз (рис. 1.1).

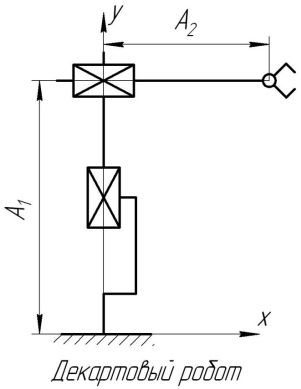


Рис. 1.1. Кинематическая схема декартового робота

Цилиндрический робот – это двухзвенный робот, первая степень подвижности которого вращательного типа, а вторая – поступательного типа (рис. 1.2).

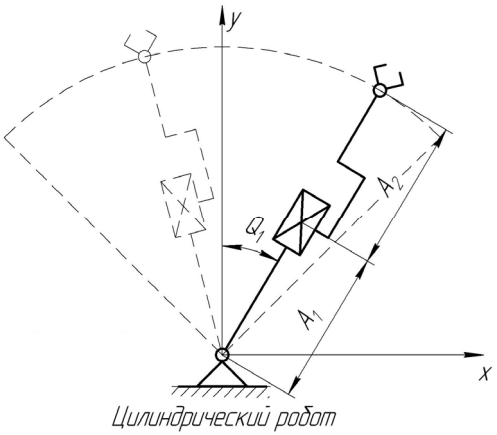


Рис. 1.2. Кинематическая схема цилиндрического робота

Робот «Колер» – это двухзвенный робот, первая степень подвижности которого поступательного типа, а вторая – вращательного типа (рис. 1.3).

Движение перечисленных роботов происходит в горизонтальной плоскости.

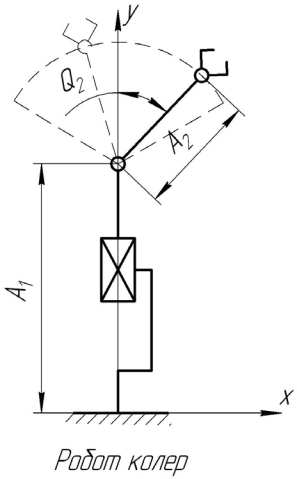


Рис. 1.3. Кинематическая схема робота «Колер»

Каждый из перечисленных роботов характеризуется своим набором параметров.

Декартовый робот задается следующими параметрами:

– A_1 и A_2 – длины 1-го и 2-го звеньев соответственно;
– $A_{1\min}$ и $A_{1\max}$ – минимально и максимально возможные значения 1-й координаты;
– $A_{2\min}$ и $A_{2\max}$ – минимально и максимально возможные значения 2-й координаты, причем должны выполняться следующие очевидные неравенства:

$$A_{1\min} < A_{1\max}, A_{2\min} < A_{2\max}, A_1 > A_{1\max}, A_2 < A_{2\max}.$$

Цилиндрический робот:

– A_1 и A_2 – длины 1-го и 2-го звеньев соответственно;
– $Q_{1\min}$ и $Q_{1\max}$ – минимально и максимально возможные значения 1-й координаты;
– $A_{2\min}$ и $A_{2\max}$ – минимально и максимально возможные значения 2-й координаты, причем должны выполняться следующие очевидные неравенства:

$$|Q_{1\min}| = |Q_{1\max}|, A_{2\min} < A_{2\max}, A_2 < A_{2\max}.$$

Робот «Колер»:

– A_1 и A_2 – длины 1-го и 2-го звеньев соответственно;

– A_{1min} и A_{1max} – минимально и максимально возможные значения 1-й координаты;
– Q_{2min} и Q_{2max} – минимально и максимально возможные значения 2-й координаты, причем должны выполняться следующие очевидные неравенства:

$$A_{1min} < A_{1max},\ A_1 < A_{1max},\ |Q_{2min}| = |Q_{2max}|.$$

Рассмотрим РО для представленных выше кинематических схем двухзвенных манипуляторов.

Декартовый робот

РО – это прямоугольник, определяемый системой неравенств: $A_{2min} < X < A_{2max}$, $A_{1min} < Y < A_{1max}$; X и Y – координаты абсциссы и ординаты декартовой плоскости соответственно (рис. 1.4).

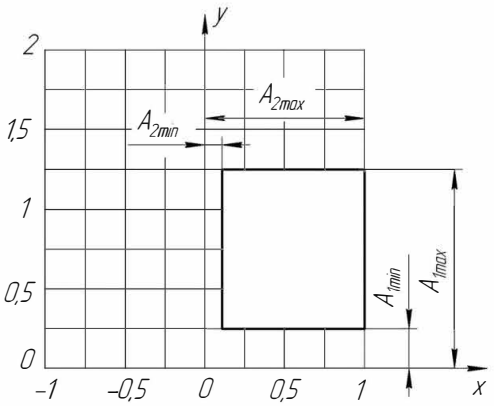


Рис. 1.4. Рабочая область декартового робота

Цилиндрический робот

РО – это часть круглого кольца, определяемого A_{2min} и A_{2max} – минимально и максимально возможными значениями 2-й координаты, а также Q_{1min} и Q_{1max} – минимально и максимально возможными значениями 1-й координаты (угол поворота) (рис. 1.5).

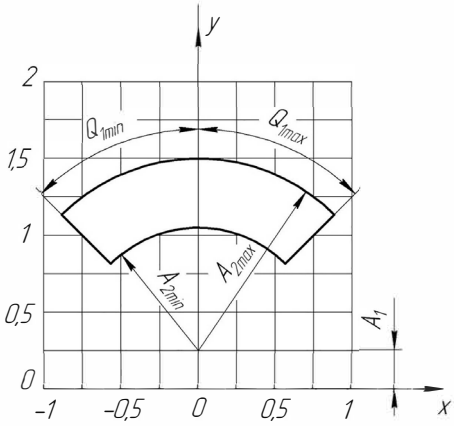


Рис. 1.5. Рабочая область цилиндрического робота

Робот «Колер»

РО – это часть круглого кольца, определяемого $A_{1\min}$ и $A_{1\max}$ – диапазон изменения 1-й координаты, $Q_{2\min}$ и $Q_{2\max}$ – диапазон изменения 2-й координаты (угол поворота) (рис. 1.6).

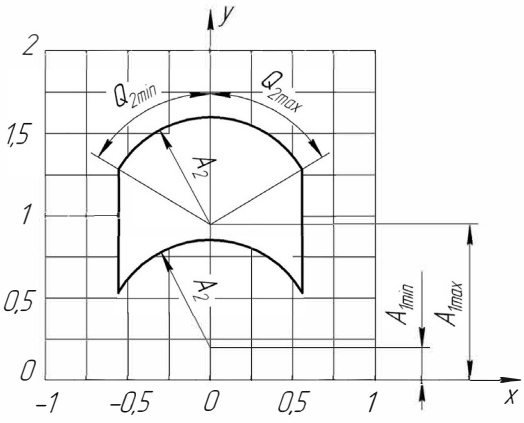


Рис. 1.6. Рабочая область робота «Колер»

Для технологических операций, связанных с перемещением деталей (транспортные операции, операции сборки), целесообразно рассматривать понятие области, в которой располагаются эти детали, т. е. РОД – рабочая область деталей. Наиболее часто РОД представляется в виде прямоугольника (параллелепипеда) в декартовой системе координат.

Таким образом, РОД задается в виде прямоугольника, определяемого с помощью координаты нижней левой и правой верхней вершин прямоугольника декартовой плоскости.

Вполне естественно считать, что задача выбора кинематической схемы и параметров манипулятора решена успешно, если РОД принадлежит РО, так как в этом случае рабочий орган манипулятора может захватить деталь и переместить ее в пределах РОД.

2. Описание программы

2.1. Выбор кинематической схемы манипулятора

В рамках данной программы предлагается исследовать кинематику трех видов манипуляторов (рис. 1.7):

1. Декартовый робот (*Меню \ Выбор робота \ Декартовый*).
2. Цилиндрический робот (*Меню \ Выбор робота \ Цилиндрический*).
3. Робот «Колер» (*Меню \ Выбор робота \ Робот «Колер»*).

При первоначальном выборе типа манипулятора программа строит рабочую область, траекторию движения и все графики обобщенных координат по уже имеющимся, заданным при создании программы, значениям параметров.

2.2. Задание параметров манипулятора и траектории движения схвата

Каждый из имеющихся в наборе программы манипуляторов задаётся собственным набором параметров (рис. 1.8–1.10), которые имеют допустимые значения.

В соответствии с особенностями кинематики и математического описания каждого из манипуляторов, параметры, которыми они задаются, имеют ограничения. Они указаны выделенным шрифтом на панели для каждой группы параметров.

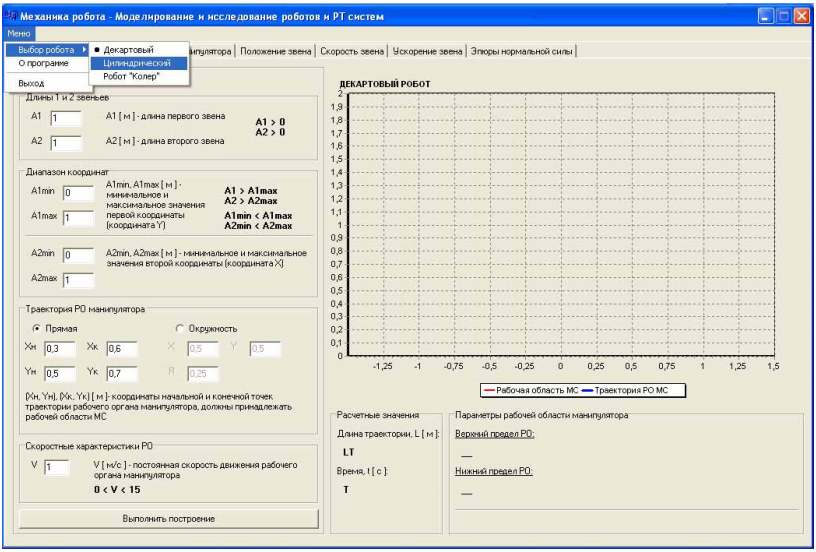


Рис. 1.7. Выбор манипуляционной системы

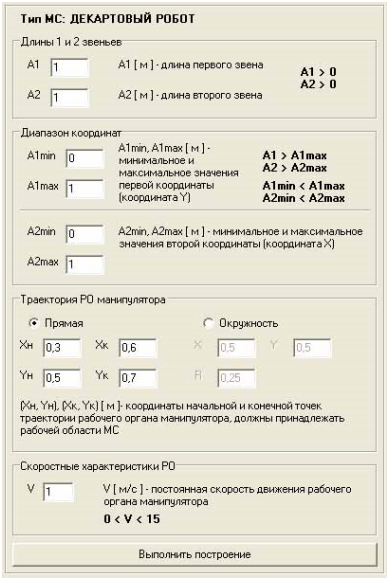


Рис. 1.8. Параметры декартового робота

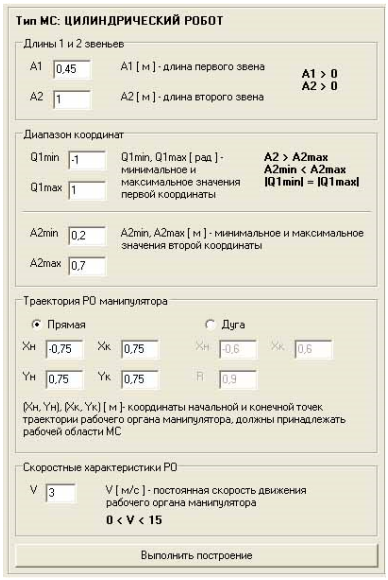


Рис. 1.9. Параметры цилиндрического робота

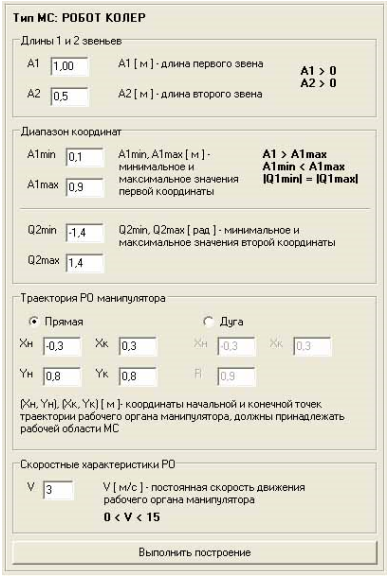


Рис. 1.10. Параметры робота «Колер»

Так, длины звеньев роботов должны быть больше нуля, а максимальные значения из диапазона координат не должны превышать заданные длины звеньев:

$$A_1 > A_{1\max}, A_2 > A_{2\max}.$$

О некорректном задании параметров сигнализирует окно ошибки (рис. 1.11). В сообщении указывается список значений, которые не соответствуют допустимым.

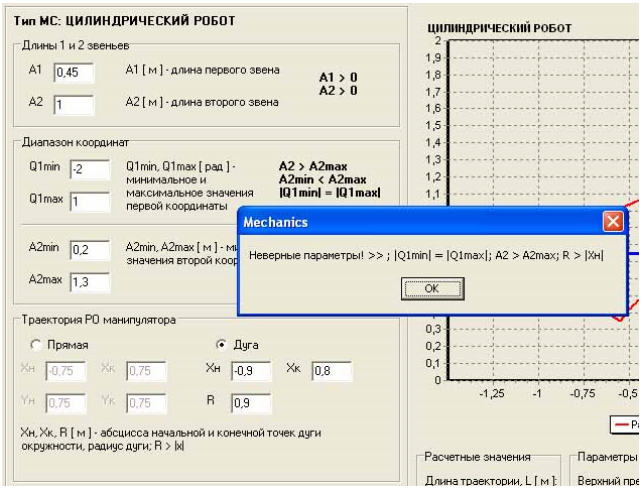


Рис. 1.11. Сообщение об ошибке

Для удобства пользователю предоставлено описание каждого поля ввода (наименование и система измерения).

Во избежание некорректной работы программы все поля ввода не допускают ввод буквенных значений, а также значений, которые не допускаются арифметическими операциями.

Выбор и задание параметров траектории движения схвата

В программе предусмотрены следующие виды траекторий движения схвата манипуляторов.

Прямая. Задается координатами начальной и конечной точек. Применяется для декартового, цилиндрического и робота «Колер» (рис. 1.12).

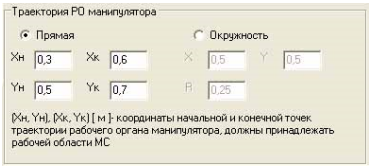


Рис. 1.12. Задание параметров траектории «прямая»

Дуга. Задаётся абсциссами начальной и конечной точек траектории и радиусом окружности с центром в точке (0; 0). Применяется для декартового и цилиндрического роботов (рис. 1.13).

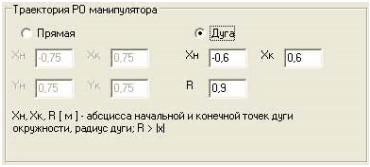


Рис. 1.13. Задание параметров траектории «дуга»

Окружность. Задается координатой точки-центра и радиусом. Применяется для декартового робота (рис. 1.14).

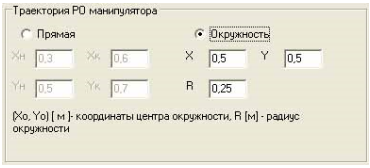


Рис. 1.14. Задание параметров траектории «окружность»

2.3. Отображение рабочей области манипулятора и траектории движения его схвата

После того как выбран манипулятор, и все параметры, касающиеся его размеров и кинематических характеристик, параметров рабочей области и вида траектории движения его схвата, стали принадлежать диапазону допустимых значений, можно получить графическое изображение.

Кнопка **«Выполнить построение»** выполняет следующие функции:

1. Проверка параметров МС на допустимость.

2. Построение рабочей области робота по заданным параметрам.
3. Построение траектории движения схвата манипулятора в зависимости от выбранного вида.
4. Расчет длины траектории и времени движения.
5. Проверка принадлежности траектории рабочей области робота.
6. Расчет и отображение координат крайних точек РО МС.
7. Построение графиков функций обобщенных координат, их скоростей и ускорений для двух звеньев выбранного робота.
8. Расчет и отображение максимального и минимального значений функций обобщённых координат.

Если заданная траектория движения схвата манипулятора покрывается его рабочей областью, то программа отображает надпись *«Траектория движения принадлежит РО манипулятора»* (рис. 1.15).

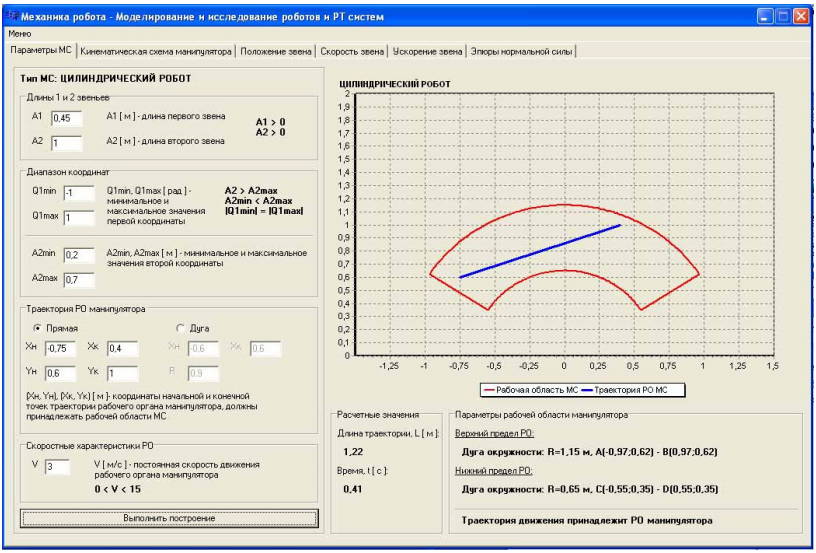


Рис. 1.15. Отображение РО цилиндрического робота и траектории движения схвата

В противном случае программа информирует предупреждающей надписью *«Траектория движения НЕ принадлежит РО манипулятора»* (рис. 1.16).

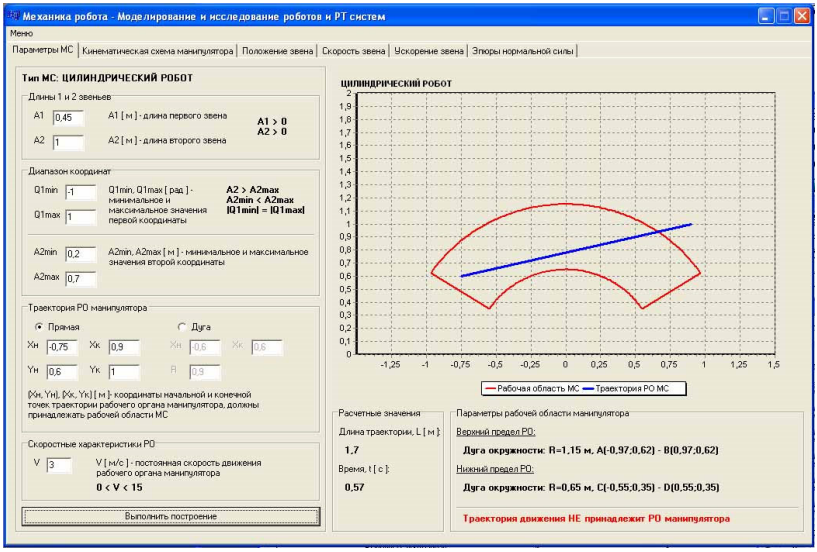


Рис. 1.16. Траектория движения не принадлежит РО манипулятора

2.4. Изменение параметров диаграммы

Программа предусматривает возможность пользователя изменять такие параметры диаграммы, как максимальное и минимальное значения по осям координат и шаг оси.

Вызов окна настройки параметров диаграммы осуществляется вызовом контекстного меню каждой диаграммы и выбором пункта меню **«Масштаб»** (рис. 1.17).

Программа предоставляет следующий набор настроек для изменения параметров выбранной диаграммы:

1. *Задание значений вручную.* При помощи стрелок вверх/вниз инкрементируется/декрементируется значение, стоящее в поле. Таким образом увеличивается/уменьшается значение максимальной и минимальной абсциссы (рис. 1.18), ординаты (рис. 1.19) на величину, указанную в закладке **«Инкремент»** (рис. 1.20).
2. *Автоматический выбор максимального и минимального значений абсциссы и ординаты.* Установка значения «Автоматически» задает автоматический выбор максимального и минимального значений абсциссы и ординаты.

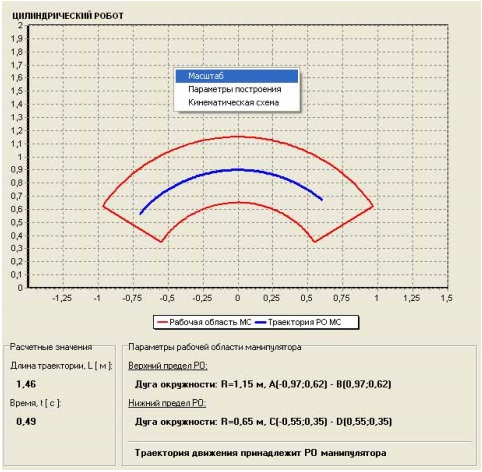


Рис. 1.17. Вызов окна настройки параметров диаграммы

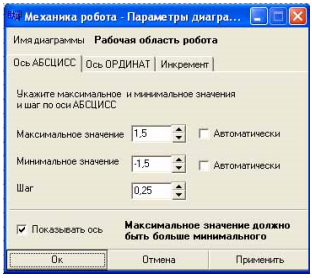


Рис. 1.18. Окно «Параметры диаграммы». Ось абсцисс

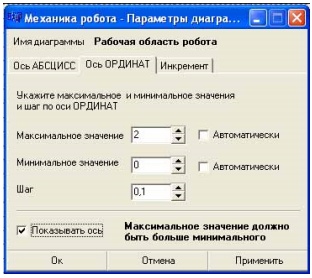


Рис. 1.19. Окно «Параметры диаграммы». Ось ординат

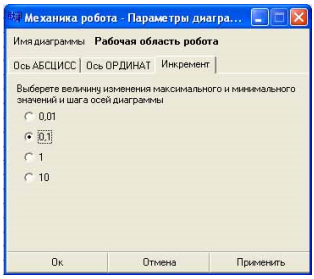


Рис. 1.20. Окно «Параметры диаграммы». Инкремент

2.5. Дополнительные возможности программы

Для удобства сравнения кинематических характеристик различных манипуляторов программа сохраняет параметры, заданные для каждого типа манипулятора. Это свойство позволяет, находясь на любой закладке программы и выбирая тип схемы робота в меню программы, сразу получать графики по уже заданным ранее параметрам.

Форма отчета

1. Титульный лист.
2. Цель работы.
3. Эскиз кинематической схемы манипулятора.
4. Эскизы рабочих областей для различных параметров выбранного манипулятора.
5. Уравнения верхней и нижней границ РО.
6. Вывод.

Контрольные вопросы

1. Что такое РО (рабочая область манипулятора)?
2. Что такое РОД (рабочая область деталей)?
3. Что представляет собой геометрический метод построения РО манипулятора?
4. Какими параметрами задаётся декартовый (цилиндрический, «Колер») робот?
5. От каких параметров зависит построение РО декартового (цилиндрического, «Колер») робота?

Выводы

Рассмотрено программное обеспечение для моделирования движения манипуляторов промышленных роботов. Изучены виды кинематических схем двухзвенных манипуляторов, методы построения рабочих областей манипуляторов, а также построены рабочие области различных манипуляторов.

Рекомендуемая литература

1. Механика промышленных роботов : учеб. пособие для втузов : в 3 книгах / под ред. К. В. Фролова, Е. И. Воробьева. – Москва : Высшая школа, 1988–1989. – 3 кн.
2. Кобринский, А. А. Манипуляционные системы роботов : основы устройства, элементы теории / А. А. Кобринский, А. Е. Кобринский. – Москва : Наука, 1985. – 343 с. – (Научные основы робототехники).

Лабораторная работа 2
ИССЛЕДОВАНИЕ КИНЕМАТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ДВУХЗВЕННЫХ МАНИПУЛЯТОРОВ

Цели работы: изучить методы решения задач кинематического анализа манипуляторов; исследовать основные кинематические характеристики двухзвенных манипуляционных роботов; вывести формулы для обобщенной координаты положения, её скорости и ускорения для различных схем манипуляторов.

Используемое оборудование и материалы

1. Персональный компьютер с установленной операционной системой Windows.
2. Прикладная программа «Механика робота – моделирование и исследование роботов и РТ-систем».

Задание

1. Ознакомиться с теоретической частью методического пособия и описанием программы.
2. Выбрать по указанию преподавателя кинематическую схему робота и задать ее параметры.
3. Выбрать вид траектории движения схвата манипулятора и задать его параметры.
4. Задать параметры рабочей области робота таким образом, чтобы траектория движения принадлежала рабочей области выбранной манипуляционной системы.
5. Указать скорость движения схвата по выбранной траектории движения.
6. Отобразить рабочую область робота, траекторию движения его схвата и графики функций обобщенных координат, их скоростей и ускорений для звеньев робота с помощью инструментов программы.
7. При необходимости (для удобства чтения графиков) задать масштаб диаграммы (максимальные и минимальные значения и шаг по осям).

8. Сравнить графики изменения обобщенных координат с допустимыми значениями скоростей и ускорений для выбранного вида манипулятора.

1. Теоретическая часть

Методы решения задач кинематического анализа манипуляторов

Среди многообразия характеристик роботов особое место занимают кинематические характеристики. С помощью кинематических характеристик можно описать взаимосвязь скоростей и ускорений рабочего органа манипулятора со скоростями и ускорениями в степенях подвижности манипулятора (скорости и ускорения обобщенных координат).

Различают группу прямых задач кинематики, определяющих зависимость вектора положения, скоростей и ускорений рабочего органа манипулятора как функций обобщенных координат, их скоростей и ускорений. Особую роль играют обратные задачи кинематики, определяющие зависимость обобщенных координат, их скоростей и ускорений как функций вектора положения, скоростей и ускорений рабочего органа манипулятора.

Известно, что прямая задача кинематики используется для контроля положения манипулятора в пространстве по данным измерений датчиков положения q_1 и q_2, а группа обратных задач кинематики может использоваться для формирования программных значений обобщенных координат и их скоростей и ускорений, а также для анализа прочности манипулятора.

Будем рассматривать лишь операции транспортирования деталей и не будем учитывать ориентацию рабочего органа манипулятора.

Пусть Z – вектор положения (координаты X и Y рабочего органа), а Q – вектор обобщенных координат.

Тогда следующее выражение определяет прямую задачу кинематики по положению:

$$Z = F(Q),$$

где F – векторная функция.

Обратная задача кинематики определяется следующим выражением:

$$Q = F^{-1}(Z),$$

где F^{-1} – векторная функция, обратная F.

Рассмотрим выражения для F для конкретных кинематических схем двухзвенных манипуляторов.

Декартовый робот

$$Y = q_1 = F_1(q_1, q_2) \quad (2.1)$$

$$X = q_2 = F_2(q_1, q_2) \quad (2.2)$$

Цилиндрический робот

$$Y = (a_1 + q_2) \cdot \cos q_1 = F_1(q_1, q_2) \quad (2.3)$$

$$X = -(a_1 + q_2) \cdot \sin q_1 = F_2(q_1, q_2) \quad (2.4)$$

Робот «Колер»

$$Y = q_1 + a_2 \cdot \cos q_2 = F_1(q_1, q_2) \quad (2.5)$$

$$X = -a_2 \cdot \sin q_2 = F_2(q_1, q_2) \quad (2.6)$$

Для решения обратной задачи кинематики можно использовать как аналитические, так и численные методы.

Получим выражения для F^{-1} для конкретных кинематических схем двухзвенных манипуляторов.

Декартовый робот

$$Q_1 = y = F_1^{-1}(x, y) \quad (2.7)$$

$$Q_2 = x = F_2^{-1}(x, y) \quad (2.8)$$

Цилиндрический робот

Возведем данные выражения (2.3) и (2.4) в квадрат и сложим:

$$x^2 = (a_1 + q_2)^2 \cdot \cos^2 q_1;$$

$$y^2 = (a_1 + q_2)^2 \cdot \sin^2 q_1;$$

$$x^2 + y^2 = (a_1 + q_2)^2 \cdot \cos^2 q_1 + (a_1 + q_2)^2 \cdot \sin^2 q_1 = (a_1 + q_2)^2 \cdot (\cos^2 q_1 + \sin^2 q_1).$$

Как известно, $\cos^2 q_1 + \sin^2 q_1 = 1$. Таким образом: $x^2 + y^2 = (a_1 + q_2)^2$.

$$Q_2 = \sqrt{x^2 + y^2} - a_1 = F_2^{-1}(x, y) \tag{2.9}$$

$$Q_1 = \arccos\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \operatorname{arctg}\frac{x}{y} = F_1^{-1}(x, y) \tag{2.10}$$

Робот «Колер»

Из выражения (2.6) следует:

$$Q_2 = \arcsin\left(-\frac{x}{a_2}\right) = -\arcsin\frac{x}{a_2}.$$

Подставив полученное выражение для Q_2 в (2.5), получим:

$$Q_1 = y - a_2 \cdot \cos\left(-\arcsin\frac{x}{a_2}\right) = y - a_2 \cdot \sqrt{1 - \sin^2\left(-\arcsin\frac{x}{a_2}\right)} =$$

$$= y - a_2 \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{a_2^2}} = y - \sqrt{a_2^2 - x^2}.$$

Получаем решение обратной задачи кинематики для робота «Колер», имеющее вид:

$$Q_1 = y - \sqrt{a_2^2 - x^2} = F_1^{-1}(x, y), \tag{2.11}$$

$$Q_2 = -\arcsin\frac{x}{a_2} = F_2^{-1}(x, y). \tag{2.12}$$

2. Вывод расчетных формул

Для построения графиков зависимости функций обобщенных координат, их скоростей и ускорений от времени (движения схвата манипулятора по рабочей траектории) необходимо, во-первых, решить для каждого из манипуляторов обратную задачу кинематики, т. е. получить зависимость вида: $Q = F^{-1}(Z)$. Во-вторых, найти производные от функции положения.

Так, обобщённая координата скорости для 1-го и 2-го звеньев:

$$\dot{q}_1 = \frac{dQ_1(x)}{dx}, \quad \dot{q}_2 = \frac{dQ_2(x)}{dx}.$$

Обобщенная координата ускорения:

$$\ddot{q}_1 = \frac{d^2 Q_1(x)}{dx^2}, \quad \ddot{q}_2 = \frac{d^2 Q_2(x)}{dx^2}.$$

В выражении $Q = F^{-1}(x, y)$ координата y есть не что иное, как уравнение траектории движения рабочего органа робота в декартовых координатах:

$$y = y(x).$$

В свою очередь, координата x изменяется по закону движения схвата по траектории:

$$x = x(t).$$

Таким образом, находя аналитическую запись выражений для $y(x)$ и $x(t)$, можно получить зависимость обобщённой координаты от времени:

$$q = q(t)\begin{cases} Q = F^{-1}(x, y); \\ y = y(x); \\ x = x(t). \end{cases}$$

Рассмотрим виды траекторий движения рабочего органа манипулятора, получим законы движения $x = x(t)$ и тем самым определим функции $q = q(t)$, $\dot{q} = \dot{q}(t)$, $\ddot{q} = \ddot{q}(t)$ для различных типов манипуляторов.

2.1. Траектория – прямая

В программе прямая, как траектория движения схвата робота, определяется заданием координат её начальной и конечной точек. Уравнение прямой (рис. 2.1), проходящей через 2 точки с координатами ($X_Н$; $Y_Н$) и ($X_К$; $Y_К$) (для удобства обозначим $x_1 = X_Н$, $y_1 = Y_Н$, $x_2 = X_К$, $y_2 = Y_К$), имеет вид:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

Вводя коэффициент $k = y_2 - y_1 / x_2 - x_1$, получим рабочее уравнение для прямой:

$$y(x) = k \cdot (x - x_1) + y_1.$$

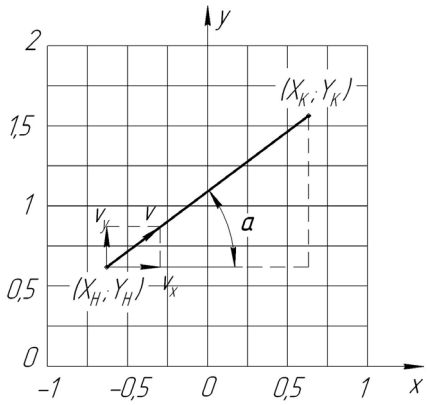


Рис. 2.1. Движение по прямой, проходящей через две точки

Длина отрезка прямой, заключённого между двумя точками с известными координатами, находится по формуле:

$$L = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\,.$$

Тогда время движения точки схвата по участку прямой длины L со скоростью v определится формулой:

$$t = \frac{L}{v}.$$

Выражение $x = x(t)$ имеет следующий вид:

$$x(t) = x_1 + v_x \cdot t,$$

где $v_x = v \cdot \cos\alpha$; $x(t) = x_1 + v \cdot t \cdot \cos\alpha$; $\operatorname{tg}\alpha = k \rightarrow \alpha = \operatorname{arctg} k$; $x(t) = x_1 + v \cdot t \cdot \cos(\operatorname{arctg} k)$.

Для **декартового робота**:

$$\dot{q}_1(x) = \frac{dq_1}{dx} = \frac{dy(x)}{dx} = \frac{d}{dx}(k \cdot (x - x_1) + y_1) = k\,;$$

$$\dot{q}_2(x) = \frac{dq_2}{dx} = \frac{dx}{dx} = 1\,;$$

$$\ddot{q}_1(x) = \frac{d\dot{q}_1}{dx} = 0\,;$$

$$\ddot{q}_2(x) = \frac{d\dot{q}_2}{dx} = 0\,.$$

То есть для декартового робота происходит равномерное движение первого звена со скоростью k и второго звена со скоростью 1. Ускорения звеньев равны нулю.

Для **цилиндрического робота**:

$$\dot{q}_1(x) = \frac{dq_1}{dx} = \frac{d}{dx}\operatorname{arctg}\frac{x}{y(x)} = \frac{d}{dx}\left[\operatorname{arctg}\frac{x}{k\cdot(x-x_1)+y_1}\right];$$

$$\dot{q}_2(x) = \frac{dq_2}{dx} = \frac{d}{dx}\left[\sqrt{x^2+y^2(x)}-a_1\right];$$

$$\ddot{q}_1(x) = \frac{d^2q_1}{dx^2} = \frac{d^2}{dx^2}\left[\operatorname{arctg}\frac{x}{k\cdot(x-x_1)+y_1}\right];$$

$$\ddot{q}_2(x) = \frac{d^2q_2}{dx^2} = \frac{d^2}{dx^2}\left[\sqrt{x^2+y^2(x)}-a_1\right].$$

Например, выражение для скорости второго звена после дифференцирования примет вид:

$$\dot{q}_2(x) = \frac{2\cdot x + (2\cdot k\cdot(x-x_1)+2\cdot y_1)\cdot k}{2\cdot\sqrt{x^2+\left(k\cdot(x-x_1)+y_1\right)^2}}.$$

Учитывая, что $x(t) = x_1 + v\cdot t\cdot\cos(\operatorname{arctg} k)$, можно получить искомую зависимость обобщенной координаты скорости второго звена от времени.

Для **робота «Колер»**:

$$\dot{q}_1(x) = \frac{dq_1}{dx} = \frac{d}{dx}\left[y(x)-\sqrt{a_2^2-x^2}\right] = \frac{d}{dx}\left[k\cdot(x-x_1)+y_1-\sqrt{a_2^2-x^2}\right];$$

$$\dot{q}_2(x) = \frac{dq_2}{dx} = \frac{d}{dx}\left[-\arcsin\frac{x}{a_2}\right];$$

$$\ddot{q}_1(x) = \frac{d^2q_1}{dx^2} = \frac{d^2}{dx^2}\left[k\cdot(x-x_1)+y_1-\sqrt{a_2^2-x^2}\right];$$

$$\ddot{q}_2(x) = \frac{d^2q_2}{dx^2} = \frac{d^2}{dx^2}\left[-\arcsin\frac{x}{a_2}\right].$$

Примечание. В случае с прямой траекторией получить координату точки графика обобщенной координаты в момент времени t

можно, вычислив сначала $x(t)$, затем подставить полученное значение в выражение для q ($\dot{q}$, $\ddot{q}$), причем $\dot{q}$, $\ddot{q}$ умножить на скорость v.

2.2. Траектория – дуга

Для цилиндрического робота и робота «Колер» в программе предусмотрен вариант движения схвата манипулятора по дуге, задаваемой абсциссами начальной и конечной точек и радиусом окружности, часть которой и составляет дуга.

Получим выражение для закона движения точки по дуге радиуса R (рис. 2.2).

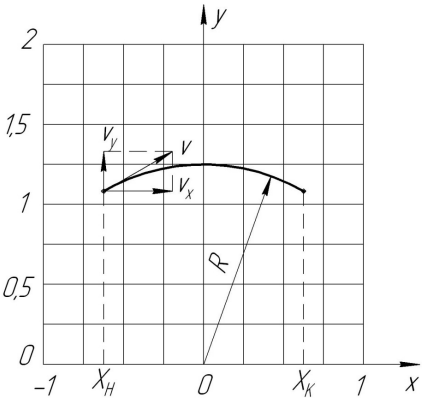


Рис. 2.2. Движение по дуге

Для удобства обозначим $x_1 = X_{\text{Н}}$, $x_2 = X_{\text{К}}$.

Рассмотрим следующие варианты значений x_1 и x_2.

А. $x_1 < 0$, $x_2 > 0$.

В этом случае длина дуги определяется по формуле

$$L = (\alpha_1 + \beta_1) \cdot R = \left(\arcsin \frac{|x_1|}{R} + \arcsin \frac{|x_2|}{R} \right) \cdot R .$$

За время t точка пройдет расстояние $dl = v \cdot t$, что соответствует углу поворота φ (рис. 2.3), который равен:

$$\varphi = \frac{dl}{R} = \frac{v \cdot t}{R} .$$

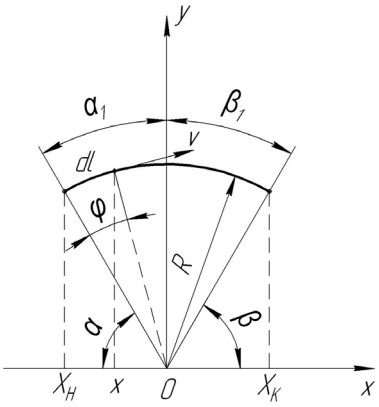


Рис. 2.3. Дуга при $x_1 < 0, x_2 > 0$

Таким образом, для данного диапазона значений координат x_1 и x_2 получим зависимость координаты x от времени:

$$x(t) = -R \cdot \cos\left(\frac{v \cdot t}{R} + \alpha\right),$$

где $\alpha = \arccos\frac{|x_1|}{R}$.

Б. $x_1 > 0, x_2 > 0$.

В этом случае длина дуги определяется по формуле

$$L = \gamma \cdot R = \left(\arccos\frac{x_2}{R} - \arccos\frac{x_1}{R}\right) \cdot R.$$

За время t точка пройдет расстояние $dl = v \cdot t$, что соответствует углу поворота φ (рис. 2.4), который равен:

$$\varphi = \frac{dl}{R} = \frac{v \cdot t}{R}.$$

Таким образом, для данного диапазона значений координат x_1 и x_2 получим зависимость координаты x от времени:

$$x(t) = R \cdot \cos\left(\alpha - \frac{v \cdot t}{R}\right),$$

где $\alpha = \arccos\frac{x_1}{R}$.

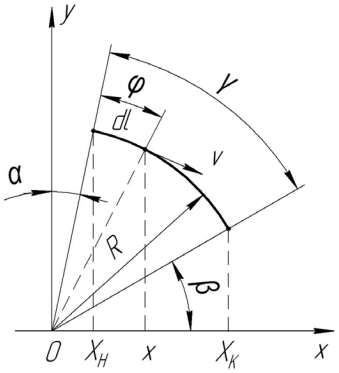


Рис. 2.4. Дуга при $x_1 > 0$, $x_2 > 0$

В. $x_1 < 0, x_2 < 0$.

В данном случае длина дуги определяется по формуле

$$L = \gamma \cdot R = -\left(\arccos\frac{x_2}{R} - \arccos\frac{x_1}{R}\right) \cdot R\,.$$

Выражение для $x(t)$ аналогично первому случаю:

$$x(t) = -R \cdot \cos\left(\frac{v \cdot t}{R} + \alpha\right).$$

Уравнение дуги окружности радиуса R и с центром в начале координат имеет вид:

$$y(x) = \sqrt{R^2 - x^2}\,.$$

Таким образом, для случая $x_1 < 0$, $x_2 > 0$ получим выражения обобщённых координат скорости и ускорения звеньев манипуляторов:

– для **цилиндрического робота**:

$$\dot{q}_1(t) = \frac{dq_1}{dt} = \frac{d}{dt}\operatorname{arctg}\frac{x(t)}{y(t)} = \frac{d}{dt}\left[\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{R^2 - x(t)^2}}\right];$$

$$\dot{q}_2(t) = \frac{dq_2}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\sqrt{x(t)^2 + \left(\sqrt{R^2 - x(t)^2}\right)^2} - a_1\right] = \frac{d}{dt}\left[R - a_1\right] = 0;$$

$$\ddot{q}_1(t) = \frac{d^2 q_1}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2}\left[\operatorname{arctg}\frac{x(t)}{\sqrt{R^2 - x(t)^2}}\right];$$

$$\ddot{q}_2(t) = \frac{d\dot{q}_2(t)}{dt} = 0;$$

– для **робота «Колер»**:

$$\dot{q}_1(t) = \frac{dq_1}{dt} = \frac{d}{dt}\left[y(t) - \sqrt{a_2^2 - x(t)^2}\right] = \frac{d}{dt}\left[\sqrt{R^2 - x(t)^2} - \sqrt{a_2^2 - x(t)^2}\right];$$

$$\dot{q}_2(t) = \frac{dq_2}{dt} = \frac{d}{dt}\left[-\arcsin\frac{x(t)}{a_2}\right];$$

$$\ddot{q}_1(t) = \frac{d^2 q_1}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2}\left[\sqrt{R^2 - x(t)^2} - \sqrt{a_2^2 - x(t)^2}\right];$$

$$\ddot{q}_2(t) = \frac{d^2 q_2}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2}\left[-\arcsin\frac{x(t)}{a_2}\right].$$

2.3. Траектория – окружность

Для декартового робота в программе предусмотрен вариант движения схвата по окружности, задаваемой такими параметрами, как радиус и координата точки центра.

Получим выражение для закона движения точки по окружности радиуса R (рис. 2.5).

Длина траектории движения в данном случае равна длине окружности, которая находится по формуле:

$$L = 2 \cdot \pi \cdot R.$$

За время t точка пройдет расстояние $dl = v \cdot t$, что соответствует углу поворота φ (рис. 2.6), который равен:

$$\varphi = \frac{dl}{R} = \frac{v \cdot t}{R}.$$

Тогда функции изменения абсциссы и ординаты точки во времени будут иметь вид:

$$y(t) = \cos\frac{v \cdot t}{R} + y_0;$$

$$x(t) = \sin\frac{v \cdot t}{R} + x_0.$$

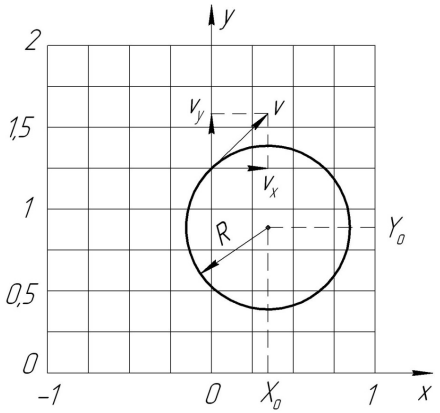


Рис. 2.5. Движение по окружности

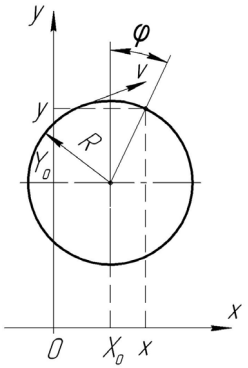


Рис. 2.6. Окружность с центром (X_0; Y_0)

Таким образом, для декартового робота уравнения обобщённых координат скорости и ускорения его звеньев примут вид:

$$\dot{q}_1(t) = \frac{dq_1(t)}{dt} = \frac{dy(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\cos\frac{v \cdot t}{R} + y_0\right] = -\frac{v}{R} \cdot \sin\frac{v \cdot t}{R};$$

$$\dot{q}_2(t)=\frac{dq_1(t)}{dt}=\frac{dx(t)}{dt}=\frac{d}{dt}\left[\sin\frac{v\cdot t}{R}+y_0\right]=\frac{v}{R}\cdot\cos\frac{v\cdot t}{R};$$

$$\ddot{q}_1(t)=\frac{d\dot{q}_1(t)}{dt}=\frac{d}{dt}\left[-\frac{v}{R}\cdot\sin\frac{v\cdot t}{R}\right]=-\left(\frac{v}{R}\right)^2\cdot\cos\frac{v\cdot t}{R};$$

$$\ddot{q}_2(t)=\frac{d\dot{q}_2(t)}{dt}=\frac{d}{dt}\left[\frac{v}{R}\cdot\cos\frac{v\cdot t}{R}\right]=-\left(\frac{v}{R}\right)^2\cdot\sin\frac{v\cdot t}{R}.$$

3. Описание программы

Для того чтобы получить графическое изображение функций положения, скорости и ускорения для звеньев выбранного манипулятора, необходимо задать параметры его рабочей области, выбрать и задать параметры траектории движения его схвата и нажать кнопку «Выполнить построение». Если все введенные значения соответствуют допустимым, то в одноимённых закладках программы отображаются графики обобщенных координат (рис. 2.7–2.9).

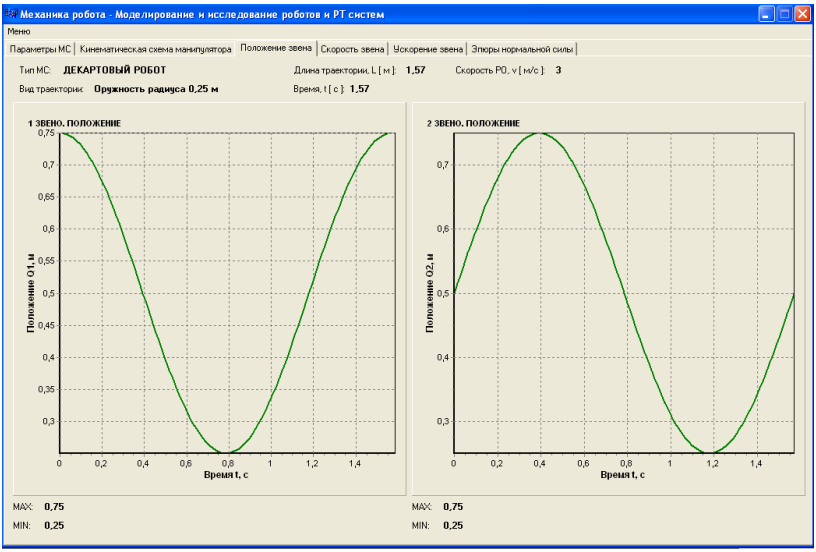


Рис. 2.7. Закладка «Положение звена»

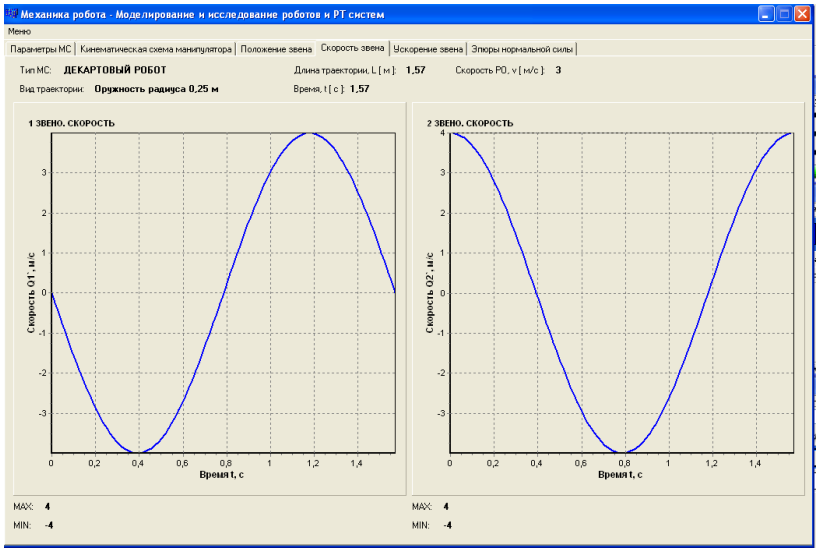


Рис. 2.8. Закладка «Скорость звена»

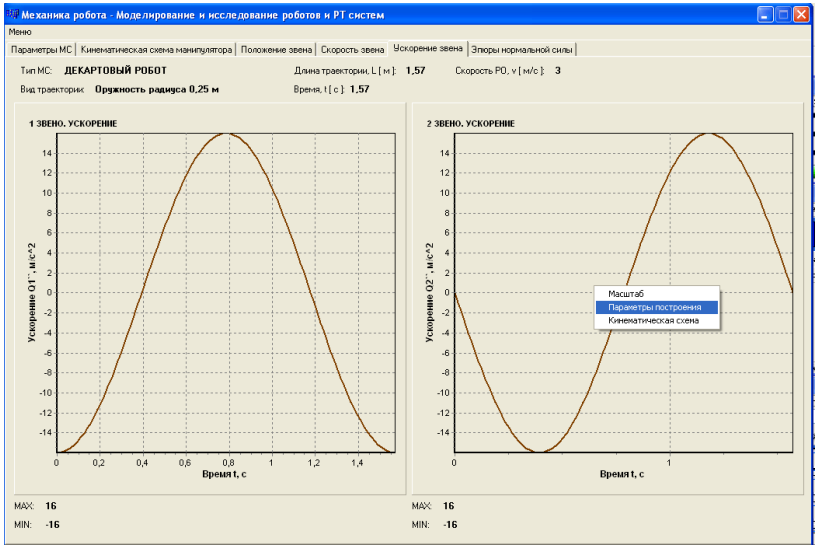


Рис. 2.9. Закладка «Ускорение звена»

В каждой из закладок программы («Положение звена», «Скорость звена» и «Ускорение звена») имеются информационные поля, содержащие информацию о типе манипулятора, длине и виде траектории, времени и скорости движения схвата манипулятора по заданной траектории. Также программа выводит информацию о максимальном и минимальном значениях функций обобщенных координат.

Для изменения масштаба диаграммы необходимо вызвать её контекстное меню и выбрать пункт «Масштаб» (рис. 2.9).

Форма отчета

1. Титульный лист.
2. Цель работы.
3. Эскиз кинематической схемы манипулятора.
4. Эскизы рабочих областей для различных параметров выбранного манипулятора.
5. Уравнения и графики функций обобщённых координат от времени.
6. Вывод.

Контрольные вопросы

1. Что такое прямая и обратная задачи кинематики?
2. Для чего используются прямая и обратная задачи кинематики?
3. Найдите решение обратной задачи кинематики по положению для всех кинематических схем роботов.
4. Найдите решение обратной задачи кинематики по скорости для всех кинематических схем роботов.
5. Найдите решение обратной задачи кинематики по ускорению для всех кинематических схем роботов.
6. Приведите вывод формулы обобщённой координаты скорости цилиндрического робота (декартового, «Колер») для прямой траектории.
7. Приведите вывод формулы обобщённой координаты ускорения цилиндрического робота (декартового, «Колер») для прямой траектории.
8. Приведите вывод формулы обобщённой координаты скорости (ускорения) декартового робота для траектории – окружность.

Выводы

В рамках выполнения данной лабораторной работы:

1. Изучены методы решения задач кинематического анализа манипуляторов.
2. Исследованы основные кинематические характеристики двухзвенных манипуляционных роботов.
3. Выведены формулы для обобщенной координаты положения, её скорости и ускорения для различных схем манипуляторов.

Рекомендуемая литература

1. Механика промышленных роботов : учеб. пособие для втузов : в 3 книгах / под ред. К. В. Фролова, Е. И. Воробьева. – Москва : Высшая школа, 1988–1989. – 3 кн.
2. Кобринский, А. А. Манипуляционные системы роботов : основы устройства, элементы теории / А. А. Кобринский, А. Е. Кобринский. – Москва : Наука, 1985. – 343 с. – (Научные основы робототехники).

Лабораторная работа 3
ИССЛЕДОВАНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК ПРОЧНОСТИ ДВУХЗВЕННЫХ МАНИПУЛЯТОРОВ

Цели работы: изучить классификацию основных видов нагружения механизмов; изучить методы расчета основных характеристик прочности манипуляторов; исследовать дифференциальное уравнение упругой балки и получить выражения для распределения нормальной силы и изгибающего момента для различных кинематических схем манипуляторов.

Используемое оборудование и материалы

1. Персональный компьютер с установленной операционной системой Windows.
2. Прикладная программа «Механика робота – моделирование и исследование роботов и РТ-систем».

Задание

1. Ознакомиться с теоретической частью методического пособия и описанием программы.
2. Выбрать декартовый тип манипулятора.
3. Задать длины звеньев робота и параметры его рабочей области (максимальное и минимальное значения первой и второй координат).
4. Выбрать траекторию движения схвата манипулятора по окружности и задать координату центра и радиус.
5. Отобразить рабочую область декартового робота и проверить, покрывает ли она заданную траекторию движения рабочего органа.
6. Проанализировать графики функций обобщенных координат, их скоростей и положений.
7. Аналитически рассчитать максимальное ускорение первого и второго звеньев и сравнить полученные значения с программными.

8. Отобразить эпюры распределения нормальных сил по звеньям манипулятора (кнопка «Построить» в закладке «Эпюры нормальной силы»).
9. Меняя значения масс звеньев и груза, получить различные значения максимальных усилий двигателей.

1. Теоретическая часть

Методы расчета основных характеристик прочности манипуляторов

Одна из основных задач, возникающих при конструировании манипуляторов, – исследование таких характеристик, как жесткость, податливость, упругость, прочность. Теоретические основы расчета таких характеристик рассматриваются в курсах сопротивления материалов, поэтому рассмотрим кратко основные методы расчета указанных характеристик.

Для этого воспользуемся методом сечений и рассчитаем внутренние силы. В соответствии с законами статики, приведем систему внутренних сил к центру тяжести. В результате можно получить главный вектор R и момент M. Выберем систему координат x, y, z следующим образом: ось z направлена по нормали к сечению, а оси x и y – в плоскости сечения (правая декартовая система координат). Спроектировав главный вектор и главный момент на оси x, y, z, получаем шесть составляющих: три силы и три момента. Эти составляющие и называются внутренними силовыми факторами в сечении стержня.

Составляющая внутренних сил по нормали к сечению N (рис. 3.1) называется **нормальной** или **продольной силой** в сечении. Силы Q_x и Q_y называются **поперечными силами**. Момент относительно нормальной оси M_K называется **крутящим моментом**, а моменты M_x и M_y – **изгибающими моментами** относительно осей x и y.

При известных внешних силах все перечисленные внутренние силовые факторы определяются из шести уравнений равновесия, которые могут быть составлены для отсеченной части стержня.

Таким образом, можно теперь классифицировать основные виды нагружения. Если на каком-то участке стрежня в поперечных сечениях возникает только нормальная сила N, а прочие силовые факторы обращаются в нуль, то на этом участке имеют место **растяжение** или **сжатие**, в зависимости от направления силы N.

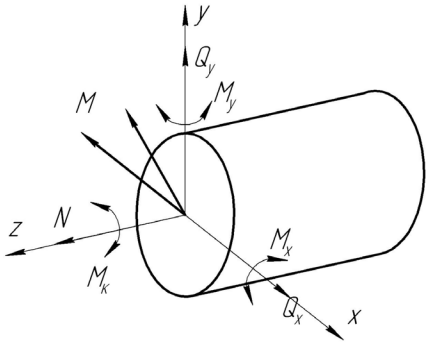


Рис. 3.1. Главный вектор и главный момент внутренних сил

Если в поперечном сечении действует лишь момент M_K, то в сечении стержень испытывает **кручение**. Если внешние силы приложены таким образом, что в поперечном сечении возникает только изгибающий момент M_x (или M_y), то имеет место чистый изгиб в плоскости yz (или xz). Часто в поперечном сечении наряду с изгибающим моментом (M_x) возникает и поперечная сила Q_y.

Этот случай нагружения называется **поперечным изгибом** (в плоскости yz).

Возможны случаи, когда стержень работает на кручение, изгиб и растяжение одновременно.

В курсах сопротивления материалов рассматривается понятие напряжения как числовой меры распределения внутренних сил по сечению.

Вектор напряжения P определяется как предел отношения dR к dS при $dS \to 0$, где dR – внутренняя сила, действующая на элементарной площадке dS сечения (рис. 3.2).

Полное напряжение P может быть разложено на три составляющие: по нормали к плоскости сечения (нормальное напряжение) и по двум осям в плоскости сечения (касательные напряжения) (рис. 3.3).

В курсе сопротивления материалов наиболее распространенным методом расчета прочности является расчет по напряжениям. В основе этого метода лежит предположение, что критерием надежности конструкции является напряжение в точке. При этом на основании анализа конструкции выявляется точка, где возникает наибольшее напряжение, которое сравнивается с предельным значением для выбранного материала, полученным ранее на основе экспериментальных испытаний.

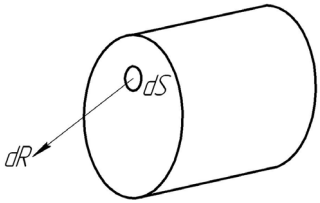


Рис. 3.2. Определение вектора напряжения

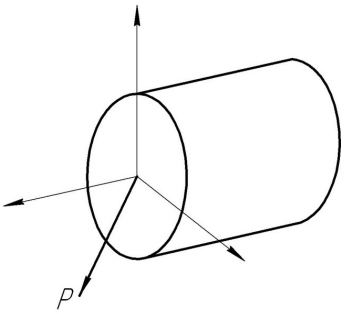


Рис. 3.3. Составляющие вектора напряжения

Из сопоставления расчетных значений напряжения с предельно возможным можно сделать вывод о прочности конструкции. Данный метод используется при решении большинства практических задач.

В некоторых случаях используется метод расчета по разрушающим нагрузкам. В этом методе определяются не напряжения, а находится предельная нагрузка, которую может выдержать конструкция, не разрушаясь или не изменяя существенно свою форму. Предельная (разрушающая нагрузка) сравнивается с расчетной нагрузкой, и на основании этого делаются выводы о степени прочности конструкции в рабочих условиях.

Если же необходимо добиться меньших изменений формы конструкции, то производится расчет на жесткость.

Рассмотрим расчет напряжений в различных элементах конструкции робота для основных режимов нагрузки.

Растяжение и сжатие

В этом режиме в поперечных сечениях звеньев возникают только нормальные силы, а прочие внутренние силовые факторы (поперечные силы, крутящий и изгибающий моменты) равны нулю. Если

обозначить через N равнодействующую внутренних сил в сечении, то в предположении, что для однородного стержня внутренние силы распределены по сечению равномерно (рис. 3.4), нормальное напряжение для всех точек сечения равно:

$$\sigma = \frac{N}{S},$$

где S – площадь поперечного сечения.

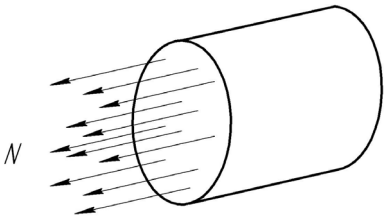


Рис. 3.4. Расчет напряжения при растяжении и сжатии

Для нагруженного по концам растянутого (сжатого) однородного стержня напряжения остаются постоянными как по сечению, так и по длине, т. е. неизменны для всех точек объема, занимаемого телом. Такое напряженное состояние называется однородным. В этом случае все точки тела находятся в одинаковых условиях. Однако однородное напряженное состояние возникает не всегда. Так, у стержня с переменной площадью сечения, а также в случае, если стрежень нагружен собственным весом, напряжения меняются по длине и напряженное состояние неоднородно.

Пусть стержень длины l находится под действием нагрузки. Тогда абсолютное удлинение стержня обозначим через dl, а относительное удлинение через ε:

$$\varepsilon = \frac{dl}{l}.$$

В пределах малых удлинений для подавляющего числа материалов закон Гука, устанавливающий линейную зависимость между напряжениями и деформациями:

$$\tau = E \cdot \varepsilon.$$

Величина E называется модулем упругости первого рода. E определяется экспериментально и измеряется в гигапаскалях (ГПа) или

мегапаскалях (МПа). В частности, 1 кгс/мм^2 = 9,81 МПа, 1 ГПа = = 1000 МПа.

Приведем значения E для наиболее часто применяемых материалов в ГПа.

Сталь	*190–200*
Медь	*120*
Латунь	*100–120*
Алюминий и алюминиево-магниевые сплавы	*70–80*
Бериллий	*240*
Вольфрам	*410*
Молибден	*330*
Титан	*100*
Алмаз	*1050*
Дерево вдоль волокон	*8–12*
Стекловолокно	*70–85*
Кварцевое волокно	*70*
Бороволокно	*430*
Карбидное волокно	*430*
Промышленное углеродное волокно высокопрочное	*220–250*
Графит	*до 690*
Сапфир	*до 530*

Пусть однородный стержень нагружен по концам с силой P, тогда можно записать выражение для абсолютного удлинения dl:

$$dl = \frac{P \cdot l}{E \cdot S}.$$

В общем случае нормальная сила N может быть переменной функцией некоторой координаты, например, расстояния вдоль оси стержня от характерной точки (например, точки закрепления стержня). Графики зависимости N и других величин (dl, τ и др.) от расстояния вдоль оси стержня называются **эпюрами**.

Известно, что удлинение стержня в осевом направлении сопровождается уменьшением его поперечных размеров, происходит как продольная $\varepsilon_{прод}$, так и поперечная $\varepsilon_{попер}$ деформация стержня.

Экспериментально установлено, что в пределах применимости закона Гука поперечная деформация пропорциональна продольной:

$$\varepsilon_{попер} = \mu \cdot \varepsilon_{прод},$$

где μ – безразмерный коэффициент пропорциональности, называемый коэффициентом Пуассона. μ является характеристикой материала и определяется по данным эксперимента. Для металлов μ лежит в пределах 0,25–0,35, причем для изотропного материала коэффициент пропорциональности не превышает 0,5.

Эффект одновременного появления продольных и поперечных деформаций можно охарактеризовать с помощью γ, описывающей угловую деформацию материала. В этом случае можно записать выражение закона Гука для сдвига:

$$\gamma = \frac{\tau}{G},$$

где G называется модулем сдвига или модулем упругости второго рода:

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \mu)}.$$

Кручение

Под кручением понимается вид нагружения, при котором в поперечных сечениях стержня действует лишь крутящий момент. Другие факторы (изгибающие моменты, нормальная и поперечная силы) отсутствуют. Этот случай имеет место при рассмотрении нагружения валов двигателя.

Когда на стержень действует крутящий момент, то происходит эффект закручивания торцевого сечения стержня на угол φ, образующая цилиндра при этом поворачивается на угол γ, причем:

$$\gamma = \rho \cdot \frac{d\varphi}{dz},$$

где ρ – радиус стрежня; z – координата, отсчитываемая по оси стержня (рис. 3.5).

Величина Ф называется относительным углом закручивания.

$$\Phi = \frac{d\varphi}{dz}.$$

По закону Гука, для сдвига касательное напряжение τ определяется следующим выражением:

$$\tau = G \cdot \Phi \cdot \rho.$$

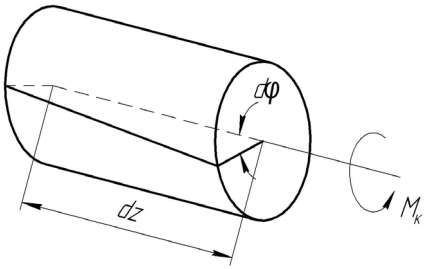


Рис. 3.5. Расчет деформации при кручении

Запишем выражение для относительного угла закручивания Ф:

$$\Phi = \frac{M}{G \cdot J_p},$$

где M – крутящий момент; J_p – полярный момент инерции стержня.

$$J_p = \int_S \rho^2 dS.$$

Максимальное значение касательных напряжений в поперечном сечении определяется следующим выражением:

$$\tau_{\max} = \frac{M \cdot r_{\max}}{J_p}$$

или

$$\tau_{\max} = \frac{M}{W_p},$$

где

$$W_p = \frac{J_p}{r_{\max}}.$$

W_p носит название полярного момента сопротивления.

Изгиб

Под изгибом будем понимать такой вид нагружения, при котором в поперечных сечениях возникают изгибающие моменты. Если изгибающий момент в сечении является единственным силовым фактором, а поперечная и нормальная силы отсутствуют, **изгиб** называется **чистым**. Если же в поперечных сечениях возникают также

и поперечные силы, то это – **поперечный изгиб**. При рассмотрении явлений изгиба стержней важно знать распределение изгибающих моментов по стержню (эпюра изгибающих моментов). При рассмотрении эпюры изгибающих моментов будем использовать следующие соотношения:

$$\frac{dQ}{dz} = q, \quad \frac{dM}{dz} = q,$$

где M – изгибающий момент; Q – поперечная сила; q – интенсивность внешней распределённой нагрузки (рис. 3.6).

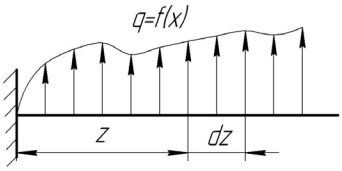


Рис. 3.6. Расчет деформации при изгибе

Рассмотрим задачу определения напряжений в стержне для случая чистого изгиба. Образование деформаций при чистом изгибе может рассматриваться как результат поворота плоских поперечных сечений друг относительно друга. При этом в сечениях стержня можно выделить линию, вдоль которой напряжения равны нулю (нейтральная линия).

Выражение для расчёта напряжений в стержне для чистого изгиба имеет следующий вид:

$$\sigma = \frac{M \cdot y}{J_x},$$

где y – расстояние от нейтральной линии; J_x – момент инерции стержня относительно главной центральной оси, перпендикулярной плоскости изгибающего момента. Поэтому максимальное напряжение при изгибе возникает в точках, наиболее удалённых от нейтральной линии, т. е.

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W_x},$$

где $W_x = J_x / y_{\max}$ – момент сопротивления сечения при изгибе.

Для стержня прямоугольного сечения со сторонами b и h:

$$J_x = \frac{b \cdot h^3}{12},\ y_{\max} = \frac{h}{2},\ W_x = \frac{b \cdot h^2}{6}.$$

Для стержня круглого сечения:

$$J_x = \frac{\pi \cdot D^4}{64},\ y_{\max} = \frac{D}{2},\ W_x = \frac{\pi \cdot D^3}{32}.$$

Наиболее экономичными поэтому являются такие формы поперечных сечений, для которых с наименьшей затратой материала получается наибольшая величина момента сопротивления W_x. Чтобы форма сечения была рациональной, необходимо по возможности распределять площадь сечения дальше от нейтральной оси.

Таким образом, при чистом изгибе в поперечных сечениях стержня возникают только нормальные напряжения. Соответствующие им внутренние силы приводятся к изгибающему моменту в сечении.

В случае поперечного изгиба в сечении стержня возникает не только изгибающий момент, но и поперечная сила Q. Поэтому в поперечных сечениях возникают не только нормальные, но и касательные напряжения. Можно сказать, что на величину нормальных напряжений наличие поперечной силы не оказывает существенного влияния. Расчет касательных напряжений производится по формуле Журавского [4].

Дифференциальное уравнение упругой балки

Пусть, как и ранее, z обозначает координату, отсчитываемую вдоль оси стержня, а y – текущее смещение оси в перпендикулярном направлении.

Тогда можно записать выражение для дифференциального уравнения, определяющего смещение y как функцию z:

$$\ddot{y} = \frac{M(z)}{E \cdot J_x}.$$

Задаваясь конкретной зависимостью $M(z)$ и интегрируя последнее уравнение, можно получить искомую зависимость $y(z)$.

Таким образом, методы теории сопротивления материалов позволяют рассчитывать такие характеристики прочности, как распре-

деление напряжений при действии на звенья различных силовых факторов. При этом практически остается в стороне вопрос о расчете самих силовых воздействий на звенья.

Вопрос определения силовых воздействий на звенья манипулятора является чрезвычайно сложным, так как для этого необходимо рассматривать уравнения в частных производных, описывающих процесс движения манипулятора по производным траекториям с учётом свойства упругости материалов звеньев и особенно устройств сочленения звеньев.

Воспользуемся следующей приближенной расчетной схемой, позволяющей рассчитать силовые воздействия на звенья манипулятора. Решение задач кинематики (обратные задачи по положению, скорости и ускорению) дает возможность рассчитать скорости и ускорения звеньев, а силовое воздействие на звенья манипулятора определяется силами инерции и моментами сил инерции в соответствии с принципом кинетостатики (принцип Даламбера). Полученные в результате расчета нормальные силы и изгибающие моменты позволяют рассчитать распределение напряжений в звеньях, а также энергетические характеристики двигателей в сочленениях и максимально возможный изгиб звеньев.

Рассмотрим для примера особенности расчета прочностных характеристик декартового робота.

Пусть q_1, $\dot{q}_1$, $\ddot{q}_1$ – обобщенная координата, её скорость и ускорение первого звена манипулятора (координата Y, её скорость и ускорение), а q_2, $\dot{q}_2$, $\ddot{q}_2$ – обобщенная координата, её скорость и ускорение второго звена манипулятора (координата X, её скорость и ускорение).

Тогда первое звено движется вдоль оси Y (координаты q_1, $\dot{q}_1$, $\ddot{q}_1$, а второе звено движется вдоль оси Y (переносное движение с q_1, $\dot{q}_1$, $\ddot{q}_1$) и вдоль оси X (собственное движение с q_2, $\dot{q}_2$, $\ddot{q}_2$).

Найдем распределение нормальной силы вдоль 1-го звена с учетом её протяженности и распределения массы по звену.

Сила инерции, вызванная действием 2-го звена и груза, определяется выражением:

$$(m_2 + m_{\text{гр}}) \cdot \ddot{q}_1,$$

где m_2 – масса 2-го звена; $m_{\text{гр}}$ – масса груза.

Пусть y – координата, отсчитываемая вдоль первого звена ($0 < y < A_1$), а dy – приращение y. Тогда элементарная сила dF_1, вызванная действием элементарной массы dm_1 1-го звена, равна:

$$dF_1 = \ddot{q}_1 \cdot dm_1.$$

Тогда нормальная сила F равна:

$$F = \int_{y}^{A_1} dF_1$$

или после преобразования:

$$F_1 = m_1 \cdot \ddot{q}_1 \cdot \left(1 - \frac{y}{A_1}\right) + (m_2 + m_{\text{гр}}) \cdot \ddot{q}_1,$$

где m_1 – масса 1-го звена.

Аналогично получаем выражение для распределения нормальной силы вдоль 2-го звена:

$$F_2 = m_2 \cdot \ddot{q}_2 \cdot \left(1 - \frac{x}{A_2}\right) + m_{\text{гр}} \cdot \ddot{q}_1.$$

Рассмотрим распределение изгибающего момента вдоль 1-го звена. Изгиб 1-го звена определяется действием пары (2-е звено + груз). Тогда распределение изгибающего момента вдоль 1-го звена обусловлено действием сосредоточенной силы $(m_2 + m_{\text{гр}}) \cdot \ddot{q}_1$ и имеет вид:

$$M_1 = (m_2 + m_{\text{гр}}) \cdot \ddot{q}_2 \cdot (q_1 - x).$$

Рассмотрим распределение изгибающего момента вдоль 2-го звена. Изгиб 2-го звена вызван переносным движением звена вдоль оси y. Тогда распределение изгибающего момента вдоль 2-го звена обусловлено действием распределенной силы $dF_2 = \ddot{q}_1 \cdot dm_2$, а также сосредоточенной силы $m_2 \cdot \ddot{q}_1$ или после преобразования:

$$M_2 = m_2 \cdot \frac{\ddot{q}_1}{2 \cdot A_2} \cdot \left(q_2^2 - x^2\right) + m_{\text{гр}} \cdot \ddot{q}_1 \cdot (q_2 - x).$$

Полученное выражение справедливо для правого конца 2-го звена, содержащего схват манипулятора с грузом. Аналогичное выражение можно получить для изгибающего момента левого конца

2-го звена (там будет присутствовать лишь первое слагаемое последнего выражения).

Полученные выше соотношения позволяют найти оценки для мощности двигателей в степенях подвижности манипуляторов. В частности, максимально возможные усилия, которые должны развиваться двигателями в 1-й и 2-й степенях подвижности, равны соответственно:

$$F_{1\max} = (m_1 + m_2 + m_{\text{гр}}) \cdot \ddot{q}_{1\max},$$

$$F_{2\max} = (m_2 + m_{\text{гр}}) \cdot \ddot{q}_{2\max},$$

где $\ddot{q}_{1\max}$ и $\ddot{q}_{2\max}$ – максимальные ускорения 1-го и 2-го звеньев соответственно.

Рассмотрим задачу оценки упругих деформаций звеньев манипулятора в рамках гипотезы о малом изгибе гибкого стержня. Тогда максимальное смещение конца 1-го звена определяется выражением:

$$X_{\max} = \frac{(m_2 + m_{\text{гр}}) \cdot \ddot{q}_{2\max}}{E \cdot J_x} \pm \frac{(q_1)^3}{3}.$$

2. Описание программы

Возможности данной программы позволяют строить эпюры распределения нормальной силы вдоль звеньев манипулятора. В качестве исследуемого манипулятора используется робот декартового типа и движение схвата по окружности (так как для построения эпюры необходимо наличие ускорения, которое отсутствует при движении робота по прямой траектории).

После того как выбран манипулятор, и все параметры, касающиеся его размеров и кинематических характеристик, параметров рабочей области и вида траектории движения его схвата, принадлежат диапазону допустимых значений, можно получить графическое изображение диаграмм нормальных сил.

Для этого необходимо нажать кнопку *«Выполнить построение»* (см. лабораторную работу 2), чтобы выполнить расчет максимальных ускорений звеньев. Затем перейти на закладку *«Эпюры нор-*

мальной силы» (рис. 3.7). Поля значений ускорений заполняются автоматически при расчете и построении графиков обобщённых координат.

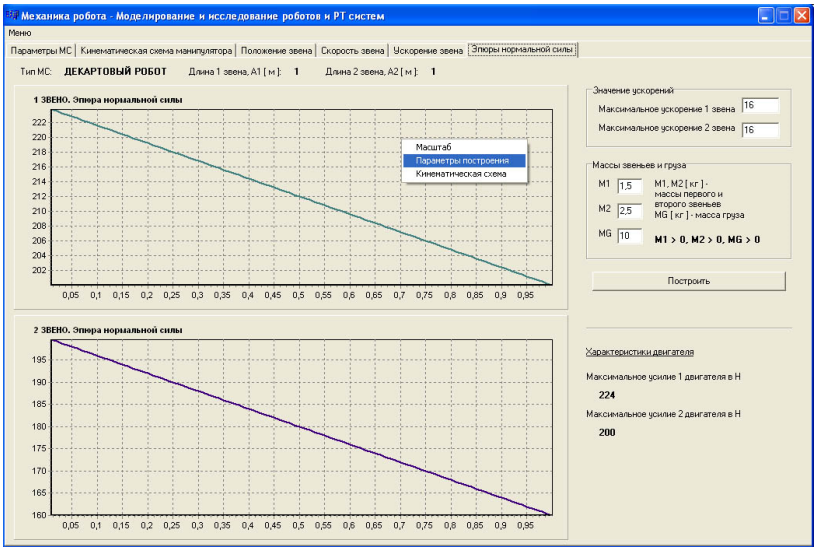


Рис. 3.7. Эпюры распределения нормальной силы

Для получения графического изображения эпюр распределения нормальных сил необходимо задать значения масс звеньев и груза и нажать кнопку *«Построить»*.

Форма отчета

1. Титульный лист.
2. Цель работы.
3. Кинематическая схема манипулятора.
4. Параметры манипулятора, рабочей области и траектории движения.
5. Соотношения для расчета нормальных сил вдоль звеньев манипулятора.
6. Эпюры распределения нормальных сил.
7. Соотношения для расчета и значения максимальных усилий двигателей в степенях подвижности.
8. Вывод.

Контрольные вопросы

1. Перечислите прочностные характеристики манипуляторов.
2. Какие методы используются для расчета основных кинематических характеристик манипуляторов?
3. Приведите классификацию основных видов нагружения.
4. Какой вид нагружения называется растяжением (сжатием, кручением, изгибом)?
5. Выведите соотношения для расчета нормальных и касательных ускорений для декартового и цилиндрического роботов и робота «Колер».
6. Выведите соотношения для расчета нормальных сил вдоль звеньев манипулятора для декартового (цилиндрического, «Колер») робота.
7. Выведите соотношения для расчета распределения изгибающих моментов вдоль звеньев манипулятора для декартового (цилиндрического, «Колер») робота.
8. Выведите соотношения для расчета максимальных усилий и моментов двигателей в степенях подвижности, а также выражения для максимальных смещений звеньев манипулятора для декартового (цилиндрического, «Колер») робота.

Выводы

При выполнении лабораторной работы изучены:

1. Классификация основных видов нагружения механизмов.
2. Методы расчета основных характеристик прочности манипуляторов.

Исследованы дифференциальное уравнение упругой балки, получены выражения для распределения нормальной силы и изгибающего момента для различных кинематических схем манипуляторов.

Рекомендуемая литература

1. Робототехника и гибкие автоматизированные производства : учеб. пособие для втузов : в 9 книгах / под ред. И. М. Макарова. – Москва : Высшая школа, 1986. – 9 кн.

2. Механика промышленных роботов : учеб. пособие для втузов : в 3 книгах / под ред. К. В. Фролова, Е. И. Воробьева. – Москва : Высшая школа, 1988–1989. – 3 кн.
3. Кобринский, А. А. Манипуляционные системы роботов : основы устройства, элементы теории / А. А. Кобринский, А. Е. Кобринский. – Москва : Наука, 1985. – 343 с. – (Научные основы робототехники).
4. Федосьев, В. И. Сопротивление материалов / В. И. Феодосьев. – 16-е изд., испр. – Москва : Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2016. – 543 с. – (Terra mechanica). – ISBN 978-5-7038-3874-7.

Заключение

В первой лабораторной работе изучены виды кинематических схем двухзвенных манипуляторов, методы построения рабочих областей манипуляторов, построены рабочие области различных манипуляторов.

В рамках выполнения второй лабораторной работы изучены методы решения задач кинематического анализа манипуляторов, исследованы основные кинематические характеристики двухзвенных манипуляционных роботов и выведены формулы для обобщенной координаты положения, её скорости и ускорения для различных схем манипуляторов.

При выполнении третьей лабораторной работы изучены классификация основных видов нагружения механизмов, методы расчета основных характеристик прочности манипуляторов, исследованы дифференциальное уравнение упругой балки, получены выражения для распределения нормальной силы и изгибающего момента для различных кинематических схем манипуляторов.

Приложение А

Декартовый робот

Движение схвата по прямой

$$q_1(t) = k \cdot v \cdot t \cdot \cos(\operatorname{arctg} k) + y_1 = k \cdot v \cdot t \cdot \frac{1}{\sqrt{1+k^2}} + y_1$$

$$\dot{q}_1(t) = k \cdot v \cdot \cos(\operatorname{arctg} k) = k \cdot v \cdot \frac{1}{\sqrt{1+k^2}}$$

$$\ddot{q}_1(t) = 0$$

$$q_2(t) = x_1 \cdot v \cdot t \cdot \cos(\operatorname{arctg} k) = x_1 \cdot v \cdot t \cdot \frac{1}{\sqrt{1+k^2}}$$

$$\dot{q}_2(t) = v \cdot \cos(\operatorname{arctg} k) = v \cdot \frac{1}{\sqrt{1+k^2}}$$

$$\ddot{q}_2(t) = 0$$

Движение схвата по окружности

$$q_1(t) = \cos\frac{v \cdot t}{R} + y_0$$

$$\dot{q}_1(t) = -\frac{v}{R} \cdot \sin\frac{v \cdot t}{R}$$

$$\ddot{q}_1(t) = -\left(\frac{v}{R}\right)^2 \cdot \cos\frac{v \cdot t}{R}$$

$$q_2(t) = \sin\frac{v \cdot t}{R} + y_0$$

$$\dot{q}_2(t) = \frac{v}{R} \cdot \cos\frac{v \cdot t}{R}$$

$$\ddot{q}_2(t) = -\left(\frac{v}{R}\right)^2 \cdot \sin\frac{v \cdot t}{R}$$

Цилиндрический робот

Движение схвата по прямой

$$q_1(t) = \operatorname{arctg}\left[\frac{\left[x_1 + v \cdot \frac{t}{\sqrt{(1+k^2)}}\right]}{\left[k \cdot v \cdot \frac{t}{\sqrt{(1+k^2)}} + y_1\right]}\right]$$

$$\frac{d}{dt}q_1(t) = \frac{\frac{v}{\sqrt{A}\cdot B_2} - k \cdot \frac{B_1}{B_2^2} \cdot \frac{v}{\sqrt{A}}}{1 + \frac{B_1^2}{B_2^2}}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}q_1(t) = \frac{-2 \cdot k \cdot \frac{v^2}{A \cdot B_2^2} + 2 \cdot k^2 \cdot \frac{B_1}{B_2^3} \cdot \frac{v^2}{A}}{1 + \frac{B_1^2}{B_2^2}} - \frac{\frac{v}{\sqrt{A}\cdot B_2} - k \cdot \frac{B_1}{B_2^2} \cdot \frac{v}{\sqrt{A}}}{\left[1 + \frac{B_1^2}{B_2^2}\right]^2} \times$$

$$\times \left[2 \cdot \frac{B_1}{B_2^2} \cdot \frac{v}{\sqrt{A}} - 2 \cdot k \cdot \frac{B_1^2}{B_2^3} \cdot \frac{v}{\sqrt{A}}\right]$$

$$q_2(t) = \sqrt{\left[\left[x_1 + v \cdot \frac{t}{\sqrt{(1+k^2)}}\right]^2 + \left[k \cdot v \cdot \frac{t}{\sqrt{(1+k^2)}} + y_1\right]^2\right]} + a_1$$

$$\frac{d}{dt}q_2(t) = \frac{\frac{2 \cdot v}{\sqrt{A}} \cdot [B_1 + k \cdot B_2]}{2 \cdot \sqrt{B_1^2 + B_2^2}}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}q_2(t) = \frac{-\left[2 \cdot B_1 \cdot \frac{v}{\sqrt{A}} + 2 \cdot k \cdot B_2 \cdot \frac{v}{\sqrt{A}}\right]^2}{4 \cdot \sqrt{[B_1^2 + B_2^2]^3}} + \frac{\left[(2 + 2 \cdot k^2) \cdot \frac{v^2}{A}\right]}{2 \cdot \sqrt{B_1^2 + B_2^2}}$$

$$A = 1 + k^2;\ B_1 = x_1 + v \cdot \frac{t}{\sqrt{A}}$$

$$B_2 = k \cdot v \cdot \frac{t}{\sqrt{(1+k^2)}} + y_1$$

Движение схвата по дуге

$$q_1(t) = -\text{arctg}\left[R \cdot \frac{\cos\left(v \cdot \frac{t}{R} + \arccos\frac{|x_1|}{R}\right)}{\sqrt{R^2 - R^2 \cdot \cos^2\left(v \cdot \frac{t}{R} + \arccos\frac{|x_1|}{R}\right)}}\right]$$

$$\frac{d}{dt}q_1(t) = \frac{\left[\frac{C \cdot v}{\sqrt{B}} + R^2 \cdot \frac{A^2 \cdot C \cdot v}{\sqrt{B^3}}\right]}{1 + R^2 \cdot \frac{A^2}{B}}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}q_1(t) = \frac{\left[A \cdot \frac{v^2}{R \cdot \sqrt{B}} - 3 \cdot R \cdot A \cdot C^2 \cdot \frac{v^2}{\sqrt{B^3}} - 3 \cdot R^3 \cdot A^3 \cdot C^2 \cdot \frac{v^2}{\sqrt{B^5}} + R \cdot A^3 \cdot \frac{v^2}{\sqrt{B^3}}\right]}{1 + R^2 \cdot \frac{A^2}{B}} +$$

$$+ \frac{\left[-C \cdot \frac{v}{\sqrt{B}} - R^2 \cdot A^3 \cdot C \cdot \frac{v}{\sqrt{B^3}}\right]}{\left[1 + R^2 \cdot \frac{A^2}{B}\right]^2} \cdot \left[-2 \cdot R \cdot A \cdot C \cdot \frac{v}{B} - 2 \cdot R^3 \cdot A^3 \cdot C \cdot \frac{v}{B^2}\right]$$

$$q_2(t) = R + a_1;$$

$$\frac{d}{dt}q_2(t) = 0;\ \frac{d^2}{dt^2}q_2(t) = 0$$

$$A = \cos\left(v \cdot \frac{t}{R} + \arccos\frac{|x_1|}{R}\right)$$

$$B = R^2 - R^2 \cdot A^2$$

$$C = \sin\left(v \cdot \frac{t}{R} + \arccos\frac{|x_1|}{R}\right)$$

$$q_1(t) = \text{arctg}\left[R \cdot \frac{\cos\left(v \cdot \frac{t}{R} - \arccos\frac{|x_1|}{R}\right)}{\sqrt{R^2 - R^2 \cdot \cos^2\left(v \cdot \frac{t}{R} - \arccos\frac{|x_1|}{R}\right)}}\right]$$

$$\frac{d}{dt}q_1(t) = -\frac{\left[\frac{C \cdot v}{\sqrt{B}} + R^2 \cdot \frac{A^2 \cdot C \cdot v}{\sqrt{B^3}}\right]}{1 + R^2 \cdot \frac{A^2}{B}}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}q_1(t) = -\frac{\left[A\cdot\frac{v^2}{R\cdot\sqrt{B}} - 3\cdot R\cdot A\cdot C^2\cdot\frac{v^2}{\sqrt{B^3}} - 3\cdot R^3\cdot A^3\cdot C^2\cdot\frac{v^2}{\sqrt{B^5}} + R\cdot A^3\cdot\frac{v^2}{\sqrt{B^3}}\right]}{1+R^2\cdot\frac{A^2}{B}} -$$

$$-\frac{\left[-C\cdot\frac{v}{\sqrt{B}} - R^2\cdot A^3\cdot C\cdot\frac{v}{\sqrt{B^3}}\right]}{\left[1+R^2\cdot\frac{A^2}{B}\right]^2}\cdot\left[-2\cdot R\cdot A\cdot C\cdot\frac{v}{B} - 2\cdot R^3\cdot A^3\cdot C\cdot\frac{v}{B^2}\right]$$

$$q_2(t) = R + a_1;$$

$$\frac{d}{dt}q_2(t) = 0;\ \frac{d^2}{dt^2}q_2(t) = 0$$

$$A = \cos\left(v\cdot\frac{t}{R} - \arccos\frac{|x_1|}{R}\right)$$

$$B = R^2 - R^2\cdot A^2$$

$$C = \sin\left(v\cdot\frac{t}{R} - \arccos\frac{|x_1|}{R}\right)$$

Робот «Колер»

Движение схвата по прямой

$$q_1(t) = k\cdot v\cdot\frac{t}{\sqrt{(1+k^2)}} - \sqrt{a_2^2 - \left[x_1 + v\cdot\frac{t}{\sqrt{(1+k^2)}}\right]^2} + y_1$$

$$\frac{d}{dt}q_1(t) = k\cdot\frac{v}{\sqrt{A}} + \frac{1}{\sqrt{C}}\cdot B\cdot\frac{v}{\sqrt{A}} = \frac{v}{\sqrt{A}}\cdot\left[k + \frac{B}{\sqrt{C}}\right]$$

$$\frac{d^2}{dt^2}q_1(t) = \frac{v^2}{A}\cdot\left[\frac{B^2}{\sqrt{C^3}} + \frac{1}{\sqrt{C}}\right]$$

$$q_2(t) = -\arcsin\left[\frac{x_1 + v\cdot\frac{t}{\sqrt{(1+k^2)}}}{a_2}\right]$$

$$\frac{d}{dt}q_2(t) = \frac{-v}{\sqrt{A \cdot C}} \qquad \frac{d^2}{dt^2}q_2(t) = \frac{-v^2}{a_2^2 \cdot A \cdot \sqrt{C^3}} \cdot B$$

$$A = 1 + k^2 \qquad B = x_1 + v \cdot \frac{t}{\sqrt{A}} \qquad C = a_2^2 - B^2$$

Движение схвата по дуге

$$q_1(t) = \sqrt{R^2 - R^2 \cdot \cos^2\left(v \cdot \frac{t}{R} + \arccos\frac{|x_1|}{R}\right)} - \\ - \sqrt{a_2^2 - R^2 \cdot \cos^2\left(v \cdot \frac{t}{R} + \arccos\frac{|x_1|}{R}\right)}$$

$$\frac{d}{dt}q_1(t) = R \cdot D \cdot G \cdot \frac{v}{\sqrt{E}} - R \cdot D \cdot G \cdot \frac{v}{\sqrt{F}} = R \cdot D \cdot G \cdot \left(\frac{v}{\sqrt{E}} - \frac{v}{\sqrt{F}}\right)$$

$$\frac{d^2}{dt^2}q_1(t) = -R^2 \cdot D^2 \cdot G^2 \cdot \frac{v^2}{\sqrt{E^3}} - G^2 \cdot \frac{v^2}{\sqrt{E}} + D^2 \cdot \frac{v^2}{\sqrt{E}} + R^2 \cdot D^2 \cdot G^2 \cdot \frac{v^2}{\sqrt{F^3}} +$$

$$+ G^2 \cdot \frac{v^2}{\sqrt{F}} - D^2 \cdot \frac{v^2}{\sqrt{F}} = R^2 \cdot D^2 \cdot G^2 \cdot \left(\frac{v^2}{\sqrt{F^3}} - \frac{v^2}{\sqrt{E^3}}\right) + (D^2 - G^2) \cdot \left(\frac{v^2}{\sqrt{E}} - \frac{v^2}{\sqrt{F}}\right)$$

$$q_2(t) = \arcsin\left[\frac{R \cdot \cos\left(v \cdot \frac{t}{R} + \arccos\frac{|x_1|}{R}\right)}{a_2}\right]$$

$$\frac{d}{dt}q_2(t) = -G \cdot \frac{v}{\sqrt{F}}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}q_2(t) = -D \cdot \frac{v^2}{R \cdot \sqrt{F}} + R \cdot D \cdot G^2 \cdot \frac{v^2}{a_2^2 \cdot \sqrt{F}}$$

$$D = \cos\left(v \cdot \frac{t}{R} + \arccos\frac{|x_1|}{R}\right)$$

$$E = R^2 - R^2 \cdot D^2$$

$$F = a_2^2 - R^2 \cdot D^2$$

$$G = \sin\left(v \cdot \frac{t}{R} + \arccos\frac{|x_1|}{R}\right)$$

$$q_1(t) = \sqrt{R^2 - R^2 \cdot \cos^2\left(v \cdot \frac{t}{R} - \arccos\frac{|x_1|}{R}\right)} -$$

$$- \sqrt{a_2^2 - R^2 \cdot \cos^2\left(v \cdot \frac{t}{R} - \arccos\frac{|x_1|}{R}\right)}$$

$$\frac{d}{dt}q_1(t) = R \cdot D \cdot G \cdot \frac{v}{\sqrt{E}} - R \cdot D \cdot G \cdot \frac{v}{\sqrt{F}} = R \cdot D \cdot G \cdot \left(\frac{v}{\sqrt{E}} - \frac{v}{\sqrt{F}}\right)$$

$$\frac{d^2}{dt^2}q_1(t) = -R^2 \cdot D^2 \cdot G^2 \cdot \frac{v^2}{\sqrt{E^3}} - G^2 \cdot \frac{v^2}{\sqrt{E}} + D^2 \cdot \frac{v^2}{\sqrt{E}} + R^2 \cdot D^2 \cdot G^2 \cdot \frac{v^2}{\sqrt{F^3}} +$$

$$+ G^2 \cdot \frac{v^2}{\sqrt{F}} - D^2 \cdot \frac{v^2}{\sqrt{F}} = R^2 \cdot D^2 \cdot G^2 \cdot \left(\frac{v^2}{\sqrt{F^3}} - \frac{v^2}{\sqrt{E^3}}\right) + (D^2 - G^2) \cdot \left(\frac{v^2}{\sqrt{E}} - \frac{v^2}{\sqrt{F}}\right)$$

$$q_2(t) = \arcsin\left[\frac{R \cdot \cos\left(v \cdot \frac{t}{R} - \arccos\frac{|x_1|}{R}\right)}{a_2}\right]$$

$$\frac{d}{dt}q_2(t) = -G \cdot \frac{v}{\sqrt{F}}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}q_2(t) = -D \cdot \frac{v^2}{R \cdot \sqrt{F}} + R \cdot D \cdot G^2 \cdot \frac{v^2}{a_2^2 \cdot \sqrt{F}}$$

$$D = \cos\left(v \cdot \frac{t}{R} - \arccos\frac{|x_1|}{R}\right)$$

$$E = R^2 - R^2 \cdot D^2$$

$$F = a_2^2 - R^2 \cdot D^2$$

$$G = \sin\left(v \cdot \frac{t}{R} - \arccos\frac{|x_1|}{R}\right)$$