МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Тольяттинский государственный университет»

Институт общеинженерной подготовки
(наименование института полностью)

Кафедра «Высшая математика и математическое образование»
(наименование)

44.04.01 Педагогическое образование
(код и наименование направления подготовки)

Математическое образование
(направленность (профиль)

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА (МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ)

на тему «Проектирование системы уроков по теме «Тригонометрические уравнения» с применением технологии дистанционного обучения в 10-11 классах общеобразовательной школы»

Обучающийся Е.Н. Чайковская
(Инициалы Фамилия) (личная подпись)

Научный руководитель канд. пед. наук, доцент, Н.А. Демченкова
(ученая степень (при наличии), ученое звание (при наличии), Инициалы Фамилия)

Тольятти 2025

Оглавление

Введение 3
Глава 1 Теоретические основы проектирования системы уроков по теме «Тригонометрические уравнения» с применением технологии дистанционного обучения 11
1.1 Основные цели и задачи технологии дистанционного обучения 11
1.2 Условия эффективности реализации технологии дистанционного обучения 19
1.3 Проектирование системы уроков по алгебре и началам математического анализа 25
1.4 Анализ школьных учебников с точки зрения исследуемой проблемы……28
Глава 2 Методические основы проектирования системы уроков по теме «Тригонометрические уравнения» с применением технологии дистанционного обучения 40
2.1 Методика обучения решению простейших тригонометрических уравнений 40
2.2 Система уроков по теме «Тригонометрические уравнения» для обучающихся 10-11 классов с применением технологии дистанционного обучения 47
2.3 Элективный курс «Тригонометрические уравнения» для учащихся 10-11 классов 61
2.4 Педагогический эксперимент и его результаты 83
Заключение 87
Список используемой литературы и используемых источников 88

Введение

Актуальность и научная значимость исследования. В основе Федерального государственного образовательного стандарта (ФГОС) [32] лежит принцип личностно-ориентированного подхода, который направлен на развитие индивидуальных способностей каждого ученика, его творческого потенциала, самостоятельности и критического мышления. «Личностные требования к результатам освоения обучающимися основной образовательной программы содержат готовность к саморазвитию, самостоятельности и самоопределению; наличие мотивации к обучению и личностному развитию» [32, с. 4].

Дистанционное обучение предоставляет возможность адаптировать учебный процесс к индивидуальным особенностям каждого учащегося, используя богатый выбор онлайн-ресурсов, интерактивных упражнений и соответствующих методических приемов. Это делает обучение более эффективным, увлекательным и соответствующим индивидуальным потребностям.

ФГОС [32] ставит перед образованием задачу развития ключевых компетенций, необходимых для успешной жизни и работы в современном мире. Дистанционное обучение в полной мере соответствует этой цели, формируя у учащихся цифровые компетенции, необходимые для успешного функционирования в цифровой среде.

В современном образовании в России особое место уделяется системно-деятельностному подходу, который подчеркивает активную позицию ученика в образовательном процессе. Дистанционное обучение стимулирует учащихся к обучению, предоставляя им возможность использовать упражнения и задания с широкими возможностями для визуализации и интерактивности. Использование видео, анимации, интерактивных упражнений делает обучение более наглядным, интересным и запоминающимся. Это способствует развитию самостоятельности,

творческих способностей, критического мышления и аналитических навыков.

Важным принципом ФГОС [32] является инклюзивность, направленная на создание равных условий для всех учеников, независимо от их способностей и особенностей. Дистанционное обучение предоставляет возможность учиться всем желающим, независимо от местонахождения, физических ограничений и других факторов.

Таким образом, дистанционное обучение является эффективным и современным инструментом образования, полностью соответствует требованиям, предъявляемым к современному образовательному процессу, открывает новые возможности для обучения и познания новой информации.

Дистанционное обучение, как современная форма реализации образовательного процесса, ставит перед собой многоаспектные цели, центральной из которых является обеспечение инклюзивного доступа к качественному образованию для всех категорий обучающихся, вне зависимости от их географического местоположения, возрастных характеристик, ограничений по здоровью или социально-экономического статуса. Ключевым принципом при этом выступает индивидуализация образовательной траектории, предполагающая адаптацию содержания, методик и темпа усвоения материала к уникальным потребностям и особенностям каждого обучающегося. Реализация данной цели неразрывно связана с необходимостью повышения общего качества образования посредством интеграции инновационных образовательных технологий и ресурсов, способствующих более эффективному формированию знаний, умений и навыков, а также развитию необходимых компетенций. Одним из приоритетных направлений является формирование у обучающихся навыков саморегуляции, самоконтроля и ответственности за результаты обучения, необходимых для успешной адаптации к условиям непрерывного образования и профессиональной деятельности.

Технологии дистанционного обучения на протяжении многих лет интересуют авторов научных исследований.

В статье О.М. Абрамова [1] описывается «опыт организации применения цифровых технологий в условиях дистанционного обучения математическим дисциплинам» [1, С. 50], автор разделяет дистанционное обучение на «два вида: синхронное и асинхронное, обсуждает основные негативные последствия дистанционного обучения математике и пути их преодоления» [1, с. 50].

И.Н. Макарьев определяет «роль и место дистанционного обучения математике старшеклассников в системе открытого образования». В работе разработаны и экспериментально проверены «модель методического сопровождения дистанционного обучения математике старшеклассников и технология методического сопровождения дистанционного обучения математике старшеклассников» [12, с. 6].

Н.И. Подгребельная [21] в диссертационном исследовании определяет «основные причины, препятствующие использованию всех потенциальных возможностей дистанционного обучения в процессе активизации познавательной деятельности» [21, с. 8]. Автор предлагает «комплексную адаптационную программу, направленную на устранение этих причин» [21, с. 8].

Т.А. Пчелинцева и А.Г. Львова в рамках «Международного научного семинара преподавателей математики и информатики университетов и педагогических вузов» рассматривают «сетевой математический проект как образовательное событие в условиях дистанционного обучения» [23, с. 59] и описывают его особенности.

А.А. Статуев в своем исследовании разработал «основы конструирования методических материалов к учебным занятиям с использованием информационно-коммуникативных технологий и экспериментально подтвердил эффективность предложенных дидактических и методических основ организации углубленного изучения математики в

сельской школе с использованием информационно-коммуникативных технологий» [27, с. 5].

В диссертации С.Н. Трегубовой рассматривается «комплексное применение дистанционных и традиционных методов обучения математике учащихся старшей школы как средство реализации индивидуального подхода» [30, с. 4].

Целью диссертационного исследования В.И. Снегуровой является «построение методической системы дистанционного обучения математике в средней школе и создание вариативной методики ее реализации в различных информационно-образовательных средах дистанционного обучения, ориентированной на возможность учета индивидуальных образовательных потребностей сетевых учащихся» [26, с. 1].

В.И. Снегурова делает следующее заключение: «требования к учителю, работающему в условиях реализации ФГОС, могут быть сформулированы в двух предложениях:

− сформированность у каждого учителя уровня ИКТ-компетентности, достаточной для реализации идей ФГОС;

− владение каждым учителем методикой применения ИКТ при обучении предметному содержанию, в том числе при использовании инновационных педагогических технологий» [26, с. 64].

З.С. Гребнева [4] в рамках диссертационного исследования:

− выявляет «пути эффективного использования телекоммуникационных технологий дистанционного обучения математически одаренных школьников региона;

− определяет концептуальную основу организации дистанционной работы с математически одаренными детьми» [4, с. 7];

− разрабатывает «подход к конструированию содержания обучения математике в рамках дистанционной модели дополнительного образования математически одаренных школьников;

− подтверждает экспериментально эффективность разработанной модели» [4, с. 7].

Противоречие заключается в растущей потребности применения технологии дистанционного обучения в образовательном процессе с одной стороны, и недостаточной разработанностью методических материалов и систем уроков с применением данной технологии, с другой.

Данное противоречие позволило сформулировать проблему диссертационного исследования: проектирование системы уроков с применением технологии дистанционного обучения в 10-11 классах общеобразовательной школы.

Объект исследования: процесс обучения старшеклассников тригонометрическим уравнениям в курсе алгебры 10-11 классов общеобразовательной школы.

Предмет исследования: методика обучения тригонометрическим уравнениям в курсе алгебры 10-11 классов общеобразовательной школы с применением технологии дистанционного обучения.

Цель исследования: проектирование системы уроков по теме «Тригонометрические уравнения» с применением технологии дистанционного обучения.

Гипотеза исследования заключается в следующем, если разработать и внедрить систему уроков по теме «Тригонометрические уравнения» в дистанционное обучение учащихся 10-11 классах, то повысится качество обучения учащихся общеобразовательной школы.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи:

1. Рассмотреть основные цели и задачи технологии дистанционного обучения.
2. Определить условия эффективности реализации технологии дистанционного обучения.

3. Проанализировать школьные учебники с точки зрения исследуемой проблемы.

4. Рассмотреть методику обучения решению простейших тригонометрических уравнений с применением технологии дистанционного обучения.

5. Разработать систему уроков по теме «Тригонометрические уравнения» для обучающихся 10-11 классов с применением технологии дистанционного обучения.

6. Разработать элективный курс по теме «Тригонометрические уравнения» для учащихся 10-11 классов с применением технологии дистанционного обучения.

7. Представить описание проведенного педагогического эксперимента.

Теоретико-методологическую основу исследования составили научные работы И.В. Снегуровой, а также теоретические основы, разработанные В.А. Гусевым [5], И.М. Осмоловской [18], Ю.М. Колягиным [9], [10].

Базовыми для настоящего исследования послужили исследования, представленные в работах Ш.А. Алимова [2], Г.В. Дорофеева [7], Г.К. Муравина и О.В. Муравиной [15], а также И.В. Ященко [37].

Методы исследования: анализ психолого-педагогической, методической литературы по теме исследования; изучение и анализ состояния исследуемой проблемы в школьной практике; анализ собственного опыта работы в школе; педагогический эксперимент и обработка результатов эксперимента.

Основные этапы исследования:

− первый этап (2022/2023 уч. г.): ознакомление с существующими исследованиями по теме диссертации, анализ учебных ресурсов, справочников и сборников задач по математике, а также изучение нормативных документов, таких как стандарты и учебные программы;

− второй этап (2023/2024 уч. г.): определение теоретических основ, касающихся темы диссертации;

− третий этап (2023/2024 уч. г.): диагностика методических основ исследования, создание материалов, направленных на развитие эвристических методов через обучение решению алгебраических задач;

− четвертый этап (2024/2025 уч. г.): обобщение и систематизация собранных данных, анализ результатов эксперимента, формулирование выводов и подготовка диссертации.

Опытно-экспериментальная база исследования: государственное бюджетное общеобразовательное учреждение города Москвы «Школа № 1504».

Научная новизна исследования заключается в том, что в нем обосновано применение технологии В.И. Снегуровой при изучении темы «Тригонометрические уравнения» в 10-11 классах общеобразовательной школы.

Теоретическая значимость исследования заключается в раскрытии теоретических основ применения технологии дистанционного обучения при разработке системы уроков по теме «Тригонометрические уравнения».

Практическая значимость исследования заключается в том, что представленная система уроков по теме «Тригонометрические уравнения» и разработанный элективный курс «Тригонометрические уравнения» могут быть использованы учителями математики на практике в 10-11 классах общеобразовательной школы.

Достоверность и обоснованность результатов исследования гарантируются путем комбинированного использования теоретических аспектов и практических методов исследования, а также анализа педагогической практики.

Личное участие автора в организации и проведении исследования состоит в том, что автором были сформулированы методические рекомендации обучения решению тригонометрических уравнений с применением технологии дистанционного обучения; представлена система

уроков по теме «Тригонометрические уравнения»; разработан элективный курс по теме «Тригонометрические уравнения».

Апробация и внедрение результатов работы велись в течение всего исследования. Предложенные методические рекомендации были экспериментально проверены в период производственной практики (научно-исследовательской работы) и преддипломной практики, которые проходили на безе кафедры высшей математики и математического образования Тольяттинского государственного университета.

Основные положения и результаты исследования докладывались на конференции ТГУ «Студенческие дни науки» (Тольятти, 2025), XXIII Всероссийской научно-практической конференции «Актуальные проблемы естественнонаучного и математического образования» (Самара, 2024), XXI Всероссийской с международным участием научно–практической конференции «Артемовские чтения»: «Современное образование: научные подходы, опыт, проблемы, перспективы» (Пенза, 2025 г.)

По теме исследования имеются две публикации [6], [35].

На защиту выносятся следующие положения:

− методические рекомендации обучения тригонометрическим уравнениям с применением технологии дистанционного обучения;

− система уроков по теме «Тригонометрические уравнения» с применением дистанционных технологий;

− элективный курс «Тригонометрические уравнения» с применением дистанционных технологий.

Структура магистерской диссертации. Работа состоит из введения, двух глав, заключения, содержит 29 рисунков, 4 таблицы, список используемой литературы и используемых источников (44 источника). Основной текст работы изложен на 92 страницах.

Глава 1 Теоретические основы проектирования системы уроков по теме «Тригонометрические уравнения» с применением технологии дистанционного обучения

1.1 Основные цели и задачи технологии дистанционного обучения

«Дистанционное образование — это универсальная форма обучения, базирующаяся на использовании широкого спектра как традиционных, так и новых информационных и телекоммуникационных технологий и технических средств» [29, С. 7].

Дистанционное обучение ничем не уступает традиционному обучению, а в некоторых аспектах даже превосходит его. Стоит рассматривать дистанционное обучение не как просто альтернативу классно-урочной системе, а как ее полноценное дополнение, которое в некоторых аспектах даже превосходит традиционную форму обучения.

Дистанционное обучение позволяет получать знания независимо от места расположения обучающего и образовательного заведения. Тем самым, дистанционное обучение предоставляет возможность обеспечить беспрерывный учебный процесс, независимо от того, находятся ли учащиеся в школе, дома или в другом месте. Это особенно важно в ситуациях, когда школа закрыта из-за карантина или других непредвиденных обстоятельств.

Кроме того, существуют учащиеся, которые чувствуют себя комфортнее в домашней обстановке, где они могут сосредоточиться на обучении без отвлекающих факторов, присущих традиционному обучению в рамках школьного урока. Для таких учащихся дистанционное обучение становится идеальным инструментом в образовании.

Как отмечает О.М. Абрамова [1] «всё современное дистанционное обучение подразделяется на два вида: синхронное и асинхронное. При синхронном обучении все участники образовательного процесса находятся на виртуальных занятиях в электронной среде» [1, С. 51].

Другой вид дистанционного обучения − асинхронное «характеризуется «отсроченностью» взаимодействия с преподавателем и временным интервалом перехода к занятиям. Таким образом, обучающиеся не обязаны одновременно присутствовать с преподавателем в электронной образовательной среде» [1, С. 51]. Это означает следующее: учащиеся могут управлять своим учебным процессом, то есть могут изучать материал в собственном темпе, не спеша или ускоряя движение по темам в зависимости от своих потребностей, это позволяет им более глубоко изучить темы, которые вызывают затруднения или представляют особый интерес. Если учащийся встречает трудности с пониманием определенной темы, он может сосредоточиться на ней более длительное время, повторяя материал или обращаясь за помощью к учителю. В то же время, если тема вызывает особую заинтересованность, учащийся может углубляться в нее, изучая дополнительные материалы или задавая учителю дополнительные вопросы.

Такая гибкость в обучении делает его более эффективным и мотивирующим, так как учащийся не чувствует себя ограниченным рамками классно-урочной системы. Получить необходимую помощь от учителя можно в формате онлайн-консультаций.

Дистанционное обучение делает образовательный процесс более наглядным и увлекательным благодаря возможности использовать визуальные средства и интерактивные элементы, что в свою очередь мотивирует учащихся к активной учебной деятельности.

Такие сервисы, как Geogebra [40] предоставляют учащимся возможность увидеть в интерактивном режиме, как видоизменяется график функции, если вносить изменения в саму функцию, а также позволяют построить графики функций в реальном времени, изменяя параметры и визуально наблюдая за изменениями в их поведении. Это позволяет учащимся лучше понять связь между формулой функции и ее графическим представлением, и отслеживать влияние изменения параметров на форму и

положение графика. Визуализация графиков также помогает понять понятие пределов, производных и интегралов в началах математического анализа.

Онлайн-доски предлагают широкий спектр инструментов для работы с доской, тем самым превращают обучение в более динамичный и увлекательный процесс, заставляя учащихся активно участвовать в усвоении знаний.

Дистанционные платформы предлагают учащимся интерактивные упражнения и симуляции, которые позволяют им самостоятельно решать задачи по алгебре и началам математического анализа и немедленно проверять свои решения. Например, учащиеся могут самостоятельно решать уравнения, строить графики и вычислять пределы, получая немедленную обратную связь от платформы. Это делает обучение более активным и увлекательным, позволяя учащимся самостоятельно исследовать математические понятия и развивать практические навыки.

Важно заметить, что дистанционное обучение – это не просто адаптация классно-урочной системы к онлайн-пространству. Это формирование новой образовательной действительности, требующей от учителей расширения профессиональных горизонтов и приобретения новых компетенций для обеспечения качественного и эффективного образовательного процесса в онлайн-среде.

Учителя должны быть готовы работать с онлайн-платформами, использовать современные методы обучения, обеспечивать эффективную коммуникацию с учащимися, а также мотивировать учащихся на работу.

В статье И.А Патронова [19] исчерпывающе представлена «следующая система критериев и показателей. Software-based (цифровая компетентность): использование цифровых ресурсов и технологий, создание авторских педагогических цифровых ресурсов и технологий, создание дидактических материалов с использованием информационно-телекоммуникационных технологий. Methodical guidance (методическая компетентность): анализ, проектирование и реализация социально-педагогических условий,

целеполагание в образовательном процессе, педагогическое проектирование, организация профессиональной деятельности. Active and communications (коммуникативная компетентность): партнерство и общение с родителями, включенность в проф. сообщество, сотрудничество с коллегами, партнерство и взаимодействие с социумом. Regulation through psychology (психолого-педагогическая компетентность): знание и учет возрастных и индивидуальных особенностей, организация воспитания, организация здоровьесбережения. Teacher's knowledge (предметная компетентность): профессиональные и предметные знания, интеграция знаний разных предметных областей, целостность научного мировоззрения, владение способами формирования предметных и метапредметных результатов» [19, с. 18].

Данная система построена «на основе анализа теоретических источников, нормативно-правовых требований к педагогу-профессионалу, его личности и поведению, педагогического опыта, полученных экспериментальных данных, исходя из структуры профессиональной компетентности как результата профессионального педагогического образования» [19, с. 19].

В целом, основная цель дистанционного обучения - предоставить учащимся доступ к качественному образованию, независимо от их местоположения, индивидуальных особенностей и потребностей. Это означает, что дистанционное обучение стремится сделать образование более гибким, доступным и эффективным для всех, независимо от их физических возможностей, географического расположения или уровня подготовки.

Дистанционное обучение ставит перед собой целый ряд задач, направленных на достижение своей основной цели:

− индивидуализация образования посредством обеспечения гибкости и удобства предоставления новой информации для всех учащихся, независимо от обстоятельств;

− создание инклюзивной среды, в которой каждый учащийся чувствует себя принятым и имеет возможность развивать свой потенциал;

− доступ к широкому спектру инструментов: средства дистанционного обучения предоставляют учащимся доступ к разнообразным учебным материалам, видеоурокам, симуляциям, интерактивным упражнениям и другим ресурсам, что делает обучение более динамичным и интересным;

− развитие информационной грамотности: обучение в дистанционном формате, в значительной мере, подразумевает работу с компьютером, что способствует развитию цифровых компетенций учащихся;

− эффективное взаимодействие участников образовательного процесса: использование видеоконференций, чат-комнат и других инструментов онлайн-коммуникаций позволяет учителям и учащимся эффективно взаимодействовать друг с другом.

Эффективность реализации технологии дистанционного обучения зависит от технических возможностей образовательной организации, качества разработанных материалов и компетентности учителя.

Необходимо начать с того, что само дистанционное обучение подразумевает работу участников образовательного процесса в онлайн среде. Такого рода деятельность невозможно без стабильного интернет-соединения и исправно работающих технических устройств как у преподавателя, так и у учащихся.

Школам и образовательным организациям реализовывать дистанционное обучение призван помочь федеральный проект «Цифровая образовательная среда» [13], который «направлен на создание и внедрение в образовательных организациях цифровой образовательной среды, а также обеспечение реализации цифровой трансформации системы образования. В рамках проекта ведется работа по оснащению организаций современным оборудованием и развитию цифровых сервисов и контента для образовательной деятельности» [13].

Учащиеся, в свою очередь, должны иметь всё необходимое для работы в дистанционном формате. Однако, как показывает практика, не все семьи обеспечены нужными ресурсами. Поэтому школы и образовательные организации должны принять участие в поддержке таких семей, посредством предоставления доступа к техническим средствам и программному обеспечению находящихся у них в пользовании.

Одно из главных отличий дистанционного обучения от очного то, что учащиеся находятся не в классе, а в другом помещении, где, скорее всего, много отвлекающих факторов и сложно сосредоточится на обучении.

Основная задача учебных материалов для дистанционного обучения удерживать внимание учащегося и побуждать следить за происходящим на экране. Конечно, школьные учебники, используемые при традиционном обучении в классе, не справляются такой задачей, поэтому использовать их при работе онлайн не имеет смысла.

Привлечь и удержать внимание учащихся не легко и в традиционном обучении в классе, а в дистанционном обучение, это гораздо сложнее. К учебных материалам для дистанционного обучения предъявляются повышенные требования, они должны:

- быть визуально привлекательными;
- иметь четкую структуру;
- быть доступными и понятными;
- удовлетворять образовательные потребности учащихся с разными стилями обучения и темпами усвоения информации.

Все вышеперечисленное говорит о том, что разработка материалов для дистанционного обучения очень сложная работа, требующая всесторонних знаний.

Ключевое значение в эффективности дистанционного обучения имеет компетентность преподавателя, которая складывается из многих составляющих, включая: компетенции в области информационных

технологий, педагогическую компетентность, личные качества преподавателя, способствующие установлению контакта с учащимися.

Коммуникации в онлайн среде осуществляется посредством цифровых платформ, таких как Сферум [28], следовательно учитель дистанционного образования должен уметь использовать подобные технологии в работе с учащимися. Впрочем, цифровая компетенция предполагает не только владение средствами связи. Качество учебных материалов, то есть насколько они адаптированы для дистанционного обучения, зависит от того, насколько учитель осведомлен в области современных образовательных технологий.

Кроме того, для обеспечения результативного обучения учитель должен эффективно управлять образовательным процессом в онлайн среде, для этого были созданы такие инструменты как Moodle [41].

Педагогическая компетентность представляет собой способность учителя мотивировать учащихся, поощрять активное участие на уроке, создавать благоприятную атмосферу для обучения. Особенную важность это приобретает в случае дистанционного обучения, где ученики лишены непосредственного контакта с преподавателем и могут чувствовать себя изолированными.

Следует выделить «умения, которыми должен обладать педагог в принципиально новых условиях: формирование у школьников положительной мотивации к учебе; стимулирование познавательной активности учащихся; развитие у обучающихся навыков саморегуляции учебной деятельности, которые подразумевают способности ставить цели, выстраивать траекторию их достижения, самостоятельно оценивать результаты и корректировать их» [11, с. 91].

Важно, чтобы учитель умел строить эффективную коммуникацию с учениками и с родителями в онлайн-среде. Он должен уметь ясным и четким языком объяснять материал, отвечать на вопросы учеников, давать обратную связь по их работе и мотивировать их к успеху. Кроме того, необходимо уметь читать и правильно интерпретировать невербальные сигналы

учеников, которые могут быть труднее распознать в онлайн-среде, чем в очной.

В дистанционном обучении важно не только уметь владеть технологиями, но и иметь глубоко владеть своим предметом. Учитель должен обладать широкими знаниями и уметь передавать их в доступной и понятной форме. Он должен использовать современные методы обучения, в том числе технологии дистанционного обучения, чтобы сделать обучение более интересным и эффективным.

«Отличное владение предметом, информированность о современных возможностях использования компьютерных технологий и техники в обучении, практике и коммуникации – базовые квалификационные требования к педагогу» [25, с. 282].

Мотивация ученика к самостоятельной работе – один из ключевых аспектов успешного дистанционного обучения. Учителя должны поощрять любопытство и активность учащихся, помогать им преодолевать трудности и мотивировать себя на дальнейшее обучение.

Н.В. Турковская [31] в своей статье особенно внимательно описывает «профессионально значимые качества, которые являются для преподавателя дистанционного обучения наиболее важными. Данный список включает следующие 15 качеств: виртуальная коммуникабельность; гибкость мышления; доброжелательность; информационная грамотность; компьютерная грамотность; находчивость; организаторские способности; педагогический такт; педагогическое предвидение; письменная коммуникабельность; профессиональная мобильность; профессиональная эрудированность; психологическая гибкость; толерантность; устная коммуникабельность» [31, с. 175].

Необходимо подчеркнуть следующее, преподаватель дистанционного обучения должен уметь выстраивать учебных процесс с учетом особенностей данного вида обучения.

Важно создать благоприятную среду, где ученики могут получать знания, развивать свои навыки и компетенции, а также оставаться мотивированными к обучению.

Это возможно только при условии совершенствования собственных знаний в области образовательных технологий и постоянному саморазвитию.

1.2 Условия эффективности реализации технологии дистанционного обучения

Следует отметить, что эффективность дистанционного обучения зависит от гармоничного сочетания многих факторов. Это не просто технические возможности, но и качество учебных материалов, компетенции преподавателя и многого другого.

В.И. Снегурова [26] в своем «научном исследовании рассматривает дистанционное обучение как процесс передачи и усвоения математических знаний, посредством организации соответствующей деятельности, а также превращения их в достояние индивида в условиях специально созданной информационно-образовательной среды, основанной на современных информационных и коммуникационных технологиях, обеспечивающей взаимодействие между учителем и учащимися. В соответствие с данным определением рассматривать дистанционное обучение необходимо с точки зрения общего понятия обучение» [26, С. 47]. В частности, дистанционное обучение должно иметь полноценное учебно-методическое обеспечение, ключевым элементом которого является методическая система обучения математике.

Стоит отметить, что технология дистанционного обучения В.И. Снегуровой [26] позволяет выстроить занятия элективного курса в систему взаимосвязанных уроков, что делает обучение организованным и эффективным.

«Под методической системой дистанционного обучения математике (МСДОМ) будем понимать взаимосвязанную совокупность компонентов, обеспечивающую удовлетворение образовательных потребностей общества и учащихся в процессе обучения математике. Данная система разрабатывается с учетом актуальных и потенциальных возможностей различных информационно-образовательных сред дистанционного обучения» [26, с. 110].

Стоит отметить, что «в случае проектирования, процесса обучения методическая система создается с целью-обеспечения процесса обучения необходимыми средствами для достижения поставленных целей обучения, то есть для решения проблемы обеспечения наиболее комфортных условий обучения для каждого учащегося, при создании которых учитываются индивидуальные особенности как учителя, так и ученика» [26, с. 124].

Эффективное дистанционное обучение математике требует структурированного подхода, где учебный процесс представлен в «виде последовательности действий, для этого необходимо выделить специальные блоки содержания. Представленная ниже схема (рисунок 1) показывает, что процесс дистанционного обучения математике целесообразно проектировать как целенаправленную смену технологических циклов» [26, с. 221].

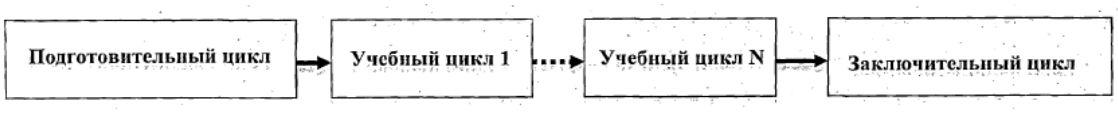


Рисунок 1 – Технологическая цепочка дистанционного обучения

Данная технология «предполагает целенаправленную смену технологических циклов:

- подготовительный цикл;
- учебные циклы;
- заключительный цикл.

Рассмотрим каждый цикл более подробно, начнем по порядку с подготовительного цикла (рисунок 2).

Этот цикл состоит из трех этапов:

этап П1,

этап П2,

этап П3» [26, с. 227].

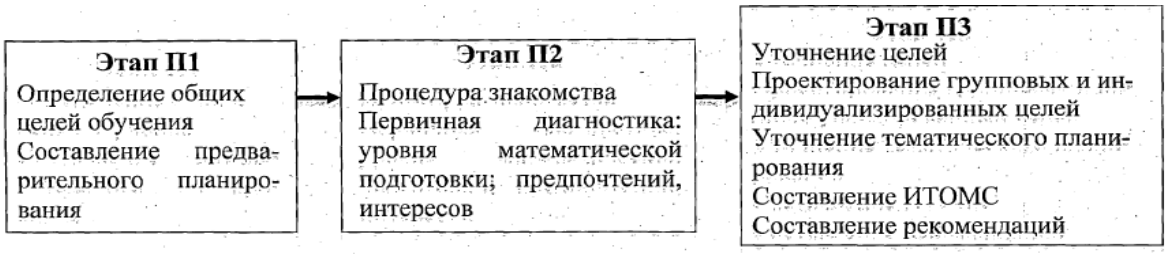


Рисунок 2 – Структура подготовительного цикла

«На этапе определения общих целей обучения» [26, С. 125]. сетевой учитель математики должен создать предварительный план деятельности как для себя, так и для учащихся, а также ознакомиться с ресурсом, который будет использоваться в будущем дистанционном обучении.

На втором этапе подготовительного цикла, необходимо провести первичную диагностику, чтобы определить уровень подготовки учащихся, их интересы и предпочтения, а также уровень их самостоятельности.

На третьем этапе нужно уточнить цели обучения алгебре и началам анализа, выделить индивидуальные и групповые цели учитывая интересы учащихся. Также необходимо отметить возможные образовательные траектории, которые могут быть предложены старшеклассникам. На данном этапе необходимо скорректировать план, полученный на этапе П1.

Далее рассмотрим более подробно учебный цикл. «Учебный цикл состоит из шести этапов:

– У1: подготовительный;

– У2: мотивация учащихся;

– УЗ: самостоятельная деятельность учащихся;

– У4: взаимодействие;

– У5: контроль; диагностика;

– У6: коррекция» [26, с. 227].

Каждый этап учебного цикла подразумевает определенную деятельность учителя. Рассмотрим деятельность учителя на каждом этапе более подробно.

Главная задача этапа У1 – выделить и конкретизировать образовательные потребности учащихся, их деятельностные приоритеты. На основе этого конкретизировать цели обучения. А также разработать возможные варианты образовательных траекторий на разных типов учащихся.

В. И. Снегурова рассматривает конкретный пример организации изучения учащимися темы «Действительные числа. Вычисления» в рамках дистанционного обучения и на первом этапе учебного цикла предлагает сформировать следующие траектории обучения.

«Траектория 1. Учащийся последовательно знакомится с материалами основного текста, не переходя по гиперссылкам и не знакомясь с материалами рубрик, последовательно выполняя все задания: тесты, задания с открытым ответом, пытаясь самостоятельно. решить все примеры, предлагаемые' авторами, не обращаясь к их решению»[26, с. 257].

«Траектория 2. Учащийся начинает знакомство; с материалами Урока с его плана; затем с инструкцией к Уроку и только после этого переходит непосредственно к материалам основного текста. При этом учащийся обращается ко всем гиперссылкам и последовательно выполняет все задания; которые включены в содержание» [26, с. 260].

«Траекториям 3. Учащийся последовательно изучает всё теоретическое содержание Урока; обращаясь к материалам гиперссылок и рубрик, но задания, предлагаемые в Уроке, начинает выполнять только после того, как изучены все факты, и рассмотрены, все примеры с решениями» [26, с. 257].

«Траектория 4. Отличается; от предыдущей траектории тем; что учащийся выполняет задания тренажеров и тестов, оцениваемых автоматически, последовательно знакомясь с материалами Урока, а задания открытым ответом после того, как изучены все теоретическое содержание» [26, с. 257].

Второй этап учебного цикла содержит различные приемы мотивации учащихся, а именно «отдельным группам учащихся могут быть предложены свои вопросы, проблемы, задания. Ими могут стать задания, ориентированные на различные предметные области» [26, с. 261]. Далее «учащимся предлагается обсудить на форуме возможные способы их решения и выделить в решении те действия, которые они не могут выполнить, обладая имеющимися у них знаниями» [26, с. 261].

На этапе У3 необходимо организовать самостоятельную работу учащихся по учебным материалам урока на основе рекомендаций учителя, на данном этапе предполагается «осуществление деятельности по актуализации необходимых ЗУН; изучению нового материала; первичному закреплению; первичному обобщению и систематизации» [26, с. 229]. На этом этапе предусмотрена индивидуальная помощь учащимся, которая помогает им преодолеть трудности, возникающие при изучении материала или решении задач.

Этап У4 строится на принципах сотрудничества и обмена знаниями: учащиеся активно взаимодействуют с онлайн-преподавателем и другими участниками, совместно исследуя новую информацию и интегрируя полученные знания и умения. Начать онлайн урок данного этапа можно «с того, что учитель предлагает ответить учащимся на вопросы» [26, с. 262] предполагающие краткий ответ. «Правда ли, что если некоторая функция в точке дне имеет производной, то характер монотонности функции в этой точке изменяется? Правда ли, что если производная функции положительна на промежутках (1; 3) и (5; 10), то функция! монотонно возрастает на их объединении?» [26, с. 262].

При этом перед началом данного урока «учащимся предлагается не позднее определенного времени разместить на форуме получившиеся, у них алгоритмы и хотя бы один пример исследования функции, выбранной' ими самостоятельно» [26, с. 262].

На этапе У5 «контроль по теме осуществляется путем проведения контрольной работы, которая состоит из трех частей. Часть 1. Тестовые задания с выбором ответа. Часть 2. Ответы на вопросы и/или решение задач, которые оцениваются учителем. Часть 3. Решение задач повышенной сложности, которые также оцениваются учителем» [26, с. 264].

Стоит отметить, что «с целью обеспечения наиболее релевантной оценки знаний, контрольную работу рекомендуется провести в формате реального времени, зафиксировав конкретные сроки ее проведения. Последовательность действий может быть такой. Учащимся предлагается в течение 10 минут ответить на вопросы/выполнить задания части 1. Затем сетевой учитель на форуме публикует задания части 2, на решение которых учащимся отводится 15 минут. После этого сетевой учитель на форуме публикует задания Части 3, на решение которых учащимся отводится 20 минут» [26, с. 264].

«На этапе У6. Коррекция» [26, с. 233] учитель вносит необходимые коррективы в учебный процесс, учитывая результаты предыдущего этапа. В зависимости от того, как учащиеся усвоили материал, он может дать индивидуальные рекомендации, чтобы улучшить понимание предмета и закрепить полученные знания.

«Заключительный цикл реализуется в, конце учебного года. Он состоит из четырех этапов.

− 31: Подготовка повторения учебного материала, изученного в течение

− учебного года.

− 32: Организация. повторения учебного материала, изученного в течение

− учебного года.

− 33: Проведение итоговой контрольной работы.

− 34: Подведение итогов учебного года» [26, с. 234].

Итак, «на первом этапе учитель создает план повторения, исходя из образовательных результатов учащихся» [26, с. 175]. На втором этапе происходит самостоятельное повторение учащимися пройденного материала, по плану и рекомендациям учителя. Итоговая контрольная проводится одновременно для всей группы в режиме реального времени. В конце учебного года подводятся итоги, которые включают в себя семинар на форуме и выставление оценок, которые могут быть сформированы автоматически или вручную учителем.

1.3 Проектирование системы уроков по алгебре и началам математического анализа

Отличительной чертой современного учителя является то, что он может организовывать учебный процесс так, чтобы разнообразить обучение и сделать его более и эффективным. Это возможно только при условии, что школьные уроки не просто следуют друг за другом, а являются взаимосвязанными, как нити в ткани, создавая единый и гармоничный учебный процесс. В настоящее время классно-урочная система обучения школе отличается большим разнообразием видов уроков:

«В сложившейся практике в системе уроков четко просматриваются:

− уроки-объяснения нового материала;

− уроки-семинары с углубленной проработкой учебного материала в процессе самостоятельной работы учащихся;

− уроки лабораторно-практических занятий (практикумы) или уроки решения задач, выполнения упражнений и т.д.;

− уроки-зачеты по теме;

− уроки защиты творческих заданий, подготовленных коллективно» [20, с. 325].

В системе уроков каждый урок должен быть как ступенька лестницы, ведущей к глубокому пониманию предмета. Урок-объяснение открывает новые знания, урок-семинар позволяет глубоко изучить тему, урок-практикум – применить знания на практике, а защита проекта – показать результаты творческой работы.

Важно, чтобы на каждом уроке уделялось внимание не только новым знаниям, необходимо, чтобы происходило повторение уже изученного материала.

«Специфической особенностью системы уроков является то, что на каждом уроке органически сочетается изучение нового, повторение в виде актуализации прежних опорных знаний, умений и навыков, формирование новых понятий и способов деятельности и контроль усвояемости учебного материала всей темы в целом в ходе его применения учащимися при постоянном решении ими на уроке практических и учебных задач» [20, с. 326].

Такой подход вызван тем, что «одно занятие в лучшем случае дает лишь поверхностное представление о содержании изучаемого раздела. Для усвоения его необходимо многократное повторение и осмысление во взаимосвязи с другими разделами» [20, с. 325].

Некоторые педагоги «взяли на вооружение идею П. М. Эрдниева об укрупнении учебных единиц. В единой серии уроков они организуют углубленную проработку учащимися таких тем. Например, Н.П. Гузик в состав учебной темы включает материал, на изучение которого программой отводится, как правило, пять-семь часов, и в течение каждого урока эта тема прорабатывается в целом, от занятия к занятию все более углубленно. Учащиеся вновь возвращаются к изучаемому материалу в процессе всей серии уроков. Но каждый раз это происходит по-новому, глубже, как бы охватывая этот материал с новых сторон. Каждый урок в этой системе

опирается на предыдущий и одновременно прокладывает путь следующему» [20, с. 325].

Л.С. Носова [17] предлагает технологию проектирования системы уроков, где инструментом технологии является компьютерная программа. «Это программа, манипулирующая специальными, экспертными знаниями в педагогике и методике преподавания, решающая педагогическую задачу проектирования урока, используя логику, правила, умеющая пополнять свои знания. Программа моделирует подготовку учителя, использует динамически расширяющуюся базу знаний, автоматизирует подбор рациональной стратегии выбора инструментов (типов уроков, методов, форм, средств, целей обучения и др.), автоматически учитывает новую информацию» [17, С. 217].

Автор данной технологии рассматривает следующие «этапы технологии проектирования системы уроков:

- целевой этап;
- содержательный этап;
- этап методической модели;
- процессуальный этап» [17, С. 217].

А также показывает, как можно проектировать эти этапы при помощи предложенной «компьютерной программы» [17, С. 217].

Обеспечить высокие образовательные результаты школьников может система обучения, которая учитывает образовательные особенности учащихся старшей школы. Построить такую систему может только учитель, умеющий конструировать систему предметного обучения, что подразумевает умение проектировать системы уроков. Следует сделать вывод что, успех учеников в обучения завит от насколько учитель может эффективно организовать свою деятельность и выстроить систему уроков по своему предмету.

1.4 Анализ школьных учебников с точки зрения исследуемой проблемы

Приступая к рассмотрению школьных учебников, отметим, что все они входят в «федеральный перечень учебников» [22, с. 1] утверждённых приказом «Минпросвещения России от 21 сентября 2022 года №858» [22].

Начнем с учебника «Алгебра: учеб. для 10-11 кл.» [8] под авторством А.Н. Колмогорова начинается с главы «Тригонометрические функции». На изучение темы отводится 15 часов. Первый параграф «Тригонометрические функции числового аргумента» начинается традиционно – с введения радианной меры угла.

Отметим, что использование радианной меры, а не градусной, имеет преимущества, но не сказано, в чем оно состоит. Не показана связь радианной меры с числом π. Далее идет отсылка к учебному курсу геометрии для определения понятий тригонометрических функций (рисунок 3).

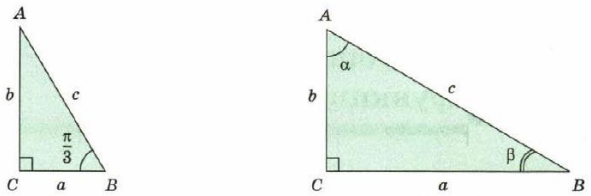


Рисунок 3 – Введение значений тригонометрических функций

«В прямоугольном треугольнике с углом в 30° противолежащий ему катет равен половине гипотенузы (рисунок 3). Пусть $c = 1$, тогда: $a = \frac{c}{2} = \frac{1}{2}, b = \sqrt{c^2 - a^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Поэтому: $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{a}{c} = \frac{1}{2}, \sin\frac{\pi}{3} = \frac{b}{c} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \frac{b}{a} = \sqrt{3}, \operatorname{ctg}\frac{\pi}{3} = \frac{a}{b} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Вообще значения основных тригонометрических функций острого угла α могут быть найдены так, как это делалось в курсе геометрии: $\cos\alpha = \frac{b}{c}, \sin = \frac{a}{c}, \operatorname{tg} = \frac{a}{b}, \operatorname{ctg} = \frac{b}{a}$» [8, с. 6].

Такое введение тригонометрических функций через знания из геометрии облегчает запоминание значений тригонометрических функции в 30 градусов, 45 градусов, 60 градусов, а также и понимание связи тригонометрии с геометрией.

Затем дается таблица значений синуса, косинуса, тангенса и котангенса от 0 до 2π с шагом в $\frac{1}{6}\pi$ в порядке возрастания. Создается впечатление, что этим все и ограничивается, а таблицу лучше запомнить. В то время как использование единичной окружность давало бы представление о бесконечном множестве значений. Также помогало бы запомнить эти значений значительно быстрее, для этого достаточно бы было предоставить значения тригонометрических функций аргументов первой четверти, далее приводятся формулы тригонометрии.

Говорится еще о двух тригонометрических функциях – секанс и косеканс. Секанс – это отношение гипотенузы к прилежащему катету, косеканс – это отношение гипотенузы к противолежащему катету в прямоугольном треугольнике.

Во втором параграфе особое внимание уделяется преобразованию графиков различных функций, в том числе тригонометрических. Изучаются свойства функций: четности/ нечетность, периодичность и промежутки возрастания и убывания, точки минимума и максимума. Говорится следующее: «линий синуса – ось OY, линии косинуса – ось – OX и линий тангенса и котангенса. Дается схема исследования функции для построения графика. Рассказывается о том, что графики тригонометрических функции – синусоида и косинусоида используются в физике для описания гармонических колебаний» [3, с. 78].

Эскиз синусоиды демонстрирует связь графика с единичной окружностью (рисунок 4).

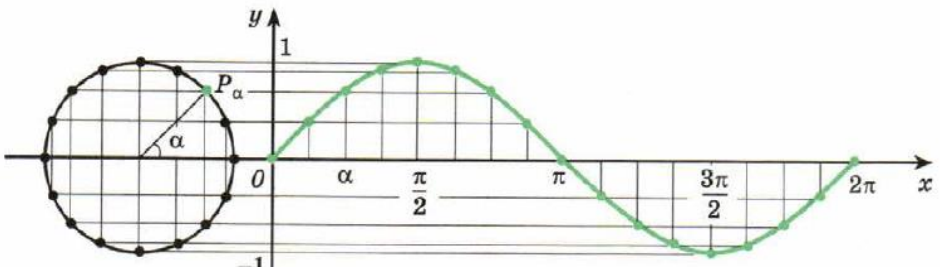


Рисунок 4 – Связь графика с единичной окружностью

В параграфе 3 при помощи графиков вводятся понятия: арксинус, арккосинус, арктангенс и арккотангенс числа, далее используется единичная окружность для выведения формул. Отмечается, что при записи для компактности имеет смысл объединять решения в серию (рисунок 5).

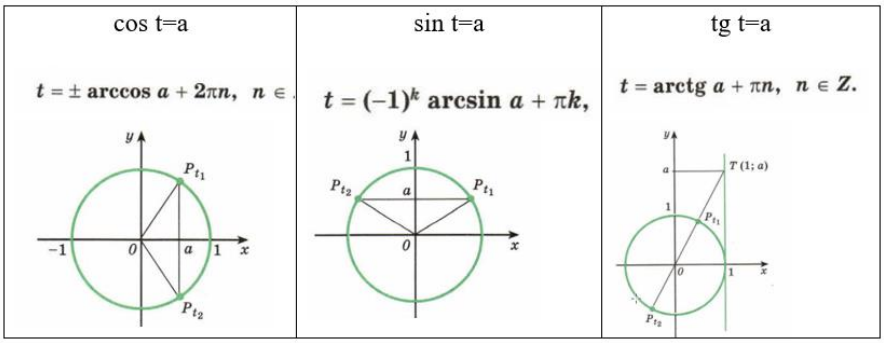


Рисунок 5 – Формулы для решения ПТУ

Однако, при отборе корней, принадлежащих некоторому отрезку, например при учете ОДЗ, имеет смысл каждый из корней писать отдельно. Здесь же даются решения уравнений с применением тригонометрического круга, что облегчает понимание темы учащимися. Однако, ограниченное количество времени, выделенное на изучение данного раздела программы, может стать причиной неполного усвоения материала.

Теме «Тригонометрия» в учебнике «Алгебра и начала математического анализа. 10 класс. В 2 частях: ч.1 учебник (базовый и углубленный уровни)» [14], а также «ч.2 задачник (базовый и углубленный уровни)» [14] отводится достаточное количество времени - 49 часов. Основным его отличием от других рассмотренных учебников является другая последовательность изложения материала: в третьей главе изложена тема «Тригонометрические

функции» [14, с. 349], затем в четвертой главе объясняется тема «Тригонометрические уравнения» [14, с. 350] и только потом – «Преобразование тригонометрических выражений» [14, с. 350].

Простейшие тригонометрические уравнения решаются при помощи единичной окружности. Методической находкой является использование 2-х частей учебника – учебника с теорией и примерами и задачника, содержащего большее количество примеров по сравнению с другими учебниками. При этом, к номерам в задачнике даётся отсылка на аналогичную тему в учебнике, в котором помимо основных формул имеется подробное объяснение аналогичного задания.

Такой подход позволяет десятиклассникам быстрее и качественнее осваивать материал – осознанно запоминать формулы – подкрепляя знания решением конкретных задач, в том числе ПТУ методом единичной окружности. В данном контексте рассматриваются уравнения, которые можно свести к квадратным, используя основное тригонометрическое тождество, однородные уравнения, уравнения, решаемые методом введения вспомогательного угла, а также уравнения, требующие специальных замен на основе формулы $t = \sin x + \cos x$.

В учебнике приводятся решения задач высокой сложности, требующих комбинированного использования двух или трех методов, в сочетании с другими функциями, а также задач с параметрами.

Разбирается тема поиска и отбора корней на числовой окружности.

Этот навык необходим для выполнения задания экспертной части ЕГЭ профильного уровня.

Стоит отметить, что в данном учебнике не разбираются уравнения с нахождением ОДЗ – области допустимых значений переменной (рисунок 6).

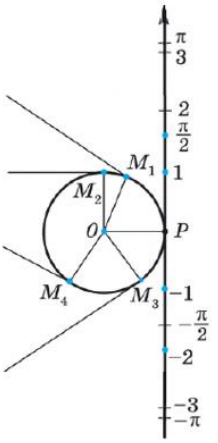


Рисунок 6 – Нерастяжимая нить и окружность

В учебнике «Математика: алгебра и начала математического анализа. 10 класс: учеб. для общеобразоват. организаций: базовый и углубл. уровни» [10] под авторством Ю.М. Колягина [10] глава восемь и глава девять посвящены тригонометрическим формулам и уравнениям, а тригонометрические функции изучаются в учебнике одиннадцатого класса. На изучение темы отводится 18 часов.

Начиная с восьмой главы изучается радианная мера угла, которая изображается как часть длины окружности. На рисунке 6 показано как прямая «в виде нерастяжимой нити закреплённой на окружности в точке Р» [10, с. 272], и имеющая разметку в радианах, как бы наматывается на эту окружность. Получается, что каждой точке прямой соответствует точка на единичной окружности. Такой наглядный способ способствует отождествлению тригонометрических функций с единичной окружностью. А именно, учащийся приходит к пониманию, что аргумент тригонометрической функции находится на окружности.

Также поворот точки на окружности на определенный угол вокруг начала координат на угол альфа, выраженный в радианах с масштабом π, по часовой или против часовой стрелки задает ее положение на окружности (рисунок 7).

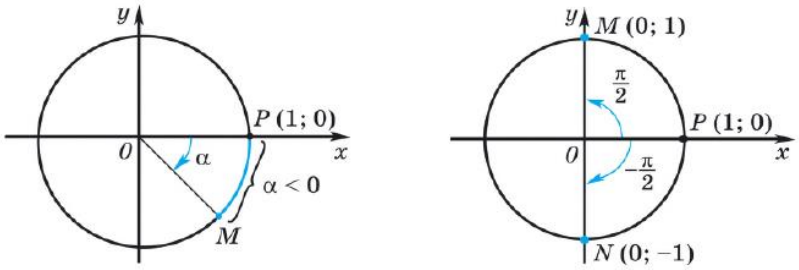


Рисунок 7 – Положение точки на единичной окружности

Отмечается, что одной и той же точке на окружности соответствует бесконечное множество действительных чисел, заданных при помощи цикла в $2\pi n$: $x = \alpha + 2\pi n$, где $n -$ целые числа. Значит, при совершении полных оборотов не меняется положение точки на окружности.

А так как значение синуса α соответствует ординате этой точки, а косинуса α – абсциссе, то и значения этих функций остаются без изменений. Так реализуется понимание периодичности тригонометрических функций: $\sin(\alpha + 2\pi n) = \sin\alpha$ и $\cos(\alpha + 2\pi n) = \cos\alpha$.

Чтобы найти значения тригонометрических функций – необходимо сделать проекции точки P (1;0), повернутой на угол α, на соответствующую ось (рисунок 8).

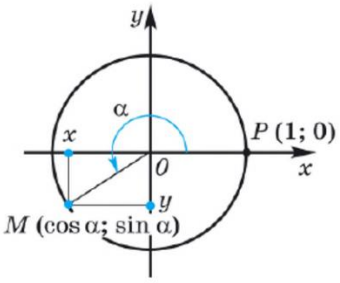
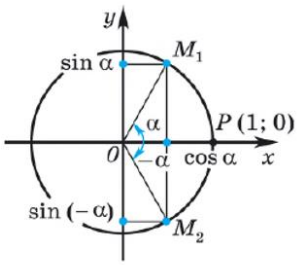
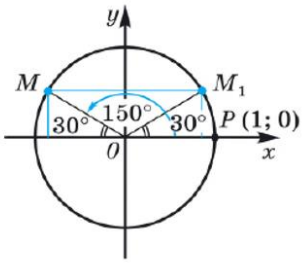


Рисунок 8 – Поворот точки на угол α

Затем «приводятся основные тождества – зависимости между синусом, косинусом и тангенсом одного и того же угла. На рисунке 6 показан вывод основного тригонометрического тождества при помощи окружности и теоремы Пифагора: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$» [10, с. 273].

На рисунке 9 демонстрируются доказательства формул чётности и нечётности и формулы приведения.





$\sin(-\alpha) = \sin\alpha$

$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$

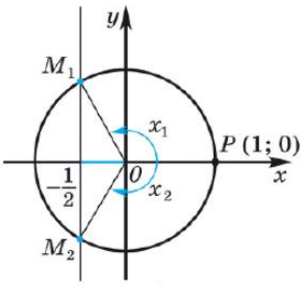
$\sin 150^\circ = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$

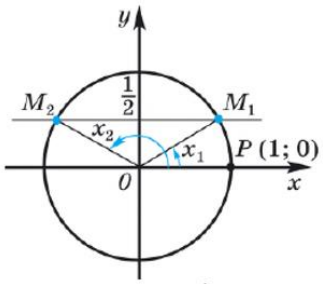
$\cos 150^\circ = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Рисунок 9 – Формулы чётности и нечётности и формулы приведения

Затем даются основные формулы тригонометрии. Особенностью этого учебника является то, что для доказательства тождеств и формул используется единичная окружность, что показывает удобство этого метода, его наглядность.

В девятой главе через знакомство с единичной окружностью учащихся подводят к решению простейших уравнений (ПТУ): вначале на частном примере (рисунок 10).





$\cos x = -\frac{1}{2}$

$\sin x = \frac{1}{2}$

Рисунок 10 – Решение тригонометрических уравнений

Кроме того, на единичной окружности показаны понятия обратных тригонометрических функций: арксинуса, арккосинуса, арктангенса,

необходимость использования которых возникает в случаях нетабличных значений.

Такая подача материала не отвлекает от поставленной задачи – решения ПТУ.

Затем иллюстрируется решение при помощи окружности и даются общие формулы корней (рисунок 11).

Решая уравнение $\sin x = a$ при $0 \leq a \leq 1$ получаем корни уравнения: $x_1 = \arcsin a + 2\pi n$, который показан на рисунке 11 и $x_2 = \pi - -\arcsin a + 2\pi n, n \in z$, эти корни могут быть объединены в серию:

$x = (-1)^k \arcsin a + \pi n, n \in z.$

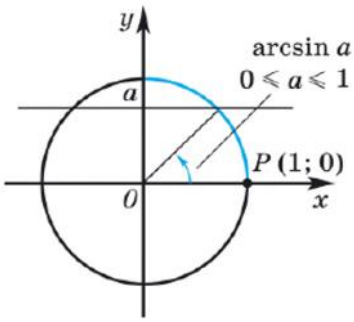


Рисунок 11 – Введение понятия $\arcsin a$ при $0 \leq a \leq 1$

Роль «мигающей единицы» сводится к получению корней, симметричных относительно оси OY, при различных значениях n.

При $-1 \leq a \leq 0$ решением уравнение $\sin x = a$ являются: $x_1 = -\arcsin a + 2\pi n$, который показан на рисунке 12 и $x_2 = -\pi + + \arcsin a + 2\pi n, n \in z$. Эти корни могут быть объединены в серию: $x = (-1)^{k+1} \arcsin a + \pi n, n \in z.$

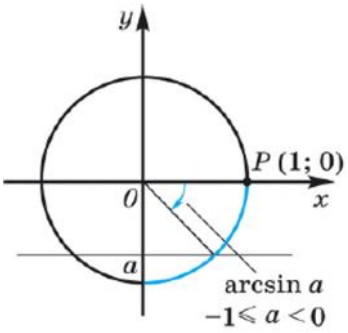


Рисунок 12 – Введение понятия arcsin a при $-1 \leq a \leq 0$

Решая простейшее тригонометрическое уравнение: $\cos x = a$ получаем корни $x_1 = \arccos a + 2\pi n, n \in z$, который показан на рисунке 13, и $x_2 = -\arccos a + 2\pi n, n \in z$.

Такой ответ обычно записывают как $x = \pm \arccos a + 2\pi n, n \in z$.

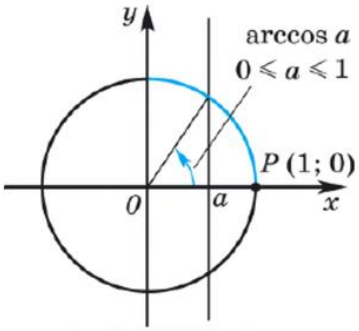


Рисунок 13 – Введение понятия arccos a при $0 \leq a \leq 1$

При $-1 \leq a \leq 0$ решением уравнения $\cos x = a$ являются: $x_1 = \pi - \arccos a + 2\pi n, n \in z$, который показан на рисунке 14 и $x_2 = -\pi + \arccos a + 2\pi n, n \in z$. Эти корни могут быть объединены в серию: $x = \pm(\pi - \arccos a) + 2\pi n, n \in z$ (рисунок14).

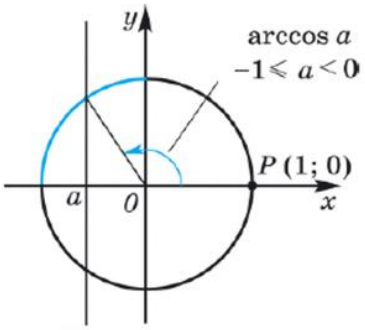


Рисунок 14 – Введение понятия $\arccos a$, при $-1 \leq a \leq 0$

Такое решение позволяет осознанно применять формулы для нахождения корней. Становится понятным запись ответа с периодом, использование арксинуса, арккосинуса, и появление множителя (-1) при решении уравнения $\sin x = a$.

Аналогично решение ПТУ $tgx = \alpha$ с использованием единичной окружности и оси тангенсов, как показано на рисунке 15. Корни данного уравнения: $x = arctg\, a + \pi n, n \in z$.

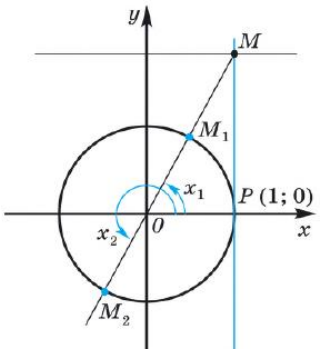


Рисунок 15 – Решение уравнения $tg\, x = a$

Четвертый параграф содержит описание методов, используемых для решения более сложных уравнений, которые требуют применения изученных ранее формул и преобразований. В частности, рассматриваются:

– метод замены переменной с последующим сведением к квадратному уравнению;

– «метод разложения выражения на множители алгебраическим путем, включая вынесение общего множителя и метод группировки;
– способ решения однородных уравнений первой и второй степеней;
– метод введения вспомогательного угла для упрощения уравнения;
– метод оценки левой и правой частей уравнения, основанный на использовании ограниченности значений тригонометрических функций» [10].

Для элективного курса рекомендован учебник «Математика: алгебра и начала математического анализа. 10 класс: учеб. для общеобразоват. организаций: базовый и углубл. уровни)» [10] Ю.М. Колягина так как, материал в данном учебнике изложен на достаточно понятном для учащихся 10 класса уровне. Достоинством его является использование единичной окружности для нахождения корней тригонометрического уравнения. Однако более сложным уравнениям не уделено времени: изложены только основные методы, нет темы появление посторонних корней, не рассмотрены решения уравнений, комбинированных с другими функциями, и не приводятся примеры с отбором корней на заданном отрезке.

Выводы по первой главе:

− в работе дано определение понятию дистанционное обучение, и определена его роль в современном образовании;
− выявлено, что основная цель дистанционного обучения − предоставить учащимся доступ к качественному образованию, независимо от их местоположения, индивидуальных особенностей и потребностей;
− подробно рассмотрен целый ряд задач, направленных на достижение основной цели дистанционного обучения;
− установлено, что эффективность реализации технологии дистанционного обучения зависит от технических возможностей

образовательной организации, качества разработанных материалов и компетентности учителя;

− замечено отсутствие достаточного количества методических разработок в виде систем уроков для организации дистанционного обучения по математике для старшеклассников;

− установлено, что в системе уроков каждый урок представляет собой сбалансированное сочетание: изучения нового, повторения ключевых понятий и умений, формирования новых компетенций и постоянной проверки усвоения материала через практическое применение знаний;

− проведён углублённый анализ научных исследований и публикаций, освещающих практический опыт применения дистанционных технологий в обучении математике старшеклассников;

− проанализированы учебники алгебры и начал математического анализа для 10-11 классов по теме «Тригонометрические уравнения» с учетом содержания теоретического и практического содержания.

Глава 2 Методические основы проектирования системы уроков по теме «Тригонометрические уравнения» с применением технологии дистанционного обучения

2.1 Методика обучения решению простейших тригонометрических уравнений

Данный параграф описывает методику решения простейших тригонометрических уравнения (ПТУ) вида $\sin x = a, \cos x = a, \operatorname{tg} x = a, \operatorname{ctg} x = a$.

Любое тригонометрическое уравнение в результате необходимых преобразований приводится к ПТУ.

В методике отдается предпочтение геометрической иллюстрации с помощью тригонометрической окружности, на которой изображаются соответствующие точки.

С помощью тригонометрического круга легко демонстрировать множества чисел, объединенных по определенным свойствам.

Для успешного овладения этой методикой необходимо уметь следующее:

− представлять длины дуги единичной окружности в виде радианной меры с использованием числа π. С учётом, что длина всей окружности равна 2π, половины окружности – π, четверти окружности – $\frac{\pi}{2}$ и т. д.;

− отыскать на числовой окружности выраженные в долях числа π точки, соответствующие заданным числам;

− определять числа, соответствующие данной точке на окружности, через её проекции на ось абсцисс, что будет соответствовать косинусу угла, и на ось ординат – синусу угла (рисунок 16).

Для понимания методики предлагаю следующие упражнения.

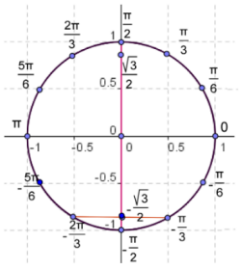


Рисунок 16 – Проекция точки на ось ординат

Взять точку M, лежащую на пересечении окружности и одной из сторон угла POM, найти ее координаты. Назвать меру угла поворота точки P (1;0) вокруг точки O (0;0) против часовой стрелки, в результате которого получена точка M. Если абсцисса точки M равна $\frac{1}{2}$, то угол поворота равен $\frac{\pi}{6}$. Аналогично для точки N, поворот которой сделан от точки O (0;0) по часовой стрелки, получаем абсциссу равную $\frac{1}{2}$, а угол поворота $-\frac{\pi}{6}$ (рисунок 17).

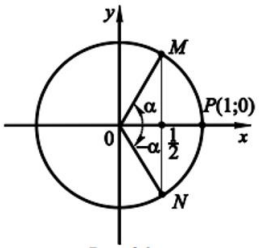


Рисунок 17 – Поворот точки

«Следовательно, аналогично можно сформулировать задачу, моделью которой станет уравнение cos x = a. Отсюда более прозрачным для учащихся становится определение арккосинуса числа. Ищется угол поворота, в результате которого получается точка единичной окружности с абсциссой a, следовательно, arccos a — угол (может быть выражен в радианах и градусах) из отрезка [0; π] (поэтому это число и обозначается обычно a), а не может быть больше 1, т.е. $a \in [-1; 1]$» [34, с. 85].

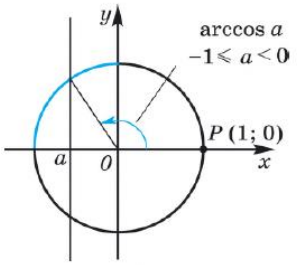


Рисунок 18 – Нахождение угла поворота точки

Абсциссу равную $\frac{1}{2}$ имеют две точки M и N (рисунок 18). Но решениями уравнения$\cos x = \frac{1}{2}$, является не только углы $\pm\frac{\pi}{3}$. Ведь обойдя окружность в заданном направлении целое число оборотов раз, из данной точки мы приходим в эту же точку. «Напомним, что $\cos x$— абсцисса точки единичной окружности, полученной поворотом точки P(1; 0) вокруг начала координат на угол x. Абсциссу, равную $\frac{1}{2}$, имеют две точки окружности M_1 и M_2. Так как $\frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$, то точка M_1 получается из точки P(1; 0) поворотом на угол $x_1 = \frac{\pi}{3}$, а также на углы $x_2 = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$, где $k = \pm1, \pm2, \ldots$. Точка M_2 получается из точки P(1; 0) поворотом на угол $x_2 = -\frac{\pi}{3}$, а также на углы $-\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, где $k = \pm1, \pm2, \ldots$. Итак, все корни уравнения $\cos x = \frac{1}{2}$ можно найти по формулам $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in Z$. Вместо двух формул обычно пользуются одной: $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z$» [10, С. 324]. Расположение точек M_1 и M_2 показано на рисунке 19.

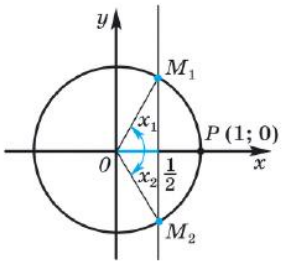


Рисунок 19 – Указаны две точки окружности M_1 и M_2

Решения ПТУ записываются с учетом периодичности тригонометрических функций. Особое внимание следует обращать на бесконечное множество решений тригонометрических уравнений, которое реализуется в формуле за счет добавления к исходной точке- периода при помощи цикла с n, где n −целое число. Для записи решений простейших уравнений используются общие формулы, которые основаны на том, что все решения, соответствуют единственной точке числовой окружности. При $|a| \leq 1$ и $n \in Z$ имеем такие решения:

$$\sin x = a, x = (-1)^k \arcsin\alpha + \pi k, K \in Z.$$

$$\cos x = a, x = \pm \arccos\alpha + 2\pi k, K \in Z.$$

$$tgx = a, x = arctg\, a + \pi n.$$

$$ctgx = a, x = arcctg\, a + \pi n.$$

В случае, если a принимает значения $0, 1, -1$, то такие решения называются частными случаями. Они представлены в таблице 1.

Таблица 1 − Частные случаи тригонометрических уравнений

$a = -1$ $\cos x = -1$ $x = \pi + 2\pi k, k \in Z$	$a = 0$ $\cos x = 0$ $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$	$a = 1$ $\cos x = 1$ $x = 2\pi k, k \in Z$
$a = -1$ $\sin x = -1$ $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$	$a = 0$ $\sin x = 0$ $x = \pi k, k \in Z$	$a = 1$ $\sin x = 1$ $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$

Решение простейших тригонометрических уравнений предполагает наличие у учащихся навыков работы с точками числовой окружности, связанных с формулами решений.

В основе решения простейших тригонометрических уравнений лежат знание и понимание формул решений ПТУ и способность отметить решения уравнений на тригонометрической окружности.

Учащийся, овладевший навыками решения тригонометрических уравнений, умеет применять алгебраические приемы, приводить к однородным, учитывать области допустимых значений (ОДЗ), знает как использовать различные тригонометрические преобразования, включая формулы приведения, формулы двойного угла, четности/нечётности функции, формулы понижения степени и половинного аргумента

Элективный курс «Тригонометрические уравнения», для которого разрабатывается система уроков в данной работе, будет проводиться дистанционно, предназначается для старшеклассников профильных математических классов. Основой данного элективного курса является технология дистанционного обучения В. И. Снегуровой [26]. Выбор данной технологии неслучайный, он позволяет сделать обучение наиболее результативным, позволяет выстроить деятельность сетевого учителя и учащихся наиболее эффективно для достижения учебных целей.

Необходимо особо выделить, что в рамках данной технологии «действия сетевого учителя и сетевых учащихся проектируются в соответствии со структурой деятельности по усвоению математического содержания в условиях информационно образовательной среды дистанционного обучения и на основе специфики дистанционного взаимодействия» [26, с. 235].

В.И. Снегурова «предлагает конструировать процесс обучения в виде последовательности завершенных технологических циклов» [26, с. 235]. Подробное описание каждого цикла обучение приведено в первой главе. Далее автор данной технологии, на подготовительном этапе учебного цикла, предлагает разработать для учащихся различные траектории «работы с материалами урока» [26, с. 235] и предоставить учащимся выбор наиболее подходящей для себя траектории.

В итоге предложенная автором «методическая система дистанционного обучения математике должна обеспечивать реализацию каждого из планируемых технологических циклов за счет: структурирования содержания;

разработки методов и средств обучения; выбора форм взаимодействия субъектов дистанционного обучения; разработки форм, методов и средств методического; сопровождения сетевого учителя математики» [26, с. 236].

Итак, проанализируем, как технология дистанционного обучения В.И. Снегуровой [26] может быть применена при обучении решению уравнений «которые после введения нового неизвестного $t = ax + b$ превращаются в простейшие тригонометрические уравнения с неизвестным t» [16, с. 301].

Для начала, обратим внимание на такие уравнения. «Решим уравнение $\sin 3x = 0$. Введем новое неизвестное $3x = t$, тогда уравнение превращается в простейшее тригонометрическое уравнение с неизвестным t: $\sin t = 0$. Уравнение имеет одну серию решений $t_n = \pi n, n \in Z$. Следовательно, множество всех решений уравнения находится из условия $3x_n = \pi n, n \in Z$. Откуда находим все решения уравнения: $x_n = \frac{\pi n}{3}, n \in Z$» [16, с. 301].

Решая простые уравнения такого типа замену неизвестного выражения на переменную, как правило, не фиксируют на бумаге, чтобы упростить и сократить запись решения. Записывают следующим образом: «решим уравнение $\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = -1$. Множество всех решений этого уравнения задается формулой $2x_n - \frac{\pi}{4} = \pi + 2\pi n, n \epsilon Z$, откуда находим серию решений уравнения: $x_n = \frac{5\pi}{8} + \pi n, n \epsilon Z$» [34, с. 301].

Необходимо иметь в виду, что нередко в заданиях требуется не только найти все решения тригонометрического уравнения, но и определить, какие из них принадлежат заданному числовому множеству. По мнению M. Bonato [38], D. Bresolin [39], F. Yua [44], M. Voskoglou [43] и A. Терро [42], общая проблема при выборе корней на заданных множествах кроется в недостаточном понимании учащимися понятия числового множества.

Одним из важнейших принципов технологии В.И. Снегуровой «является вариативность в освоении учебного материала. Предусматривается возможность формирования индивидуальных образовательных траекторий (маршрутов) освоения содержания предмета» [26, с. 9].

Приведем примеры заданий, на основе которых могут выстраиваться индивидуальные образовательные маршруты учащихся.

Решите уравнения, при необходимости используя формулу приведения или вводя новую переменную $t = ax + b$. В ответе укажите серию корней.

Пример 1.

а) $2\sin(-x) = 0$;

б) $2\sin x = \sqrt{2}$;

в) $3tgx = \sqrt{3}$;

г) $\sin\left(\frac{\pi}{2} + 3x\right) = 0$;

д) $\cos 2x = -1$;

е) $tg(2\pi - x) = 1$;

ж) $2\sin x + \sqrt{2} = 0$;

з) $2\cos\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$;

и) $tg\frac{x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Пример 2.

а) $\sin\frac{2x}{3} = 1$;

б) $\sin\left(\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{3}\right) + 1 = 0$;

в) $2\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$;

г) $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$;

д) $\sqrt{6}tg(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}) = \sqrt{2}$;

е) $\frac{cosx}{1-sinx} = 0$;

ж) $\sin\frac{x}{2}(\cos+1)=1;$

з) $\frac{2\sin x+1}{2\cos+\sqrt{3}}=0;$

и) $(\sin 2x-1)\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0.$

В рамках технологии В. И. Снегуровой [26] можно предложить учащимся несколько траекторий изучения материала, учитывающих различные уровни подготовки и познавательные потребности учащихся.

Первая траектория. Данная траектория спроектирована для достижения гарантированного базового уровня подготовки по математике. Она также создает благоприятные условия для развития математических навыков и умений на достаточно хорошем уровне. Учащиеся, следующие этому маршруту, работают с заданиями, помеченными литерами: а, б, в.

Вторая траектория. Данная траектория позволяет учащимся интенсивно осваивать ключевые знания и навыки, а затем применять их для решения сложных и нестандартных задач. Ученики, выбирающие этот путь, занимаются решением уравнений, обозначенных буквами: г, д, е.

Третья траектория. Этот маршрут содержит задания, требующие не только уверенного владения математическими знаниями, но и навыками нестандартного мышления, находчивости и изобретательности. Учащиеся, которые выбирают этот путь, решают уравнения, помеченные буквами: ж, з, и.

2.2 Система уроков по теме «Тригонометрические уравнения» для обучающихся 10-11 классов с применением технологии дистанционного обучения

В данном параграфе рассмотрим методические особенности конструирования системы уроков с применением технологии дистанционного обучения В. И. Снегуровой [26] на примере элективного курса «Тригонометрические уравнения» для учащихся 10-11 классов.

Система уроков, выстроенная в соответствии с технологией В. И. Снегуровой [26], представляет собой взаимосвязанную структуру дистанционных уроков, направленных на создание эффективной учебной среды, обеспечивающей глубокое усвоение материала, развитие самостоятельности и активное вовлечение учеников в учебный процесс.

Данная система уроков характеризуется целостностью, логической взаимосвязью элементов и методическим единством, адаптированных под особенности дистанционного обучения.

В рамках этой системы, каждый урок неразрывно связан с предыдущим и последующим.

При конструировании системы уроков особое внимание уделяется выстраиванию образовательного процесса с учетом индивидуальных образовательных потребностей обучающихся посредством предоставления учащимся различных образовательных траекторий.

В отличие от простого перечня или совокупности уроков, система, основанная на технологии В. И. Снегуровой [26], обладает целенаправленностью, логической взаимосвязью элементов и методическим единством, адаптированными под особенности дистанционного обучения.

Этап П1. Определение общих целей обучения.

На данном этапе подготовительного цикла учитель разрабатывает план работы, охватывающий как собственную деятельность, так и деятельность учеников, составляет ориентировочное тематическое расписание с учетом трудности материала и объема заданий, а также изучает ресурсы, с которыми предстоит работать.

Предварительное планирование подразумевает, что система уроков будет выстраиваться в рамках этапов учебного цикла, а заключительные занятия будут в рамках заключительного.

Кроме того, на данном этапе учитель должен познакомится с ресурсами, с которыми ему предстоит работать.

Для начала необходимо зарегистрироваться в сервисе Яндекс Телемост [36], для этого достаточно зарегистрировать почту.

После чего будет доступен аккаунт участника встречи (рисунок 20).

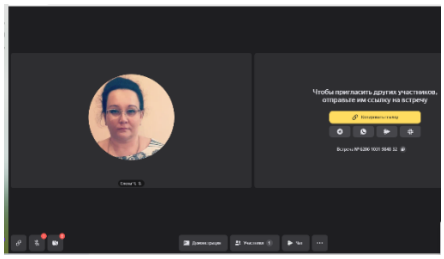


Рисунок 20 − Аккаунт участника видеовстречи

В нашем случае учитель является создателем видеовстречи. «Создатель видеовстречи автоматически становится ее организатором и может выключать микрофоны участников, их видео и демонстрацию экрана, а также запрещать вести запись встречи. Например, если на лекции кто-то из слушателей забыл выключить микрофон, организатор сможет отключить микрофоны для всех. А если встреча большая и одному человеку трудно управлять участниками, организатор может назначить еще нескольких соорганизаторов себе в помощь» [36]. Безусловно учитель должен уметь управлять уроком-видеовстречей, для этого необходимо изучить инструкцию, предложенную авторами ресурса.

Платформа «Сферум» [28] будет использоваться учащимися для общения между собой, а также для общения между учащимися и учителем. Это «это закрытое и безопасное пространство для учёбы и общения педагогов, учеников и их родителей» [28]. Непосредственная коммуникация между участниками образовательного процесса происходит в чате. На данном этапе учитель должен ознакомиться с функционалом платформы, для дальнейшего использования.

Этап П2: Знакомство и первичная диагностика. Элективный курс по теме «Тригонометрические уравнения» предназначен специально для учащихся 10-11 классов, которые выбрали углубленный уровень изучения

математики, они ориентированы на обучение математике на профильном уровне.

«Этап ПЗ. Разработка плана реализации дистанционного обучения математике. Данный этап предполагает уточнение образовательных целей обучения, а также определение групповых и индивидуальных целей обучения, на основании образовательных предпочтений учащихся» [26, с. 287].

На данном этапе было составлено тематическое планирование элективного курса, которое представлено в параграфе 2.3.

Далее представлена система уроков по теме «Тригонометрические уравнения» для обучающихся 10-11 классов общеобразовательной школы сконструированная с применением технологии дистанционного обучения В. И. Снегуровой.

Система уроков будет представлять собой целостную структуру, в которой каждый урок выстроен в соответствии с этапами учебного цикла и заключительного цикла, обеспечивая формирование прочных знаний и устойчивых навыков.

Урок этапа «У1. Подготовительный».

Как было сказано ранее, в рамках технологии В. И. Снегуровой [26], на подготовительном этапе учебного цикла, предлагается разработать для учащихся различные маршруты «работы с материалами урока» [26, с. 235] и предоставить им выбор наиболее подходящей для себя траектории.

В начале обучения перед учащимися стоит выбор, заключающийся в определении собственного образовательного маршрута.

Помочь в правильном выборе образовательного маршрута призван контрольная работа, представленная на данном этапе урока, которая направлена на определение оптимального пути обучения. Рассмотрим задания, которые будут предложены для решения в рамках данной контрольной работы.

Пример 3. Найдите корень уравнения: $\cos\frac{2\pi x}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. В ответе запишите наибольший отрицательный корень.

Пример 4. Решите уравнение $\cos 2x+0{,}5=\cos^2 x$.

Пример 5. Решите уравнение $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+2x\right)=\cos x$.

Пример 6. Решите уравнение $\sin 2x-2\sqrt{3}\cos^2 x-4\sin x+4\sqrt{3}\cos x=0$.

Пример 7. Решите уравнение $\sin 2x-2\cos^2 x+\cos 2x=0$.

Пример 8. Решите уравнение $\frac{2\sin^2 x-\sin x}{2\cos-\sqrt{3}}=0$.

В соответствии с результатами выполнения контрольной работы учащиеся смогут выбрать наиболее подходящую для себя образовательную траекторию из нескольких предложенных.

Траектория первая. Рекомендована учащимся, которые предоставили правильные ответы на 50 % заданий контрольной работы. Обеспечивает освоение учащимися обязательного стандарта математического образования и формирует оптимальную среду для более глубокого понимания решения тригонометрических уравнений.

Траектория вторая. Рекомендована учащимся, которые предоставили правильные ответы на 70 % заданий контрольной работы. Следуя по данной траектории, учащиеся получают возможность достаточно глубоко овладевать основными знаниями и умениями в области тригонометрии и научиться решать тригонометрические уравнения.

Траектория третья. Рекомендована учащимся с 85 % успешностью выполнения заданий. Следуя по данной траектории, они обучаются глубокому пониманию взаимосвязи методов и формул, умению комбинировать различные подходы и находить нестандартные пути решения. Далее рассмотрим задания, которые могут предложены после выполнения первичной контрольной работы.

Применений различный алгебраический преобразований при решении тригонометрических уравнений.

Пример 9. Решите уравнения.

а) $2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0;$

б) $2\cos^3 x - \cos^2 x + 2\cos x - 1 = 0;$

в) $\mathrm{tg}^2 x + 5\mathrm{tg}x + 6 = 0;$

г) $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + 2x\right) = \cos x;$

д) $2\sin 2x + 2\sqrt{3}\sin x = 2\cos x + \sqrt{3};$

е) $\cos 2x + \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + 1 = 0;$

ж) $2\cos x - \sqrt{3}\sin^2 x = 2\cos^3 x;$

з) $\frac{3}{\sin^2(\frac{5\pi}{2} - x)} - \frac{8}{\cos x} + 4 = 0;$

и) $2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \cos 2x = \sqrt{3}\cos x + 1;$

к) $\sin 3x + \sin 4x + \sin 5x = 0.$

Решение (рисунок 21):

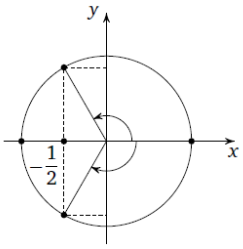


Рисунок 21 – Решение уравнения к примеру 9(к)

$\sin 3x + \sin 4x + \sin 5x = 0;$

$2\sin\dfrac{3x + 5x}{2} \times \cos\dfrac{3x - 5x}{2} + \sin 4x = 0;$

$2\sin 4x \times \cos x + \sin 4x = 0;$

$\sin 4x(2\cos x + 1) = 0;$

$$\left[\begin{array}{l} \sin 4x = 0; \\ \cos x = -\dfrac{1}{2} \text{ (рисунок 21).} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} 4x = \pi n, \quad n \in Z, \\ x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z. \end{array}\right.$$

Ответ: $x = \frac{\pi n}{4};\ x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z.$

Траектория первая.

Учащиеся, придерживающиеся данной траектории, решают следующие задания из общего перечня.

Для нахождения корней данных тригонометрических уравнений необходимо выполнить разложение на множители различными способами: г, д, е.

Траектория вторая.

Выбрав данную траекторию, учащиеся приступают к работе над представленными ниже заданиями.

Уравнения для решения которых используются алгебраические методы (вынесение общего множителя, группировка, уравнения, сводимые к квадратным), но усложнённое необходимостью применять формулы приведения, двойного угла: г, д, е.

Траектория третья.

Учащиеся, следующие этой траектории обучения, выполняют задания, перечисленные ниже.

Использование алгебраических методов при решении тригонометрических уравнений более высокого уровня предполагает наличие в уравнениях третьей степени тригонометрических функций, для решения которых требуется навык группировки одночленов и знание формул сложения и формул перехода от суммы к произведению: ж, з, и, к.

Урок этапа «У2. Мотивация учащихся».

На уроке данного этапа учащимся могут быть предложены отдельные задания и вопросы, для выполнения которых необходимо обсудить ход их решения вместе с учителем во время урока.

Пример 10. Решите уравнения.

а) $\frac{2\sin^2 x - \sin x}{\cos - 1} = 0;$

б) $\frac{2\sin^2 x - \sin x}{2\cos - \sqrt{3}} = 0;$

в) $\frac{2\sin^2 x-\sin x}{\operatorname{tg} x}=0$;

г) $\frac{2\sin^2 x-\sin x}{\operatorname{ctg} x}=0$;

д) $\frac{2\sin^2 x-\sin x}{\sqrt{3}\operatorname{ctg} x+1}=0$;

е) $\frac{2\sin^2 x-\sin x}{\sqrt{3}-\operatorname{ctg} x}=0$.

Учащимся следующим по первой траектории могут быть предложены следующие задания: а, б. Для учащихся, придерживающихся второй траектории, предлагаются задания: в, г. И для учащихся, придерживающихся третьей траектории: д, е. Такая активность позволит ученикам почувствовать себя участниками единого процесса познания, а не пассивными слушателями.

В качестве домашней работы можно использовать представленные ниже задания.

Пример 11.

а) $\frac{2\sin^2 x-\sin x}{\sqrt{\sin x}}=0$;

б) $\frac{2\sin^2 x-\sin x}{\sqrt{\operatorname{tg} x}}=0$;

в) $\frac{2\cos^2 x-\cos x}{\sqrt{1-2\sin x}}=0$.

Задание под литерой «а» предназначается для учащихся, выбравших первую траекторию, задание «б» для учащихся, придерживающихся второй траектории и задание «в» для учащихся следующих по третьей траектории.

Следует предложить учащимся обсудить способы решения данных заданий в чате «Сферум» [28] и выделить те действия, которые они не могут произвести, из-за недостатка знаний. Таким образом, учащиеся сами определят приоритетные направления развития и приобретут мотивацию к обучению.

Урок этапа «УЗ. Самостоятельная деятельность учащихся».

Учитель может дать задания для самостоятельной работы непосредственно на дистанционном занятии, проверка выполнения таких

заданий может осуществляться несколькими путями: первый-учащиеся присылают решения на почту, второй- учащиеся по желанию включают демонстрацию экрана, на котором продемонстрировано решение задания.

Домашнее задание учащиеся выполняют самостоятельно в указанные сроки и отправляют скан с решениями на почту учителю для проверки.

В качестве заданий на уроке данного этапа учащимся можно предложить решить уравнения, приведенные ниже.

Решение простейших тригонометрических уравнений.

Пример 12. Решите уравнения.

а) $2\sin(-x) = 0;$

б) $2\sin x = \sqrt{2};$

в) $3tgx = \sqrt{3};$

г) $\sin\left(\frac{\pi}{2} + 3x\right) = 0;$

д) $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + 2x\right) = -1;$

е)$tg(2\pi - x) = 1$

ж) $\cos\frac{\pi(x-7)}{3} = \frac{1}{2};$

з)$tg\frac{\pi x}{4} = -1;$

и) $\sin\frac{\pi x}{3} = 0{,}5.$

Однородные тригонометрические уравнения и уравнения, сводимые к однородным тригонометрическим уравнениям.

Пример 13. Решите уравнения.

а) $\sqrt{3}\sin 2x + 3\cos 2x = 0;$

б) $2\cos^2 x + 2\sin 2x = 3;$

в) $\sin 2x + 2\cos^2 x + \cos 2x = 0.$

Решение. Сведем уравнение к однородному тригонометрическому уравнению второй степени.

$2\sin x\cos x + 2\cos^2 x + \cos^2 x - \sin^2 x = 0;$

$\sin^2 x - 2\sin x\cos x - 3\cos^2 x = 0;$

$$tg^2x - 2tgx - 3 = 0;$$

$$\left[\begin{array}{l} tgx = -1; \\ tgx = 3. \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, \qquad n \in Z, \\ x = arctg3 + \pi k, k \in Z. \end{array}\right.$$

Ответ: $-\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z;\ arctg3 + \pi k, k \in Z.$

г) $\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \cos x + \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\sin x.$

Траектория первая.

Пример 12. Простейшие тригонометрические уравнения: а, б, в.

Пример 13. Однородное уравнение первой: а.

Траектория вторая.

Пример 12. Тригонометрические уравнения, сводимые к ПТУ: г, д, е.

Пример 13. Однородные уравнения второй степени степени, для решения которых нужно знание формул двойного угла: б, в.

Траектория третья.

Пример 12. Уравнения со сложным аргументом, сводимые к простейшим тригонометрическим уравнениям: ж, з, и.

Пример 13. Неоднородное тригонометрическое уравнение, сводимое к однородному, решениие которого требует навыка использования формул сложения и формулы двойного угла: г.

Урок этапа «У4. Взаимодействие».

Взаимодействие участников образовательного процесса происходит при помощи ресурса Яндекс Телемост [36]. Урок данного этапа необходимо начать с вопросов, подразумевающих краткий выбор ответа.

Задание 11. Продолжить выражение $2\sin x \cos x = \ldots$ а) $\cos 2x$; б) $\sin 2x$; в) $tg2x$; г) нет ни одного верного.

Задание 12. Определите множество значений функции $y = \sin x, y = \cos x$ является отрезок: а) $[-1; 1)$; б) $(-1; 1]$; в) $(-1: 0)$; г) $[-1: 0]$.

Ответы в виде одной латинской буквы учащиеся размещают в чате. Если кто-то из учащихся напишет в чат неверную букву, то учитель должен объяснить в чем заключается ошибка и озвучить правильный ответ. Все переписки в чатах и запись видео сохраняются, и будут доступны учащимся для просмотра. После выполнения заданий данного типа следует переходить к основным материалам урока.

Предоставить объяснения материалов урока получится предоставить учащимся достаточно наглядно и подробно, для этого учителю необходимо включить демонстрацию экрана войти в любой графический редактор типа на своем компьютере и начать записывать условие задания и решение при помощи мыши или графического планшета. Кроме того, учащиеся будут слышать объяснения учителя, звук будет передаваться учащимся через динамики или наушники, при этом учитель должен включить микрофон на своем компьютере.

Выбранные ресурсы для проведения элективного курса позволяют демонстрировать экран не только учителю, но и учащимся. Вследствие чего учащиеся могут показывать свои решения прямо на уроке для обсуждения с преподавателем. Обсуждение может проводиться посредством микрофона, каждый учащийся может подключить микрофон и обсудить голосом возникшие вопросы.

Организовать эффективное учебное сотрудничество во внеурочное время можно посредством платформы «Сферум» [28], для этого учителю необходимо создать тематический чат (рисунок 22) на данной платформе и пригласить всех участников элективного курса.

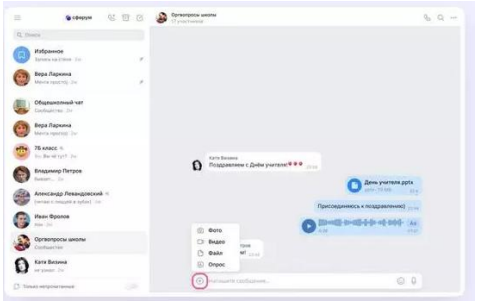


Рисунок 22 – Чат в Сферум

Чат на платформе «Сферум» [28] является эффективным инструментом для организации общения между участниками образовательного процесса. Чат может служить платформой для обсуждения текущих тем урока, разбора задач, обмена мнениями и идеями. Так же, при помощи данного инструмента учитель может быстро информировать учеников о домашних заданиях, изменениях в расписании, сроках сдачи работ и других важных новостях.

Кроме того, в чатах платформы «Сферум» [28] можно создавать группы, при помощи которых учащиеся могут объединяться для совместной работы над проектами, обмениваться информацией, идеями и материалами.

На данном уроке можно предложить задания, где, помимо поиска корней уравнения, необходимо определить соответствуют ли найденные решения области определения и наложенным ограничениям.

Задание 14. Решите уравнения.

а) $(\cos x - 1)\left(\operatorname{tg} x + \sqrt{3}\right)\sqrt{\cos x} = 0;$

б) $\frac{(\sin x - 1)(2\cos x + 1)}{\sqrt{\operatorname{tg} x}} = 0;$

в) $\frac{2}{\operatorname{tg}^2 x} + \frac{7}{\operatorname{tg} x} + 5 = 0;$

г) $1 + \operatorname{ctg} 2x = \frac{1}{\cos\left(\frac{3\pi}{2} - 2x\right)};$

д) $\frac{\sin x}{\sin^2 \frac{x}{2}} = 4\cos^2 \frac{x}{2};$

е) $(6\sin^2 x + 5\sin x - 4)\sqrt{-7\cos} = 0;$

ж) $\frac{2\sin^2 x - \sin x}{\log_7(\cos x)} = 0;$

з) $\left(\sqrt{3}\sin x - 2\sin^2 x\right)\log_6(-\operatorname{tg} x) = 0.$

Задания распределяются следующим образом. Траектория первая: а, б, в. Траектория вторая: г, д. Траектория третья: е, ж, з.

Урок этапа «У5. Контроль и диагностика» [26, с. 232]

Как отмечает В. И. Снегурова «На этом этапе осуществляется контроль уровня знаний и умений, который должен быть сформированы при изучении материалов» [26, с. 263] элективного курса.

На уроке данного этапа учащимся предлагается самостоятельно выполнить вариант контрольной работы и отправить решения учителю до указанного времени. Варианты контрольных работ соответствуют выбранных учащимися траекторий, а именно: первая траектория-вариант 1, вторая траектория-вариант 2, третья траектория – вариант 3.

Вариант 1.

Пример 15. «Решите уравнение: $\sin\frac{\pi x}{3} = 0{,}5$ » [24].

Пример 16. «Решите уравнение: $\cos 2x = 1 - \left(\frac{\pi}{2} - x\right)$» [24].

Пример 17. «Решите уравнение: $\sin 2x + \sqrt{2}\sin x = 2\cos x + \sqrt{2}$ » [24].

Пример 18. «Решите уравнение: $\cos 2x + \sin^2 x = 0{,}75$ » [24].

Пример 19. «Решите уравнение: $\sqrt{3}\sin 2x + 3\cos 2x = 0$» [24].

Пример 20. «Решите уравнение: $\frac{2\sin^2 x - \sin x}{2\cos x - \sqrt{3}} = 0$ » [24].

Вариант 2.

Пример 21. «Решите уравнение: $\mathrm{tg}\frac{\pi x}{4} = -1$» [24].

Пример 22. «Решите уравнение: $\sqrt{2}\sin^3 x - \sqrt{2}\sin x + \cos^2 x = 0$» [24].

Пример 23. «Решите уравнение: $2\sin^2 x - \sin 2x + \sin x = \cos x$» [24].

Пример 24. «Решите уравнение: $4\cos^4 x - 4\cos^2 x + 1 = 0$» [24].

Пример 25. «Решите уравнение: $2\sqrt{3}\cos^2\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) - \sin 2x = 0$» [24].

Пример 26. «Решите уравнение: $\frac{\cos 2x - \sqrt{3}\sin x - 1}{\mathrm{tg}x - \sqrt{3}} = 0$ » [24].

Вариант 3.

Пример 27. «Решите уравнение: $\cos\frac{\pi(2x+9)}{3} = \frac{1}{2}$» [24].

Пример 28. «Решите уравнение: $2\sin^2 x + \sqrt{2}(x + \frac{\pi}{4}) = \cos x$» [24].

Пример 29. «Решите уравнение: $2\cos^2 x + \cos^2 x = 2\cos^3 x$.

Найдите все корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2};\ -2\pi\right]$» [24].

Пример 30. «Решите уравнение: $\frac{4}{\sin^2(\frac{7\pi}{2}-x)}-\frac{11}{\cos x}+6=0$» [24].

Пример 31. «Решите уравнение: $\frac{13\sin^2 x-5\sin x}{13\cos x+12}=0$» [24].

Урок этапа «У6. Коррекция».

Урок данного этапа подразумевает детальный разбор предоставленных учащимися ответов на здания контрольной работы. В рамках этого урока проводится углубленный анализ причин ошибок и затруднений, выявленных в ходе контрольной работы этапа «У5. Контроль и диагностика», а также работа над их устранением.

Рассмотрим заключительный цикл, состоящий из четырех этапов. Учитель дистанционного обучения, как настоящий проводник, должен помочь учащимся эффективно повторить пройденный материал. На первом этапе он создает план повторения, учитывая успеваемость каждого ученика. На втором этапе ученики самостоятельно повторяют материал по плану и рекомендациям учителя. Такой двухэтапный подход позволяет ученикам сосредоточиться на самых важных аспектах, устранить пробелы в знаниях и делает повторение более целенаправленным и эффективным.

На третьем этапе, «одновременно для всей группы в режиме реального времени, проводится итоговая контрольная проводится» [26, С. 293]. Задания данной контрольной работы представлены в параграфе «2.4 Педагогический эксперимент и его результаты».

«На четвертом этапе цикла, в завершении курса, после проведения контрольной работы» [26, С. 295], учитель организует семинар в «Яндекс Телемост» [36], чтобы обсудить прошедшую контрольную работу и возникшие по ней трудности у обучающихся в процессе решения.

2.3 Элективный курс «Тригонометрические уравнения» для учащихся 10-11 классов

Предлагаемый элективный курс «Тригонометрические уравнения» целенаправленно разрабатывается для учащихся 10-11 классов, выбравших профильное обучение.

На данном этапе, в соответствии с технологией В. И. Снегуровой [26], определим общие цели обучения на элективном курсе:

- углубленное изучение теории тригонометрических уравнений;
- развитие навыков анализа и синтеза: умение анализировать условие задачи, выбирать оптимальный метод решения и проверять полученные результаты;
- обучение решению нестандартных задач, требующих глубокого понимания темы;
- развитие математической культуры: формирование навыков четкого и логичного изложения своих мыслей, аргументированного обоснования решений.

Продолжительность элективного курса 17 академических часов.

Освоение содержания элективного курса будет идти в следующем порядке:

- первичный анализ знаний учащихся с целью определения траектории обучения;
- формирование умений решать типовые уравнения и более сложные тригонометрические уравнения;
- проверка достижения образовательных результатов.

Анализ знаний учащихся будет проводиться в начале обучения на элективном курсе в форме контрольной работы, задания данной контрольной работы представлены на первом этапе учебного цикла.

Формирование умений решать типовые уравнения и более сложные тригонометрические уравнения будет происходить по мере изучения

материалов элективного курса. Занятия будут проводиться в режиме онлайн с использованием заданий, взятых из открытого банка заданий ФИПИ [33].

Образовательные цели и результаты будут зависеть от выбранной траектории обучения, на первом этапе учебного цикла.

Итоговая проверка знаний и умений, сформированных в результате прохождения элективного курса, будет осуществляться посредством итоговой контрольной работы. Кроме того, в рамках курса будет организовано выполнение текущих контрольных и самостоятельных работ.

Приведем календарно-тематическое планирование по данному элективному курсу (таблица 2).

Таблица 2 − Календарно−тематическое планирование

Номер урока	Тема урока	Количество часов
«Этап У1: Подготовительный» [26, с. 227]		
1	Уравнения, для решения которых используются тригонометрические формулы и алгебраические методы решения.	1
«Этап У2: Мотивация учащихся» [26, с. 227]		
2-3	Учет области допустимых значений переменной при решении тригонометрических уравнений.	2
«Этап У3: Самостоятельная деятельность учащихся» [26, с. 227]		
4	Уравнения, для решения которых используются формулы двойного угла и метод замены переменной.	1
«Этап У4: Взаимодействие» [26, с. 227]		
5-6	Способы отбора корней.	2
7-8	Формулы косинуса и синуса суммы и разности аргумента. Метод вспомогательного угла.	2
9-10	Комбинированные тригонометрические уравнения с показательной функцией.	2
11-12	Комбинированные тригонометрические уравнения с логарифмической функцией.	2
13-15	Тригонометрические уравнения с параметром.	3
Этап У4: Контроль; диагностика		
16	Итоговая контрольная работа.	1
Этап У4: Коррекция		
17	Семинар по итогам итоговой контрольной работы.	1

Рассмотрим содержание данного курса «Тригонометрические уравнения».

Этап У1: Подготовительный

Уравнения, для решения которых используются тригонометрические формулы и алгебраические методы решения (1 ч.).

Цель прохождения данного раздела – повторение формул приведения, формул синуса и косинуса двойного угла, а также алгебраических методов.

В результате прохождения данного раздела учащиеся достигнут уверенного уровня владения формулами приведения и формулами двойного угла при решении тригонометрических уравнений.

Пример 1.

Решите уравнение $7\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+4\sqrt{3}\sin x\cos x=4\cos^3 x$.

Решение:

По формуле приведения $\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos x$. Далее вынесем общий множитель за скобки, воспользуемся основным тригонометрическим тождеством, заметим полный квадрат:

«$7\cos x+4\sqrt{3}\sin x\cos x=4\cos^3 x$;

$\cos x\left(7+4\sqrt{3}\sin x-4\cos^2 x\right)=0$;

$$\left[\begin{array}{l}\cos x=0\\(2\sin x+\sqrt{3})^2=0\end{array}\right.;$$

$$\left[\begin{array}{l}\cos x=0,\\\left(2\sin x+\sqrt{3}\right)^2=0\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\cos x=0,\\\sin x=-\frac{\sqrt{3}}{2}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\\x=-\frac{\pi}{3}+2\pi k, k\in Z.\\x=-\frac{2\pi}{3}+2\pi k,\end{array}\right.$$

Ответ: $\frac{\pi}{2}+\pi k,-\frac{\pi}{3}+2\pi k,-\frac{2\pi}{3}+2\pi k, k\in Z$» [24].

Пример 2.

Решите уравнение $2\sin^2 x + \sqrt{2}\sin(2\pi - x) + \sqrt{3}\sin 2x = \sqrt{6}\cos x$.

Решение:

Последовательно получаем:

$2\sin^2 x + \sqrt{2}\sin(2\pi - x) + \sqrt{3}\sin 2x = \sqrt{6}\cos x;$

$2\sin^2 x + \sqrt{2}\sin x + 2\sqrt{3}\sin x\cos x - \sqrt{6}\cos x = 0;$

$2\sin^2 x + \sqrt{2}\sin x + 2\sqrt{3}\sin x\cos x - \sqrt{6}\cos x = 0;$

$\sin x\left(2\sin x - \sqrt{2}\right) + \sqrt{3}\cos x(2\sin x - \sqrt{2}) = 0;$

$\left(2\sin x - \sqrt{2}\right)(\sin x + \sqrt{3}\cos x) = 0;$

$$\left[\begin{array}{l} \sin x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}; \\ \operatorname{tg} x = -\sqrt{3} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + 2\pi k, \\ x = \dfrac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in Z. \\ x = -\dfrac{\pi}{3} + \pi k, \end{array}\right.$$

Ответ: $\frac{\pi}{4} + 2\pi k; \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, -\frac{\pi}{3} + \pi k: k \in Z.$

Этап У2: Мотивация учащихся.

Учет области определения и области значения тригонометрической функции при решении уравнения (2 ч.).

Основная цель прохождения раздела обеспечить понимание важности учета области определения и области значений тригонометрических функций. А также научить учащихся определять ОДЗ и ОЗ основных тригонометрических функций и применять эти знания при решении уравнений.

В результате прохождения данного раздела у учащихся сформируются следующие навыки:

− умение выявлять и исключать посторонние корни, не удовлетворяющие ОДЗ;

− навык грамотного оформления решения тригонометрического уравнения с учетом ОДЗ;

− навык анализа полученных данных и проверка их на соответствие заданным условиям.

В данном разделе рассматриваются задания, где в процессе решения необходимо заменить выражение на тождественно равное ему, в этом случае необходимо определить корни, которые не войдут в ответ.

Рассмотрим ниже пример, в котором имеется в числителе произведение множителей, а в знаменателе - тригонометрическая функция под знаком арифметического корня.

Пример 3.

Решите уравнение: $\frac{(\sin x-1)(2\cos x+1)}{\sqrt{\operatorname{tg} x}}=0.$

Решение:

Приравниваем числитель к нулю:

$$(\sin x-1)(2\cos x+1)=0;$$

$$\left[\begin{array}{l}\sin x=1\\ \cos x=-\frac{1}{2};\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}+2\pi k,\\ x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k, k\in Z.\end{array}\right.$$

Заметим, что в знаменателе дроби $\operatorname{tg} x$ находится под корнем, поэтому, с учетом того, что подкоренное выражение должно быть неотрицательным, область определения уравнения задается неравенством $\operatorname{tg} x>0$.

Учитывая «условие $\operatorname{tg}>0$, получаем, что серии $\frac{\pi}{2}+2\pi k$ и $\frac{2\pi}{3}+2\pi k$, $k\in Z$ не является решениями исходного уравнения. Следовательно, берем корни только из 3 четверти» [24].

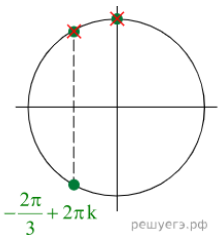


Рисунок 23 – Исключение посторонних корней при условии $\mathrm{tg} > 0$

«Ответ:$-\frac{2\pi}{3}+2\pi k, k \in Z$ (рисунок 23» [24].

Учет области определения можно продемонстрировать в следующем примере, где имеется ограничение на подкоренное выражение. Далее приравняв первый множитель к нулю и использовав основное тригонометрическое тождество, приходим к замене $\cos x = t$ с учетом ограниченности функции. Замена переменной позволяет свести тригонометрическое уравнение к алгебраическому (в данном случае к квадратному). Посторонние решения, возникающие в результате замены, должны быть удалены по причине несоответствия их области определения.

Пример 4 (рисунок 24).

Решите уравнение: $\left(\sqrt{2}\sin^2 x + \cos x - \sqrt{2}\right)\sqrt{-6\sin x} = 0.$

Решение. $\left(\sqrt{2}\sin^2 x + \cos x - \sqrt{2}\right)\sqrt{-6\sin x} = 0;$

$$\left[\begin{array}{l} \sin x = 0, \\ \begin{cases} \sqrt{2}\sin^2 x + \cos x - \sqrt{2} = 0, \\ -\sin x \geq 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \sin x = 0, \\ \begin{cases} \cos x - \sqrt{2}\cos^2 x = 0, \\ \sin x \leq 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \sin x = 0, \\ \begin{cases} \cos x(1 - \sqrt{2}\cos x) = 0, \\ \sin x \leq 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} \sin x \leq 0, \\ \left[\begin{array}{l} \cos = \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \cos x = 0, \\ \sin x = 0, \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \pi k, \\ x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k, \\ x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z. \end{array}\right.$$

Ответ: $x = \pi k, x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k, -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$ (рисунок 24).

Далее расмотрим вариант, когда серию решения приходится отбросить, так как она обнуляет знаменатель.

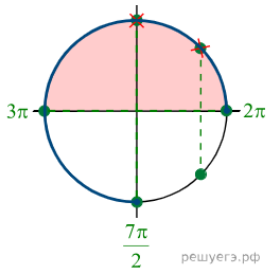


Рисунок 24 - Решения уравнения к примеру 4

Пример 5.

Решение уравнение $\frac{2\sin^2 x - \sin x}{2\cos x - \sqrt{3}} = 0$.

Решение.

Левая часть уравнения определена при $\cos \neq \frac{\sqrt{3}}{2}$, то есть при $x \neq \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z$.

Числитель дроби должен быть равен нулю:

«$2\sin^2 x - \sin x = 0;$

$\sin x(2\sin x - 1) = 0;$

$$\left[\begin{array}{l} \sin x = 0, \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \pi k, \\ x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z» \end{array}\right. [24].$$

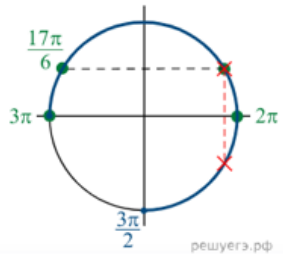


Рисунок 25 – Отбор корней к примеру 5

«Ответ: $\pi k,\ \frac{\pi}{6}+2\pi k,\ \frac{5\pi}{6}+2\pi k, k \in Z$» [24] (рисунок 25).

Этап У3: Самостоятельная деятельность учащихся.

Уравнения, для решения которых используются формулы двойного угла и метод замены переменной (1 ч.).

Целью изучения данного раздела является формирование у учащихся навыков применения формул двойного угла и использования метода замены переменной. По итогу изучения данного раздела учащиеся должны научиться решать уравнения при помощи этих формул и метода замены переменной.

Формула половинного аргумента синуса $\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}$ и формула половинного аргумента косинуса $\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{\cos\alpha+1}{2}$.

В данном примере используется формула половинного аргумента, метод замены переменной, метод решения простейшего уравнения со сложным аргументом $\frac{x}{2}$ и способ объединения корней в одну серию.

Пример 6.

Решите уравнение $\cos^2\frac{x}{4}-\sin^2\frac{x}{4}=\sin\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)$.

Решение: $\cos\frac{x}{2}+\cos x=0;\quad 2\cos^2\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}-1=0;$

$$\left[\begin{array}{l}\cos\frac{x}{2}=-1,\\ \cos\frac{x}{2}=\frac{1}{2}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\frac{x}{2}=\pi+2\pi k,\\ \frac{x}{2}=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k,\quad k\in Z.\end{array}\right.$$

$$\frac{x}{2} = \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi k}{3}, k \in Z.$$

$$x = \frac{2\pi}{3} + \frac{4\pi k}{3}, k \in Z.$$

Ответ: $\frac{2\pi}{3} + \frac{4\pi k}{3}, k \in Z.$

В данном примере используется формула понижения степени, метод замены переменной и метод решения простейшего уравнения со сложным аргументом $2x$ при помощи двух окружностей. Следует отметить, что если в этом уравнении воспользования формулой косинуса двойного угла, то получится квадратное уравнение относительно синуса с иррациональными корнями. Из этого следует, что при решении сложных тригонометрических уравнений необходимо определиться с методом решения, чтобы оптимальным спопобом получать лаконичные ответы.

Пример 7.

Решите уравнение $16\sin^4 x - 8\cos 2x - 7 = 0.$

Решение. Воспользуемся формулой $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$.

Из нее следует $\sin^4 x = \frac{1}{4}(\cos^2 2x - 2\cos 2x + 1)$. Поэтому из исходного уравнения получаем: $4\sin^2 2x - 8\cos 2x + 4 + 8\cos 2x - 7 = 0;$

$4\sin^2 2x = 3;\ \ \cos 2x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2};$

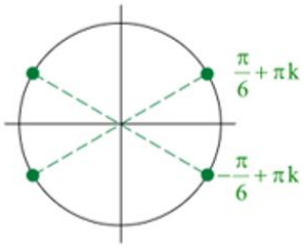


Рисунок 26 – Аргумент $2x$

$2x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi k$ (рисунок 26);

$x = \pm\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}k; k \in Z$ (рисунок 27)

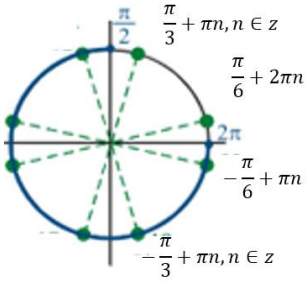


Рисунок 27 – Аргумент x

Ответ: $= \pm\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}k; k \in Z.$

Для решения следущего ниже уравнения необходимо использовать формулу синуса двойного угла, также при решении данного уравнения необходимо учитывать область допустимы значений.

Пример 8.

Решите уравнение: $\frac{\sin x}{\sin^2\frac{x}{2}} = 4\cos^2\frac{x}{2}$.

Решение. Заметим, что в силу формулы $\sin 2x = 2\sin x\cos x$, справедлива формула $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$, откуда $4\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2} = \sin^2 x$.

Имеем: $\frac{\sin x}{\sin^2\frac{x}{2}} = 4\cos^2\frac{x}{2};$

$$\begin{cases} \sin\frac{x}{2} \neq 0, \\ \sin x = \sin^2 x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin\frac{x}{2} \neq 0, \\ \left[\begin{array}{l} \sin x = 0, \\ \sin x = 1 \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \neq 2\pi k, \\ \left[\begin{array}{l} x = \pi k, \\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \end{array}\right. \end{cases}$$

Ответ: $\pi + 2\pi k, \frac{\pi}{2} + 2\pi k;\ k \in Z.$

Этап У4: Взаимодействие

Способы отбора корней (2 ч.).

Рассмотрим способ отбора корней с помощью тригонометрической окружности. Используя данный метод важно прорисовать дугу на тригонометрической окружности, соответствующую заданному отрезку и подписать края этого промежутка. Все точки из решения, попавшие на этот промежуток, следует отметить и подписать их значения, продемонстрировав их вычисления.

Пример 9.

«а) Решите уравнение $2\sin^2 x+\sqrt{2}\sin(2\pi - x) + \sqrt{3}\sin 2x = \sqrt{6}\cos x$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\pi;\ \frac{\pi}{2}\right]$.

Решение:

а) Последовательно получаем:

$2\sin^2 x + \sqrt{2}\sin(2\pi - x) + \sqrt{3}\sin 2x = \sqrt{6}\cos x;$

$2\sin^2 x - \sqrt{2}\sin x + 2\sqrt{3}\sin x\cos x - \sqrt{6}\cos x = 0;$

$2\sin^2 x - \sqrt{2}\sin x + 2\sqrt{3}\sin x\cos x - \sqrt{6}\cos x = 0;$

$\sin x(2\sin x - \sqrt{2}) + \sqrt{3}\cos x(2\sin x - \sqrt{2}) = 0;$

$(2\sin x - \sqrt{2})(\sin x + \sqrt{3}\cos x) = 0;$

$$\left[\begin{array}{l}\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2},\\ \operatorname{tg} x = -\sqrt{3}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k,\\ x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k\pi,\\ x = -\frac{\pi}{3} + \pi k, k \in Z.\end{array}\right.$$

Ответ: $\frac{\pi}{4} + 2\pi k, \frac{3\pi}{4} + 2\pi k;\ -\frac{\pi}{3} + \pi k, k \in Z$» [24] (рисунок 28).

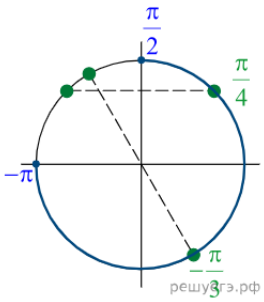


Рисунок 28 – Отбор корней к примеру 9

Отбор корней при помощи тригонометрического круга показан в примере 9. Были поставлены граничные точки π и $\frac{\pi}{2}$ и заданная дуга была выделена синим цветом.

Как можно заметить, наиболее оптимальным способом нахождения корней на отрезке является отбор с помощью единичной окружности. Простота, наглядность данного способа делает его универсальным для решения большинства задач. Именно этот способ: использование единичной окружности для нахождения корней тригонометрического уравнения, представлен в учебнике под редакцией Ю.М. Колягина [9].

Однако в ряде задач целесообразнее использовать метод двойного неравенства. Это те случаи, когда отбор при помощи тригонометрического круга затруднителен: промежуток для отбора корней превосходит один круг (это обычно два-три периода) или если корни тригонометрического уравнения имеют дробное значение параметра цикла (пример 10).

Рассмотрим способ отбора корней методом двойного неравенства.

В примере 10 продемонстрирован способ отбора корней методом двойного неравенства, который обусловлен серией корней, повторяющихся через $\frac{4\pi}{3}$.

Пример 10.

«а) Решите уравнение $\cos^2\frac{x}{4} - \sin^2\frac{x}{4} = \sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[3\pi;\ \frac{9\pi}{2}\right]$.

Решение: $\cos\frac{x}{2}+\cos x=0;\ \ 2\cos^2\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}-1=0;$

$$\left[\begin{array}{l}\cos\frac{x}{2}=-1,\\ \cos\frac{x}{2}=\frac{1}{2}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\frac{x}{2}=\pi+2\pi k,\\ \frac{x}{2}=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ \ k\in Z.\end{array}\right.$$

$$\frac{x}{2}=\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi k}{3},k\in Z.$$

$$x=\frac{2\pi}{3}+\frac{4\pi k}{3},k\in Z.$$

б) Найдем корни, принадлежащие отрезку $\left[3\pi;\ \frac{9\pi}{2}\right]$, решив неравенство:

$3\pi\le\frac{2\pi}{3}+\frac{4\pi k}{3}\le\frac{9\pi}{2},$

$3\pi\le\frac{2\pi}{3}+\frac{4\pi k}{3}\le\frac{9\pi}{2},$

$\frac{9}{4}\le\frac{1}{2}+k\le\frac{27}{8},$

$\frac{7}{4}\le k\le\frac{23}{8},$

$k=2,k\in Z.$

Получаем число $\frac{2\pi}{3}+\frac{4\pi\cdot2}{3}=\frac{10\pi}{3}$.

Ответ: а) $\frac{2\pi}{3}+\frac{4\pi k}{3};k\in Z$; б) $\frac{10\pi}{3}$» [24].

Возможен и третий способ отбора корней на промежутке, который основан на переборе корней. Целочисленному параметру из формулы корней последовательно присваиваются значения. Полученные корни проверяются на принадлежность заданному интервалу. При этом ответ будет считаться не обоснованным, если остановиться на корне, принадлежащему отрезку.

Необходимо показать и соседние корни, которые не попадают на отрезок, то есть расположенные левее начала и правее концов отрезка. Такое решение продемонстрировано в задании № 11.

Пример 11.

а) Решите уравнение: $\frac{\sin x}{\sin^2\frac{x}{2}} = 4\cos^2\frac{x}{2}$.

б) Найдите его корни на промежутке $\left[-\frac{9\pi}{2};\ -3\pi;\right]$.

а) Решение:

Заметим, что в силу формулы $\sin 2x = 2\sin x\cos x$, справедлива формула $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$, откуда $4\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2} = \sin^2 x$.

Имеем: $\frac{\sin x}{\sin^2\frac{x}{2}} = 4\cos^2\frac{x}{2}$;

$$\begin{cases} \sin\frac{x}{2} \neq 0, \\ \sin x = \sin^2 x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin\frac{x}{2} \neq 0, \\ \left[\begin{array}{l} \sin x = 0, \\ \sin x = 1 \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin\frac{x}{2} \neq 0, \\ \left[\begin{array}{l} x = \pi k, \\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \neq 2\pi n, \\ \left[\begin{array}{l} x = \pi k, \\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k;\ k, n \in Z. \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \pi + 2\pi k, \\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k;\ k \in Z. \end{array}\right.$$

б) Неотрицательным значениям параметра k соответствуют положительные значения корней; они не лежат на отрезке $\left[-\frac{9\pi}{2};\ -3\pi\right]$. Будем последовательно перебирать отрицательные значения параметра: значению $k = -1$ соответствуют корни $-\pi$ и $-\frac{3\pi}{2}$; значению $k = -2$

соответствуют корни -3π и $-\frac{7\pi}{2}$; значению $k=-3$ соответствуют корни -5π и $-\frac{11\pi}{2}$. Меньшим значениям k соответствуют меньшие значения корней; они также не лежат на заданном отрезке. Из вышеперечисленных корней заданному отрезку принадлежат числа -3π и $-\frac{7\pi}{2}$.

Ответ: а) $\pi+2\pi k, \frac{\pi}{2}+2\pi k;\ k\in Z$. б) $-3\pi; -\frac{7\pi}{2}$.

Формулы косинуса и синуса суммы и разности аргумента. Метод вспомогательного угла (2ч.)

Основная цель прохождения данного раздела − сформировать устойчивые навыки применения формул суммы и разности аргументов для преобразования и решения тригонометрических уравнений и навыки применения метода вспомогательного угла.

Вспомним формулы косинус и синус суммы и разности аргумента:

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta;$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta;$$
$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta;$$
$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta.$$

Данные формулы используется в методе вспомогательного угла для решения уравнений типа $a\cos x+b\sin x=C$ путем приведения их к виду $A\sin(x+\varphi)$, $A\cos(x+\varphi)$ с помощью известного приёма.

Пример 12.

«Решите уравнение: $\sin x+\cos x=\sqrt{2}$.

Решение:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x=1;$$
$$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1;$$
$$x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z.$$
$$x=\frac{\pi}{4}+2\pi n, n\in Z$$ » [24].

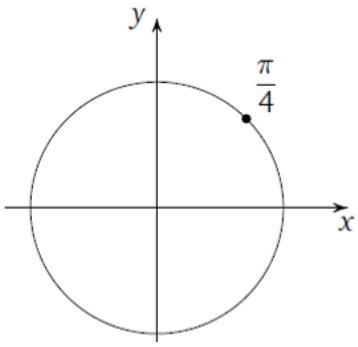


Рисунок 29 – Решение уравнения к примеру 12

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z$ (рисунок 29).

Теперь рассмотрим: $\sin x - \sin y = 2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}$;

Здесь стоит отметить, что в тригонометрических уравнениях преобразовать сумму в множители возможно не только алгебраическими способами, такими как вынесение общего множителя за скобки, группировка, но и при помощи тригонометрических формул.

Пример 13.

«Решите уравнение $2\sin 2x - \cos x = \sqrt{3}\sin x$.

Решение:

$$2\sin 2x - \cos x = \sqrt{3}\sin x;$$

$$\sin 2x = \sin x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\cos x;$$

$$\sin 2x = \sin x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\cos x;$$

$$\sin 2x = \sin x\left(x + \frac{\pi}{6}\right);$$

$$\sin 2x - \sin x\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 0;$$

$$2\cos\left(\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{12}\right)\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{12}\right) = 0;$$

$$\left[\begin{array}{l} \cos\left(\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{12}\right) = 0; \\ \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{12}\right) = 0 \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} \frac{3x}{2} + \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{2} + \pi k \\ \frac{x}{2} - \frac{\pi}{12} = \pi k \end{cases};$$

$$\begin{cases} x = \frac{5\pi}{18} + \frac{2\pi k}{3} \\ x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k \end{cases};$$

Ответ: $\frac{5\pi}{18} + \frac{2\pi k}{3}; \frac{\pi}{6} + 2\pi k$» [24].

Комбинированные тригонометрические уравнения с показательной функцией (2 ч.).

Целью прохождения данного раздела является научить учащихся решать комбинированные тригонометрические уравнения, содержащие показательные функции.

Пример 14.

Решите уравнение $2025 \cdot 3^{\sqrt{1-\cos^2 x}} - 3^{\sin x} = 2024$

Решение. Используя основное тригонометрическое тождество и извлекая квадратный корень, получаем:$\sqrt{1-\cos^2 x} = \sqrt{\sin^2 x} = |\sin x|$, откуда получаем: $2025 \cdot 3^{|\sin x|} - 3^{\sin x} = 2024.$

Разберем два случая. Если $\sin x \geq 0$,то: $2025 \cdot 3^{\sin x} - 3^{\sin x} = 2024;$ $3^{\sin x} = 1; \sin x = 0; x = \pi k, k \in Z.$

Если $\sin x \leq 0$, то: $2025 \cdot 3^{-\sin x} - 3^{\sin x} = 2024;$

$3^{2\sin x} + 2024 \cdot 3^{\sin x} - 2025 = 0;$

$$\begin{cases} 3^{\sin x} = 1 \\ 3^{\sin x} = -2025 \end{cases};$$

$3^{\sin x} = -2025$ – нет решений из-за ограниченности показательной функции по области значений.

$\sin x = 0; x = \pi k, k \in Z.$

Ответ: $x = \pi k, k \in Z.$

В следующем ниже примере также необходимо учитывать, что квадратный корень из выражения равен модулю подкоренного выражения, поэтому необходимо учитывать два случая при раскрытии модуля.

Пример 15.

Решите уравнение $49^{-\sqrt{1-\sin^2 x}} - 49^{\cos x} = -\frac{48}{7}$.

Решение. Рассмотрим два случая:

случай 1: $\cos < 0; |\cos x| = -\cos x;$

$49^{\cos x} - 49^{\cos x} = -\frac{48}{7}$; нет решений.

случай 2: $\cos \geq 0; |\cos x| = \cos x;$

$49^{-\cos x} - 49^{\cos x} = -\frac{48}{7};$

Пусть $49^{\cos x} = t > 0;$

$$\frac{1}{t} - t = -\frac{48}{7};$$

$$7 - 7t^2 + 48t = 0;$$

$$7t^2 - 48t - 7 = 0;$$

$$\left[\begin{array}{l} t = 7; \\ t = -\frac{1}{7} < 0; \end{array}\right.$$

$$49^{\cos x} = 7;$$

$$\cos x = \frac{1}{2};$$

$$x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z.$$

Ответ: $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z.$

Актуальными являются задания, содержащие комбинированное показательное уравнение с квадратным корнем и тригонометрическими функциями в показателе.

Далее пример рассмотрим комбинированное уравнение, при решении которого необходимо воспользоваться формулой приведения. А также использовать метод замены, без ограничений на область значений функции.

Пример 16.

Решите уравнение $2^{\sin(\frac{\pi}{2}-x)} - 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2\cos^2 x} = 0.$

Решение. Применим формулу приведения, сведем уравнение к квадратному относительно косинуса:

$$2^{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} - 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2\cos^2 x} = 0;$$

$$2^{\cos x} = 2^{1-2\cos^2 x};$$

$$\cos x = 1 - 2\cos^2 x;$$

$$2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0;$$

$$\left[\begin{array}{l} \cos x = \frac{1}{2} \\ \cos x = -1 \end{array}\right. ;$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k \\ x = \pi + 2\pi k \end{array}\right. ; k \in Z.$$

Ответ: $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k, \pi + 2\pi k, k \in Z.$

Оба корня при обратной замене подходят, так не превосходят единицы. Следует отметить, что в таких уравнениях нет ОДЗ.

Комбинированные тригонометрические уравнения с логарифмической функцией (2 ч.).

Основная цель прохождения данного раздела –научиться решать тригонометрические уравнения с логарифмической функцией. После прохождения данного раздела учащиеся будут уметь решать уравнения такого вида, а так же учитывать ОДЗ логарифмических функций.

В комбинированных тригонометрически-логарифмических уравнениях присутствует ограничение на аргумент логарифма: он должен быть строго больше нуля.

Также необходимо следить за тем, чтобы в ответ не попали «посторонние» решения, возникающие в результате замены, но не принадлежащие области допустимых значений введенной переменной.

Пример 17.

Решите уравнение $2\log_3^2(2\cos x) - 5\log_3(2\cos x) + 2 = 0$.

Решение.

Пусть $\log_3(2\cos x) = t$, тогда $2t^2 - 5t + 2 = 0$, откуда $t = 2$ или $t = \frac{1}{2}$.

Далее имеем:

$$\left[\begin{array}{l}\log_3(2\cos x) = 2\\ \log_3(2\cos x) = \frac{1}{2}\end{array}\right.;$$

$$\left[\begin{array}{l}2\cos x = 9\\ 2\cos x = \sqrt{3}\end{array}\right.;$$

$$\left[\begin{array}{l}\cos x = \frac{9}{2}\\ \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}\end{array}\right.;$$

$|\cos x| \le 1; \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2};$

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k,\\ x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z.\end{array}\right.$$

Ответ: $\pm\frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z$

Существуют ситуации, когда нахождение области допустимых значений (ОДЗ) в явном виде, путем решения тригонометрического неравенства для аргумента логарифма, может быть неоправданно сложным или даже нецелесообразным. В таком случае достаточно аргументировать своё решение, почему при любых значениях x, выражение имеет смысл.

Можно вообще не указывать ОДЗ, то есть выполняя преобразования, решить уравнения, а потом осуществить проверку корней на истинность.

Пример 18.

Решите уравнение $\log_4\left(2^{2x} - \sqrt{3}\cos x - \sin 2x\right) = x$.

Решение. Запишем исходное уравнение в виде:

$2^{2x} - \sqrt{3}\cos x - \sin 2x = 4^x$.

Заметим, что выражение, стоящее под знаком логарифма, приравнено к положительному числу, поэтому исследовать ОДЗ не требуется.

Для решения полученного тригонометрического уравнения используем формулу синуса двойного угла $\sin 2x = 2\cos x \sin x$, откуда получаем $\cos x\left(-2\sin x - \sqrt{3}\right) = 0$, откуда $\cos x = 0$ или $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Из уравнения $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ находим: $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n$ или $x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$. Из уравнения $\cos x = 0$ находим: $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$.

Ответ: $-\frac{\pi}{3} + 2\pi n; -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n: n \in Z$.

Тригонометрические уравнения с параметром (3 ч.).

Цель прохождения раздела – изучение тригонометрических уравнений с параметром.

В результате изучения данного раздела учащиеся приобретут навыки решения тригонометрических уравнений данного вида.

Пример 19.

Найти все значения a, при которых уравнение не имеет корней:

$\sin^2 x - \sin x \cos x - 2\cos^2 x = a$.

Решение.

При решении этого уравнения с параметром мы замечаем, что левая часть – это однородное уравнения второй степени, которое сводится квадратному относительно тангенса. Если, a – это какое-то число, в таком случае его представляют как произведение с множителем 1, который заменяют на основное тригонометрическое тождество.

$\sin^2 x - \sin x \cos x - 2\cos^2 x = a;$

$\sin^2 x - \sin x \cos x - 2\cos^2 x = a(\sin^2 + \cos^2);$

$(1 - a)\sin^2 x - \sin x \cos x - (2 + a)\cos^2 x = 0;$

$(1 - a)\mathrm{tg}^2 x - \mathrm{tg}x - (2 + a) = 0.$

Пусть $y = \mathrm{tg}x$, тогда: $(1 - a)y^2 - y - (2 + a) = 0;$

$D = 1^2 + 4(1 - a)(2 + a) = 1 + 4(2 + a - 2a - a^2);$

$D = 1^2 + 8 + 4a - 4a^2 = -4a^2 - 4a + 9;$

Ограничение на параметр накладывает условие отсутствия корней, то есть, когда дискриминант равен нулю. Далее идет решения квадратного неравенства относительно параметра.

Отсутствуют корни:

$-4a^2 - 4a + 9 < 0;$

$4a^2 + 4a - 9 > 0;$

$D = 4^2 + 4 \cdot 4 \cdot 9 = 160$; тогда:

$a = \frac{-4 \pm \sqrt{160}}{2 \cdot 4} = \frac{-1 \pm \sqrt{10}}{2}$;

$a < \frac{-1-\sqrt{10}}{2}; a > \frac{-1+\sqrt{10}}{2}$.

Ответ: $a < \frac{-1-\sqrt{10}}{2}; a > \frac{-1+\sqrt{10}}{2}$.

Изучение данного рода заданий формирует навык решения тригонометрический уравнении второй степени, а также способствует овладению способа решения задач с параметром с учетом ограничений по корням уравнения.

Рассмотрим следующий пример, взятый из открытого банка заданий ФИПИ [33].

Пример 20.

«Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $\sqrt{x-a} \cdot \cdot \sin x = \sqrt{x-a} \cdot \cos x$ имеет на отрезке $[0; \pi]$ ровно один корень.

Решение. Исходное уравнение равносильно уравнению $\sqrt{x-a} \cdot (\sin x - \cos x) = 0$.

Рассмотрим два случая.

Первый случай: $\sqrt{x-a} = 0$. Получаем $x = a$.

Второй случай: $\sin x - \cos x = 0$ при условии $x \geq a$.

Это уравнение имеет на отрезке $[0; \pi]$ единственный корень $x = \frac{\pi}{4}$. Условие принимает вид $\frac{\pi}{4} \geq a$. То есть в этом случае $x = \frac{\pi}{4}$ при $a \leq \frac{\pi}{4}$.

Корень уравнения $x = a$ принадлежит отрезку $[0; \pi]$при $0 \leq a \leq \pi$. Корни уравнения $x = a$ и $x = \frac{\pi}{4}$ совпадают при $a = \frac{\pi}{4}$.

Таким образом, исходное уравнение имеет на отрезке $[0; \pi]$ ровно один корень при $a < 0$ и $\frac{\pi}{4} \leq a \leq \pi$.

Ответ: $a < 0; \frac{\pi}{4} \leq a \leq \pi$» [24].

Выполнение этого задания требует умения решать однородное тригонометрическое уравнение и навыка подсчет количества корней на отрезке в зависимости от рассматриваемых случаев.

2.4 Педагогический эксперимент и его результаты

Педагогический эксперимент проводился на базе ГБОУ «Школа № 1504» города Москвы. В эксперименте участвовали ученики десятого класса математического профиля, общей численностью двадцать пять человек.

Экспериментальная работа была проведена в три последовательных этапа: констатирующий, обучающий и контролирующий.

Констатирующий этап эксперимента был направлен на выявление уровня сформированности умений решения тригонометрических уравнений у десятиклассников, обучающихся по профильной математической программе. Оценка проводилась на основе заданий, соответствующих программе алгебры и начал математического анализа для старших классов с углубленным изучением.

Была проведена контрольная работа, длительностью 1 академический час, в рамках которой учащимся предложили решить 6 задач.

Ниже приведены уравнения, которые вошли в контрольную работу №1.

Контрольная работа №1.

Пример 32. «Решите уравнение $\cos 2x + \sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{2} + x) + 1 = 0$ » [24].

Пример 33. «Решите уравнение $\cos^2 x - \frac{1}{2}\sin 2x + \cos x = \sin x$ » [24].

Пример 34. «Решите уравнение: $\mathrm{tg}^2\mathrm{x} + 5\mathrm{tgx} + 6 = 0$ » [24].

Пример 35. «Решите уравнение: $\frac{2\cos^2\mathrm{x}-\cos\mathrm{x}}{1-\sin\mathrm{x}} = 0$ » [24].

Пример 36. «Решите уравнение: $\frac{2\sin^2\mathrm{x}-\sin\mathrm{x}}{\log_7(\cos\mathrm{x})} = 0$ » [24].

Критерии оценки:

− пример 32 – 1 балл;

− пример 33 – 1 балл;

− пример 34 – 2 балла;

− пример 35 – 2 балла;

− пример 36 – 3 балла;

− пример 37 – 3 балла.

Уровень достижения образовательных результатов учащихся оценивался по количеству верно выполненных заданий (таблица 3).

Выделялось четыре уровня: низкий, удовлетворительный, повышенный и высокий, ниже в таблице приведены критерии распределения по уровням.

Таблица 3 − Уровень достижения результата

Уровень достижения результата	Оценка в баллах	Школьная отметка	Процент выполнения
Низкий	0-4	2	0% -33%
Удовлетворительный	5-7	3	42% -58%
Повышенный	8-10	4	66% -83%
Высокий	11-12	5	92%-100%

Отметка «5» выставляется ученику за 11-12 баллов; отметка «4» - за 8-10 баллов; отметка «3» - за 5-7 балла; отметка «2» - за 0-4 балла.

В ходе анализа результатов первой контрольной работы были выявлены следующие типичные сложности у учащихся:

− трудности с нахождением корней тригонометрических уравнений;

− ошибки в определении ОДЗ при решении тригонометрических уравнений;

− неуверенное использование некоторых тригонометрических преобразований;

− нехватка практического опыта в решении различных тригонометрических уравнений.

Анализ результатов первой контрольной работы выявил недостаточный уровень знаний у старшеклассников профильных классов в области решения тригонометрических уравнений, что показало необходимость систематического обучения старшеклассников решению тригонометрических уравнений.

Для решения этой проблемы был создан элективный курс «Тригонометрические уравнения», рассчитанный на 17 часов, а также подготовлены необходимые методические и дидактические материалы.

Далее был проведен обучающий этап эксперимента.

В рамках второго обучающего этапа эксперимента проводилось тестирование разработанного элективного курса «Тригонометрические уравнения» и сопровождающих его методических и дидактических материалов, подробно изложенных во второй главе диссертации.

На последнем, контрольном этапе исследования, после завершения всех учебных занятий, была проведена итоговая контрольная работа.

Этот этап реализовался в форме итоговой контрольной работы, проведенной после завершения курса.

Задания контрольной работы были аналогичны по типу и сложности заданиям первой контрольной.

По сравнению с первой контрольной, вторая контрольная работа (таблица 4) выявила существенное улучшение результатов.

Таблица 4 − Результаты учащихся в ходе контрольных работ

№ задания	Правильно-выполненные задания	
	Констатирующий этап	Контрольный этап
1	68 %	96 %
2	64 %	96 %
3	60 %	88 %
4	52 %	92 %

5	48 %	80 %

Данный факт подтверждает гипотезу исследования: разработка и внедрение системы уроков по теме «Тригонометрические уравнения» с применением технологии дистанционного обучения в 10-11 классах», повысит уровень результатов обучения математике учащихся 10-11 классов.

Выводы по второй главе:

− рассмотрены методы и подходы к решению различных типов тригонометрических уравнений;
− представлены методические особенности обучения решению тригонометрических уравнений старшеклассникам;
− разработана система уроков по теме «Тригонометрические уравнения», предполагающая обучение по трем образовательным траекториям;
− спроектирован элективный курс «Тригонометрические уравнения» для учащихся 10-11 классов общеобразовательной школы с применением технологии дистанционного обучения; определены общие цели обучения на элективном курсе: углубленное изучение теории тригонометрических уравнений, умение анализировать условие задачи, выбирать оптимальный метод решения и проверять полученные результаты, обучение решению нестандартных задач, требующих глубокого понимания темы; освоение содержания элективного курса будет идти в следующем порядке: первичный анализ знаний учащихся с целью определения траектории обучения, формирование умений решать типовые уравнения и более сложные тригонометрические уравнения, проверка достижения образовательных результатов;
− приведены результаты педагогического эксперимента и их анализ.

Заключение

Настоящее исследование, в рамках решения поставленных задач, позволило получить следующие результаты и сделать выводы:

– рассмотрены основные цели и задачи технологии дистанционного обучения;

– определены условия эффективности реализации технологии дистанционного обучения в старших классах;

– проанализированы принципы проектирования системы уроков по алгебре и началам математического анализа;

– проанализированы школьные учебники с точки зрения специфики дистанционного обучения;

– сформулированы методические рекомендации по обучению решению простейших тригонометрических уравнений;

– разработан элективный курс «Тригонометрические уравнения» с применением технологии дистанционного обучения;

– разработана система уроков для элективного курса и описана методика ее реализации в условиях дистанционного обучения;

– проведены все этапы педагогического эксперимента: констатирующий, обучающий, контролирующий.

Педагогический эксперимент подтверждает гипотезу исследования: разработка и внедрение системы уроков по теме «Тригонометрические уравнения» с применением технологии дистанционного обучения в 10-11 классах», повысит уровень результатов обучения математике учащихся 10-11 классов.

Список используемой литературы и используемых источников

1. Абрамова О. М. Использование цифровых технологий в условиях дистанционного обучения математике // Развитие общего и профессионального математического образования в системе национальных университетов и педагогических вузов: материалы 40-го Междунар. науч. семинара преподавателей математики и информатики ун-тов и пед. вузов, 7–9 октября 2021 г. Брянск, 2021. С. 50–54.
2. Алимов Ш. А., Колягин Ю. М., Ткачева М. В. и др., Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа (базовый и углубленный уровни). 10-11 классы/ М.: Просвещение, 2012 г. 264 с.
3. Валько С. Ю. Тригонометрия вокруг нас/ С. Ю. Валько, М.Н. Симакова//Юный ученый. 2023.№6(69). С. 77-82.
4. Гребнева З. С. Обучение математике одаренных школьников региона в условиях дистанционной модели дополнительного математического образования: диссертация … кандидата педагогических наук: 13.00.02/ З. С. Гребнева. Орел.,2008. 191 с.
5. Гусев В. А. Методические основы дифференцированного обучения математике в средней школе/ В.А. Гусев: дис. …д-ра пед. наук /В. А. Гусев. М., 1990. 364 с.
6. Демченкова Н. А., Чайковская Е. Н. Проектирование системы уроков по теме «Тригонометрические уравнения» с применением технологии дистанционного обучения //XXII Всероссийская с международным участием научно-практическая конференция «Артемовские чтения»: «Современное образование: научные подходы, опыт, проблемы, перспективы» (Пенза, 17–18 апреля 2025 г.)/ Пенза: ПГПУ, 2025. С. 107– 114.
7. Дорофеев Г. В., Кузнецова Л. В., Суворова С. Б., Фирсов В. В. Дифференциация в обучении математике // Математика в школе. 1990. С. 15-57.

8. Колмогоров А. Н. Алгебра: учеб. Для 10-11 кл. / авт. Коллектив А.Н.Колмогоров, Ю.П. Абрамов, М.: Просвещение, 2018. 383 с.

9. Колягин Ю. М., Оганесян В. А., Саннинский В. Я., Луканкин Г. Л. Методика преподавания математики в средней школе. Общая методика: учеб. Пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. ин-тов. / М.: Просвещение, 1975. 257с.

10. Колягин Ю. М., Ткачева М. В., Федорова Н. Е., Шабунин М. И. Математика: алгебра и начала математического анализа. 10 класс: учеб. Для общеобразоват. организаций: базовый и углубл. уровни)/ Ю. М. Колягин, М. В. Ткачева, Н. Е. Федорова, М. И. Шабунин – 10е изд., стер. Москва: Просвещение, 2022. 384с.

11. Левченко В. В., Жарких Фасилитативные умения учителя общего образования при организации дистанционного обучения// Нижегородское образование. 2020. № 2. С. 87–94.

12. Макарьев И. Н. Методическое сопровождение дистанционного обучения математике старшеклассников в системе открытого образования: диссертация …кандидата педагогических наук: 13.00.02/ И. Н. Макарьев. Елец, 2014. 182с.

13. Министерство просвещения Российской Федерации, национальный проект «Образование», направления «Цифровая образовательная среда» [Электронный ресурс]. URL: https://edu.gov.ru/national-project/projects/cos/ (дата обращения: 05.05.2025).

14. Мордкович А. Г., Семёнов П. В. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс В 2 частях: ч.1 учебник(базовый и углубленный уровни)/ А.Г. Мордкович, П.В. Семенов. М., 2020 г. 455с.

15. Муравин Г. К., Муравина О. В. Математика. Алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс. Углубленный уровень: учеб. для общеобразоват. учеб. заведений/ М.: Дрофа, 2013. 320 с.

16. Никольский С. М., Потапов М. К., Решетников Н. Н., Шевкин А. В. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс: учебник для общеобразовательных учреждений: базовый и профильный уровни/ М.: Просвещение, 2009. 430с.

17. Носова Л. С. Технология проектирования системы уроков // Человек. Спорт. Медицина. / Челябинск, 2006. № 16(71). С. 217–221.

18. Осмоловская И. М. Дифференциация процесса обучения в современной школе/И. М. Осмоловская. М.: МПСИ; Воронеж: Модэк, 2004. 176с.

19. Патронова И. А. Исследование развития профессионально-личностных компетенций педагогов образовательных организаций в целях организации дистанционного обучения // Научное обеспечение системы повышения квалификации кадров. 2022. №3 (52). С.55-63.

20. Пидкастистый П. И. Педагогика. Учебное пособие для студентов педагогических ВУЗов и педагогических колледжей / Под ред. П. И. Пидкастистого. М.: Педагогическое общество России, 1998. 640 с.

21. Подгребельная Н. И. Педагогические условия активизации познавательной деятельности студентов в системе дистанционного обучения: дис. … канд. пед. наук: Ставрополь, 2001. 158с.

22. Приказ Министерства просвещения РФ от 21 сентября 2022 № 858 «Об утверждении федерального перечня … Приказ Министерства просвещения РФ от 21 сентября 2022 г. № 858.

23. Пчелинцева Т. А., Львова А. Г. Сетевой математический проект как образовательное событие в условиях дистанционного обучения // Материалы XXXIX Международного научного семинара преподавателей математики и информатики и педагогических ВУЗов. М., 2020. С. 59–62.

24. Решу ЕГЭ Образовательный портал для подготовки к экзаменам [Электронный ресурс] URL.: https://math-oge.sdamgia.ru/ (дата обращения: 05.05.2025).

25. Севастьянова С. А. Дистанционное обучение: компетентность преподавателя (на примере предметной области «Математика») // Самарский новостной вестник. 2020. №2 (31). С. 279–282.

26. Снегурова В. И. Методическая система дистанционного обучения математике учащихся общеобразовательных школ: диссертация …доктора педагогических наук: 13.00.02/ Снегурова В. И. Санкт-Петербург, 2010. 513с.

27. Статуев А. А. Реализация углубленного обучения математике в сельской школе с использованием информационно-коммуникационных технологий: диссертация … кандидата педагогических наук: 13.00.02. Нижний Новгород, 2006. 147с.

28. Сферум – это закрытое и безопасное пространство для учёбы и общения педагогов, учеников и их родителей [Электронный ресурс]. URL: https://sferum.ru/?p=start (дата обращения: 05.10.2024).

29. Темербекова А. А. Методика обучения математике: учебное пособие/ А. А. Темербекова, И. В. Чугунова, Г. А. Байгонакова. Санкт-Петербург: Лань, 2022. 259 с.

30. Трегубова С. Н. Комплексное применение дистанционных и традиционных методов обучения математике учащихся старшей школы как средство реализации индивидуального подхода: дис. … канд. пед. наук: 13.00.02 Пермь, 2005. 182 с.

31. Турковская Н. В. Профессионально значимые качества преподавателя дистанционного обучения // Вестник ЮУрГГПУ. 2011. №10. С. 159–176.

32. Федеральный государственный образовательный стандарт среднего общего образования. Утвержден приказом Минобрнауки России от 17.05.2012 №413 (с изменениями на 27 декабря 2023 г.)

33. Федеральный институт педагогических измерений (ФИПИ) [Электронный ресурс]. URL: http://fipi.ru (дата обращения: 18.04.2025).

34. Федорова Н. Е., Ткачева М. В. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс. Методические рекомендации М.: Просвещение. 2023. 172с.

35. Чайковская Е. Н., Демченкова Н. А. Дистанционное обучение математике в общеобразовательной школе //XXIII Всероссийская научно-практическая конференция «Актуальные проблемы естественнонаучного и математического образования» (Самара, 2025 г.) / Самара: ПГПУ. 2025. С. 171-175.

36. Яндекс Телемост − это сервис для видеовстреч без ограничений по времени [Электронный ресурс]. URL: https://360.yandex.ru/business/telemost

37. Ященко И. В. Я сдам ЕГЭ! Математика. Модульный курс. Методика подготовки: учебное пособие / И. В. Ященко, С. А. Шестаков. М.: Просвещение. 2020. 384с.

38. Bonato M., Fabbri S., Umilta C., Zorzi M. The Mental Representation of Numeral Fractions: Real and Integer/ M. Bonato// Journal of Experimental Psychology: Human Perception and Performance. University of Oradea Publisher. 2007. PP. 1410-1419.

39. Bresolin D. Optimal decision procedures for MPNL over finite structures, the natural numbers, and the integers/ D. Bresolin // Elsevier. University of Oradea Publisher. 2007. PP. 95-115.

40. GeoGebra (Геогебра) — это динамическая математическая программа, которая объединяет геометрию, алгебру и исчисления [Электронный ресурс]. URL: https://www.geogebra.org/ (дата обращения: 17.09.2024).

41. Moodle — система управления образовательными электронными курсами [Электронный ресурс]. URL: https://moodle.org (дата обращения: 20.09.2024).

42. Teppo A. Visual representation as objects analysis: The number line as an example/ A. Teppo // Springer. University of Oradea Publisher. 2013. PP. 600- 613.

43. Voskoglou M., Kosyvas G. Analyzing students difficulties in understanding real numbers/ M. Voskoglou // Redimat. University of Oradea Publisher. 2012. PP. 301-336.

44. Yua F., Ko K., On logarithmic-space computablr real numbers/ F. Yua // Elsevier. University of Oradea Publisher. 2012. PP. 712-714.