Тольяттинский государственный университет

И.В. Антонова, Е.Ю. Куприенко

АДАПТИВНЫЙ КУРС МАТЕМАТИКИ

Учебно-методическое пособие

Тольятти
Издательство ТГУ
2025

Министерство науки и высшего образования
Российской Федерации
Тольяттинский государственный университет

И.В. Антонова, Е.Ю. Куприенко

АДАПТИВНЫЙ КУРС МАТЕМАТИКИ

Учебно-методическое пособие

Тольятти
Издательство ТГУ
2025

УДК 51(075.3)
ББК 22.1я72
А724

Рецензенты:
канд. пед. наук, доцент, заведующий кафедрой «Математика и информатика» Поволжской академии образования и искусств имени Святителя Алексия, митрополита Московского
Е.В. Бахусова;
д-р пед. наук, профессор, профессор кафедры «Высшая математика и математическое образование» Тольяттинского государственного университета *Р.А. Утеева*.

А724 Антонова, И.В. Адаптивный курс математики : учебно-методическое пособие / И.В. Антонова, Е.Ю. Куприенко. – Тольятти : Издательство ТГУ, 2025. – 175 с. – ISBN 978-5-8259-1711-5.

Учебно-методическое пособие содержит основной теоретический материал и примеры типовых задач по каждой теме курса, задания для самостоятельной работы студентов и методические рекомендации по их выполнению, материалы для контроля знаний.

Предназначено для студентов, обучающихся по направлениям подготовки 01.03.02, 04.03.01, 08.03.01, 09.03.03, 11.03.04, 13.03.02, 13.03.03, 15.03.01, 15.03.04, 15.03.05, 15.03.06, 18.03.01, 19.03.04, 20.03.01, 23.05.01, а также по программам ПИШ очной и заочной форм обучения, в том числе с использование дистанционных образовательных технологий.

УДК 51(075.3)
ББК 22.1я72

Рекомендовано к изданию научно-методическим советом Тольяттинского государственного университета.

ISBN 978-5-8259-1711-5

ВВЕДЕНИЕ

Учебно-методическое пособие предназначено для изучения факультативной дисциплины «Адаптивный курс математики».

Пособие адресовано студентам, обучающимся по направлениям подготовки 01.03.02 «Прикладная математика и информатика», 04.03.01 «Химия», 08.03.01 «Строительство», 09.03.03 «Прикладная информатика», 11.03.04 «Электроника и наноэлектроника», 13.03.02 «Электроэнергетика и электротехника», 13.03.03 «Энергетическое машиностроение», 15.03.01 «Машиностроение», 15.03.04 «Автоматизация технологических процессов и производств», 15.03.05 «Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств», 15.03.06 «Мехатроника и робототехника», 18.03.01 «Химическая технология», 19.03.04 «Технология продукции и организация общественного питания», 20.03.01 «Техносферная безопасность», 22.03.01 «Материаловедение и технологии материалов», 23.05.01 «Наземные транспортно-технологические средства», также по программам ПИШ очной и заочной форм обучения, в том числе с использованием ДОТ.

Цель освоения дисциплины – повторение и систематизация теоретических и практических знаний по основным разделам школьного курса математики; закрепление вычислительных навыков, приобретенных при изучении математики в школе; формирование математического, логического и алгоритмического мышления; развитие математической культуры.

Задачи дисциплины – формирование у студентов систематизированных знаний, умений и навыков в области элементарной математики, создание необходимой теоретической базы по основным разделам школьного курса математики для успешного освоения ими курса высшей математики и решения профессиональных задач.

Данная дисциплина базируется на освоении студентами школьного курса математики. Эта дисциплина необходима для изучения таких дисциплин, как «Высшая математика. Элементы высшей алгебры и геометрии», «Высшая математика. Дифференциальное и интегральное исчисления», «Высшая математика. Избранные разделы высшей математики».

В результате изучения дисциплины студенты должны:
- знать основные понятия элементарной математики и методы математического анализа, необходимые для решения профессиональных задач;
- уметь выявлять естественно-научную сущность технических и технологических проблем и профессиональных задач, привлекать для их решения соответствующий математический аппарат;
- владеть навыками использования основных законов элементарной математики в решении профессиональных задач.

Учебно-методическое пособие содержит два модуля:
1. Методические указания по изучению дисциплины.
2. Методические рекомендации по выполнению самостоятельной работы.

Модуль 1 содержит методические материалы к проведению лекций и практических занятий по двенадцати основным темам школьного курса математики, включающие типовые примеры решения задач, вопросы для обсуждения и контрольные вопросы для проведения практических занятий, методические указания по выполнению самостоятельной работы студентов.

Модуль 2 содержит методические рекомендации по выполнению самостоятельной работы, в него включены примерные варианты контрольных работ по данному курсу.

В конце пособия приведены вопросы для самоконтроля по всем основным темам школьного курса математики, описанным в модуле 1, предназначенные для проверки качества усвоения дисциплины студентами; библиографический список и глоссарий с основными определениями курса.

В ходе изучения курса студенты очной формы обучения выполняют пять контрольных работ и проходят итоговое тестирование. Контрольные работы студенты пишут по вариантам по темам: «Тождественные преобразования. Уравнения и неравенства» (20 баллов), «Тригонометрические функции» (20 баллов), «Тригонометрические уравнения и неравенства» (15 баллов), «Показательные и логарифмические уравнения и неравенства» (20 баллов), «Основные задачи планиметрии и стереометрии» (15 баллов). В курсе предусмотрены бонусные баллы (20 баллов) за работу на практических занятиях.

В ходе изучения курса студенты заочной формы обучения с использованием дистанционных образовательных технологий также выполняют пять проверочных работ и проходят промежуточное и итоговое тестирование. Проверочные работы студенты пишут по тем же темам, за их выполнение они могут получить до 55 баллов включительно.

По курсу предусмотрен дифференцированный зачет. Оценка по дисциплине ставится по пятибалльной системе: оценка «отлично» выставляется студенту, если по курсу им набрано 85–100 баллов; «хорошо» – 70–84 балла; «удовлетворительно» – 55–69 баллов; «неудовлетворительно» – 0–54 балла.

1. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ИЗУЧЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

Тема 1. Тождественные преобразования выражений. Степень. Основные тождества. Формулы сокращенного умножения

Форма проведения: практическое занятие.

Вопросы для обсуждения

1. Тождественно равные выражения. Примеры тождественно равных выражений.
2. Тождество. Примеры тождеств.
3. Тождественное преобразование алгебраического выражения.
4. Виды тождественных преобразований алгебраических выражений.
5. Формулы сокращенного выражения.
6. Свойства степеней.
7. Свойства корней n-й степени.

Методические указания по проведению занятия

На практическом занятии студенты повторяют основные понятия и теоретические сведения по теме, выполняют практические задания под руководством преподавателя, отвечают на контрольные вопросы.

Методические материалы к занятию

Определение: «Два выражения называются *тождественно равными*, если при любых значениях переменных из области определения выражений их соответственные значения равны. Равенство, верное при любых значениях переменных, называется *тождеством*» [31].

Приведем примеры тождеств:

$$a + b = b + a;\ ab = ba;\ a(b + c) = ab + ac;\ a + 0 = 0 + a = a \text{ и др.}$$

Под *тождественным преобразованием алгебраического выражения* понимают «последовательный переход от одного выражения к другому, тождественно равному ему» [31].

При выполнении тождественных преобразований выражений используются *формулы сокращенного умножения* (1.1)–(1.7), *свойства степеней* и *действия с корнями* (1.8)–(1.25).

Формулы сокращенного умножения

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \tag{1.1}$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \tag{1.2}$$

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) \tag{1.3}$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \tag{1.4}$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \tag{1.5}$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2) \tag{1.6}$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) \tag{1.7}$$

Свойства степеней и действия с корнями

$$a^0 = 1, a \neq 0 \tag{1.8}$$

$$\left(\frac{1}{a}\right)^{-n} = a^n, a \neq 0 \tag{1.9}$$

$$a^m a^n = a^{m+n} \tag{1.10}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \tag{1.11}$$

$$(a^m)^n = a^{mn} \tag{1.12}$$

$$(ab)^n = a^n b^n \tag{1.13}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, b \neq 0 \tag{1.14}$$

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \tag{1.15}$$

$$a^{\frac{k}{n}} = \sqrt[n]{a^k} \tag{1.16}$$

$$\sqrt{a^2} = |a| \tag{1.17}$$

$$\sqrt[2n]{a^{2n}} = |a| \tag{1.18}$$

$$\sqrt[2n+1]{a^{2n+1}} = a \tag{1.19}$$

$$\sqrt[2n+1]{-a} = -\sqrt[2n+1]{a} \tag{1.20}$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a} \tag{1.21}$$

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[nk]{a^k} \tag{1.22}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \tag{1.23}$$

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b} \tag{1.24}$$

$$a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b} \tag{1.25}$$

Рассмотрим примеры выполнения тождественных преобразований выражений.

Пример 1.1. $4p^3(-3)pq^5 = 4(-3)p^3pq^5 = -12p^4q^5$.

Пример 1.2. «Упростите выражение

$$\left(\frac{3}{a}+\frac{3}{a+d}\right)\cdot\frac{a}{18(2a+d)}.$$

Решение:

$$\left(\frac{3}{a}+\frac{3}{a+d}\right)\cdot\frac{a}{18(2a+d)}=\frac{(3(a+d)+3a)a}{a(a+d)18(2a+d)}=\frac{(3a+3d+3a)\cdot a}{18a(a+d)(2a+d)}=$$

$$=\frac{(6a+3d)\cdot a}{18a(a+d)(2a+d)}=\frac{3(2a+d)}{18(a+d)(2a+d)}=\frac{1}{6(a+d)}.$$

Ответ: $\frac{1}{6(a+d)}$» [4].

Пример 1.3. Упростите выражение

$$\frac{n-2}{n-5}:\left(\frac{n^2+24}{n^2-25}-\frac{4}{n-5}\right).$$

Решение:

$$«\frac{n-2}{n-5}:\left(\frac{n^2+24}{n^2-25}-\frac{4}{n-5}\right)=\frac{n-2}{n-5}:\left(\frac{n^2+24}{(n-5)(n+5)}-\frac{4(n+5)}{(n-5)(n+5)}\right)=$$

$$=\frac{n-2}{n-5}:\frac{n^2+24-4n-20}{(n-5)(n+5)}=\frac{n-2}{n-5}\cdot\frac{(n-5)(n+5)}{n^2-4n+4}=\frac{(n-2)(n+5)}{n^2-4n+4}=$$

$$=\frac{(n-2)(n+5)}{(n-2)^2}=\frac{n+5}{n-2}» [3].$$

Ответ: $\frac{n+5}{n-2}$.

Пример 1.4. Упростите выражение

$$\sqrt{150}-\sqrt{96}-\sqrt{\frac{2}{3}}-\frac{1}{\sqrt{6}}.$$

Решение:

$$«\sqrt{150}-\sqrt{96}-\sqrt{\frac{2}{3}}-\frac{1}{\sqrt{6}}=\sqrt{25\cdot 6}-\sqrt{16\cdot 6}-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{2\cdot 3}}=$$

$$=5\sqrt{6}-4\sqrt{6}-\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2\cdot 3}\cdot\sqrt{6}}=5\sqrt{6}-4\sqrt{6}-\frac{\sqrt{6}}{3}-\frac{\sqrt{6}}{6}=$$

$$=\sqrt{6}\cdot\left(5-4-\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{6}» [3].$$

Ответ: $\frac{1}{2}\sqrt{6}$.

Пример 1.5. Исключите иррациональность из знаменателя:

а) $\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$; б) $\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{7}}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}$; в) $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}+\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$.

Решение:

«а) $\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}=\dfrac{1(2+\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}=\dfrac{2+\sqrt{3}}{4-3}=\dfrac{2+\sqrt{3}}{1}=2+\sqrt{3}$;

б) $\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{7}}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}=\dfrac{(\sqrt{5}-\sqrt{7})(\sqrt{5}-\sqrt{7})}{(\sqrt{5}+\sqrt{7})(\sqrt{5}-\sqrt{7})}=\dfrac{(\sqrt{5}-\sqrt{7})^2}{5-7}=\dfrac{5-2\sqrt{35}+7}{-2}=$

$=\dfrac{12-2\sqrt{35}}{-2}=\dfrac{-2(\sqrt{35}-6)}{-2}=\sqrt{35}-6$

в) $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}+\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\dfrac{(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}+\dfrac{(\sqrt{2}-\sqrt{3})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}=$

$=\dfrac{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2+(\sqrt{2}-\sqrt{3})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}=\dfrac{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2}{3-2}=$

$=\dfrac{2+2\sqrt{6}+3-2+2\sqrt{6}-3}{1}=4\sqrt{6}$.

Ответ: а) $2+\sqrt{3}$; б) $\sqrt{35}-6$; в) $4\sqrt{6}$» [3].

Пример 1.6. Упростите выражение

$$2\sqrt{8}+0{,}5\sqrt{32}-\frac{1}{3}\sqrt{18}.$$

Решение:

$$2\sqrt{8}+0{,}5\sqrt{32}-\frac{1}{3}\sqrt{18}=2\sqrt{4\cdot 2}+0{,}5\sqrt{16\cdot 2}-\frac{1}{3}\sqrt{9\cdot 2}=$$

$$=2\cdot\sqrt{4}\cdot\sqrt{2}+0{,}5\cdot\sqrt{16}\cdot\sqrt{2}-\frac{1}{3}\cdot\sqrt{9}\cdot\sqrt{2}=2\cdot 2\sqrt{2}+0{,}5\cdot 4\sqrt{2}-\frac{1}{3}\cdot 3\sqrt{2}=$$

$$=4\sqrt{2}+2\sqrt{2}-\sqrt{2}=5\sqrt{2}.$$

Ответ: $5\sqrt{2}$.

Пример 1.7. Выполните действия:

$$(2\sqrt{a}+\sqrt{b})(4a-2\sqrt{ab}+b).$$

Решение:

$$(2\sqrt{a}+\sqrt{b})(4a-2\sqrt{ab}+b)=(2\sqrt{a})^3+(\sqrt{b})^3=8\sqrt{a^3}+\sqrt{b^3}.$$

Ответ: $8\sqrt{a^3}+\sqrt{b^3}$.

Пример 1.8. Вычислите:

$$\sqrt{27+10\sqrt{2}}+\sqrt{27-10\sqrt{2}}.$$

Решение. Заметим, что

«$\sqrt{27+10\sqrt{2}}=\sqrt{\left(\sqrt{2}+5\right)^2}$; $\sqrt{27-10\sqrt{2}}=\sqrt{\left(\sqrt{2}-5\right)^2}$.

Тогда имеем:

$$\sqrt{27+10\sqrt{2}}+\sqrt{27-10\sqrt{2}}=\sqrt{\left(\sqrt{2}+5\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{2}-5\right)^2}=$$

$$=\left|\sqrt{2}+5\right|+\left|\sqrt{2}-5\right|=\sqrt{2}+5+5-\sqrt{2}=10.$$

Ответ: 10» [29].

Пример 1.9. Докажите, что:

$$\sqrt{4+2\sqrt{3}}-\sqrt{4-2\sqrt{3}}=2.$$

Доказательство:

$$\left(\sqrt{4+2\sqrt{3}}-\sqrt{4-2\sqrt{3}}\right)^2=4+2\sqrt{3}-$$

$$-2\sqrt{\left(4+2\sqrt{3}\right)\left(4-2\sqrt{3}\right)}+4-2\sqrt{3}=8-2\sqrt{16-12}=8-4=4=2^2.$$

Следовательно, исходное выражение может быть равно 2 или –2; так как $\sqrt{4+2\sqrt{3}}>\sqrt{4-2\sqrt{3}}$, то это выражение положительно и $\sqrt{4+2\sqrt{3}}-\sqrt{4-2\sqrt{3}}=2$.

Пример 1.10. Упростите выражения:

а) $\left(\sqrt{\sqrt[3]{a^2b}}\right)^6$;

б) $\sqrt[4]{abc}\cdot\sqrt[4]{a^3b^2c}\cdot\sqrt[4]{b^5c^2}$.

Решение:

а) $\left(\sqrt{\sqrt[3]{a^2b}}\right)^6=\left(\sqrt[3]{a^2b}\right)^{\frac{6}{2}}=\left(\sqrt[3]{a^2b}\right)^3=a^2b$;

б) $\sqrt[4]{abc}\cdot\sqrt[4]{a^3b^2c}\cdot\sqrt[4]{b^5c^2}=\sqrt[4]{a^4b^8c^4}=|a|\cdot b^2\cdot|c|$.

Ответ: a^2b; $|a|\cdot b^2\cdot|c|$.

Методические указания по выполнению самостоятельной работы студентов

Для выполнения заданий самостоятельной работы следует изучить представленный выше теоретический материал, разобрать и записать решения типовых заданий по теме, изучить рекомендуемую литературу.

В случае возникновения затруднений при изучении теоретического материала и выполнении практических заданий студент может получить консультацию у преподавателя.

Блок 1

Задание 1. Выполните действия над многочленами:

а) $(3x^2y + 6x^2 - 5y^3) - (3y^3 - 2x^2 + 3x^2y)$;

б) $(3a^3 - a^2b + 2b^2) \cdot (a + b)$.

Задание 2. Даны многочлены:

A = $3y^3 + 5x^2 - 4xy + 6y^2$; B = $2y^3 - 4y^2 + 4xy - 3x^2$;

C = $x^3 + y^3$.

Найдите: а) A + B – C; б) A – B + C.

Задание 3. Выполните умножение многочленов:

а) $(2x^2y + xy - y^2) \cdot 0{,}3xy$;

б) $(5x^2 - 3x^3 + 4x - 1) \cdot (3 - 2x^2 - 6x)$.

Задание 4. Разложите на множители:

а) $2x^2 + 3x - 5$;

б) $a^2 + 2ab + b^2 - 1$;

в) $a - ax + ax^2 + b - bx + bx^2$;

г) $6mn + 3m^3n^3 - 12m^3n + 15mn^2$;

д) $y^3 + 7y^2 + 17y + 14$.

Задание 5. Сократите дробь:

а) $\dfrac{3a^3-2a^2b-3ab^2+2b^3}{27a^4-\ 8ab^3-\ 8b^4+27a^3b}$;

б) $\dfrac{63^{n+3}}{3^{2n+2}\cdot 7^{n+1}}$;

в) $\dfrac{50^n}{5^{2n-1}\cdot 2^{n-1}}$.

Задание 6. Упростите выражения:

а) $\left(\dfrac{a^2+ab}{a^3+a^2b+ab^2+b^3}+\dfrac{b}{a^2+b^2}\right):\left(\dfrac{1}{a-b}-\dfrac{2ab}{a^2(a-b)+ab^2-b^3}\right)$;

б) $\left(\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}}-\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}\right)\cdot\dfrac{\sqrt{y}-\sqrt{x}}{x+y}$.

Блок 2

Задание 1. Освободитесь от иррациональности в знаменателе:

а) $\dfrac{2}{\sqrt{15}}$; б) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}$; в) $\dfrac{3+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{3-\sqrt{2}-\sqrt{3}}$.

Задание 2. Вычислите:

$$\sqrt{\left(\sqrt{5}-2{,}5\right)^2}-\sqrt[3]{\left(1{,}5-\sqrt{5}\right)^3}-1.$$

Задание 3. Упростите выражения:

а) $\sqrt{9+4\sqrt{2}}$;

б) $\dfrac{x^3+y^3}{x+y}:(x^2-y^2)+\dfrac{2y}{x+y}-\dfrac{xy}{x^2-y^2}$.

Задание 4. Упростите выражения:

а) $\dfrac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2-4b}{(a-b):\left(\sqrt{\dfrac{1}{b}}+3\sqrt{\dfrac{1}{a}}\right)}:\dfrac{a+9b+6\sqrt{ab}}{\dfrac{1}{\sqrt{b}}+\dfrac{1}{\sqrt{a}}}$;

б) $\sqrt[6]{4x\left(11+4\sqrt{6}\right)}\cdot\sqrt[3]{2\sqrt{3x}-4\sqrt{2x}}$;

в) $\dfrac{\dfrac{|x-1|}{x}+x|x-1|+2-\dfrac{2}{x}}{\sqrt{x-2+\dfrac{1}{x}}}$;

г) $\dfrac{\sqrt{30-12\sqrt{6}}}{\left(2\sqrt{3}+3\sqrt{2}\right)}\cdot\left(5+2\sqrt{6}\right)$;

д) $\dfrac{\sqrt{8+2\sqrt{12}-\sqrt{2}}}{\sqrt{8-2\sqrt{12}}+\sqrt{2}}$;

е) $\dfrac{m\cdot|m-3|}{(m^2-m-6)\cdot|m|}$.

Контрольные вопросы

1. Какие выражения называются тождественно равными?
2. Что такое тождество?
3. Что понимают под тождественным преобразованием алгебраического выражения?
4. Какие виды тождественных преобразований алгебраических выражений вы знаете?
5. Какие формулы чаще всего используют при выполнении тождественных преобразований выражений?
6. Перечислите основные свойства степеней.
7. Какие свойства корней n-й степени вы знаете?
8. Какие виды тождественных преобразований рациональных и иррациональных выражений использовались вами при выполнении заданий?

Рекомендуемая литература

1. Кытманов, А. М. Арифметические и алгебраические выражения / А. М. Кытманов, Е. К. Лейнартас, С. Г. Мысливец // Математика : адаптационный курс : учеб. пособие / А. М. Кытманов, Е. К. Лейнартас, С. Г. Мысливец. – Санкт-Петербург [и др.], 2022. – Глава 1. – С. 10–17. – URL: e.lanbook.com/book/211088 (дата обращения: 10.12.2024). – Режим доступа: по подписке. – ISBN 978-5-8114-1472-7.

2. Тождественные преобразования / В. В. Гарбарук, В. И. Родин, И. М. Соловьева, М. А. Шварц // Решение задач по математике : адаптивный курс для студентов технических вузов : учеб. пособие / В. В. Гарбарук, В. И. Родин, И. М. Соловьева, М. А. Шварц. – Санкт-Петербург [и др.], 2017. – С. 21–38. – URL: e.lanbook.com/book/99281 (дата обращения: 10.12.2024). – Режим доступа: по подписке. – ISBN 978-5-8114-2618-8.

Тема 2. Алгебраические уравнения. Квадратные уравнения. Формулы Виета. Простейшие уравнения и неравенства с модулем

Форма проведения: практическое занятие.

Вопросы для обсуждения

1. Основные виды алгебраических уравнений и методы их решения.
2. Прямая и обратная теоремы Виета.
3. Понятие модуля числа.
4. Уравнения, содержащие переменную под знаком модуля.
5. Неравенства, содержащие переменную под знаком модуля.

Методические указания по проведению занятия

На практическом занятии студенты повторяют основные понятия и теоретические сведения по теме, выполняют практические задания под руководством преподавателя, отвечают на контрольные вопросы.

Методические материалы к занятию

Вспомним основные виды алгебраических уравнений, которые были изучены вами в школьном курсе математики.

Так, «уравнение вида:

$$a \cdot x + b = 0, \qquad (2.1)^*$$

где a и b – некоторые постоянные, называется *линейным уравнением*.

---

* Номер этой и последующих формул из библиографических источников изменены автором.

Если $a \neq 0$, то уравнение (2.1) имеет единственный корень: $x = -\frac{b}{a}$.

Если $a = 0$, $b \neq 0$, то уравнение (2.1) решений не имеет.

Если $a = 0$, $b = 0$, то любое x является решением уравнения (2.1)» [30].

Пример 2.1. «Решите уравнение

$$\frac{3}{5}x - \frac{x}{2} = 0{,}2.$$

Решение:

$$\frac{3x}{5} - \frac{x}{2} = \frac{1}{5};\ \frac{3x \cdot 2}{5 \cdot 2} - \frac{x \cdot 5}{2 \cdot 5} = \frac{1 \cdot 2}{5 \cdot 2};\ \frac{6x}{10} - \frac{5x}{10} = \frac{2}{10};\ \frac{6x - 5x}{10} = \frac{2}{10};$$

$$6x - 5x = 2;\ x = 2.$$

Ответ: $x = 2$» [3].

Пример 2.2. «Решите уравнение

$$2x + 3 - 6(x - 1) = 4(1 - x) + 5.$$

Решение:

$$2x + 3 - 6(x - 1) = 4(1 - x) + 5;$$

$$2x + 3 - 6x + 6 = 4 - 4x + 5;\ 2x - 6x + 4x = 4 + 5 - 9;$$

$$-4x + 4x = 0;\ 0 \cdot x = 0;\ x \in R.$$

Ответ: $x \in R$» [3].

Отметим, что «уравнение вида:

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0, \tag{2.2}$$

где a, b, c – некоторые числа ($a \neq 0$), x – переменная, называется *квадратным уравнением*.

Для решения квадратного уравнения следует вычислить дискриминант:

$$D = b^2 - 4ac. \tag{2.3}$$

Если $D = 0$, то уравнение (2.2) имеет единственное решение:

$$x = -\frac{b}{2a}.$$

Если $D > 0$, то уравнение (2.2) имеет два корня:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}, \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}. \tag{2.4}$$

Если $D < 0$, то уравнение (2.2) не имеет действительных корней.

Если $b = 0$ или $c = 0$, то уравнение (2.2) можно решать, не вычисляя дискриминанта, то есть

если $b = 0$, $c \neq 0$, $\frac{c}{a} < 0$, то $x_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$;

если $b \neq 0$, $c = 0$, то $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{-b}{a}$.

Отметим, что если в квадратном уравнении (2.2) коэффициент b – четный, то находят: $\frac{D}{4} = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac$, тогда корни уравнения вычисляются по формулам:

$$x_1 = \frac{-\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{D}{4}}}{a}; \qquad x_2 = \frac{-\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{D}{4}}}{a}.$$

Теорема Виета (прямая) утверждает: если у квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ есть корни x_1 и x_2 (2.4), то выполняются соотношения

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}. \end{cases} \tag{2.5}$$

Обратная теорема Виета утверждает: если для некоторых постоянных a, b, c существуют числа x_1 и x_2, удовлетворяющие соотношениям

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}, \end{cases} \tag{2.6}$$

то эти числа x_1 и x_2 являются корнями уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

При решении задач, связанных с теоремой Виета, рациональнее использовать соотношения:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2}; \tag{2.7}$$

$$x_1{}^2 + x_2{}^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2; \tag{2.8}$$

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{x_1{}^2 + x_2{}^2}{x_1x_2}; \tag{2.9}$$

$$\begin{aligned} x_1{}^3 + x_2{}^3 &= (x_1 + x_2) \cdot (x_1{}^2 - x_1x_2 + x_2{}^2) = \\ &= (x_1 + x_2) \cdot ((x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2) \end{aligned} \tag{2.10}$$» [30].

Кроме того, решить квадратное уравнение (2.2) можно и другими способами:

1. Если сумма коэффициентов $a + b + c = 0$, то $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{c}{a}$.
2. Если $a + c = b$, то $x_1 = -1$, $x_2 = -\frac{c}{a}$.

Пример 2.3. «Решите уравнение

$$x^2 + 5x - 6 = 0.$$

Решение:

$$x^2 + 5x - 6 = 0.$$

Имеем $a = 1$, $b = 5$, $c = -6$.

1-й способ:

$$D = b^2 - 4ac = 25 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 25 + 24 = 49 = 7^2.$$

Так как $D > 0$, то исходное уравнение имеет два корня:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-5 + 7}{2} = \frac{2}{2} = 1,\ x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{-5 - 7}{2} = \frac{-12}{2} = -6.$$

2-й способ: по обратной теореме Виета имеем:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -5, \\ x_1 \cdot x_2 = -6. \end{cases}$$

Значит, что $x_1 = 1$, $x_2 = -6$.

Ответ: $x_1 = 1$, $x_2 = -6$» [3].

3-й способ: $a + b + c = 1 + 5 - 6 = 0$, тогда $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{-6}{1} = -6$.

Пример 2.4. «Решите уравнение

$$x^6 - 5x^3 + 4 = 0.$$

Решение.

Введем новую переменную: $y = x^3$. Тогда получим уравнение

$$y^2 - 5y + 4 = 0.$$

Решив квадратное уравнение, имеем: $y_1 = 1$, $y_2 = 4$.

Таким образом, исходное уравнение равносильно совокупности уравнений: $x^3 = 1$ или $x^3 = 4$, то есть $x = 1$ или $x = \sqrt[3]{4}$.

Ответ: $x = 1$, $x = \sqrt[3]{4}$» [30].

Пример 2.5. «Решите уравнение

$$4x^2 + 12x + \frac{12}{x} + \frac{4}{x^2} = 47.$$

Решение:

$$\left(4x^2 + \frac{4}{x^2}\right) + \left(12x + \frac{12}{x}\right) = 47;\ 4\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 12\left(x + \frac{1}{x}\right) = 47.$$

Введем новую переменную: $y = x + \frac{1}{x}$.

Имеем:

$$y^2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 2;\ x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2.$$

Тогда получим уравнение:

$$4(y^2 - 2) + 12y = 47;\ 4y^2 - 8 + 12y - 47 = 0;\ 4y^2 + 12y - 55 = 0.$$

Решив квадратное уравнение, имеем:

$$y_1 = \frac{5}{2}, \qquad y_2 = -\frac{11}{2}.$$

Таким образом, исходное уравнение равносильно совокупности уравнений:

$$x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2} \text{ или } x + \frac{1}{x} = -\frac{11}{2}.$$

Решим полученные дробно-рациональные уравнения.

$$x + \frac{1}{x} - \frac{5}{2} = 0 \ \text{ или } \ x + \frac{1}{x} + \frac{11}{2} = 0.$$

$$\begin{cases} 2x^2 - 5x + 2 = 0, \\ x \neq 0. \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 2x^2 + 11x + 2 = 0, \\ x \neq 0. \end{cases}$$

$$x_1 = 2,\ x_2 = \frac{1}{2} \ \text{ или } \ x_3 = \frac{-11+\sqrt{105}}{4},\ x_4 = \frac{-11-\sqrt{105}}{4}.$$

Ответ: $x = 2,\ x = \frac{1}{2},\ x = \frac{-11+\sqrt{105}}{4},\ x = \frac{-11-\sqrt{105}}{4}$» [29].

Пример 2.6. «Вычислите $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ и $x_1^3 + x_2^3$, где x_1 и x_2 — корни квадратного уравнения $x^2 - x - 2 = 0$.

Решение.

По теореме Виета имеем:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1, \\ x_1 \cdot x_2 = -2. \end{cases}$$

Значит, по формуле (2.7):

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}.$$

По формуле (2.10):

$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2) \cdot (x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2) =$$

$$= (x_1 + x_2) \cdot ((x_1 + x_2)^2 - 3x_1 x_2) = 1 \cdot \left(1^2 - 3 \cdot (-2)\right) = 7.$$

Ответ: $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -\frac{1}{2};\ x_1^3 + x_2^3 = 7$» [29].

При решении уравнений высших степеней также удобно использовать схему Горнера.

Пример 2.7. Решите уравнение

$$x^3 + x - 2 = 0.$$

Решение.

Находим делители свободного члена: ∓ 1; ∓ 2. Подберем один из корней уравнения. Имеем $x = 1$ — корень уравнения, так как $1^3 + 1 - 2 = 0$.

По схеме Горнера:

	1	0	1	–2
$\mathbf{x = 1}$	1	$0 + \mathbf{1} \cdot 1 = 1$	$1 + \mathbf{1} \cdot 1 = 2$	$-2 + \mathbf{1} \cdot 2 = 0$

Получим уравнение

$$(x - 1)(x^2 + x + 2) = 0.$$

Тогда $x - 1 = 0$ или $x^2 + x + 2 = 0$. Первое уравнение имеет корень $x = 1$, второе не имеет действительных корней.

Ответ: $x = 1$.

Пример 2.8. Решите уравнение

$$2x^3 - 3x^2 + 2x + 2 = 0.$$

Решение.

Находим делители свободного члена, p: ∓ 1; ∓ 2; находим делители старшего коэффициента, q: ∓ 1; ∓ 2; тогда $\frac{p}{q}$: ∓ 1; ∓ 2; $\mp \frac{1}{2}$.

Подберем один из корней уравнения. Имеем $x = -\frac{1}{2}$ — корень уравнения, так как $2 \cdot \left(-\frac{1}{8}\right) - 3 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 2 = 0$.

По схеме Горнера:

	2	–3	2	2
$x = -\frac{1}{2}$	2	$-3 - \frac{1}{2} \cdot 2 = -4$	$2 - \frac{1}{2} \cdot (-4) = 4$	$2 - \frac{1}{2} \cdot 4 = 0$

Получим уравнение

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)(2x^2 - 4x + 4) = 0.$$

Тогда $x + \frac{1}{2} = 0$ или $2x^2 - 4x + 4 = 0$. Первое уравнение имеет корень $x = -\frac{1}{2}$, второе уравнение не имеет действительных корней.

Ответ: $x = -\frac{1}{2}$.

Так, «если в уравнении неизвестная величина содержится под знаком радикала, например $\sqrt{x-5} = x + 3$, то такое уравнение называется *иррациональным*.

Отметим, что одним из способов решения данных уравнений является возведение обеих частей уравнения в степень, равную показателю степени корня. Если показатель степени четный, то необходима проверка найденных решений» [29].

Пример 2.9. «Решите уравнение

$$\sqrt[3]{1 - x^2} = -2.$$

Решение:

$\sqrt[3]{1 - x^2} = -2$; $1 - x^2 = (-2)^3$; $1 - x^2 = -8$; $x^2 = 9$; $x = 3$ или $x = -3$.

Ответ: $x = 3$, $x = -3$» [29].

Пример 2.10. «Решите уравнение

$$\sqrt[4]{25 - x^2} = 2.$$

Решение:

$$\sqrt[4]{25 - x^2} = 2.$$

Имеем: $25 - x^2 = 2^4$; $25 - x^2 = 16$; $x^2 = 9$; $x = 3$ или $x = -3$.

Проверка:

$$\sqrt[4]{25 - 3^2} = \sqrt[4]{16} = 2;\ \sqrt[4]{25 - (-3)^2} = \sqrt[4]{16} = 2;\ 2 = 2.$$

Ответ: $x = 3$, $x = -3$» [29].

Пример 2.11. Решите уравнение

$$\sqrt{10x - 14} = 11.$$

Решение:

$$\sqrt{10x - 14} = 11.$$

Имеем: $\left(\sqrt{10x - 14}\right)^2 = 11^2$; $10x - 14 = 121$; $10x = 135$; $x = 13{,}5$.

Проверка: $\sqrt{10 \cdot 13{,}5 - 14} = \sqrt{135 - 14} = \sqrt{121} = 11$.

Ответ: $x = 13{,}5$.

Пример 2.12. «Решите уравнение

$$\sqrt{x+2} = x.$$

Решение:

$$\sqrt{x+2} = x.$$

Имеем: $\left(\sqrt{x+2}\right)^2 = x^2$; $x + 2 = x^2$; $x^2 - x - 2 = 0$; $x = 2$ или $x = -1$.

Проверка:

1) $x = 2$, тогда $\sqrt{2+2} = 2$; $2 = 2$, верно;

2) $x = -1$, тогда $\sqrt{-1+2} = -1$; $1 = -1$, неверно.

Ответ: $x = 2$» [30].

Пример 2.13. «Решите уравнение

$$(x+4)(x+1) - 3\sqrt{x^2+5x+2} = 6.$$

Решение:

$$x^2 + 5x + 4 - 3\sqrt{x^2+5x+2} = 6.$$

Введем новую переменную:

$$y = \sqrt{x^2+5x+2}.$$

Тогда получим уравнение:

$$y^2 + 2 - 3y = 6;\ \ y^2 - 3y - 4 = 0.$$

Решив квадратное уравнение, имеем:

$$y_1 = -1,\ \ y_2 = 4.$$

Таким образом, исходное уравнение равносильно совокупности уравнений:

$$\sqrt{x^2+5x+2} = -1 \text{ или } \sqrt{x^2+5x+2} = 4.$$

Решим полученные уравнения. Первое уравнение не имеет решений, так как $\sqrt{x^2+5x+2} \geq 0$. Решив второе уравнение $\sqrt{x^2+5x+2} = 4$, получим: $x^2 + 5x + 2 = 16$, тогда

$$x^2 + 5x - 14 = 0,\ x_1 = 2 \ \text{ или } \ x_2 = -7.$$

Проверка:

1) $x = 2$, тогда $\sqrt{2^2+10+2} = 4$; $4 = 4$, верно;

2) $x = -7$, тогда $\sqrt{(-7)^2-35+2} = 4$; $4 = 4$, верно.

Ответ: $x = 2$, $x = -7$» [30].

Рассмотрим пример с решением дробно-рационального уравнения.

Пример 2.14. Решите уравнение

$$\frac{17}{5x} = 2 - \frac{7}{x}.$$

Решение:

$$\frac{17}{5x} = \frac{2}{1} - \frac{7}{x};\ \frac{17}{5x} = \frac{2\cdot 5x}{5x} - \frac{7\cdot 5}{5x};\ \frac{17}{5x} = \frac{10x}{5x} - \frac{35}{5x};$$

$$17 = 10x - 35,\ 5x \neq 0, \text{ то есть } x \neq 0.$$

Тогда

$$10x = 35 + 15;\ \ 10x = 52;\ \ x = 5{,}2.$$

Ответ: $x = 5{,}2$.

Кроме того, «чтобы решить *уравнение, содержащее переменную под знаком модуля*, надо освободиться от знака модуля, используя его определение:

$$|x| = \begin{cases} x, \text{если } x \geq 0; \\ -x, \text{если } x < 0. \end{cases} \quad (2.11)$$

Приведем алгоритм решения уравнений с модулем:

1) находят критические точки, то есть значения переменной, при которых выражения, стоящие под знаком модуля, обращаются в нуль;

2) разбивают область допустимых значений переменной на промежутки, на каждом из которых выражения, стоящие под знаком модуля, сохраняют знак;

3) на каждом из найденных промежутков решают уравнение без знака модуля.

Совокупность (объединение) решений указанных промежутков и составляет все решения рассматриваемого уравнения» [30].

Покажем применение этого алгоритма на некоторых примерах.

Пример 2.15. «Решите уравнение

$$|x + 3| = 2x - 1.$$

Решение.

Найдем критические точки: $x + 3 = 0$, $x = -3$.

Имеем:

1) при $x < -3$ получаем уравнение $-(x + 3) = 2x - 1$, то есть $-x - 3 = 2x - 1$, тогда $x = -\frac{2}{3}$. Найденное значение x не входит в рассматриваемый промежуток;

2) при $x \geq -3$ получаем уравнение $x + 3 = 2x - 1$, тогда $x = 4$. Найденное значение x входит в рассматриваемый промежуток.

Ответ: $x = 4$» [30].

Пример 2.16. «Решите уравнение

$$|x + 1| + |x - 5| = 8.$$

Решение.

Найдем критические точки: $x = -1$, $x = 5$.

Имеем:

1) при $x < -1$ получаем уравнение: $-(x + 1) - (x - 5) = 8$, то есть $-x - 1 - x + 5 = 8$, тогда имеем: $-2x = 4$, значит, $x = -2$. Найденное значение x входит в рассматриваемый промежуток;

2) при $-1 \leq x < 5$ получаем уравнение: $(x + 1) - (x - 5) = 8$, то есть $x + 1 - x + 5 = 8$, тогда имеем: $6 = 8$, значит, у этого уравнения нет решений;

3) при $x \geq 5$ получаем уравнение: $(x + 1) + (x - 5) = 8$, то есть $x + 1 + x - 5 = 8$, тогда имеем: $2x = 12$, значит, $x = 6$. Найденное значение x входит в рассматриваемый промежуток.

Ответ: $x = -2$, $x = 6$» [29].

«**Пример 2.17.** Решите уравнение

$$|x + 5| - |x - 3| = 8.$$

Решение.

Найдем критические точки: $x = -5$, $x = 3$.

Решаем задачу на каждом промежутке:

1) $x < -5$, получаем уравнение: $-(x + 5) + (x - 3) = 8$; $-x - 5 + x - 3 = 8$; $-8 = 8$ ложно, на рассматриваемом промежутке решений нет;

2) $-5 \leq x < 3$, получаем уравнение: $(x + 5) + (x - 3) = 8$, то есть $2x = 6$, $x = 3$ (не входит в рассматриваемый промежуток);

3) $x \geq 3$, получаем уравнение: $(x + 5) - (x - 3) = 8$, то есть $8 = 8$ верно. Уравнение выполняется при всех x из рассматриваемого промежутка.

Ответ: $x \in [3; +\infty)$» [30, с. 37].

Кроме того, при решении уравнений с модулем можно использовать не только определение модуля.

Так, «уравнение $f(|x|) = g(x)$ равносильно совокупности двух систем:

$$1) \begin{cases} f(x) = g(x), \\ x \geq 0 \end{cases} \text{или } 2) \begin{cases} f(-x) = g(x), \\ x < 0. \end{cases} \qquad (2.12)$$

Рассмотрим уравнение вида

$$|f(x)| = a. \qquad (2.13)$$

При $a < 0$ уравнение (2.13) решений не имеет.

При $a > 0$ уравнение (2.13) равносильно совокупности:

$$\left[\begin{array}{l} f(x) = a, \\ f(x) = -a. \end{array}\right. \qquad (2.14)$$

При $a = 0$ уравнение (2.13) равносильно уравнению

$$f(x) = 0.$$

Кроме того, уравнение $|f(x)| = g(x)$ равносильно системе или совокупности:

$$|f(x)| = g(x) \leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0; \\ \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x). \end{array}\right. \end{cases} \qquad (2.15)$$

$$|f(x)| = g(x) \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ f(x) = g(x); \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) < 0, \\ -f(x) = g(x). \end{cases} \end{array}\right. \qquad (2.16)$$

Уравнение вида $|f(x)| = |g(x)|$ равносильно совокупности уравнений:

$$|f(x)| = |g(x)| \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x) \text{» [29].} \end{array}\right. \qquad (2.17)$$

Пример 2.18. Решите уравнение

$$|x| = |2x - 5|.$$

Решение:

$$|x| = |2x - 5| \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2x - 5, \\ x = -(2x - 5) \end{array}\right. \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2x - 5, \\ x = -2x + 5 \end{array}\right. \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 5, \\ x = \frac{5}{3}. \end{array}\right.$$

Ответ: $x = 5,\ x = \frac{5}{3}$.

Отметим, что «*неравенства, содержащие переменную под знаком модуля*, решаются по схемам, аналогичным решению уравнений с модулем» [29].

Рассмотрим неравенство вида

$$|f(x)| \le a. \tag{2.18}$$

При $a < 0$ неравенство (2.18) решений не имеет.

При $a \ge 0$ неравенство (2.18) равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} f(x) \le a; \\ f(x) \ge -a. \end{cases} \tag{2.19}$$

При решении неравенства вида

$$|f(x)| \ge a \tag{2.20}$$

имеем, что при $a < 0$ решением неравенства (2.20) является любое x из области допустимых значений функции $f(x)$; при $a \ge 0$ неравенство (2.20) равносильно совокупности неравенств:

$$\begin{cases} f(x) \ge a; \\ f(x) \le -a. \end{cases} \tag{2.21}$$

Неравенство вида $|f(x)| \le g(x)$ равносильно системе неравенств:

$$|f(x)| \le g(x) \leftrightarrow \begin{cases} g(x) \ge 0; \\ f(x) \le g(x); \\ f(x) \ge -g(x). \end{cases} \tag{2.22}$$

Неравенство вида $|f(x)| \ge g(x)$ равносильно совокупности неравенств:

$$|f(x)| \ge g(x) \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) \ge g(x); \\ f(x) \le -g(x). \end{array}\right. \tag{2.23}$$

Неравенство вида $|f(x)| \ge |g(x)|$ равносильно неравенству:

$$f^2(x) \ge g^2(x) \leftrightarrow \big(f(x) - g(x)\big)\big(f(x) + g(x)\big) \ge 0, \tag{2.24}$$

решается методом интервалов.

В ходе решения неравенств с модулем могут применяться следующие свойства:

$$a \le |a|; \tag{2.25}$$

$$|a + b| \le |a| + |b|; \tag{2.26}$$

$$|a - b| \ge |a| - |b|\text{» [29].} \tag{2.27}$$

Пример 2.19. Решите неравенство

$$|x-3| < 4.$$

Решение.

Решением неравенства являются все значения x, которые удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} x-3<4; \\ x-3>-4. \end{cases}$$

Имеем: $\begin{cases} x-3<4; \\ x-3>-4 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x<7; \\ x>-1. \end{cases}$ Решением системы неравенств является $x \in (-1,7)$.

Ответ: $x \in (-1,7)$.

Пример 2.20. Решите неравенство

$$|x^2-5x| > 6.$$

Решение.

Данное неравенство раносильно совокупности двух неравенств:

$$|x^2-5x| > 6 \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-5x<-6; \\ x^2-5x>6 \end{array}\right. \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-5x+6<0; \\ x^2-5x-6>0. \end{array}\right.$$

Необходимо решить каждое неравенство. Тогда, решая неравенство $x^2-5x+6<0$, имеем: $(x-2)(x-3)<0$

$$(x^2-5x+6=0,\ (x-2)(x-3)=0;\ x_1=2,\ x_2=3).$$

Воспользуемся методом интервалов (рис. 2.1).

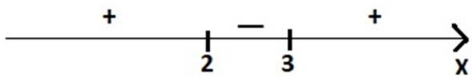


Рис. 2.1. Решение неравенства $x^2-5x+6<0$ методом интервалов

Решением неравенства $x^2-5x+6<0$ является промежуток $x \in (2, 3)$. Решая неравенство $x^2-5x-6>0$, получим: $(x-6)(x+1)>0$.

Применим также метод интервалов (рис. 2.2).

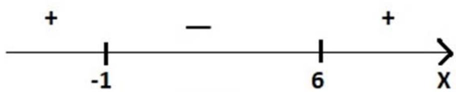


Рис. 2.2. Решение неравенства $x^2-5x-6>0$ методом интервалов

Решением неравенства $x^2-5x-6>0$ является промежуток $x \in (-\infty; -1) \cup (6; +\infty)$.

Таким образом, множеством решений исходного неравенства является объединение множеств: $x \in (-\infty; -1) \cup (2, 3) \cup (6; +\infty)$.

Ответ: $x \in (-\infty; -1) \cup (2, 3) \cup (6; +\infty)$.

Пример 2.21. Решите неравенство $|x - 3| > x + 1$, используя определение модуля.

Решение.

По определению модуля получим:

$$\begin{cases} x - 3 \geq 0; \\ x - 3 > x + 1 \end{cases} (1) \text{ или } \begin{cases} x - 3 < 0; \\ -(x - 3) > x + 1. \end{cases} (2)$$

Решим каждую систему неравенств:

$$\begin{cases} x \geq 3; \\ 0 \cdot x > 4 \end{cases} (1) \text{ или } \begin{cases} x < 3; \\ x < 1. \end{cases} (2)$$

Система неравенств (1) не имеет решений, решением системы неравенств (2) является промежуток $x \in (-\infty; 1)$.

Объединив решения систем неравенств (1) и (2), получим решение исходного неравенства $|x - 3| > x + 1$, то есть $x \in (-\infty; 1)$.

Ответ: $x \in (-\infty; 1)$.

Пример 2.22. Найдите множество решений неравенства

$$|x^2 + 3x - 4| > |3x|.$$

Решение.

Исходное неравенство равносильно неравенству

$$(x^2 + 3x - 4)^2 > (3x)^2.$$

Имеем:

$$(x^2 + 3x - 4)^2 - (3x)^2 > 0,$$

$$(x^2 + 3x - 4 - 3x)(x^2 + 3x - 4 + 3x) > 0,$$

$$(x^2 - 4)(x^2 + 6x - 4) > 0.$$

Решим уравнение $x^2 + 6x - 4 = 0$. Найдем $D = 36 + 16 = 52$.

Имеем: $x_{1;2} = \dfrac{-6 \pm 2\sqrt{13}}{2}$. Значит, $x_1 = -3 + \sqrt{13}$, $x_2 = -3 - \sqrt{13}$.

Тогда получим: $(x-2)(x+2)(x+3-\sqrt{13})(x+3+\sqrt{13}) > 0$.

Решением исходного неравенства является промежуток (рис. 2.3):

$$x \in (-\infty; -3-\sqrt{13}) \cup (-2; -3+\sqrt{13}) \cup (2; +\infty).$$

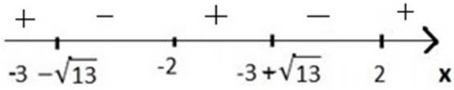


Рис. 2.3. Решение неравенства $|x^2 + 3x - 4| > |3x|$

Ответ: $x \in (-\infty; -3-\sqrt{13}) \cup (-2; -3+\sqrt{13}) \cup (2; +\infty)$.

Методические указания по выполнению самостоятельной работы студентов

Для выполнения заданий самостоятельной работы следует изучить представленный выше теоретический материал, разобрать и записать решения типовых заданий по теме, изучить рекомендуемую литературу.

В случае возникновения затруднений при изучении теоретического материала и выполнении практических заданий студент может получить консультацию у преподавателя.

Блок 1

Задание 1. Решите уравнения:

а) $(x^2-6x)^2-2(x-3)^2=81$; б) $2x^8+x^4-15=0$;

в) $x^3+6x+4x^2+3=0$; г) $2x^4-x^3-9x^2+13x-5=0$.

Задание 2. Найдите корни уравнения:

$$\frac{12x+1}{6x-2}-\frac{9x-5}{3x+1}=\frac{108x-36x^2-9}{4(9x^2-1)}.$$

Задание 3. Решите уравнения

а) $\sqrt{x+2}-\sqrt{x-6}=2$; б) $\sqrt{x+\sqrt{x+11}}+\sqrt{x-\sqrt{x+11}}=4$.

Задание 4. Решите уравнение с помощью теоремы, обратной теореме Виета, для 3-й степени: $x^3-4x^2+x+6=0$.

Задание 5. Решите уравнения:

а) $(x-2)^2-4(x^2-4x+6)+38=x$; б) $x^4+5x^3+2x^2+5x+1=0$;
в) $(x^2-1)^2+5(x^4-1)-6(x^2+1)^2=0$; г) $x^4-8x^3+24x^2-8x=65$;
д) $2x^4-3x^3-x^2-3x+2=0$.

Блок 2

Задание 1. Решите уравнения:

а) $|x + 5| = 8$; б) $|3{,}7 - x| = -9x + 6$;

в) $|9x - 8| = 4x + 1$; г) $|x^2 - 6x + 7| = |3x - 11|$.

Задание 2. Решите уравнения:

а) $|x + 2| - \lceil x - 5 \rceil = 3$; б) $2 \cdot |1 - x| - 3 \cdot \lceil x + 2 \rceil = 2$;

в) $|x + 3| + |x - 7| = 10$.

Задание 3. Решите неравенства:

а) $|x + 5| < 0$; б) $|17 - x| \geq 11$; в) $|3{,}7 - x| \geq -9$;

г) $|6 - x| + |x - 7| > 12$; д) $|x + 3| \leq 4$; е) $\frac{x^2+4x+3}{|x+1|} \leq 0$.

ж) $|2x - 5| \leq x$; и) $|x^2 + x - 1| < 2x - 1$.

Контрольные вопросы

1. Что такое уравнение, корень уравнения? Что значит решить уравнение?
2. Какие уравнения называют линейными, квадратными, дробно-рациональными? Какими методами они решаются?
3. Сформулируйте прямую и обратную теоремы Виета.
4. Какими способами решаются иррациональные уравнения?
5. Что такое модуль числа?
6. Какие способы решения уравнений, содержащих переменную под знаком модуля, вы знаете?
7. Опишите алгоритм решения уравнений с модулем методом промежутков.
8. На чем может быть основано решение неравенств, содержащих переменную под знаком модуля?
9. Какие свойства могут применяться при решении неравенств с модулем?

Рекомендуемая литература

1. Иррациональные уравнения и неравенства / В. В. Гарбарук, В. И. Родин, И. М. Соловьева, М. А. Шварц // Решение задач по математике : адаптивный курс для студентов технических вузов : учеб. пособие / В. В. Гарбарук, В. И. Родин, И. М. Соловьева, М. А. Шварц. – Санкт-Петербург [и др.], 2017. – С. 211–226. – URL: e.lanbook.com/book/99281 (дата обращения: 10.12.2024). – Режим доступа: по подписке. – ISBN 978-5-8114-2618-8.
2. Кытманов, А. М. Алгебраические неравенства / А. М. Кытманов, Е. К. Лейнартас, С. Г. Мысливец // Математика : адаптационный курс : учеб. пособие / А. М. Кытманов, Е. К. Лейнартас, С. Г. Мысливец. – Санкт-Петербург [и др.], 2022. – Глава 6. – С. 98–103. – URL: e.lanbook.com/book/211088 (дата обращения: 10.12.2024). – Режим доступа: по подписке. – ISBN 978-5-8114-1472-7.
3. Кытманов, А. М. Алгебраические уравнения и системы уравнений / А. М. Кытманов, Е. К. Лейнартас, С. Г. Мысливец // Математика : адаптационный курс : учеб. пособие / А. М. Кытманов, Е. К. Лейнартас, С. Г. Мысливец. – Санкт-Петербург [и др.], 2022. – Глава 4. – С. 61–70. – URL: e.lanbook.com/book/211088 (дата обращения: 10.12.2024). – Режим доступа: по подписке. – ISBN 978-5-8114-1472-7.
4. Кытманов, А. М. Рациональные неравенства / А. М. Кытманов, Е. К. Лейнартас, С. Г. Мысливец // Математика : адаптационный курс : учеб. пособие / А. М. Кытманов, Е. К. Лейнартас, С. Г. Мысливец. – Санкт-Петербург [и др.], 2022. – Глава 5. – С. 82–91. – URL: e.lanbook.com/book/211088 (дата обращения: 10.12.2024). – Режим доступа: по подписке. – ISBN 978-5-8114-1472-7.
5. Кытманов, А. М. Рациональные уравнения / А. М. Кытманов, Е. К. Лейнартас, С. Г. Мысливец // Математика : адаптационный курс : учеб. пособие / А. М. Кытманов, Е. К. Лейнартас, С. Г. Мысливец. – Санкт-Петербург [и др.], 2022. – Глава 3. – С. 44–53. – URL: e.lanbook.com/book/211088 (дата обращения: 10.12.2024). – Режим доступа: по подписке. – ISBN 978-5-8114-1472-7.

6. Решение задач по математике : адаптивный курс для студентов технических вузов : учеб. пособие / В. В. Гарбарук, В. И. Родин, И. М. Соловьева, М. А. Шварц. – Санкт-Петербург [и др.] : Лань, 2017. – 686 с. – Из содерж.: [Главы] 3–6. – С. 44–135. – URL: e.lanbook.com/book/99281 (дата обращения: 10.12.2024). – Режим доступа: по подписке. – ISBN 978-5-8114-2618-8.

Тема 3. Понятие функции. Линейная и квадратичная функции. Построение графиков функций. Область определения и множество значений функции

Форма проведения: практическое занятие.

Вопросы для обсуждения

1. Понятие функции. Способы задания функций.
2. Основные элементарные функции.
3. Понятие графика функции. Построение графиков функций.
4. Простейшие преобразования графиков функций.
5. Основные свойства функций.

Методические указания по проведению занятия

На практическом занятии студенты повторяют основные понятия и теоретические сведения по теме, выполняют практические задания под руководством преподавателя, отвечают на контрольные вопросы.

Методические материалы к занятию

Из школьного курса вам известно, что:

– «соответствие, по которому каждому элементу x множества X сопоставляется единственный элемент y множества Y, называется функцией (отображением), определенной на множестве X со значениями в множестве Y» [31];

– функция обозначается: $y = f(x)$, где $f: X \to Y$;

– элемент $x \in X$ называется аргументом, или независимой переменной; множество X – областью определения функции $y = f(x)$ и обозначается $D(f)$;

– элемент $y \in Y$ называется значением функции, или зависимой переменной; множество Y – областью значений функции $y = f(x)$ и обозначается $E(f)$;

– графиком функции $y = f(x)$ называется множество всех точек координатной плоскости с координатами $(x; f(x))$, абсциссы которых равны значениям аргумента, а ординаты – соответствующим значениям функции;

– функцию можно задать несколькими способами: аналитическим (формулой), графическим, табличным, а также словесным.

В 7–11-м классах вами были изучены следующие основные элементарные функции:

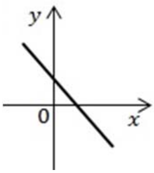
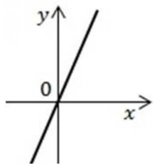
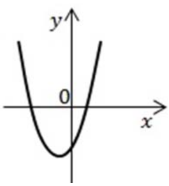
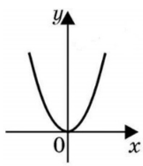
$$y = kx;\ y = kx + b;\ y = \frac{k}{x};\ y = x^2;\ y = x^3;$$

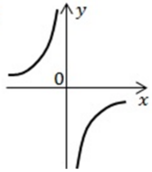
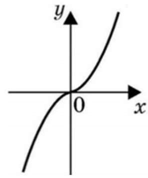
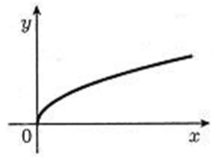
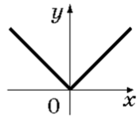
$$y = ax^2 + bx + c\ (a \neq 0);\ y = |x|;\ y = \sqrt{x};\ y = x^n, y = \sqrt[n]{x}.$$

Рассмотрим ниже графики некоторых из них (табл. 1).

Таблица 1

Графики некоторых элементарных функций

Функция и ее график	
Линейная функция, $y = kx + b$ 	Прямая пропорциональность, $y = kx$ 
Квадратичная функция, $y = ax^2 + bx + c$ 	$y = x^2$ 

Функция и ее график	
Обратная пропорциональность, $y = \frac{k}{x}$  	$y = x^3$ 
$y = \sqrt{x}$  	$y = \|x\|$ 

Кроме того, напомним «некоторые простейшие преобразования графиков функций.

1. График функции $y = -f(x)$ симметричен графику функции $y = f(x)$ относительно оси абсцисс.

2. График функции $y = f(-x)$ симметричен графику функции $y = f(x)$ относительно оси ординат.

3. График функции $y = -f(-x)$ симметричен графику функции $y = f(x)$ относительно начала координат.

4. График функции $y = f(x + a)$ получается из графика функции $y = f(x)$ с помощью параллельного переноса (сдвига) последнего вдоль оси OX на $|a|$ единиц масштаба влево, если $a > 0$, и на $|a|$ единиц вправо, если $a < 0$.

5. График функции $y = f(x) + b$ получается из графика функции $y = f(x)$ с помощью параллельного переноса (сдвига) последнего вдоль оси OY на $|b|$ единиц масштаба вверх, если $b > 0$, и на $|b|$ единиц вниз, если $b < 0$.

6. График функции $y = f(\mathrm{k}x)$ получается из графика функции $y = f(x)$ с помощью сжатия по оси абсцисс исходного графика пропорционально коэффициенту k при аргументе (если $k > 1$, то гра-

фик сжимается в k раз, а если $0 < k < 1$, то график растягивается в $\frac{1}{k}$ раз). Если $k < 0$, то нужно сначала построить график функции $y = f(|k|x)$, а затем отразить его симметрично относительно оси OY» [9].

7. «График функции $y = mf(x)$ получается из графика функции $y = f(x)$ с помощью растяжения по оси ординат исходного графика пропорционально коэффициенту m (если $m > 1$, то график растягивается в m раз, а если $0 < m < 1$, то график сжимается в $\frac{1}{m}$ раз). Если $m < 0$, то нужно сначала построить график функции $y = |m| f(x)$, а затем отразить его симметрично относительно оси OX.

8. График функции $y = mf(kx + a) + b$ строят, применяя в определенной последовательности описанные выше преобразования. Сначала строим график функции $y = f(x + a)$. Затем график функции $y = f(kx + a)$. Далее строим график функции $y = mf(kx + a)$. Наконец, получаем график функции $y = mf(kx + a) + b$» [13].

Ниже представим правила построения графиков *функций, содержащих знак модуля*.

9. «Чтобы построить график функции $y = |f(x)|$ из графика функции $y = f(x)$, нужно ту часть графика функции $y = f(x)$, которая находится ниже оси OX, отразить симметрично относительно этой оси; а часть графика функции $y = f(x)$, которая находится выше оси OX, оставить без изменения.

10. Чтобы построить график функции $y = f(|x|)$ из графика функции $y = f(x)$, нужно часть графика функции $y = f(x)$, лежащую правее оси OY, оставить без изменения, а вместо оставшейся части графика нарисовать кривую, получающуюся отражением первой части графика функции $y = f(x)$ относительно оси OY.

11. Чтобы построить график функции $y = |f(|x|)|$ из графика функции $y = f(x)$, нужно сначала построить график функции $y = f(|x|)$ согласно второму правилу (п. 10), а затем из полученного графика построить график функции $y = |f(|x|)|$ согласно первому правилу (п. 9)» [9].

Рассмотрим примеры решения заданий по данной теме.

Пример 3.1. «Установите соответствие между графиками элементарных функций, представленными на рис. 3.1, и формулами, задающими их:
1) $y = x^2 - 2$; 2) $y = 2x$; 3) $y = -\frac{2}{x}$.

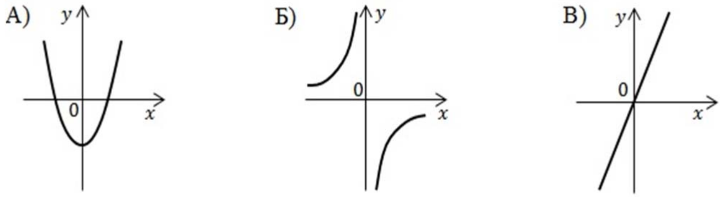


Рис. 3.1. Графики функций к примеру 3.1

Ответ: А – 1 (парабола, сдвинутая вниз на 2 единицы масштаба), Б – 3 (гипербола), В – 2 (график прямой пропорциональности)» [33].

Пример 3.2. «На рис. 3.2 представлены графики квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$. Для каждого из них укажите соответствующие ему значения коэффициента a и дискриминанта D:
1) $a > 0$, $D > 0$; 2) $a > 0$, $D < 0$; 3) $a < 0$, $D > 0$; 4) $a < 0$, $D < 0$.

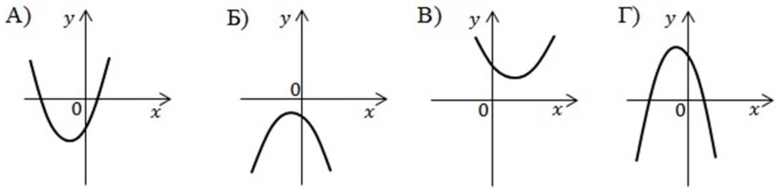


Рис. 3.2. Графики функций к примеру 3.2

Ответ: А – 1 (так как ветви параболы направлены вверх, то $a > 0$; пересекает ось OX в двух точках, значит, $D > 0$); Б – 4 (так как ветви параболы направлены вниз, то $a < 0$; не пересекает ось OX, значит, $D < 0$); В – 2 (так как ветви параболы направлены вверх, то $a > 0$; не пересекает ось OX, значит, $D < 0$); Г – 3 (аналогично)» [11].

Пример 3.3. Найдите область определения функции:

А. $y = \frac{5-x}{2} + \sqrt{-x^2 + 5x - 6}$.

Б. $y = \frac{3}{2-x} + \sqrt{x-1}$.

В. $y = \frac{1}{\sqrt{4x-1}} + \sqrt{1-x}$.

Г. $y = \frac{24x-7}{x^2-5x+6}$.

Решение.

А. Для того чтобы найти область определения функции, надо решить неравенство $-x^2 + 5x - 6 \geq 0$. Имеем: $x^2 - 5x + 6 \leq 0$, решением данного неравенства является промежуток $x \in [2; 3]$. Значит, $D(f) = [2; 3]$.

Б. Для того чтобы найти область определения функции, надо решить систему неравенств: $\begin{cases} x - 1 \geq 0; \\ 2 - x \neq 0. \end{cases}$ Имеем: $\begin{cases} x \geq 1; \\ x \neq 2. \end{cases}$ Тогда решением данной системы неравенств является промежуток $x \in [1, 2) \cup (2, +\infty)$. Значит, $D(f) = [1, 2) \cup (2, +\infty)$.

В. Для того чтобы найти область определения функции, надо решить систему неравенств: $\begin{cases} 1 - x \geq 0; \\ 4x - 1 > 0. \end{cases}$ Имеем: $\begin{cases} x \leq 1; \\ x > 0{,}25. \end{cases}$ Тогда решением данной системы неравенств является промежуток $x \in (0{,}25; 1]$. Значит, $D(f) = (0{,}25; 1]$.

Г. Для того чтобы найти область определения функции, надо определить, при каких значениях x $x^2 - 5x + 6 \neq 0$. Имеем: $x \neq 2$, $x \neq 3$. Значит, $D(f) = (-\infty, 2) \cup (2, 3) \cup (3, +\infty)$.

Ответ: А. $D(f) = [2; 3]$. Б. $D(f) = [1, 2) \cup (2, +\infty)$.
В. $D(f) = (0{,}25; 1]$. Г. $D(f) = (-\infty, 2) \cup (2, 3) \cup (3, +\infty)$.

Пример 3.4. «На рис. 3.3 представлен график квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$. Определите по графику: 1) промежуток возрастания функции; 2) наибольшее значение функции; 3) $f(-4)$, $f(2)$.

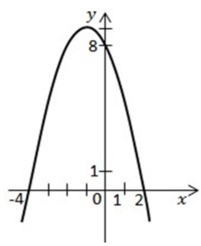


Рис. 3.3. График функции к примеру 3.4

Ответ: 1) функция возрастает на промежутке $x \in (-\infty; -1]$; 2) наибольшее значение данной функции равно 9; 3) $f(-4) = f(2) = 0$» [32].

Пример 3.5. Постройте график функции $y = (x + 3)^2 - 4$.

Решение.

График функции $y = (x + 3)^2 - 4$ строится из графика функции $y = x^2$ параллельным переносом вдоль оси OX на 3 единицы масштаба влево и вдоль оси OY на 4 единицы масштаба вниз (рис. 3.4).

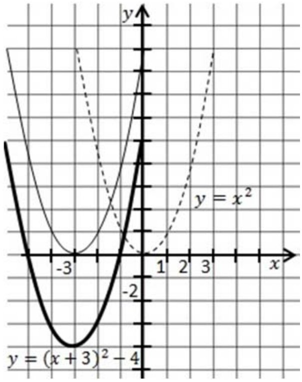


Рис. 3.4. График функции $y = (x + 3)^2 - 4$

Пример 3.6. Постройте график функции $y = \sqrt{x-1} - 1$.

Решение.

График функции $y = \sqrt{x-1} - 1$ строится из графика функции $y = \sqrt{x}$ параллельным переносом вдоль оси OX на 1 единицу масштаба вправо и вдоль оси OY на 1 единицу масштаба вниз (рис. 3.5).

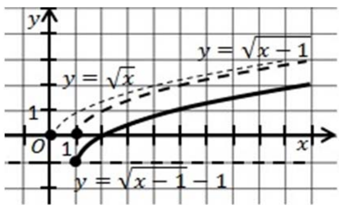


Рис. 3.5. График функции $y = \sqrt{x-1} - 1$

Пример 3.7. «Постройте график функции $y = |x^2 + 2x - 3|$. Какое наибольшее число общих точек график данной функции может иметь с прямой, параллельной оси OX?» [36].

Решение.

1. Построим график функции $y = x^2 + 2x - 3$. Так, имеем:

$$y = x^2 + 2x - 3 = (x^2 + 2x + 1) - 4 = (x + 1)^2 - 4.$$

График функции $y = (x + 1)^2 - 4$ получим из графика функции $y = x^2$ параллельным переносом вдоль оси OX на 1 единицу влево и вдоль оси OY на 4 единицы вниз, шаги построения которого изображены пунктиром (рис. 3.6).

2. Построим график функции $y = |x^2 + 2x - 3|$. Для этого симметрично отобразим ту часть графика функции $y = |x^2 + 2x - 3|$, где $y < 0$ относительно оси OX, который изображен сплошной линией на рис. 3.6.

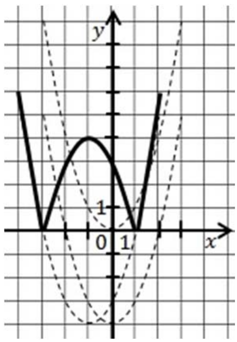


Рис. 3.6. График функции $y = |x^2 + 2x - 3|$

3. По графику видно, что прямая, параллельная оси OX, может пересекать график только либо в двух точках, либо в трех точках, либо в четырех точках, либо не иметь общих точек с графиком данной функции, то есть наибольшее число общих точек равно четырем.

Ответ: 4.

Методические указания по выполнению самостоятельной работы студентов

Для выполнения заданий самостоятельной работы следует изучить представленный выше теоретический материал, разобрать и записать решения типовых заданий по теме, изучить рекомендуемую литературу.

В случае возникновения затруднений при изучении теоретического материала и выполнении практических заданий студент может получить консультацию у преподавателя.

Задание 1. Найдите область определения функций:

а) $f(x)=\sqrt{\frac{(x-25)\cdot(6+x)}{16-x^2}}$; б) $f(x)=\sqrt{7x-x^2-10}+\sqrt{\frac{1}{4x^2-20x+25}}$;

в) $y=\frac{x+3}{\sqrt{x^3-x^2-x+1}}$; г) $y=\frac{1}{x^2+x-2}+\sqrt{\frac{x+3}{5-3x}}$.

Задание 2. Решите графически уравнения:

а) $-x^3+2=x+4$; б) $(x-3)^2=\sqrt{x-3}$; в) $(x-2)^2=-x^2+10$;

г) $\sqrt{x+3}=-1-x$; д) $\sqrt{x-1}=3-x$; е) $|x-1|=(x+2)^2+1$.

Задание 3. Пусть $f(x)=x^2, \varphi(x)=x^3+x+1$. Найдите:

а) $f^2(x)+\varphi(x^2)$; б) $f(x^3)\cdot\varphi(x^2)$; в) $f\big(\varphi(x)\big)$; г) $\varphi(f(x))$.

Задание 4. Выясните, какие из функций являются четными, нечетными или функциями общего вида (ФОВ):

а) $f(x)=\frac{1}{1+|x|+x^2}-\frac{x^3}{x^2+1}$; б) $f(x)=\frac{x+4}{x-4}+\frac{x-4}{x+4}$;

в) $f(x)=(x+1)^4+(x-1)^4$.

Задание 5. Постройте графики функций:

а) $y=|x^2-4x+3|$; б) $y=-x^2-6|x|+5$; в) $y=\left|\frac{x+3}{x+1}\right|$;

г) $y=\frac{|x|-1}{|x|+2}$; д) $y=|x-1|-2|x|+3|x+2|$.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение понятия функции.
2. Что называется аргументом, значением функции?
3. Что такое область определения функции, область значений функции? Как они обозначаются?
4. Назовите основные способы задания функций.
5. Перечислите элементарные функции, изученные вами в 7—11-м классах.
6. Сформулируйте определение графика функции.
7. Какие свойства функций известны вам из школьного курса математики?

8. В каком случае график функции симметричен относительно начала координат? В каком случае график функции симметричен относительно оси ординат, оси абсцисс?
9. Сформулируйте правила преобразования графиков функций вдоль оси ординат, вдоль оси абсцисс.
10. Сформулируйте правила растяжения/сжатия графиков функций по оси ординат, по оси абсцисс.
11. Приведите правила построения графиков функций, содержащих знак модуля.

Рекомендуемая литература

1. Кытманов, А. М. Функции и их графики / А. М. Кытманов, Е. К. Лейнартас, С. Г. Мысливец // Математика : адаптационный курс : учеб. пособие / А. М. Кытманов, Е. К. Лейнартас, С. Г. Мысливец. – Санкт-Петербург [и др.], 2022. – Глава 12. – С. 185–190. – URL: e.lanbook.com/book/211088 (дата обращения: 10.12.2024). – Режим доступа: по подписке. – ISBN 978-5-8114-1472-7.
2. Решение задач по математике : адаптивный курс для студентов технических вузов : учеб. пособие / В. В. Гарбарук, В. И. Родин, И. М. Соловьева, М. А. Шварц. – Санкт-Петербург [и др.] : Лань, 2017. – 686 с. – Из содерж.: [Главы] 3–4. – С. 44, 66. – URL: e.lanbook.com/book/99281 (дата обращения: 10.12.2024). – Режим доступа: по подписке. – ISBN 978-5-8114-2618-8.
3. Функции / В. В. Гарбарук, В. И. Родин, И. М. Соловьева, М. А. Шварц // Решение задач по математике : адаптивный курс для студентов технических вузов : учеб. пособие / В. В. Гарбарук, В. И. Родин, И. М. Соловьева, М. А. Шварц. – Санкт-Петербург [и др.], 2017. – С. 187–206. – URL: e.lanbook.com/book/99281 (дата обращения: 10.12.2024). – Режим доступа: по подписке. – ISBN 978-5-8114-2618-8.

Тема 4. Определение синуса, косинуса, тангенса и котангенса в прямоугольном треугольнике

Форма проведения: практическое занятие.

Вопросы для обсуждения

1. Прямоугольный треугольник, его элементы.
2. Определения тригонометрических функций в прямоугольном треугольнике.
3. Основное тригонометрическое тождество, следствия из него.
4. Некоторые теоремы планиметрии, в том числе теорема Пифагора.
5. Таблица значений основных тригонометрических функций для углов 30°, 45° и 60°.
6. Примеры решения задач о нахождении элементов прямоугольного треугольника.

Методические указания по проведению занятия

На практическом занятии студенты повторяют основные понятия и теоретические сведения по теме, выполняют практические задания под руководством преподавателя, отвечают на контрольные вопросы.

Методические материалы к занятию

Рассмотрим прямоугольный треугольник *ABC* (рис. 4.1). «Для острого угла α найдем прилежащий к нему катет и противолежащий. Так, *катет a* этого треугольника является *противолежащим* углу α, а *катет b – прилежащим* к углу α» [4].

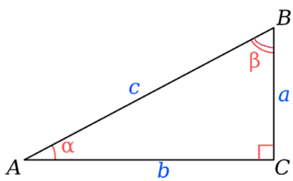


Рис. 4.1

Из школьного курса геометрии вам известно, что:

«1. *Синусом* острого угла прямоугольного треугольника называется отношение противолежащего катета к гипотенузе.

2. *Косинусом* острого угла прямоугольного треугольника называется отношение прилежащего катета к гипотенузе.

3. *Тангенсом* острого угла прямоугольного треугольника называется отношение противолежащего катета к прилежащему» [2].

Значит,

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}, \cos\alpha = \frac{b}{c}, \operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\sin x}{\cos x}, \operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a} = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

4. Кроме того,

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}.$$

Если внимательно посмотреть на прямоугольный треугольник, то всего можно составить шесть отношений сторон. Неиспользованными остались отношения гипотенузы к катетам треугольника.

5. *Се́кансом* острого угла прямоугольного треугольника называется отношение гипотенузы к катету, прилежащему к данному углу.

6. *Ко́секансом* острого угла прямоугольного треугольника называется отношение гипотенузы к катету, противолежащему к данному углу.

То есть

$$\sec\alpha = \frac{c}{b} = \frac{1}{\cos\alpha}, \operatorname{cosec}\alpha = \frac{c}{a} = \frac{1}{\sin\alpha}.$$

При решении задач часто используют также и другие соотношения между элементами прямоугольного треугольника (табл. 2).

Основное тригонометрическое тождество легко выводится с помощью определений синуса и косинуса острых углов, а также теоремы Пифагора:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = \frac{a^2+b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} = 1.$$

Таблица 2

Основные соотношения, связанные с углами прямоугольного треугольника

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ – основное тригонометрическое тождество	
$1 + \mathrm{tg}^2\,\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$	$1 + \mathrm{ctg}^2\,\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$
$\alpha + \beta = 90°$	$\cos\alpha = \sin\beta$
$\sin\alpha = \cos\beta$	$\mathrm{tg}\,\alpha = \mathrm{ctg}\,\beta$

С помощью почленного деления либо на $\sin^2\alpha$, либо на $\cos^2\alpha$ можно получить два других соотношения:

$$\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} + \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow 1 + \mathrm{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha},$$

$$\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha} + \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha} \Leftrightarrow 1 + \mathrm{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}.$$

Кроме того, при решении задач на отношения между сторонами и углами в прямоугольном треугольнике применяют следующие *утверждения*:

– «сумма углов любого треугольника равна 180°;
– сумма двух острых углов прямоугольного треугольника равна 90°;
– квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов (*теорема Пифагора*);
– катет, лежащий напротив угла в 30°, равен половине гипотенузы;
– высота прямоугольного треугольника (рис. 4.2)*, проведенная из вершины прямого угла, есть среднее пропорциональное для отрезков, на которые делится гипотенуза этой высотой, то есть $h_c^2 = b_c \cdot a_c$;
– катет прямоугольного треугольника (рис. 4.2) есть среднее пропорциональное для гипотенузы и отрезка гипотенузы, заключенного между катетом и высотой, проведенной из вершины прямого угла, то есть $a^2 = c \cdot a_c$, $b^2 = c \cdot b_c$» [2].

* Номер этого и последующих рисунков из библиографических источников изменены автором.

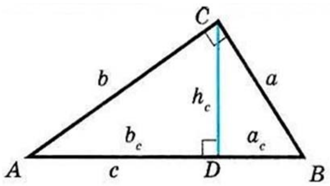


Рис. 4.2

В табл. 3 приведены значения sin α, cos α и tg α для углов α, равных 30°, 45° и 60°.

Таблица 3

Значения синуса, косинуса и тангенса для углов 30°, 45° и 60°

α	30°	45°	60°
sin α	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos α	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg α	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Пример 4.1. «Найдите синус, косинус, тангенс и котангенс углов треугольника *ABC* с прямым углом *C*, если *BC* = 12, *AC* = 9» [2].

Решение.

По теореме Пифагора имеем: $AB = \sqrt{12^2 + 9^2} = 15$. По определениям синуса, косинуса и тангенса острого угла в прямоугольном треугольнике получим (рис. 4.3):

$$\sin\alpha = \frac{BC}{AB} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5},\quad \cos\alpha = \frac{AC}{AB} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5},\quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3};$$

$$\sin\beta = \frac{AC}{AB} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5},\quad \cos\beta = \frac{BC}{AB} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5},\quad \operatorname{tg}\beta = \frac{AC}{BC} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4};$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{AC}{BC} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4},\quad \operatorname{ctg}\beta = \frac{BC}{AC} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}.$$

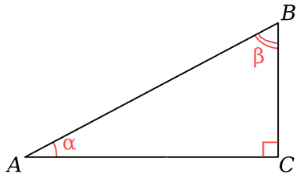


Рис. 4.3

В соответствии с табл. 2 действительно имеем, что:

$$\cos\alpha = \sin\beta = \frac{3}{5}, \quad \sin\alpha = \cos\beta = \frac{4}{5},$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{ctg}\beta = \frac{4}{3}, \quad \operatorname{tg}\beta = \operatorname{ctg}\alpha = \frac{3}{4}.$$

Ответ: $\cos\alpha = \sin\beta = \frac{3}{5}$, $\sin\alpha = \cos\beta = \frac{4}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{ctg}\beta = \frac{4}{3}$, $\operatorname{tg}\beta = \operatorname{ctg}\alpha = \frac{3}{4}$.

Пример 4.2. В треугольнике ABC (рис. 4.4): $\angle C = 90°$, $\sin\beta = \frac{7}{25}$. Найдите AB, если $BC = 4{,}8$.

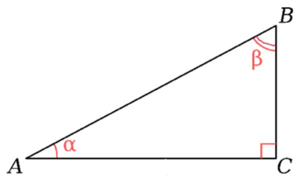


Рис. 4.4

Решение.

Так как косинус острого угла в прямоугольном треугольнике равен отношению прилежащего к этому углу катета к гипотенузе, то

$$\cos\beta = \frac{BC}{AB} = \frac{4{,}8}{AB} \Longrightarrow AB = \frac{4{,}8}{\cos\beta}.$$

С помощью основного тригонометрического тождества $\cos^2\beta + \sin^2\beta = 1$ найдем

$$\cos\beta = \sqrt{1-\sin^2\beta} = \sqrt{1-\left(\frac{7}{25}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{49}{625}} = \sqrt{\frac{576}{625}} = \frac{24}{25} = 0{,}96.$$

Тогда

$$AB = \frac{4{,}8}{\cos\beta} = \frac{4{,}8}{0{,}96} = 5.$$

Ответ: $AB = 5$.

Пример 4.3. В треугольнике *ABC* (рис. 4.5) $\angle C = 90°$. Известно, что $\angle B = 60°$, $AB = 18$. Найдите *AC*.

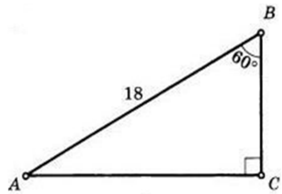


Рис. 4.5

Решение.

Так как сумма двух острых углов прямоугольного треугольника равна 90°, то $\angle A = 90° - 60° = 30°$. Найдем *BC*: $BC = \frac{18}{2} = 9$, так как катет, лежащий напротив угла в 30°, равен половине гипотенузы. По теореме Пифагора найдем катет *AC*:

$$AC = \sqrt{18^2 - 9^2} = \sqrt{(18+9)\cdot(18-9)} = \sqrt{27\cdot 9} = 9\sqrt{3}.$$

Ответ: $AC = 9\sqrt{3}.$

Пример 4.4. В треугольнике *ABC* (рис. 4.6) $\angle C = 90°$, *CD* – высота. Известно, что $\angle ACD = 30°$, $AC = 6$. Найдите BC.

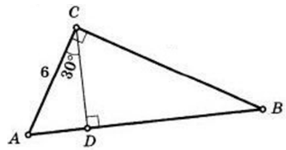


Рис. 4.6

Решение.

Рассмотрим прямоугольный треугольник *ADC*. $AD = 3$, так как катет, лежащий напротив угла в 30°, равен половине гипотенузы. По теореме Пифагора найдем высоту *CD*:

$$CD = \sqrt{6^2 - 3^2} = \sqrt{36 - 9} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}.$$

Рассмотрим прямоугольный треугольник *BDC*. $\angle C = 90°$, значит, $\angle CBD = 90° - 60° = 30°$. Тогда

$$BC = \frac{3\sqrt{3}}{\sin 30°} = \frac{3\sqrt{3}}{0{,}5} = 6\sqrt{3}.$$

Ответ: $BC = 6\sqrt{3}.$

Пример 4.5. В треугольнике ABC (рис. 4.7) $\angle C = 90°$, CD – высота. Известно, что $AC = BC$, $CD = 12$. Найдите BC.

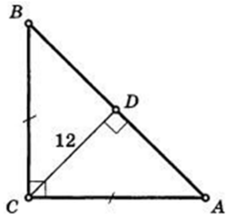


Рис. 4.7

Решение.

Так как в прямоугольном треугольнике ABC $AC = BC$, то он равнобедренный, $\angle A = \angle B = 45°$.

Рассмотрим прямоугольный треугольник CDB. Имеем:

$$\sin 45° = \frac{CD}{CB} = \frac{12}{CB}.$$

Тогда

$$BC = \frac{12}{\sin 45°} = \frac{12}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 12\sqrt{2}.$$

Ответ: $BC = 12\sqrt{2}$.

Пример 4.6. В прямоугольном треугольнике ABC (рис. 4.8) $AB = 13$, $\operatorname{tg} B = \frac{1}{5}$. Найдите BD.

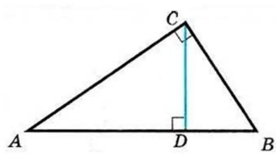


Рис. 4.8

Решение.

Первый способ. Известно, что $\operatorname{tg} B = \frac{CD}{BD} = \frac{1}{5}$. Рассмотрим прямоугольный треугольник CDB, в котором $\cos B = \frac{BD}{CB}$.

Тогда $BD = BC \cdot \cos B$. Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC, в котором $\cos B = \frac{BC}{AB}$. Значит, $BC = AB \cdot \cos B$. Имеем:

$$BD = BC \cdot \cos B = (AB \cdot \cos B) = AB \cdot \cos^2 B.$$

Из тождества $1+\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$ найдем: $\cos^2 B=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 B}$, тогда $BD=AB\cdot\cos^2 B=\frac{AB}{1+\operatorname{tg}^2 B}=\frac{13}{1+0{,}04}=12{,}5$.

Второй способ. Пусть $AC=x$, тогда $BC=5x$. По теореме Пифагора: $AB^2=AC^2+BC^2$, тогда $13^2=x^2+(5x)^2$. Получим: $169=26x^2$. $AC=x=\frac{13}{\sqrt{26}}=\frac{13}{\sqrt{2\cdot13}}=\frac{13\sqrt{13}}{\sqrt{2}\cdot13}=\sqrt{\frac{13}{2}}$, $BC=5x=5\sqrt{\frac{13}{2}}$.

Так как $BC^2=AB\cdot BD$, то $\left(5\sqrt{\frac{13}{2}}\right)^2=13\cdot BD$. Следовательно, $BD=\frac{25\cdot13}{2}\cdot\frac{1}{13}=12{,}5$.

Ответ: $BD=12{,}5$.

Пример 4.7. В прямоугольном треугольнике ABC (рис. 4.8) $AC=8$, $\sin B=\frac{1}{2}$. Найдите AD.

Решение.

Рассмотрим прямоугольные треугольники ABC и CDB, имеем: $\angle CBD=\angle DCA$ как острые углы со взаимно перпендикулярными сторонами.

Тогда $\sin\angle DCA=\frac{AD}{BC}=\frac{1}{2}$. Следовательно, $AD=\frac{BC}{2}=\frac{8}{2}=4$.

Ответ: $AD=4$.

Пример 4.8. В прямоугольном треугольнике ABC (рис. 4.8) $AD=12$, $\operatorname{tg} B=\frac{2}{3}$. Найдите BD.

Решение.

Известно, что $\operatorname{tg} B=\frac{CD}{BD}=\frac{2}{3}$. Из прямоугольного треугольника ABC с высотой CD имеем: $CD^2=AD\cdot BD$. Тогда $\operatorname{tg} B=\frac{\sqrt{12\cdot BD}}{BD}=\frac{2}{3}$. Получим: $\frac{12}{BD}=\frac{4}{9}$, тогда $BD=\frac{12\cdot9}{4}=27$.

Ответ: $BD=27$.

Методические указания по выполнению самостоятельной работы студентов

Для выполнения заданий самостоятельной работы следует изучить представленный выше теоретический материал, разобрать и записать решения типовых заданий по теме, изучить рекомендуемую литературу.

В случае возникновения затруднений при изучении теоретического материала и выполнении практических заданий студент может получить консультацию у преподавателя.

Задание 1. В треугольнике ABC угол C равен 90°, $AB = 8$, $BC = 7$. Найдите $\cos A$.

Задание 2. В треугольнике ABC угол C равен 90°, $AB = 2$, $\angle A = 30°$. Найдите AC, BC.

Задание 3. В треугольнике ABC (рис. 4.9) $\angle B = 90°$, $AB = 4$, внешний угол при вершине A равен 135°. Найдите AC, BC.

Задание 4. В треугольнике ABC (рис. 4.10) $AB = BC$, $AC = 5$, $\cos ACB = 0{,}8$. Найдите высоту CH.

Задание 5. В треугольнике ABC (рис. 4.11) угол B равен 90°, $\cos A = 0{,}8$, $BC = 3$. BH – высота. Найдите AH.

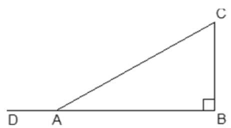


Рис. 4.9

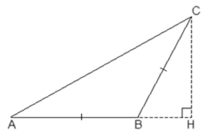


Рис. 4.10

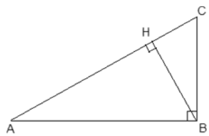


Рис. 4.11

Задание 6. В треугольнике ABC угол C равен 90°, $AB = 13$, $\operatorname{tg} A = \frac{1}{5}$. Найдите высоту CH.

Задание 7. В треугольнике ABC $\angle C = 90°$, $AC = 2$, $\sin A = \frac{\sqrt{17}}{17}$. Найдите BC.

Задание 8. В треугольнике ABC $\angle C = 90°$, CH – высота, $BH = 12$, $\sin A = \frac{2}{3}$. Найдите AB.

Задание 9. В треугольнике ABC $\angle C = 90°$, высота $CH = 7$, $BH = 24$. Найдите $\cos A$.

Задание 10. В трапеции $ABCD$ $\angle D = 90°$, $CD = 3$, $BC = 2$, $\sin A = \frac{1}{3}$. Найдите AD.

Задание 11. В ромбе $ABCD$ $AC = 5$, $\operatorname{tg} BAC = \sqrt{15}$. Найдите сторону ромба.

Задание 12. Треугольник ABC вписан в окружность радиуса 3 так, что AC является диаметром окружности. Известно, что $\cos A = 0{,}8$. Найдите стороны треугольника.

Контрольные вопросы

1. Какой треугольник называется прямоугольным? Что такое катет и гипотенуза?
2. Какой катет называется прилежащим к углу, а какой противолежащим к углу?
3. Что такое синус, косинус, тангенс и котангенс острых углов прямоугольного треугольника?
4. Какие еще тригонометрические функции есть в прямоугольном треугольнике? Назовите их и дайте определения.
5. Назовите основное тригонометрическое тождество.
6. Назовите соотношения для острых углов в прямоугольном треугольнике.
7. Чему равны $\sin 30°$, $\cos 45°$, $\operatorname{tg} 60°$, $\operatorname{ctg} 45°$?
8. Сформулируйте теорему Пифагора.
9. Какие соотношения в прямоугольном треугольнике есть для катетов и высоты, проведенной из прямого угла?

Рекомендуемая литература

1. Кытманов, А. М. Тригонометрические выражения / А. М. Кытманов, Е. К. Лейнартас, С. Г. Мысливец // Математика : адаптационный курс : учеб. пособие / А. М. Кытманов, Е. К. Лейнартас, С. Г. Мысливец. – Санкт-Петербург [и др.], 2022. – Глава 7. – С. 109–113. – URL: e.lanbook.com/book/211088 (дата обращения: 10.12.2024). – Режим доступа: по подписке. – ISBN 978-5-8114-1472-7.
2. Преобразование тригонометрических выражений / В. В. Гарбарук, В. И. Родин, И. М. Соловьева, М. А. Шварц // Решение задач по математике : адаптивный курс для студентов технических вузов : учеб. пособие / В. В. Гарбарук, В. И. Родин, И. М. Соловьева, М. А. Шварц. – Санкт-Петербург [и др.], 2017. – С. 276–280. – URL: e.lanbook.com/book/99281 (дата обращения: 10.12.2024). – Режим доступа: по подписке. – ISBN 978-5-8114-2618-8.

3. Прямоугольный треугольник / В. В. Гарбарук, В. И. Родин, И. М. Соловьева, М. А. Шварц // Решение задач по математике : адаптивный курс для студентов технических вузов : учеб. пособие / В. В. Гарбарук, В. И. Родин, И. М. Соловьева, М. А. Шварц. – Санкт-Петербург [и др.], 2017. – С. 420–421. – URL: e.lanbook.com/book/99281 (дата обращения: 10.12.2024). – Режим доступа: по подписке. – ISBN 978-5-8114-2618-8.

Тема 5. Тригонометрические функции произвольного угла, их свойства и элементарные тригонометрические тождества

Форма проведения: практическое занятие.

Вопросы для обсуждения

1. Соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента.
2. Формулы сложения.
3. Формулы кратных углов.
4. Формулы преобразования сумм или разностей в произведения.
5. Формулы преобразования произведения в суммы или разности.
6. Формулы понижения степени.
7. Формулы половинного аргумента.
8. Формулы выражения тригонометрических функций через тангенс половинного аргумента.
9. Формулы приведения.
10. Значения тригонометрических функций основных углов от 0 до 360°.
11. Периодичность функций.

Методические указания по проведению занятия

На практическом занятии студенты повторяют основные понятия и теоретические сведения по теме, выполняют практические задания под руководством преподавателя, отвечают на контрольные вопросы.

Методические материалы к занятию

Приведем основные тригонометрические формулы, известные вам из курса алгебры и начал математического анализа: (5.1)–(5.36).

1. Соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента (основные тригонометрические тождества):

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1; \tag{5.1}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}; \tag{5.2}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}; \tag{5.3}$$

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1; \tag{5.4}$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}; \tag{5.5}$$

$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}. \tag{5.6}$$

2. Формулы сложения:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta; \tag{5.7}$$

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta; \tag{5.8}$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta; \tag{5.9}$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta; \tag{5.10}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}; \tag{5.11}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}. \qquad 5.12)$$

3. Формулы кратных аргументов.

Выполнив замену $\beta = \alpha$ в формулах (5.7), (5.9) и (5.11), получим:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha; \tag{5.13}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha; \tag{5.14}$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}; \tag{5.15}$$

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha; \tag{5.16}$$

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha. \tag{5.17}$$

4. Формулы преобразования сумм или разностей в произведения:

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}; \tag{5.18}$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}; \tag{5.19}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}; \tag{5.20}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}; \tag{5.21}$$

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}; \tag{5.22}$$

$$\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}. \tag{5.23}$$

5. Формулы преобразования произведений в суммы или разности:

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)); \tag{5.24}$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)); \tag{5.25}$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)). \tag{5.26}$$

6. Формулы понижения степени:

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}; \tag{5.27}$$

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}; \tag{5.28}$$

$$\cos^3\alpha = \frac{3\cos\alpha + \cos 3\alpha}{4}; \tag{5.29}$$

$$\sin^3\alpha = \frac{3\sin\alpha - \sin 3\alpha}{4}. \tag{5.30}$$

7. Формулы половинного аргумента:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \mp\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}; \qquad (5.31)$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \mp\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}; \qquad (5.32)$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \mp\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}. \qquad (5.33)$$

8. Формулы выражения тригонометрических функций через тангенс половинного аргумента:

$$\sin\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}; \qquad (5.34)$$

$$\cos\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}; \qquad (5.35)$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}. \qquad (5.36)$$

9. Формулы приведения:

	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$	$2\pi-\alpha$	$2\pi+\alpha$
sin α	cos α	cos α	sin α	–sin α	–cos α	–cos α	–sin α	sin α
cos α	sin α	–sin α	–cos α	–cos α	–sin α	sin α	cos α	cos α
tg α	ctg α	–ctg α	–tg α	tg α	ctg α	–ctg α	–tg α	tg α
ctg α	tg α	–tg α	–ctg α	ctg α	tg α	–tg α	–ctg α	ctg α

Четность и нечетность тригонометрических функций:

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha,\ \cos(-\alpha) = \cos\alpha;$$

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha,\ \operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha.$$

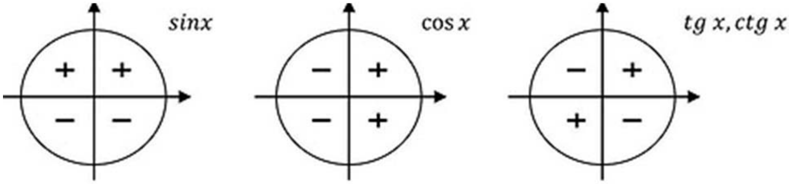


Рис. 5.1. Знаки тригонометрических функций

10. Значения тригонометрических функций основных углов:

α	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sin α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	–1	0
cos α	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	–1	0	1
tg α	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–	0	–	0
ctg α	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	–	0	–

Напомним, что в ходе изучения тригонометрических функций в школьном курсе математики используется понятие числовой окружности (рис. 5.2) – «единичной окружности с установленным соответствием (между действительными числами и точками окружности)» [16], при преобразовании тригонометрических выражений применяются формулы приведения, понятия четности и нечетности тригонометрических функций, а также их знаков (рис. 5.1).

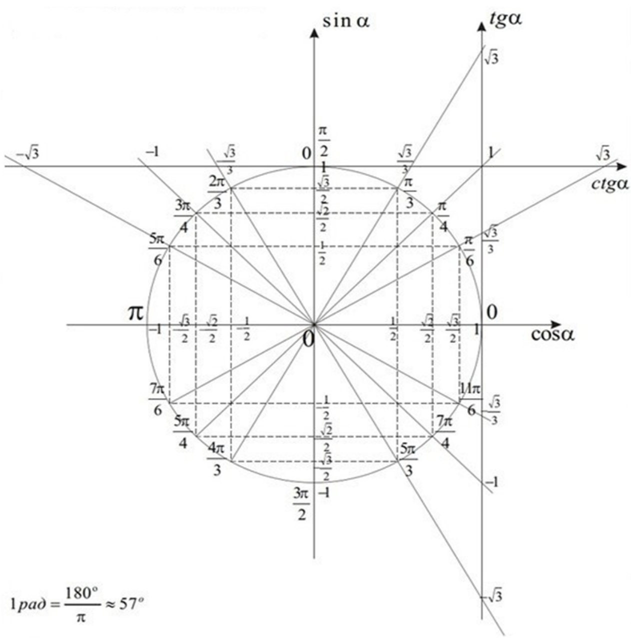


Рис. 5.2. Числовая окружность на координатной плоскости

11. Периодичность функций.

Тригонометрические функции являются периодическими. Функция $y = f(x)$ называется *периодической*, если существует такое число $T \neq 0$, что равенство $f(x + T) = f(x)$ выполняется тождественно при всех значениях x.

Основным периодом функции называется наименьший положительный период функции. Все другие периоды функции являются целыми кратного основного. График периодической функции состоит из повторяющихся кусков.

Если функция $y = f(x)$ периодическая и ее периодом является число T, то и функция $y = f(kx)$ будет периодической, причем ее периодом будет число $\frac{T}{|k|}$. Сдвиг аргумента не меняет периода функции, то есть функция $y = A \cdot \sin(\omega t + \alpha)$, задающая гармонические колебания, имеет период $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Пример 5.1. Вычислите:

а) $\sin 75^\circ + \cos 75^\circ$; б) $\cos\frac{11\pi}{12} - \cos\frac{5\pi}{12}$.

Решение:

а) применим формулу приведения (п. 9) и формулу (5.18):

$$\sin 75^\circ + \cos 75^\circ = \sin 75^\circ + \cos(90^\circ - 15^\circ) = \sin 75^\circ + \sin 15^\circ =$$

$$= 2\sin\frac{75^\circ + 15^\circ}{2} \cdot \cos\frac{75^\circ - 15^\circ}{2} =$$

$$= 2\sin\frac{75^\circ + 15^\circ}{2}\cos\frac{75^\circ - 15^\circ}{2} = 2\sin 45^\circ \cos 30^\circ = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2};$$

б) воспользуемся формулой (5.21), получим:

$$\cos\frac{11\pi}{12} - \cos\frac{5\pi}{12} = -2\sin\frac{\frac{11\pi}{12} + \frac{5\pi}{12}}{2}\sin\frac{\frac{11\pi}{12} - \frac{5\pi}{12}}{2} = -2\sin\frac{2\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} =$$

$$= -2\sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)\sin\frac{\pi}{4} = -2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{6}}{2}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{6}}{2}; -\frac{\sqrt{6}}{2}$.

Пример 5.2. Докажите тождество:

а) $\frac{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha} = \cos^4\alpha - \sin^4\alpha$;

б) $\cos^2\alpha = (1 - \sin\alpha)(1 + \sin\alpha)$; в) $\frac{\cos\alpha}{1 - \sin\alpha} = \frac{1 + \sin\alpha}{\cos\alpha}$.

Доказательство:

а) преобразуем левую часть равенства, получим:

$$\frac{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{1 - \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{1 + \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = \frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha} = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha.$$

Воспользуемся основным тригонометрическим тождеством, тогда

$$\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) \cdot (\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) = \cos^4\alpha - \sin^4\alpha;$$

б) преобразуем правую часть равенства:

$$(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)=1-\sin^2\alpha=\cos^2\alpha;$$

в) найдем разность левой и правой частей равенства, которая должна быть равна нулю:

$$\frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}-\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\cos^2\alpha-\left(1-\sin^2\alpha\right)}{\cos\alpha(1-\sin\alpha)}=\frac{\cos^2\alpha-\cos^2\alpha}{\cos\alpha(1-\sin\alpha)}=0.$$

Пример 5.3. Упростите выражения:

а) $\left(\dfrac{\cos\beta}{\sin\alpha}+\dfrac{\sin\beta}{\cos\alpha}\right)\cdot\dfrac{1-\cos 4\alpha}{\cos(\pi-\beta+\alpha)}$;

б) $\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\beta\right)-\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\beta\right)$;

в) $\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)-\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)$.

Решение:

а) $$\left(\frac{\cos\beta}{\sin\alpha}+\frac{\sin\beta}{\cos\alpha}\right)\cdot\frac{1-\cos 4\alpha}{\cos(\pi-\beta+\alpha)}=\frac{\cos\beta\cos\alpha+\sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\alpha}\times$$

$$\times\frac{1-\left(\cos^2 2\alpha-\sin^2 2\alpha\right)}{\cos(\pi-(\beta-\alpha))}=$$

$$=\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\sin\alpha\cos\alpha}\cdot\frac{1-\left(1-\sin^2 2\alpha-\sin^2 2\alpha\right)}{-\cos(\beta-\alpha)}=\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}\cdot\frac{2\sin^2 2\alpha}{-1}=$$

$$=\frac{2\sin^2 2\alpha}{-\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{2\sin^2 2\alpha}{-\frac{1}{2}\sin 2\alpha}=-4\sin 2\alpha;$$

б) $$\cos\left(\frac{\pi}{4}-\beta\right)-\cos\left(\frac{\pi}{4}+\beta\right)=-2\sin\frac{\frac{\pi}{4}-\beta+\frac{\pi}{4}+\beta}{2}\sin\frac{\frac{\pi}{4}-\beta-\frac{\pi}{4}-\beta}{2}=$$

$$=2\sin\frac{\pi}{4}\sin\beta=\sqrt{2}\sin\beta;$$

в) $\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\left(\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\right)\times$

$$\times\left(\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)+\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\right)=\left(2\sin\frac{\frac{\pi}{4}+\alpha-\frac{\pi}{4}+\alpha}{2}\cos\frac{\frac{\pi}{4}+\alpha+\frac{\pi}{4}-\alpha}{2}\right)\times$$

$$\times\left(2\sin\frac{\frac{\pi}{4}+\alpha+\frac{\pi}{4}-\alpha}{2}\cos\frac{\frac{\pi}{4}+\alpha-\frac{\pi}{4}+\alpha}{2}\right)=$$

$$=2\sin\alpha\cos\frac{\pi}{4}\cdot 2\sin\frac{\pi}{4}\cos\alpha=2\sin\alpha\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\cos\alpha=$$

$$=2\sin\alpha\cos\alpha=\sin 2\alpha.$$

Ответ: а) $-4\sin 2\alpha$; б) $\sqrt{2}\sin\beta$; в) $\sin 2\alpha$.

Пример 5.4. Разложите выражение на множители:
а) $1-2\sin\alpha$; б) $1+2\sin\alpha$; в) $2\sin\alpha+\sqrt{3}$; г) $1-\cos\alpha+\sin\alpha$.

Решение:

а) применим формулу (5.19):

$$1-2\sin\alpha=2\left(\frac{1}{2}-\sin\alpha\right)=2(\sin 30^\circ-\sin\alpha)=$$

$$=2\cdot 2\cdot\sin\frac{30^\circ-\alpha}{2}\cos\frac{30^\circ+\alpha}{2}=4\sin\frac{30^\circ-\alpha}{2}\cos\frac{30^\circ+\alpha}{2};$$

б) с помощью формулы (5.18) получим:

$$1+\sin\alpha=\sin\frac{\pi}{2}+\sin\alpha=2\sin\frac{\frac{\pi}{2}+\alpha}{2}\cos\frac{\frac{\pi}{2}-\alpha}{2}=2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right);$$

в) применим формулу (5.18):

$$2\sin\alpha+\sqrt{3}=2\left(\sin\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\left(\sin\alpha+\sin\frac{\pi}{3}\right)=$$

$$=2\cdot 2\sin\frac{\alpha+\frac{\pi}{3}}{2}\cos\frac{\alpha-\frac{\pi}{3}}{2}=4\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{6}\right);$$

г) $1-\cos\alpha+\sin\alpha=\cos 0^\circ-\cos\alpha+\sin\alpha=-2\sin\dfrac{0+\alpha}{2}\sin\dfrac{0-\alpha}{2}+\sin\alpha=$

$$=-2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\left(-\frac{\alpha}{2}\right)+2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}=2\sin^2\frac{\alpha}{2}+2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}=$$

$$=2\sin\frac{\alpha}{2}\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\right).$$

Ответ: а) $4\sin\dfrac{30^\circ-\alpha}{2}\cos\dfrac{30^\circ+\alpha}{2}$; б) $2\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}\right)$;
в) $4\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}+\dfrac{\pi}{6}\right)\cos\left(\dfrac{\alpha}{2}-\dfrac{\pi}{6}\right)$; г) $2\sin\dfrac{\alpha}{2}\left(\sin\dfrac{\alpha}{2}+\cos\dfrac{\alpha}{2}\right)$.

Пример 5.5. Вычислите:

$$\left(\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{12}\right)+\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{12}\right)\right)\cdot\sin\frac{\pi}{12}.$$

Решение.

Первый способ. Воспользуемся формулой сложения (5.7), получим:

$$\left(\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{12}\right)+\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{12}\right)\right)\cdot\sin\frac{\pi}{12}=$$

$$=\left(\sin\alpha\cos\frac{\pi}{12}+\cos\alpha\sin\frac{\pi}{12}+\sin\alpha\cos\frac{\pi}{12}-\cos\alpha\sin\frac{\pi}{12}\right)\cdot\sin\frac{\pi}{12}=$$

$$=2\sin\alpha\cos\frac{\pi}{12}\sin\frac{\pi}{12}=\sin\alpha\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}\sin\alpha.$$

Второй способ. Применим формулу (5.18):

$$\left(\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{12}\right)+\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{12}\right)\right)\cdot\sin\frac{\pi}{12}=$$

$$=2\sin\frac{\alpha+\frac{\pi}{12}+\alpha-\frac{\pi}{12}}{2}\cos\frac{\alpha+\frac{\pi}{12}-\alpha+\frac{\pi}{12}}{2}\cdot\sin\frac{\pi}{12}=$$

$$=2\sin\alpha\cos\frac{\pi}{12}\sin\frac{\pi}{12}=\frac{1}{2}\sin\alpha.$$

Ответ: $\dfrac{1}{2}\sin\alpha$.

Пример 5.6. Докажите тождество

$$\frac{\sin\alpha+\sin3\alpha}{\cos\alpha+\cos3\alpha}=\operatorname{tg}2\alpha.$$

Доказательство.

Преобразуем левую часть равенства, получим:

$$\frac{2\sin\frac{\alpha+3\alpha}{2}\cos\frac{\alpha-3\alpha}{2}}{2\cos\frac{\alpha+3\alpha}{2}\cos\frac{\alpha-3\alpha}{2}}=\frac{2\sin2\alpha\cos(-\alpha)}{2\cos2\alpha\cos(-\alpha)}=\frac{\sin2\alpha}{\cos2\alpha}=\operatorname{tg}2\alpha.$$

Пример 5.7. Докажите тождество

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$

и на основе его вычислите tg 267° + tg 93°.

Доказательство.

Преобразуем левую часть равенства:

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin\beta}{\cos\beta}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta}=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}.$$

Так как $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$, то $\operatorname{tg}267°+\operatorname{tg}93°=\frac{\sin360°}{\cos267°\cos93°}=0.$

Ответ: 0.

Пример 5.8. Вычислите tg α, если sin α = (–0,6) и $\alpha\in(\pi;\frac{3\pi}{2})$.

Решение.

С помощью основного тригонометрического тождества

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$

найдем cos α:

$$\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-(-0{,}6)^2}=-\sqrt{1-0{,}36}=-0{,}8,$$

так как $\alpha\in(\pi;\frac{3\pi}{2})$ – 3 четверти и cos α < 0. Тогда

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{-0{,}6}{-0{,}8}=\frac{3}{4}=0{,}75.$$

Ответ: tg α = 0,75.

Пример 5.9. Найдите периоды следующих функций:

а) $y = \sin 13x$; б) $y = \cos(6\pi x - 4)$; в) $y = \sin\frac{4\pi x}{5} + \mathrm{ctg}\frac{7\pi x}{2}$.

Решение:

а) $T = \frac{2\pi}{13}$; б) $T = \frac{2\pi}{6\pi} = \frac{1}{3}$; в) $T_{\sin} = \frac{2\pi}{\frac{4\pi}{5}} = \frac{5}{2}, T_{\mathrm{ctg}} = \frac{\pi}{\frac{7\pi}{2}} = \frac{2}{7}$.

Найдем наименьшее общее кратное для дробей: $\frac{5}{2} = \frac{35}{14}$ и $\frac{2}{7} = \frac{4}{14}$.

$$\text{НОК}\left(\frac{35}{14}; \frac{4}{14}\right) = \frac{140}{14} = 10 \Rightarrow T = 10.$$

Методические указания по выполнению самостоятельной работы студентов

Для выполнения заданий самостоятельной работы следует изучить представленный выше теоретический материал, разобрать и записать решения типовых заданий по теме, изучить рекомендуемую литературу.

В случае возникновения затруднений при изучении теоретического материала и выполнении практических заданий студент может получить консультацию у преподавателя.

Задание 1. Найдите значение выражения:

а) $\frac{13}{\sin^2 38 + \sin^2 128}$; б) $5\cos(\pi + \alpha) + 4\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \beta\right), \cos\beta = -\frac{8}{9}$.

Задание 2. Упростите:

$$\frac{2\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)\mathrm{tg}(\pi - \alpha)}{\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)\sin(\pi - \alpha)}.$$

Задание 3. Вычислите:

$$\cos 20^\circ + \cos 40^\circ + \cos 60^\circ + \ldots + \cos 160^\circ + \cos 180^\circ.$$

Задание 4. Вычислите $\mathrm{tg}\,\alpha$, если:

а) $\sin\alpha = -0{,}6$ и $\alpha \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$; б) $\cos 2\alpha = -\frac{5}{13}$ и $\alpha \in (2; 3)$.

Задание 5. Найдите $\sin\frac{\alpha}{2}, \cos\frac{\alpha}{2}, \mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}$, если известно, что $\sin\alpha = 0{,}8$ и $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Задание 6. Найдите значения без помощи таблиц:

а) $\sin\frac{\pi}{12}$; б) $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{8}$.

Задание 7. Вычислите:

а) $\cos 840°$; б) $\cos 15° - \sin 15°$; в) $\frac{4\sin 25° \cdot \sin 65°}{\cos 40°}$;

г) $2\sin\frac{\pi}{24} \cdot \cos\frac{\pi}{24} \cdot \left(\cos^2\frac{\pi}{24} - \sin^2\frac{\pi}{24}\right)$; д) $\arccos(\cos(-\frac{\pi}{3}))$.

Задание 8. Найдите периоды функций:

а) $y = \sin 4x$; б) $y = \sin x \cdot \cos x$; в) $y = \cos x \cdot \cos 6x$.

Задание 9. Докажите тождество:

а) $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}(60° - \alpha) \cdot \operatorname{tg}(60° + \alpha) = \operatorname{tg} 3\alpha$;

б) $\frac{\sin^3\alpha + \cos^3\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha} = 1 - \sin\alpha \cdot \cos\alpha$..

Задание 10. Найдите:

а) $\frac{3\sin\alpha + 5\cos\alpha}{7\cos\alpha - \sin\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha = 3$;

б) $\frac{10\cos\alpha + 4\sin\alpha + 15}{2\sin\alpha + 5\cos\alpha + 3}$, если $\operatorname{tg}\alpha = -2{,}5$.

Задание 11. Упростите:

$$\frac{\cos\alpha \cdot \sin(\alpha - 3) - \sin\alpha \cdot \cos(\alpha - 3)}{\cos\left(3 - \frac{\pi}{6}\right) - 0{,}5\sin 3}.$$

Контрольные вопросы

1. Какова область определения синуса и косинуса (тангенса и котангенса)?
2. В каких точках синус и косинус (тангенс и котангенс) обращаются в нуль?
3. Как меняются знаки синуса и косинуса (тангенса и котангенса)?
4. Каковы наименьшее и наибольшее значения синуса и косинуса (тангенса и котангенса)?
5. Каково множество значений синуса и косинуса (тангенса и котангенса)?
6. Сколько раз принимает каждое свое значение синус, косинус (тангенс и котангенс)?

7. При каких углах тангенс (котангенс) не определен? С чем это связано?
8. Какая из тригонометрических функций является четной? Что это означает?
9. Значение $\sin x$ известно. Достаточно ли этого, чтобы найти значения других тригонометрических функций?
10. Чему равен косинус разности, суммы двух углов?
11. Из каких четырех формул тригонометрии выводятся почти все остальные формулы?
12. Приведите все известные вам формулы косинуса двойного угла.
13. Какое вы знаете правило для запоминания формул приведения?
14. Какое число является наименьшим положительным периодом синуса, косинуса, тангенса и котангенса?
15. По какой формуле можно найти период тригонометрической функции?

Рекомендуемая литература

1. Башмаков, М. И. Исследование тригонометрических функций // Алгебра и начала анализа : учебник для 10–11 классов средней школы / М. И. Башмаков. – 2-е изд. – Москва, 1992. – С. 140.
2. Башмаков, М. И. Тождественные преобразования // Алгебра и начала анализа : учебник для 10–11 классов средней школы / М. И. Башмаков. – 2-е изд. – Москва, 1992. – С. 150–151.
3. Кытманов, А. М. Тригонометрические выражения / А. М. Кытманов, Е. К. Лейнартас, С. Г. Мысливец // Математика : адаптационный курс : учеб. пособие / А. М. Кытманов, Е. К. Лейнартас, С. Г. Мысливец. – Санкт-Петербург [и др.], 2022. – Глава 7. – С. 109–118. – URL: e.lanbook.com/book/211088 (дата обращения: 10.12.2024). – Режим доступа: по подписке. – ISBN 978-5-8114-1472-7.
4. Преобразование тригонометрических выражений / В. В. Гарбарук, В. И. Родин, И. М. Соловьева, М. А. Шварц // Решение задач по математике : адаптивный курс для студентов технических вузов : учеб. пособие / В. В. Гарбарук, В. И. Родин, И. М. Соловьева, М. А. Шварц. – Санкт-Петербург [и др.], 2017. – С. 276–295. – URL: e.lanbook.com/book/99281 (дата обращения: 10.12.2024). – Режим доступа: по подписке. – ISBN 978-5-8114-2618-8.

Тема 6. Тригонометрические уравнения

Форма проведения: практическое занятие.

Вопросы для обсуждения

1. Определение арксинуса, арккосинуса, арктангенса и арккотангенса. Свойства.
2. Простейшие тригонометрические уравнения. Формулы для решения. Частные случаи.
3. Решение тригонометрических уравнений с помощью единичной окружности.
4. Тригонометрические уравнения, сводящиеся к алгебраическим.
5. Однородные тригонометрические уравнения.
6. Тригонометрические уравнения, решаемые с помощью вспомогательного угла.

Методические указания по проведению занятия

На практическом занятии студенты повторяют основные понятия и теоретические сведения по теме, выполняют практические задания под руководством преподавателя, отвечают на контрольные вопросы.

Методические материалы к занятию

Обратные тригонометрические функции

Пусть a – число по модулю, не превосходящее единицы. *Арксинусом числа a* называется угол x, лежащий в пределах от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$, синус которого равен a.

$$x = \arcsin a, a \in [-1; 1] \Leftrightarrow \sin x = a, x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right].$$

Свойства арксинуса:

1) $\sin(\arcsin a) = a$;

2) $\arcsin(\sin x) = x$, если $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$;

3) $\arcsin(-a) = -\arcsin a$.

Пусть a – число по модулю, не превосходящее единицы. *Арккосинусом числа a* называется угол x, лежащий в пределах от 0 до π, косинус которого равен a.

$$x = \arccos a, a \in [-1; 1] \Leftrightarrow \cos x = a, x \in [0; \pi].$$

Свойства арккосинуса:

1) $\cos(\arccos a) = a$;

2) $\arccos(\cos x) = x$, если $x \in [0; \pi]$;

3) $\arccos(-a) = \pi - \arccos a$.

По каким причинам для значений арксинуса был выбран отрезок $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, а для арккосинуса – отрезок $[0; \pi]$? Это объясняется тем, что на этих отрезках синус и косинус принимают все возможные значения от –1 до 1, и каждое значение принимается ровно один раз. Отрезков с этими условиями бесконечно много, но при этом выбраны отрезки «поближе к нулю».

Арктангенсом числа a называется угол $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, тангенс которого равен a.

$$x = \operatorname{arctg} a \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = a, x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right).$$

Свойства арктангенса:

1) $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} a) = a$;

2) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x$, если $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$;

3) $\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a$.

Арккотангенсом числа a называется угол $x \in [0; \pi]$, котангенс которого равен a.

$$x = \operatorname{arcctg} a \Leftrightarrow \operatorname{ctg} x = a, x \in (0; \pi).$$

Свойства арккотангенса:

1) $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} a) = a$;

2) $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x) = x$, если $x \in [0; \pi]$;

3) $\operatorname{arcctg}(-a) = \pi - \operatorname{arcctg} a$.

Пример 6.1. Упростите выражения:

1) $\arcsin\left(\sin\frac{12\pi}{5}\right) = \arcsin\left(\sin\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{2\pi}{5}$;

2) $\arcsin(-0{,}5) + 2\operatorname{arcctg}(-1) = -\arcsin 0{,}5 + 2 \cdot (\pi - \operatorname{arctg} 1) =$
$= -\frac{\pi}{6} + 2 \cdot \left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\pi}{6} + 2 \cdot \frac{3\pi}{4} = -\frac{\pi}{6} + \frac{3\pi}{2} = \frac{-\pi+9\pi}{6} = \frac{8\pi}{6} = \frac{4\pi}{3}$;

3) $\cos\left(\arcsin\frac{1}{4}\right) = \sqrt{1 - \sin^2\left(\arcsin\frac{1}{4}\right)} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{15}{16}} = \frac{\sqrt{15}}{4}$.

Тригонометрические уравнения

Основные формулы для решения тригонометрических уравнений представлены в табл. 4.

Таблица 4

Решение тригонометрических уравнений

Уравнение	Формулы решения	Частные случаи
$\sin x = a$	при $\lvert a\rvert \le 1$ $x = (-1)^k \arcsin a + \pi k, k \in \boldsymbol{Z}$; при $\lvert a\rvert > 1$ – нет решений	$\sin x = 0;\ x = \pi k, k \in \boldsymbol{Z}$; $\sin x = 1;\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \boldsymbol{Z}$; $\sin x = -1;\ x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \boldsymbol{Z}$
$\cos x = a$	при $\lvert a\rvert \le 1$ $x = \pm\arccos a + 2\pi k, k \in \boldsymbol{Z}$; при $\lvert a\rvert > 1$ – нет решений	$\cos x = 0;\ x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \boldsymbol{Z}$; $\cos x = 1;\ x = 2\pi k, k \in \boldsymbol{Z}$; $\cos x = -1;\ x = \pi + 2\pi k, k \in \boldsymbol{Z}$
$\operatorname{tg} x = a$	$x = \operatorname{arctg} a + \pi k, k \in \boldsymbol{Z}$	–
$\operatorname{ctg} x = a$	$x = \operatorname{arcctg} a + \pi k, k \in \boldsymbol{Z}$	–

Опишем основные виды простейших тригонометрических уравнений.

Решение уравнения $\sin x = a$ $(-1 < a < 1)$ можно записать совокупностью двух серий решений (рис. 6.1):

$$x = \left[\begin{array}{l} \arcsin a + 2\pi k, \\ \pi - \arcsin a + 2\pi k, \end{array}\right. k \in Z.$$

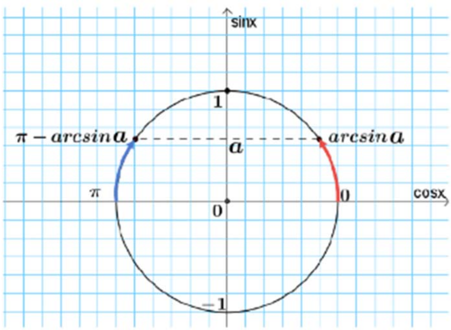


Рис. 6.1

Решение уравнения $\cos x = a$ $(-1 < a < 1)$ можно записать совокупностью двух серий решений (рис. 6.2):

$$x = \left[\begin{array}{l} \arccos a + 2\pi k, \\ -\arccos a + 2\pi k, \end{array}\right. k \in Z.$$

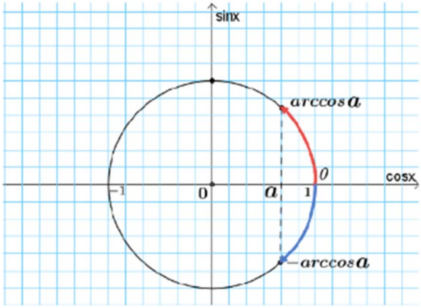


Рис. 6.2

Решение уравнения tg $x = a$ можно записать совокупностью двух серий решений (рис. 6.3):

$$x = \left[\begin{array}{l} \operatorname{arctg} a + 2\pi k, \\ \pi + \operatorname{arctg} a + 2\pi k, \end{array}\right. k \in \boldsymbol{Z}.$$

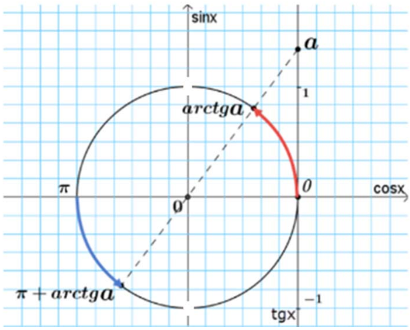


Рис. 6.3

Решение уравнения ctg $x = a$ можно записать совокупностью двух серий решений (рис. 6.4):

$$x = \left[\begin{array}{l} \operatorname{arcctg} a + 2\pi k, \\ \pi + \operatorname{arcctg} a + 2\pi k, \end{array}\right. k \in \boldsymbol{Z}.$$

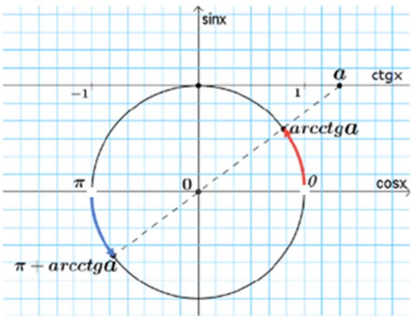


Рис. 6.4

Рассмотрим некоторые типы тригонометрических уравнений.

I. Уравнения, сводимые к алгебраическим.

Это уравнения, сводимые к одной и той же функции относительно одного и того же неизвестного. Решение такого типа уравнений находят методом подстановки (заменой переменной).

Пример 6.2. Решите уравнение

$$2\sin^2 x - 7\cos x - 5 = 0.$$

Решение.

$$2(1-\cos^2 x) - 7\cos x - 5 = 0;$$

$$-2\cos^2 x - 7\cos x - 3 = 0;$$

$$2\cos^2 x + 7\cos x + 3 = 0.$$

Подстановка: $\cos x = t$, получим:

$$2t^2 + 7t + 3 = 0;$$

$$D = 49 - 4\cdot 2\cdot 3 = 25;\ t_1 = -3, t_2 = -\frac{1}{2}.$$

Делаем обратную замену:

$\cos x = -3$	или	$\cos x = -\frac{1}{2}$;
$x \in \emptyset$.		$x = \pm\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi k, k \in Z$;
		$x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z$.

Ответ: $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z$.

II. Однородные уравнения.

$a\sin x + b\cos x = 0$, a, b – заданные числа	– однородное уравнение первой степени
$a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = 0$, a, b, c – заданные числа	– однородное уравнение второй степени

Пример 6.3. Решите уравнение

$$2\sin x - 3\cos x = 0.$$

Решение.

Разделим обе части уравнения на $\cos x$:

$$2\,\mathrm{tg}\,x - 3 = 0;$$

$$\mathrm{tg}\,x = \frac{3}{2};\ x = \mathrm{arctg}\frac{3}{2} + \pi k, k \in \boldsymbol{Z}.$$

Ответ: $x = \mathrm{arctg}\frac{3}{2} + \pi k, k \in \boldsymbol{Z}$.

Пример 6.4. Решите уравнение

$$4\sin^2 x + 2\sin x\cos x = 3.$$

Решение.

Используя основное тригонометрическое тождество, представим правую часть уравнения в виде $3(\sin^2 x + \cos^2 x)$, получим:

$$4\sin^2 x + 2\sin x\cos x = 3\sin^2 x + 3\cos^2 x;$$

$$\sin^2 x + 2\sin x\cos x - 3\cos^2 x = 0.$$

Последнее уравнение есть однородное второй степени. Разделим обе части уравнения на $\cos^2 x$, получим:

$$\mathrm{tg}^2\,x + 2\,\mathrm{tg}\,x - 3 = 0.$$

Сделаем замену переменной: $\mathrm{tg}\,x = t$, получим квадратное уравнение

$$t^2 + 2t - 3 = 0, D = 4 - 4\cdot 1\cdot(-3) = 16, t_1 = -3, t_2 = 1.$$

Осуществим обратную подстановку:

$\mathrm{tg}\,x = -3$ или $\mathrm{tg}\,x = 1$;

$x = \mathrm{arctg}(-3) + \pi k, k \in \boldsymbol{Z}$; $x = \mathrm{arctg}\,1 + \pi n, n \in \boldsymbol{Z}$;

$x = -\mathrm{arctg}\,3 + \pi k, k \in \boldsymbol{Z}$. $x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \boldsymbol{Z}$.

Ответ: $x = -\mathrm{arctg}\,3 + \pi k;\ x = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ k, n \in \boldsymbol{Z}$.

III. Уравнение вида $a\sin x + b\cos x = c$. Метод вспомогательного аргумента.

Рассмотрим уравнение вида: $a\sin x + b\cos x = c$, где a, b, c – заданные числа, причем $a^2 + b^2 > c^2$.

Разделим обе части уравнения на $\sqrt{a^2+b^2}$, получим:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Учитывая, что

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2+\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2=1,$$

то можно принять:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\cos\varphi\,,\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sin\varphi,$$

где φ называется вспомогательным аргументом.

Тогда уравнение примет вид:

$$\cos\varphi\sin x+\sin\varphi\cos x=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

$$\sin(x+\varphi)=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}};\ x+\varphi=(-1)^k\arcsin\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}+\pi k, k\in\boldsymbol{Z}.$$

$$x=(-1)^k\arcsin\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}-\varphi+\pi k, k\in\boldsymbol{Z}.$$

Учитывая, что

$$\sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

выразим

$$\varphi=\arcsin\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Получим решение исходного уравнения в виде:

$$x=(-1)^k\arcsin\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}-\arcsin\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}+\pi k,\qquad k\in\boldsymbol{Z}.$$

Пример 6.5. Решите уравнение

$$3\sin x+4\cos x=2.$$

Решение.

Здесь $a = 3$, $b = 4$, $c = 2$, при этом легко видеть, что $a^2+b^2>c^2$, значит, уравнение имеет решение.

Выразим $\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$.

Разделим все уравнение на 5, получим:

$$\frac{3}{5}\sin x + \frac{4}{5}\cos x = \frac{2}{5}.$$

Обозначим

$$\cos\varphi = \frac{3}{5}, \sin\varphi = \frac{4}{5}.$$

Получим уравнение:

$$\sin(x+\varphi) = \frac{2}{5},\ x+\varphi = (-1)^k \arcsin\frac{2}{5} + \pi k, k \in \boldsymbol{Z};$$

$$x = (-1)^k \arcsin\frac{2}{5} - \varphi + \pi k, k \in \boldsymbol{Z};$$

$$x = (-1)^k \arcsin\frac{2}{5} - \arcsin\frac{4}{5} + \pi k, k \in \boldsymbol{Z}.$$

Ответ: $x = (-1)^k \arcsin\frac{2}{5} - \arcsin\frac{4}{5} + \pi k, k \in \boldsymbol{Z}$.

Методические указания по выполнению самостоятельной работы студентов

Для выполнения заданий самостоятельной работы следует изучить представленный выше теоретический материал, разобрать и записать решения типовых заданий по теме, изучить рекомендуемую литературу.

В случае возникновения затруднений при изучении теоретического материала и выполнении практических заданий студент может получить консультацию у преподавателя.

Блок 1

Задание 1. Вычислите:

а) $2\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \operatorname{arctg}(-1) + \arccos\frac{\sqrt{2}}{2} + 0{,}5\arccos(-1)$;

б) $\sin\left(\arccos\frac{3}{5}\right)$;

в) $\arccos\left(\cos\left(-\frac{17\pi}{5}\right)\right)$.

Задание 2. Решите простейшие тригонометрические уравнения и найдите корни, принадлежащие промежутку:
а) $\cos x = -0{,}5$ и $x \in [-\pi; 0]$;

б) $\operatorname{tg} x = -\frac{3}{5}$ и $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Задание 3. Решите уравнения:

а) $\left(\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\sin x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$; б) $\cos x \cdot \operatorname{tg} 3x = 0$;

в) $(1 + \cos x) \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{2} = 0$; г) $\frac{\cos x}{1 + \cos 2x} = 0$; д) $\sin 3x = \cos 2x$ и $x \in [0; \pi]$.

Задание 4. Решите уравнения, сделав замену:
а) $2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$; б) $\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg}^2 x - 3 \operatorname{tg} x = 0$.

Задание 5. Решите однородные уравнения:
а) $\sin x = 3\cos x$; б) $\sin x \cdot \cos x - 3\cos^2 x = 0$;
в) $\sin^2 x + \sin x \cdot \cos x - 2\cos^2 x = 0$; г) $3\sin^2 x + \sin 2x = 2$.

Блок 2

Задание 1. Вычислите:

$$\cos\left(\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} + \arccos\left(-\frac{1}{2}\right)\right).$$

Задание 2. Решите уравнения, преобразовав обе части уравнения с помощью формул приведения:

а) $\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \frac{\sqrt{6}}{2}\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = 0$; б) $\sin(\pi + 4x) = \cos(\pi - 4x)$;

в) $\cos^2\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{x}{4}\right) - 6\sin\left(9\pi + \frac{x}{4}\right) + 5 = 0$.

Задание 3. Решите уравнения и найдите корни, принадлежащие промежутку:

а) $\operatorname{ctg}\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$, $x \in \left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$; б) $\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = 0$, $x \in [0; \pi]$.

Задание 4. Решите уравнения, содержащие обратные тригонометрические функции:

а) $\arccos x - \arcsin x = \frac{\pi}{6}$; б) $2\arcsin^2 x - 5\arcsin x + 2 = 0$.

Задание 5. Решите уравнения методом вспомогательного угла:
а) $\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x = 1$; б) $2\sin x - 3\cos x = 3$.

Задание 6. Решите уравнение вида $R(\sin x + \cos x;\ \sin x \cdot \cos x)$, сделав замену:

$$\sin x \cdot \cos x - 6\sin x + 6\cos x + 6 = 0.$$

Задание 7. Решите уравнение, оценив левую и правую части:

$$\sin x - \sin 3x = -2.$$

Контрольные вопросы

1. Какие функции называются обратными тригонометрическими функциями? Дайте определения.
2. Какие свойства для арксинуса (арккосинуса, арктангенса, арккотангенса) вы знаете?
3. При каких a определен $\arcsin a$, $\arccos a$, $\operatorname{arctg} a$?
4. Какие значения принимают арксинус и арктангенс? Арккосинус и арккотангенс?
5. Областью определения синуса (косинуса) x является вся числовая прямая. Значит, областью значений арксинуса (арккосинуса) a должна быть вся числовая прямая. Почему же это не так?
6. Сколько решений имеют простейшие уравнения:
$$\sin x = a,\ \cos x = a,\ \operatorname{tg} x = a,\ \operatorname{ctg} x = a?$$
7. При решении уравнения $\operatorname{tg} x = 1$ можно ли в качестве основного угла взять $\frac{3\pi}{4}$?
8. Как, зная одно решение простейшего тригонометрического уравнения, найти все его решения?
9. Назовите решения уравнений частных случаев для синуса и косинуса.
10. Как решаются однородные тригонометрические уравнения первой и второй степеней?
11. При каком c уравнение $a\sin x + b\cos x = c$ станет однородным? Как решить данное уравнение, если $c \neq 0$?

Рекомендуемая литература

1. Башмаков, М. И. Гармонические колебания // Алгебра и начала анализа : учебник для 10–11 классов средней школы / М. И. Башмаков. – 2-е изд. – Москва, 1992. – С. 164.
2. Башмаков, М. И. Тригонометрические уравнения // Алгебра и начала анализа : учебник для 10–11 классов средней школы / М. И. Башмаков. – 2-е изд. – Москва, 1992. – С. 156–160.
3. Кытманов, А. М. Тригонометрические выражения / А. М. Кытманов, Е. К. Лейнартас, С. Г. Мысливец // Математика : адаптационный курс : учеб. пособие / А. М. Кытманов, Е. К. Лейнартас, С. Г. Мысливец. – Санкт-Петербург [и др.], 2022. – Глава 7. – С. 113. – URL: e.lanbook.com/book/211088 (дата обращения: 10.12.2024). – Режим доступа: по подписке. – ISBN 978-5-8114-1472-7.
4. Кытманов, А. М. Тригонометрические уравнения и неравенства / А. М. Кытманов, Е. К. Лейнартас, С. Г. Мысливец // Математика : адаптационный курс : учеб. пособие / А. М. Кытманов, Е. К. Лейнартас, С. Г. Мысливец. – Санкт-Петербург [и др.], 2022. – Глава 8. – С. 129–141. – URL: e.lanbook.com/book/211088 (дата обращения: 10.12.2024). – Режим доступа: по подписке. – ISBN 978-5-8114-1472-7.
5. Обратные тригонометрические функции / В. В. Гарбарук, В. И. Родин, И. М. Соловьева, М. А. Шварц // Решение задач по математике : адаптивный курс для студентов технических вузов : учеб. пособие / В. В. Гарбарук, В. И. Родин, И. М. Соловьева, М. А. Шварц. – Санкт-Петербург [и др.], 2017. – С. 300–309. – URL: e.lanbook.com/book/99281 (дата обращения: 10.12.2024). – Режим доступа: по подписке. – ISBN 978-5-8114-2618-8.
6. Тригонометрические уравнения / В. В. Гарбарук, В. И. Родин, И. М. Соловьева, М. А. Шварц // Решение задач по математике : адаптивный курс для студентов технических вузов : учеб. пособие / В. В. Гарбарук, В. И. Родин, И. М. Соловьева, М. А. Шварц. – Санкт-Петербург [и др.], 2017. – С. 311–332. – URL: e.lanbook.com/book/99281 (дата обращения: 10.12.2024). – Режим доступа: по подписке. – ISBN 978-5-8114-2618-8.

Тема 7. Тригонометрические неравенства

Форма проведения: практическое занятие.

Вопросы для обсуждения

1. Алгоритм решения простейших неравенств с синусом и косинусом.
2. Алгоритм решения простейших неравенств с тангенсом и котангенсом.

Методические указания по проведению занятия

На практическом занятии студенты повторяют основные понятия и теоретические сведения по теме, выполняют практические задания под руководством преподавателя, отвечают на контрольные вопросы.

Методические материалы к занятию

Тригонометрические неравенства

Неравенства вида $\sin x \vee a$ или $\cos x \vee a$

Напомним алгоритм решения простейших тригонометрических неравенств вида $\sin x \vee a$ или $\sin x \vee a$, $|a| \leq 1$, где символ $\vee$ заменяет один из знаков неравенств: $>$, $<$, $\geq$, $\leq$.

1. Отмечаем на линии синусов (косинусов) число a и все значения синуса (косинуса), которые больше (меньше) числа a.

2. Выделяем на числовой окружности дугу, на которой находятся точки, удовлетворяющие данному условию.

3. Если выделенная дуга прошла через 0, то для записи граничных точек выбирают разное направление (одно число положительное, другое – отрицательное). Если выделенная дуга не прошла через 0, то для записи граничных точек выбирают одно направление.

4. Записываем общее решение неравенства, добавляя к концам найденного промежутка число, кратное периоду синуса или косинуса.

Пример 7.1. Решите неравенство $\sin x < \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Решение.

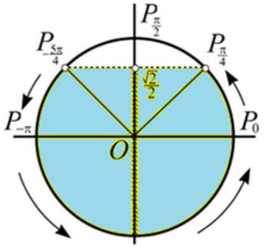


Рис. 7.1

1. Отмечаем на линии синусов (рис. 7.1) число $\frac{\sqrt{2}}{2}$ и все значения синуса, которые меньше этого числа.

2. Выделяем на числовой окружности дугу, на которой находятся точки, ординаты которых меньше $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

3. Выделенная дуга проходит через нуль, поэтому при положительном обходе от нуля получаем первую граничную точку $P_{\frac{\pi}{4}}$, которая соответствует положительному числу $\frac{\pi}{4}$. Делаем обход по дуге от нуля в отрицательном направлении до второй граничной точки $P_{\frac{5\pi}{4}}$, соответствующей отрицательному числу $-\frac{5\pi}{4}$. Числа из промежутка $\left(-\frac{5\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right)$ являются решениями данного неравенства. Все решения будут иметь вид

$$\left(-\frac{5\pi}{4} + 2\pi n; \frac{\pi}{4} + 2\pi n\right), n \in Z.$$

Пример 7.2. Решите неравенство $\cos x \le \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Решение.

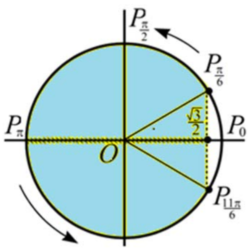


Рис. 7.2

1. Отмечаем на линии косинусов (рис. 7.2) число $\frac{\sqrt{3}}{2}$ и все значения косинуса, которые меньше этого числа.

2. Выделяем на числовой окружности дугу, на которой находятся точки, абсциссы которых не больше $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3. Выделенная дуга не проходит через нуль, поэтому первая точка $P_{\frac{\pi}{6}}$, соответствует положительному числу $\frac{\pi}{6}$.

Делаем обход по дуге от точки $P_{\frac{\pi}{6}}$ в положительном направлении до второй точки $P_{\frac{11\pi}{6}}$, соответствующей числу $\frac{11\pi}{6}$. Числа из промежутка $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}\right]$ являются решениями данного неравенства. Все решения будут иметь вид:

$$\left[\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{11\pi}{6} + 2\pi n\right], n \in Z.$$

Неравенства вида $\operatorname{tg} x \vee a$ или $\operatorname{ctg} x \vee a$

Для решения неравенств с тангенсом и котангенсом удобно использовать линии тангенсов и котангенсов, касающиеся тригонометрической окружности в точках (1; 0) и (0; 1) соответственно.

Напомним алгоритм решения простейших тригонометрических неравенств вида $\operatorname{tg} x \vee a$ или $\operatorname{ctg} x \vee a$, где символ $\vee$ заменяет один из знаков неравенств: $>$, $<$, $\geq$, $\leq$.

1. Отмечаем на линии тангенсов (котангенсов) число a и все значения тангенса (котангенса), которые больше (меньше) числа a.

2. Выделяем на числовой окружности дугу, на которой находятся точки, удовлетворяющие данному условию.

3. Записываем ответ для соответствующего неравенства:

а) для неравенства $\operatorname{tg} x < a$ решение имеет вид:

$$-\frac{\pi}{2} + \pi n < x < \operatorname{arctg} a + \pi n, n \in Z;$$

б) для неравенства $\operatorname{tg} x > a$ решение имеет вид:

$$\operatorname{arctg} a + \pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z;$$

в) для неравенства $\operatorname{ctg} x < a$ решение имеет вид:

$$\operatorname{arcctg} a + \pi n < x < \pi + \pi n, n \in Z;$$

г) для неравенства $\operatorname{ctg} x > a$ решение имеет вид:

$$\pi n < x < \operatorname{arcctg} a + \pi n, n \in Z.$$

Пример 7.3. Решите неравенство $\operatorname{tg} x > \sqrt{3}$.

Решение.

1. Отмечаем на линии тангенсов (рис. 7.3) число $\sqrt{3}$ и все значения тангенса, которые больше этого числа.

2. Выделяем на числовой окружности дугу, на которой находятся точки, удовлетворяющие данному условию.

3. Выделенная дуга имеет граничную точку $P_{\frac{\pi}{3}}$, соответствующую числу $\frac{\pi}{3}$. Делаем обход по дуге от точки $P_{\frac{\pi}{3}}$ в положительном направлении до второй точки $P_{\frac{\pi}{2}}$, соответствующей числу $\frac{\pi}{2}$.

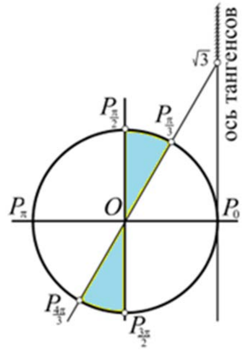


Рис. 7.3

Числа из промежутка $\left(\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right)$ являются решениями данного неравенства. Все решения данного неравенства будут иметь вид: $\left(\frac{\pi}{3} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right), n \in Z$. На окружности выделены два интервала.

Пример 7.4. Решите неравенство $\operatorname{ctg} x \leq -1$.

Решение.

1. Отмечаем на линии котангенсов (рис. 7.4) число –1 и все значения котангенса, которые меньше этого числа.

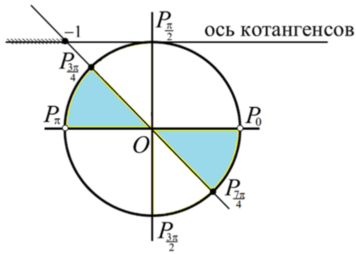


Рис. 7.4

2. Выделяем на числовой окружности дугу, на которой находятся точки, удовлетворяющие данному условию.

3. Выделенная дуга имеет граничную точку $P_{\frac{3\pi}{4}}$, соответствующую числу $\frac{3\pi}{4}$. Делаем обход по дуге от точки $P_{\frac{3\pi}{4}}$ в положительном направлении до второй точки P_{π}, соответствующей числу π.

Числа из промежутка $\left[\frac{3\pi}{4}; \pi\right)$ являются решениями данного неравенства. Остальные решения получают добавлением слагаемого $\pi n,\ n \in Z$ к концам полученного промежутка.

На окружности выделены два промежутка. Все решения данного неравенства будут иметь вид: $\left[\frac{3\pi}{4} + \pi n;\ \pi + \pi n\right)$.

Методические указания по выполнению самостоятельной работы студентов

Для выполнения заданий самостоятельной работы следует изучить представленный выше теоретический материал, разобрать и записать решения типовых заданий по теме, изучить рекомендуемую литературу.

В случае возникновения затруднений при изучении теоретического материала и выполнении практических заданий студент может получить консультацию у преподавателя.

Задание 1. Решите неравенства:

а) $\sin x > -\frac{1}{2}$; б) $\cos x \le -0{,}7$; в) $\operatorname{tg} x \ge -\frac{\sqrt{3}}{3}$; г) $\operatorname{ctg} x \le -1$.

Задание 2. Решите системы неравенств:

а) $\begin{cases} \sin x < \frac{1}{2}, \\ \cos x < \frac{1}{2}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \operatorname{tg} x < 1, \\ \operatorname{ctg} x \ge -\frac{\sqrt{3}}{3}; \end{cases}$ в) $\begin{cases} \cos x \ge -\frac{3}{5}, \\ \operatorname{tg} x < 3. \end{cases}$

Задание 3. Решите совокупность неравенств $\left[\begin{array}{l} \sin x < -\frac{\sqrt{3}}{2}, \\ \operatorname{ctg} x \le 7. \end{array}\right.$

Задание 4. Решите неравенства:

а) $\frac{\cos x}{1+\cos 2x} < 0$; б) $6\sin^2 x - \sin x \cdot \cos x - \cos^2 x > 2$.

Контрольные вопросы

1. В какую сторону идет движение по тригонометрическому кругу: против часовой стрелки или по часовой?
2. Какие точки соответствуют строгому неравенству, а какие – нестрогому?
3. При решении нестрого неравенства в ответе записаны квадратные скобки, верно ли это?

4. Где находится ось синусов (косинусов, тангенсов и котангенсов)?
5. При решении неравенства $\sin x < \frac{1}{3}$ какую часть оси OY нужно заштриховать: выше точки $\frac{1}{3}$ или ниже этой точки?
6. При решении неравенства $\cos x \geq -0{,}25$ какую часть оси OX нужно заштриховать: правее точки –0,25 или левее этой точки?
7. При решении неравенства $\operatorname{tg} x > 1$ какую часть оси тангенсов нужно заштриховать: выше точки 1 или ниже этой точки?
8. При решении неравенства $\operatorname{ctg} x \leq 1$ какую часть оси котангенсов нужно заштриховать: правее точки 1 или левее этой точки?
9. При решении неравенства с тангенсом (котангенсом) точки, соответствующие каким углам, нужно выколоть? Почему?
10. Какой период нужно добавить к концам промежутка в неравенстве с синусом (косинусом)?
11. При решении неравенства с тангенсом (котангенсом) в ответе получены два симметричных промежутка в первой и третьей четвертях. Сколько промежутков нужно записать в ответ: два или один? Через какой период?

Рекомендуемая литература

1. Кытманов, А. М. Тригонометрические уравнения и неравенства / А. М. Кытманов, Е. К. Лейнартас, С. Г. Мысливец // Математика : адаптационный курс : учеб. пособие / А. М. Кытманов, Е. К. Лейнартас, С. Г. Мысливец. – Санкт-Петербург [и др.], 2022. – Глава 8. – С. 135–136, 141–142. – URL: e.lanbook.com/book/211088 (дата обращения: 10.12.2024). – Режим доступа: по подписке. – ISBN 978-5-8114-1472-7.
2. Тригонометрические неравенства / В. В. Гарбарук, В. И. Родин, И. М. Соловьева, М. А. Шварц // Решение задач по математике : адаптивный курс для студентов технических вузов : учеб. пособие / В. В. Гарбарук, В. И. Родин, И. М. Соловьева, М. А. Шварц. – Санкт-Петербург [и др.], 2017. – С. 338–350. – URL: e.lanbook.com/book/99281 (дата обращения: 10.12.2024). – Режим доступа: по подписке. – ISBN 978-5-8114-2618-8.

Тема 8. Показательная функция. Логарифм. Логарифмическая функция. Область определения

Форма проведения: практическое занятие.

Вопросы для обсуждения

1. Показательная функция, ее свойства.
2. Определение логарифма.
3. Свойства логарифмов.
4. Логарифмическая функция и ее свойства.

Методические указания по проведению занятия

На практическом занятии студенты повторяют основные понятия и теоретические сведения по теме, выполняют практические задания под руководством преподавателя, отвечают на контрольные вопросы.

Методические материалы к занятию

Понятие показательной функции

Определение. Функция, заданная формулой $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$, называется *показательной функцией с основанием a*.

Такое название она получила потому, что независимая переменная x стоит в показателе. Основание a – заданное число. Для положительного основания значение степени a^x можно найти для любого значения показателя x – и целого, и рационального, и иррационального, то есть для любого действительного значения.

Основные свойства показательной функции

1. Область определения: множество R действительных чисел.

2. Область значений: множество $R+$ всех положительных действительных чисел.

3. Монотонность: при $a > 1$ функция монотонно возрастает на всей числовой прямой; при $0 < a < 1$ функция монотонно убывает на множестве R.

4. Нули функции: так как основание $a > 0$, то ни при каких значениях переменной x функция не обращается в 0.

5. При любом значении a значение функции $y(0) = a^0 = 1$.

6. Ограниченность: не ограничена сверху, ограничена снизу.

7. Промежутки знакопостоянства: функция принимает положительные значения при любых значениях переменной x.

8. График функции (рис. 8.1).

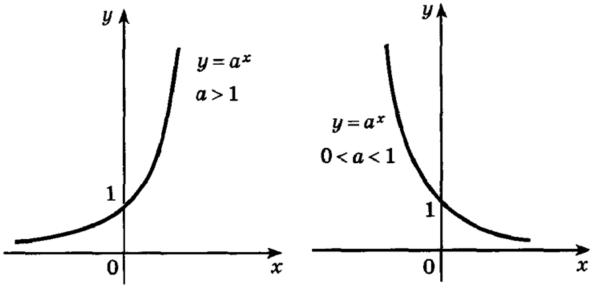


Рис. 8.1. Графики функций $y = a^x$

9. Асимптоты. Независимо от значения основания a график функции имеет горизонтальную асимптоту $y = 0$: для $0 < a < 1$ при x, стремящемся к плюс бесконечности, для $a > 1$ при x, стремящемся к минус бесконечности.

Определение. Функция вида $y = e^x$ ($\exp x$) называется *экспонентой*, где $e \approx 2{,}71$.

Пример 8.1. Постройте график функции $y = -3^x + 1$ и опишите ее основные свойства.

Решение.

1. Область определения функции — любое действительное число.

2. Найдем множество значений функции: так как $3^x > 0$, то $-3^x < 0$, значит, $-3^x + 1 < 1$, то есть множество значений функции $y = -3^x + 1$ представляет собой промежуток $(-\infty; 1)$.

3. Так как функция $y = 3^x$ монотонно возрастает, то функция $y = -3^x$ монотонно убывает. Тогда функция $y = -3^x + 1$ также монотонно убывает.

4. Эта функция имеет нули функции: $-3^x + 1 = 0$, $3^x = 1$, $x = 0$.

5. Для этой функции (рис. 8.2) горизонтальной асимптотой будет прямая $y = 1$.

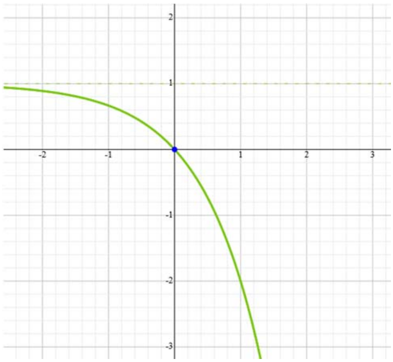


Рис. 8.2. График функции $y = -3^x + 1$

Пример 8.2. Найдите множество значений функции $y = 3^{x+1} - 3$.

Решение. Так как $3^{x+1} > 0$, то $3^{x+1} - 3 > -3$, то есть множество значений $(-3; +\infty)$.

Пример 8.3. Решите графически уравнение $3^x = 4 - x$.

Решение. Строим в одной системе координат графики функций $y = 3^x$, $y = 4 - x$. Графики функций (рис. 8.3) пересекаются в точке $x = 1$.

Проверка: $3^1 = 4 - 1$; $3 = 3$.

Ответ: $x = 1$.

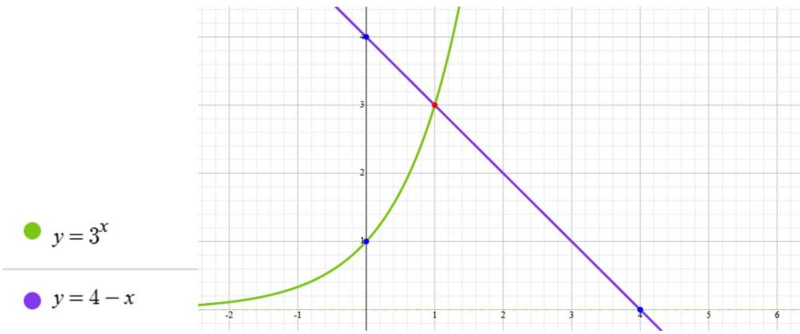


Рис. 8.3. Графики функций $y = 3^x$, $y = 4 - x$

Определение логарифма

Определение. *Логарифмом* положительного числа b по основанию a, $a > 0$, $a \neq 1$, называется показатель степени, в которую надо возвести число a, чтобы получить число b, то есть $\log_a b = c \to a^c = b$.

Если в основании логарифма стоит число 10, то логарифм называется *десятичным* и обозначается $\lg x$.

Если же в основании логарифма стоит число e, то логарифм называется *натуральным* и обозначается $\ln x$.

Пример 8.4. Вычислите $\log_6 216$.

Решение: $\log_6 216 = 3$, так как $6^3 = 216$.

Пример 8.5. Вычислите $\log_2 \frac{1}{8}$.

Решение:

$$\log_2 \frac{1}{8} = -3, \text{ так как } 2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}.$$

Рассмотрим *основные свойства логарифмов.*

1. Основное логарифмическое тождество:

$$a^{\log_a b} = b, a > 0, a \neq 1, b > 0.$$

Пример 8.6. Вычислите $\frac{4^{\log_4 10}}{2}$.

Решение:

$$\frac{4^{\log_4 10}}{2} = \frac{10}{2} = 5.$$

Пример 8.7. Вычислите $4^{-2\log_4 10}$.

Решение:

$$4^{-2\log_4 10} = \left(4^{\log_4 10}\right)^{-2} = 10^{-2} = 0{,}01.$$

Пример 8.8. Вычислите $4^{-2+\log_4 10}$.

Решение:

$$4^{-2+\log_4 10} = 4^{-2} \cdot 4^{\log_4 10} = \frac{1}{16} \cdot 10 = \frac{10}{16} = \frac{5}{8}.$$

Пример 8.9. Вычислите $4^{-2-\log_4 10}$.

Решение:

$$4^{-2-\log_4 10} = \frac{4^{-2}}{4^{\log_4 10}} = \frac{1}{16} : 10 = \frac{1}{160}.$$

2. Логарифм произведения: $\log_a(b, c) = \log_a b + \log_a c$, $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $c > 0$.

Пример 8.10. Вычислите $\log_2 16 + \log_2 32$.

Решение:

$$\log_2 16 + \log_2 32 = \log_2(16 \cdot 32) = \log_2 512 = 9.$$

Пример 8.11. Вычислите $\log_3 6 + \log_3 \frac{3}{2}$.

Решение:

$$\log_3 6 + \log_3 \frac{3}{2} = \log_3 \left(6 \cdot \frac{3}{2}\right) = \log_3 9 = 2.$$

3. Логарифм частного: $\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$, $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $c > 0$.

Пример 8.12. Вычислите $\log_5 75 - \log_5 3$.

Решение:

$$\log_5 75 - \log_5 3 = \log_5 \frac{75}{3} = \log_5 25 = 2.$$

Пример 8.13. Вычислите $\log_8 10 - \log_8 15 + \log_8 12$.

Решение:

$$\log_8 10 - \log_8 15 + \log_8 12 = \log_8 \left(\frac{10}{15} \cdot 12\right) = \log_8 8 = 1.$$

4. Логарифм степени: $\log_a b^n = n \cdot \log_a |b|$, $a > 0, a \neq 1$, $b > 0$.

Пример 8.14. Вычислите $\log_3 \sqrt{3}$.

Решение:

$$\log_3 \sqrt{3} = \log_3 3^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\log_3 3 = \frac{1}{2} \cdot 1 = 0{,}5.$$

Пример 8.15. Вычислите $\frac{\log_3 25}{\log_3 5}$.

Решение:

$$\frac{\log_3 25}{\log_3 5} = \frac{\log_3 5^2}{\log_3 5} = \frac{2 \cdot \log_3 5}{\log_3 5} = 2.$$

5. $\log_{a^m} b = \frac{1}{m}\log_a b$, $a > 0, a \neq 1$, $b > 0$.

Пример 8.16. Вычислите $\log_{\sqrt[3]{13}} 13$.

Решение:

$$\log_{\sqrt[3]{13}} 13 = \log_{13^{\frac{1}{3}}} 13 = 3 \cdot \log_{13} 13 = 3.$$

Пример 8.17. Вычислите $\log_{27} 243$.

Решение:

$$\log_{27} 243 = \log_{3^3} 3^5 = \frac{5}{3} \cdot \log_3 3 = \frac{5}{3}.$$

6. Формула перехода к другому основанию:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a},$$

где $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $c > 0$, $c \neq 1$.

Пример 8.18. Вычислите $\frac{\log_3 25}{\log_3 5}$.

Решение:

$$\frac{\log_3 25}{\log_3 5} = \log_5 25 = 2.$$

7. Взаимообратный логарифм: $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$ или $\log_a b \cdot \log_b a = 1$.

Пример 8.19. Вычислите $\log_5 9 \cdot \log_3 25$.

Решение:

$$\log_5 9 \cdot \log_3 25 = \log_5 3^2 \cdot \log_3 5^2 = 2 \cdot \log_3 5 \cdot 2 \cdot \log_5 3 =$$
$$= 4 \cdot \log_3 5 \cdot \log_5 3 = 4.$$

8. $\log_a b \cdot \log_c d = \log_c b \cdot \log_a d$.

Пример 8.20. Вычислите $\log_5 9 \cdot \log_3 25$.

Решение:

$$\log_5 9 \cdot \log_3 25 = \log_3 9 \cdot \log_5 25 = 2 \cdot 2 = 4.$$

9. $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$.

Пример 8.21. Вычислите $8^{\log_2 3}$.

Решение:

$$8^{\log_2 3} = 3^{\log_2 8} = 3^3 = 27.$$

Пример 8.22. Вычислите $\frac{\log_6 42 \cdot \log_7 42}{\log_6 7 + \log_7 6 + 2}$.

Решение:

$$\frac{\log_6 42 \cdot \log_7 42}{\log_6 7 + \log_7 6 + 2} = \frac{\log_6(6 \cdot 7) \cdot \log_7(6 \cdot 7)}{\log_6 7 + \log_7 6 + 2} = \frac{(1 + \log_6 7) \cdot (1 + \log_7 6)}{\log_6 7 + \log_7 6 + 2} =$$
$$= \frac{1 + \log_6 7 + \log_7 6 + \log_6 7 \cdot \log_7 6}{\log_6 7 + \log_7 6 + 2} = \frac{\log_6 7 + \log_7 6 + 2}{\log_6 7 + \log_7 6 + 2} = 1.$$

Пример 8.23. Вычислите

$$\frac{1}{1 + \log_2 11 + \log_2 13} + \frac{1}{1 + \log_{11} 2 + \log_{11} 13} + + \frac{1}{1 + \log_{13} 2 + \log_{13} 11}.$$

Решение:

$$\frac{1}{1+\log_2 11+\log_2 13}+\frac{1}{1+\log_{11} 2+\log_{11} 13}+\frac{1}{1+\log_{13} 2+\log_{13} 11}=$$

$$=\frac{1}{\log_2 2+\log_2 11+\log_2 13}+\frac{1}{\log_{11} 11+\log_{11} 2+\log_{11} 13}$$

$$+\frac{1}{\log_{13} 13+\log_{13} 2+\log_{13} 11}=$$

$$=\frac{1}{\log_2(2\cdot 11\cdot 13)}+\frac{1}{\log_{11}(2\cdot 11\cdot 13)}+\frac{1}{\log_{13}(2\cdot 11\cdot 13)}$$

$$=\log_{(2\cdot 11\cdot 13)} 2+\log_{(2\cdot 11\cdot 13)} 11+\log_{(2\cdot 11\cdot 13)} 13=$$

$$=\log_{(2\cdot 11\cdot 13)}(2\cdot 11\cdot 13)=1.$$

Пример 8.24. Сравните сумму $\frac{1}{\log_3 231}+\frac{1}{\log_7 231}+\frac{1}{\log_{11} 231}$ и произведение $\log_7 3\cdot\log_{11} 7\cdot\log_3 11$.

Решение:

$$\frac{1}{\log_3 231}+\frac{1}{\log_7 231}+\frac{1}{\log_{11} 231}=\log_{231} 3+\log_{231} 7+\log_{231} 11=$$

$$=\log_{231}(21\cdot 11)=\log_{231} 231=1,\ \log_7 3\cdot\log_{11} 7\cdot\log_3 11=$$

$=\log_{11} 3\cdot\log_7 7\cdot\log_3 11=\log_{11} 3\cdot\log_3 11=1\Rightarrow$ значения выражений равны.

Понятие логарифмической функции

Определение. Функцию вида $y=\log_a x$, $a>0$, $a\neq 1$ называют *логарифмической функцией* с основанием a.

Основные свойства логарифмической функции

1. Область определения – множество $R+$ всех положительных чисел. Это следует из определения логарифма (так как существует только логарифм положительного числа!).

2. Множество значений логарифмической функции – множество R всех действительных чисел.

3. Монотонность: возрастающая, если $a>1$, и убывающая, если $0<a<1$.

4. Нули функции: $x=1$.

5. Асимптоты: вертикальная асимптота $x=0$.

6. Ограниченность: неограниченная функция (следует из свойства № 2).

7. Промежутки знакопостоянства: если $a > 1$, то функция принимает положительные значения при $x > 1$, отрицательные – при $0 < x < 1$. Если $0 < a < 1$, функция принимает положительные значения при $0 < x < 1$, отрицательные – при $x > 1$.

8. График функции: из рассмотренных свойств логарифмической функции следует, что ее график располагается правее оси OY, обязательно проходит через точку (1; 0) и имеет вид как на рис. 8.4.

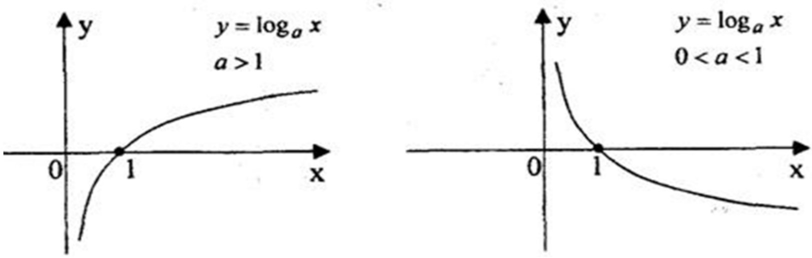


Рис. 8.4. Графики функций $y = \log_a x$

В табл. 5 приведены основные свойства показательной и логарифмической функций.

Пример 8.25. Найдите область определения функции

$$y = \log_2(3x) + 1.$$

Решение:

$$D(y)\colon 3x > 0;\ x > 0.$$

Ответ: $D(y) = (0; +\infty)$.

Пример 8.26. Найдите область определения функции

$$y = \log_{0,5}(x^2 - 4).$$

Решение:

$$(x^2 - 4) > 0;\ (x - 2)(x + 2) > 0;\ \left[\begin{array}{l} x < -2 \\ x > 2 \end{array}\right..$$

Ответ: $D(y) = (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$.

Таблица 5

Свойства показательной и логарифмической функций

		$y = a^x$	$y = \log_a x$
$D(y)$		$(-\infty; +\infty)$	$(0; +\infty)$
$E(y)$		$(0; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$
Нули функции	OX	$x = 0, y = 1$	–
	OY	–	$x = 1, y = 0$
Монотонность		Возрастает при $a > 1$	Возрастает при $a > 1$
		Убывает при $0 < a < 1$	Убывает при $0 < a < 1$
Промежутки знакопостоянства	$a > 1$	$y > 0$	$y > 0$ при $x > 1$, $y < 0$ при $0 < x < 1$
	$0 < a < 1$		$y > 0$ при $0 < x < 1$, $y < 0$ при $x > 1$

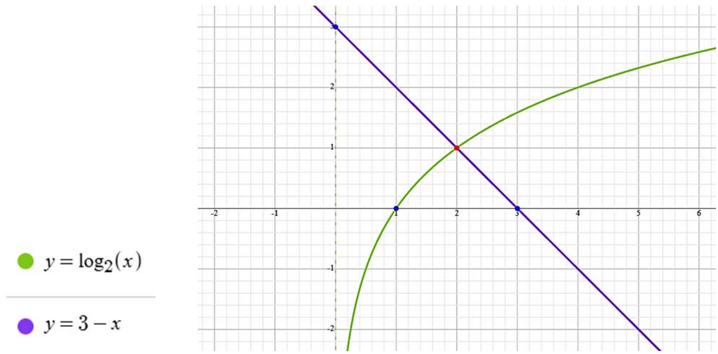


Рис. 8.5. Графики функций $y = \log_2 x$ и $y = 3 - x$

Пример 8.27. Решите графически уравнение $\log_2 x = 3 - x$.

Решение.

Построим в одной системе координат две функции: $y = \log_2 x$ и $y = 3 - x$. Найдем точки их пересечения (рис. 8.5).

Проверка: $\log_2 2 = 3 - 2$; $1 = 1$.

Ответ: $x = 2$.

Пример 8.28. Сравните числа $\log_2 \frac{1}{7}$ и –3.

Решение.

Представим число –3 в виде логарифма по основанию 2:

$$-3 = -3 \cdot \log_2 2 = \log_2 (2)^{-3} = \log_2 \frac{1}{8}.$$

Получаем, что $y = \log_2 x$ – возрастающая функция, значит: $\log_2 \frac{1}{7} > \log_2 \frac{1}{8}$, тогда $\log_2 \frac{1}{7} > -3$.

Ответ: $\log_2 \frac{1}{7} > -3$.

Методические указания по выполнению самостоятельной работы студентов

Для выполнения заданий самостоятельной работы следует изучить представленный выше теоретический материал, разобрать и записать решения типовых заданий по теме, изучить рекомендуемую литературу.

В случае возникновения затруднений при изучении теоретического материала и выполнении практических заданий студент может получить консультацию у преподавателя.

Блок 1

Задание 1. Вычислите:

а) $(\sqrt{5})^{3,6} \cdot \left(\sqrt{5}\right)^{-1,6} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-6,3} : \left(\frac{1}{2}\right)^{-4,3} + \left(\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^{-3}$;

б) $(2\sqrt{2} + \sqrt{3})^x \cdot \left(2\sqrt{2} - \sqrt{3}\right)^x$;

в) $((\sqrt[3]{11})^x + 1) \cdot \left((\sqrt[3]{121})^x - \left(\sqrt[3]{11}\right)^x + 1\right)$;

г) $\sqrt{(19 - 6\sqrt{10})^x}$.

Задание 2. Постройте графики функций:

а) $y = e^x$; б) $y = (\frac{1}{2})^{|x|}$; в) $y = \begin{cases} 4^x, x < 0 \\ \cos x, 0 < x < \pi; \\ x - \pi - 1, x \geq \pi \end{cases}$ г) $y = \log_2 |x|$.

Задание 3. Найдите область значений показательных функций:

а) $y = 3 \cdot 2^x$; б) $y = 0{,}5^{x+3}$; в) $y = 5^x - 8$; г) $y = 6 - \left(\frac{6}{7}\right)^x$.

Задание 4. Найдите область определения функций:

а) $y = \frac{1}{3^x - 9}$; б) $y = \log_x \frac{x^2 - 3x + 1}{x - 3}$;

в) $y = \ln\left(\frac{3x+7}{2x+5} - 1\right)$; г) $y = \log_7(|x - 4| - 5)$.

Блок 2

Задание 1. Известно, что $\lg 2 = a$, $\lg 3 = b$. Вычислите:
а) $\log_4 12$; б) $\log_6 18$; в) $\log_{0,5} 3$; г) $\log_{\frac{1}{3}} 24$.

Задание 2. Дано:
а) $\log_{14} 28 = a$. Найдите $\log_{49} 16$;
б) $\log_6 30 = a$. Найдите $\log_6 5$.

Задание 3. Вычислите:

а) $\sqrt[4]{36^{\log_6 5} - 5^{\log_5 9}}$; б) $\frac{\log_{0,3} 32}{\log_{0,3} 64}$; в) $\frac{2\log_{0,5} 2 + \log_{0,5}\sqrt{10}}{\log_{0,5} 10 - \log_{0,5}\sqrt{10} + \log_{0,5} 4}$;

г) $\frac{1}{2}\log_8\left(\cos\frac{\pi}{8} - \sin\frac{\pi}{8}\right)^2 - \log_8\left(\cos\frac{\pi}{8} + \sin\frac{\pi}{8}\right)^{-1}$;

д) $\log_3 8 \cdot \log_2 27 - 3^{\log_9 25}$; е) $\frac{\log_2 56}{\log_{28} 2} - \frac{\log_2 7}{\log_{224} 2}$.

Задание 4. Решите графически уравнения:
а) $\lg x = \frac{1}{x-9}$; б) $3^{-x} = \frac{x}{3}$.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение показательной функции. Приведите пример.
2. Каковы область определения и множество значений показательной функции?
3. Через какую точку проходят все графики показательной функции вида $y = a^x$?
4. Может ли график показательной функции пересекать ось OX? Приведите пример, если это возможно.
5. Какая функция называется экспонентой? Чему равно основание этой функции?
6. Что такое логарифм, десятичный логарифм, натуральный логарифм?
7. Каковы область определения и множество значений логарифмической функции?

8. Может ли логарифм равняться отрицательному числу? Если это возможно, приведите пример.
9. В чем состоит основное логарифмическое тождество?
10. Перечислите свойства логарифмов.
11. Какой формулой связаны между собой логарифмы по разным основаниям?
12. Как связаны между собой графики показательной и логарифмической функций?
13. Какие общие свойства есть у показательной и логарифмической функций? В чем их отличия?

Рекомендуемая литература

1. Башмаков, М. И. Показательная функция // Алгебра и начала анализа : учебник для 10–11 классов средней школы / М. И. Башмаков. – 2-е изд. – Москва, 1992. – С. 191.
2. Башмаков, М. И. Показательные и логарифмические уравнения и неравенства // Алгебра и начала анализа : учебник для 10–11 классов средней школы / М. И. Башмаков. – 2-е изд. – Москва, 1992. – С. 200.
3. Кытманов, А. М. Логарифмические и показательные выражения / А. М. Кытманов, Е. К. Лейнартас, С. Г. Мысливец // Математика : адаптационный курс : учеб. пособие / А. М. Кытманов, Е. К. Лейнартас, С. Г. Мысливец. – Санкт-Петербург [и др.], 2022. – Глава 9. – С. 152–155. – URL: e.lanbook.com/book/211088 (дата обращения: 10.12.2024). – Режим доступа: по подписке. – ISBN 978-5-8114-1472-7.
4. Преобразование показательных и логарифмических выражений / В. В. Гарбарук, В. И. Родин, И. М. Соловьева, М. А. Шварц // Решение задач по математике : адаптивный курс для студентов технических вузов : учеб. пособие / В. В. Гарбарук, В. И. Родин, И. М. Соловьева, М. А. Шварц. – Санкт-Петербург [и др.], 2017. – С. 229–235. – URL: e.lanbook.com/book/99281 (дата обращения: 10.12.2024). – Режим доступа: по подписке. – ISBN 978-5-8114-2618-8.

5. Самостоятельная работа по математике : учеб.-метод. пособие / Ульяновский государственный педагогический университет им. И. Н. Ульянова, Чебоксарский электромеханический колледж ; авт.-сост.: М. А. Ситникова, И. В. Кориненко ; отв. ред. Н. И. Мерлина. – Чебоксары : [б. и.], 2015. – 173, [1] с.

Тема 9. Показательные уравнения и неравенства

Форма проведения: практическое занятие.

Вопросы для обсуждения

1. Определение показательного уравнения. Определение показательного неравенства.
2. Простейшие показательные уравнения и неравенства.
3. Показательные уравнения и неравенства, приводящиеся к линейным.
4. Показательные уравнения и неравенства, приводящиеся к квадратным.
5. Однородные показательные уравнения и неравенства.
6. Метод рационализации при решении показательных неравенств.

Методические указания по проведению занятия

На практическом занятии студенты повторяют основные понятия и теоретические сведения по теме, выполняют практические задания под руководством преподавателя, отвечают на контрольные вопросы.

Методические материалы к занятию

Показательные уравнения

Показательным называется уравнение, в котором переменная входит в показатели степеней при заданном основании.

1. *Простейшие показательные уравнения* – это уравнения вида:

$$a^{f(x)} = b, a^{f(x)} = a^{g(x)}, a > 0, a \neq 1.$$

Так как множество значений показательной функции – множество положительных чисел, то при $b \leq 0$ уравнение решений не имеет. Теперь рассмотрим случай $b > 0$.

Пример 9.1. Решите уравнение $13^x = \sqrt[5]{169}$.

Решение:

$$13^x = \sqrt[5]{169};\ 13^x = 169^{\frac{1}{5}};\ 13^x = 13^{\frac{2}{5}};\ x = 0{,}4.$$

Ответ: $x = 0{,}4$.

Пример 9.2. Решите уравнение $0{,}6^x \cdot 0{,}6^3 = \dfrac{0{,}6^{2x}}{0{,}6^5}$.

Решение:

$$0{,}6^x \cdot 0{,}6^3 = \frac{0{,}6^{2x}}{0{,}6^5};\ 0{,}6^{x+3} = 0{,}6^{2x-5};\ x + 3 = 2x - 5;$$

$$x - 2x = -5 - 3;\ -x = -8;\ x = 8.$$

Ответ: $x = 8$.

Пример 9.3. Решите уравнение $0{,}5^{\frac{1}{x}} = 4^{\frac{1}{x+1}}$.

Решение:

$$0{,}5^{\frac{1}{x}} = 4^{\frac{1}{x+1}};\ 2^{\frac{-1}{x}} = 2^{\frac{2}{x+1}};\ \frac{-1}{x} = \frac{2}{x+1};$$

$$-(x+1) = 2x;\ x \neq -1, x \neq 0,$$

$$-x - 1 = 2x;\ -x - 2x = 1;\ -3x = 1;\ x = -\frac{1}{3}.$$

Ответ: $x = -\frac{1}{3}$.

2. Рассмотрим *показательные уравнения* вида:

$$\alpha \cdot a^{f(x)+a} + \beta \cdot a^{f(x)+b} + \cdots + \gamma \cdot a^{f(x)+n} = b.$$

Для решения таких уравнений левую часть преобразуют следующим образом: выносят за скобку степень $a^{f(x)+a}$ (часто, чтобы избежать дробных коэффициентов, выносят степень с наименьшим показателем).

Пример 9.4. Решите уравнение $3^{2x-1} + 3^{2x} = 108$.

Решение:

$$3^{2x-1} + 3^{2x} = 108;\ 3^{2x-1} \cdot (1+3) = 108;\ 3^{2x-1} \cdot 4 = 108;$$

$$3^{2x-1} = 27;\ 3^{2x-1} = 3^3;\ 2x - 1 = 3;\ 2x = 4;\ x = 2.$$

Ответ: $x = 2$.

Пример 9.5. Решите уравнение $3^{x+3} + 3^x = 7^{x+1} + 5 \cdot 7^x$.

Решение:

$$3^{x+3} + 3^x = 7^{x+1} + 5 \cdot 7^x;\ 3^x \cdot (27 + 1) = 7^x \cdot (7 + 5);$$

$$3^x \cdot 28 = 7^x \cdot 12;\ \left(\frac{3}{7}\right)^x = \frac{12}{28};\ \left(\frac{3}{7}\right)^x = \frac{3}{7};\ x = 1.$$

Ответ: $x = 1$.

Пример 9.6. Решите уравнение $20^x - 64 \cdot 5^x - 4^x + 64 = 0$.

Решение:

$$20^x - 64 \cdot 5^x - 4^x + 64 = 0;\ (20^x - 64 \cdot 5^x) - (4^x - 64) = 0;$$

$$5^x \cdot (4^x - 64) - (4^x - 64) = 0;\ (4^x - 64) \cdot (5^x - 1) = 0;$$

$$\left[\begin{array}{l}(4^x - 64) = 0,\\ (5^x - 1) = 0;\end{array}\right. \left[\begin{array}{l}4^x = 64,\\ 5^x = 1;\end{array}\right. \left[\begin{array}{l}4^x = 4^3,\\ 5^x = 5^0;\end{array}\right. \left[\begin{array}{l}x = 3,\\ x = 0.\end{array}\right.$$

Ответ: $x = 0$, $x = 3$.

3. Еще один вид показательных уравнений – *уравнения, сводящиеся к рациональным* с помощью введения новой переменной. После решения уравнения с новой переменной получим простейшие показательные уравнения.

Пример 9.7. Решите уравнение $16^x - 5 \cdot 4^x + 4 = 0$.

Решение:

$$16^x - 5 \cdot 4^x + 4 = 0;\ 4^{2x} - 5 \cdot 4^x + 4 = 0.$$

Введем новую переменную: $4^x = t$, $t > 0$.

Решим вспомогательное уравнение:

$$t^2 - 5t + 4 = 0;\ D = b^2 - 4ac = 25 - 16 = 9;$$

$$t_{1,2} = \frac{-b \mp \sqrt{D}}{2a} = \frac{5 \mp 3}{2};\ \left[\begin{array}{l}t_1 = 1,\\ t_2 = 4.\end{array}\right.$$

Вернемся к переменной x:

$$\left[\begin{array}{l}t_1 = 1,\\ t_2 = 4;\end{array}\right. \left[\begin{array}{l}4^x = 1,\\ 4^x = 4;\end{array}\right. \left[\begin{array}{l}4^x = 4^0,\\ 4^x = 4^1;\end{array}\right. \left[\begin{array}{l}x = 0,\\ x = 1.\end{array}\right.$$

Ответ: $x = 0$, $x = 1$.

Пример 9.8. Решите уравнение $13^{2x+1} - 13^x - 12 = 0$.

Решение:

$$13^{2x+1} - 13^x - 12 = 0;\ 13^1 \cdot 13^{2x} - 13^x - 12 = 0.$$

Введем новую переменную: $13^x = t$, $t > 0$.

Решим вспомогательное уравнение:

$$13^1 \cdot t^2 - t - 12 = 0;$$

$$D = b^2 - 4ac = 1 + 4 \cdot 12 \cdot 13 = 1 + 624 = 625;$$

$$t_{1,2} = \frac{-b \mp \sqrt{D}}{2a} = \frac{1 \mp 25}{26};$$

$$\left[\begin{array}{l} t_1 = 1, \\ t_2 = -\dfrac{12}{13} < 0 - \text{посторонний корень.} \end{array}\right.$$

Вернемся к переменной x: $t = 1$; $13^x = 1$; $x = 0$.

Ответ: $x = 0$.

Пример 9.9. Решите уравнение $9^{x-\frac{1}{2}} - 8 \cdot 3^{x-1} + 5 = 0$.

Решение:

$$9^{x-\frac{1}{2}} - 8 \cdot 3^{x-1} + 5 = 0;\ 9^x \cdot 9^{-\frac{1}{2}} - 8 \cdot 3^x \cdot 3^{-1} + 5 = 0;$$

$$\frac{3^{2x}}{3} - 8 \cdot \frac{3^x}{3} + 5 = 0;\ 3^{2x} - 8 \cdot 3^x + 15 = 0.$$

Введем новую переменную: $3^x = t$, $t > 0$.

Решим вспомогательное уравнение:

$$t^2 - 8 \cdot t + 15 = 0;$$

$$D = b^2 - 4ac = 64 - 4 \cdot 1 \cdot 15 = 64 - 60 = 4;$$

$$t_{1,2} = \frac{-b \mp \sqrt{D}}{2a} = \frac{8 \mp 2}{2};\ \left[\begin{array}{l} t_1 = 5, \\ t_2 = 3. \end{array}\right.$$

Вернемся к переменной x:

$$\left[\begin{array}{l} t_1 = 5, \\ t_2 = 3; \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} 3^x = 5, \\ 3^x = 3. \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} 3^x = 5, \\ 3^x = 3^1; \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} x = \log_3 5, \\ x = 1. \end{array}\right.$$

Ответ: $x = \log_3 5$, $x = 1$.

4. *Однородными показательными уравнениями* называется уравнение вида:

$$\alpha \cdot a^{2x} + \beta \cdot a^x \cdot b^x + \gamma \cdot b^{2x} = 0.$$

Данные показательные уравнения решаются делением на любую показательную функцию, а затем введением новой переменной.

Пример 9.10. Решите уравнение $4 \cdot 9^x - 13 \cdot 6^x + 9 \cdot 4^x = 0$.

Решение:

$$4 \cdot 9^x - 13 \cdot 6^x + 9 \cdot 4^x = 0;\ 4 \cdot 3^{2x} - 13 \cdot 2^x \cdot 3^x + 9 \cdot 2^{2x} = 0.$$

Делим каждое слагаемое на $2^{2x} > 0$.

$$4 \cdot \frac{3^{2x}}{2^{2x}} - 13 \cdot \frac{2^x \cdot 3^x}{2^{2x}} + 9 \cdot \frac{2^{2x}}{2^{2x}} = 0;\ 4 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{2x} - 13 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x + 9 = 0.$$

Введем новую переменную: $\left(\frac{3}{2}\right)^x = t, t > 0$.

Решим вспомогательное уравнение:

$$4t^2 - 13t + 9 = 0;$$

$$D = b^2 - 4ac = 169 - 4 \cdot 4 \cdot 9 = 169 - 144 = 25;$$

$$t_{1,2} = \frac{-b \mp \sqrt{D}}{2a} = \frac{13 \mp 5}{8};\quad \left[\begin{array}{l} t_1 = 1, \\ t_2 = \dfrac{9}{4}. \end{array}\right.$$

Вернемся к переменной x:

$$\left[\begin{array}{l} t_1 = 1, \\ t_2 = \dfrac{9}{4}; \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} \left(\dfrac{3}{2}\right)^x = 1, \\ \left(\dfrac{3}{2}\right)^x = \dfrac{9}{4}; \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} \left(\dfrac{3}{2}\right)^x = \left(\dfrac{3}{2}\right)^0, \\ \left(\dfrac{3}{2}\right)^x = \left(\dfrac{3}{2}\right)^2; \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = 2. \end{array}\right.$$

Ответ: $x = 0$, $x = 2$.

Показательные неравенства

Показательным называется неравенство, в котором переменная входит только в показатели степеней при постоянном основании.

1. *Простейшие показательные неравенства* – это неравенства вида $a^{f(x)} > b$, $a^{f(x)} > a^{g(x)}$, $a > 0$, $a \neq 1$. Очевидно, что знак неравенства может быть любым ($<, >, \leq, \geq$).

Рассмотрим неравенство $a^{f(x)} > a^{g(x)}$.

Если основание $a > 1$, то при переходе от исходного неравенства к неравенству с показателями знак неравенства не изменяется, так как показательная функция при $a > 1$ является *возрастающей*, то есть: $a^{f(x)} > a^{g(x)}$, если $a > 1$, то $y = a^x$ – возрастающая функция, $f(x) > g(x)$.

Если $0 < a < 1$, то при переходе от исходного неравенства к неравенству с показателями знак неравенства изменяется на противоположный, так как показательная функция при $0 < a < 1$ является *убывающей*, то есть: $a^{f(x)} > a^{g(x)}$, если $0 < a < 1$, то $y = a^x$ – убывающая функция, $f(x) < g(x)$.

Пример 9.11. Решите неравенство $5^x > \sqrt[7]{125}$.

Решение.

Так как $5^x > \sqrt[7]{125}$; $5^x > 5^{\frac{3}{7}}$; $a = 5 > 1$, то $y = 5^x$ – возрастающая функция. Тогда $x > \frac{3}{7}$; $x \in \left(\frac{3}{7}; +\infty\right)$.

Ответ: $x \in \left(\frac{3}{7}; +\infty\right)$.

Пример 9.12. Решите неравенство

$$(0{,}4)^{x^2-2x} \le \frac{8}{125}.$$

Решение.

Так как

$$(0{,}4)^{x^2-2x} \le \frac{8}{125};\ \left(\frac{2}{5}\right)^{x^2-2x} \le \left(\frac{2}{5}\right)^3;$$

$a = 0{,}4 < 1$, то $y = \left(\frac{2}{5}\right)^x$ – убывающая функция.

Тогда $x^2 - 2x \ge 3$. Решим квадратное неравенство:

$$x^2 - 2x - 3 \ge 0.$$

$$y = x^2 - 2x - 3;\ x^2 - 2x - 3 = 0;$$

$$D = b^2 - 4ac = 4 + 4 \cdot 1 \cdot 3 = 4 + 12 = 16;\ x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{2 \pm 4}{2};$$

$$\left[\begin{array}{l} x_1 = 3, \\ x_2 = -1. \end{array}\right.$$

Тогда

$$(x-3)(x+1) \ge 0;\ x \in (-\infty; -1] \cup [3; +\infty).$$

Ответ: $x \in (-\infty; -1] \cup [3; +\infty)$.

2. Рассмотрим *показательные неравенства* вида:

$$\alpha \cdot a^{f(x)+a} + \beta \cdot a^{f(x)+b} + \dots + \gamma \cdot a^{f(x)+n} > b.$$

Для решения таких уравнений левую часть преобразуют следующим образом: выносят за скобку степень $a^{f(x)+a}$ (часто, чтобы избежать дробных коэффициентов, выносят степень с наименьшим показателем), а затем решают простейшее показательное неравенство.

Пример 9.13. Решите неравенство $3^{x+2} + 3^{x-1} < 28$.

Решение:

$$3^{x+2} + 3^{x-1} < 28;\ 3^{x-1} \cdot (3^3 + 1) < 28;\ 3^{x-1} \cdot 28 < 28;$$

$$3^{x-1} < 1;\ 3^{x-1} < 3^0.$$

Если $a = 3 > 1$, то $y = 3^x$ – возрастающая функция, тогда

$$x - 1 < 0; x < 1.$$

Ответ: $x \in (-\infty; 1)$.

Пример 9.14. Решите неравенство $5^{3x+1} - 5^{3x-3} \geq 624$.

Решение:

$$5^{3x-3} \cdot (5^4 - 1) \geq 624;\ 5^{3x-3} \cdot 624 \geq 624;$$

$$5^{3x-3} \geq 1;\ 5^{3x-3} \geq 5^0.$$

Если $a = 5 > 1$, то $y = 5^x$ – возрастающая функция, тогда

$$3x - 3 \geq 0;\ 3x \geq 3;\ x \geq 1.$$

Ответ: $x \in [1; +\infty)$.

3. Еще один вид показательных неравенств – неравенства, сводящиеся к рациональным с помощью введения новой переменной. После решения неравенства с новой переменной получим простейшие показательные неравенства.

Пример 9.15. Решите неравенство $9^x - 3^{x+4} \leq 82$.

Решение:

$$9^x - 3^{x+4} \leq 82;\ 3^{2x} - 3^4 \cdot 3^x - 82 \leq 0.$$

Введем новую переменную: $3^x = t$, $t > 0$.

Решим вспомогательное неравенство:

$$t^2 - 81t - 82 \leq 0;$$

$$y = t^2 - 81t - 82;\ t^2 - 81t - 82 = 0;$$

$$D = b^2 - 4ac = 81^2 + 4 \cdot 1 \cdot 82 = 6561 + 324 = 6889;$$

$$t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{81 \pm 83}{2};$$

$$\left[\begin{array}{l} t_1 = 82, \\ t_2 = -1; \end{array}\right.\ (t - 82)(t + 1) \leq 0;\ \begin{cases} \begin{cases} t \leq 82 \\ t \geq -1 \end{cases} \\ t > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t > 0 \\ t \leq 82 \end{cases} \Rightarrow t \leq 82.$$

Вернемся к исходной переменной x: $t \leq 82$; $3^x \leq 82$; если $a = 3 > 1$, то $y = 3^x$ – возрастающая функция, тогда $x \leq \log_3 82$.

Ответ: $x \in (-\infty; \log_3 82]$.

Пример 9.16. Решите неравенство $11^{x+1}+3\cdot 11^{-x}\geq 34$.

Решение:

$$11^{x+1}+3\cdot 11^{-x}\geq 34;\ 11\cdot 11^{x}+3\cdot\frac{1}{11^{x}}\geq 34.$$

Введем новую переменную: $11^x = t$, $t > 0$.

Решим вспомогательное неравенство:

$$11t+3\cdot\frac{1}{t}-34\geq 0;$$

$$\frac{11t^2-34t+3}{t}\geq 0;$$

так как $t > 0$, то $11t^2 - 34t + 3 \geq 0$;

$$y=11t^2-34t+3;\ 11t^2-34t+3=0;$$

$$D=b^2-4ac=34^2-4\cdot 11\cdot 3=1156-132=1024;$$

$$t_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\frac{34\pm 32}{22};\ \left[\begin{array}{l}t_1=3,\\ t_2=\dfrac{1}{11};\end{array}\right.\ 11\cdot(t-3)\left(t-\frac{1}{11}\right)\geq 0;$$

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}t\geq 3\\ t\leq \frac{1}{11}\end{array}\right.\\ t>0\end{cases}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}t\geq 3\\ 0<t\leq\frac{1}{11}\end{array}\right..$$

Вернемся к исходной переменной x:

$$\left[\begin{array}{l}t\geq 3\\ 0<t\leq\frac{1}{11}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}11^x\geq 3\\ 0<11^x\leq\frac{1}{11}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}11^x\geq 3\\ 11^x\leq 11^{-1}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x\geq\log_{11}3\\ x\leq -1\end{array}\right..$$

Ответ: $x\in(-\infty;-1]\cup[\log_{11}3\,;+\infty)$.

Пример 9.17. Решите неравенство

$$\frac{5^x}{5^x-4}+\frac{5^x+5}{5^x-5}+\frac{22}{5^{2x}-9\cdot 5^x+20}\leq 0.$$

Решение:

$$\frac{5^x}{5^x-4}+\frac{5^x+5}{5^x-5}+\frac{22}{5^{2x}-9\cdot 5^x+20}\leq 0.$$

Введем новую переменную: $5^x = t$, $t > 0$.

Решим вспомогательное неравенство:

$$\frac{t}{t-4}+\frac{t+5}{t-5}+\frac{22}{t^2-9t+20}\leq 0;\quad\frac{t\cdot(t-5)+(t+5)\cdot(t-4)+22}{(t-4)\cdot(t-5)}\leq 0;$$

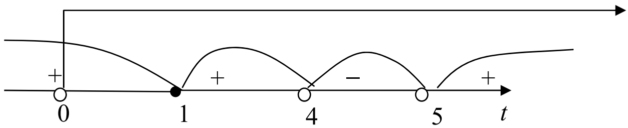
$$\frac{t^2-5t+t^2-4t+5t-20+22}{(t-4)\cdot(t-5)}\leq 0;\ \frac{2t^2-4t+2}{(t-4)\cdot(t-5)}\leq 0.$$

Решим неравенство методом интервалов:

$$y = \frac{2t^2 - 4t + 2}{(t-4)\cdot(t-5)}.$$

$$\left[\begin{array}{l} 2t^2 - 4t + 2 = 0, \\ (t-4)\cdot(t-5) \neq 0; \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} t^2 - 2t + 1 = 0, \\ (t-4)\cdot(t-5) \neq 0; \end{array}\right. \left[\begin{array}{c} (t-1)^2 = 0, \\ (t-4)\cdot(t-5) \neq 0; \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} t_{1,2} = 1, \\ t \neq 4, \\ t \neq 5. \end{array}\right. \quad \frac{2\cdot(t-1)^2}{(t-4)\cdot(t-5)} \leq 0.$$



$$\left[\begin{array}{l} t = 1, \\ \begin{cases} t > 4, \\ t < 5. \end{cases} \end{array}\right.$$

Вернемся к исходной переменной x:

$$\left[\begin{array}{l} t = 1; \\ \begin{cases} t > 4; \\ t < 5. \end{cases} \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} 5^x = 1; \\ \begin{cases} 5^x > 4; \\ 5^x < 5. \end{cases} \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} 5^x = 5^0; \\ \begin{cases} 5^x > 4; \\ 5^x < 5^1. \end{cases} \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} x = 0; \\ \begin{cases} x > \log_5 4; \\ x < 1. \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $x \in \{0\} \cup (\log_5 4; 1)$.

4. *Однородные показательные неравенства* – это неравенства вида: $\alpha \cdot a^{2x} + \beta \cdot a^x \cdot b^x + \gamma \cdot b^{2x} > 0$ (знак может быть любой).

Данные показательные неравенства решаются делением на любую показательную функцию, а затем введением новой переменной.

Пример 9.18. Решите неравенство

$$2 \cdot 81^{x+1} - 36^{x+1} - 3 \cdot 16^{x+1} < 0.$$

Решение:

$$2 \cdot 81^{x+1} - 36^{x+1} - 3 \cdot 16^{x+1} < 0;$$

$$2 \cdot 81^x \cdot 81^1 - 36^x \cdot 36 - 3 \cdot 16^x \cdot 16 < 0;$$

$$162 \cdot 9^{2x} - 36 \cdot 4^x \cdot 9^x - 48 \cdot 4^{2x} < 0.$$

Разделим каждое слагаемое на $4^{2x} > 0$.

$$162 \cdot \frac{9^{2x}}{4^{2x}} - \frac{36 \cdot 4^x \cdot 9^x}{4^{2x}} - 48 \cdot \frac{4^{2x}}{4^{2x}} < 0; \; 162 \cdot \left(\frac{9}{4}\right)^{2x} - 36 \cdot \left(\frac{9}{4}\right)^x - 48 < 0.$$

Разделим каждое слагаемое на 6:

$$27 \cdot \left(\frac{9}{4}\right)^{2x} - 6 \cdot \left(\frac{9}{4}\right)^{x} - 8 < 0.$$

Введем новую переменную: $\left(\frac{9}{4}\right)^{x} = t, t > 0.$

Решим вспомогательное неравенство:

$$27t^2 - 6t - 8 < 0;$$

$$y = 27t^2 - 6t - 8;\ 27t^2 - 6t - 8 = 0;$$

$$D = b^2 - 4ac = 6^2 + 4 \cdot 27 \cdot 8 = 36 + 864 = 900;$$

$$t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{6 \pm 30}{54};\ \left[\begin{array}{l} t_1 = \frac{2}{3}, \\ t_2 = -\frac{4}{9}; \end{array}\right.\ 27 \cdot \left(t - \frac{2}{3}\right)\left(t + \frac{4}{9}\right) < 0;$$

$$\begin{cases} \begin{cases} t > -\frac{4}{9}, \\ t < \frac{2}{3}, \end{cases} \\ t > 0; \end{cases}\ 0 < t < \frac{2}{3};\ 0 < \left(\frac{9}{4}\right)^{x} < \frac{2}{3};$$

$$\left(\frac{9}{4}\right)^{x} < \frac{2}{3};\ \left(\frac{3}{2}\right)^{2x} < \left(\frac{3}{2}\right)^{-1}.$$

Если $a = 1{,}5 > 1$, то $y = \left(\frac{3}{2}\right)^{x}$ – возрастающая функция, тогда $2x < -1$; $x < -0{,}5$.

Ответ: $x \in (-\infty; -0{,}5)$.

5. *Метод рационализации* при решении показательных неравенств – метод, позволяющий перейти от показательного неравенства к рациональному. Как правило, им удобно решать неравенства, в которых переменное основание. Итак, неравенство $a(x)^{f(x)} > a(x)^{g(x)},\ a(x) > 0$ равносильно совокупности двух систем:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a(x) > 1 \\ f(x) > g(x) \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < a(x) < 1 \\ f(x) < g(x) \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a(x) - 1 > 0 \\ f(x) - g(x) > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a(x) - 1 < 0 \\ f(x) - g(x) < 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow (a(x) - 1) \cdot \big(f(x) - g(x)\big) > 0.$$

Знак неравенства остается такой же, как в исходном показательном неравенстве.

Пример 9.19. Решите неравенство $x^{(2-5x)} \le 1$.

Решение: $x^{(2-5x)} \le x^0$. Основание $x > 0$.

Используя формулу рационализации, получим:

$$(x-1)\cdot(2-5x-0) \le 0 \Leftrightarrow (x-1)\cdot(2-5x) \le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \le \frac{2}{5}. \\ x \ge 1 \end{array}\right.$$

Ответ: $x \in \left(0; \frac{2}{5}\right] \cup [1; +\infty)$.

Методические указания по выполнению самостоятельной работы студентов

Для выполнения заданий самостоятельной работы следует изучить представленный выше теоретический материал, разобрать и записать решения типовых заданий по теме, изучить рекомендуемую литературу.

В случае возникновения затруднений при изучении теоретического материала и выполнении практических заданий студент может получить консультацию у преподавателя.

Задание 1. Решите простейшие показательные уравнения:

а) $2^x = 3$; б) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-x} = \sqrt[4]{2}$;

в) $3^x \cdot 5^{2x-3} = 45$; г) $2^{2x} \cdot 3^{x-1} \cdot 5^{2x} = 3 \cdot 10^4$.

Задание 2. Решите показательные уравнения, приводящиеся к линейным:

а) $5^{1-x} + \left(\frac{1}{5}\right)^{x-2} + 25^{-\frac{x}{2}} = 155$; б) $4^{x+1} - 3^x = 3^{x+2} - 4^x$.

Задание 3. Решите показательные уравнения, приводящиеся к квадратным:

а) $7^{2x} - 6 \cdot 7^x + 5 = 0$; б) $2^{x+1} + 4^x = 80$; в) $3^x + 3^{1-x} = \frac{28}{3}$;

г) $4^{x+0,5} - 5 \cdot 6^x + \left(\frac{1}{9}\right)^{-x-0,5} = \ln 1$.

Задание 4. Решите устно простейшие показательные неравенства:

а) $2^x > 1$; б) $\left(\frac{1}{2}\right)^x > \frac{1}{2}$; в) $2^x > 0$; г) $3^x < 0$; д) $4^x + 2^x + 1 \ge 0$.

Задание 5. Решите показательные неравенства:

а) $\left(\frac{1}{3}\right)^x \geq 5^{\frac{2}{\log_3 5}}$;   б) $5^{x-1} - 5^x + 5^{x+1} \geq 21$;

в) $4^x + 2^x < 20$;   г) $3^{2x-1} - 3^{x-1} > 20$;

д) $\sqrt[3]{8^{5x+3}} < \sqrt{\left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{2x+1}{x}}}$;   е) $(x^2 - 4x + 4)^{(2x+7)} \leq (x^2 - 4x + 4)^{(-x-4)}$.

Контрольные вопросы

1. При каких b показательное уравнение $a^x = b$ имеет корень?
2. Сколько корней имеет уравнение $a^x = b$?
3. В чем суть метода решения показательных уравнения и неравенства, сводящихся к квадратным?
4. Как решаются однородные показательные уравнения и неравенства?
5. Какое правило надо соблюдать при решении показательных неравенств?
6. Для каких показательных неравенств можно применить метод рационализации? Назовите формулу рационализации.
7. Какое действие называется потенцированием? Найдите ответ самостоятельно.

Рекомендуемая литература

1. Башмаков, М. И. Показательные и логарифмические уравнения и неравенства // Алгебра и начала анализа : учебник для 10–11 классов средней школы / М. И. Башмаков. – 2-е изд. – Москва, 1992. – С. 206.
2. Кытманов, А. М. Логарифмические и показательные неравенства и системы уравнений / А. М. Кытманов, Е. К. Лейнартас, С. Г. Мысливец // Математика : адаптационный курс : учеб. пособие / А. М. Кытманов, Е. К. Лейнартас, С. Г. Мысливец. – Санкт-Петербург [и др.], 2022. – Глава 11. – С. 172–174, 176–178. – URL: e.lanbook.com/book/211088 (дата обращения: 10.12.2024). – Режим доступа: по подписке. – ISBN 978-5-8114-1472-7.
3. Кытманов, А. М. Логарифмические и показательные уравнения / А. М. Кытманов, Е. К. Лейнартас, С. Г. Мысливец // Математика :

адаптационный курс : учеб. пособие / А. М. Кытманов, Е. К. Лейнартас, С. Г. Мысливец. – Санкт-Петербург [и др.], 2022. – Глава 10. – С. 162, 164–165. – URL: e.lanbook.com/book/211088 (дата обращения: 10.12.2024). – Режим доступа: по подписке. – ISBN 978-5-8114-1472-7.
4. Показательные уравнения и неравенства / В. В. Гарбарук, В. И. Родин, И. М. Соловьева, М. А. Шварц // Решение задач по математике : адаптивный курс для студентов технических вузов : учеб. пособие / В. В. Гарбарук, В. И. Родин, И. М. Соловьева, М. А. Шварц. – Санкт-Петербург [и др.], 2017. – С. 239–249. – URL: e.lanbook.com/book/99281 (дата обращения: 10.12.2024). – Режим доступа: по подписке. – ISBN 978-5-8114-2618-8.

Тема 10. Логарифмические уравнения и неравенства

Форма проведения: практическое занятие.

Вопросы для обсуждения

1. Определение логарифмического уравнения. Определение логарифмического неравенства.
2. Простейшие логарифмические уравнения и неравенства.
3. Логарифмические уравнения и неравенства, приводящиеся к линейным.
4. Логарифмические уравнения и неравенства, приводящиеся к квадратным.
5. Однородные логарифмические уравнения и неравенства.
6. Метод рационализации при решении логарифмических неравенств.

Методические указания по проведению занятия

На практическом занятии студенты повторяют основные понятия и теоретические сведения по теме, выполняют практические задания под руководством преподавателя, отвечают на контрольные вопросы.

Методические материалы к занятию

Логарифмические уравнения

1. Уравнения вида $\log_a f(x) = b$, где $a > 0$, $a \neq 1$, $f(x) > 0$, называют *простейшими логарифмическими уравнениями*.

Данные уравнения имеют решение, которое можно получить по определению логарифма: $f(x) = a^b$. При решении логарифмического уравнения мы не должны забывать про ограничения, которые накладываются.

Пример 10.1. Решите уравнение $\log_3 (2x + 2) = 3$.

Решение:

$$\log_3(2x+2) = 3;\ \begin{cases} 2x+2 > 0, \\ 2x+2 = 3^3; \end{cases} \begin{cases} x > -1, \\ x = \dfrac{25}{2}; \end{cases} x = \frac{25}{2}.$$

Ответ: $x = \frac{25}{2}$.

Пример 10.2. Решите уравнение $\log_{x-1} 49 = 2$.

Решение:

$$\log_{x-1} 49 = 2;$$

$$\begin{cases} x-1 > 0, \\ x-1 \neq 1, \\ (x-1)^2 = 49; \end{cases} \begin{cases} x > 1, \\ x \neq 2, \\ |x-1| = 7; \end{cases} \begin{cases} x > 1, \\ x \neq 2, \\ \left[\begin{array}{l} x-1 = 7, \\ x-1 = -7; \end{array}\right. \end{cases} \begin{cases} x > 1, \\ x \neq 2, \\ \left[\begin{array}{l} x = 8, \\ x = -6; \end{array}\right. \end{cases} x = 8.$$

Ответ: $x = 8$.

2. Логарифмические уравнения вида $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ сводятся к решению системы:

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) = g(x). \end{cases}$$

Пример 10.3. Решите уравнение $\log_5(7-x) = \log_5(3-x) + 1$.

Решение:

$$\log_5(7-x) = \log_5(3-x) + 1;$$

$$\log_5(7-x) = \log_5(3-x) + \log_5 5;\ \log_5(7-x) = \log_5 5\cdot(3-x);$$

$$\begin{cases} 7-x > 0, \\ 3-x > 0, \\ 7-x = 15-5x; \end{cases} \begin{cases} x < 7, \\ x < 3, \\ -x+5x = 15-7; \end{cases} \begin{cases} x < 3, \\ x = 2; \end{cases} x = 2.$$

Ответ: $x = 2$.

Пример 10.4. Решите уравнение $\log_2(x-5)+\log_2(x+2)=3$.

Решение:

$$\log_2(x-5)+\log_2(x+2)=3\,;$$

$$\log_2(x-5)+\log_2(x+2)=\log_2 8;\ \begin{cases} x-5>0, \\ x+2>0; \end{cases} \begin{cases} x>5, \\ x>-2; \end{cases} x>5;$$

$$\log_2(x-5)(x+2)=\log_2 8;$$

$$(x-5)(x+2)=8;\ x^2+2x-5x-10-8=0;\ x^2-3x-18=0;$$

$$D=b^2-4ac=9+4\cdot 18=9+72=81;$$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\frac{3\pm 9}{2};\ \left[\begin{array}{l} x_1=6, \\ x_2=-3. \end{array}\right.$$

С учетом ограничения $x > 5$ получаем решение $x = 6$.

Ответ: $x = 6$.

Пример 10.5. Решите уравнение

$$\log_{0,5}(x+2)-\log_2(x-3)=\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(-4x-8).$$

Решение:

$$\log_{0,5}(x+2)-\log_2(x-3)=\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(-4x-8);$$

$$\begin{cases} x+2>0, \\ x-3>0, \\ -4x-8>0; \end{cases} \begin{cases} x>-2, \\ x>3, \\ x<-2. \end{cases}$$

Решений нет, так как система ограничений не совместна.

Ответ: решений нет.

Пример 10.6. Решите уравнение $\log_{\sqrt{2}} x+4\log_4 x+\log_8 x=13$.

Решение:

$$\log_{\sqrt{2}} x+4\log_4 x+\log_8 x=13\,;$$

$$\log_{2^{\frac{1}{2}}} x+4\log_{2^2} x+\log_{2^3} x=13;\ 2\log_2 x+4\cdot\frac{1}{2}\log_2 x+\frac{1}{3}\log_2 x=13\,;$$

$$\begin{cases} \frac{13}{3}\log_2 x=13, \\ x>0; \end{cases} \begin{array}{c} \log_2 x=3, \\ x>0; \end{array} \begin{cases} x=2^3, \\ x>0; \end{cases} \begin{array}{l} x=8, \\ x>0. \end{array}$$

Ответ: $x = 8$.

3. Еще один вид логарифмических уравнений – уравнения, сводящиеся к рациональным с помощью введения новой переменной.

После решения уравнения с новой переменной получим простейшие логарифмические уравнения.

Пример 10.7. Решите уравнение $6\log_8{}^2 x - 5\log_8 x + 1 = 0$.

Решение.

Запишем ограничение: $x > 0$. Введем новую переменную: $\log_8 x = t$. Решим вспомогательное уравнение:

$$6t^2 - 5t + 1 = 0;$$

$$D = b^2 - 4ac = 25 - 4 \cdot 6 = 25 - 24 = 1;$$

$$t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{5 \pm 1}{12}; \left[\begin{aligned} t_1 &= \frac{1}{3}, \\ t_2 &= \frac{1}{2}. \end{aligned}\right.$$

Вернемся к переменной x:

$$\left[\begin{aligned} \log_8 x &= \frac{1}{3}, \\ \log_8 x &= \frac{1}{2}; \end{aligned}\right. \left[\begin{aligned} x &= 8^{\frac{1}{2}}, \\ x &= 8^{\frac{1}{3}}; \end{aligned}\right. \left[\begin{aligned} x &= \sqrt{8}, \\ x &= 2. \end{aligned}\right.$$

Ответ: $x = 2$, $x = 2\sqrt{2}$.

Пример 10.8. Решите уравнение $\log_2 x - 2\log_x 2 + 1 = 0$.

Решение.

Запишем ограничения: $\begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1. \end{cases}$

$$\log_2 x - 2\log_x 2 + 1 = 0\,;\ \log_2 x - 2\frac{1}{\log_2 x} + 1 = 0.$$

Введем новую переменную: $\log_2 x = t$. Решим вспомогательное уравнение:

$$t - 2\frac{1}{t} + 1 = 0;\ \frac{t^2 + t - 2}{t} = 0;\ \begin{cases} t^2 + t - 2 = 0, \\ t \neq 0; \end{cases}$$

$$t^2 + t - 2 = 0;\ D = b^2 - 4ac = 1 + 4 \cdot 2 = 1 + 8 = 9;$$

$$t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-1 \pm 3}{2}; \left[\begin{aligned} t_1 &= -2, \\ t_2 &= 1. \end{aligned}\right.$$

Вернемся к переменной x:

$$\left[\begin{aligned} \log_2 x &= -2, \\ \log_2 x &= 1; \end{aligned}\right. \left[\begin{aligned} x &= 2^{-2}, \\ x &= 2^1; \end{aligned}\right. \left[\begin{aligned} x &= \frac{1}{4}, \\ x &= 2. \end{aligned}\right.$$

Ответ: $x = 0{,}25$, $x = 2$.

Пример 10.9. Решите уравнение

$$\frac{\log_3(9x)-8}{\log_3{}^2 x+\log_3 x^4}=-1.$$

Решение.

Запишем ограничения:

$$\begin{cases} x>0, \\ x\neq 1, x\neq 3^{-4}. \end{cases}$$

$$\frac{\log_3(9x)-8}{\log_3{}^2 x+\log_3 x^4}=-1;\ \frac{\log_3 9+\log_3 x-8}{\log_3{}^2 x+4\log_3|x|}=-1;$$

так как $x > 0$, то

$$\frac{2+\log_3 x-8}{\log_3{}^2 x+4\log_3 x}=-1;$$

$$\frac{\log_3 x-6}{\log_3{}^2 x+4\log_3 x}+1=0;\ \frac{\log_3 x-6+(\log_3{}^2 x+4\log_3 x)}{\log_3{}^2 x+4\log_3 x}=0;$$

$$\frac{\log_3 x-6+\log_3{}^2 x+4\log_3 x}{\log_3{}^2 x+4\log_3 x}=0;\ \frac{\log_3{}^2 x+5\log_3 x-6}{\log_3{}^2 x+4\log_3 x}=0.$$

Введем новую переменную: $\log_3 x = t$. Решим вспомогательное уравнение:

$$\frac{t^2+5t-6}{t^2+4t}=0;\ \begin{cases} t^2+5t-6=0, \\ t^2+4t\neq 0; \end{cases}\ t^2+5t-6=0;$$

$$a+b+c=0 \Rightarrow t_1=1, t_2=-\frac{c}{a}=-6;$$

$$t^2+4t\neq 0;\ t(t+4)\neq 0;\ \left[\begin{array}{l} t_1\neq -4, \\ t_2\neq 0. \end{array}\right.$$

Вернемся к переменной x:

$$\left[\begin{array}{l} \log_3 x=-6, \\ \log_3 x=1; \end{array}\right.\ \left[\begin{array}{l} x=3^{-6}, \\ x=3^1; \end{array}\right.\ \left[\begin{array}{l} x=\frac{1}{3^6}, \\ x=3; \end{array}\right.\ \left[\begin{array}{l} x=\frac{1}{729}, \\ x=3. \end{array}\right.$$

Ответ: $x=3,\ x=\frac{1}{729}$.

Логарифмические неравенства

Логарифмические неравенства – это неравенства вида

$$\log_a f(x) > \log_a g(x),$$

где $a > 0$; $a \neq 1$, и неравенства, сводящиеся к этому виду.

Способы решения логарифмических неравенств основаны на монотонности логарифмической функции в зависимости от основания логарифма. Функция возрастает, если $a > 1$, и убывает, если $0 < a < 1$.

Если $a > 1$, то неравенство $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ сводится к решению системы $\begin{cases} f(x) > g(x) \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$, при этом знак неравенства сохраняется.

Если $0 < a < 1$, то неравенство $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ сводится к решению системы $\begin{cases} f(x) < g(x) \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$, при этом знак неравенства меняется.

1. Простейшие логарифмические неравенства $\log_a f(x) > b$.

Пример 10.10. Решите неравенство $\log_2(2 - x) \leq 1$.

Решение:

$$\log_2(2 - x) \leq 1;\ \log_2(2 - x) \leq \log_2 2.$$

Так как основание логарифма $a = 2 > 1$, то функция $\log_2 x$ – возрастающая:

$$\begin{cases} 2 - x \leq 2, \\ 2 - x > 0; \end{cases} \begin{cases} x \geq 0, \\ x < 2; \end{cases} 0 \leq x < 2.$$

Ответ: $x \in [0; 2)$.

Пример 10.11. Решите неравенство $\log_{\frac{1}{3}}(2 - x) \leq -1$.

Решение:

$$\log_{\frac{1}{3}}(2 - x) \leq \log_{\frac{1}{3}} 3.$$

Так как основание логарифма $a = \frac{1}{3} > 1$,

то функция $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ – убывающая. Тогда неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases} 2 - x \geq 3, \\ 2 - x > 0; \end{cases} \begin{cases} x \leq -1, \\ x < 2; \end{cases} x \leq -1.$$

Ответ: $x \in (-\infty; -1]$.

2. Логарифмические неравенства вида $\log_a f(x) > \log_a g(x)$.

Пример 10.12. Решите неравенство $\log_3(2x-4) > \log_3(14-x)$.

Решение.

Так как основание логарифма $a = 3 > 1$, то функция $y = \log_3 x$ – возрастающая. Тогда неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases} 2x-4>0, \\ 14-x>0, \\ 2x-4>14-x; \end{cases} \begin{cases} x>2, \\ x<14, \\ x>6; \end{cases} 6<x<14.$$

Ответ: $x \in (6; 14)$.

Пример 10.13. Решите неравенство

$$\log_2(x+4) + \log_2(2x+3) > \log_2(1-2x).$$

Решение.

Так как основание логарифма $a = 2 > 1$, то функция $y = \log_2 x$ – возрастающая. Тогда неравенство будет равносильно системе:

$$\log_2(x+4) + \log_2(2x+3) > \log_2(1-2x);$$

$$\log_2\big((x+4)\cdot(2x+3)\big) > \log_2(1-2x);$$

$$\begin{cases} x+4>0, \\ 2x+3>0, \\ 1-2x>0, \\ (x+4)\cdot(2x+3)>1-2x; \end{cases} \begin{cases} x>-4, \\ x>-1{,}5, \\ x<0{,}5, \\ 2x^2+3x+8x+12-1+2x>0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x>-1{,}5, \\ x<0{,}5, \\ 2x^2+13x+11>0; \end{cases} \begin{cases} x>-1{,}5, \\ x<0{,}5, \\ 2(x+1)(x+5{,}5)>0; \end{cases} \begin{cases} x>-1{,}5, \\ x<0{,}5, \\ \left[\begin{array}{l} x<-5{,}5, \\ x>-1; \end{array}\right. \end{cases} x \in (-1; 0{,}5).$$

Ответ: $x \in (-1; 0{,}5)$.

3. Еще один вид логарифмических неравенств – неравенства, сводящиеся к рациональным с помощью введения новой переменной. После решения неравенства с новой переменной получим простейшие логарифмические неравенства.

Пример 10.14. Решите неравенство ${\log_2}^2 x + 6 > 5\log_2 x$.

Решение:

$$\log_2^2 x + 6 > 5\log_2 x.$$

Запишем ограничение: $x > 0$.

Введем новую переменную $\log_2 x = t$. Решим вспомогательное неравенство: $t^2 - 5t + 6 > 0$. Имеем:

$$y = t^2 - 5t + 6;\ t^2 - 5t + 6 = 0;$$

$$D = b^2 - 4ac = 25 - 4 \cdot 6 = 25 - 24 = 1;\ t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{5 \pm 1}{2};$$

$$\left[\begin{array}{l} t_1 = 3, \\ t_2 = 2; \end{array}\right. \quad (t-2)(t-3) > 0;\ \left[\begin{array}{l} t < 2, \\ t > 3. \end{array}\right.$$

Вернемся к исходной переменной x.

Так как основание логарифма $a = 2 > 1$, то функция $\log_2 x$ – возрастающая:

$$\left[\begin{array}{l} t < 2, \\ t > 3; \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} \log_2 x < 2, \\ \log_2 x > 3; \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x < 2^2, \\ x > 2^3, \end{array}\right. \\ x > 0; \end{array}\right. \left[\begin{array}{c} x > 8, \\ 0 < x < 4. \end{array}\right.$$

Ответ: $x \in (0; 4) \cup (8; +\infty)$.

Пример 10.15. Решите неравенство

$$(\log_2(x + 4{,}2) + 2)(\log_2(x + 4{,}2) - 3) \geq 0.$$

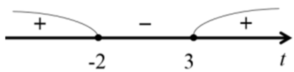
Решение:

$$(\log_2(x + 4{,}2) + 2)(\log_2(x + 4{,}2) - 3) \geq 0.$$

Запишем ограничения: $x + 4{,}2 > 0$; $x > -4{,}2$. Введем новую переменную: $\log_2(x + 4{,}2) = t$. Решим вспомогательное неравенство: $(t + 2)(t - 3) \geq 0$. Имеем:

$$y = (t + 2)(t - 3);\ (t + 2)(t - 3) \geq 0;$$

$$\left[\begin{array}{l} t = -2, \\ t = 3; \end{array}\right.$$



$$\left[\begin{array}{l} t \leq -2, \\ t \geq 3. \end{array}\right.$$

Вернемся к исходной переменной x.

Так как основание логарифма $a = 2 > 1$, то функция $\log_2 x$ – возрастающая:

$$\left[\begin{array}{l} t \leq -2, \\ t \geq 3; \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} t \leq -2, \\ t \geq 3, \end{array}\right. \\ x > -4{,}2; \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} \log_2(x + 4{,}2) \leq -2, \\ \log_2(x + 4{,}2) \geq 3, \end{array}\right. \\ x > -4{,}2; \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x + 4{,}2 \leq 2^{-2}, \\ x + 4{,}2 \geq 2^3, \end{array}\right. \\ x > -4{,}2; \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x \leq 0{,}25 - 4{,}2, \\ x \geq 8 - 4{,}2, \end{array}\right. \\ x > -4{,}2; \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x \leq -3{,}95, \\ x \geq 3{,}8, \end{array}\right. \\ x > -4{,}2. \end{array}\right.$$

Ответ: $x \in (-4{,}2; -3{,}95] \cup [3{,}8; +\infty)$.

4. *Метод рационализации* при решении логарифмических неравенств – метод, позволяющий перейти от показательного неравенства к рациональному. Как правило, таким методом удобно решать неравенства, в которых переменное основание. Итак, неравенство $\log_{a(x)} f(x) > \log_{a(x)} g(x)$ на своей области допустимых значений $\begin{cases} a(x) \neq 1 \\ a(x) > 0 \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$ равносильно совокупности двух систем:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a(x) > 1 \\ f(x) > g(x) \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < a(x) < 1 \\ f(x) < g(x) \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a(x) - 1 > 0 \\ f(x) - g(x) > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a(x) - 1 < 0 \\ f(x) - g(x) < 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow (a(x) - 1) \cdot (f(x) - g(x)) > 0.$$

Знак неравенства остается такой же, как в исходном показательном неравенстве.

Пример 10.16. Решите неравенство $\log_{x-3}(x^2 - 12x + 36) \leq 0$.

Решение.

Запишем ограничения:

$$\begin{cases} x - 3 > 0, \\ x - 3 \neq 1, \\ x^2 - 12x + 36 > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x > 3, \\ x \neq 4, \\ (x - 6)^2 > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x > 3, \\ x \neq 4, \\ x \neq 6. \end{cases}$$

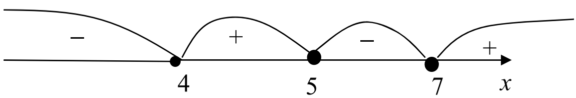
То есть: $x \in (-\infty; 3) \cup (3; 4) \cup (4; 6) \cup (6; +\infty)$.

Применим формулу рационализации:

$$(x - 3 - 1)(x^2 - 12x + 36 - 1) \leq 0.$$

$$(x - 4)(x^2 - 12x + 35) \leq 0;$$

$$(x - 4)(x - 5)(x - 7) \leq 0;$$



С учетом ограничений имеем: $x \in (3; 4) \cup [5; 6) \cup (6; 7]$.

Ответ: $x \in (3; 4) \cup [5; 6) \cup (6; 7]$.

Пример 10.17. Решите неравенство

$$\frac{1}{\log_{(x-1)}\frac{x}{20}} \geq -1.$$

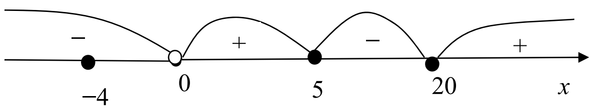
ОДЗ: $\begin{cases} x-1 \neq 1 \\ x-1 > 0 \\ \frac{x}{20} > 0 \\ \log_{(x-1)}\frac{x}{20} \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ x > 1 \\ x > 0 \\ \frac{x}{20} \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x \neq 2 \\ x \neq 20 \end{cases}.$

$$\log_{\frac{x}{20}}(x-1) \geq -1 \Leftrightarrow \log_{\frac{x}{20}}(x-1) \geq \log_{\frac{x}{20}}\frac{20}{x}.$$

Применив формулу рационализации, получим:

$$\left(\frac{x}{20}-1\right)\cdot\left(x-1-\frac{20}{x}\right) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x-20}{20}\cdot\left(\frac{x^2-x-20}{x}\right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-20)(x-5)(x+4)}{x} \geq 0.$$



$$x \in (0;5] \cup [20;+\infty).$$

С учетом ОДЗ имеем: $x \in (1;2) \cup (2;5] \cup (20;+\infty)$.

Ответ: $x \in (1;2) \cup (2;5] \cup (20;+\infty)$.

Методические указания по выполнению самостоятельной работы студентов

Для выполнения заданий самостоятельной работы следует изучить представленный выше теоретический материал, разобрать и записать решения типовых заданий по теме, изучить рекомендуемую литературу.

В случае возникновения затруднений при изучении теоретического материала и выполнении практических заданий студент может получить консультацию у преподавателя.

Задание 1. Решите устно простейшие логарифмические уравнения:

а) $\log_4 x = 2$; б) $\log_5 x = -2$; в) $\log_{\sqrt{2}} x = 4$;

г) $\log_x 9 = 2$; д) $\log_x 5 = 0$.

Задание 2. Решите логарифмические уравнения:

а) $\log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 3x + 1) = 0$; б) $\log_7 \log_3 \log_2 x = 0$;

в) $\log_2 x \cdot \log_4 x \cdot \log_8 x \cdot \log_{16} x = \frac{1}{3} \cdot \log_{\frac{1}{2}} x$; г) $\log_{6-x} x = 2$;

д) ${\log^2}_3 x - 3\log_3 x + 2 = 0$; е) $\lg^3 x^2 = 8 \lg x$.

Задание 3. Решите устно простейшие логарифмические неравенства:

а) $\lg x > 1$; б) $\lg x < 2$; в) $\ln x > 0$; г) $\log_{\frac{1}{4}} x \leq 0$.

Задание 4. Решите логарифмические неравенства:

а) $\log_{\frac{1}{2}}(2x - 3) \geq \frac{\log_5 27}{\log_5 3}$; б) $\lg(2x + 3) < \lg(x - 1)$;

в) $\log_{\frac{1}{3}} x + \log_3 x + \log_9 x \leq -1$; г) $\ln(x^2 - 3x) < 1$;

д) $\log_3 x - \log_x 3 \leq \frac{3}{2}$; е) $\log_5 x^2 + (\log_5 x)^2 \geq 1 + \log_5 7$;

ж) $\frac{1}{\log_{(x-2)}\frac{x}{8}} \geq -1$.

Контрольные вопросы

1. Сколько корней имеет уравнение $\log_a x = b$? Назовите их.
2. Как решается уравнение вида $\log_a f(x) = \log_a g(x)$?
3. В чем суть метода решения логарифмических уравнений и неравенств, приводящихся к квадратным?
4. Может ли область допустимых значений логарифмического уравнения состоять из всех действительных чисел? Если это возможно, приведите пример.
5. Может ли область допустимых значений логарифмического уравнения не содержать ни одного числа, то есть быть пустым множеством? Если это возможно, приведите пример.
6. Какое правило надо соблюдать при решении логарифмических неравенств?

7. Для каких логарифмических неравенств можно применить метод рационализации? Назовите формулу рационализации.
8. При решении логарифмического неравенства были получены два промежутка, но в ответе записан только один. Почему?

Рекомендуемая литература

1. Башмаков, М. И. Показательные и логарифмические уравнения и неравенства // Алгебра и начала анализа : учебник для 10–11 классов средней школы / М. И. Башмаков. – 2-е изд. – Москва, 1992. – С. 206.
2. Кытманов, А. М. Логарифмические и показательные неравенства и системы уравнений / А. М. Кытманов, Е. К. Лейнартас, С. Г. Мысливец // Математика : адаптационный курс : учеб. пособие / А. М. Кытманов, Е. К. Лейнартас, С. Г. Мысливец. – Санкт-Петербург [и др.], 2022. – Глава 11. – С. 172–173, 175–176. – URL: e.lanbook.com/book/211088 (дата обращения: 10.12.2024). – Режим доступа: по подписке. – ISBN 978-5-8114-1472-7.
3. Кытманов, А. М. Логарифмические и показательные уравнения / А. М. Кытманов, Е. К. Лейнартас, С. Г. Мысливец // Математика : адаптационный курс : учеб. пособие / А. М. Кытманов, Е. К. Лейнартас, С. Г. Мысливец. – Санкт-Петербург [и др.], 2022. – Глава 10. – С. 161–164. – URL: e.lanbook.com/book/211088 (дата обращения: 10.12.2024). – Режим доступа: по подписке. – ISBN 978-5-8114-1472-7.
4. Логарифмические уравнения и неравенства / В. В. Гарбарук, В. И. Родин, И. М. Соловьева, М. А. Шварц // Решение задач по математике : адаптивный курс для студентов технических вузов : учеб. пособие / В. В. Гарбарук, В. И. Родин, И. М. Соловьева, М. А. Шварц. – Санкт-Петербург [и др.], 2017. – С. 253–271. – URL: e.lanbook.com/book/99281 (дата обращения: 10.12.2024). – Режим доступа: по подписке. – ISBN 978-5-8114-2618-8.

Тема 11. Треугольник, четырехугольник, *n*-угольники. Окружность и круг

Форма проведения: практическое занятие.

Вопросы для обсуждения

1. Понятие треугольника и его виды. Замечательные точки треугольника. Высота, биссектриса и медиана треугольника. Средняя линия треугольника.
2. Признаки равенства треугольников. Признаки подобия треугольников.
3. Теоремы о замечательных точках и линиях треугольника.
4. Теоремы, используемые при решении задач на прямоугольный треугольник.
5. Теорема косинусов, теорема синусов и следствие из нее.
6. Теоремы о площади треугольника.
7. Понятия окружности и круга. Касательная к окружности. Теоремы об измерении углов, связанных с окружностью. Теоремы о свойствах касательных, секущих и хорд окружности. Теоремы о центре вписанной и описанной окружности треугольника.
8. Понятие четырехугольника и *n*-угольника. Виды четырехугольников и их свойства. Теоремы об окружности и четырехугольнике.

Методические указания по проведению занятия

На практическом занятии студенты повторяют основные понятия и теоретические сведения по теме, выполняют практические задания под руководством преподавателя, отвечают на контрольные вопросы.

Методические материалы к занятию

Представим основные теоремы, используемые при решении задач по данной теме.

«**Теорема 1** (*о замечательных точках и линиях треугольника*):

– три медианы треугольника пересекаются в одной точке (эта точка называется *центроидом треугольника*) и делятся этой точкой в отношении 2 : 1, считая от вершины; три высоты треугольника пересекаются в одной точке (эта точка называется *ортоцентром треугольника*); три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке (эта точка является *центром окружности, вписанной в данный треугольник*); три серединных перпендикуляра к сторонам треугольника пересекаются в одной точке (эта точка является *центром окружности, описанной около данного треугольника*);

– ортоцентр H треугольника, его центроид M и центр O описанной окружности лежат на одной прямой (она называется *прямой Эйлера*), причем $OM : MH = 1 : 2$ (рис. 11.1);

– основания высот треугольника, середины его сторон и середины отрезков, соединяющих ортоцентр треугольника с его вершинами, лежат на одной окружности (она называется *окружностью Эйлера*, или *окружностью девяти точек*) (рис. 11.2): центр этой окружности совпадает с серединой отрезка, соединяющего ортоцентр и центр описанной окружности; радиус ее равен половине радиуса описанной окружности» [22].

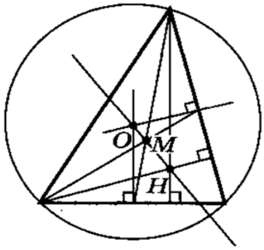


Рис. 11.1

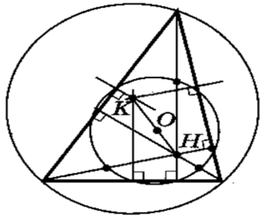


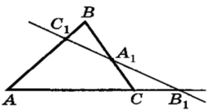
Рис. 11.2

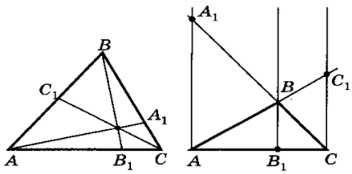
«**Теорема 2** (*теорема Менелая*). Пусть A_1, B_1, C_1 – три точки, лежащие на сторонах соответственно BC, CA, AB треугольника ABC или на их продолжениях (рис. 11.3). Точки A_1, B_1, C_1 тогда и только тогда лежат на одной прямой, если

$$\left|\frac{AC_1}{C_1B}\right| \cdot \left|\frac{BA_1}{A_1C}\right| \cdot \left|\frac{CB_1}{B_1A}\right| = 1.$$

Теорема 3 (*теорема Чевы*). Пусть A_1, B_1, C_1 – три точки, лежащие на сторонах соответственно BC, CA, AB треугольника ABC, или на их продолжениях (рис. 11.4, *а*, *б*). Для того чтобы прямые AA_1,

BB_1, CC_1 пересекались в одной точке, необходимо и достаточно, чтобы: $\left|\dfrac{AC_1}{C_1B}\right| \cdot \left|\dfrac{BA_1}{A_1C}\right| \cdot \left|\dfrac{CB_1}{B_1A}\right| = 1$» [21].





а) *б*)

Рис. 11.3 Рис. 11.4

«**Теорема 4.** Биссектриса внутреннего угла треугольника делит противоположную сторону на части, пропорциональные сторонам этого треугольника, заключающим данный угол: $BD : DC = AB : BC$ (рис. 11.5).

Теорема 5. Средние линии треугольника делят его на четыре равных треугольника (рис. 11.6).

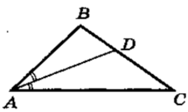


Рис. 11.5

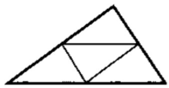


Рис. 11.6

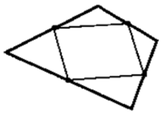


Рис. 11.7

Теорема 6. Середины сторон выпуклого четырехугольника являются вершинами параллелограмма (рис. 11.7).

Теорема 7 (*признак прямоугольного треугольника*). Если в треугольнике одна из медиан равна половине стороны, к которой она проведена, то этот треугольник прямоугольный» [22].

«**Теорема 8.** В прямоугольном треугольнике (рис. 11.8): а) высота, проведенная из вершины прямого угла на гипотенузу, является средней пропорциональной величиной между проекциями катетов на гипотенузу: $CD^2 = AD \cdot BD$; б) каждый катет является средней пропорциональной величиной между гипотенузой и проекцией этого катета на гипотенузу: $AC^2 = AB \cdot AD$; $BC^2 = AB \cdot BD$.

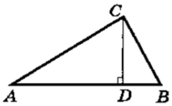


Рис. 11.8

Теорема 9. Если R и r – радиусы соответственно описанной и вписанной окружностей прямоугольного треугольника, катеты которого равны a и b, а гипотенуза – c, то $r = \dfrac{a+b-c}{2}$, $R + r = \dfrac{a+b}{2}$» [21].

«**Теорема 10.** Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон.

Теорема 11 (*теорема синусов*). Во всяком треугольнике ABC со сторонами $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ выполняется соотношение:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R,$$

где R – радиус описанной окружности.

Теорема 12 (*теорема косинусов*). Во всяком треугольнике ABC со сторонами $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ выполняется соотношение: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$» [22].

«**Теорема 13** (*о площади треугольника*):

– площадь треугольника равна половине произведения основания на высоту (рис. 11.9): $S = \frac{1}{2} a \cdot h$;

– площадь треугольника равна половине произведения двух его сторон на синус угла между ними (рис. 11.10): $S = \frac{1}{2} ab \sin C$;

– площадь треугольника равна половине произведения периметра треугольника на радиус вписанной в него окружности (рис. 11.11):

$$S = \frac{1}{2}(a + b + c) \cdot r;$$

– площадь треугольника со сторонами a, b и c вычисляется по формуле (формула Герона): $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где $p = \dfrac{a+b+c}{2}$;

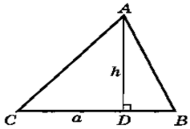


Рис. 11.9

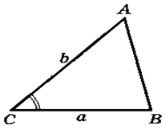


Рис. 11.10

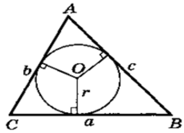


Рис. 11.11

– площадь треугольника со сторонами a, b и c вычисляется по формуле:

$$S = \frac{abc}{4R},$$

где R – радиус описанной окружности;

– отношение площадей двух подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия этих треугольников;

– отношение площадей двух треугольников, имеющих общее основание (рис. 11.12), равно отношению высот этих треугольников: $S_{\Delta ABC} : S_{\Delta ABD} = CE : DK$;

– отношение площадей двух треугольников, имеющих равные высоты (рис. 11.13), равно отношению оснований этих треугольников: $S_{\Delta AEC} : S_{\Delta BEC} = AE : BE$;

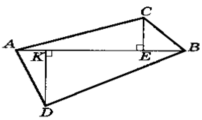


Рис. 11.12

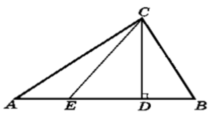


Рис. 11.13

– отношение площадей двух треугольников, имеющих равный угол, равно отношению произведений длин сторон этих треугольников, заключающих этот угол: $\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta MPK}} = \frac{AB \cdot AC}{MP \cdot MK}$ ($\angle BAC = \angle PMK$)» [21].

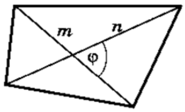
«**Теорема 14** (*о площади четырехугольника*):

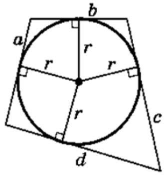
– площадь *выпуклого четырехугольника* равна половине произведения длин его диагоналей на синус угла между ними (рис. 11.14): $S = \frac{1}{2} mn \sin\varphi$;

– площадь *выпуклого четырехугольника* равна половине произведения его периметра на радиус вписанного круга (рис. 11.15): $S = \frac{1}{2}(a+b+c+d)\cdot r$;

– площадь *трапеции* равна произведению полусуммы ее оснований на высоту (произведению средней линии на высоту);

– площадь *параллелограмма* равна произведению длин двух его сторон на синус угла между ними (рис. 11.16);





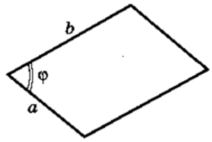


Рис. 11.14 Рис. 11.15 Рис. 11.16

– площадь *ромба* равна половине произведения его диагоналей» [22].

Приведем примеры решения задач.

Задача 11.1. «Две медианы треугольника, равные 9 и 12, взаимно перпендикулярны. Найдите длину третьей медианы этого треугольника.

Решение.

Построение данного треугольника начинаем с проведения двух взаимно перпендикулярных прямых. Пусть O – точка их пересечения (рис. 11.17).

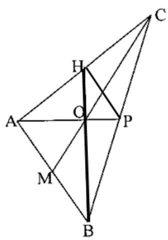


Рис. 11.17

На одной из этих прямых выбираем точку A и строим точку P (по разные стороны от точки O) так, чтобы выполнялось $AO : OP = 2 : 1$.

Аналогично на другой прямой выбираем точку B и строим точку H так, чтобы $BO : OH = 2 : 1$. Точки A и B принимаем за вершины заданного треугольника и получаем третью вершину $C = AH \cap BP$.

Докажем, что BH и AP – медианы треугольника ABC. Из соотношений $AO : OP = BO : OH = 2 : 1$ следует подобие треугольников AOB и POH с равными вертикальными углами при вершине O. Поэтому $HP \parallel AB$ и $HP = 0{,}5\ AB$.

Это означает, что точки H и P – середины сторон соответственно AC и BC треугольника ABC, то есть AP и BH – его медианы. Теперь приступаем к „*вычислительному*“ этапу решения этой задачи. Пусть $AP = 9$ и $BH = 12$ – медианы в ΔABC. Найдем длину медианы CM. По свойству медиан треугольника имеем:

$$AO : OP = BO : OH = 2 : 1 \Rightarrow AO = \frac{2}{3}AP = \frac{2}{3}\cdot 9 = 6;$$

$$BO = \frac{2}{3}BH = \frac{2}{3}\cdot 12 = 8.$$

Тогда по теореме Пифагора в прямоугольном ΔAOB:

$$AB = \sqrt{AO^2 + BO^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10.$$

Так как OM – медиана этого треугольника, проведенная из вершины прямого угла, то

$$OM = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}\cdot 10 = 5.$$

Имеем: $MO : OC = 1 : 2$, значит, $CM = 3MO = 3 \cdot 5 = 15$» [17].

Ответ: 15.

Задача 11.2. «Найдите площадь треугольника ABC, если $AB = 26$ см, $AC = 30$ см и длина медианы AM равна 14 см.

Решение.

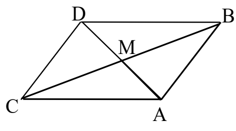


Рис. 11.18

Достроим треугольник ABC до параллелограмма $ABDC$ (рис. 11.18), в котором M – середина AD. Тогда $AD = 28$, по формуле Герона находим $S_{ABD} = \sqrt{42 \cdot 16 \cdot 12 \cdot 14} = 336$, что составляет половину площади параллелограмма $ABDC$, которая, в свою очередь, равна удвоенной площади треугольника ABC. Значит, $S_{\Delta ABC} = 336$ (см^2)» [28].

Ответ: 336 см^2.

Задача 11.3. «В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ длины диагоналей равны 7 и 18. Найдите площадь четырехугольника, зная, что длины отрезков, соединяющих середины его противоположных сторон, равны.

Решение.

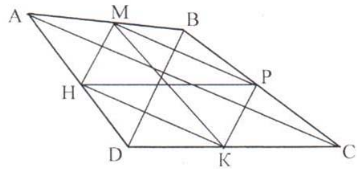


Рис. 11.19

Пусть MK и PH – отрезки, соединяющие середины противоположных сторон выпуклого четырехугольника $ABCD$ (рис. 11.19), причем $MK = PH$, $AC = 18$, $BD = 7$. Имеем: $MP \parallel AC$, $MP = \frac{1}{2}AC$ (как средняя линия ΔABC); $HK \parallel AC$, $HK = \frac{1}{2}AC$ (как средняя линия ΔADC) $\Rightarrow MP \parallel HK$, $MP = HK \Rightarrow MPKH$ – параллелограмм. А так как $MK = PH$, то четырехугольник $MPKH$ – прямоугольник, стороны которого параллельны диагоналям AC и BD данного четырехугольника $ABCD$, поэтому $AC \perp BD$.

Это означает, что $S_{ABCD} = \frac{1}{2}\ AC \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot 18 \cdot 7 = 63$ (кв. ед.)» [28].

Ответ: 63 кв. ед.

Треугольник, четырехугольник и окружность

Для решения задач на комбинации треугольника, многоугольника с окружностью применяются следующие теоремы.

«**Теорема 15** (*об измерении углов, связанных с окружностью*):

– центральный угол измеряется дугой, на которую он опирается (рис. 11.20);

– вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается (рис. 11.20);

– угол с вершиной внутри круга (рис. 11.21) измеряется полусуммой дуг, заключенных между его сторонами и их продолжениями за вершину угла;

– угол с вершиной вне круга (рис. 11.22) измеряется полуразностью дуг, заключенных между его сторонами (предполагается, что каждая из сторон угла пересекается с окружностью данного круга);

– угол между касательной и хордой (рис. 11.23) измеряется половиной дуги, заключенной между ними» [22].

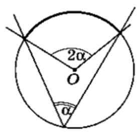


Рис. 11.20

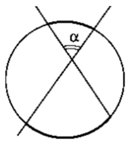


Рис. 11.21

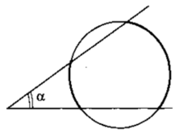


Рис. 11.22

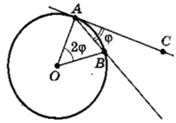


Рис. 11.23

«**Теорема 16** (*о свойствах касательных, секущих и хорд окружности*):

– радиус, проведенный в точку касания, перпендикулярен касательной (рис. 11.24);

– если из точки проведены две касательные к окружности, то длины отрезков касательных от этой точки до точек касания равны и центр окружности лежит на биссектрисе угла между ними (рис. 11.25);

– если из точки *A* проведена касательная *AB* и секущая *AC*, то $AC \cdot AD = AB^2$ (рис. 11.26);

– если хорды *AB* и *CD* пересекаются в точке *M* (рис. 11.27), то $MA \cdot MB = MC \cdot MD$;

– если из точки *M* проведены к окружности две секущие *MAB* и *MCD* (рис. 11.28), то $MA \cdot MB = MC \cdot MD$» [25].

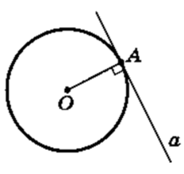


Рис. 11.24

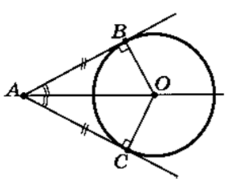


Рис. 11.25

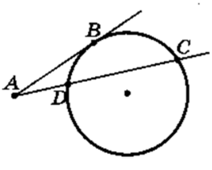


Рис. 11.26

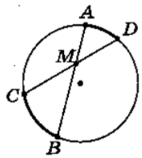


Рис. 11.27

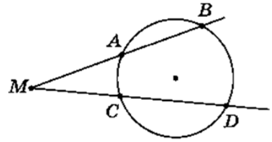


Рис. 11.28

«**Теорема 17** (*о центре вписанной и описанной окружности треугольника*):

– три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке (эта точка является центром окружности, вписанной в данный треугольник);

– три серединных перпендикуляра к сторонам треугольника пересекаются в одной точке (эта точка является центром окружности, описанной около данного треугольника).

Теорема 18 (*об окружности и четырехугольнике*):

– около выпуклого четырехугольника $ABCD$ можно описать окружность тогда и только тогда, когда сумма величин его противоположных углов равна 180°: $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180°$;

– в выпуклый четырехугольник можно вписать окружность тогда и только тогда, когда равны суммы длин его противоположных сторон: $a + c = b + d$;

– из всех параллелограммов только около прямоугольника можно описать окружность;

– около трапеции можно описать окружность тогда и только тогда, когда она равнобедренная;

– если для четырех точек A, B, M и K плоскости выполняется одно из следующих условий:

а) $\angle AMB = \angle AKB$ и точки M и K расположены по одну сторону от прямой AB;

б) $\angle AMB + \angle AKB = 180°$ и точки M и K расположены по разные стороны от прямой AB, то точки A, B, M и K лежат на одной окружности» [22].

Таким образом, при решении задач по теме «Треугольник, четырехугольник, n-угольники. Окружность и круг» рекомендуется использовать табл. 6–9 [21].

Таблица 6

Треугольник. Окружность

Содержание формулы	Формула	Символы (обозначения)
Периметр (P)	$P = a + b + c$; $p = \frac{a+b+c}{2}$	a, b, c – длины сторон; p – полупериметр
Сумма внутренних углов	$A + B + C = 180^\circ$	A, B, C – величины углов
Теорема косинусов	$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$; $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$; $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$; $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$	a, b, c – длины сторон; A, B, C – величины углов; R – радиус описанной окружности
Теорема синусов	$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$	
Радиус описанной окружности	$2R = \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$	
Площадь (S) Формула Герона	$S = \frac{1}{2}a \cdot h_a = \frac{1}{2}b \cdot h_b = \frac{1}{2}c \cdot h_c$; $S = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}ac\sin B =$ $= \frac{1}{2}bc\sin A$; $S = pr$; $S = \frac{abc}{4R}$; $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$	a, b, c – длины сторон; h_a, h_b, h_c – длины высот; A, B, C – величины углов; p – полупериметр; r – радиус вписанной окружности; R – радиус описанной окружности
Связь между медианой и сторонами	$m_a^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}$	a, b, c – длины сторон; m_a – длина медианы к стороне a; m, n – длины отрезков, на которые биссектриса угла С делит сторону c; h_a, h_b, h_c – длины высот; r – радиус вписанной окружности
Свойство биссектрисы внутреннего угла	$\frac{m}{n} = \frac{a}{b}$	
Связь между высотами и радиусом вписанной окружности	$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}$	

Таблица 7

Прямоугольный треугольник. Окружность

Содержание формулы	Формула	Символы (обозначения)
Сумма острых углов	$A + B = 90^\circ$	A, B – величины острых углов
Теорема Пифагора	$a^2 + b^2 = c^2$	a, b – длины катетов; c – длина гипотенузы; h_c – длина высоты; a_1, b_1 – длины проекций катетов на гипотенузу; r – радиус вписанной окружности; R – радиус описанной окружности
Метрические соотношения	$h_c{}^2 = a_1 \cdot b_1$; $a^2 = c \cdot a_1$, $b^2 = c \cdot b_1$	
Зависимость между сторонами, радиусами вписанной и описанной окружностей	$R = \frac{c}{2}$; $r = \frac{a+b-c}{2}$; $r = \frac{a+b-\sqrt{a^2+b^2}}{2}$; $R + r = \frac{1}{2}(a+b)$	
Площадь (S)	$S = \frac{1}{2}ab$	a, b – длины катетов

Таблица 8

Правильный треугольник. Окружность

Содержание формулы	Формула	Символы (обозначения)
Периметр (P)	$P = 3a$	a – длина стороны
Величина угла	$A = B = C = 60^\circ$	A, B, C – величины углов
Зависимость между высотой и стороной	$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$	h – длина высоты; a – длина стороны; R – радиус описанной окружности; r – радиус вписанной окружности
Зависимость между стороной, радиусами вписанной и описанной окружностей	$a = R\sqrt{3}$; $R = 2r$; $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$; $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$	
Выражение площади (S) через: сторону, радиус описанной окружности, радиус вписанной окружности	$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$; $S = \frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$; $S = 3r^2\sqrt{3}$	a – длина стороны; R – радиус описанной окружности; r – радиус вписанной окружности

Таблица 9

Окружность и круг

Содержание формулы	Формула	Символы (обозначения)
Длина окружности (С)	$C = 2\pi R$	C – длина окружности; R – радиус окружности n – градусная мера дуги; φ – радианная мера дуги; R – радиус круга; d – диаметр; b – основание сегмента; h – высота сегмента
Длина дуги (l)	$l = \frac{\pi R n}{180}$; $l = \varphi R$	
Площадь круга (S)	$S = \pi R^2$; $S = \frac{\pi d^2}{4}$	
Площадь сектора (S)	$S = \frac{\pi R^2 n}{360}$	
Площадь сегмента (S)	$S = \frac{\pi R^2 n}{360} \pm S\Delta$; $S = \frac{2}{3}bh$	

Приведем примеры решения задач.

Задача 11.4. В прямоугольный треугольник, периметр которого равен 15, вписана окружность радиуса 1. Найдите стороны этого треугольника.

Решение.

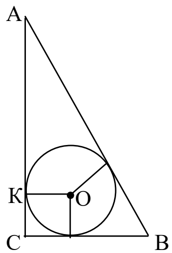


Рис. 11.29

Пусть в прямоугольный треугольник ABC вписана окружность с центром O и радиусом r (рис. 11.29). Обозначим: $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$. Так как $c = (a - 1) + (b - 1)$, то $a + b + c = a + b + (a - 1) + (b - 1) =$
$= 15 \Rightarrow a + b = 8{,}5$.

Имеем:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}a \cdot b = \frac{1}{2}(a + b + c) \cdot r = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 1,$$

откуда $a \cdot b = 15$. Таким образом, $a + b = 8{,}5$ и $a \cdot b = 15$, поэтому значения a и b являются корнями квадратного уравнения:

$$t^2 - 8{,}5t + 15 = 0 \Leftrightarrow 2t^2 - 17t + 30 = 0.$$

Находим: $t_1 = 2{,}5$, $t_2 = 6$. Значит, $a = 2{,}5$; $b = 6$.

Тогда $c = 15 - (a + b) = 15 - 8{,}5 = 6{,}5$.

Ответ: $AB = 6{,}5$; $BC = 2{,}5$; $AC = 6$.

Задача 11.5. В окружность радиуса 32,5 см вписан треугольник, две стороны которого равны 25 и 39 см. Найдите третью сторону треугольника.

Решение.

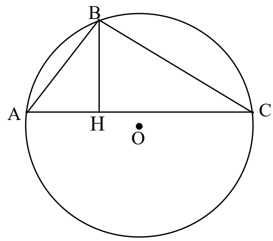


Рис. 11.30

Пусть в ΔABC известно (рис. 11.30): $AB = 25$ см, $BC = 39$ см. Найдем длину стороны AC. Вычислим сначала высоту BH:

$$BH = \frac{AB \cdot BC}{2R} = \frac{25 \cdot 39}{2 \cdot 32{,}5} = 15.$$

В ΔABH и ΔBCH:

$$AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{25^2 - 15^2} = 20;$$

$$CH = \sqrt{BC^2 - BH^2} = \sqrt{39^2 - 15^2} = 36.$$

Тогда $AC = AH + HC = 20 + 36 = 56$ (см).

Ответ: 56 см.

Задача 11.6. В прямоугольную трапецию с основаниями a и b вписана окружность. Найдите площадь этой трапеции.

Решение.

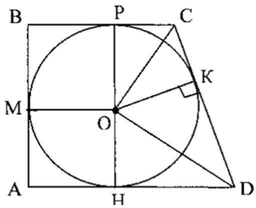


Рис. 11.31

Пусть окружность с центром O и радиусом R, вписанная в прямоугольную трапецию $ABCD$, касается ее оснований $AD = a$ и $BC = b$ в точках H и P, а боковых сторон AB и CD – в точках M и K соответственно (рис. 11.31). Тогда: $O \in PH$; $OM = BP = AH = R$; $PH = 2R$ (O – середина высоты PH трапеции); $PC = b - R$, $HD = a - R$. Так как центр окружности, вписанной в трапецию, – точка пересечения биссектрис углов трапеции; сумма внутренних односторонних углов трапеции при ее основаниях равна 180°, тогда центр O окружности, вписанной в трапецию, – вершина прямого угла прямоугольного треугольника COD. Значит, в этом треугольнике на основании свойства высоты, проведенной из вершины прямого угла на гипотенузу, имеем: $OK^2 = CK \cdot KD$ ($OK \perp CD$, как радиус, проведенный в точку касания).

На основании свойства отрезков касательных, проведенных к окружности из данной точки, находим:

$$CK = PC = b - R,\ KD = HD = a - R.$$

Тогда

$$R^2 = (b - R) \cdot (a - R) = ab - R(a + b) + R^2 \Rightarrow R = \frac{ab}{a+b}.$$

$$S_{\text{трап}} = 0{,}5(BC + AD) \cdot PH = 0{,}5(b + a) \cdot 2\frac{ab}{a+b} = ab \text{ (кв. ед.)}.$$

Ответ: ab кв. ед.

Задача 11.7. Основания равнобедренной трапеции, в которую можно вписать окружность, равны 1 и 3. Найдите радиус окружности, описанной около этой трапеции.

Решение.

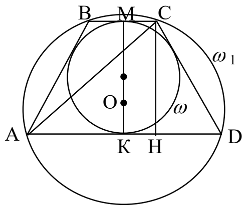


Рис. 11.32

Пусть $ABCD$ – данная трапеция ($BC = 1$, $AD = 3$), в которую вписана окружность ω и около которой описана окружность ω_1 с центром O и радиусом R (рис. 11.32). Так как в данную трапецию вписана окружность, то $BC + AD = 2CD$, откуда $CD = \dfrac{BC + AD}{2} = \dfrac{1+3}{2} = 2.$

Кроме того, в равнобедренной трапеции выполняется:

$$AH = \frac{BC + AD}{2} = \frac{1+3}{2} = 2,$$

значит, $HD = AD - AH = 3 - 2 = 1$. Тогда в прямоугольном треугольнике CHD имеем: $CD = 2HD \Rightarrow \angle HCD = 30°$, значит, $\angle CDH = 60°$.

В прямоугольных треугольниках CHD и ACH находим соответственно:

$$CH^2 = CD^2 - HD^2 = 4 - 1 = 3; \; AC = \sqrt{AH^2 + CH^2} = \sqrt{4+3} = \sqrt{7}.$$

Трапеция $ABCD$ – равнобедренная, поэтому окружность ω_1, описанная около этой трапеции, совпадает с окружностью, описанной около ΔACD. Значит, искомый радиус R найдем по теореме синусов в ΔACD:

$$R = \frac{AC}{2\sin 60°} = \sqrt{7} : \left(2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{21}}{3}.$$

Ответ: $\dfrac{\sqrt{21}}{3}$.

Методические указания по выполнению самостоятельной работы студентов

Для выполнения заданий самостоятельной работы следует изучить представленный выше теоретический материал, разобрать и записать решения типовых заданий по теме, изучить рекомендуемую литературу.

В случае возникновения затруднений при изучении теоретического материала и выполнении практических заданий студент может получить консультацию у преподавателя.

Задание 1. В равнобедренном треугольнике основание равно 10 см, а боковая сторона равна 13 см. Найдите радиус окружности, вписанной в этот треугольник.

Задание 2. Найдите сторону равностороннего треугольника, если радиус описанной около него окружности равен 10 см.

Задание 3. Около прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C описана окружность. Найдите радиус этой окружности, если $AC = 18$ см, угол B равен 30°.

Задание 4. Диагонали четырехугольника равны 16 и 20 см и пересекаются под углом в 30°. Найдите площадь этого четырехугольника.

Задание 5. В треугольнике MNK известны длины двух сторон: 3 и 4 см, а также угол между ними 30°. Найдите третью сторону и радиус описанной окружности около этого треугольника.

Задание 6. Сумма двух противоположных сторон описанного четырехугольника равна 12 см, а радиус вписанной в него окружности равен 5 см. Найдите площадь четырехугольника.

Задание 7. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием BC высота AD равна 8 см. Найдите площадь треугольника ABC, если медиана DM треугольника ADC равна 8 см.

Задание 8. Стороны AB и BC прямоугольника $ABCD$ равны соответственно 6 и 8 см. Прямая, проходящая через вершину C и перпендикулярная к прямой BD, пересекает сторону AD в точке M, а диагональ BD – в точке K. Найдите площадь четырехугольника $ABKM$.

Задание 9* (из ЕГЭ). В треугольнике ABC угол ABC тупой, H – точка пересечения продолжений высот, угол AHC равен 60°.

Докажите, что угол ABC равен 120°. Найдите BH, если $AC = 7$ и $BC = 8$.

Контрольные вопросы

1. Что такое треугольник? Какие треугольники вы знаете?
2. Назовите основные формулы нахождения площади треугольника.
3. Что такое высота, биссектриса и медиана треугольника?
4. Какие признаки равенства и подобия треугольников вы знаете?
5. Что такое средняя линия треугольника? Какими свойствами она обладает?
6. Какая фигура называется четырехугольником (квадратом, прямоугольником, ромбом, параллелограммом, трапецией). Перечислите их свойства.
7. Какие формулы нахождения площади четырехугольника (квадрата, прямоугольника, ромба, параллелограмма, трапеции) вы знаете?
8. Что такое средняя линия трапеции? Какими свойствами она обладает?
9. Сформулируйте теорему косинусов, теорему синусов и следствие из нее.
10. Где лежит центр окружности, вписанной в треугольник? Где лежит центр окружности, описанной около треугольника?
11. Как можно найти площадь треугольника, зная радиус вписанной в него окружности, радиус описанной около нее окружности?
12. Какие формулы надо знать при решении задач на правильный треугольник?
13. Какие теоремы используются при решении задач на прямоугольный треугольник?
14. Назовите теоремы, которые применяются при решении задач на измерение углов, связанных с окружностью; на свойства касательных, секущих и хорд окружности.
15. Когда можно описать окружность около четырехугольника, вписать окружность в четырехугольник?

Рекомендуемая литература

1. Кытманов, А. М. Основные понятия планиметрии / А. М. Кытманов, Е. К. Лейнартас, С. Г. Мысливец // Математика : адаптационный курс : учеб. пособие / А. М. Кытманов, Е. К. Лейнартас, С. Г. Мысливец. – Санкт-Петербург [и др.], 2022. – Глава 14. – С. 218–224. – URL: e.lanbook.com/book/211088 (дата обращения: 10.12.2024). – Режим доступа: по подписке. – ISBN 978-5-8114-1472-7.
2. Кытманов, А. М. Различные геометрические фигуры на плоскости / А. М. Кытманов, Е. К. Лейнартас, С. Г. Мысливец // Математика : адаптационный курс : учеб. пособие / А. М. Кытманов, Е. К. Лейнартас, С. Г. Мысливец. – Санкт-Петербург [и др.], 2022. – Глава 15. – С. 233–236. – URL: e.lanbook.com/book/211088 (дата обращения: 10.12.2024). – Режим доступа: по подписке. – ISBN 978-5-8114-1472-7.
3. Планиметрия. Многоугольники / В. В. Гарбарук, В. И. Родин, И. М. Соловьева, М. А. Шварц // Решение задач по математике : адаптивный курс для студентов технических вузов : учеб. пособие / В. В. Гарбарук, В. И. Родин, И. М. Соловьева, М. А. Шварц. – Санкт-Петербург [и др.], 2017. – С. 461–488. – URL: e.lanbook.com/book/99281 (дата обращения: 10.12.2024). – Режим доступа: по подписке. – ISBN 978-5-8114-2618-8.
4. Планиметрия. Окружность, эллипс, гипербола, парабола / В. В. Гарбарук, В. И. Родин, И. М. Соловьева, М. А. Шварц // Решение задач по математике : адаптивный курс для студентов технических вузов : учеб. пособие / В. В. Гарбарук, В. И. Родин, И. М. Соловьева, М. А. Шварц. – Санкт-Петербург [и др.], 2017. – С. 499–503, 506–516. – URL: e.lanbook.com/book/99281 (дата обращения: 10.12.2024). – Режим доступа: по подписке. – ISBN 978-5-8114-2618-8.
5. Планиметрия. Треугольники / В. В. Гарбарук, В. И. Родин, И. М. Соловьева, М. А. Шварц // Решение задач по математике : адаптивный курс для студентов технических вузов : учеб. пособие / В. В. Гарбарук, В. И. Родин, И. М. Соловьева, М. А. Шварц. – Санкт-Петербург [и др.], 2017. – С. 415–455. – URL: e.lanbook.com/book/99281 (дата обращения: 10.12.2024). – Режим доступа: по подписке. – ISBN 978-5-8114-2618-8.

Тема 12. Основные понятия и формулы для вычисления площадей и объемов многогранников и тел вращения

Форма проведения: практическое занятие.

Вопросы для обсуждения

1. Понятие многогранника и его виды. Вычисление площадей и объемов многогранников.
2. Цилиндр и его свойства. Площади боковой и полной поверхностей цилиндра. Построение изображения правильной призмы, вписанной в цилиндр.
3. Конус и его свойства. Площади боковой и полной поверхностей конуса. Построение изображения правильной призмы, вписанной в конус.
4. Понятия шара и сферы. Метрические соотношения для шара (сферы).
5. Соотношения, используемые при решении задач на комбинации сферы с кубом и прямоугольным параллелепипедом.

Методические указания по проведению занятия

На практическом занятии студенты повторяют основные понятия и теоретические сведения по теме, выполняют практические задания под руководством преподавателя, отвечают на контрольные вопросы.

Методические материалы к занятию

При решении задач по данной теме рекомендуется использовать табл. 10–11 [27].

Далее подробнее рассмотрим основные понятия и формулы по теме «Фигуры вращения. Вычисление площадей и объемов тел вращения», которая вызывает наибольшие затруднения у школьников.

Таблица 10

Многогранники. Вычисление площадей и объемов многогранников

Содержание формулы	Формула	Символы (обозначения)
Площадь поверхности куба (S)	$S = 6a^2$	a – длина ребра куба
Площадь боковой поверхности прямой призмы ($S_{бок}$)	$S_{бок} = P \cdot h$	P – периметр основания; h – высота (длина бокового ребра)
Площадь боковой поверхности наклонной призмы ($S_{бок}$)	$S_{бок} = P \cdot l$	P – периметр перпендикулярного сечения; l – длина бокового ребра
Площадь боковой поверхности прямого параллелепипеда ($S_{бок}$)	$S_{бок} = P \cdot l$	P – периметр основания; l – длина бокового ребра
Площадь боковой поверхности правильной пирамиды ($S_{бок}$)	$S_{бок} = \frac{1}{2} P \cdot a$ $S_{бок} = \frac{Q}{\cos\varphi}$	P – периметр основания; a – апофема; Q – площадь основания; φ – величина двугранного угла при стороне основания
Площадь боковой поверхности правильной усеченной пирамиды ($S_{бок}$)	$S_{бок} = \frac{P + P_1}{2} \cdot h$	P, P_1 – периметры оснований; h – апофема
Объем куба (V)	$V = a^3$	a – длина ребра куба
Объем прямоугольного параллелепипеда (V)	$V = abc$	a, b, с – измерения параллелепипеда
Объем призмы (параллелепипеда) (V)	$V = S_{осн} \cdot h$; $V = Q \cdot l$	$S_{осн}$ – площадь основания; h – высота; Q – площадь перпендикулярного сечения; l – длина бокового ребра
Объем пирамиды (V)	$V = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot h$	$S_{осн}$ – площадь основания; h – высота
Объем усеченной пирамиды (V)	$V = \frac{1}{3} h(Q_1 + \sqrt{Q_1 Q_2} + Q_2)$	Q_1, Q_2 – площади оснований; h – высота

Окончание табл. 10

Содержание формулы	Формула	Символы (обозначения)
Отношение объемов тетраэдров *ABCD* и $A_1B_1C_1D_1$, имеющих равные трехгранные углы с вершинами *A* и A_1	$\frac{V_{ABCD}}{V_{A_1B_1C_1D_1}} = \frac{AB \cdot AC \cdot AD}{A_1B_1 \cdot A_1C_1 \cdot A_1D_1}$	V_{ABCD} и $V_{A_1B_1C_1D_1}$ – объемы тетраэдров *ABCD* и $A_1B_1C_1D_1$

Таблица 11

Фигуры вращения

Содержание формулы	Формула	Символы (обозначения)
Площадь боковой поверхности цилиндра ($S_{бок}$)	$S_{бок} = 2\pi R \cdot h$	*R* – радиус основания; *h* – высота
Площадь полной поверхности цилиндра ($S_{полн}$)	$S_{полн} = 2\pi R(h + R)$	*R* – радиус основания; *h* – высота
Площадь боковой поверхности конуса ($S_{бок}$)	$S_{бок} = \pi Rl$	*R* – радиус основания; *l* – длина образующей
Площадь полной поверхности конуса ($S_{полн}$)	$S_{полн} = \pi R(l + R)$	*R* – радиус основания; *l* – длина образующей
Площадь боковой поверхности усеченного конуса ($S_{бок}$)	$S_{бок} = \pi l(R + r)$	*R*, *r* – радиусы оснований; *l* – длина образующей
Площадь сферы (*S*)	$S = 4\pi R^2$	*R* – радиус сферы
Площадь сегментной поверхности (*S*)	$S = 2\pi R \cdot H$	*R* – радиус сферы; *H* – высота сегментной поверхности
Площадь шарового пояса (*S*)	$S = 2\pi R \cdot H$	*R* – радиус шара; *H* – высота шарового пояса
Площадь поверхности шарового сектора (*S*)	$S = \pi R \cdot (2h + \sqrt{2Rh - h^2})$	*R* – радиус шара; *h* – высота шарового сегмента
Объем цилиндра (*V*)	$V = \pi R^2 \cdot H$	*R* – радиус основания; *H* – высота

Окончание табл. 11

Содержание формулы	Формула	Символы (обозначения)
Объем конуса (V)	$V=\frac{1}{3}\pi R^2\cdot H$	R – радиус основания; H – высота
Объем усеченного конуса (V)	$V=\frac{1}{3}\pi H(r^2+R\cdot r+R^2)$	R, r – радиусы оснований; H – высота
Объем шара (V)	$V=\frac{4}{3}\pi R^3$; $V=\frac{1}{6}\pi d^3$	R – радиус шара; d – диаметр шара
Объем шарового слоя (V)	$V=\frac{\pi H}{6}(3r_1^2+3r_2^2+H^2)$	r_1, r_2 – радиусы оснований шарового слоя; H – высота
Объем шарового сегмента (V)	$V=\pi H^2\left(R-\frac{H}{3}\right)$ $V=\frac{\pi H}{6}(3r^2+H^2)$	R – радиус шара; H – высота; r – радиус основания шарового сегмента
Объем шарового сектора (V)	$V=\frac{2}{3}\pi R^2\cdot H$	R – радиус шара; H – высота

Цилиндр и его свойства

Определение. «Тело, которое образуется при вращении прямоугольника вокруг прямой, содержащей его сторону, называется *цилиндром*.

Напомним, что *любое сечение цилиндра*, перпендикулярное его оси, есть *круг*, а такое же *сечение боковой поверхности цилиндра* – *окружность*; центры этих окружностей и кругов – точки пересечения секущих плоскостей и оси цилиндра. *Осевым сечением цилиндра* является прямоугольник, стороны которого равны диаметру основания и образующей цилиндра. Цилиндр, осевое сечение которого – квадрат, называют *равносторонним цилиндром*.

Для построения изображения *правильной призмы, вписанной в цилиндр*, следует: 1) построить изображение цилиндра; 2) построить изображение правильного многоугольника, вписанного в верхнее основание цилиндра; 3) через вершины построенного многоугольника провести образующие цилиндра; 4) в нижнем основании цилиндра последовательно соединить штриховыми линиями концы этих образующих; 5) выделить видимые и невидимые линии (отрезки) изображаемых фигур» [25].

Площади боковой и полной поверхностей цилиндра вычисляются по формулам: $S_{бок} = 2\pi Rh$; $S_{полн} = 2\pi R(R + h)$; *объем цилиндра* – $V_{цил} = \pi \cdot R^2 \cdot h$.

Приведем понятие *призмы, вписанной в цилиндр*, и рассмотрим решение соответствующей задачи.

Определение. «*Призма* называется *вписанной в цилиндр*, если основания призмы вписаны в основания цилиндра. Отметим, что цилиндр в этом случае называют *описанным около призмы*.

Боковые ребра призмы соединяют соответственные вершины ее оснований, вписанных в основания цилиндра. Эти вершины лежат на окружностях оснований цилиндра. Образующие цилиндра соединяют соответственные точки окружностей его оснований и параллельны боковым ребрам призмы. Следовательно, *боковые ребра вписанной в цилиндр призмы – образующие цилиндра*» [26].

Задача 12.1. «Около правильной четырехугольной пирамиды, каждое ребро которой равно 10, описан цилиндр так, что все вершины пирамиды находятся на окружностях оснований цилиндра. Найдите объем и площадь боковой поверхности цилиндра.

Решение.

Пусть вершина P данной пирамиды $PABCD$ лежит на окружности нижнего основания описанного около этой пирамиды цилиндра, центрами оснований которого служат точки O и O_1 (рис. 12.1).

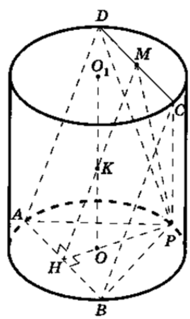


Рис. 12.1

Так как каждое ребро пирамиды равно 10, то в правильном ΔABP находим

$$PH = \frac{10\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3},$$

тогда

$$OH = \frac{1}{3}PH = \frac{5\sqrt{3}}{3};\ OP = \frac{2}{3}PH = \frac{10\sqrt{3}}{3}.$$

Радиус R основания цилиндра равен OP, то есть $R = \frac{10\sqrt{3}}{3}$.

Если точки H и M – середины противоположных сторон соответственно AB и CD квадрата $ABCD$ (основания данной пирамиды), то $MH = 10$, причем середина K отрезка HM является серединой высоты OO_1 цилиндра. Так как плоскость MPH перпендикулярна плоскости основания цилиндра и проходит через центр O его основания, то высота OO_1 цилиндра лежит в этой плоскости, и $OO_1 = 2OK$. Находим OK. В прямоугольном ΔHOK имеем:

$$OK = \sqrt{HK^2 - OH^2} = \sqrt{25 - \frac{25}{3}} = \sqrt{\frac{50}{3}} = \frac{5\sqrt{6}}{3}.$$

Поэтому

$$OO_1 = 2\frac{5\sqrt{6}}{3} = \frac{10\sqrt{6}}{3}.$$

Тогда площадь боковой поверхности цилиндра равна

$$2\pi \cdot R \cdot OO_1 = 2\pi \cdot \frac{10\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{10\sqrt{6}}{3} = \frac{200\pi\sqrt{2}}{3}\ \text{(кв. ед.)},$$

его объем равен

$$\pi \cdot R^2 \cdot OO_1 = \pi \cdot \left(\frac{10\sqrt{3}}{3}\right)^2 \cdot \frac{10\sqrt{6}}{3} = \frac{1000\pi\sqrt{6}}{9}\ \text{(куб. ед.)»}\ [25].$$

Ответ: $\frac{200\pi\sqrt{2}}{3}$ (кв. ед.), $\frac{1000\pi\sqrt{6}}{9}$ (куб. ед.).

Конус и его свойства

Определение. «*Конус* – это тело, которое образуется при вращении прямоугольного треугольника вокруг прямой, содержащей его катет. Отрезок оси вращения, заключенный внутри конуса, называется *осью конуса*.

Поверхность, полученная при вращении гипотенузы, называется *боковой поверхностью конуса*, а ее площадь – *площадью боко-*

вой поверхности конуса. Объединение боковой поверхности конуса и его основания называется *полной поверхностью конуса*, а ее площадь называется площадью полной поверхности конуса или, короче, *площадью поверхности конуса*.

Напомним, что: а) все осевые сечения конуса – равные равнобедренные треугольники; б) угол при вершине любого из этих треугольников называют углом при вершине осевого сечения конуса; в) конус, в осевом сечении которого правильный треугольник, называется равносторонним; г) если секущая плоскость проходит через вершину конуса (но не содержит его ось) и пересекает основание конуса, то в сечении конуса этой плоскостью также получается равнобедренный треугольник.

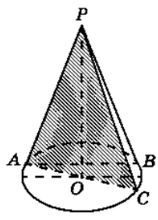


Рис. 12.2

Для изображения конуса достаточно построить: 1) эллипс, изображающий окружность основания конуса; 2) центр O этого эллипса (рис. 12.2); 3) отрезок OP, перпендикулярный плоскости основания и изображающий высоту конуса; 4) касательные прямые PA и PB из точки P к эллипсу (A и B – точки касания; касательные PA и PB проводят с помощью линейки на глаз). При этом необходимо обратить особое внимание на следующий важный факт: отрезок AB, соединяющий точки касания образующих PA и PB к эллипсу, ни в коем случае не является диаметром эллипса, то есть отрезок AB не содержит центра O эллипса. Следовательно, ΔABP – не осевое сечение конуса. Осевым же сечением конуса является ΔACP, где отрезок AC проходит через центр O эллипса (при этом образующая PC не является касательной к эллипсу). Для достижения наглядности изображения невидимую часть эллипса изображают штрихами.

Площадь боковой поверхности конуса находится как площадь ее развертки и вычисляется по формуле

$$S_{бок} = \pi \cdot R \cdot l» \ [27].$$

Рассмотрим *понятие правильной пирамиды, вписанной в конус*. Отметим, что «для построения *изображения правильной пирамиды, вписанной в конус*, следует: 1) построить изображение конуса; 2) построить изображение правильного многоугольника, вписанного в основание конуса; 3) через вершины построенного многоугольника провести образующие конуса – боковые ребра пирамиды; 4) выделить видимые и невидимые линии изображенных фигур. При этом высота этой правильной пирамиды проходит через центр окружности, описанной около ее основания, и расположена на прямой пересечения биссекторных плоскостей двугранных углов при ее боковых ребрах» [25].

Объем конуса вычисляется по формуле

$$V_{конуса} = \frac{1}{3}\pi \cdot R^2 \cdot h.$$

Шар. Сфера

Определения. «*Шаром* называется множество всех точек пространства, находящихся от данной точки на расстоянии, не большем данного $R(R > 0)$. Эта точка называется центром шара, а данное расстояние R – *радиусом шара*.

Сферой называется множество всех точек пространства, находящихся от данной точки на расстоянии, равном данному R. Данные точка и расстояние R называются соответственно *центром и радиусом сферы*. <...>

Радиусом шара называют также всякий отрезок, соединяющий центр шара с точкой шаровой поверхности. Отрезок, соединяющий две точки шаровой поверхности и проходящий через центр шара, называется *диаметром шара*. Концы любого диаметра шара называются *диаметрально противоположными точками шара*. Отрезок, соединяющий две любые точки шаровой поверхности и не являющийся диаметром шара, называют *хордой шара* (*сферы*)... *Шар – тело вращения, сфера – поверхность вращения*. <...>

Сечением шара плоскостью, перпендикулярной его оси вращения l и пересекающей шар, является *круг*, а сечением сферы такой плоскостью – *окружность этого круга; центр круга* (*окружности*) есть точка пересечения секущей плоскости с осью l.

Плоскость, проходящая через центр шара (сферы), называется *диаметральной плоскостью шара* (*сферы*). Сечением шара диаметральной плоскостью является круг, радиус которого равен радиусу шара. Такой круг называется *большим кругом*, а его окружность – *большой окружностью*; большая окружность является пересечением сферы и ее диаметральной плоскости. <...> Отметим, что если *сечение сферы диаметральной плоскостью* изображено в виде эллипса, то концы диаметра сферы, перпендикулярного этой плоскости, находятся не на окружности (абрисе), „изображающей“ сферу, а внутри круга этой окружности, причем положение концов этого диаметра зависит от формы эллипса» [27].

Необходимо знать, что:

1. *«если расстояние d от центра шара (сферы) до данной плоскости:*

– *меньше* радиуса R шара (сферы), то пересечением шара (сферы) с плоскостью является круг (окружность). *Центром этого круга* (этой окружности) является основание перпендикуляра, проведенного из центра шара (сферы) на данную плоскость, или сам центр шара (сферы), если плоскость проходит через этот центр. Для радиуса r сечения выполняется:

$$r = \sqrt{R^2 - d^2};$$

– *равно радиусу R* шара (сферы), то плоскость имеет с шаром (сферой) только одну общую точку и является касательной к сфере в этой точке;

2) *если расстояние от центра шара (сферы) до данной плоскости больше радиуса R шара (сферы), то плоскость не имеет с шаром (сферой) общих точек*;

3) *для шара (сферы) выполняются следующие метрические соотношения*:

– диаметр шара (сферы), делящий его хорду пополам, перпендикулярен этой хорде;

– отрезки всех касательных прямых, проведенных к шару из одной расположенной вне шара точки, равны между собой (они образу-

ют поверхность конуса с вершиной в данной точке, а точки касания этих прямых – окружность основания этого конуса);
– произведение длин отрезков хорд шара, проходящих через одну и ту же внутреннюю точку шара, есть величина постоянная (равная $R^2 - a^2$, где R – радиус шара, a – расстояние от центра шара до данной точки);
– если из одной и той же точки вне шара проведены к нему секущая и касательная, то произведение длины отрезка всей секущей на длину отрезка ее внешней части равно квадрату длины отрезка касательной (и равно $a^2 - R^2$, где R – радиус шара, a – расстояние от центра шара до данной точки)» [25].

Задача 12.2. «Сфера радиуса r касается двух взаимно перпендикулярных плоскостей. Найдите радиус наименьшей сферы, касающейся этих двух плоскостей и данной сферы.

Решение.

Пусть точка A – центр данной сферы радиуса r, касающейся двух взаимно перпендикулярных плоскостей, точка B – центр наименьшей сферы, касающейся этих двух плоскостей и данной сферы, C – точка касания этих сфер. Центры A и B принадлежат биссектору данного двугранного угла.

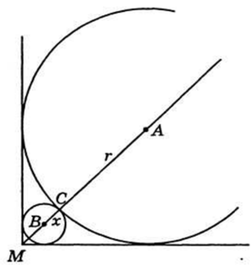


Рис. 12.3

На рис. 12.3 изображено сечение рассматриваемых сфер и двугранного угла плоскостью, проходящей через центры A и B этих сфер перпендикулярно ребру двугранного угла (M – точка пересечения этого ребра и плоскости сечения).

Если $BC = x$ – длина искомого радиуса, то имеем: $AM = r\sqrt{2}$, $BM = x\sqrt{2}$. Тогда $AM - BM = AC + CB$ или $r\sqrt{2} - x\sqrt{2} = r + x$, откуда

$$x(\sqrt{2}+1)=r(\sqrt{2}-1) \Rightarrow x=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}r=r(3-2\sqrt{2}).$$

Ответ: $r(3-2\sqrt{2})$.

Сфера и три взаимно перпендикулярные плоскости

Известно, что при решении задач на комбинации сферы с кубом и прямоугольным параллелепипедом часто используют определенные соотношения: если сфера радиуса r вписана в трехгранный угол, все плоские углы которого прямые, то для расстояния m от центра сферы до ребра трехгранного угла справедливо: $m=r\sqrt{2}$, а для расстояния d от центра этой сферы до вершины трехгранного угла выполняется: $d=r\sqrt{3}$» [25].

Рассмотрим решение некоторых задач.

Задача 12.3. «Сфера радиуса r касается каждой из трех попарно перпендикулярных плоскостей. Найдите радиус сферы, касающейся этих трех плоскостей и данной сферы» [26].

Решение.

Пусть A – общая точка трех данных плоскостей, точка B – центр сферы ω радиуса r, O и R – соответственно центр и радиус сферы ω_1, касающейся этих трех плоскостей и сферы ω.

Возможны два случая: 1) сфера ω_1 расположена между сферой ω и точкой A; 2) сфера ω расположена между сферой ω_1 и точкой A.

Случай 1. Пусть C – точка касания сфер. Тогда: $AO = R\sqrt{3}$, $AB = r\sqrt{3}$, $OC = R$, $BC = r$. Так как $OB = OC + BC = AB - OA$, то $r\sqrt{3}-R\sqrt{3} = r + R$ или $R(\sqrt{3}+1)=r(\sqrt{3}-1)$, откуда $R=\frac{r(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{3}+1}=r(2-\sqrt{3})$.

Случай 2. Пусть K – точка касания сфер. Тогда: $AO = R\sqrt{3}$, $AB = r\sqrt{3}$, $OK = R$, $BK = r$. Так как $OB = OK + BK = OA - AB$, то $R\sqrt{3}-r\sqrt{3}=r+R$ или $R(\sqrt{3}-1)=r(\sqrt{3}+1)$, откуда

$$R=\frac{r(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{3}-1}=r(2+\sqrt{3}).$$

Ответ: $r(2-\sqrt{3})$; $r(2+\sqrt{3})$.

Задача 12.4. «Сфера с центром H радиуса 6 касается всех сторон квадрата $ABCD$. Чему равно расстояние от центра сферы до плоскости квадрата, если его сторона равна 6?

Решение.

Так как сфера касается всех сторон квадрата $ABCD$, то ее пересечением с плоскостью квадрата является окружность с центром $O = AC \cap BD$ (рис. 12.4), вписанная в этот квадрат, при этом $OH \perp (ABC)$. Тогда точками касания сферы со сторонами квадрата являются середины его сторон – точки касания вписанной в квадрат окружности.

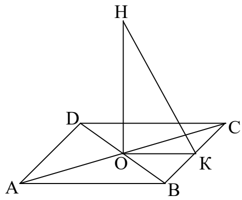


Рис. 12.4

Пусть точка K – середина стороны BC данного квадрата, значит, K – точка касания сферы с этой стороной.

Так как касательная к окружности перпендикулярна ее радиусу, проведенному в точку касания, то $OK \perp BC$, откуда $HK \perp BC$ (по теореме о трех перпендикулярах), при этом $HK = 6$ – радиус сферы, $OK = 3$ – радиус окружности сечения сферы. В прямоугольном ΔHOK находим искомое расстояние:

$$OH = \sqrt{HK^2 - OK^2} = \sqrt{6^2 - 3^2} = 3\sqrt{3}.$$

Ответ: $3\sqrt{3}$» [17].

Задача 12.5. «Сфера с центром H касается всех сторон правильного треугольника ABC. Чему равен радиус сферы, если расстояние от ее центра до плоскости треугольника равно $2\sqrt{6}$, а сторона треугольника равна 12?

Решение.

Пусть AK, BT – медианы правильного треугольника ABC (рис. 12.5); $O = AK \cap BT$. Так как сфера касается всех сторон правильного треугольника ABC, то ее пересечением с плоскостью этого треугольника является окружность с центром в точке O, вписанная в него, при этом $OH \perp (ABC)$. Значит, точки касания сферы со сторонами треугольника – середины его сторон – точки касания вписанной в треугольник окружности.

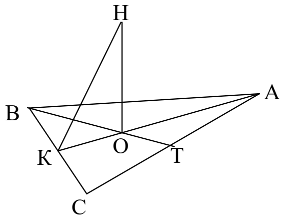


Рис. 12.5

Точка K – середина стороны BC треугольника ABC и является точкой касания вписанной в него окружности, значит, точкой касания сферы с этой стороной. Поэтому отрезок HK – радиус нашей сферы. Найдем радиус HK.

В прямоугольном ΔKOH с катетами $OH = 2\sqrt{6}$ и $OK = 2\sqrt{3}$ находим:

$$HK = \sqrt{OH^2 + OK^2} = \sqrt{(2\sqrt{6})^2 + (2\sqrt{3})^2} = 6.$$

Ответ: 6» [17].

Задача 12.6. «Сфера с центром H касается всех сторон правильного шестиугольника $ABCDEF$. Чему равен радиус сферы, если расстояние от ее центра до плоскости шестиугольника равно $4\sqrt{6}$, а сторона шестиугольника равна 8?

Решение.

Так как сфера касается всех сторон правильного шестиугольника $ABCDEF$, то ее пересечением с плоскостью этого шестиугольника является окружность с центром $O = FC \cap BE$ (рис. 12.6), вписанная в этот шестиугольник, при этом $OH \perp (ABC)$. Тогда точками касания сферы со сторонами шестиугольника являются середины его сторон – точки касания вписанной в шестиугольник окружности.

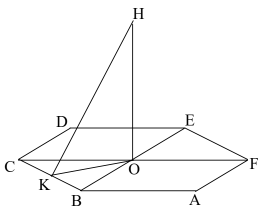


Рис. 12.6

Пусть точка K – середина стороны BC шестиугольника $ABCDEF$, значит, K – точка касания сферы с этой стороной, а отрезок HK – радиус сферы. Так как $OH = 4\sqrt{6}$ – расстояние от центра сферы до плоскости шестиугольника, $OK = 4\sqrt{3}$ – радиус окружности сечения сферы, то в прямоугольном ΔHOK находим радиус HK сферы:

$$HK = \sqrt{OH^2 + OK^2} = \sqrt{(4\sqrt{6})^2 + (4\sqrt{3})^2} = 12.$$

Ответ: 12» [17].

Задача 12.7. «$ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб с ребром 12. Сфера с центром O касается всех ребер этого куба. Найдите: а) положение центра O сферы; б) радиус сферы; в) расстояния от центра сферы до вершины, грани и ребра куба.

Решение.

Сфера с центром O касается всех ребер куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, поэтому ее пересечением с гранями куба являются равные окружности, вписанные в его грани – равные квадраты (рис. 12.7). Значит, центр O сферы равноудален от всех граней куба, следовательно, совпадает с его центром – точкой пересечения диагоналей куба.

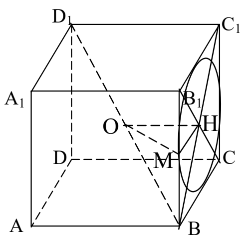


Рис. 12.7

Пусть точка H – центр окружности пересечения сферы с гранью BCC_1B_1, M – точка касания этой окружности с ребром BB_1. Тогда: $MH = 6$ – радиус этой окружности; $OH \perp (B_1BC)$, $OH = \frac{1}{2}AB = 6$ – *расстояние от центра O сферы до грани куба.*

Радиус OM сферы (M – точка касания сферы с ребром куба, значит, точка сферы) находим в прямоугольном ΔOMH:

$$OM = \sqrt{OH^2 + MH^2} = \sqrt{6^2 + 6^2} = 6\sqrt{2}.$$

Так как $OM \perp BB_1$ (по теореме о трех перпендикулярах), то $OM = 6\sqrt{2}$ – *расстояние от центра сферы до ребра куба*.

Расстояние OB от центра сферы до вершины данного куба равно половине его диагонали BD_1, то есть равно $\frac{12\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$.

Ответ: центр сферы – центр куба; $6\sqrt{2}$ – радиус сферы; 6 – расстояние от центра сферы до грани куба; $6\sqrt{3}$ – расстояние от центра сферы до вершины куба; $6\sqrt{2}$ – расстояние от центра сферы до ребра куба» [17].

Задача 12.8. «В куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ помещены два касающиеся друг друга равных шара. При этом первый шар касается всех граней куба, содержащих вершину A, второй – всех граней куба, содержащих вершину C. Найдите радиусы этих шаров, если ребро куба равно 17» [26].

Решение.

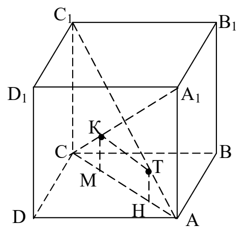


Рис. 12.8

Обозначим: R – радиус данных шаров ω_1 и ω_2. Пусть точки $T \in AC_1$ и $K \in CA_1$ – их центры; H и M – точки касания данных шаров с гранью $ABCD$ куба (рис. 12.8), тогда $KM \perp (ABC)$, $TH \perp (ABC)$ (как радиусы, проведенные в точки касания). Так как $(AA_1C) \perp (ABC)$ (по признаку перпендикулярности двух плоскостей) и $K \in (AA_1C)$, $T \in (AA_1C)$, то $H \in AC$ и $M \in AC$, где $AC = (AA_1C) \cap (ABC)$. Тогда

$$AH + HM + MC = AC = 17\sqrt{2},$$

при этом $MH = KT = 2R$ (расстояние между центрами данных касающихся шаров). Ввиду того, что $AT = CK = R\sqrt{3}$, $TH = KM = R$, то $AH = MC = R\sqrt{2}$. Значит: $2R\sqrt{2} + 2R = 17\sqrt{2}$, откуда

$$R = \frac{17\sqrt{2}}{2(\sqrt{2}+1)} = \frac{17(2-\sqrt{2})}{2} = 8{,}5 \cdot (2-\sqrt{2}).$$

Ответ: $8{,}5 \cdot (2-\sqrt{2})$.

Методические указания по выполнению самостоятельной работы студентов

Для выполнения заданий самостоятельной работы следует изучить представленный выше теоретический материал, разобрать и записать решения типовых заданий по теме, изучить рекомендуемую литературу.

В случае возникновения затруднений при изучении теоретического материала и выполнении практических заданий студент может получить консультацию у преподавателя.

Задание 1. Решите задачи на площади поверхностей.

1. Площадь осевого сечения конуса равна 0,6 см^2. Высота конуса равна 1,2 см. Вычислите площадь полной поверхности конуса.
2. Высота цилиндра на 12 см больше его радиуса, а площадь полной поверхности равна 288π см^2. Найдите радиус основания и высоту цилиндра.
3. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ точка L – середина ребра AC, S – вершина. Известно, что $BC = 6$, а $SL = 5$. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.
4. Боковую поверхность равностороннего цилиндра (осевое сечение – квадрат) с высотой 4 см разрезали по образующей. Найдите площадь полученной развертки.
5. Вычислите радиус круга, площадь которого равна площади сферы радиуса 5 м.

Задание 2. Найдите объем:

а) прямоугольного параллелепипеда со сторонами $3\frac{1}{3}; \sqrt{5}; 0{,}96$;

б) цилиндра, если высота цилиндра равна 3 см, а диагональ осевого сечения $\sqrt{41}$;

в) правильной треугольной призмы с ребром 6 см, высота которой равна 8 см;

г) конуса, если его образующая равна 13 см, а площадь осевого сечения равна 60 см^2.

Задание 3. Высота SH треугольной пирамиды $SABC$ падает на середину стороны AB, ABC – правильный треугольник со стороной 6. Найдите объем пирамиды, если $SC = \sqrt{30}$.

Задание 4. Прямоугольный треугольник вращается вокруг гипотенузы, равной 25 см^2. Найдите площадь поверхности тела вращения, если его объем равен 1200π см^3.

Контрольные вопросы

1. Что такое параллелепипед? Какой параллелепипед называется прямоугольным? Что такое линейные размеры прямоугольного параллелепипеда?
2. Что такое призма, основания призмы, боковые грани, ребра, высота?
3. Какая призма называется правильной? Какая призма называется прямой, наклонной?
4. Что такое боковая поверхность призмы, полная поверхность призмы?
5. Что такое пирамида, основание пирамиды, боковые грани, ребра, высота? Какая пирамида называется правильной? Что такое апофема правильной пирамиды?
6. Как связаны площади подобных тел и периметры подобных тел с коэффициентом подобия?
7. Чему равен объем прямоугольного параллелепипеда?
8. Какое тело вращения называется цилиндром? Что является его осевым сечением? Какой цилиндр называют равносторонним?
9. Что общего при нахождении объема любого параллелепипеда, любой призмы и цилиндра?
10. Какое тело вращения называется конусом? Что такое боковая поверхность конуса, полная поверхность конуса? Что называют образующей конуса?
11. Что общего при нахождении объема любой пирамиды и конуса?
12. Докажите, что объемы подобных тел относятся как кубы соответствующих линейных размеров.
13. Чем отличается шар от сферы? Какие метрические соотношения выполняются для шара, сферы?
14. Какие соотношения часто используют при решении задач на комбинации сферы с кубом и прямоугольным параллелепипедом?
15. Что такое шаровой сектор, шаровой сегмент?

Рекомендуемая литература

1. Кытманов, А. М. Стереометрия / А. М. Кытманов, Е. К. Лейнартас, С. Г. Мысливец // Математика : адаптационный курс : учеб. пособие / А. М. Кытманов, Е. К. Лейнартас, С. Г. Мысливец. – Санкт-Петербург [и др.], 2022. – Глава 17. – С. 255. – URL: e.lanbook.com/book/211088 (дата обращения: 10.12.2024). – Режим доступа: по подписке. – ISBN 978-5-8114-1472-7.
2. Стереометрия / В. В. Гарбарук, В. И. Родин, И. М. Соловьева, М. А. Шварц // Решение задач по математике : адаптивный курс для студентов технических вузов : учеб. пособие / В. В. Гарбарук, В. И. Родин, И. М. Соловьева, М. А. Шварц. – Санкт-Петербург [и др.], 2017. – С. 521–559. – URL: e.lanbook.com/book/99281 (дата обращения: 10.12.2024). – Режим доступа: по подписке. – ISBN 978-5-8114-2618-8.

2. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Для выполнения заданий следует изучить представленный выше теоретический материал по указанным темам пособия, а также рекомендуемую литературу. В пособии описаны основные теоретические сведения и приведены решения типовых заданий по каждой теме. В случае возникновения затруднений при изучении теоретического материала и выполнении практических заданий студент может получить консультацию у преподавателя.

В ходе подготовки к практическим занятиям студенту следует изучить конспекты лекций и рекомендуемую литературу, учесть рекомендации преподавателя.

На практических занятиях студенты решают задачи под руководством преподавателя. Практические занятия посвящены изучению наиболее важных и сложных тем учебной дисциплины и служат для закрепления изученного материала.

Важным критерием усвоения теории является умение решать задачи на пройденный материал. При решении задач нужно обосновать каждый этап решения, исходя из теоретических положений изучаемого курса. Если студент видит несколько путей решения, то он должен сравнить их и выбрать самый рациональный. Решение задач и примеров следует излагать подробно, вычисления располагать в строгом порядке, отделяя вспомогательные вычисления от основных. Полученный ответ следует проверять способами, вытекающими из существа данной задачи. Решение задач определенного типа нужно продолжать до приобретения твердых навыков в решении.

По данному курсу предусмотрено пять контрольных работ по нескольким вариантам.

По завершении изучения тем «Тождественные преобразования выражений. Степень. Основные тождества. Формулы сокращенного умножения», «Алгебраические уравнения. Квадратные уравнения. Формулы Виета. Простейшие уравнения и неравенства с модулем», «Понятие функции. Линейная и квадратичная функции. Построение графиков функций. Область определения и множество значений функции» проводится промежуточный контроль в виде контрольной работы № 1 по теме «Тождественные преобразования. Уравнения и неравенства» (20 баллов).

По завершении изучения тем «Определение синуса, косинуса, тангенса и котангенса в прямоугольном треугольнике», «Тригонометрические функции произвольного угла, их свойства и элементарные тригонометрические тождества» проводится промежуточный контроль в виде контрольной работы № 2 по теме «Тригонометрические функции» (20 баллов).

По завершении изучения тем «Тригонометрические уравнения», «Тригонометрические неравенства» проводится промежуточный контроль в виде контрольной работы № 3 по теме «Тригонометрические уравнения и неравенства» (15 баллов).

По завершении изучения тем «Показательная функция. Логарифм. Логарифмическая функция. Область определения», «Показательные уравнения и неравенства», «Логарифмические уравнения и неравенства» проводится промежуточный контроль в виде контрольной работы № 4 по теме «Показательные и логарифмические уравнения и неравенства» (20 баллов).

По завершении изучения тем «Треугольник, четырехугольник, *n*-угольники. Окружность и круг», «Основные понятия и формулы для вычисления площадей и объемов многогранников и тел вращения» проводится промежуточный контроль в виде контрольной работы № 5 по теме «Основные задачи планиметрии и стереометрии» (15 баллов).

Решения заданий контрольных работ должны быть написаны аккуратным, разборчивым почерком, рисунки выполнены с помощью карандаша и линейки. При выполнении контрольных работ не допускается использование калькуляторов и мобильных устройств.

Контрольные работы № 1, 2, 4 (по 20 баллов) состоят из 10 заданий. Каждое задание оценивается в 2 балла, если прослеживается четкое усвоение студентом материала темы, даны полные, развернутые ответы на все поставленные вопросы в объеме от 80 % и выше; 1,5 балла выставляется студенту, если задание выполнено в объеме от 60 до 79 %; 1 балл выставляется студенту, если задание выполнено в объеме от 40 до 59 %; 0,5 балла выставляется студенту, если задание выполнено в объеме от 20 до 39 %; 0 баллов выставляется студенту, если задание выполнено в объеме менее 19 %.

Контрольные работы № 3 и 5 (по 15 баллов) состоят из 10 заданий. Каждое задание оценивается в 1,5 балла, если прослеживается четкое усвоение студентом материала темы, даны полные, развернутые ответы на все поставленные вопросы в объеме от 80 % и выше; 1 балл выставляется студенту, если задание выполнено в объеме от 60 до 79 %; 0,5 балла выставляется студенту, если задание выполнено в объеме от 40 до 59 %; 0 баллов выставляется студенту, если задание выполнено в объеме менее 40 %.

В курсе предусмотрены бонусные баллы (20 баллов) за работу на практических занятиях.

Приведем примерные варианты контрольных работ.

Примерный вариант контрольной работы № 1 по теме «Тождественные преобразования. Уравнения и неравенства»

1. Найдите значение выражения

$$\frac{\left(7^{\frac{3}{5}} \cdot 9^{\frac{2}{3}}\right)^{15}}{63^{9}}.$$

2. Упростите выражение

$$\left(\frac{1}{2x-1} - \frac{1}{2x+1} \cdot \frac{4x^3-1}{3x+2}\right) : \frac{25-x^2}{x^2+4}.$$

3. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе:

$$\frac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{5}} + \frac{3}{2\sqrt{2}-1}.$$

4. Решите уравнение

$$\frac{(x-2)^2}{2} + \frac{18}{(x-2)^2} = 7\left(\frac{x-2}{2} - \frac{3}{x-2}\right) + 10$$

и найдите его корни, принадлежащие отрезку [–2; 2].

5. Решите уравнение $|x^2 - 1| = |x^2 - x + 1|$.

6. Решите неравенство $\left|\sqrt{x^2} - 5\right| \leq 2$..

7. Решите неравенство

$$x^3 + 6x^2 + \frac{28x^2 + 2x - 10}{x - 5} \leq 2.$$

8. Решите неравенство $\sqrt{x+3} - \sqrt{3x-2} > \sqrt{x-2}$.

9. Постройте график функции

$$y = |x^2 - x - 6| + x \text{ или } y = \begin{cases} 2x+3, x < 0, \\ 3, 0 < x < 2, \\ -x^2+7, x \geq 2. \end{cases}$$

10. Решите задачу. Семь одинаковых рубашек дешевле куртки на 2 %. На сколько процентов десять таких же рубашек дороже куртки?

Примерный вариант контрольной работы № 2 по теме «Тригонометрические функции»

1. В треугольнике ABC известно, что $AC = BC$, $AB = 16$, $\cos BAC = \frac{\sqrt{7}}{4}$. Найдите высоту AH.
2. Основания равнобедренной трапеции равны 78 и 60. Тангенс острого угла равен $\frac{2}{9}$. Найдите высоту трапеции.
3. Найдите $\cos \alpha$, если $\sin \alpha = \frac{3\sqrt{11}}{10}$ и $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.
4. Пусть $\sin x \cdot \cos x = \frac{2}{5}$. Вычислите

$$\left|\frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}\right|.$$

5. Найдите значение выражения

$$4\sqrt{2}\sin\frac{7\pi}{8} \cdot \cos\frac{7\pi}{8}.$$

6. Найдите значение выражения

$$\sqrt{32}\cos^2\frac{13\pi}{8} - \sqrt{8}.$$

7. Постройте график функции $y = 2\sin 3x$. Найдите по графику $D(y)$, $E(y)$, T.
8. Упростите:

$$\frac{\mathrm{tg}(270^\circ - \alpha) \cdot \sin 130^\circ \cdot \cos 320^\circ \cdot \sin 270^\circ}{\mathrm{ctg}(180^\circ - \alpha) \cdot \cos 50^\circ \cdot \sin 220^\circ \cdot \cos 360^\circ}.$$

9. Найдите период функции $y = \sin 3x + 2\cos 5x$.
10. Докажите тождество

$$\frac{\mathrm{tg}^2\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\alpha} \cdot \frac{1+\mathrm{ctg}^2\alpha}{\mathrm{ctg}^2\alpha} = \mathrm{tg}^2\alpha.$$

Примерный вариант контрольной работы № 3
по теме «Тригонометрические уравнения и неравенства»

1. Вычислите:

$$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \operatorname{arcctg}\left(-\sqrt{3}\right).$$

2. Найдите корни уравнения $\operatorname{tg}\frac{\pi x}{4} = -1$. В ответ запишите наибольший отрицательный корень.
3. Решите уравнение $\sin 2x - \sqrt{3}\cos x = 0$.
4. Решите уравнение $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + 2x\right) = 1$.
5. Решите уравнение и найдите решения, принадлежащие данному промежутку:

$$4\cos^4 x - 4\cos^2 x + 1 = 0, x \in \left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right].$$

6. Решите уравнение $\operatorname{tg} x = 2\cos\left(\frac{3\pi}{2} + 2x\right)$.
7. Найдите решение однородного уравнения

$$5\sin^2 x + 3\sin x \cdot \cos x - 4 = 0.$$

8. Решите неравенство $\sin 3x > 0$.
9. Найдите решение совокупности неравенств: $\left[\begin{array}{l}\cos x > \frac{1}{2},\\ \operatorname{ctg} x \le -1.\end{array}\right.$
10. Решите уравнение $\arcsin^2 x + 13\arcsin x + 12 = 0$.

Примерный вариант контрольной работы № 4
по теме «Показательные и логарифмические уравнения и неравенства»

1. Вычислите:

$$\frac{\log_2 18}{\log_{36} 2} - \frac{\log_2 9}{\log_{72} 2}.$$

2. Найдите $\log_8 9$, если $\log_{12} 18 = a$.
3. Решите уравнение $\log_x (x - 2) = -1$.
4. Решите уравнение $2x + 7x = 32$.
5. При каких значениях a уравнение $\ln x = x + a$ имеет хотя бы один корень?
6. Решите уравнение $\log_3^2 x - 3\log_3 x + 2 = 0$.
7. Решите уравнение $2 \cdot 4^x - 5 \cdot 6^x + 3 \cdot 9^x = 0$.
8. Решите неравенство

$$\frac{\lg 10x}{\lg x} \ge 2.$$

9. Изобразите множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству $\log_2 (x + y) < 1$.
10. Решите неравенство $3^{x+2} - 3^{x+1} + 3x \leq 21$.

Примерный вариант контрольной работы № 5 по теме «Основные задачи планиметрии и стереометрии»

1. Катеты прямоугольного треугольника равны 15 и 20. Найдите высоту, проведенную к гипотенузе.
2. Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону BC в точке K. Найдите периметр параллелограмма, если $BK = 5$, $CK = 14$.
3. Прямая, параллельная стороне AC треугольника ABC, пересекает стороны AB и BC в точках M и N соответственно. Найдите BN, если $MN = 11$, $AC = 44$, $NC = 18$.
4. Отрезки AB и CD являются хордами окружности. Найдите расстояние от центра окружности до хорды CD, если $AB = 30$, $CD = 40$, а расстояние от центра окружности до хорды AB равно 20.
5. Найдите боковую сторону AB трапеции $ABCD$, если углы ABC и BCD равны соответственно 60° и 135°, а $CD = 24$.
6. Площадь поверхности куба равна 18. Найдите его диагональ.
7. В сосуд, имеющий форму правильной треугольной призмы, налили воду. Уровень воды достигает 80 см. На какой высоте будет находиться уровень воды, если ее перелить в другой такой же сосуд, у которого сторона основания в 4 раза больше, чем у первого?
8. Радиус основания цилиндра равен 2, высота равна 3. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.
9. Во сколько раз уменьшится объем конуса, если его высота уменьшится в 3 раза, а радиус основания останется прежним?
10. Площадь грани прямоугольного параллелепипеда равна 12. Ребро, перпендикулярное этой грани, равно 4. Найдите объем параллелепипеда.

При подготовке к итоговому тестированию студент должен повторно изучить конспекты лекций, а также теоретический материал в данном пособии и рекомендуемую литературу, просмотреть решения основных типов задач, решенных самостоятельно и на практических занятиях.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Курс предоставляет возможность формирования у студентов систематизированных знаний, умений и навыков в области элементарной математики, создания необходимой теоретической базы по основным разделам курса школьной математики, что является основой успешного освоения ими курса высшей математики.

В содержание курса включены следующие разделы: «Тождественные преобразования», «Степень», «Алгебраические уравнения», «Неравенства», «Уравнения и неравенства с модулем», «Понятие функции и ее виды», «Показательные уравнения и неравенства», «Логарифмические уравнения и неравенства», «Тригонометрические уравнения и неравенства», «Планиметрия», «Стереометрия» и другие.

В результате прохождения курса студенты повторят основные понятия школьного курса математики, овладеют методами элементарной математики, необходимыми для обучения математике в вузе и решения профессиональных задач.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Что такое тождество?
2. Какие формулы чаще всего используют при выполнении тождественных преобразований выражений?
3. Перечислите основные свойства степеней.
4. Какие свойства корней n-й степени вы знаете?
5. Какие виды тождественных преобразований рациональных и иррациональных выражений использовались вами при выполнении заданий?
6. Что такое уравнение, корень уравнения? Что значит решить уравнение?
7. Какими способами решаются иррациональные уравнения?
8. Что такое модуль числа?
9. Какие способы решения уравнений, содержащих переменную под знаком модуля, вы знаете?
10. На чем может быть основано решение неравенств, содержащих переменную под знаком модуля?
11. Дайте определение понятия функции.
12. Что такое область определения функции, область значений функции? Как они обозначаются?
13. Сформулируйте определение графика функции.
14. Какие свойства функций известны вам из школьного курса математики?
15. Приведите правила построения графиков функций, содержащих знак модуля.
16. Какой треугольник называется прямоугольным? Что такое катет и гипотенуза?
17. Что такое синус, косинус, тангенс и котангенс острых углов прямоугольного треугольника?
18. Назовите основное тригонометрическое тождество.
19. Чему равны $\sin 30^\circ$, $\cos 45^\circ$, $\operatorname{tg} 60^\circ$, $\operatorname{ctg} 45^\circ$?
20. Сформулируйте теорему Пифагора.
21. Каковы область определения и множество значений синуса и косинуса (тангенса и котангенса)?
22. Как меняются знаки синуса и косинуса (тангенса и котангенса)?

23. Значение $\operatorname{tg} x$ вам известно. Достаточно ли этого, чтобы найти значения других тригонометрических функций?
24. Приведите формулы двойных углов синуса и косинуса.
25. Какое вы знаете правило для запоминания формул приведения?
26. Какие функции называются обратными тригонометрическими функциями? Дайте определения.
27. Какие значения принимают арксинус и арктангенс? Арккосинус и арккотангенс?
28. Сколько решений имеют простейшие уравнения $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$, $\operatorname{ctg} x = a$?
29. Как, зная одно решение простейшего тригонометрического уравнения, найти все его решения?
30. Назовите решения уравнений частных случаев для синуса и косинуса.
31. Где находится ось синусов (косинусов, тангенсов и котангенсов)?
32. При решении неравенства $\sin x \geq 0{,}5$ какую часть оси OY нужно заштриховать: выше точки 0,5 или ниже этой точки?
33. При решении неравенства $\operatorname{ctg} x > 1$ какую часть оси котангенсов нужно заштриховать: правее точки 1 или левее этой точки?
34. При решении неравенства с тангенсом (котангенсом) точки, соответствующие каким углам, нужно выколоть? Почему?
35. Какой период нужно добавить к концам промежутка в неравенстве с синусом (косинусом)?
36. Дайте определение показательной функции. Приведите пример.
37. Каковы область определения и множество значений показательной функции?
38. В чем состоит основное логарифмическое тождество?
39. Перечислите свойства логарифмов.
40. Какие общие свойства есть у показательной и логарифмической функций? В чем отличия?
41. При каких b показательное уравнение $a^x = b$ имеет корень?
42. Сколько корней имеет уравнение $a^x = b$?
43. Как решаются однородные показательные уравнения и неравенства?
44. Какое правило надо соблюдать при решении показательных неравенств?

45. Для каких показательных неравенств можно применить метод рационализации? Назовите формулу рационализации.
46. Сколько корней имеет уравнение $\log_a x = b$? Назовите их.
47. Как решается уравнение вида $\log_a f(x) = \log_a g(x)$?
48. Какое правило надо соблюдать при решении логарифмических неравенств?
49. Для каких логарифмических неравенств можно применить метод рационализации? Назовите формулу рационализации.
50. При решении логарифмического неравенства было получено два промежутка, но в ответе записан только один. Почему?
51. Что такое треугольник? Какие треугольники вы знаете?
52. Назовите основные формулы нахождения площади треугольника.
53. Какие фигуры называются четырехугольником, квадратом, прямоугольником, ромбом, параллелограммом, трапецией? Перечислите их свойства.
54. Какие формулы нахождения площади четырехугольника (квадрата, прямоугольника, ромба, параллелограмма, трапеции) вы знаете?
55. Когда можно описать окружность около четырехугольника, вписать окружность в четырехугольник?
56. Что такое призма? Дайте определения параллелепипеда, прямоугольного параллелепипеда, правильной призмы, куба.
57. Что такое пирамида? Какая пирамида называется правильной? Тетраэдр является правильной пирамидой? А наоборот?
58. По каким формулам можно найти площадь боковой поверхности, полной поверхности и объем призмы? Во сколько раз объем пирамиды меньше объема призмы с тем же основанием?
59. Какие тела вращения вы знаете? Дайте определения.
60. Как найти площадь поверхности и объем цилиндра (конуса), объем шара и площадь поверхности сферы?

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Алгебра и начала математического анализа : 10–11 классы : учебник для общеобразовательных организаций : базовый и углубленный уровни / Ш. А. Алимов, Ю. М. Колягин, М. В. Ткачева [и др.]. – 3-е изд. – Москва : Просвещение, 2016. – 463 с. – (ФГОС) (Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия). – ISBN 978-5-09-037071-4.
2. Атанасян, Л. С. Геометрия : 7, 8, 9 : учебник для общеобразовательных учреждений / Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев [и др.]. – 13-е изд. – Москва : Просвещение, 2003. – 383, [1] с. – ISBN 5-09-012055-2.
3. Балаян, Э. Н. Репетитор по математике для старшеклассников и поступающих в вузы : задачи трех уровней сложности (типа А, В, С), 1000 задач с решениями, 3000 задач для самостоятельного решения, олимпиадные задачи, тесты для подготовки к ЕГЭ / Э. Н. Балаян. – 8-е изд., перераб. и доп. – Ростов-на-Дону : Феникс, 2010. – 763, [1] с. – (Абитуриент). – ISBN 978-5-222-16190-6.
4. Барвенов, С. А. Математика: подготовка к централизованному тестированию «с нуля» / С. А. Барвенов, Т. П. Бахтина. – 2-е изд. – Минск : ТетраСистемс, 2011. – 288 с.
5. Берникова, И. К. Математика для гуманитариев : учеб.-метод. пособие / И. К. Берникова, И. А. Круглова. – Омск : Издательство Омского государственного университета, 2016. – 199 с. – URL: www.iprbookshop.ru/59612.html (дата обращения: 19.03.2025). – Режим доступа: по подписке. – ISBN 978-5-7779-1991-5.
6. Веременюк, В. В. Тренажер по математике : для подготовки к централизованному тестированию и экзамену / В. В. Веременюк. – 3-е изд., стер. – Минск : Тетралит, 2019. – 175 с. – URL: www.iprbookshop.ru/88848.html (дата обращения: 19.03.2025). – Режим доступа: по подписке. – ISBN 978-985-7171-36-1.
7. Грес, П. В. Математика для бакалавров : Универсальный курс для студентов гуманитарных направлений : учеб. пособие / П. В. Грес. – Изд. 2-е, перераб. и доп. – Москва : Логос, 2020. – 286, [1] с. – URL: znanium.com/catalog/product/1212421 (дата обращения: 19.03.2025). – Режим доступа: по подписке. – ISBN 978-5-98704-751-4.

8. Жафяров, А. Ж. Профильное обучение математике старшеклассников : учеб.-дидакт. комплекс / А. Ж. Жафяров. – Новосибирск : Сибирское университетское издательство, 2017. – 467 с. – URL: www.iprbookshop.ru/65152.html (дата обращения: 19.03.2025). – Режим доступа: по подписке. – ISBN 978-5-379-02031-6.
9. Кытманов, А. М. Математика : адаптационный курс : учеб. пособие / А. М. Кытманов, Е. К. Лейнартас, С. Г. Мысливец. – Санкт-Петербург [и др.] : Лань, 2022. – 286 с. – (Учебники для вузов. Специальная литература). – URL: e.lanbook.com/book/211088 (дата обращения: 10.12.2024). – Режим доступа: по подписке. – ISBN 978-5-8114-1472-7.
10. Лисичкин, В. Т. Математика в задачах с решениями : учеб. пособие / В. Т. Лисичкин, И. Л. Соловейчик. – Изд. 7-е, стер. – Санкт-Петербург [и др.] : Лань, 2020. – 464 с. – ISBN 978-5-8114-4906-4.
11. Математика : 9 класс : Основной государственный экзамен : Типовые тестовые задания : 30 типовых вариантов : Инструкция по выполнению работы : Ответы / И. Р. Высоцкий, Л. О. Рослова, Л. В. Кузнецова [и др.] ; под ред. И. В. Ященко. – Москва : Экзамен [и др.], 2017. – 167 с. – (ОГЭ. 30 вариантов. Типовые тестовые задания). – ISBN 978-5-377-11189-4. – ISBN 978-5-4439-0952-3.
12. Математика : учеб. пособие / Пермский государственный гуманитарно-педагогически университет ; авт.-сост.: М. С. Ананьева, И. Н. Власова, М. Л. Лурье [и др.]. – Пермь : ПГГПУ, 2014. – 170, [2] с. – URL: www.iprbookshop.ru/32060.html (дата обращения: 10.12.2024). – Режим доступа: по подписке.
13. Математика. Адаптационный курс : учеб. пособие / Заочная естественно-научная школа при Сибирском федеральном университете ; сост.: А. М. Кытманов, Е. К. Лейнартас, С. Г. Мысливец. – Красноярск : ИПК СФУ, 2009. – 196 с. – ISBN 978-5-7638-1552-8.
14. Меняйлов, А. И. Математический практикум : учеб. пособие для вузов / А. И. Меняйлов. – Москва : Академический Проект, 2003. – 190, [1] с. – (Gaudeamus). – ISBN 5-8291-0317-6.

15. Миронова, С. В. Практикум по решению задач школьной математики: применение Web-квест технологии : учеб.-метод. пособие / С. В. Миронова, С. В. Напалков. – Изд. 2-е, перераб. – Санкт-Петербург [и др.] : Лань, 2022. – 119 с. – (Учебники для вузов. Специальная литература). – URL: e.lanbook.com/book/212549 (дата обращения: 10.12.2024). – Режим доступа: по подписке. – ISBN 978-5-8114-2657-7.
16. Мордкович, А. Г. Алгебра и начала анализа : 10–11 классы : учебник для общеобразоват. учреждений / А. Г. Мордкович. – 2-е изд. – Москва : Мнемозина, 2001. – 334, [1] с. – ISBN 5-346-00044-5.
17. Потоскуев, Е. В. В единстве логической и графической культуры залог решения геометрических задач // Математическое образование. – 2012. – № 1. – С. 30–40.
18. Потоскуев, Е. В. Геометрия : 10 класс : задачник : углубленный уровень / Е. В. Потоскуев, Л. И. Звавич. – 2-е изд., стер. – Москва : Дрофа, 2014. – 256 с. – (ФГОС) (Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия). – ISBN 978-5-358-13865-0.
19. Потоскуев, Е. В. Геометрия : 10 класс : задачник для общеобразоват. учреждений с углубленным и профильным изучением математики / Е. В. Потоскуев, Л. И. Звавич. – 6-е изд., стер. – Москва : Дрофа, 2011. – 255 с. – ISBN 978-5-358-09190-0.
20. Потоскуев, Е. В. Геометрия : 10 класс : метод. пособие [к учебнику Е. В. Потоскуева, Л. И. Звавича «Геометрия : 10 класс»] / Е. В. Потоскуев, Л. И. Звавич, Л. Я. Шляпочник. – Москва : Дрофа, 2004. – 221, [1] с. – ISBN 5-7107-7715-3.
21. Потоскуев, Е. В. Геометрия : 10 класс : учебник : углубленный уровень / Е. В. Потоскуев, Л. И. Звавич. – 2-е изд., стер. – Москва : Дрофа, 2014. – 223 с. – (ФГОС) (Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия). – ISBN 978-5-358-13864-3.
22. Потоскуев, Е. В. Геометрия : 10 класс : учебник для классов с углубленным и профильным изучением математики / Е. В. Потоскуев, Л. И. Звавич. – 9-е изд. – Москва : Дрофа, 2012. – 223 с. – ISBN 978-5-358-11344-2.

23. Потоскуев, Е. В. Геометрия : 11 класс : задачник : углубленный уровень / Е. В. Потоскуев, Л. И. Звавич. – Москва : Дрофа, 2014. – 236 с. – (ФГОС) (Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия). – ISBN 978-5-358-14444-6.
24. Потоскуев, Е. В. Геометрия : 11 класс : задачник для классов с углубленным и профильным изучением математики / Е. В. Потоскуев, Л. И. Звавич. – 8-е изд., стер. – Москва : Дрофа, 2012. – 236 с. – ISBN 978-5-358-10480-8.
25. Потоскуев, Е. В. Геометрия : 11 класс : метод. пособие [к учебнику Е. В. Потоскуева, Л. И. Звавича «Геометрия : 11 класс»] / Е. В. Потоскуев, Л. И. Звавич. – Москва : Дрофа, 2005. – 220, [1] с. – ISBN 5-7107-8907-0.
26. Потоскуев, Е. В. Геометрия : 11 класс : учебник : углубленный уровень / Е. В. Потоскуев, Л. И. Звавич. – Москва : Дрофа, 2014. – 384 с. – (Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия). – ISBN 978-5-358-14443-9.
27. Потоскуев, Е. В. Геометрия : 11 класс : учебник для классов с углубленным и профильным изучением математики / Е. В. Потоскуев, Л. И. Звавич. – 8-е изд., стер. – Москва : Дрофа, 2012. – 368 с. – ISBN 978-5-358-11239-1.
28. Потоскуев, Е. В. Опорные задачи и теоремы при нахождении площадей треугольника и четырехугольника // Математическое образование. – 2009. – № 2. – С. 31–40.
29. Решение задач по математике : адаптивный курс для студентов технических вузов : учеб. пособие / В. В. Гарбарук, В. И. Родин, И. М. Соловьева, М. А. Шварц. – Санкт-Петербург [и др.] : Лань, 2017. – 686 с. – (Учебники для вузов. Специальная литература). – URL: e.lanbook.com/book/99281 (дата обращения: 04.03.2025). – Режим доступа: по подписке. – ISBN 978-5-8114-2618-8.
30. Система тренировочных задач и упражнений по математике / А. Я. Симонов, Д. С. Бакаев, А. Г. Эпельман [и др.]. – Москва : Просвещение, 1991. – 206, [1] с. – ISBN 5-09-002848-6.

31. Стойлова, Л. П. Теоретические основы начального курса математики : учеб. пособие / Л. П. Стойлова. – Москва : Академия, 2014. – 271, [1] с. – (Профессиональное образование. Профессиональный модуль: преподавание по программам начального общего образования). – ISBN 978-5-4468-0768-0.
32. Турецкий, В. Я. Математика и информатика : учеб. пособие для студентов вузов, обучающихся по гуманитарным направлениям и специальностям / В. Я. Турецкий. – 3-е изд., перераб. и доп. – Москва : ИНФРА-М, 2010. – 558 с. – (Высшее образование). – ISBN 978-5-16-000171-5.
33. ФИПИ. ФГБНУ «Федеральный институт педагогических измерений» : [сайт]. – Москва, 2004 – 2024. – URL: fipi.ru (дата обращения: 22.02.2025).
34. Шипачев, В. С. Начала высшей математики : учеб. пособие / В. С. Шипачев. – Изд. 5-е, стер. – Санкт-Петербург [и др.] : Лань, 2022. – 380, [1] с. – (Учебники для вузов. Специальная литература). – URL: e.lanbook.com/book/211175 (дата обращения: 22.02.2025). – Режим доступа: по подписке. – ISBN 978-5-8114-1476-5.
35. Элементарная математика в помощь высшей : учеб. пособие / Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского ; сост.: И. К. Берникова, И. А. Круглова. – Омск : Издательство Омского государственного университета, 2016. – 116 с. – URL: www.iprbookshop.ru/59680.html (дата обращения: 22.02.2025). – Режим доступа: по подписке. – ISBN 978-5-7779-2042-3.
36. Элементарная математика: Арифметика. Алгебра. Тригонометрия : учеб. пособие / Пермский государственный гуманитарно-педагогический университет ; авт.-сост.: В. П. Краснощекова, И. В. Мусихина, И. С. Цай. – Пермь : ПГГПУ, 2014. – 131 с. – URL: www.iprbookshop.ru/32115.html (дата обращения: 22.02.2025). – Режим доступа: по подписке. – ISBN 978-5-86218-689-8.

ГЛОССАРИЙ

Апофема пирамиды – высота боковой грани правильной пирамиды, проведенная из ее вершины.

Высота пирамиды – перпендикуляр, опущенный из вершины пирамиды на плоскость основания.

График функции $y = f(x)$ – множество всех точек координатной плоскости с координатами $(x; f(x))$, абсциссы которых равны значениям аргумента, а ординаты – соответствующим значениям функции.

Многогранник – это такое тело, поверхность которого состоит из конечного числа плоских многоугольников.

Образующие конуса – отрезки, соединяющие вершину конуса с точками окружности основания.

Пирамида – многогранник, который состоит из плоского многоугольника (основания пирамиды), точки, не лежащей в плоскости основания (вершины пирамиды), и всех отрезков, соединяющих вершину пирамиды с точками основания.

Правильный многогранник – выпуклый многогранник, у которого его грани являются правильными многоугольниками с одним и тем же числом сторон и в каждой вершине многогранника сходится одно и то же число ребер.

Призма – многогранник, который состоит из двух плоских многоугольников, лежащих в разных плоскостях и совмещаемых параллельным переносом, и всех отрезков, соединяющих соответствующие точки этих многоугольников.

Функция, определенная на множестве X со значениями в множестве Y, – это соответствие, по которому каждому элементу x множества X сопоставляется единственный элемент y множества Y.

Шаровой сегмент – часть шара, отсекаемая от него плоскостью.

Шаровой сектор – фигура, состоящая из всех отрезков, соединяющих точки сферического сегмента с центром сферы.

Историческая справка к темам 11–12

Более 2000 лет назад под геометрией подразумевалась лишь евклидова геометрия.

Геометрия (греческое, в переводе с латинского – «измеряю землю») – наука о пространстве, точнее наука о формах, размерах и границах тех частей пространства, которые в нем занимают действительные тела.

В настоящее время различают геометрии: элементарную, аналитическую, дифференциальную, проективную, начертательную, топологию и т. д. Кроме того, геометрия может быть евклидовой и неевклидовой.

Предметом элементарной («школьной») геометрии является изучение евклидовых свойств фигур. Эту геометрию и называют евклидовой или элементарной геометрией. Первым источником, дошедшим до наших дней и содержащим изложение аксиоматического построения элементарной геометрии, являлись **«Начала»** древнегреческого математика **Евклида Александрийского** (конец IV – начало III в. до н. э.), имя которого и носит элементарная геометрия. «Начала» содержат 13 томов. Изложение геометрии Евклид начинает с определения основных геометрических объектов: точка, прямая, плоскость. Затем он вводит **аксиомы** и **постулаты** – предложения, принимаемые без доказательства. Затем следуют теоремы плоской и пространственной геометрии (планиметрии и стереометрии). При этом каждая теорема доказывалась на основании введенных ранее определений, аксиом (постулатов) и ранее доказанных теорем. Эта форма изложения геометрии была названа **дедуктивным методом**. Полную же, независимую и непротиворечивую систему аксиом евклидовой геометрии изложил великий немецкий математик Давид Гильберт (1862–1943) в своей книге, ее русский перевод «Основания геометрии» вышел в Москве в 1948 году.

В своих «Началах» Евклид приводит пять постулатов. Если первые четыре постулата не вызывали сомнений, то пятый постулат отличался от остальных сложностью формулировки. **Аксиома параллельности Евклида**: на плоскости через точку, взятую вне данной прямой, можно провести не более одной прямой, которая не пересекает данную, то есть параллельна ей. «Начала» разбиваются на две части – **абсолютная геометрия** («геометрия без пятого постулата») и **евклидова геометрия** («геометрия с пятым постулатом»). На протяжении двух тысячелетий проблема пятого постулата волновала умы многих ученых, начиная с Птолемея (II в.) и заканчивая автором классического курса элементарной геометрии Лежандром (1752–1833). Но «невозможное» сделал великий русский ученый, профессор, ректор Казанского университета **Николай Иванович Лобачевский** (01.12.1792–24.02.1856). Он открыл новую геометрию, которая оказалась такой же логически безупречной и верной, как геометрия Евклида. Геометрия Лобачевского (он назвал ее «воображаемой») носит название **неевклидовой геометрии**. Стоит отметить, что все предложения абсолютной геометрии справедливы как в геометрии Евклида, так и в геометрии Лобачевского. **Аксиома параллельности Лобачевского**: на плоскости через точку, взятую вне данной прямой, можно провести по крайней мере две прямые, которые не пересекают данную, то есть параллельны ей. Лобачевский обратился к методу доказательства от противного, допустив, что пятый постулат неверен. 23 февраля 1826 года Н.И. Лобачевский на заседании физико-математического факультета Казанского университета сделал доклад «Краткое изложение основ геометрии со строгим доказательством теоремы о параллельных». Это был, по выражению профессора А.П. Котельникова, день рождения неевклидовой геометрии.

К неевклидовой геометрии совершенно независимо друг от друга и от идей Лобачевского пришли еще два ученых: великий немецкий математик («король» математики) **Карл Фридрих Гаусс** (30.04.1777–23.02.1855) и гениальный венгерский математик **Янош Больяи** (1802–1860). Однако Appendix Больяи был издан лишь в 1832 году, через три года после выхода статьи «О началах геометрии» Н.И. Лобачевского, а исследования Гаусса стали достоянием гласности лишь после его смерти, так как он не решился публично выступить в защиту новой геометрии. Только в 60-х годах XIX столетия, когда была опубликована переписка Гаусса с друзьями, ученые узнали, что Гаусс полностью разделял идеи Лобачевского и Больяи о неевклидовой геометрии и сам пришел к тем же идеям. Обратите внимание! Помощник учителя математики Гаусса и впоследствии его друг М.Ф. Бартельс работал с 1808 г. в Казанском университете профессором, где он у себя дома занимался с юным Лобачевским. Фаркаш Больяи, отец Яноша Больяи, был однокурсником Гаусса и также учился у Бартельса.

Открытие геометрии Лобачевского имело огромное значение как для развития геометрии (появились новые неевклидовы геометрии, в первую очередь Римана), так и для развития других естественно-научных дисциплин, способствующих более глубокому пониманию окружающего нас материального мира.

С 01.12.2024 в день рождения Н.И. Лобачевского в нашей стране отмечается еще один профессиональный праздник – День математика.

Содержание

Учебное издание

Антонова Ирина Владимировна,
Куприенко Елена Юрьевна

АДАПТИВНЫЙ КУРС МАТЕМАТИКИ

Учебно-методическое пособие

Редактор *Е.В. Пилясова*
Технический редактор *Н.П. Крюкова*
Компьютерная верстка: *Л.В. Сызганцева*
Дизайн обложки: *Г.В. Карасева*

При оформлении пособия использована иллюстрация от Freepik на сайте ru.freepik.com

Подписано в печать 18.06.2025. Формат 60×84/16.
Печать оперативная. Усл. п. л. 10,17.
Тираж 100 экз. Заказ № 1-02-25.

Издательство Тольяттинского государственного университета
445020, г. Тольятти, ул. Белорусская, 14,
тел. 8 (8482) 44-91-47, www.tltsu.ru