

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Тольяттинский государственный университет»

Кафедра Прикладная математика и информатика
(наименование)

01.03.02 Прикладная математика и информатика

(код и наименование направления подготовки / специальности)

Компьютерные технологии и математическое моделирование

(направленность (профиль) / специализация)

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА (БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА)

на тему «Построение алгоритма и решение задачи определения газодинамических параметров системы ВЭС в основной области численно методом СЭЛ»

Обучающийся

Е.В. Соколова

(Инициалы Фамилия)

(личная подпись)

Руководитель

доктор ф.-м. наук, профессор А.И. Сафронов

(ученая степень (при наличии), ученое звание (при наличии), Инициалы Фамилия)

Консультант

канд. филол. наук, М.В. Дайнеко

(ученая степень (при наличии), ученое звание (при наличии), Инициалы Фамилия)

Тольятти, 2025

Аннотация

Тема выпускной квалификационной работы: «Построение алгоритма и решение задачи определения газодинамических параметров системы ВЭС в основной области численно методом СЭЛ».

Выпускная квалификационная работа (ВКР) состоит из введения, трех глав, 14 рисунков, 1 таблицы, заключения, списка литературы из 20 источников, включая иностранные.

Целью работы является разработка и реализация численного алгоритма для определения газодинамических параметров выстрела эстафетной схемы (ВЭС) в основной рабочей области с использованием совместного Эйлера–Лагранжева метода (СЭЛ).

Объект исследования: внутрибаллистические газодинамические процессы, протекающие во время работы эстафетной схемы метания снаряда.

Предмет исследования: эстафетная схема метания снаряда на базе двухфазной двухскоростной смеси.

Выпускная квалификационная работа может быть разделена на три логически взаимосвязанные части: теоретические основы и математическое моделирование эстафетной схемы метания; разработка численных алгоритмов и приведение системы уравнений к разностному виду; программная реализация алгоритма, включая выбор языка программирования и анализ результатов моделирования.

Первая часть посвящена теоретическим основам и математическому моделированию эстафетной схемы метания. В неё входит постановка физической задачи, принятые допущения и вывод системы уравнений, описывающих газодинамические и реактивные процессы.

Вторая часть сосредоточена на разработке численных алгоритмов и приведении системы уравнений к разностной форме. Здесь проводится

дискретизация уравнений сохранения массы, импульса, энергии и химических превращений в рамках выбранной численной схемы.

Третья часть описывает программную реализацию численного алгоритма. В ней рассматриваются выбор языка программирования, структура программы и анализ результатов моделирования, таких как распределения давления и скорости, а также сравнение с ожидаемыми физическими характеристиками.

В заключение следует отметить, что результатом выпускной работы является не только программная реализация выстрела эстафетной схемы, но и общий численный алгоритм для определения газодинамических параметров с использованием совместного Эйлера–Лагранжева метода (СЭЛ).

Работа представляет интерес для широкого круга читателей, интересующихся решением задачи определения газодинамических параметров системы ВЭС в основной области численно методом СЭЛ

Abstract

The title of the graduation work is « Development of an algorithm and solution of the problem of determining the gas-dynamic parameters of the propulsion system in the main domain using the CEL numerical method. ».

The graduation work consists of an introduction, three parts, 14 figures, 1 table, a conclusion, and a list of 20 references including foreign sources.

The aim of the work is the development and implementation of a numerical algorithm for determining the gas-dynamic parameters of the relay-type launch scheme (RLS) in the primary working region using the combined Eulerian–Lagrangian method (CEL).

The object of the graduation work is intraballistic gas-dynamic processes occurring during the operation of the relay-type launch scheme.

The subject of the graduation work is relay projectile throwing scheme based on heterogeneous model.

The graduation work may be divided into three logically connected parts: the theoretical background and mathematical modeling of the relay launch scheme; the development of numerical algorithms and discretization of the governing equations; and the implementation of the computational algorithm, including the choice of programming language and the analysis of simulation results.

The first part presents the theoretical foundations and mathematical modeling of the relay-type launch scheme. It includes the formulation of the physical problem, the assumptions made, and the derivation of the governing equations describing the gas-dynamic and reactive processes

The second part focuses on the development of numerical algorithms and the transformation of the governing system of equations into finite-difference form. This includes the discretization of mass, momentum, energy, and chemical reaction equations within the chosen computational framework.

The third part describes the software implementation of the numerical algorithm. It includes the selection of the programming language, structure of the

code, and analysis of the simulation results, such as pressure and velocity distributions, and comparison with expected physical behavior.

In conclusion, it should be highlighted that the result of the graduation work is not only a software implementation of the relay-type launch scheme, but also a general numerical algorithm for determining the gas-dynamic parameters using the Combined Eulerian–Lagrangian (CEL) method.

The work is of interest for wide circle of readers interested in solving the problem of determining the gas-dynamic parameters of the propulsion system in the main domain using the CEL numerical method.

Содержание

Введение	8
1 Постановка задачи определения газодинамических параметров систем ...	10
1.1 Эстафетные схемы метания и модели газодинамического описания	10
1.2 Физическая постановка задачи	12
1.3 Обзор численных методов моделирования газодинамики	13
1.4 Математическая постановка задачи	19
2 Разработка алгоритма моделирования	24
2.1 Общие принципы построения алгоритма	24
2.2 Алгоритм моделирования газодинамики в стволе	26
2.3 Моделирование движения метаемого элемента	29
2.4 Учёт взаимодействия между газом и метаемым элементом (реакция среды).....	31
2.5 Алгоритм в системе Эйлеровых-Лагранжевых координат	33
2.6 Разностная форма уравнений.....	35
3 Программная реализация	43
3.1 Выбор языка программирования и общая структура программы	43
3.2 Описание основных структур данных	46
3.3 Функции и процедуры программной реализации	50
3.3.1 Функция инициализации параметров	50
3.3.2 Функции расчета термодинамических параметров	51
3.3.3 Функция основного шага по времени (updateGasDynamics())	52
3.3.4 Функция моделирования пули (updateBullet()).....	55

3.3.5	Интерполяционные функции (interpolatePressure(), interpolateGasState())	55
3.4	Результат работы программы	56
	Заключение	59
	Список используемой литературы	60

Введение

Совершенствование баллистических систем приобрело значительную актуальность в настоящее время. Исследование баллистических возможностей различных охотничьих систем необходимо для достижения наилучших результатов в их использовании. При исследовании этих возможностей одним из важнейших параметров является показатель дальности полёта снаряда, зависящий от скорости на срезе ствола. Для того чтобы провести исследование параметров баллистической системы нужно проводить исследование математических моделей процесса выстрела эстафетной схемы и проводить расчёты на основании этой модели.

Моделирование на основе газодинамического подхода позволяет рассматривать нестандартные схемы метания снаряда. Благодаря использованию этих схем происходит улучшение параметров выстрела за счёт изменения в конструкции снаряда и в области порохового заряда.

Схема с разделением заряда (эстафетная схема) является одной из таких нестандартных схем метания снаряда. Увеличение дальности стрельбы происходит за счёт обеспечения ею большого прироста начальной скорости метаемого элемента.

Актуальность данной работы обусловлена возрастающими требованиями к точности, надёжности и эффективности современных стрелковых систем, а также необходимостью сокращения сроков и стоимости их проектирования. В условиях быстрого технологического прогресса и усложнения конструкции оружия традиционные методы экспериментального баллистического анализа становятся экономически и временно затратными, а в ряде случаев – практически невозможными.

Целью данной выпускной квалификационной работы является разработка и реализация численного алгоритма для определения газодинамических параметров ВЭС в основной рабочей области с использованием совместного Эйлера-Лагранжева метода (СЭЛ).

Объектом исследования являются внутривалистические газодинамические процессы, протекающие во время работы эстафетной схемы метания снаряда.

Предметом исследования является эстафетная схема метания снаряда на базе гетерогенной модели.

Задачи исследования включают:

- изучение эстафетной схемы метания снаряда;
- исследование математической модели эстафетной схемы, описывающей основные энергетические и газодинамические процессы, протекающие во время работы схемы;
- программная реализация исследуемой математической модели;
- проведение вычислений на базе разработанной программы.

В первой главе описываются теоретические основы рассматриваемого вопроса и проводится построение математической модели эстафетной схемы метания.

Во второй главе проводится разработка алгоритмов моделирования метания и запись математической модели в разностном виде.

В третьей главе осуществляется подробное описание программной реализации, выбор языка программирования и анализ результатов работы программы.

1 Постановка задачи определения газодинамических параметров систем

1.1 Эстафетные схемы метания и модели газодинамического описания

Современные требования к эффективности и гибкости работы баллистических систем способствуют поиску и исследованию новых схем метания, выходящих за рамки классических одностадийных моделей. Одной из таких альтернатив является эстафетная (позапная) схема метания, в которой пороховой заряд разделён на несколько порций (камер), последовательно воспламеняющихся в процессе движения снаряда по каналу ствола.

В отличие от классической схемы, где весь заряд сгорает практически одновременно и создаёт пиковое давление на начальном участке канала, эстафетная схема позволяет распределить газодинамическое воздействие по длине ствола. Это обеспечивает более плавный рост давления, предотвращает резкие скачки и способствует достижению высокой начальной скорости снаряда без перегрузок на конструктивные элементы оружия.

«При использовании многокамерных систем с последовательным сгоранием пороха можно существенно увеличить энергетическую эффективность выстрела за счёт оптимизации давления вдоль канала ствола. Такой подход позволяет добиться лучшего согласования между фазами сгорания и перемещением метаемого элемента» [14] – утверждает Меньшиков А.А. в своей работу «Современные тенденции в баллистике и проектировании метательных систем».

Принцип работы поэтапной схемы заключается в следующем: основной заряд воспламеняется при выстреле, а по мере продвижения снаряда последовательно зажигаются дополнительные камеры, размещённые вдоль канала. Такое «эстафетное» зажигание может быть реализовано как за счёт

контакта с пульсирующим фронтом пламени, так и с использованием специальных пиротехнических замедлителей.

Таким образом, применение поэтапной (эстафетной) схемы метания требует отхода от традиционных термодинамических моделей и постановки задачи в более общем, газодинамическом виде. Это связано с необходимостью учёта пространственно-временного распределения давления, температуры, фронта горения и источников массы, возникающих при последовательном сгорании зарядов. Для описания таких процессов разработано несколько моделей, каждая из которых опирается на определённые физические допущения и уровень детализации.

1. Модель двухскоростной смеси (двухфазная модель).

Наиболее распространённой при моделировании нестационарных баллистических процессов является модель двухскоростной смеси, в которой порох рассматривается как дисперсная фаза в газообразной среде. Такие модели позволяют учитывать массу, скорость, температуру и взаимодействие твёрдой фазы (пороховых зёрен) с газовой. Как указывает Н.Н. Давыдов, «двухфазный подход обеспечивает более точное описание процессов горения пороха, особенно в нестационарных условиях, таких как эстафетное метание» [9].

2. Модель гетерогенной среды.

В более сложных постановках используется модель гетерогенной среды, в которой рассматриваются несколько взаимодействующих фаз с собственными уравнениями сохранения. Это позволяет учитывать различие в скоростях и давлениях фаз, инерционные эффекты и тепломассообмен между ними. Подобный подход актуален при моделировании многоступенчатого зажигания, где важны локальные эффекты взаимодействия пороховых газов и зёрен.

3. Однофазная газодинамическая модель.

В случаях, когда требуется упростить расчёты без существенной потери точности, применяется однофазная модель, в которой вся масса пороха

считается мгновенно превращённой в газ. Это допущение оправдано при высокой степени дисперсности заряда или при моделировании на поздних стадиях процесса, когда большая часть пороха уже сгорела.

4. Расширенные модели с учётом химической кинетики и теплопередачи.

При необходимости высокой точности или при изучении влияния параметров конструкции (например, материала ствола) применяются модели с учётом теплообмена между газами и стенками канала, теплопроводности зёрен и химической кинетики сгорания. Как отмечает Ю.Л. Шейнфельд, «включение тепловых эффектов в модель позволяет адекватно прогнозировать воспламенение в дополнительных камерах и поведение газа на границах фаз» [20].

Выбор конкретной модели зависит от цели исследования, доступных вычислительных ресурсов и требуемой точности. В настоящей работе используется модель двухфазной двухскоростной среды, адаптированная для эстафетной схемы метания с переменными источниками массы и энергии.

1.2 Физическая постановка задачи

Рассматривается одномерная модель внутренней баллистики выстрела эстафетной схемы (ВЭС), включающая камору, канал ствола и пулю. После последовательного воспламенения пороховых зарядов в камерах образуются горячие газы высокого давления, которые расширяются внутри замкнутого объёма ствола. Эти расширяющиеся газы оказывают давление на основание пули, вызывая её движение вдоль оси ствола.

Газ в модели рассматривается как сжимаемая, идеальная и невязкая среда, поведение которой описывается уравнениями газовой динамики. Пуля моделируется как твёрдое тело с постоянной массой, движущееся без деформаций и трения. В модели не учитываются тепловые потери и расход массы пороха. Воспламенение пороховых зарядов считается мгновенным, а

выделение энергии – равномерным по объёму каждой камеры. Заданы граничные условия: затвор с одного конца канала закрыт, пуля свободно перемещается с другого.

Цель моделирования – определить изменение давления, плотности и скорости газовой среды вдоль канала ствола, а также траекторию и кинематические характеристики пули во времени. Результаты анализа могут быть использованы для оценки эффективности выстрела по эстафетной схеме, а также для оптимизации параметров снаряда и зарядов.

1.3 Обзор численных методов моделирования газодинамики

В задачах внутренней баллистики, где необходимо учитывать быстрое течение сжимаемого газа, движение пули и переменные граничные условия, применяются несколько классов численных методов.

1. Классический Эйлера метод.

Эйлеров метод основывается на фиксированной пространственной сетке, через которую протекает вещество. Это означает, что сетка не движется вместе с газом – вместо этого отслеживаются потоки массы, импульса и энергии через границы ячеек. Метод широко используется в задачах аэродинамики, газодинамики и гидродинамики, где важны взаимодействия потоков и ударных волн.

Основные уравнений (уравнения Эйлера в консервативной форме) для одномерного сжимаемого газа:

Закон сохранения массы:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0. \quad (1)$$

Закон сохранения импульса:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2 + p)}{\partial x} = 0. \quad (2)$$

Закон сохранения энергии:

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial[u(E+p)]}{\partial x} = 0, \quad (3)$$

где ρ – плотность;

u - скорость;

p - давление;

$E = \rho e + \frac{1}{2} \rho u^2$ - полная энергия.

Особенностями данного метода являются то, что расчёт ведётся в Эйлеровом представлении, то есть в неподвижной системе координат; уравнения решаются в консервативной форму, что важно для соблюдения законов сохранения; могут применяться методы конечных объемов или конечных разностей.

Однако у данного метода присутствуют свои характерные ограничения, такие как трудности при учёте движущихся тел и необходимость ввода дополнительных условий, сеточных перестроек или переход к другим методам при наличии деформируемых или перемещающихся границ.

Классический Эйлеров метод находит своё применение в моделировании потоков газа в соплах и диффузорах.

2. Лагранжев метод.

В Лагранжевом подходе каждая точка расчетной сетки движется вместе с потоком вещества. Это позволяет точно отслеживать движение границ и интерфейсов, что особенно удобно при решении задач с подвижными границами и твердыми телами.

Данный метод использует те же законы сохранения, что и метод Эйлера, но переписанные в Лагранжевой форме (вдоль траектории частиц):

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (4)$$

$$\frac{Du}{Dt} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad (5)$$

$$\frac{De}{Dt} + \frac{p}{\rho} \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (6)$$

В данных уравнениях $\frac{D}{Dt}$ - полная производная по времени вдоль траектории.

Особенностями этого метода являются решение уравнений в нелинейной форме с использованием полной производной по времени и идеальной совместимостью для моделирования с объектами с сильной деформацией или большим перемещением.

Из ограничений Лагранжев метод включает в себя неустойчивость при образовании ударных волн без регулярной перестройки сетки и искажение сетки при больших деформациях среды.

Применяется данный метод в баллистике (движение тел внутри канала) и взрывной газодинамике при разрушении конструкции.

3. Метод ALE (Arbitrary Lagrangian-Eulerian).

Этот метод объединяет преимущества Эйлера и Лагранжева подходов, позволяя сетке двигаться произвольным образом: как полностью с потоком, так и независимо от него. Метод ALE особенно полезен в задачах с перемещающимися границами и сильными нелинейностями.

Обобщенная форма уравнений:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} - F_w = 0, \quad (7)$$

где F_w - поправка на движение сетки.

Данный метод обладает несколькими особенностями: гибкая подстройка сетки под физические процессы, а также необходимость формулировки уравнений с учетом движения сетки и пересчета потоков.

Ограничениями метода ALE являются повышенная вычислительная сложность и необходимость интерполяции данных при передвижении сетки.

Применяется этот метод во внутренних баллистических процессах и контакте газовых и твердых тел.

4. Метод произвольного разрыва.

Метод произвольного разрыва предназначен для точного отслеживания движущихся разрывов, таких как ударные волны, контакты и интерфейсы между фазами. Он сочетает фиксированную Эйлерову сетку для основной среды и отдельное представление интерфейсов в виде подвижных «фронтов», которые явно отслеживаются и корректируют потоки через них.

Преимущество метода – возможность очень точного моделирования динамики сложных разрывов без численных диффузий, характерных для классических методов. Недостатки – усложнённая реализация и высокая вычислительная нагрузка.

В основе метода лежит разделение области расчёта на области с гладкими решениями и отдельное явное отслеживание движущихся разрывов (фронтов). Рассмотрим уравнения газовой динамики в консервативной форме:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} = 0, \quad (8)$$

где U – вектор консервативных переменных (например плотность, импульс, энергия, $F(U)$ – поток.

Особенность метода – разрывы (ударные волны, контакты) не аппроксимируются на сетке численно, а представлены как явно отслеживаемые интерфейсы, положение которых задаётся функцией $s(t)$, описываемой уравнением скорости фронта:

$$\frac{ds(t)}{dt} = V_f, \quad (9)$$

где V_f – скорость фронта, вычисляемая из условий Римана и уравнений с сохранением.

На фронте применяются условия скачка (условия Римана), обеспечивающие связь значений переменных слева и справа от разрыва:

$$F(U^+) - F(U^-) = V_f(U^+ - U^-), \quad (10)$$

где U^- и U^+ – значения слева и справа от фронта.

Таким образом, численное решение совмещает традиционное решение на фиксированной сетке для гладких областей и явное обновление положения и состояния на движущихся фронтах. Это позволяет свести численную диффузию ударных волн к минимуму и повысить точность при моделировании сложной динамики разрывов.

Метод позволяет достигать второго порядка точности в гладких областях решения, так как решается классическая система уравнений газовой динамики с использованием высокоточных схем.

5. Совместный Эйлера-Лагранжев метод (СЭЛ).

Метод СЭЛ применяется при моделировании взаимодействия газа с движущимися твердыми телами, такими как снаряды, пули и клапаны. Он сочетает фиксированную сетку для газовой среды и лагранжеву траекторию для твердых тел.

В типичной постановке задачи данного метода решается система уравнений Эйлера в области $x \in [0, x_p(t)]$, где $x_p(t)$ – положение пули, определяемое уравнением движения:

$$m \frac{d^2 x_p}{dt^2} = A * p(x_p(t), t), \quad (11)$$

где m – масса пули;

A – площадь основания метаемого элемента;

$p(x_p(t), t)$ – давление в газе на границе.

Из особенностей метода СЭЛ можно выделить следующие: газ описывается на Эйлеровой сетке; твердое тело отслеживается как Лагранжев элемент с собственной траекторией; на границе фаз вводятся граничные условия, связывающие газовые параметры с уравнением движения твердого тела.

В большинстве реализаций метод обеспечивает второй порядок точности во времени и пространстве, что позволяет достаточно точно моделировать динамику газовой среды и движение пули.

Из ограничений существуют следующие: необходимость точного согласования физических условий на границе и повышенные требования к точности и устойчивости численного метода.

Таким образом, каждый из рассмотренных методов численного моделирования газодинамики имеет свою нишу применения и особенности реализации. Однако при моделировании внутренних баллистических процессов – где необходимо одновременно учитывать движение твердого тела (пули), быстрое изменение давления и переменные границы – особое внимание заслуживают два подхода: метод произвольного разрыва и совместный Эйлерово-Лагранжев метод (СЭЛ).

Метод произвольного разрыва обеспечивает высокую точность в описании ударных волн и контактных разрывов за счёт явного отслеживания фронтов. Он эффективен в задачах, где структура потока чётко разделена на гладкие и разрывные области. Однако его применение в задачах с динамически меняющимися границами и взаимодействием газа с

движущимися телами требует значительных усилий по реализации и может снижать устойчивость решения.

В отличие от него, метод СЭЛ изначально ориентирован на моделирование подвижных границ и взаимодействие фаз. Он позволяет точно описывать движение твердого тела внутри газовой среды без необходимости явного выделения фронтов, интегрируя их поведение через граничные условия. Это делает метод СЭЛ более естественным и устойчивым выбором при моделировании процессов метания, порохового горения и других задач внутренней баллистики. Поэтому этот метод рассматривается в данной задаче.

1.4 Математическая постановка задачи

Моделирование процессов, происходящих во время выстрела в винтовочно-энергетической системе (ВЭС), представляет собой задачу сопряжённой газодинамики и механики движения твёрдого тела с перемещающейся границей раздела. В рассматриваемой системе необходимо описать течение сжимаемого газа, возникающего при сгорании порохового заряда, а также взаимодействие этого газа с пулей, которая под действием давления начинает движение вдоль канала ствола.

В основе лежит однородная одномерная модель, описывающая нестационарные процессы истечения газа, воспламенения порохового заряда и движения пули в стволе.

Для построения математической модели задачи принимаются следующие физические допущения:

- течение газа одномерное и квазистационарное по поперечному сечению ствола;
- движение газа и пули рассматривается в рамках оси ствола, поперечные составляющие пренебрежимо малы;
- теплоотдача к стенкам и между компонентами среды не учитывается;

- газ считается идеальным, а порох сгорает по заданному закону горения;
- волна воспламенения распространяется мгновенно в пределах пороховой камеры;
- частицы пороха несжимаемы, и их движение до воспламенения не рассматривается;
- сопротивление воздуха, трение и утечки газа через зазор между пулей и стволом не учитываются;
- до выхода пули из ствола давление газа считается равномерным в каждой ячейке по Эйлерово-Лагранжевой сетке;
- взаимодействие газа с пулей описывается через давление на донную поверхность и закон сохранения импульса.

В настоящей работе используется одномерная модель внутренней баллистики, описываемая системой уравнений (1)–(8), включающей уравнения сохранения массы, импульса и энергии газовой фазы, уравнения массы и энергии твёрдой фазы (пороха), уравнение теплопереноса и состояния, закон горения и зависимости для коэффициентов.

Модель учитывает теплообмен, массу сгораемого пороха, изменение плотности газа и кинетику воспламенения с использованием зависимости для доли сгоревшего объёма и эмпирических коэффициентов.

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho s \varphi) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u s \varphi) = M, \quad (12)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho s \varphi u) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho s \varphi u^2 + p s \varphi) = M \omega - \tau_{TP} + p \frac{\partial s \varphi}{\partial x} - N \rho S \varphi \frac{du_D}{dt}, \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho S \varphi E) + \frac{\partial}{\partial x}(S \varphi u (\rho E + p)) = & -p \frac{\partial(1-\varphi) S \omega}{\partial x} - \\ & - \tau_{TP} \omega + M \left(Q + \frac{\omega^2}{2} \right) - N \rho S \varphi u \frac{du_D}{dt}, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_2(1-\varphi)S) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_2(1-\varphi)S\omega) = -M, \quad (15)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_2(1-\varphi)S\omega) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_2(1-\varphi)S\omega^2) + (1-\varphi)S \frac{\partial p}{\partial x} = \quad (16)$$

$$= \tau_{TP} - M\omega - N\rho_2(1-\varphi)S \frac{du_{\Pi}}{dt},$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} + \omega \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{a_1 p}{e_b}, \quad (17)$$

$$P\left(\frac{1}{\rho} - \alpha\right) = RT, \quad (18)$$

$$E = \varepsilon + \frac{u^2}{2}, \quad (19)$$

$$\varphi = 1 - n\Lambda_0(1 - \varphi(z)), \quad (20)$$

$$\psi(z) = \kappa_1 z(1 + \lambda_1 z), \quad (21)$$

$$M = SnS_{02}\rho_2\sigma(z)a_1p, \quad (22)$$

$$\sigma(z) = 1 + 2\lambda_1 z, \quad (23)$$

$$\tau_{TP} = \frac{1}{2} C_x \rho(u-\omega)|u-\omega| S_n \frac{\pi d_{op}^2}{4} (1-\psi(z))^{\frac{2}{3}}, \quad (24)$$

$$C_x = \begin{cases} \frac{24}{Re} + 0.48, & 0 < Re < 3 \cdot 10^5 \\ 0.1, & Re \geq 3 \cdot 10^5 \end{cases}, \quad (25)$$

$$Re = \frac{\rho|u-\omega|\varphi\sqrt{S_{02}}}{\mu}. \quad (26)$$

Граничные условия:

$$u(0,t) = w(0,t) = 0, \quad u(x_D,t) = w(x_D,t) = u_D, \quad (27)$$

$$u'(0,t) = w'(0,t) = 0, \quad u'(x'_s,t) = w'(x'_s,t) = u'_s.$$

Рассматривается одномерная модель движения пули в канале ствола, поэтому область определения:

$x \in [0, x_p(t)]$, где $x=0$ – дно гильзы, $x= x_p(t)$ – положение пули в момент времени t .

Для описания поведения пороховых газов используется система уравнений Эйлера для сжимаемого газа в консервативной форме:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} = 0, \quad x \in [0, x_p(t)], \quad t > 0, \quad (28)$$

где $U = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ E \end{pmatrix}$ – вектор консервативных переменных: плотность, импульс и полная энергия;

$$F(U) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ u(E + p) \end{pmatrix} \text{ – вектор потоков.}$$

Уравнение состояния идеального газа:

$$p = (\gamma - 1) \left(E - \frac{1}{2} \rho u^2 \right), \quad (29)$$

где γ – показатель адиабаты.

Пуля моделируется как твердое тело, движение которого подчиняется второму закону Ньютона:

$$m \frac{d^2 x_p}{dt^2} = A * p(x_p(t), t), \quad (30)$$

где m – масса пули;

A – площадь основания пули.

Эта система уравнений является гиперболической с подвижной границей, что требует применения специальных численных методов для устойчивого и точного решения, таких как совместный Эйлера-Лагранжев

подход (СЭЛ), обеспечивающий согласованное описание газовой фазы и движения твердого тела.

Условия в начальный момент времени:

$$\begin{aligned}x_p(0)=x_0, \quad \frac{dx_p}{dt}(0)=0, \quad \rho(x,0)=\rho_0(x), \\ u(x,0)=0, \quad p(x,0)=p_0(x).\end{aligned}\tag{31}$$

Граничные условия:

На $x=0$: симметрия или твердая стенка (нулевая скорость)

На $x=x_p(t)$: согласование давления газа и движения пули (аналогично уравнению выше).

Таким образом, в данном разделе были рассмотрены теоретические основы вопроса данной выпускной квалификационной работы, а также было проведено построение математической модели эстафетной схемы метания, что позволяет перейти к разработке алгоритма моделирования.

2 Разработка алгоритма моделирования

2.1 Общие принципы построения алгоритма

В данной работе разрабатывается алгоритм численного моделирования газодинамических процессов, протекающих внутри ствола в момент выстрела эстафетной схемы (ВЭС). Целью моделирования является воспроизведение поведения газообразных продуктов сгорания метательного заряда и динамики пули под их воздействием.

Для описания взаимодействия газовой среды и снаряда применяется метод комбинированного описания, основанный на системе Эйлеровых–Лагранжевых координат (СЭЛ). Такой подход позволяет отдельно, но согласованно моделировать два физических объекта:

- газовая среда (продукты сгорания пороха) описывается в Эйлеровых координатах – относительно неподвижной расчетной сетки, фиксированной в пространстве;
- метаемый элемент, обладающий инерцией и движущийся вдоль канала ствола, описывается в Лагранжевых координатах – как материальная точка, положение которой отслеживается во времени.

Это сочетание обеспечивает высокую точность описания как газодинамики, так и баллистики внутри ствола.

Алгоритм моделирования представляет собой поэтапное численное решение уравнений газовой динамики и уравнений движения. Он реализован в виде C++ программы (см. раздел 3), в которой расчёт производится пошагово во времени: начиная от начального состояния до выхода пули из ствола.

На каждом временном шаге осуществляется.

1. Обновление параметров газовой среды по дискретной форме уравнений Эйлера (масса, импульс, энергия).
2. Вычисление давления и других производных параметров (температура, скорость, скорость звука).

3. Интерполяция давления в точке нахождения пули для определения результирующей силы.
4. Вычисление ускорения пули и обновление её положения и скорости.
5. Корректировка импульса газа, переданного от пули (реакция среды).
6. Проверка условий завершения моделирования (время, выход пули, падение давления).

Структурно алгоритм можно разбить на такие логические этапы как инициализация, расчёт параметров газа, моделирование движения метаемого элемента, учёт обратного воздействия, завершение расчёта. Каждый из этих этапов обладает своими задачами.

1. Инициализация:

- задание геометрических и физических параметров: длина ствола, сетка, масса и площадь пули;
- задание начального распределения давления, температуры и плотности газа;
- пуля инициализируется в положении у казённого со скоростью, равной нулю.

2. Расчёт параметров газа:

- применяется симметричная разностная схема с разнесенными слоями для численного интегрирования уравнений Эйлера;
- вычисляются потоки массы, импульса и энергии между ячейками;
- производится защита от некорректных значений (например, отрицательного давления или плотности).

3. Моделирование движения метаемого элемента:

- определяется давление газа в точке, соответствующей основанию пули;
- рассчитывается сила давления, действующая на пулю;
- положение и скорость пули обновляются по уравнению второго закона Ньютона.

4. Учёт обратного воздействия:

- реализация закона сохранения импульса: реактивная сила пули передаётся обратно газовой среде;
- обновление импульса соответствующей ячейки.

5. Завершение расчёта:

- моделирование прекращается при выходе метаемого элемента из канала или достижении граничных условий.

Таким образом, разрабатываемый алгоритм реализует двустороннюю связь между течением газа и движением пули, объединяя газодинамические и баллистические модели в рамках единой системной схемы. Он отражает ключевые физические процессы, протекающие в момент выстрела, и может служить основой для расширенного моделирования, включая учет теплового режима, трения или процессов горения.

2.2 Алгоритм моделирования газодинамики в стволе

Алгоритм моделирования процессов в стволе при выстреле эстафетной схемы базируется на решении уравнений газовой динамики в дискретной форме с использованием симметричной разностной схемы с разнесенными слоями. Основное внимание уделяется моделированию потока сжимаемого газа внутри канала ствола, на который дополнительно накладываются условия взаимодействия с движущимся метаемым элементом. Такой подход позволяет учитывать нестационарные эффекты, возникающие при выстреле, и динамику распространения давления.

1. Пространственно-временная дискретизация.

Расчетная область – ствол длиной $L = 1$ м – разбивается на равномерную сетку из $N = 121$ ячейки. Шаг по пространству $h = L/N$, временной шаг Δt вычисляется автоматически на каждом шаге интегрирования по условию устойчивости (число Куранта):

$$\Delta t = \frac{C_{CFL} * h}{\max_i(|u_i| + c_i)}, \quad (32)$$

где u_i – скорость газа в ячейке i ;

c_i – локальная скорость звука;

$C_{CFL}=0.4$ – коэффициент устойчивости.

2. Представление газовой среды.

В каждой ячейке отслеживаются консервативные переменные:

ρ – плотность;

$m = \rho u$ – импульс;

E – полная энергия.

Из них через уравнения состояния и кинетические соотношения восстанавливаются давление p , температура T , скорость u и скорость звука c :

$$p = (\gamma - 1) * \left(E - \frac{1}{2} \rho u^2 \right), \quad T = \frac{p}{\rho R}, \quad c = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}}. \quad (33)$$

3. Центральная разностная схема с разнесенными слоями.

Для внутренних ячеек используется численная центральная разностная схема с разнесенными слоями, обеспечивающая устойчивое и простое аппроксимирование потоков. Потоки масс, импульса и энергии вычисляются как:

$$F = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ (E + p)u \end{pmatrix}. \quad (34)$$

Рекуррентное обновление значений в ячейках производится по формуле:

$$U_i^{n+1} = \frac{1}{2} (U_{i+1}^n + U_{i-1}^n) - \frac{\Delta t}{2h} (F_{i+1}^n - F_{i-1}^n), \quad (35)$$

где U_i – вектор консервативных переменных.

4. Граничные условия.

Левая граница (затвор): неподвижная, отражающая – скорость газа обнуляется.

Правая граница (дуло): открытая – давление приравнивается к атмосферному, остальные параметры экстраполируются.

Дополнительно проводится коррекция давления и энергии на границах, чтобы предотвратить неустойчивость и физически недопустимые значения.

5. Обратная связь от метаемого элемента.

Метаемый элемент моделируется как лагранжева частица с массой и площадью. Он перемещается под действием давления со стороны газа. Давление интерполируется в текущем положении метаемого элемента и используется для расчета силы:

$$F = p_{\text{пули}} * A, \quad a = \frac{F}{m_{\text{пули}}}, \quad (36)$$

где A – площадь донной поверхности.

Обратная реакция передается газу в виде изменения импульса в соответствующей ячейке:

$$\Delta m = -F * \Delta t. \quad (37)$$

Таким образом, реализуется двухсторонняя связь между газом и движущимся метаемым элементом.

6. Адаптация под СЭЛ.

Хотя газ моделируется в Эйлеровых координатах (фиксированная

сетка), метаемый элемент – в Лагранжевых. Это создает комбинированную систему, где информация о движении передаётся через граничные ячейки и интерполяцию параметров. Такая гибридная модель сохраняет точность и обеспечивает реалистичную эволюцию потока с учётом подвижных границ.

7. Устойчивость и физическая коррекция.

В алгоритмы встроены механизмы защиты от неустойчивых решений:

- минимальное давление ограничено снизу (> 100 Па);
- минимальная плотность ограничена ($> 10^{-6}$ кг/м³);
- в случае отрицательной внутренней энергии производится корректировка энергии на основе восстановленного давления.

2.3 Моделирование движения метаемого элемента

Моделирование движения пули в рамках выстрела эстафетной схемы (ВЭС) реализуется на основе второго закона Ньютона, с учетом давления газов, действующих на донную часть пули. Движение рассматривается как одномерное поступательное вдоль оси канала ствола. Пуля описывается в Лагранжевых координатах, что позволяет точно отслеживать её положение, скорость и ускорение во времени.

1. Исходные данные пули.

Пуля характеризуется следующими параметрами:

- масса $m_{\text{пули}}$ (в кг);
- площадь донной поверхности A (в м²);
- начальное движение x_0 (в м);
- начальная скорость $U_0 = 0$.

2. Сила давления со стороны газов.

На дно пули действует давление $p_{\text{газ}}$, определяемое в ближайшей к пуле ячейке газовой среды. Величина силы, действующей на пулю, определяется как:

$$F = p_{\text{газ}} * A. \quad (38)$$

Это давление вычисляется через интерполяцию или прямое обращение к ячейке, в которой расположена граница раздела между газом и пулей.

3. Уравнение движения пули.

Уравнение второго закона Ньютона в данной задаче принимает вид:

$$a = \frac{F}{m_{\text{пули}}} = \frac{p_{\text{газ}} * A}{m_{\text{пули}}}. \quad (39)$$

После чего положение и скорость пули обновляются по формулам:

$$v_{\text{пули}}^{n+1} = v_{\text{пули}}^n + a * \Delta t, \quad (40)$$

$$x_{\text{пули}}^{n+1} = x_{\text{пули}}^n + v_{\text{пули}}^{n+1} * \Delta t. \quad (41)$$

Эти формулы представляют из себя простую схему Эйлера для численного интегрирования уравнений движения.

4. Корректировка граничной ячейки.

Поскольку пуля движется вперёд, граничная ячейка газовой сетки, расположенная перед пулей, изменяет свой объём. Это требует перерасчета:

- объема ячейки;
- массы, находящейся в ней;
- давления и плотности, если используется метод СЭЛ.

Таким образом, пуля «вытесняет» газ, изменяя геометрию расчетной области. Эти изменения учитываются в методе пересчета газодинамических параметров.

5. Энергетическая связь с газами.

При ускорении пули часть энергии газов переходит в кинетическую энергию пули. Для соблюдения закона сохранения энергии, эта потеря

учитывается в уравнении полной энергии в газовой среде. Если используется простой подход, можно корректировать энергию в граничной ячейке:

$$E_i^{n+1} = E_i^{n+1} - \Delta E_{\text{пули}}, \Delta E_{\text{пули}} = \frac{1}{2} m_{\text{пули}} (\vartheta^{n+1})^2 - (\vartheta^n)^2. \quad (42)$$

6. Условие выхода пули.

Моделирование движения пули продолжается до тех пор, пока:

$$x_{\text{пули}} < L.$$

где L – длина канала ствола. После выхода пули за пределы расчетной области либо по достижении нулевого давления, расчет завершается.

2.4 Учёт взаимодействия между газом и метаемым элементом (реакция среды)

В процессе движения пули внутри канала ствола происходит не только одностороннее воздействие газов на пулю, но и обратное влияние пули на газовую среду. Это взаимодействие реализуется в рамках закона сохранения импульса: ускорение пули вызывает соответствующее изменение импульса в ближайшей ячейке газа, прилегающей к донной поверхности пули. Такой обмен обеспечивает физически корректное моделирование динамики системы в целом.

Пуля движется под действием давления $p_{\text{пули}}$, создаваемого газами на её донной поверхности. В свою очередь, ускорение пули приводит к реактивной передаче импульса от твёрдого тела обратно в газовую среду. Это взаимодействие реализуется следующим образом:

$$\Delta m = -F \cdot \Delta t = -p_{\text{пули}} \cdot A \cdot \Delta t, \quad (43)$$

где Δm – изменение импульса в ячейке газа;

$F = p_{\text{пули}} * A$ – сила давления со стороны газа;

Δt – шаг по времени;

A – площадь донной поверхности пули.

Изменение импульса со знаком минус прибавляется к газовой ячейке, примыкающей к пуле, тем самым моделируя реактивный эффект.

В результате передачи импульса также происходит обмен энергией. Ускорение пули сопровождается ростом её кинетической энергии, которая по физическому смыслу должна вычитаться из энергии газов. Это реализуется через корректировку полной энергии в граничной ячейке:

$$\Delta E_{\text{пули}} = \frac{1}{2} m_{\text{пули}} (v^{(n+1)})^2 - (v^{(n)})^2, \quad (44)$$

$$E_i^{(n+1)} := E_i^{(n+1)} - \Delta E_{\text{пули}}, \quad (45)$$

где $m_{\text{пули}}$ – масса пули;

$v^{(n)}, v^{(n+1)}$ – скорость пули на текущем и следующем шаге;

E_i – полная энергия в ячейке газа, примыкающей к пуле.

Такая корректировка позволяет сохранить общее количество энергии в системе взаимодействия газа и пули.

По мере движения пули изменяется положение её донной поверхности, что фактически ведёт к сжатию или расширению объёма ближайшей ячейки газа. Это изменение влияет на её физические параметры и требует обновления геометрических размеров ячейки, объёма и плотности, давления и энергии, с учетом пересчёта массы и внутренней энергии.

В модели, реализованной методом СЭЛ, граничная ячейка может интерпретироваться как подвижная, с переменной длиной, зависящей от координаты пули. При этом положение пули обновляется каждый временной

шаг, а физические параметры в примыкающей ячейке пересчитываются в соответствии с новой геометрией.

2.5 Алгоритм в системе Эйлеровых-Лагранжевых координат

Для корректного описания нестационарных процессов, протекающих в стволе ВЭС при выстреле, применяется гибридный подход – система Эйлеровых–Лагранжевых координат (СЭЛ). Такой подход позволяет одновременно учитывать как движение газа в неподвижной расчетной сетке, так и перемещение пули, обладающей инерцией и действующей на газовую среду.

Газообразные продукты сгорания метательного заряда моделируются в Эйлеровых координатах – то есть относительно фиксированной расчетной сетки, привязанной к пространству. Это обеспечивает эффективное решение уравнений газовой динамики (уравнения Эйлера) с помощью центральной разностной схемы с разнесенными слоями.

На каждом временном шаге происходит:

- обновление консервативных переменных (масса, импульс, энергия);
- вычисление потоков между ячейками;
- корректировка граничных условий;
- контроль устойчивости (через критерий Куранта).

Эта часть алгоритма отвечает за моделирование распространения ударной волны, сжатия и расширения газа, а также за расчёт давления, действующего на пулю.

Метаемый элемент моделируется как материальная точка, движущаяся под действием газового давления. Для него используется Лагранжева система координат, в которой отслеживаются переменные, связанные с положением, скоростью и ускорением объекта.

Каждый временной шаг включает:

- определение давления, действующего на донную часть пули (по интерполяции из газовой сетки);
- расчёт ускорения по второму закону Ньютона;
- обновление координаты и скорости пули;
- проверку выхода пули из ствола (условие завершения моделирования).

Ключевая особенность СЭЛ – двусторонняя связь между газом и пулей:

- газ оказывает давление на пулю, заставляя её двигаться вперёд;
- пуля, в свою очередь, передаёт газу реактивную силу, изменяя импульс и энергию в ближайшей ячейке;
- геометрия граничной ячейки пересчитывается с учетом нового положения пули, что влияет на объём, массу и плотность.

Такой обмен информацией реализован через следующие процедуры:

1. Интерполяция давления газа на координату метаемого элемента;
2. Расчёт силы и ускорения метаемого элемента;
3. Обратная передача импульса и энергии газовой ячейке;
4. Геометрическая коррекция граничной области;
5. Согласование временных шагов между Эйлеровой и Лагранжевой компонентами.

Использование системы Эйлеровых–Лагранжевых координат позволяет точно моделировать движение границы раздела «газ–твёрдое тело», учитывать взаимное влияние газа и пули на основе физических законов, избежать искажений, характерных для методов с неподвижными граничными условиями, сохранять устойчивость и точность при больших градиентах давления и плотности.

В отличие от полностью Эйлера или Лагранжева подхода, комбинированная схема СЭЛ обеспечивает баланс между вычислительной эффективностью и физической достоверностью, особенно в задачах внутренней баллистики, где подвижные границы играют ключевую роль.

2.6 Разностная форма уравнений

Ниже приведена общая система газодинамических уравнений для заряда, состоящего из зерновых порохов

$$\frac{\partial \rho m S}{\partial t} + \frac{\partial \rho m S \vartheta}{\partial x} = S G, \quad (46)$$

$$\frac{\partial a S}{\partial t} + \frac{\partial a S w}{\partial x} = 0, \quad (47)$$

$$\frac{\partial \rho m S \vartheta}{\partial t} + \frac{\partial \rho m S \vartheta^2}{\partial x} = -m S \frac{\partial p}{\partial x} + S G w - S \tau_w - \Pi_c \tau_{1c}, \quad (48)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \delta(1-m) S w}{\partial t} + \frac{\partial \delta(1-m) S w^2}{\partial x} = \\ & = -(1-m) S \frac{\partial p}{\partial x} - S G w + S \tau_w - \Pi_c \tau_{2c}, \end{aligned} \quad (49)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \rho m \varepsilon S}{\partial t} + \frac{\partial \rho m \varepsilon S \vartheta}{\partial x} = \\ & = p \frac{\partial [m S \vartheta + (1-m) S m]}{\partial x} + S G \left[Q + \frac{(\vartheta - w)^2}{2} \right] + \\ & + S \tau_w (\vartheta - w) + \Pi_c \tau_c \vartheta - \Pi_c q_c, \end{aligned} \quad (50)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + w \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{S_0}{\Lambda_0} \sigma(\psi) u_k, \quad (51)$$

$$m = 1 - a \Lambda_0 (1 - \psi), \quad (52)$$

$$p(1 - \alpha p) = \theta \rho \varepsilon, \quad (53)$$

где p —давление газа;

ϑ —скорость газа;

w —скорость фронта горения/частиц;

S —площадь канала;

m — массовая доля сгоревшего пороха;

ψ —степень сгорания (от 0 до 1) ;

ρ – плотность газа;

δ – плотность пороха;

Q – тепловой эффект сгорания;

σ, u_k – функции скорости горения;

Π_c, τ_c, τ_e – потери, теплообмен и теплоемкость.

Уравнение (46) – закон сохранения массы газа, где правая часть – это источник массы за счёт сгорания пороха (G – интенсивность горения);

Уравнение (47) – уравнение сохранения площади канала, используется для учёта движения границы зарядов (фронта горения);

Уравнение (48) – закон сохранения импульса газа, где левая часть – изменение импульса, а правая – изменение силы давления, реактивная отдача, трение, потери;

Уравнение (49) – уравнение движения несгоревших частиц, описывающее движение несплошной фазы (частиц пороха), подверженная также действию давления и трения;

Уравнение (50) – закон сохранения энергии;

Уравнение (51) – кинетическое уравнение сгорания пороха, описывающее, как изменяется степень ψ во времени и пространстве;

Уравнение (52) – уравнение связи между долей сгоревшего пороха и степенью сгорания;

Уравнение (53) – уравнение состояния, с учётом сжимаемости газа и нелинейной зависимости давления от плотности и энергии.

Как итог, данная система представляет из себя расширенную модель внутренней баллистики, учитывающей движение газа и твердых частиц, сгорание пороха, теплообмен, трение, потери, изменяющуюся геометрию и сложное уравнение состояния.

Для численного решения системы уравнений газовой динамики используется явная разностная центральная разностная схема с разнесенными слоями.

Для численного решения система уравнений представляется в разностной (дискретной) форме. Это необходимо для следующих задач:

- аппроксимации производных с использованием конечных разностей;
- реализации схемы на ЭВМ;
- контроля устойчивости (например, по критерию Куранта–Фридрихса–Леви);
- итерационного пошагового расчёта по времени.

Выбор явной центральной разностной схемы с разнесенными слоями обусловлен её простотой и стабильностью при выполнении CFL-условия. Для моделирования с подвижной границей и двухфазной средой схема была адаптирована под СЭЛ (Система Эйлеровых–Лагранжевых координат), что позволяет учитывать перемещение сетки и фазовой границы.

Переведём все уравнения к разностной форме по порядку. Для этого введём несколько обозначений для разностной сетки:

i – индекс по пространству;

n – индекс по времени;

Δx – шаг по пространству;

Δt – шаг по времени.

Начнём с уравнения (46), аппроксимируем производные:

$$\frac{\partial(\rho m S)}{\partial t} \approx \frac{(\rho m S)_i^{n+1} - (\rho m S)_i^n}{\Delta t}, \quad (54)$$

$$\frac{\partial(\rho m S \vartheta)}{\partial x} \approx \frac{(\rho m S \vartheta)_i^n - (\rho m S \vartheta)_{i-1}^n}{\Delta x}. \quad (55)$$

Получаем разностное уравнение:

$$\frac{(\rho m S)_i^{n+1} - (\rho m S)_i^n}{\Delta t} + \frac{(\rho m S \vartheta)_i^n - (\rho m S \vartheta)_{i-1}^n}{\Delta x} = S_i^n G_i^n. \quad (56)$$

Умножим всё на Δt , чтобы выразить новую величину:

$$(\rho m S)_i^{n+1} = (\rho m S)_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [(\rho m S \vartheta)_{i+1}^n - (\rho m S \vartheta)_i^n] + \Delta t * S_i^n G_i^n. \quad (57)$$

Переходим к аппроксимации производных уравнения переноса площади пороха (47):

$$\frac{\partial(aS)}{\partial t} \approx \frac{(aS)_i^{n+1} - (aS)_i^n}{\Delta t}, \quad (58)$$

$$\frac{\partial(aSw)}{\partial x} \approx \frac{(aSw)_i^n - (aSw)_{i-1}^n}{\Delta x}. \quad (59)$$

После чего подставляем в уравнение и получаем:

$$\frac{(aS)_i^{n+1} - (aS)_i^n}{\Delta t} + \frac{(aSw)_i^n - (aSw)_{i-1}^n}{\Delta x} = 0. \quad (60)$$

Умножим на Δt и выразим значение на новом временном слое:

$$(aS)_i^{n+1} = (aS)_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [(aSw)_{i+1}^n - (aSw)_i^n]. \quad (61)$$

Для уравнения (48) аппроксимируем производные по времени, пространству и давлению:

$$\frac{\partial(\rho m S \vartheta)}{\partial t} \approx \frac{(\rho m S \vartheta)_i^{n+1} - (\rho m S \vartheta)_i^n}{\Delta t}, \quad (62)$$

$$\frac{\partial(\rho m S \vartheta^2)}{\partial x} \approx \frac{(\rho m S \vartheta^2)_i^n - (\rho m S \vartheta^2)_{i-1}^n}{\Delta x}. \quad (63)$$

Подставляя в уравнение, получаем:

$$\begin{aligned} & \frac{(\rho m S \vartheta)_i^{n+1} - (\rho m S \vartheta)_i^n}{\Delta t} + \frac{(\rho m S \vartheta^2)_i^n - (\rho m S \vartheta^2)_{i-1}^n}{\Delta x} = \\ & = -m_i^n S_i^n * \frac{p_i^n - p_{i-1}^n}{\Delta x} + S_i^n G_i^n w_i^n - S_i^n T_{w,i}^n - \Pi_{c,i}^n \tau_{lc,i}^n. \end{aligned} \quad (64)$$

Обе части уравнения умножаем на Δt и получаем итоговое уравнение вида:

$$\begin{aligned} (\rho m S \vartheta)_i^{n+1} &= (\rho m S \vartheta)_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[(\rho m S \vartheta^2)_{i+1}^n - (\rho m S \vartheta^2)_i^n \right] + \\ &+ \Delta t \left[-m_i^n S_i^n \frac{p_{i+1}^n - p_i^n}{\Delta x} + S_i^n G_i^n w_i^n - S_i^n T_{w,i}^n - \Pi_{c,i}^n \tau_{lc,i}^n \right]. \end{aligned} \quad (65)$$

Аппроксимация уравнения (49) выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial[\delta(1-m)Sw]}{\partial t} \approx \frac{[\delta(1-m)Sw]_i^{n+1} - [\delta(1-m)Sw]_i^n}{\Delta t}, \quad (66)$$

$$\frac{\partial[\delta(1-m)Sw^2]}{\partial t} \approx \frac{[\delta(1-m)Sw^2]_i^{n+1} - [\delta(1-m)Sw^2]_i^n}{\Delta t}, \quad (67)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} \approx \frac{p_i^n - p_{i-1}^n}{\Delta x}. \quad (68)$$

В исходном уравнении вводим замену, получаем:

$$\frac{\partial \delta(1-m)Sw}{\partial t} + \frac{\partial \delta(1-m)Sw^2}{\partial t} = \quad (69)$$

$$\begin{aligned}
&= -(1-m) S \frac{\partial p}{\partial x} - SGw + S\tau_w - \Pi_c \tau_{2c}, \\
&\frac{[\delta(1-m)Sw]_i^{n+1} - [\delta(1-m)Sw]_i^n}{\Delta t} + \\
&+ \frac{[\delta(1-m)Sw^2]_i^{n+1} - [\delta(1-m)Sw^2]_i^n}{\Delta t} = \\
&= -(1-m_i^n) S_i^n \frac{p_{i+1}^n - p_i^n}{\Delta x} + S_i^n G_i^n w_i^n - S_i^n T_{w,i}^n - \Pi_{c,i}^n \tau_{2c,i}^n.
\end{aligned} \tag{70}$$

Выражаем $[\delta(1-m)Sw]_i^{n+1}$:

$$\begin{aligned}
&[\delta(1-m)Sw]_i^{n+1} = [\delta(1-m)Sw]_i^n - \\
&- \frac{\Delta t}{\Delta x} [(\delta(1-m)Sw^2)_{i+1}^n - (\delta(1-m)Sw^2)_i^n] + \\
&+ \Delta t \left[-(1-m_i^n) S_i^n \frac{p_{i+1}^n - p_i^n}{\Delta x} + S_i^n G_i^n w_i^n - S_i^n T_{w,i}^n - \Pi_{c,i}^n \tau_{2c,i}^n \right].
\end{aligned} \tag{71}$$

Аппроксимируем элементы уравнения закона сохранения энергии (50):

$$\frac{\partial(\rho m \epsilon S)}{\partial t} \approx \frac{(\rho m \epsilon S)_i^{n+1} - (\rho m \epsilon S)_i^n}{\Delta t}, \tag{72}$$

$$\frac{\partial(\rho m \epsilon S \vartheta)}{\partial x} \approx \frac{(\rho m \epsilon S \vartheta)_i^n - (\rho m \epsilon S \vartheta)_{i-1}^n}{\Delta x}, \tag{73}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial[mS\vartheta + (1-m)Sm]}{\partial x} \approx \\
&\approx \frac{[mS\vartheta + (1-m)Sm]_i^n - [mS\vartheta + (1-m)Sm]_{i-1}^n}{\Delta x}.
\end{aligned} \tag{74}$$

Подставив в исходное уравнение, получаем:

$$\frac{(\rho m \epsilon S)_i^{n+1} - (\rho m \epsilon S)_i^n}{\Delta t} + \frac{(\rho m \epsilon S \vartheta)_i^n - (\rho m \epsilon S \vartheta)_{i-1}^n}{\Delta x} = \tag{75}$$

$$\begin{aligned}
&= p_i^n * \frac{[mS\vartheta + (1-m)Sm]_i^n - [mS\vartheta + (1-m)Sm]_{i-1}^n}{\Delta x} + \\
&+ S_i^n G_i^n \left(Q + \frac{(\vartheta_i^n - w_i^n)^2}{2} \right) + S_i^n T_{w,i}^n (\vartheta_i^n - w_i^n) + \Pi_{c,i}^n \tau_{c,i}^n \vartheta_i^n - \Pi_{c,i}^n q_{c,i}^n.
\end{aligned}$$

Выражаем переменную:

$$\begin{aligned}
(\rho m \varepsilon S)_i^{n+1} &= (\rho m \varepsilon S)_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [(\rho m \varepsilon S\vartheta)_{i+1}^n - (\rho m \varepsilon S\vartheta)_i^n] + \Delta t \times \\
&\times \left\{ p_i^n * \frac{[mS\vartheta + (1-m)Sm]_{i+1}^n - [\cdot]_i^n}{\Delta x} + S_i^n G_i^n \left(Q + \frac{(\vartheta_i^n - w_i^n)^2}{2} \right) + \right. \\
&\quad \left. + S_i^n T_{w,i}^n (\vartheta_i^n - w_i^n) + \Pi_{c,i}^n \tau_{c,i}^n \vartheta_i^n - \Pi_{c,i}^n q_{c,i}^n \right\}.
\end{aligned} \tag{76}$$

Таким образом, система уравнений (46)-(53) в разностной форме имеет вид (77):

$$\begin{aligned}
(\rho m S)_i^{n+1} &= (\rho m S)_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [(\rho m S\vartheta)_{i+1}^n - (\rho m S\vartheta)_i^n] + \Delta t * S_i^n G_i^n, \\
(aS)_i^{n+1} &= (aS)_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [(aS w)_{i+1}^n - (aS w)_i^n], \\
(\rho m S\vartheta)_i^{n+1} &= (\rho m S\vartheta)_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [(\rho m S\vartheta^2)_{i+1}^n - (\rho m S\vartheta^2)_i^n] + \\
&+ \Delta t \left[-m_i^n S_i^n \frac{p_{i+1}^n - p_i^n}{\Delta x} + S_i^n G_i^n w_i^n - S_i^n T_{w,i}^n - \Pi_{c,i}^n \tau_{1c,i}^n \right], \\
[\delta(1-m)Sw]_i^{n+1} &= [\delta(1-m)Sw]_i^n - \\
&- \frac{\Delta t}{\Delta x} [(\delta(1-m)Sw^2)_{i+1}^n - (\delta(1-m)Sw^2)_i^n] + \\
&+ \Delta t \left[-(1-m_i^n) S_i^n \frac{p_{i+1}^n - p_i^n}{\Delta x} + S_i^n G_i^n w_i^n - S_i^n T_{w,i}^n - \Pi_{c,i}^n \tau_{2c,i}^n \right], \\
(\rho m \varepsilon S)_i^{n+1} &= (\rho m \varepsilon S)_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [(\rho m \varepsilon S\vartheta)_{i+1}^n - (\rho m \varepsilon S\vartheta)_i^n] + \Delta t \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left\{ p_i^{n*} \frac{[mS\vartheta + (1-m)Sm]_{i+1}^n - [\cdot]_i^n}{\Delta x} + S_i^n G_i^n \left(Q + \frac{(\vartheta_i^n - w_i^n)^2}{2} \right) \right\} \\
& + S_i^n T_{w,i}^n (\vartheta_i^n - w_i^n) + \Pi_{c,i}^n \tau_{c,i}^n \vartheta_i^n - \Pi_{c,i}^n q_{c,i}^n \\
& \psi_i^{n+1} = \psi_i^n - \Delta t * w_i^{n*} \frac{\psi_i^n - \psi_{i-1}^n}{\Delta x} + \Delta t * \frac{S_0}{\Lambda_0} \sigma(\psi_i^n) u_{k,i}^n, \\
& m_i^{n+1} = 1 - a \Lambda_0 (1 - \psi_i^{n+1}).
\end{aligned} \tag{77}$$

В данной системе разностных уравнений используются также следующие обозначения:

S_i^n — площадь канала в точке i на шаге n ;

G_i^n — интенсивность горения;

$T_{w,i}^n$ — сила трения;

$\Pi_{c,i}^n, \tau_{c,i}^n$ — параметры теплообмена, потерь и теплоемкости;

$[\cdot]$ — выражение на предыдущем пространственном шаге (i).

3 Программная реализация

3.1 Выбор языка программирования и общая структура программы

Разработка программной реализации алгоритма численного моделирования газодинамических процессов внутри ствола выстрела эстафетной схемы (ВЭС) выполнена на языке программирования C++. Данный выбор обусловлен совокупностью технических и прикладных факторов, обеспечивающих как высокую производительность расчётов, так и гибкость в организации вычислительного процесса.

Язык C++ был выбран по следующим ключевым причинам:

1. Высокая производительность.

При выполнении ресурсоёмких численных расчётов, таких как интегрирование уравнений газовой динамики или моделирование движения пули, важнейшее значение имеет скорость выполнения программы. C++ обеспечивает уровень производительности, сопоставимый с языком C, и существенно превосходит интерпретируемые языки, такие как Python или MATLAB.

2. Прямой контроль над памятью.

Моделирование на фиксированной сетке, обновление значений в больших массивах, работа с динамически изменяющимися параметрами требуют эффективного управления ресурсами. Возможность точного контроля выделения и освобождения памяти в C++ критически важна для обеспечения стабильной и предсказуемой работы.

3. Широкая поддержка численных библиотек и инструментов.

Хотя в данной реализации основное внимание уделяется ручному программированию симметричной разностной схемы с разнесенными слоями и физической логики модели, в случае расширения проекта можно воспользоваться обширной экосистемой: библиотеками для линейной алгебры

(Eigen, Armadillo), параллельных вычислений (OpenMP, CUDA) и визуализации (Vtk, matplotlib-cpp).

4. Объектно-ориентированная модель.

Возможность логического разделения кода на модули и классы (например, GasCell, Bullet, Solver) обеспечивает удобство сопровождения, масштабирования и повторного использования компонентов программы.

Ниже представлена таблица сравнения выбранного языка с другими языками программирования.

Таблица 1 – Сравнение языков программирования

Язык	Преимущества	Недостатки
C++	Быстродействие, контроль памяти, гибкость	Более сложный синтаксис и отладка
Python	Простота написания, доступность библиотек	Низкая скорость, высокая нагрузка на память
MATLAB	Удобен для прототипирования и визуализации	Ограничен в масштабировании и лицензиях
Fortran	Высокая производительность для массивов	Сложности интеграции с современными системами
C#/Java	Современная архитектура, ООП	Менее пригодны для задач низкоуровневых расчётов

Таким образом, C++ представляет собой сбалансированный выбор между эффективностью исполнения и структурной гибкостью, особенно в задачах технического моделирования.

Что касается архитектуры программы, она имеет модульную структуру, позволяющую выделить ключевые этапы численного моделирования в виде отдельных функций. Такая организация повышает читаемость кода, облегчает отладку и расширение функциональности. Далее будут рассмотрены основные модули программы, а также выполняемые ими задачи.

1. Инициализация расчёта (`initialize()`):

- задание геометрии ствола, числа ячеек, длины шага по пространству и времени;
- инициализация массивов плотности, импульса и энергии;
- задание начальных условий: давление, температура, положение и скорость пули.

2. Расчёт газодинамики (`computeGasFluxes()`, `updateConservativeVars()`):

- вычисление потоков массы, импульса и энергии по симметричной разностной схеме с разнесенными слоями;
- обновление значений консервативных переменных по временной схеме.

3. Восстановление параметров (`computePrimitiveVars()`):

- получение давления, температуры, скорости и скорости звука по уравнениям состояния.

4. Интерполяция давления в точке пули (`interpolatePressureAtBullet()`):

- нахождение давления на донную часть пули по ближайшим ячейкам.

5. Моделирование движения пули (`updateBulletPosition()`):

- расчёт силы давления на пулю, её ускорения, положения и скорости;
- корректировка граничной ячейки.

6. Обратное воздействие пули (`applyBulletReactionToGas()`):

- учёт отдачи в виде изменения импульса газа по закону сохранения.

7. Контроль условий завершения (`checkExitConditions()`):

- проверка выхода пули из ствола, достижения граничных условий (давление, время).

8. Вывод данных (outputResults()):

- сохранение параметров газа и пули во времени для последующего анализа.

Каждая из функций изолирует конкретную физическую или численную задачу, что делает структуру программы наглядной и удобной для тестирования.

3.2 Описание основных структур данных

В программной реализации моделирования газодинамических процессов в стволе ВЭС используется компактное и логичное представление физических величин. Основой являются одномерный массив из ячеек газа, структура для моделирования движения пули как Лагранжевой частицы и несколько глобальных переменных для времени и параметров сетки.

1. Структура газовой ячейки.

Каждая ячейка газовой среды описывается структурой GasCell, содержащей консервативные переменные, используемые в уравнениях Эйлера (рисунок 1).

```
20 // Структура для консервативных переменных
21 struct GasCell {
22     float rho; // Плотность
23     float m; // Импульс (rho * u)
24     float E; // Полная энергия
25 };
26
```

Рисунок 1 – Структура для консервативных переменных

Переменные, описанные в данной структуре, используются в уравнениях Эйлера:

rho – плотность газа;

m – импульс газа, равный произведению плотности на скорость ($\rho * u$);

E – полная энергия на ячейку, которая включает как внутреннюю энергию, так и кинетическую:

$$\rho^* \left(e + \frac{u^2}{2} \right). \quad (78)$$

Использование такой структуры упрощает расчёт флюксов в консервативной форме и позволяет удобно обновлять значения при численном шаге центральной разностной схемы с разнесенными слоями.

Эта структура используется в массиве фиксированной длины (рисунок 2):

```
35 // Глобальные переменные
36 array<GasCell, N_CELLS> gas;
```

Рисунок 2 – Массив газодинамических параметров ячеек

Это основная структура данных, которая описывает состояние газа в стволе на каждом шаге по пространству. Он нужен для того чтобы хранить и обновлять параметры в каждой ячейке вычислительной сетки.

Примитивные переменные – давление p , скорость u , температура T , скорость звука a – не хранятся напрямую, а вычисляются по формульным зависимостям из текущих значений ρ , m , E при необходимости.

Особенностями использования данного массива является то, что в коде реализована явная сетка по координате x , с равномерным шагом h ; этот массив используется для хранения и обновления параметров при каждом временном шаге; он доступен для расчёта производных (градиентов) в численной центральной разностной схеме с разнесенными слоями.

2. Структура, описывающая параметры метаэлемента.

Метаемый элемент моделируется как материальная точка – Лагранжева частица, для которой хранятся положение, скорость, масса и площадь донной части. Для этого в программной реализации заполняется структура (рисунок 3).

```
27 // Лагранжева частица – пуля
28 struct Bullet {
29     float x;
30     float v;
31     float mass;
32     float area;
33 };
```

Рисунок 3 – Структура пули

x – координата положения метаемого элемента после выстрела;

v – её скорость;

$mass$ – масса, используется для расчёта ускорения ($F = ma$);

$area$ – площадь, на которую действует давление (влияет на силу: $F = p * S$).

Пуля реализуется отдельно от газовой сетки, что соответствует смешанному подходу СЭЛ (Эйлерова сетка + Лагранжевы элементы). Это позволяет корректно учитывать обратное влияние движения пули на газ (реактивное действие), передавая импульс обратно в ближайшую ячейку сетки.

3. Глобальные параметры и переменные.

Среди ключевых глобальных переменных основными являются переменные, представленные на рисунках 4 и 5.

```

14 // Константы
15 const int N_CELLS = 121;
16 const float L_BARREL = 1.0f;
17 const float GAMMA = 1.4f;
18 const float R = 287.0f;
19

```

Рисунок 4 – Глобальные константы

Число Куранта задано неявно – как множитель в пересчёте Δt по максимальной характеристической скорости.

t – глобальное модельное время;

Δt – шаг по времени, пересчитывается динамически на каждом шаге в зависимости от максимальной скорости распространения возмущений (условие Куранта). Вычисляется на основе максимальной скорости ($|u| + c$), где c – скорость звука. Это гарантирует устойчивость схемы по критерию Куранта ($CFL \leq 1$);

h – пространственный шаг, равен длине ствола, делённой на число ячеек.

```

35 // Глобальные переменные
36 array<GasCell, N_CELLS> gas;
37 Bullet bullet;
38 float t = 0.0f, dt = 1e-6f;
39 float h = L_BARREL / N_CELLS;

```

Рисунок 5 – Основные глобальные переменные

Параметры-константы выбраны в соответствии с модельными условиями: воздух как идеальный газ, ствол длиной 1 м, начальное давление и температура задаются явно в функции `initialize()`.

N_CELLS – число ячеек по длине ствола (решётка);

L_BARREL – длина ствола в метрах;

$GAMMA$ – показатель адиабаты для воздуха;

R – газовая постоянная для воздуха (в Дж/кг/К).

3.3 Функции и процедуры программной реализации

Для реализации численной модели газодинамики при выстреле была разработана программа на языке C++, структура которой состоит из множества вспомогательных функций и процедур. Эти функции отражают физические процессы, описанные в главе 2: движение газа, взаимодействие с пулей, расчёт давления и температуры, обработку граничных условий и вывод результатов.

Ниже приведено описание ключевых функций и процедур, задействованных в моделировании.

3.3.1 Функция инициализации параметров

Функция `initialize()`, представленная на рис. 6, задаёт начальное распределение давления и плотности вдоль ствола. Согласно физической постановке задачи, давление в начальном (зарядном) участке принимается повышенным (например, $3 \cdot 10^6$ Па), тогда как в остальной части ствола оно близко к атмосферному. Температура газа устанавливается равномерной (обычно 300 К), начальная скорость газа – нулевая.

На основе уравнения состояния идеального газа и закона сохранения энергии рассчитываются плотность, импульс и полная энергия в каждой ячейке:

$$\rho = \frac{p}{RT}, E = \rho \left(e_{\text{вн}} + \frac{u^2}{2} \right). \quad (79)$$

Также в этой функции инициализируются параметры пули: положение, масса, площадь сечения и начальная скорость.

```

175 // Инициализация
176 void initialize() {
177     for (int i = 0; i < N_CELLS; i++) {
178         float x = i * h;
179         float p_init = (x < 0.2f * L_BARREL) ? 3e6f : 1e5f;
180         float T_init = 300.0f;
181         float rho_init = p_init / (R * T_init);
182         float u_init = 0.0f;
183         float e_internal = p_init / ((GAMMA - 1) * rho_init);
184         float E_init = rho_init * (e_internal + 0.5f * u_init * u_init);
185
186         gas[i] = {rho_init, rho_init * u_init, E_init};
187     }
188
189     bullet.x = 0.0f;
190     bullet.v = 0.0f;
191     bullet.mass = 0.01f; // 10 г
192     bullet.area = M_PI * pow(0.005f, 2); // диаметр 10 мм
193 }

```

Рисунок 6 – Функция инициализации

3.3.2 Функции расчета термодинамических параметров

Функция `pressure()` реализует преобразование консервативных переменных в давление. Она использует разность полной и кинетической энергии с применением уравнения (29).

Для обеспечения численной устойчивости при расчётах используется защита от отрицательных значений давления (в том числе путём принудительного ограничения снизу).

```

43 float pressure(const GasCell& cell) {
44     float u = cell.m / cell.rho;
45     float kinetic = 0.5f * cell.rho * u * u;
46     float p = (GAMMA - 1) * (cell.E - kinetic);
47     return max(p, 1e2f); // защита от отрицательного давления
48 }
49

```

Рисунок 7 – Функция преобразования консервативных переменных в давление

Функции `temperature()` и `sound_speed()` используют известные уравнения (33).

Эти значения необходимы для контроля устойчивости по числу Куранта и анализа состояния газа.

Число Куранта – это безразмерная величина, которая показывает, насколько далеко распространяется информация (возмущение) в течение одного шага по времени относительно размера ячейки сетки. Если $CFL > 1$, то метод становится неустойчивым – информация за один шаг "перепрыгивает" через ячейки, и решение становится некорректным (раскачка, отрицательные давления, NaN и т.д.). Обычно выбирают $CFL \leq 0.5$ для устойчивости при центральной разностной схеме с разнесенными слоями.

Проверка устойчивости гарантирует, что информация не выйдет за пределы ближайших ячеек за один шаг.

```
54 float temperature(const GasCell& cell) {  
55     float p = pressure(cell);  
56     return p / (cell.rho * R);  
57 }  
58  
59 float sound_speed(const GasCell& cell) {  
60     return sqrt(GAMMA * pressure(cell) / cell.rho);  
61 }  
62
```

Рисунок 8 – Функции контроля устойчивости по числу Куранта и анализа состояния газа

Такие меры делают модель физически осмысленной, даже если численные ошибки происходят локально.

3.3.3 Функция основного шага по времени (updateGasDynamics())

Функция updateGasDynamics() (рис.9-10) является центральной в модели – она реализует временной переход $t \rightarrow t + \Delta t$, обеспечивая эволюцию физического состояния газовой среды. Через многократные вызовы этой функции модель воспроизводит динамику расширения продуктов горения, распространение ударной волны, взаимодействие газа с пулей и другие эффекты.

Данная функция отвечает за решение уравнений Эйлера на каждом временном шаге с использованием численной центральной разностной схемы

с разнесенными слоями. Эта схема является устойчивой и симметричной, с формулой усреднения (35).

Флюксы рассчитываются через отдельную вложенную функцию `flux()`, основанную на формулах (34).

Также в этой функции автоматически пересчитывается шаг по времени согласно критерию Куранта (32).

Функция `updateGasDynamics()` имеет следующие шаги выполнения:

1) Для обеспечения устойчивости численной схемы используется критерий Куранта–Фридрихса–Леви (CFL). На каждом шаге определяется максимальная характеристическая скорость (сумма модуля скорости и скорости звука) по всем ячейкам. Коэффициент 0.4 – это коэффициент CFL. Значение выбирается в диапазоне (0, 1), где меньшие значения повышают устойчивость, но замедляют расчёт. Таким образом, происходит контроль устойчивости численного метода.

2) Для корректной работы метода необходимо явно задать поведение газа на концах трубы, где левая граница (жёсткая стенка) моделируется как отражающая: скорость ставится равной нулю ($u = 0$), плотность и энергия зеркально копируются, а правая граница представляет собой открытый выход с атмосферным давлением ($p = 10^5$ Па). Здесь плотность и скорость берутся с предпоследней ячейки, а давление задаётся явно. Это позволяет корректно рассчитывать распространение волновых процессов и отток газа за пределы моделируемой области.

3) Для всех внутренних ячеек (от второй до предпоследней) используется центральная разностная схема с разнесенными слоями.

4) После обновления значений добавляется проверка на физический смысл решения: если новая плотность стала отрицательной или близкой к нулю – она заменяется минимально допустимым значением 1-6; аналогично проверяется давление: если оно стало отрицательным, корректируется внутренняя энергия, чтобы обеспечить положительное давление. Это позволяет избежать неустойчивостей, вызванных численным шумом, и

защитить решение от вырождения.

```

84 // Обновление уравнений Эйлера с помощью схемы Лакс-Фридрихса
85 void updateGasDynamics() {
86     array<GasCell, N_CELLS> new_gas;
87
88     // Локальные скорости звука для расчёта dt
89     float max_speed = 0.0f;
90     for (int i = 0; i < N_CELLS; i++) {
91         float c = sound_speed(gas[i]);
92         float u = velocity(gas[i]);
93         max_speed = max(max_speed, fabs(u) + c);
94     }
95     dt = 0.4f * h / max_speed;
96
97     // Граничные условия
98     // Левая стена (жёсткая): u=0, плотность и энергия зеркально
99     new_gas[0] = gas[0];
100     new_gas[0].m = 0.0f;
101
102     // Правая граница (открытый выход) – давление атмосферы, скорость и плотность копируются
103     const float p_atm = 1e5f;
104     float rho_R = gas[N_CELLS - 2].rho;
105     float u_R = velocity(gas[N_CELLS - 2]);
106     float E_R = gas[N_CELLS - 2].E;
107
108     // Обновим давление правой границы
109     float e_internal = p_atm / ((GAMMA - 1) * rho_R);
110     float kinetic = 0.5f * rho_R * u_R * u_R;
111     new_gas[N_CELLS - 1].rho = rho_R;
112     new_gas[N_CELLS - 1].m = rho_R * u_R;
113     new_gas[N_CELLS - 1].E = e_internal * rho_R + kinetic;
114

```

Рисунок 9 – Первая часть функции основного шага по времени

```

115 // Внутренние ячейки - Лакс-Фридрихс
116 for (int i = 1; i < N_CELLS - 1; i++) {
117     // Флюксы
118     auto flux = [(const GasCell& U) -> GasCell {
119         GasCell F;
120         float u = velocity(U);
121         float p = pressure(U);
122         F.rho = U.m; // масса * u
123         F.m = U.m * u + p; // импульс * u + давление
124         F.E = (U.E + p) * u; // энергия * u + работа давления
125         return F;
126     }];
127
128     GasCell F_ip1 = flux(gas[i + 1]);
129     GasCell F_im1 = flux(gas[i - 1]);
130
131     new_gas[i].rho = 0.5f * (gas[i + 1].rho + gas[i - 1].rho) - dt / (2 * h) * (F_ip1.rho - F_im1.rho);
132     new_gas[i].m = 0.5f * (gas[i + 1].m + gas[i - 1].m) - dt / (2 * h) * (F_ip1.m - F_im1.m);
133     new_gas[i].E = 0.5f * (gas[i + 1].E + gas[i - 1].E) - dt / (2 * h) * (F_ip1.E - F_im1.E);
134
135     // Защита от отрицательных плотности и энергии
136     new_gas[i].rho = max(new_gas[i].rho, 1e-6f);
137     float p_i = pressure(new_gas[i]);
138     if (p_i < 0) {
139         // Коррекция энергии
140         float u_i = velocity(new_gas[i]);
141         float e_int = new_gas[i].E / new_gas[i].rho - 0.5f * u_i * u_i;
142         if (e_int < 1e-6f) e_int = 1e-6f;
143         new_gas[i].E = new_gas[i].rho * (e_int + 0.5f * u_i * u_i);
144     }
145 }
146
147 gas = new_gas;
148 }
149

```

Рисунок 10 – Вторая часть функции основного шага по времени

3.3.4 Функция моделирования пули (updateBullet())

На рисунке 11 представлена функция, реализующая пулю в программе как лагранжеву частицу. Её движение реализуется на основе второго закона Ньютона.

```
150 // Обновление движения пули с учетом силы давления и реакции
151 void updateBullet() {
152     if (bullet.x >= L_BARREL) return;
153
154     float p_bullet = interpolatePressure(bullet.x);
155     float force = p_bullet * bullet.area;
156
157     // Ускорение пули
158     float acceleration = force / bullet.mass;
159     bullet.v += dt * acceleration;
160     bullet.x += dt * bullet.v;
161
162     // Реакция на газ (обратный импульс)
163     int idx = clamp(int(bullet.x / h), 0, N_CELLS - 1);
164
165     // Передача импульса газу (консервативно)
166     float dp = force * dt; // изменение импульса
167
168     // Добавляем импульс газу в ячейке (уменьшаем плотность импульса пули)
169     gas[idx].m -= dp;
170
171     // Защита: не допускаем отрицательной плотности импульса
172     if (gas[idx].m < 0) gas[idx].m = 0.0f;
173 }
174
```

Рисунок 11 – Функция моделирования метаемого элемента

Сила давления берётся как результат линейной интерполяции давления между ближайшими ячейками сетки. Полученное ускорение интегрируется по времени для расчёта скорости и координаты пули.

Дополнительно учитывается реакция газа: импульс, полученный пулей, вычитается из ближайшей ячейки газа, тем самым реализуется закон сохранения импульса.

3.3.5 Интерполяционные функции (interpolatePressure(), interpolateGasState())

Функция interpolatePressure() возвращает аппроксимированное значение давления в точке, не совпадающей с центром ячейки. Функция clamp() гарантирует, что индекс остаётся в пределах допустимого диапазона (во

избежание выхода за границы массива). Далее берутся давления в соседних ячейках и интерполируются по коэффициенту α .

Эта величина используется при расчёте силы давления на пулю в уравнении её движения:

3.4 Результат работы программы

Программа предназначена для обработки и визуализации результатов численного моделирования газодинамических параметров выстрела эстафетной схемы. Основной задачей данной программы является построение наглядных графиков по выходным данным численного расчёта, полученным в ходе моделирования методом СЭЛ.

Данные представляют собой таблицу, содержащую значения ряда физических параметров, зависящих от времени. В частности, для каждого момента времени рассчитывались:

- скорость движения тела (v);
- масса газообразного продукта горения (m);
- давление в канале (p);
- перемещение тела или координата (x);
- само модельное время (t).

Данные были экспортированы в формате таблицы Excel, что облегчило последующую автоматизированную загрузку и анализ.

Построение графиков зависимости позволяет наглядно увидеть динамику изменения ключевых характеристик газодинамического процесса. Построенные графики оформлены в едином стиле, снабжены подписями осей, легендами, сеткой и сохранены в файл или отображаются на экране.

1. График зависимости скорости от времени $v(t)$ (рис.12) демонстрирует, как в процессе работы камеры скорость тела нарастает, отражая влияние давления и массы газа.

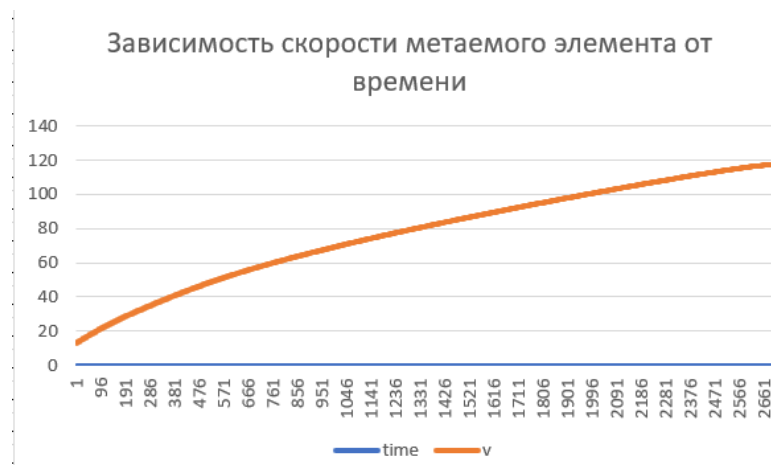


Рисунок 12 – График зависимости скорости метаемого элемента от времени

2. График давления $p(t)$ (рис.13) даёт представление о пиковом значении давления в начальный момент времени и его последующем падении по мере расширения газа и движения тела.

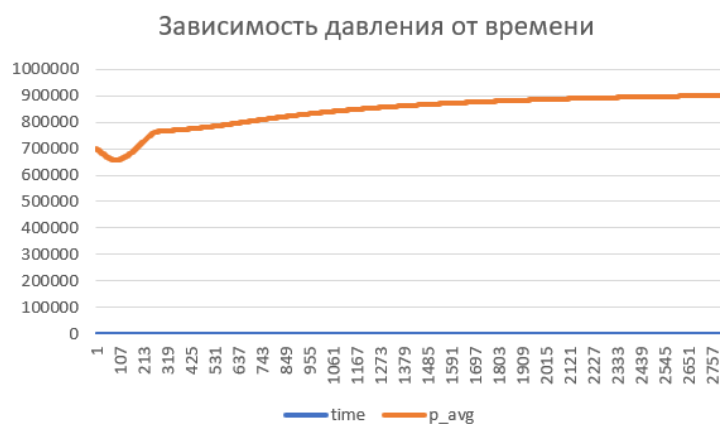


Рисунок 13 – График зависимости давления от времени

3. График координаты $x(t)$ (рис.14) отражает ускоренное поступательное движение тела внутри канала (например, по стволу оружия), соответствующее фазам движения.

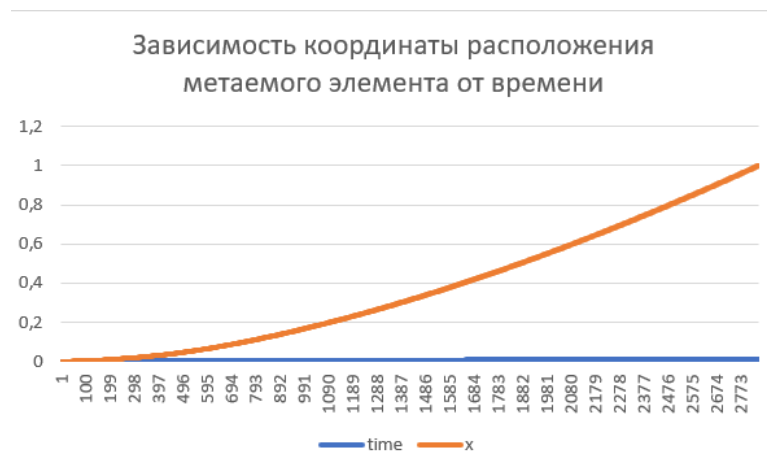


Рисунок 14 – График зависимости координаты метаэлемента от времени

Полученные зависимости имеют физически обоснованный характер и подтверждают корректность как математической модели, так и её численной реализации. В частности:

- скорость тела возрастает с течением времени, что соответствует воздействию давления на подвижную массу;
- давление сначала резко возрастает (вследствие воспламенения), затем снижается по мере расширения газа и перемещения тела;
- масса газа убывает, что отражает его сгорание или выход за границы расчетной области;
- перемещение тела (x) возрастает с ускорением, что свидетельствует об адекватной передаче импульса телу.

Таким образом, визуализация позволяет провести качественный анализ результатов моделирования и убедиться в работоспособности созданного численного алгоритма. Более того, полученные графики могут служить основой для дальнейшего количественного анализа, верификации модели и сравнения с экспериментальными данными (при их наличии).

Заключение

В ходе выполнения выпускной квалификационной работы был разработан и реализован численный алгоритм для определения газодинамических параметров ВЭС в основной рабочей области с использованием совместного Эйлера-Лагранжева метода (СЭЛ).

Был проведен обзор литературных источников по методам численного моделирования процессов внутренней баллистики, с акцентом на СЭЛ.

Были рассмотрены классическая схема метания, модели баллистических систем и методы решения ОЗВБ, принципы их использования особенности и недостатки.

Как итог, для решения основной задачи внутренней баллистики с использованием построенной модели был выбран разностный метод решения задачи.

Также, была разработана и протестирована программа, отвечающая за расчёт ключевых газодинамических параметров выстрела эстафетной схемы. В результате работы программы были получены расчётные данные, на основании которых были построены графики и проведен анализ качества работы численного метода СЭЛ.

На основе проведённого анализа был сделан вывод об эффективности использования метода СЭЛ в качестве решения ОЗВБ.

Список используемой литературы

1. Ананьев В.И. Основы численного моделирования. Учебное пособие. – М.: МГУ, 2016. – 328 с.
2. Гольдштейн Р.В. Математическое моделирование процессов внутренней баллистики. – М.: Физматлит, 2001. – 296 с.
3. Гришин А.М. Математическое моделирование двухфазных течений. – М.: Наука, 1991. – 340 с.
4. Давыдов Н.Н. Двухфазные течения в системах внутренней баллистики. – М.: Машиностроение, 1993. – 285 с.
5. Джанибеков Г.С., Дроздов А.Д. Основы моделирования динамических систем. – М.: Высшая школа, 2003. – 246 с.
6. Желтяков Ю.М. Моделирование газодинамических процессов. – М.: МАИ, 1999. – 310 с.
7. Жуков М.Ф. Численные методы в задачах газовой динамики. – М.: Физматлит, 2010. – 384 с.
8. Исаев С.А., Фролов С.М. Математическое моделирование течений в каналах. – М.: МГТУ им. Баумана, 2011. – 280 с.
9. Костиков Ю.И. Внутренняя баллистика: Учеб. пособие. – СПб.: Политехника, 2004. – 287 с.
10. Лейзерман И.А. Основы внутренней баллистики. – М.: Воениздат, 1972. – 406 с.
11. Меньшиков А.А. Современные тенденции в баллистике и проектировании метательных систем. – М.: Военное изд-во, 2004. – 312 с.
12. Русяк И.Г., Ушаков В.М. Внутрикамерные гетерогенные процессы в ствольных системах. – Екатеринбург: УрО РАН, 2001. – 259 с.
13. Рюмин В.В. Внутренняя баллистика: Теория и расчет. – М.: Машиностроение, 1988. – 325 с.

14. Сафронов А.И. Математическое моделирование баллистических систем. Учебное пособие. – Тольятти: ФГБОУ ВО «Тольяттинский государственный университет» 2021. – 68 с.
15. Шейнфельд Ю.Л. Теплообмен и химическая кинетика в газодинамических процессах метания. – СПб.: Политехника, 2001. – 240 с.
16. Anderson J.D. Computational Fluid Dynamics: The Basics with Applications. – New York: McGraw-Hill, 1995. – 547 p.
17. Belytschko T., Liu W.K., Moran B. Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures. – Chichester: Wiley, 2000. – 650 p.
18. Benson D.J. Computational Methods in Lagrangian and Eulerian Hydrocodes. // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. – 1992. – Vol. 99. – P. 235–394.
19. Wesseling P. Principles of Computational Fluid Dynamics. – Berlin: Springer, 2001. – 644 p.
20. Zukas J.A. (Ed.). High Velocity Impact Dynamics. – New York: Wiley-Interscience, 1990. – 478 p.