

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Тольяттинский государственный университет»

Институт общинженерной подготовки  
(наименование института полностью)

Кафедра «Высшая математика и математическое образование»  
(наименование)

44.04.01 Педагогическое образование  
(код и наименование направления подготовки)

Математическое образование  
(направленность (профиль))

**ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА  
(МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ)**

на тему «Методы закрепления приемов решения задач в курсе алгебры и  
начал математического анализа общеобразовательной школы»

Обучающийся

Е.А. Горюнова  
(Инициалы Фамилия)

(личная подпись)

Научный  
руководитель

канд. пед. наук, доцент, И.В. Антонова  
(ученая степень (при наличии), ученое звание (при наличии), Инициалы Фамилия)

Тольятти 2025

## Оглавление

|                                                                                                                                                                                           |     |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Введение.....                                                                                                                                                                             | 3   |
| Глава 1 Теоретические основы методов закрепления приемов решения задач при обучении математике в общеобразовательной школе .....                                                          | 9   |
| 1.1 Понятие задачи, метода и приема решения задач в школьном курсе математики.....                                                                                                        | 9   |
| 1.2 Математические задачи как средство закрепления знаний учащихся в общеобразовательной школе .....                                                                                      | 39  |
| 1.3 Методы закрепления приемов решения задач в общеобразовательной школе .....                                                                                                            | 45  |
| Глава 2 Методические основы методов закрепления приемов решения задач в курсе алгебры и начал математического анализа .....                                                               | 61  |
| 2.1 Методические особенности применения различных методов закрепления приемов решения задач при обучении математике в общеобразовательной школе .....                                     | 61  |
| 2.2 Системы задач на применение методов закрепления приемов решения задач в курсе алгебры и начал математического анализа при изучении темы «Показательные уравнения и неравенства» ..... | 69  |
| 2.3 Педагогический эксперимент и его результаты .....                                                                                                                                     | 108 |
| Заключение .....                                                                                                                                                                          | 124 |
| Список используемой литературы и используемых источников.....                                                                                                                             | 128 |

## Введение

Актуальность и научная значимость настоящего исследования. Согласно Федеральному Закону об образовании в РФ [43], успехи старшеклассников рассматриваются не как конечная цель обучения, а как инструмент личного роста, подчеркивая значимость их личных достижений.

Согласно требованиям ФГОС среднего общего образования обучение решению задач по математике должно быть направлено на: развитие навыков мышления. Школьное математическое образование формирует воображение, интуицию, логическое и алгоритмическое мышление; подготовку к решению проблем в реальной жизни. Овладение универсальными учебными действиями, которые формируются на уроках математики, помогает ученикам успешно решать проблемы, возникающие в разных сферах жизнедеятельности; формирование интереса к математике. Математика учит думать, планировать, прикидывать и оценивать, рассматривать разные варианты и возможности решения задач, что способствует духовно-нравственному развитию личности обучающегося; вооружение методами познания других наук. Благодаря своей универсальности математика дает обучающимся методы познания физики, химии, экономики, черчения, информатики и других дисциплин; подготовку к дальнейшему обучению. В школе закладывается основа математической грамотности; методы, которые ученики применяют для решения конкретных заданий, в дальнейшем лежат в основе изучения нового материала [42].

Математика является основополагающим предметом, знание которого позволяет не только выполнять различные вычисления, но и применять полученные знания и умения во многих областях жизни, при изучении в школе смежных предметов [52, с. 74-75].

Задачи – одно из основных средств обучения математике в общеобразовательной школе. Они направлены на формирование у обучающихся определенных знаний, умений и навыков; необходимы для

усвоения и закрепления учебного материала. Посредством решения задач реализуются различные цели обучения. Школьный курс математики должен способствовать формированию у школьников глубоких и устойчивых умений и навыков по решению задач.

По мнению Г.И. Саранцева, «задачи — основное средство развития пространственного мышления, творческой деятельности школьников, в процессе решения задач формируются не только логическая, эвристическая, алгоритмическая составляющие мышления, но и многие нравственные качества учащихся» [37, с. 139].

При формировании умения решать задачи особое внимание уделяется обучению умению применять разные методы и приемы их решения, направленному на развитие познавательного интереса старшеклассников.

Т.А. Ивановой [11, с. 168] отмечается, что при решении стандартной задачи используется известная последовательность элементарных шагов; для нестандартной задачи их нужно выявить; в большинстве случаев при поиске и при осуществлении решения участвуют одни и те же методы.

О.Б. Епишева, В.И. Крупич [9] подчеркивают, что поиск решения задач осуществляется в основном с помощью аналитико-синтетического метода.

Отметим, что закрепление методов и приемов решения задач важно для осмысления и усвоения изученного материала, профилактики ошибок при их решении; многие ошибки возникают из-за неправильного анализа условия задачи; это приводит к неверному выбору метода ее решения.

Немалая роль при обучении решению задач отводится учителю, который должен грамотно выстраивать процесс обучения и определять деятельность школьников в ходе него [47].

Имеется ряд диссертационных исследований, в которых описаны: интеграция алгебраического и геометрического методов решения задач при обучении математике в школе (Л.С. Капкаева [12], г. Саранск, 2004 г.), теоретико-методологические основы обучения учащихся решению

математических задач в контексте деятельностного подхода (А.А. Папышев [32], г. Саранск, 2012 г.).

Таким образом, актуальность темы исследования обусловлена сложившимся противоречием между необходимостью обучения старшеклассников решению задач на основе методов закрепления приемов их решения в курсе алгебры и начал математического анализа и недостаточной разработанностью соответствующей методики.

Данное противоречие позволило сформулировать проблему диссертационного исследования: каковы методические особенности применения различных методов закрепления приемов решения задач в курсе алгебры и начал математического анализа?

Объект исследования: процесс обучения алгебре и началам математического анализа в общеобразовательной школе.

Предмет исследования: методы закрепления приемов решения задач в курсе алгебры и начал математического анализа общеобразовательной школы.

Цель исследования: выявление методических особенностей применения различных методов закрепления приемов решения задач при обучении математике в общеобразовательной школе и разработка соответствующих систем задач по теме «Показательные уравнения и неравенства».

Гипотеза исследования состоит в том, что методика применения различных методов закрепления приемов решения задач при обучении математике в общеобразовательной школе будет более эффективной, если для закрепления знаний и умений старшеклассников по решению задач использовать различные методы и приемы их решения, учитывать методические особенности их применения.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи:

- определить понятие задачи и их роль при обучении математике в школе;
- раскрыть понятия метода и приема решения задач в школьном курсе математики;
- выделить функции математических задач как средства закрепления знаний учащихся в общеобразовательной школе;
- выявить методы закрепления приемов решения задач в общеобразовательной школе;
- представить методические особенности применения различных методов закрепления приемов решения задач при обучении математике в общеобразовательной школе;
- разработать системы задач на применение методов закрепления приемов решения задач в курсе алгебры и начал математического анализа на примере темы «Показательные уравнения и неравенства»;
- провести педагогический эксперимент и описать его результаты.

Теоретико-методологическую основу данного исследования составили работы О.Б. Епишевой, В.И. Крупича [6]; Т.А. Ивановой [11]; Г.А. Клековкина [16], Ю.М. Колягина [20], [21]; Д. Пойа [33]; Г.И. Саранцева [37]; А.А. Темербековой [39]; Л.М. Фридмана [44].

Базовыми для настоящего исследования явились также работы Я.И. Груденова [6]; Л.С. Капкаевой [13]; М.А. Кисляковой [15]; А.А. Папышева; Н.Л. Стефановой, Н.С. Подходовой [27].

Методы исследования: изучение научной и учебно-методической литературы; анализ учебников и учебных пособий, нормативных документов; обобщение опыта работы в школе; проведение педагогического эксперимента.

Основные этапы исследования:

- 1 этап (2022/2023 уч.г.): анализ ранее выполненных исследований по теме диссертации; анализ школьных программ и учебников по

математике, нормативных документов; анализ опыта работы школы по данной теме;

– 2 этап (2023/2024 уч.г.): определение теоретических основ методов закрепления приемов решения задач при обучении математике в общеобразовательной школе;

– 3 этап (2023/2024 уч.г.): определение методических основ методов закрепления приемов решения задач при обучении математике в общеобразовательной школе; разработка систем упражнений по теме «Показательные уравнения и неравенства» для закрепления методов и приемов решения задач;

– 4 этап (2024/2025 уч.г.): оформление диссертации, корректировка ранее представленного материала, описание результатов экспериментальной работы, формулирование выводов по главам.

Опытно-экспериментальная база исследования: МОУ СОШ № 1, г. Можайск, Московская область.

Научная новизна исследования заключается в том, что в нем представлена методика применения различных методов закрепления приемов решения задач в курсе алгебры и начал математического анализа.

Теоретическая значимость исследования заключается в том, что в нем:

– определено понятие задачи и их роль при обучении математике в школе;

– раскрыты понятия метода и приема решения задач в школьном курсе математики;

– выделены функции математических задач как средства закрепления знаний учащихся в общеобразовательной школе;

– выявлены методы закрепления приемов решения задач в общеобразовательной школе.

Практическая значимость исследования заключается в том, что разработанные методика применения различных методов закрепления

приемов решения задач в курсе алгебры и начал математического анализа и системы упражнений, направленные на закрепление методов и приемов решения задач по теме «Показательные уравнения и неравенства», могут быть использованы учителями в ходе их практической деятельности.

Достоверность и обоснованность результатов исследования обеспечивались комбинированием теоретических и практических методов исследования, анализом педагогической практики и личным опытом работы в образовательной организации.

Личное участие автора в организации и проведении исследования состоит в анализе методов и приемов решения задач, обосновании методических рекомендаций по обучению старшеклассников; разработке для них систем задач по теме «Показательные уравнения и неравенства», а также их апробации в рамках подготовленного и проведенного педагогического эксперимента.

Апробация и внедрение результатов работы велись в течение всего исследования. Результаты исследования были апробированы в ходе производственных практик на базе кафедры «Высшая математика и математическое образование» ТГУ; выступления на научно-теоретической конференции «Студенческие Дни науки в ТГУ» (апрель 2025 г.).

По теме исследования имеется публикация [5].

На защиту выносятся:

- методика применения различных методов закрепления приемов решения задач в курсе алгебры и начал математического анализа;
- системы упражнений, направленные на закрепление методов и приемов решения задач по теме «Показательные уравнения и неравенства».

Структура магистерской диссертации. Работа состоит из введения, двух глав, заключения, содержит 22 рисунка, 22 таблицы, список используемой литературы и используемых источников (53 источника). Основной текст работы изложен на 132 страницах

# **Глава 1 Теоретические основы методов закрепления приемов решения задач при обучении математике в общеобразовательной школе**

## **1.1 Понятие задачи, метода и приема решения задач в школьном курсе математики**

В книге Г.И. Саранцева описаны «различные трактовки понятия задачи. Их исследование в психологической литературе было проведено Г.А. Баллом. Термин «задача», отмечает Г.А. Балл, употребляется для обозначения объектов, относящихся к трем различным категориям:

- к категории цели действий субъекта, требования, поставленного перед субъектом;
- к категории ситуации, включающей наряду с целью условия, в которых она должна быть достигнута;
- к категории словесной формулировки этой ситуации.

Г.А. Балл отмечает, что в психологической литературе наиболее распространено употребление термина «задача» для обозначения объектов второй категории. Для объектов первой категории, указывает Г.А. Балл, вполне подходит выражение «цель действия», «требование задачи», а для объектов третьей категории — «формулировка задачи».

Таким образом, понятие задачи, относящейся к первой категории, связано непосредственно с целью или требованием, поставленным перед субъектом, что и будет обозначаться задачей.

У сторонников второй категории присутствует субъект, перед которым и ставится задача, но только уже в ситуационной форме. Можно сказать в некой проблеме, которую и предстоит решить данному субъекту» [37, с. 131].

Этого мнения придерживается Ю.М. Колягин: «без субъекта, отмечает он, нет задачи». То, что для одних является задачей, для других может ей не

быть. Это говорит о том, что для такой формы задачи, как проблемная ситуация, присутствует человеческий фактор, способный решить задачу или увидеть сложившуюся ситуацию, с последующим принятием решения, каким методом субъект будет выполнять задачу в определенных условиях. То есть, чтобы увидеть саму задачу, нужно понимать не только цель задачи, но и условия, в которых она должна быть достигнута.

Таким образом, подведя сравнительный итог первых двух категорий понятия задачи, мы приходим к выводу, что в первом случае мы искусственно создаем задачу, вероятно осознавая ее выполнимость, тем самым оценивая возможность ее решения, ставим цель и требования перед субъектом и решаем задачу.

Вторая категория говорит о сложившейся ситуации, в которую попал субъект, вероятно не подозревая об этом или без его желания, то есть это рассматривается как фактор непреодолимой силы. Задача рассматривается с точки зрения ситуации, включающей не только цель, но и обязательные условия, в которых должна быть решена данная задача.

Для первой и второй трактовки определения задачи должно быть обязательное присутствие субъекта.

Сторонники третьей трактовки задачи не включают субъект в ее определение. «Этой точки зрения придерживался Л.М. Фридман, который в своих работах определяет задачу как модель проблемной ситуации, выраженную с помощью знаков некоторого естественного или искусственного языка» [37, с. 132].

«Проблемная ситуация, отмечает Л.М. Фридман, возникает, когда субъект в своей деятельности, направленной на некий объект, встречает какое-то затруднение, преграду. Однако проблемная ситуация - это не просто затруднение, преграда в деятельности субъекта, а осознанное субъектом затруднение, способ устранения которого он желает найти» [37, с. 132]. Таким образом, в понятие проблемной ситуации Л.М. Фридман включает субъект. Значит, задача есть модель ситуации, элементом которой является

субъект, осознавший затруднение в своей деятельности. Отсюда следует, что возникновение задачи обязано деятельности субъекта.

«Другими словами, Л.М. Фридман наделил понятие задачи «субъективными генами», однако это субъективное он старается не замечать» [37, с. 132].

Во втором определении проблема или ситуация также присутствует, только в зависимости от субъекта она может и не существовать, если субъект ее не замечает. Переплетение первого определения со вторым так же заключается в присутствии субъекта. Но в отличие от третьего определения субъект является методом решения задачи-ситуации, косвенно вовлеченный в нее.

В первой категории некий не описанный авторами субъект сам ставит или создает задачу. Тогда исходя из вышеперечисленных определений субъекты присутствуют в каждом из них. Значит, получается, что субъект всегда ставит задачу для другого субъекта, тем самым говоря о том, что с помощью задачи субъекты общаются друг с другом.

Как описывал выше Л.М. Фридман, дав определение задачи как естественного или искусственного языка, выполнение задачи возможно с помощью общения. Как бы разговаривая сам с собой субъект может поставить себе цель и выполнить ее, или же переложить ее на другого с целью выполнить задачу или выйти из сложившейся проблемной ситуации.

Тогда получается, по мнению Л.М. Фридмана, одну и ту же задачу понимают по-разному и от ее формулировки и понимания задачу можно верно или неверно истолковать, выбрать способ решения или вовсе не решить.

«В данных суждениях мы видим, как Л.М. Фридман абсолютизирует объективный фактор задачи и насколько Ю.М. Колягин абсолютизирует субъективный фактор задачи» [37, с. 132-133].

Т.А. Иванова в своей работе так же опирается на вышеперечисленных авторов. По ее мнению, «термин «задача» широко используется и в жизни, и

в различных науках, и в учебных дисциплинах: психологии, логике, педагогике, математике, физике и т.д. Этим термином обозначаются многие и разные понятия. Поэтому очень трудно дать общее определение понятию «задача». Даже в пределах математики нет однозначного толкования этого понятия» [11, с. 163].

Т.А. Иванова под задачей понимает «задание, которое должен выполнить субъект, или вопрос, на который он должен найти ответ, опираясь на указанные условия и все вытекающие из них следствия» [11, с. 164].

Г.И. Саранцев отмечает следующее: «наиболее распространённым является использование термина «задача» для обозначения ситуации, включающей цель и условия для её достижения. Для понятия задачи характерны две стороны: объективная и субъективная. К первой относятся предмет действия, требование, место в системе задач, логическая структура решения задачи, определённости и неопределённости условия и т.д., ко второй - способы и средства решения» [11, с. 163].

По мнению автора, в контексте учебников математики школьные задачи являются упражнениями [11, с. 139].

Ю.М. Колягин отмечает, что «если термин «задача» понимать достаточно широко (в частности, включить в число задач и любое вычислительное упражнение и любую теорему, доказательство которой предстоит установить или изучить, если считать задачей установление тех или иных признаков изучаемого математического понятия и отбор среди них тех, которые характеризуют это понятие, и т. д.), то станет понятным высказывание о том, что «...занятие математикой состоит в решении задач» [20, с. 35-36].

Т.А. Иванова пишет, что «в любой задаче есть условие, то есть исходные данные, заключение, то есть требование, которое нужно выполнить, и субъект, который это требование выполняет» [11, с. 164].

Кроме того, основными компонентами задачи являются: «условие задачи - начальное состояние; заключение задачи - конечное состояние; решение - преобразование условия задачи для нахождения требуемого заключением искомого; базис решения - теоретическое обоснование решения» [39, с. 115]. Выделяются чисто математические задачи (где присутствует условие, обоснование, решение, заключение) и прикладные математические задачи (где есть только решение и базис решения).

В другой своей работе Л.М. Фридман говорит, что «решение задач — это работа несколько необычная, а именно умственная работа. Чтобы научиться какой-либо работе, нужно предварительно хорошо изучить тот материал, над которым придется работать, те инструменты, с помощью которых выполняется эта работа. Приступая к решению какой-либо задачи, надо ее внимательно изучить, установить, в чем состоят ее требования (вопросы), каковы условия, исходя из которых надо решать задачу. Все это называется анализом задачи» [44, с. 6].

В качестве этапов решения задач Л.М. Фридман, Е.Н. Турецкий используют: «анализ задачи, построение модели, поиск способа решения (доказательства), осуществление решения (доказательства) задачи, проверка решения задачи, исследование задачи, формулирование ответа задачи» [44].

Таким образом, Л.М. Фридман считает, чтобы решить задачу, нужно сначала ее проанализировать, разобраться в ее сущности, учесть все условия задачи и только тогда можно рассчитывать на положительный исход решения задачи.

Углубляясь в предмет школьного образования, математическая задача приобретает особое значение как инструмент формирования логического мышления. При этом важно отметить, что эффективность использования задач в учебном процессе во многом зависит от правильной организации деятельности учащихся по их решению.

Ю.М. Колягин утверждает, что «для решения задачи необходимо развитое творческое мышление, способное решить задачу разными

способами, то есть прибегнуть к различным методам решения задачи, от которого и будет зависеть результат решения» [20, с. 35].

Далее опишем значение задач в обучении математике учащихся общеобразовательной школы.

Задачи – одно из основных средств обучения математике в общеобразовательной школе. Они направлены на формирование у обучающихся определенных знаний, умений и навыков.

При решении школьниками задач реализуются образовательные, практические и воспитательные цели обучения математике.

Общеобразовательные цели составляют овладение обучающимся системы знаний, умений и навыков, дающей представление о предмете математике, ее символике и языке, математическом моделировании, приемах и алгоритме; основными общенаучными методами и эвристиками. В рамках школьной программы математика как учебный предмет необходима им для социальной адаптации и самореализации в обществе, чтобы уметь применять эти знания в других сферах на протяжении всей жизни.

Практические цели включают: формирование умений строить модели простых реальных явлений и исследовать их; ознакомление с ролью математики в современном обществе. Так, математические знания могут быть полезны в различных аспектах жизни. Например: экономические задачи, связанные с финансовыми темами, такими как проценты, кредиты, бюджетирование, позволяют увидеть, как выбор решений влияет на финансовое положение. Задачи, связанные с реальными ситуациями, учат планировать и рассчитывать. Например, рассчитать расходы на питание на неделю для семьи из определённого количества человек, распределить бюджет на покупку товаров или рассчитать расходы на поездку. Геометрические задачи на площадь, объем и периметр применяются для многих повседневных задач. Например, при ремонте комнаты может понадобиться рассчитать площадь стен для поклейки обоев или площадь пола для укладки ламината.

Воспитательные цели составляют формирование у школьников мировоззрения, логической и эвристической компонентов мышления, а также алгоритмического мышления; качеств, необходимых для жизни в современном обществе. Например, формирование высокой степени сознательности, чувства ответственности перед обществом, социальной активности; воспитание чувства товарищества, взаимопомощи, творческой инициативы, дисциплинированности и организованности. Кроме того, не стоит забывать и об эстетическое воспитание: формирование чувства прекрасного, вкуса к прекрасному, потребности преобразовывать окружающий мир и строить человеческие отношения по законам красоты (необычная формулировка условия задачи, например, в сказочной или стихотворной форме; задачи на построения). Также следует отметить и формирование умений рационализировать свою учебную работу и приёмы её оформления, воспитание способности доводить любое учебное задание до конца, ведь верно решить задачу, довести ее до конца – это значит получить удовлетворения от сделанного дела и гордиться собой.

А.А. Темербекова выделяла образовательные и практические функции задач при обучении математике в школе.

Так, образовательное значение математических задач автор видит в следующем: «решая математическую задачу, человек познает много нового: знакомится с новой ситуацией, описанной в задаче, с применением математической теории к ее решению, познает новый метод решения или новые теоретические разделы математики, необходимые для решения задачи, и т. д. Иными словами, при решении математических задач человек приобретает математические знания, повышает свое математическое образование. При овладении методом решения некоторого класса задач у человека формируется умение решать такие задачи, а при достаточной тренировке приобретается навык, что тоже повышает уровень математического образования» [39, с. 118-119]; практическое значение – в том, что «при решении математических задач ученик обучается применять

математические знания к практическим нуждам, готовится к практической деятельности в будущем, к решению задач, выдвигаемых практикой, повседневной жизнью. Почти во всех конструкторских расчетах приходится решать математические задачи, исходя из запросов практики. Исследование и описание процессов и их свойств невозможно без привлечения математического аппарата, т. е. без решения математических задач. Математические задачи решаются в физике, химии, биологии и др. Это означает, что при обучении математике учащимся следует предлагать задачи, связанные со смежными дисциплинами (физикой, химией, географией и др.), а также задачи с техническим и практическим, жизненным содержанием» [39, с. 118-119].

Автор указывает, что «задачи, как средство обучения, могут быть направлены на формирование знаний, умений и навыков учащихся (обучающие задачи) или на осуществление контроля со стороны учителя или учащихся уровня сформированности знаний, умений и навыков (контролирующие задачи). Обучающие задачи прежде всего связаны с формированием элементов теоретических знаний и связанных с ними умений» [39, с. 118-119].

По мнению Г.И. Саранцева, «задачи — основное средство развития пространственного мышления, творческой деятельности школьников, в процессе решения задач формируются не только логическая, эвристическая, алгоритмическая составляющие мышления, но и многие нравственные качества учащихся» [37, с. 139].

Действительно, при решении задач у учеников развиваются нравственные понятия и ценности, например, соревновательный момент, когда в условиях задачи сказано, что кто-то выполнил работу быстрее или изготовил больше деталей. Или, например, спортивные задачи на пройденные дистанции побуждают ученика достичь тех же успехов. Также задачи развивают пространственное мышление, позволяют узнать больше информации в различных областях деятельности.

Ю.М. Колягин считает, что «задачи выступают в роли средства для изучения математики, а их упорядоченный комплекс — в виде определенного метода изучения математики. Грубо говоря, в этом случае задачи сливаются с методикой обучения, становятся почти неотличимы от указаний учителя по организации учебной деятельности школьников. Такая ситуация имеет место, например, при осуществлении проблемного обучения. Такого рода обучение детей успешно осуществляется не только на уровне школы, но и ранее, например, в детском саду» [21, с. 12].

Рассмотрим различные классификации видов задач.

Существуют различные виды задач:

- «по характеру требования: задачи на доказательство; задачи на построение; задачи на вычисление;
- по функциональному назначению: задачи с дидактическими функциями; задачи с познавательными функциями; задачи с развивающими функциями;
- по величине проблемности: стандартные (известны все компоненты задачи); обучающие (неизвестен один из четырех компонентов); поисковые (неизвестны два из четырех компонентов); проблемные (неизвестны три из четырех компонентов);
- по методам решения: задачи на геометрические преобразования; задачи на векторы и другие; по числу объектов в условии задачи и связей между ними: простые; сложные;
- по компонентам учебной деятельности: организационно-действенные; стимулирующие; контрольно-оценочные задачи.

Кроме того, различают задачи стандартные и нестандартные; теоретические и практические; устные и письменные; одношаговые, двушаговые и другие; устные, полуустные, письменные и т.д.» [39, с. 118].

Так, в задачах на вычисление нужно в основном производить расчеты, на доказательства приходится много доказывать с помощью теорем и аксиом, а в задачах на построение приходится выполнять много чертежей.

Тогда получается, что характер и принцип построения математической задачи кроется в объеме ее компонентов, в уровне подготовки учащегося и времени на решения задачи. Помимо этого не только характер компонентов, но и их количество влияют на ход решения задачи: количество искомых компонентов напрямую зависит от объема условия выполнения задачи.

Также есть классификация задач А.Я. Цукаря по характеру связей между элементами и соотношению между воспроизводящей и творческой деятельностью учеников, согласно которой задачи делятся на: алгоритмические, полуалгоритмические и эвристические задачи. Данная классификация позволяет выстраивать систему заданий с постепенным усложнением и развитием творческого потенциала учащихся [39, с. 116-117].

Алгоритмические задачи интересны ученикам тем, что они позволяют решать задачи с помощью определенного алгоритма, на основе каких-то теорем, свойств, формул. Задачи часто приводятся в начале изучения темы и их проще решать, заведомо зная алгоритм, количество шагов решения задачи, что служит примером для решения подобных задач для закрепления изучения данной темы.

Например, приведем алгоритм решения квадратного уравнения через нахождение дискриминанта (таблица 1).

Таблица 1 - Алгоритм решения квадратного уравнения

| Алгоритм решения                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | Образец решения                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>Чтобы решить квадратное уравнение <math>ax^2 + bx + c = 0</math> по формуле нужно:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Определить значения <math>a, b, c</math>.</li> <li>2. Вычислить дискриминант по формуле <math>D = b^2 - 4ac</math>.</li> <li>3. Определить число корней, учитывая что: при <math>D &lt; 0</math> действительных корней нет; при <math>D = 0</math> один корень; при <math>D &gt; 0</math> два корня.</li> <li>4. При наличии корней вычислить их по формулам:<br/> при <math>D = 0</math> <math>x = \frac{-b}{2a}</math>;<br/> при <math>D &gt; 0</math> <math>x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}</math>.</li> </ol> | <p>Решить уравнения:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. <math>8x^2 + 4x + 3 = 0</math>.<br/> Решение: <math>a = 8, b = 4, c = 3, D = 4^2 - 4 \cdot 8 \cdot 3 = -80</math>,<br/> при <math>D &lt; 0</math>, действительных корней нет.<br/> Ответ: действительных корней нет.</li> <li>2. <math>x^2 - 6x + 9 = 0</math>.<br/> Решение: <math>a = 1, b = -6, c = 9, D = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 0</math>,<br/> при <math>D = 0</math> один корень: <math>x = \frac{6}{2 \cdot 1} = 3</math>.<br/> Ответ: <math>x = 3</math>.</li> <li>3. <math>5x^2 - 3x - 2 = 0</math>.<br/> Решение: <math>a = 5, b = -3, c = -2, D = (-3)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-2) = 49</math>, при <math>D &gt; 0</math> два корня:</li> </ol> |

|  |                                                                                                                                                  |
|--|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|  | $x_1 = \frac{3+\sqrt{49}}{2 \times 5} = 1, x_2 = \frac{3-\sqrt{49}}{2 \times 5} = -0,4$ <p>Ответ: <math>x = -0,4</math>; <math>x = 1</math>.</p> |
|--|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

Полуалгоритмические задачи – это задачи, в которых нужно найти связь между компонентами, вычленив в одной задаче несколько и решить их, при этом используя разные алгоритмы решения задач. При этом школьник учится применять усвоенные ранее алгоритмы в разных ситуациях. Например, решая тригонометрическое уравнение, приводимое к квадратному, нужно сначала сделать замену переменных, привести к квадратному уравнению, решить его, вернуться к замене и уже в самом конце решить одно или несколько тригонометрических уравнений (с учетом подходящих корней).

Пример 1. Решить уравнение:  $3\cos^2 x - 10\cos x + 3 = 0$ .

Решение. Пусть  $\cos x = a$ , при этом  $-1 \leq a \leq 1$ . Тогда  $3a^2 - 10a + 3 = 0$ ,  
 $D = 100 - 36 = 64 = 8^2$ ,  $a_1 = \frac{10+8}{6} = 3$  - не подходит по условию  $-1 \leq a \leq 1$ ;  
 $a_2 = \frac{10-8}{6} = \frac{1}{3}$ . Вернемся к замене:  $\cos x = \frac{1}{3}$ ;  $x = \pm \arccos \frac{1}{3} + 2\pi k, k \in Z$ .

Ответ:  $\pm \arccos \frac{1}{3} + 2\pi k, k \in Z$ .

Вместе с этим, «эвристические задачи — это задачи, для решения которых необходимо выявить некоторые скрытые связи между элементами условия и требования или найти способ решения, причем этот способ не является очевидной конкретизацией некоторого обобщенного правила, известного ученику, или сделать и то и другое» [39, с. 117]. Другими словами, сам ученик определяет приемы и методы решения, развивает логическое мышление.

Пример 2. Решить задачу: как отмерить 3 л воды, если есть ведра 7 л и 2 л?

Решение.

Шаг 1. Наполнить ведро на 7 л.

Шаг 2. Из него налить 2 л в маленькое ведро.  $7 - 2 = 5$  л. В большом ведре останется 5 л.

Шаг 3. Вылить воду из маленького ведра. Теперь маленькое ведро пустое. Налить в него опять воду из большого ведра.  $5 - 2 = 3$  л.

В большом ведре осталось 3 л, как и требовалось.

Сюжетная задача, в которой описывается жизненная ситуация или приближенная к ней. Такие задачи позволяют учащимся переносить или проецировать реальные жизненные моменты.

Пример 3. Конькобежец может развивать скорость до 13 м/с. За какое время он пробежит дистанцию длиной 2,6 км?

Решение:  $t = \frac{S}{v}$ ;  $t = \frac{2600}{13} = 200$  (с). Ответ: 200 с.

Л.М. Фридман выделяет следующие классификации задачи: «по характеру объектов: практические (реальные) и математические; по отношению к теории: стандартные и нестандартные; по характеру требований: нахождение (распознавание) искомого, преобразование или построение, доказательство или объяснение» [44, с. 2].

При решении текстовой задачи с помощью составления уравнения необходимо придерживаться следующей последовательности действий:

- «1) вычленив условие и требование задачи;
- 2) установить зависимость между данными и искомыми;
- 3) выявить способ составления уравнения и т. д.» [27, с. 118].

В книге Н.Л. Стефановой выделяются следующие циклы задач при определении функций задачного материала в школьном курсе математики:

- «на актуализацию знаний, включая задачи сопутствующего повторения;
- на мотивацию;
- для изучения нового материала (с выделением задач, предназначенных для введения нового; а также задач для отработки теории на первичном уровне);

- на закрепление изученной теории, включая задачи, требующие комплексного применения знаний, то есть выполняющие функции текущего повторения;
- задачи сопутствующего повторения (задачи на закрепление ранее изученного материала вне связи с новым материалом);
- пропедевтические задачи (задачи, подготавливающие к восприятию новой (следующей) темы)» [27 с. 86].

Итак, под задачей мы будем понимать, «задания, которое должен выполнить субъект, или вопрос, на который он должен найти ответ, опираясь на указанные условия и все вытекающие из них следствия» [11, с. 164].

Далее рассмотрим понятие метода и приема решения задачи.

Приведем определение метода решения задачи, описанное Ю.М. Колягиным: «для решения задачи необходимо применять не только стандартные инструменты и правила, но и при необходимости переосмыслить суть задачи для ее решения. Предлагается отбирать в условиях задачи полезную информацию, тем самым разрабатывать новые методы решения. Большая часть основана на анализе прошлого опыта, анализе часто противоположных решениях задачи, анализе нестандартных ситуаций» [21, с. 27].

По словам Т.А. Ивановой: «последовательность элементарных шагов, составляющих решение стандартной задачи, вполне определена. Для нестандартной задачи ее нужно отыскивать, конструировать. При этом поиск решения задачи и само решение не всегда четко делимы. Практически одни и те же методы участвуют и при поиске, и при осуществлении решения. Поэтому, говоря далее о методах решения задач, мы будем иметь в виду и методы поиска решения» [11, с. 168].

Также Т.А. Иванова считает, что «к какому бы виду не относилась задача, основными методами поиска ее решения являются рассуждения,

построенные по схемам синтеза, анализа или попеременного использования того и другого методов» [11, с. 168].

Рассмотрим основные методы решения задач.

Основными логическими методами решения задач и поиска решения являются анализ и синтез.

Так, О.Б. Епишева, В.И. Крупич подчеркивают, что «поиск решения задач осуществляется в основном с помощью аналитико-синтетического метода, а именно: анализ задачи состоит в том, что мы предполагаем ее уже решенной и находим различные следствия (или предпосылки) этого предположения, а затем в зависимости от вида этих следствий пытаемся найти путь отыскания решения поставленной задачи» [9].

Авторы выделяют этапы аналитико-синтетического рассуждения: «1) предположим, что задача решена; 2) посмотрим, какие из этого можно извлечь выводы; 3) сопоставляя полученные выводы (синтез), попытаемся найти способ решения задачи» [9, с. 51-52].

Т.А. Иванова, говоря о методах решения задач как о методах поиска решения задачи, также выделяет синтетический метод решения задач. «Синтетический метод в задачах на вычисление состоит в следующем: на основе некоторых элементов условия составляется и решается задача или серия задач; на основе полученных результатов и неиспользованных элементов условия составляется и решается новая вспомогательная задача или серия задач и так далее, до тех пор, пока не будет получено искомое» [11, с. 169].

Пример 4. «Из Воронежа в Краснодар отправился пассажирский поезд, скорость которого равна 80 км/час. Спустя 15 минут из Краснодара отправляется скорый поезд, скорость которого равна 130 км/час. Через сколько часов после выхода поезда из Воронежа произойдет встреча, если считать расстояние от Воронежа до Краснодара равным 650 км?» [11]

Решение: 1)  $80 \cdot \frac{1}{4} = 20$  (км) - прошел пассажирский поезд за 15 минут (так как 15 минут - это четвертая часть часа); 2)  $650 - 20 = 630$  (км) - расстояние между поездами на момент выхода скорого поезда; 3)  $80 + 130 = 210$  (км/ч) - скорость сближения поездов; 4)  $\frac{630}{210} + 0,25 = 3,25$  (ч) или 3 часа 15 минут.

Ответ: 3 часа 15 минут.

Таким образом, получается, что на первых шагах мы используем не все данные, а только часть из них, и на основе новых полученных данных и тех неиспользованных начальных данных составляется новая задача с последующим ее решением.

А.А. Папышев в своей работе описывает особенности применения векторного метода при обучении учащихся решению математических задач. Использование векторного метода в конкретных ситуациях будет эффективным: «а) при доказательстве параллельности прямых и отрезков; б) при делении отрезка данной точкой в указанном отношении; в) при выяснении принадлежности трех точек одной прямой; г) при доказательстве перпендикулярности прямых и отрезков; д) при доказательстве зависимостей между длинами отрезков; е) при нахождении величины угла» [32, с. 28].

Кроме того, «векторным методом можно решить значительную часть задач из школьных учебников и задачников по геометрии, он может быть использован при решении отдельных геометрических задач, предлагаемых на итоговых государственных испытаниях по математике. В пособии рассмотрены только задачи на доказательство и вычисление, поскольку именно эти задачи могут встретиться на экзамене. Вместе с тем, этот метод может с успехом применяться при решении задач на максимум и минимум, отыскание геометрических мест точек, доказательство геометрических неравенств» [32].

Пример 5. Решите задачу: «Докажите, что диагонали четырехугольника перпендикулярны тогда и только тогда, когда суммы квадратов его противоположных сторон равны.

Доказательство. Пусть диагонали AC и BD четырехугольника ABCD перпендикулярны, тогда  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} = 0$ . Известно, что для любых четырех точек A, B, C, D имеет место тождество:  $\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{CD}^2 - \overrightarrow{AD}^2 - \overrightarrow{BC}^2 = 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB}$ .

Из данного тождества следует, что  $\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{CD}^2 - \overrightarrow{AD}^2 - \overrightarrow{BC}^2 = 0$ . Откуда  $\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{CD}^2 = \overrightarrow{AD}^2 + \overrightarrow{BC}^2$  или  $AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$ . Проведя преобразования в обратном порядке, получим:  $2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} = 0$ . Отсюда следует, что диагонали четырехугольника ABCD перпендикулярны» [16, с. 81; 87].

Также А.А. Папышев описывает особенности применения координатного метода при обучении учащихся решению математических задач. «Решение задач координатным методом, также как векторным, предполагает выполнение трех этапов: а) перевод задачи на координатный (аналитический) язык; б) преобразование аналитического выражения; в) обратный перевод, т.е. перевод с координатного языка на язык, в терминах которого сформулирована задача. Применение координатного метода способствует обучению учащихся построению математических моделей изучаемых процессов, изучению их и применению» [32, с. 29].

Пример 6. Решите задачу: «Докажите, что сумма квадратов всех сторон параллелограмма равна сумме квадратов его диагоналей» [22].

Доказательство. Пусть ABCD - данный параллелограмм. Введем прямоугольную систему координат. Если  $AD = BC = a$ ; точка B имеет координаты (b; c), тогда D(a; 0), точка C(a + b; c). Используя формулу расстояний между точками, находим:  $AB^2 = b^2 + c^2, AD^2 = a^2, AC^2 = (a + b)^2 + c^2, BD^2 = (a - b)^2 + c^2$ , тогда:  $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = 2(AB^2 + AD^2) = 2(a^2 + b^2 + c^2); AC^2 + BD^2 = (b + a)^2 + c^2 + (a - b)^2 + c^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2)$ .

$+ c^2 + (a - b)^2 + c^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2)$ . Таким образом,  $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2$ , что и требовалось доказать.

Я.И. Груденов в своей работе отмечает «многие задачи, которые решаются на уроках математики и других предметов, можно условно подразделить на элементарные и неэлементарные. Роль первых сводится к выработке навыков, необходимых для решения вторых. Например, учащимся предлагают разложить на множители выражение  $(x^3 + y^3)$ . Это элементарное упражнение. Не умея его выполнить, учащийся не сможет упростить выражение  $\sin 6\alpha + \cos 6\alpha + 3\cos 2\alpha \cdot \sin 2\alpha$ . Последнее упражнение можно считать неэлементарным. Вообще, указанная классификация условна и проводится на основе не математических, а дидактических соображений. Неэлементарная задача на некотором этапе обучения может стать для учащегося элементом решения более сложных задач.

Методом элементарных задач условимся называть такой метод, при котором на основе простейших упражнений у учащихся формируются навыки выполнения элементарных операций (не следует смешивать с методом целесообразных задач, где цель подготовительных упражнений — подвести учащихся к пониманию нового, пробудить их активность, и вовсе не предполагается добиться выработки навыков выполнения подобных упражнений). Методом неэлементарных задач условимся называть такой метод, при котором у учащихся в процессе работы с неэлементарными задачами формируются умения и навыки их решения и одновременно навыки выполнения простых промежуточных преобразований. Ранее некоторые методисты также подчеркивали необходимость отрабатывать элементы решения более сложных задач. В этих высказываниях отражается идея метода элементарных задач» [6].

Иными словами, задача называется элементарной, если она состоит из одного или двух умозаключений. Задача называется неэлементарной, если она состоит из более чем двух умозаключений. При решении неэлементарных задач у учеников формируются умения и навыки

применения отдельных теорем, определений и аксиом. При методе неэлементарных задач у учащихся формируются умения, навыки решения элементарных задач. А также навыки выполнения простых промежуточных преобразований. Чтобы решить задачу в целом, нужно понимать и знать, как решаются отдельные элементы задачи.

Например, в учебнике геометрии для 7-9 классов есть задача: «В параллелограмме  $MNPA$  проведен перпендикуляр  $NH$  к прямой  $MA$ , причем точка  $H$  лежит на стороне  $MA$ . Найдите стороны и углы параллелограмма, если известно, что  $MN = 3\text{ см}$ ,  $HA = 5\text{ см}$ ,  $\angle MNH = 30^\circ$ » [2]. Чтобы решить эту задачу, ученик должен уметь решать ряд элементарных задач:

Задача 1. Найти гипотенузу в прямоугольном треугольнике, если катет лежит напротив угла в  $30^\circ$ .

Задача 2. Найти длину отрезка, если точка делит отрезок на два отрезка, длины которых известны.

Задача 3. Найти острый угол в прямоугольном треугольнике, если один из острых углов известен.

Задача 4. Две параллельные прямые пересечены секущей. Найти один из односторонних углов, если другой угол известен.

Поэтому, задавая неэлементарные задачи, учитель должен предусмотреть возможности ученика, и, если есть необходимость, начать неэлементарную задачу с элементарной.

Следующим методом решения задач является алгебраический метод. «По большей части речь идет о текстовых задачах, где в основе лежит либо конкретная жизненная ситуация (задания по движению, совместную работу и прочее), либо математическая (сюда включены числовые значения, алгебраические примеры, геометрические задачи и другие). Это задачи, где одно число или одна величина берется, например, за неизвестное, а все связи, которые действительно существуют между величинами и указаны в условиях, преобразуются в форму неравенств, уравнений, систем и затем

решаются полученные уравнения (неравенства, системы). Тогда решение неравенства или системы уже называют синтезом» [11, с. 169].

Пример 7. Решить задачу. В одном бассейне налито 100 литров воды, а во втором – 150 литров воды. Каждый час в первый бассейн вливается 15 литров воды, а во второй – 5 литров. В какие моменты времени в первом бассейне будет больше воды, чем во втором?

Решение. За  $x$  часов в первый бассейн вольётся  $15x$  литров воды и в нём станет  $(100 + 15x)$  литров воды. Также находим, что через  $x$  часов во втором бассейне будет  $(150 + 5x)$  литров воды. Надо найти такие значения  $x$ , для которого выполняется неравенство  $(100 + 15x) > (150 + 5x)$ , то есть надо решить данное неравенство:  $(100 + 15x) > (150 + 5x)$ ;  $(15x - 5x) > (150 - 100)$ ;  $10x > 50$ ;  $10x > 50$ ;  $x > 5$ .

Итак, в первом бассейне воды окажется больше, чем во втором при  $x > 5$ , то есть после 5 часов с начала вливания воды. Ответ: 5 ч.

Отметим, что «для задач на вычисление характерна еще одна разновидность анализа. Например, в геометрической задаче требуется найти площадь треугольника. В этом случае записываем формулу площади и выясняем, какие величины, входящие в формулу, неизвестны. Ищем возможности для нахождения этих величин. Может оказаться, что для нахождения первых потребуется найти еще какие-то величины, решить вспомогательные задачи. Так продолжается до тех пор, пока не будет найден способ вычисления последней из вспомогательных величин. Проведенный здесь анализ похож на восходящий анализ в задачах на доказательство. Эту разновидность анализа использовали математики древности. Соответственно его и называют анализом древних или классическим анализом. Решение цепочки задач от последней к первой есть синтез» [11, с. 169].

Методы анализа и синтеза «могут модифицироваться, дополняться или заменяться некоторыми другими методами, чередоваться в пределах решения одной задачи, но именно анализ и синтез составляют основу поиска решения

и решения. Каждый из этих методов в чистом виде, т.е. изолированно от другого, применяется довольно редко. Во-первых, любой анализ (поиск решения) предполагает синтез (решение). Во-вторых, синтез осуществляется с прицелом на требование задачи, т.е. предполагает анализ. В-третьих, они могут использоваться попеременно. В-четвертых, решение не всегда идет в одну линию. Чаще всего происходит ветвление, и в каждой «ветке» поиск осуществляется своим методом» [11, с. 170].

Т.А. Иванова указывает, что наряду с логическими методами решения задач существуют «содержательные, специальные методы решения задач. Это методы, основанные на содержании того теоретического материала, который используется при решении. Например, длину отрезка можно найти, используя равенство треугольников, формулы площадей треугольника, теорему Пифагора, подобие треугольников, векторы, координаты и так далее» [11].

Н.Л. Стефанова, Н.С. Подходова выделяют метод «технической ошибки». Встречая стандартную задачу и применяя к ее решению известную ему цепь действий, человек рассуждает примерно так: я знаю, как это сделать, и если мои действия не приводят к желаемому результату, то мной была допущена техническая ошибка. Применяя же какой-либо метод при решении нестандартной задачи, мы можем лишь надеяться на получение результата (так как этот метод помогал нам и раньше). И если результат не получен, то либо предполагаемый ход решения не был верен, либо следовало применить какой-либо другой (возможно, и неизвестный нам) метод» [27, с. 27].

Л.М. Фридман в своей книге описывал три метода решения нестандартных задач. Первый заключался в разбиении задачи на более простые части, а именно: условие, объект, требование задачи. Тем самым можно увидеть похожую линию мышления у Ю.М. Колягина про переосмысление или перефразирования самой задачи и выбора метода ее решения; вторым является «замена данной задачи, ей равносильной с

помощью: преобразование условия; замены переменных, неизвестных и замены, (кодирования) объектов другими; третий - это введение вспомогательных элементов для сближения данных и искомых; расчленения задачи на части и придание задачи определённости» [44, с. 195].

По мнению Ю.М. Колягина, результат решения задачи, как и метод решения задачи, зависят от сферы деятельности, в условиях которой ставится задача. Тогда отличием математической задачи является определенный набор действий, который применяется в качестве решения задачи. Главной причиной такого положения дел, несомненно, являются, прежде всего, объективные трудности, связанные с характеристикой этого понятия в общем виде. Вместе с этим, немалое значение имеет и то обстоятельство, что до недавнего времени для большинства исследователей наибольшую практическую ценность представляло изучение процесса решения задач человеком как важной поведенческой проблемы, а также путей повышения эффективности процесса решения задач человеком (или машиной).

Кроме того, при решении задач может использоваться метод математического моделирования, позволяющий изучать объекты окружающего мира.

Всякая типология задач является условной и зависит от многих обстоятельств. «Так, например, одну и ту же задачу, бывает, можно решить и арифметическим, и алгебраическим, и геометрическим методами. Отнесение задачи к тому или иному виду по степени проблемности во многом зависит от того, кто решает эту задачу. Несмотря на это, различные типологии позволяют учителю более осознанно подходить к отбору задач в зависимости от целей обучения» [39, с. 103-104].

Таким образом, в теории и методике обучения математике выделяют методы решения задач по: уровням деятельности (алгоритмический, поисковый, эвристический), методам решения (алгебраический, арифметический, геометрический, логический, векторный, координатный).

Ю.М. Колягин отмечает, отбор в условиях задачи полезной информации способствует поиску новых методов их решения [21, с. 27].

Известно, что составной частью методов обучения являются приемы учебной деятельности учителя и учащихся. «Методические приемы — действия, способы работы, направленные на решение конкретной задачи. За приемами учебной работы скрыты приемы умственной деятельности (анализ и синтез, сравнение и обобщение, доказательство, абстрагирование, конкретизация, выявление существенного, формулирование выводов, понятий, приемы воображения и запоминания)» [39, с. 64].

В свою очередь Т.А. Иванова считает, что «в поиске решения задачи могут быть использованы специальные методы и приемы, знакомые по решению других задач. Прием или метод решения могут подсказать измерения и вычисления с конкретными данными, рисунок к геометрической задаче, выполненные по всем правилам с использованием соответствующих инструментов (хотя в общем случае это требование совсем необязательно) и другие средства» [11, с. 166].

Отметим, что прием решения задачи — это простейший способ ее решения, позволяющий решать задачу в одно или несколько несложных действий. Одной из главных задач учителя, по мнению Т.А. Ивановой, является научить школьника решать задачи, выстраивать в правильном порядке ход урока, закрепляя знания в ходе решения домашних заданий и практических работ на уроке [11, с. 168].

Также отводится роль поиску решения задачи и восприятию условий задачи, воспроизведению верной цепочки мышления, принятию решения, каким приемом воспользоваться. Сначала в присутствии учителя, затем самостоятельно в домашних заданиях, контрольных в классе, на экзаменах ученик проделывает вышеперечисленные действия.

По мнению Т.А. Ивановой, «многие общелогические и специфические умения (эвристические приемы), входящие в деятельность по решению задачи, формируются у учащихся при реализации технологических

процессов усвоения определений, правил, теорем в операционно-познавательной и особенно в рефлексивно-оценочной частях. Работа с упражнениями в этих частях технологий и составляет первый, начальный этап в подготовке школьников к решению задач более высокого уровня сложности» [11, с. 174].

Один из приемов решения задач - когда после каждой пройденной темы в учебнике есть большое количество вопросов и задач для закрепления материала как для классного так и для домашнего изучения. Прием направлен на закрепление самостоятельного решения задач, принятие правильного решения.

Также опираясь на работы Л.М. Фридмана, Д. Пойа, Г.И. Саранцева большой акцент делается на эвристические приемы решения задач, которые включают в себя поиск решения, развитие правильного мышления и нестандартного поиска приема решения задачи. Эвристические приёмы решения задач - это совокупность методических правил и логических приёмов, в основе которых лежит творческий поиск и изобретательность.

Например, метод аналогии. Это такой метод, где задача решается по схожей задаче с другими значениями и похожими искомыми данными и начальными условиями. Такой прием часто используется на начальном уровне изучения темы и первых домашних заданиях, чтобы сформировать у ученика способность решить задачу самостоятельно без участия учителя. Метод инверсии состоит в том, чтобы использовать подход «поменять местами». Эффективным приемом закрепления навыков решения задач выступает составление и решение обратных задач, что помогает усвоению связей между данными и искомым. Метод «мозгового штурма» - из определения прием можно отнести к коллективной работе, когда решение приходит в ходе работы нескольких человек. Например, групповая игра в классе на выполнение каких-нибудь задач или соревнования.

В учебнике О.Б. Епишевой и В.И. Крупича указано, что «учителю необходимо раскрыть содержание и структуру учебной деятельности на

данном этапе обучения, то есть определить предмет усвоения, включающий теоретические знания и соответствующие способы действий. Наиболее существенным здесь является умение учителя выделить приемы учебной деятельности учащихся по усвоению теоретических знаний» [9, с. 14].

В математике, как и в любом другом предмете, есть теоретическая и практическая часть, поэтому необходимо на теоретической части распределить материал так, чтобы он усваивался учениками постепенно, при этом усиливая сложность темы урока. Поэтому одним из первостепенных методов решения задачи является ее переформулирование. Суть этого эвристического приема заключается в том, что условия или требования, а возможно, и то и другое одновременно, заменяются на новые, эквивалентные имеющимся, но позволяющие упростить поиск решения.

Так, «актуальность данного приема заключается в том, что он предполагает отказ от готовых знаний, их непосредственного воспроизведения (репродукции). Основывается на поиске скрытой, неявной информации. Требуем от человека наличия таких качеств, как, изобретательность и умения работать творчески. Большинство учащихся имеют привычку решать задачу по готовому шаблону, и, если задача встречается в неявном виде, не виден основной метод решения, многие школьники испытывают трудность в ее решении.

С.Л. Рубинштейн определяет переформулирование как прием словесно-логического мышления, который состоит в создании эквивалентных суждений с использованием научных и житейских понятий. Он считал, что основные формы мышления, осуществляющиеся при «переформулировании», - это анализ через синтез, когда у объекта, в процессе мышления, обнаруживаются другие связи и свойства и он выступает уже в новых качествах и понятиях. Переформулирование позволяет, как уточнить, так и получить новую или дополнительную информацию» [35, с. 126]. Иными словами, целью переформулирования задачи является изложение условия задачи в другой форме, чтобы сделать ее

более понятной и наглядной. Важную роль играет не просто заучивание правил и формул, а полное понимание и восприятие предмета для дальнейшего его применения в учебе и в жизни. Материал мало выучить, его нужно понимать и уметь его правильно применять на следующих этапах.

О.Б. Епишева, В.И. Крупич подчеркивают, что «приемы учебной деятельности должны составлять систему, адекватную системе изучаемого материала. Построение такой системы осуществляется с помощью классификации приемов учебной деятельности.

Классификация приемов учебной деятельности может быть проведена по различным основаниям: 1) характер (тип) учебной деятельности учащихся; 2) этапы процесса усвоения знаний и способов деятельности» [9, с. 14-15].

В первом необходимо учитывать возраст ученика и степень его подготовки, а также сложность изучаемой темы. Учителю необходимо определить, сколько времени ему нужно уделить на конкретный этап изучаемой темы. Тем самым выделяется некий подприем. Во втором выстраивается цепочка процесса обучения.

По первому основанию выделяются четыре группы приемов учебной деятельности:

Группа 1. Общеучебные приемы – эти приемы используются в разных предметах, не только в математике. В свою очередь они делятся на две подгруппы:

- приемы организации учебной деятельности – самоконтроль, работа с учебниками, самодисциплина, организация выполнения домашнего задания, работа ученика у доски, что позволяет лучше социализироваться в обществе;
- приемы, направленные на улучшение мыслительной деятельности, логического мышления и восприятия задачи.

Группа 2. «Общие приемы учебной деятельности по математике - эти приемы схожи с общеучебными приемами, но более углублены, например ведение тетради по математике» [9].

Группа 3. «Специальные приемы учебной деятельности по отдельным математическим дисциплинам (арифметике, алгебре, геометрии, началам анализа)» [9]. Эти приемы зависят от конкретного раздела изучения математики: приемы решения уравнений, неравенств и их систем построения геометрических фигур и т.д., в которых можно выделить подгруппы частных приемов.

Группа 4. Частные приемы учебной деятельности – это приемы для решения более узких и конкретных задач.

Так, «по второму основанию в школьном курсе математики можно выделить следующие три группы приемов учебной деятельности учащихся:

1. Приемы восприятия новых знаний и способов деятельности.
2. Приемы переработки и осмысления новых знаний и способов деятельности.
3. Приемы закрепления и применения знаний и способов деятельности» [9, с. 18].

В учебнике Ю.М. Колягина рассматривается прием «принципа непрерывности». Этот принцип основан на математическом наблюдении, когда объект или какой-то показатель изменялся в течение промежутка времени и если его показатель меньше значения, а в конце исследуемого промежутка больше, то в какой-то момент его значение будет равно а [21, с. 44].

Пример 8. Решить задачу: автомобиль ускоряется равномерно, в 13:00 его скорость была 20 км/ч, в 14:00 – 100 км/ч. Какая скорость была у автомобиля в 13:30?

Решение: 1)  $\frac{100-20}{2} = 40$  (км/ч) – по столько прибавляется скорость каждые 30 минут; 2)  $20 + 40 = 60$  (км/ч) – скорость автомобиля в 13:30.

Ответ: 60 км/ч.

Следующим приемом Ю.М. Колягин рекомендует решать задачу несколькими способами, что не всегда понятно ученикам, зачем решать одну и ту же задачу, когда ответ уже есть. По мнению автора это с одной стороны, вроде бы облегчает наши действия, но, с другой стороны, усложняет их, так как вступает в силу психологическая инерция. Преодолевая в себе эту инерцию, мы воспитываем у себя гибкость ума, важную для любого человека, не только в математике» [21, с. 45].

Чаще всего ученики выбирают более легкий и удобный способ решения задачи. Хотя задача может решаться по-разному и учащийся должен овладеть всеми способами или методами решения данной задачи, которые изучаются в школьной программе.

Пример 9. Решить систему уравнений методом подстановки или методом сложения: 
$$\begin{cases} 2x + 3y = 12, \\ 3x - y = 7. \end{cases}$$

Способ 1: метод подстановки: 
$$\begin{cases} y = 3x - 7 \\ 2x + 3(3x - 7) = 12 \end{cases}; \quad 2x + 9x - 21 = 12; \quad 11x = 33; \quad x = 3; y = 3 \cdot 3 - 7; \quad y = 2.$$

Способ 2: метод сложения. Умножаем второе уравнение на 3. Имеем:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 12 \\ 9x - 3y = 21 \end{cases}; \quad 11x = 33; \quad x = 3; y = 3 \cdot 3 - 7; \quad y = 2. \text{ Ответ: } (3; 2).$$

Пример 10. Решить уравнение: а)  $2x^2 - 5x + 2 = 0$ ; б)  $x^2 - 2x - 8 = 0$ ; в)  $x^2 + 4x - 5 = 0$ .

Решение. Решим данные квадратные уравнения с помощью различных приемов.

Прием 1. Решение квадратных уравнений по формуле дискриминанта.

$2x^2 - 5x + 2 = 0. D = 25 - 16 = 9; x_1 = \frac{5+\sqrt{9}}{2 \cdot 2} = 2; x_2 = \frac{5-\sqrt{9}}{2 \cdot 2} = 0,5.$

Ответ:  $x = 0,5; x = 2$ .

Прием 2. Разложение левой части на множители.

$x^2 - 2x - 8 = 0$ . Разложим левую часть на множители:  $x^2 - 2x - 8 = x^2 - 4x + 2x - 8 = x(x - 4) + 2(x - 4) = (x + 2)(x - 4)$ . Далее имеем:  $(x + 2)(x - 4) = 0$ .

Так как произведение равно нулю, то, по крайней мере, один из его множителей равен нулю:  $x + 2 = 0$  или  $x - 4 = 0$ ;  $x = -2$  или  $x = 4$ .

Ответ:  $x = 4$ ;  $x = -2$ .

Прием 3. Решение квадратных уравнений по обратной теореме Виета.

Сумма корней приведенного квадратного уравнения  $x^2 + px + q = 0$  равна второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком, а произведение корней равно свободному члену, то есть:  $x_1 + x_2 = -p$ ,  $x_1 \cdot x_2 = q$ .

Имеем:  $x^2 + 4x - 5 = 0$ . Так как в этом уравнении  $a = 1$ , квадратное уравнение считается приведённым, значит, можно использовать теорему Виета. Выпишем коэффициенты  $p$  и  $q$ :  $p = 4$ ,  $q = -5$ . Запишем теорему Виета для квадратного уравнения:  $x_1 + x_2 = -4$ ,  $x_1 \cdot x_2 = -5$ . Методом подбора находим корни уравнения:  $x_1 = -5$ ,  $x_2 = 1$ . Ответ:  $x = -5$ ;  $x = 1$ .

Кроме того, Ю.М. Колягин отмечает, что «Если задача такова, что в ходе ее решения предстоит сделать слишком много указаний, то полезнее применить прием разбора готового решения. Начать следует с того же — предложить задачу и дать учащимся время для ее обдумывания. Если в течение некоторого времени ни у кого из школьников не возникает более или менее плодотворной идеи, записывается готовое решение задачи без каких-либо комментариев и без обоснования (по его основным этапам). Затем решение разбирается, анализируется и обосновывается самими школьниками под руководством учителя» [21, с. 36].

Н.Л. Стефанова, Н.С. Подходова отмечают, что понятие метода и способа решения задач не всегда тождественны. Так, авторы пишут, что «в рамках каждого метода определены различные способы решения задач».

В арифметическом методе можно выделить следующие способы: приведения к единице, отношений, обратности, исключения неизвестных, пропорционального деления, подобия и т. д.

Алгебраический метод предусматривает перевод сюжета на математический язык на основе известных зависимостей между величинами, построение математической модели сюжета, решение задачи в рамках математической модели, интерпретацию полученного результата в сюжет, формулировку ответа. Математической моделью сюжетной задачи могут служить числовое выражение, уравнение, система уравнений, неравенство, система неравенств, функция, график и т. д.

Геометрический метод предусматривает использование геометрических объектов и их свойств при решении задачи в рамках математической модели (метод сравнения длин отрезков (отрезочные диаграммы), метод подобия, метод площадей (двумерные диаграммы)).

Чаще всего при работе с задачей имеет место комбинация методов, но в этом случае один из методов выступает в качестве ведущего (является основным), другой же метод является способом реализации основного метода» [39, с. 43].

Арифметический метод решения задач заключается в том, чтобы найти ответ на требование задачи, выполняя арифметические действия над числами. Алгебраический метод предполагает нахождение ответа на вопрос задачи с помощью составления уравнения или системы уравнений. Таким образом, арифметический метод связан с числовыми операциями, а алгебраический метод - с использованием уравнений или систем уравнений, то есть составлением математических моделей.

Итак, обучение различным приемам решения задач является мощным дидактическим средством, повышающим эффективность усвоения знаний, предусмотренных учебной программой [41].

Ученик во время учебного процесса в основном пользуется только теми знаниями, которые актуальны для текущей изучаемой темы. Когда в

процессе обучения появляются задачи из пройденных тем, школьник обращается к учебнику за ранее пройденными формулами и правилами, чтобы освежить в памяти материал. Это называется «актуализация знаний». Такой прием часто используют учителя, подбирая задачи с использованием давно пройденных тем, например, в контрольных работах.

Одним из наиболее известных приемов, способствующих активизации процесса интеграции знаний, является подведение локальных и общих итогов работы над решением задачи, проводимых как в процессе ее решения, так и по окончании его. С этой целью Д. Поля предлагает: «а) осуществлять проверку результата, полученного в ходе решения задачи, и проверку самого хода решения; б) получать тот же результат решения другим способом; в) отыскивать новые задачи, к которым мог бы быть применен либо результат решения данной задачи, либо тот метод, каким это решение было осуществлено» [33].

Таким образом, можно выделить следующие основные приемы решения задач:

- правильное чтение. Необходимо определить данные и вопросы в условии задачи, установить их смысловую взаимосвязь и проверить отсутствие дублирования информации между ними. Необходимо запомнить формулировку задания и определить основополагающие факторы. Самую главную мысль необходимо подчеркнуть карандашом, выделить маркером или мысленно отметить. Кроме того важно задать уточняющие вопросы, создать для себя зрительные и слуховые образы, разобраться, что именно подразумевается в задаче под определенным действием и какие данные требуются для его выполнения;
- разделение текста задачи на логически связанные блоки информации. Понимание и запоминание задачи достигается благодаря выполнению данной процедуры;
- переосмысления текста. Заменить описание ситуации в нем на другое, которое сохраняет все связи и зависимости вместе с их

количественными характеристиками, но делает их более очевидными. Основной задачей переформулирования является избавление от ненужных подробностей, точное определение и полное раскрытие значимых аспектов поставленной задачи;

– использование реальных объектов, их физических моделей или графических изображений в виде картинки или схемы для моделирования ситуации, представленной в задании. В таком случае применяется наглядность, позволяющая увидеть известные и рассчитать неизвестные значения, а также выявить их взаимосвязь;

– проверка результатов решения задачи. Подстановка полученных данных в условие необходима для проверки корректности решения задания и сравнения полученного значения и исходного;

– решение задачи другим методом или способом. Подтверждением корректности первоначального исхода задачи является достижение идентичного результата через альтернативный способ решения.

## **1.2 Математические задачи как средство закрепления знаний учащихся в общеобразовательной школе**

В законе «Об образовании в РФ» говорится, «что школа как учреждение, осуществляющее образовательную подготовку, должна обеспечить качественный уровень освоения учащимися общего образования» [43].

Закрепление математических знаний через решение задач представляет собой фундаментальный аспект образовательного процесса в современной школе.

О.В. Тарасова в своей статье утверждает, что «умение решать задачи является конкретной системой, которая включает в себя знания, мыслительные умения и опыт. Мыслительные умения, в свою очередь, включают в себя качества мышления и нравственные качества. Умение

решать задачи образует сложный комплекс, который содержит активно действующие математические знания (и соответствующие им специальные умения и навыки), опыт в применении знаний и определенную совокупность сформированных свойств мышления», называемую в дальнейшем автором «мыслительными умениями», которые проявляются в процессе решения задач.

Ю.М. Колягин перечисляет основные мыслительные умения, формирование которых необходимо учащимся для решения нестандартных задач: «выполнять анализ ситуации для того чтобы установить полноту, непротиворечивость, независимость условия задачи или ее элементов; осуществлять соотношение неизвестных элементов задачи с известными, при этом распознавать известные или данные элементы в различных сочетаниях; сопоставлять данную задачу с известными задачами; уметь проводить мысленный эксперимент, суметь предугадать возможные промежуточные результаты и итог» [38, с. 101]; «с опорой на интуицию строить реальные гипотезы, высказывать разумные догадки, делить данную задачу на подзадачи, формулировать частные задачи; определять неявные свойства ситуации, изложенной в задаче; преобразовывать известные составляющие задачи в новом качестве; комбинировать используемые в задаче понятия и факты» [38, с. 101]; «излагать свои мысли кратко и четко; для демонстрации ведущих идей использовать наглядность в широком понимании; с опорой на заданную ситуацию создавать простейшие математические модели; отождествлять элементы задачи с элементами модели; определять структуру рассматриваемой ситуации задачи и ее элементов; уметь воспроизводить эту структуру в разнообразных состояниях; самостоятельно разрабатывать соответствующую микротеорию; выявлять детали, полезные с точки зрения общей структуры задачи или ведущей идеи поиска ее решения; используя правила критики, проводить оценку результатов решения задачи с различных точек зрения; обобщать результаты решения задачи; исследовать возможные частные и особые случаи; осуществлять грамотный отбор информации,

которая содержится в самой задаче и в процессе ее решения или результатах; систематизировать эту информацию, соотнося ее с имеющимися знаниями и опытом; выстраивать индуктивный поиск на основе интуиции, логики и здравого смысла; проверять достоверность выдвигаемых гипотез дедуктивным путем, опровергать контрпримером, методически грамотно, уверенно и грамотно проводить нужные выкладки; осуществлять интерпретацию результатов работы над моделью данной заданной ситуации; проводить кодирование язык ситуации в терминах модели и расшифровывать результаты, выраженные на языке модели» [38, с. 101].

Одной из основных функций при обучении решению задач является закрепление знаний учащихся, так как эти знания пригождаются ученику не только в процессе обучения в школе, но и при поступлении в другие учебные заведения, а также в жизни. Основной аспект школы – не только научить, но и закрепить эти знания, от начального уровня до более сложных задач, применяя различные инструменты (правила, формулы, теоремы и прочее), объединяя это в методику решения задачи. При решении задач тренируется не только зрительная память, но и сенсорная, слуховая, моторная.

Как писал ранее Ю.М. Колягин, есть такая «ассоциативная память». После обучения у человека, естественно, какая-то часть знаний забывается за неиспользованностью этой информации, но все равно базовые знания из курса школы остаются на ассоциативном или даже на рефлексном уровне мышления.

Поэтому задача учителя – выстроить урок и подачу материала так, чтобы для любого ученика эти знания оставались в памяти на долгие годы с последующим умением их применить. В дальнейшем полученные навыки используются не только при изучении математики, но и других предметов. Например, в физике изучается тема «Векторы», которая так же изучается и в математике. Ученикам проще осваивать темы, которые частично они уже проходили по другому предмету.

В свою очередь повторный анализ уже известной информации будет полезен для рассмотрения информации с использованием различных источников. Это поможет привнести новые элементы в работу, углубить понимание изучаемой темы и расширить осведомленность.

Так, «в самом деле, если задача не является стандартной для школьника, то, какова бы ни была ее фабула, для того чтобы решить ее, ему приходится приложить определенные усилия, проявить такие нравственные качества личности, как волю, настойчивость, целеустремленность и т. п. Если даже задача стандартна, но облечена в интересную фабулу, то последняя также может нести в себе те или иные воспитывающие функции (формирование диалектико-материалистического мировоззрения, воспитание чувства патриотизма и т. п.)», - считает Ю.М. Колягин [21, с. 58]

По мнению автора, решение задач закрепляет не только навыки решения самой задачи, но и имеет познавательную сторону, например, при решении задач, где присутствуют настоящие объекты, такие как металлургический завод или ферма, где высчитывается количество урожая и тому подобное. У ученика формируется более широкое мировоззрение об окружающем мире, что впоследствии может лечь в основу при выборе будущей профессии. Задачи, основанные на жизненных ситуациях, помогает ему решать аналогичные задачи в жизни. Также задачи формируют и патриотическую сторону в воспитании ученика.

В процессе решения задачи школьник учится воспринимать ее основное содержание. Затем ученик делает более сложные шаги в решении: составляет план, выделяет главную мысль, определяет причинно-следственную связь, делает выводы. Задачи служат важным инструментом усвоения знаний, поскольку с их помощью осуществляется анализ и понимания учебного материала, а также обеспечивается возможность его воспроизведения и практического применения. К примеру, решение заданий творческого типа побуждают учеников размышлять и использовать свои умения в условиях, отличных от обычных.

Вместе с этим, «математическая задача направлена на разработку математических объектов, таких как уравнения и компьютерные алгоритмы, которые могут быть использованы для прогнозирования того, что произойдет, если мы будем следовать определенному курсу действий» [50, с. 20].

Кроме «обычных» задач по конкретной теме, учащимся часто предлагаются задачи на смекалку, логику, эвристические задачи, что является одним из самых эффективных инструментов для развития их мышления.

Умение правильно и четко сформулировать учеником прочитанную задачу по памяти с полным пониманием сути ее вопроса – означает частичное ее решение. Ведь, когда учащийся не может пересказать задачу или не понимает вопроса, это означает, что задача не может быть решена. Например, в задаче звучит фраза «...товар уценили на 15%...», а ученик не понимает, что значит «уценили»: товар стал стоить дешевле или дороже от первоначальной цены. Неправильное прочтение или истолкование текста условия задачи может свести на нет все усилия по применению знаний в области математики. В это случае решение математических задач закрепляют умения правильно и четко интерпретировать условия задачи, верно перевести текст задачи с русского языка на математический.

Также решение задач способствует развитию логического восприятия, аналитического подхода и умению устранять препятствия в ходе выполнения задания. Это способствует более полному освоению учебного материала, поскольку ученики смогут использовать свои знания и умения для поиска решений задачи, пусть и не всегда с первой попытки приводящего к успеху.

Решение задач учит критично оценивать свои возможности, уметь четко планировать свое время, с правильными выводами подходить к своим неудачам, не бросать решение задачи после одной или нескольких неудавшихся попыток, а продолжить работать над своими ошибками, чтобы впоследствии их не совершать.

С.Е. Царева в своей статье утверждает, что «особое место в формировании умения решать задачи мы отводим обучению умения находить разные методы, способы, приемы решения. Решение задачи по-разному — мощное средство постижения мира, осознания разнообразия свойств и отношений его элементов. Разные методы и способы решения — средство развития познавательного интереса, умения отстаивать свою точку зрения, способности слышать и понимать других людей» [45, с. 106].

Кроме того, автор подчеркивает, что «при формировании общего умения решать задачи предметом изучения и основным содержанием обучения являются задачи (в широком смысле слова), процесс решения задач, методы и способы решения задач, приемы, помогающие осуществлению каждого этапа и всего процесса решения в целом. Умение решать задачи определенных видов состоит из:

- знаний о видах задач, способах решения задач каждого вида;
- умения «узнать» задачу данного вида, выбрать соответствующий ей способ решения и реализовать его на «узнанной» задаче.

Обучение умению решать задачи определенных видов включает в себя усвоение школьниками сведений о видах задач, способах решения задач каждого вида (данного вида) и выработку умения выделять задачи соответствующих видов, выбирать способы решения, адекватные виду задачи, применять эти способы к решению конкретных задач.

При формировании у учащихся умения решать задачи определенных видов предметом изучения и основным содержанием обучения являются виды задач, способы и образцы решения задач конкретных видов» [45, с. 103].

Таким образом, при использовании систем различных упражнений и задач для практического применения усвоенных знаний и умений, происходит их закрепление и затем формирование необходимых умений и навыков. Обучение решению задач направлено, главным образом, на интеллектуальное развитие учеников, формирование культуры и

самостоятельности их мышления, а также на развитие познавательных процессов школьников. Процесс овладения знаниями будет завершённым лишь в том случае, если обучающиеся научатся применять эти знания и умения на практике. Первичное закрепление осуществляется как в средних, так и в старших классах, но его роль в процессе обучения варьируется. В ходе обучения математике в школе учителем выделяются уроки, посвященные закреплению знаний, умений и навыков, на которых происходит вторичное осмысление изучаемого материала.

### **1.3 Методы закрепления приемов решения задач в общеобразовательной школе**

В современном образовательном процессе вопрос эффективного закрепления материала на уроках математики является одним из ключевых аспектов. Педагоги постоянно ищут инновационные подходы и методы, которые позволят обучающимся не только освоить новые математические понятия, но и сохранить их в долгосрочной памяти.

Методы закрепления приемов решения задач в общеобразовательной школе представляют собой комплексную систему педагогических действий, направленных на формирование устойчивых математических умений и навыков у школьников.

Так, в отдельных исследованиях отмечается, что «методы закрепления приемов решения задач, применяемые учителями, менее разнообразны и, как правило, ограничивают творческую активность учащихся при обучении выражению своих мыслей, из-за чего они менее заинтересованы в изучении математики, а результаты обучения далеки от оптимальных. В результате учащиеся не понимают, какое значение имеет математика в повседневной жизни, и у них меньше интереса и мотивации к ее изучению, поэтому они более пассивны, неохотно, боязливо или застенчиво выражают свои мысли» [53, с. 123].

Отмечается, что «учитель должен создать такую атмосферу при обучении, которая способствует развитию самостоятельности школьников, более высокому уровню их вовлеченности в процесс получения знаний и умений» [49, с. 83].

В данном параграфе будут описаны методы закрепления приемов решения задач на основе опыта учителей и анализа методической литературы, например, занятия с учебниками и выполнение упражнений у доски, так и современные подходы, включающие в себя применение игровых форм обучения, информационных технологий, совместную и индивидуальную работу школьников.

Одним из традиционных методов закрепления приемов решения задач является работа с учебником, методичкой или рабочей тетрадью. Использование учебника как инструмента для закрепления изученного материала помогает ученикам упорядочивать полученные сведения, повторять ранее освоенные темы и закреплять их. Учебник выступает в качестве ключевого пособия, в котором представлен теоретический материал, примеры и задания для самостоятельного решения. Работая с заданиями из учебника, учащиеся активно применяют свои знания и умения.

Другим эффективным методом для закрепления приемов решения задач является работа школьников у доски. Казалось бы, зачем это нужно, когда доска может использоваться только учителем для демонстрации решения примеров или объяснения новой темы. Ведь не каждый ученик может работать или отвечать на публике, особенно если на него смотрят его одноклассники.

На самом деле такой метод позволяет ученику не только наглядно продемонстрировать свои знания учителю, но и социализироваться, побороть свою неуверенность в изложении «мыслей» перед классом. Данный прием укрепляет не только знания ученика, но и его уверенность в себе.

С другой стороны, ученики легче усваивают приемы решения задач, когда его решает их сверстник у доски на их глазах, то есть срабатывает

принцип «может он, могу и я». Таким образом, данный прием позволяет сформировать правильное мышление и восприятие содержания задачи как для того, кто решает задачу у доски, так и для остальных учеников.

Также существует классический метод закрепления приемов решения задач – групповая работа школьников. Учащиеся могут обмениваться знаниями, объяснять этапы решения задач друг другу и работать над решением задач совместно. Подобный метод стимулирует развитие умения общаться, а работа в группе дает возможность ученикам познакомиться с различными методами решения задач.

Следующий метод закрепления приемов решения задач – дифференцированный подход в обучении. Особенность дифференцированного подхода состоит в применении в процессе закрепления подобранных заданий разной сложности для «слабых» и «сильных» учеников. Для «слабых» учащихся часто предоставляются задачи базового уровня, тогда как более способным предлагаются задания базового и углубленного уровней. Основной задачей данного метода является обеспечение эффективности закрепления путем учета индивидуальных особенностей учащихся, что позволяет каждому из них достичь уровня знаний не ниже базового согласно ФГОС СОО и раскрыть свой внутренний потенциал.

Не стоит оставлять без внимания такой метод закрепления приемов решения задач как постепенное усложнение задач (от более простых к сложным) — принцип, который используется в обучении, в том числе для закрепления знаний. Некоторые темы школьного курса начинаются с правила, алгоритма или формулы, с последующим ее применением при решении задач. Сначала приводятся более простые упражнения, постепенно они усложняются. Этот прием используется для того, чтобы помочь ученикам глубже понять учебный материал.

Следующим классическим методом закрепления приемов решения задач являются самостоятельные, практические или контрольные работы.

Задача практической работы состоит в закреплении теоретической базы, совершенствовании навыков и умений решения заданий по пройденной теме, а также в развитии способностей к применению знаний в реальных условиях.

После рассмотрения новой темы и совместного обсуждения решений задач обычно следует самостоятельная работа, которая является формой проверки знаний перед контрольной работой по текущему материалу.

Цель проведения контрольной работы заключается в определении фактического уровня усвоения знаний и умений по конкретной теме или разделу учебного курса.

Эти методы закрепления приемов решения задач давно закрепились в практике обучения как в школах, так и в других учебных заведениях. Этот формат помогает проверить знания по пройденному материалу. Его особенность заключается в том, что на этот прием отводится определенное количество времени, как правило, это один урок.

Задача учителя состоит в том, чтобы составить план проверочной работы так, чтобы ученик смог решить все решенные им задачи за отведенное время. В тоже время задача ученика – правильно понять смысл задачи и суметь применить приемы их решения. Задача такой работы – не только проверить знания учащихся, но и выявить их ошибки и пробелы в знаниях, но и провести работу над ними, что является следующим методом закрепления приемов решения задач. Анализ ошибок и работа над ошибками являются ключевой составляющей в процессе обучения математике. Целью проведения работы над ошибками является разбор ошибок, предотвращение их повторения в будущем, а также формирование навыка самоконтроля среди учеников.

Учитель предоставляет каждому ученику индивидуальные упражнения по теме, где были выявлены ошибки, для их устранения. Обучающимся, допустившим минимальное число ошибок или вообще обошедшихся без них, даются дополнительные задачи повышенной сложности.

После завершения работы над ошибками важно провести самоанализ: обучающиеся исследуют свои ошибки, выявляют изменения в собственных навыках, указывают на аспекты, которые остаются неясными, обсуждают причины затруднений и задают вопросы учителю. После такой работы школьники должны не допускать в последующем аналогичные ошибки.

Еще одним методом закрепления приемов решения задач является техника многократного повторения и отработки типовых заданий по этой теме. Повторение и закрепление изученного материала должно быть системным и отрабатываться периодически. Целью такого метода закрепления является глубокое понимание изучаемой темы. Повторение и регулярная отработка пройденного материала вызывает интерес у учащихся. Повторять материал и решать задания на пройденную тему можно как на уроке вместе с учителем, так и дома, выполняя домашнее задание.

Одним из эффективных современных методов закрепления приемов решения задач является использование интерактивных технологий и математических игр, викторин, квестов, конкурсов, олимпиад, что способствует активному участию обучающихся в процессе обучения. Такой метод закрепления приемов решения задач не только делает уроки математики более интересными и познавательными, но и способствует глубокому пониманию и закреплению материала. Однако необходимо, чтобы игры были максимально интегрированы с учебным процессом и были связаны с изучаемыми темами, способствуя усвоению новых знаний и умений и развитию школьников, не мешали основному учебному процессу.

Кроме того, выделяют применение кейс-технологии и проектной деятельности как эффективные методы закрепления приемов решения задач, способствующие активному восприятию информации и вовлечению учащихся в аналитико-синтетическую деятельность. Грамотно составленный кейс поможет им понять проблемные ситуации, чтобы они были лучше подготовлены к ним в будущем. Изучение кейсов может помочь обучающимся развить навыки критического мышления при оценке

предоставленной информации и выявить логические ошибки или ложные предположения

[51, с. 15].

Не стоит забывать и о творческой составляющей учеников. Творческие проекты могут быть эффективным методом закрепления приемов решения задач, так как они способствуют развитию креативного мышления и воображения учащихся. Школьники могут самостоятельно определить начало, направление и конечную цель творческих проектов. В ходе деятельности происходит накопление информации и объединение разобщенных данных. Учащимся можно предложить сочинить сказку или стихотворение по математике на тему, которую они изучили. Для развития творческих навыков учеников подойдут графические диктанты, геометрические ребусы, кроссворды и прочие подобные задания. При выполнении таких заданий применяются графические модели в виде рисунков и схематичных изображений. Обучение математике через использование творческих проектов способствует развитию мышления у школьников, активности и других ключевых навыков и умений [53].

Следующим современным методом закрепления приемов решения задач является использование мультимедийных технологий. Это могут быть виртуальные лабораторные работы и интерактивные модули (с их помощью можно исследовать и моделировать объекты), видеоматериалы и анимация, интерактивные презентации и многое другое. Другими словами, мультимедийные технологии позволяют сделать процесс обучения ярким, наглядным, увлекательным и интерактивным. Это помогает удерживать внимание и интерес к изучаемым предметам, а также задействовать дополнительные возможности полушарий мозга человека для лучшего запоминания и усвоения информации.

Вместе с этим, одним из методов закрепления приемов решения задач при обучении математике учащихся общеобразовательной школы является применение проблемного обучения на уроках математики.

Подводя итог, можно сказать, что методы закрепления приёмов решения задач в общеобразовательной школе нужны для формирования полноценных знаний учащимися, способствующих установлению связи между теорией и практикой, а также обучением и реальной жизнью.

Использование этих методов имеет определенные задачи.

Например, учащиеся активно вовлекаются в исследовательскую работу благодаря решению задач различными методами, что способствует развитию их мышления и умственных способностей.

Развитие умений и навыков при решении практико-ориентированных задач способствует формированию у учеников более глубокого и широкого понимания окружающего мира, а также подготовке их к успешному применению этих умений в обыденной деятельности.

Также стоит отметить и воспитание эстетического вкуса учеников. Учащиеся осваивают поиск «красивых» способов решения задач, связывая все разделы математики.

Кроме того, О.Б. Епишева, В.И. Крупич подчеркивают, что «поиск решения задач осуществляется в основном с помощью аналитико-синтетического метода, который в этом случае носит целенаправленный характер, а именно: анализ задачи состоит в том, что мы предполагаем ее уже решенной и находим различные следствия (или предпосылки) этого предположения, а затем в зависимости от вида этих следствий пытаемся найти путь отыскания решения поставленной задачи.

Здесь выделяются три этапа аналитико-синтетического рассуждения: 1) предположим, что задача решена; 2) посмотрим, какие из этого можно извлечь выводы; 3) сопоставляя полученные выводы (синтез), попытаемся найти способ решения задачи» [9, с. 51-52].

Авторы описывают «прием применения восходящего анализа к поиску решения геометрических задач на вычисление, который содержит такую последовательность действий:

1) записать формулу (в обозначениях чертежа) для нахождения искомого задачи;

2) в этой формуле выявить неизвестные величины, которые достаточно определить, чтобы найти искомое;

3) для каждой неизвестной величины, входящей в исходную формулу, подобрать формулы для нахождения этих величин (последовательно для каждой величины);

4) процесс поиска завершить в тот момент, когда:

а) для последовательности неизвестных величин, участвующих в поиске решения задачи, будут указаны формулы их нахождения и б) для последней неизвестной величины (в этой последовательности) указана формула, в которой неизвестные величины определяются данными задачи.

В заключение отметим, что прием аналитико-синтетического поиска решения геометрических задач фактически аналогичен соответствующему приему поиска решения текстовых алгебраических задач. Имеет, конечно, место его перестройка, связанная со спецификой геометрических задач на вычисление. Поэтому осознание учащимися сущности приема поиска решения текстовых задач создает необходимые предпосылки его переноса на процесс поиска решения геометрических задач на вычисление.

Для прочного усвоения учащимися аналитико-синтетического поиска решения геометрических задач на вычисление необходима его отработка на конкретных задачах в условиях организации в обучении коллективных форм деятельности школьников. Переход к индивидуальной форме деятельности учащихся путем организации самостоятельной работы возможен лишь после того, как ими осознана сущность этого приема» [9, с. 73-74].

М.А. Кислякова в качестве методов закрепления приемов решения задач применяет «методику рефлексивного обучения математике (методику обучения «обобщенному алгоритму» решения задач на основе стимулирования рефлексивных механизмов деятельности). Это обучение направлено на активизацию знаний у обучающихся, их обобщение и

систематизацию, применение определенных методов решения задач в нестандартных ситуациях, также ликвидацию пробелов на основе рефлексивных стратегий» [15, с. 93].

Методика рефлексивного обучения решению математических задач включает пять основных этапов:

«Этап I. Проведение логико-математического анализа задачи предполагает знакомство учителя с математической задачей. Учитель определяет тип задачи, находит все возможные способы решения задачи, определяет подходящий математический метод решения, выясняет дидактическое назначение задачи.

Этап II. Подбор системы задач на актуализацию. Основное правило методики обучения математике гласит: не повторив старое – не начинай нового! Учитель подбирает систему заданий, способствующих повторению математических понятий, их свойств и признаков. Важно помочь учащемуся восстановить в памяти необходимые знания, а в случае их отсутствия своевременно ликвидировать «знаниевые пробелы». В условиях рефлексивного обучения решению математических задач очень важно методику обучения строить с опорой на знания и умения учащегося.

Этап III. Составление системы вопросно-ответных процедур. Для этого учитель составляет систему вопросов, ответы на которые помогут учащимся проанализировать условие задачи, найти идею решения и составить план реализации этой идеи. В условиях рефлексивного обучения перед учащимися лежат несколько карточек с рекомендациями, цель которых – направить мысль ребенка на анализ имеющихся у него интеллектуальных ресурсов» [15, с. 93-95].

«Этап IV. Обучение правильному оформлению решения задачи. Учитель обращает внимание на правильное оформление решения задач разных типов, на необходимость обоснования каждого этапа в решении задачи. Важно учить школьников при оформлении своего решения думать о другом человеке (учителе, однокласснике, экзаменаторе), который будет

проверять работу учащегося. Для этого учитель демонстрирует учащимся примеры решений разных задач, в которых пропущены этапы в решении, нет обоснования сделанных выводов, не ясен чертеж и т. д.

Этап V. Обучение проверке решения задачи. Важный этап в решении задачи, который заключается в обосновании правильности полученного ответа, анализе выбранного метода решения и, главное, запоминании идеи решения предложенного типа задач. При решении математических задач многие учащиеся опускают оценку проведенного решения. На экзаменах обучающиеся зачастую показывают более плохие результаты своей деятельности, чем есть на самом деле. Во многом причина кроется в несформированных умениях контролировать и оценивать свою деятельность, а также регулировать ее в случае обнаружения ошибок.

Самоконтроль учащихся состоит в анализе решения математических задач и приведении аргументов, подтверждающих верность или неверность каждой части решения.

Педагогическая поддержка учащихся, испытывающих трудности при решении математических задач, направлена на обнаружение учащимися своих проблем и придание им развивающего характера путем использования рефлексивных стратегий» [15, с. 93-95].

Таким образом, в результате рефлексивного обучения математике ученик сможет эффективно решать задачи благодаря приобретению комплекса определенных навыков. Например, способности кратко фиксировать условия задачи графически, анализировать заданные параметры, которые необходимо определить, четко разделять ключевые величины от второстепенных и распознавать задачу как систему связанных элементов, классифицируя её тип.

Еще один приобретенный навык заключается в способности выявлять сходства и повторяющиеся элементы, используя их для эффективного решения проблем; сравнивать подходы и стратегии решений; обобщая полученные данные, формулировать основные понятия; определять

приоритетные задачи и группировать похожие задачи исходя из условий или применяемых методик.

Так, «следующее умение состоит в сопоставлении условий задачи с имеющимися теоретическими основами; поиске соответствующих формул, определений, правил и теорем, объединяющих элементы задачи; переводе сжатых алгоритмов в подробные; выборе нужной теоретической информации для решения данной задачи» [15, с. 93-95].

Кроме того, ученик сможет строить рассуждения логически, представляя решения задач последовательно и без противоречия, используя информацию из условий, научится принимать поражение, анализировать альтернативные подходы, взвешивать плюсы и минусы каждой стратегии и находить оптимальное математическое решение задачи.

Л.С. Капкаева [12] считает целесообразным при обучении школьников решению задач использовать интеграцию алгебраического и геометрического методов их решения.

Автор отмечает, что «при решении алгебраических задач (уравнений, неравенств и их систем, текстовых задач) следует одновременно обучать алгебраическому и геометрическому (в том числе графическому) методам. Традиционно, геометрический метод решения алгебраических задач отождествлялся лишь с конструктивным приемом, что затрудняло его использование в процессе обучения решению текстовых задач. В нашем исследовании расширено содержание указанного понятия путем включения в него конструктивно-аналитического приема, что позволяет решать основные типы алгебраических задач с использованием геометрических знаний и умений, задействовать в процессе решения образное мышление учащихся.

Геометрический метод решения алгебраических задач включает использование одномерных и двумерных диаграмм, графиков функций. В ходе исследования выделены типы и виды текстовых задач, решаемых с помощью одномерных диаграмм, двумерных диаграмм, графических моделей, а также виды уравнений, неравенств и их систем, решаемых

графическим методом. Обучение геометрическому методу решения алгебраических задач осуществляется по этапам: 1) подготовительный; 2) мотивационный; 3) ориентировочный; 4) этап овладения отдельными компонентами метода; 5) этап формирования метода в целом. Все этапы тесно связаны друг с другом, и поэтому их не следует резко разграничивать в процессе обучения» [12].

Пример 11. «Решить систему уравнений:  $\begin{cases} \sin(x + y) = 0, \\ x^2 + y^2 = 4. \end{cases}$

Решение. Имеем:  $\begin{cases} x + y = \pi n \text{ где } n \in Z \\ x^2 + y^2 = 4. \end{cases}$ ;  $\begin{cases} y = -x + \pi n, \\ x^2 + y^2 = 4. \end{cases}$

Графиком функции  $y = -x + \pi n$  является семейство прямых с угловым коэффициентом -1. Графиком уравнения  $x^2 + y^2 = 4$  является окружность с центром в начале координат и радиусом 2 (рисунок 1).

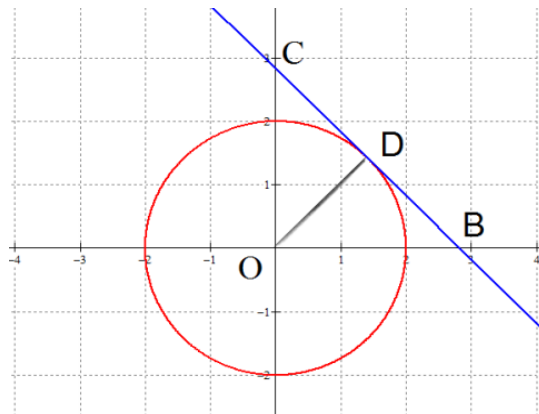


Рисунок 1 – К примеру 11

$\triangle COB$  – равнобедренный ( $CO = OB = \pi$ ); прямоугольный ( $\angle O = 90^\circ$ ). По теореме Пифагора:  $CB^2 = CO^2 + OB^2 = 2\pi^2$ , то есть  $CB = \pi\sqrt{2}$ .  $OD$  – медиана, высота, тогда  $CD = DB = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}$ . По теореме Пифагора  $OB^2 = OD^2 + DB^2$ ,  $OD^2 = OB^2 - DB^2$ ,  $OD^2 = \pi^2 - \frac{2\pi^2}{4}$ ;  $OD = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$ ,  $\frac{\pi}{\sqrt{2}} > 2$   $\Rightarrow n = 0$ . Тогда:  $y + x = 0$ ,  $\begin{cases} y = -x, \\ x^2 + y^2 = 4. \end{cases}$   $x^2 + x^2 = 4$ ;  $x^2 = 2$ ;  $x = \pm\sqrt{2}$ ;  $y = \pm\sqrt{2}$ . Ответ:  $(\sqrt{2}; -\sqrt{2}); (-\sqrt{2}; \sqrt{2})$ » [34].

Таким образом, при обучении школьников решению задач в общеобразовательной школе необходимо использовать различные методы закрепления приемов их решения. Применение этих приемов будет способствовать повышению качества математического образования обучающихся, развитию у них логического и алгоритмического мышления.

### Выводы по первой главе

Определены понятие задачи и их роль при обучении математике в школе.

Так, установлено, что в теории и методике есть различные подходы к понятию задачи. За основу в данном исследовании взято определение понятия задачи Т.А. Ивановой, которая под задачей понимает «задание, которое должен выполнить субъект, или вопрос, на который он должен найти ответ, опираясь на указанные условия и все вытекающие из них следствия» [11].

При решении школьниками задач реализуются образовательные, практические и воспитательные цели обучения математике. По мнению Г.И. Саранцева, задачи направлены на развитие пространственного мышления, творческой деятельности школьников, «в процессе решения задач формируются не только логическая, эвристическая, алгоритмическая составляющие мышления, но и многие нравственные качества учащихся» [37].

Существуют различные классификации видов задач; выделяют также задачи стандартные и нестандартные; теоретические и практические; устные и письменные и другие.

Раскрыто понятие метода и приема решения задач в школьном курсе математики.

Так, Ю.М. Колягин пишет, что для решения задачи необходимо применять не только стандартные алгоритмы и правила, но и переосмыслить условие задачи. Это будет способствовать поиску новых методов решения.

В теории и методике обучения математике выделяют методы решения задач по: уровням деятельности (алгоритмический, поисковый, эвристический), методам решения (алгебраический, арифметический, геометрический, логический, векторный, координатный). Основные логические методы решения задач и поиска решения - анализ и синтез.

Прием решения задачи – это простейший способ ее решения, позволяющий решать задачу в одно или несколько несложных действий. Например, решать квадратные уравнения можно обучать школьников не только на основе дискриминанта, но и с помощью разложения на множители, используя обратную теорему Виета и другие приемы решения.

Также опираясь на работы Л.М. Фридмана, Д. Пойа, Г.И. Саранцева большой акцент делается на эвристические приемы решения задач, которые включают в себя поиск решения, развитие правильного мышления и нестандартного поиска приема решения задачи.

Выделены следующие приемы решения задач: правильное чтение; разделение текста задачи на логически связанные блоки информации; переосмысления текста задачи; переформулирование условия задачи; использование реальных объектов, их физических моделей или графических изображений в виде схемы для моделирования ситуации, представленной в задании; проверка результатов решения задачи, в том числе на основе составления обратной задачи; решение задачи другим методом или способом; разбор готового решения.

Выделены функции математических задач как средства закрепления знаний учащихся в общеобразовательной школе.

Установлено, что при использовании систем задач осуществляется закрепление знаний и формирование необходимых умений и навыков. Задачи формируют не только логические, но и нравственные понятия. При решении

задач развивается не только мыслительные и вычислительные навыки, но и множество других, применимых также для изучения других предметов.

Кроме того, задачи необходимо подбирать учителю к урокам так, чтобы ученики периодически повторяли пройденный материал и не забывали предыдущие темы. Так, Ю.М. Колягин показывает применение «ассоциативной памяти» у школьников.

Следующим моментом при обучении решению задач как средства закрепления знаний и умений школьников используются реальные ситуации из существующих объектов окружающего нас мира.

Процесс овладения знаниями будет завершенным при умении применять эти знания и умения на практике. Первичное закрепление осуществляется как в средних, так и в старших классах, но его роль в процессе обучения варьируется. В ходе обучения математике в школе учителем выделяются уроки, посвященные закреплению знаний, умений и навыков, на которых происходит вторичное осмысление изучаемого материала.

Выделены такие методы закрепления приемов решения задач при обучении математике учащихся общеобразовательной школы, как: работа с учебником математики, работа с рабочей тетрадью; работа у доски; постепенное усложнение задач (от более простых к сложным); составление задач аналогичных по сюжету, по методу и приему решения; составление задач, обратных данной; составление цепочек взаимосвязанных задач на различные приемы их решения; применение систем упражнений по определенным темам; решение практико-ориентированных задач; проведение математических диктантов, самостоятельных, практических или контрольных работ; анализ ошибок и работа над ними по результатам различных проверочных работ; повторение изученного материала; использование дифференцированного подхода в обучении; применение кейс-технологии и проектной деятельности; использование в процессе обучения интерактивных технологий и математических игр, викторин, квестов,

конкурсов, олимпиад; применение проблемного обучения на уроках математики; использование мультимедийных технологий.

Вместе с этим, М.А. Кислякова в качестве методов закрепления приемов решения задач применяет методику рефлексивного обучения математике. Я.И. Груденов рекомендует в ходе закрепления приемов решения задач выполнять постепенный переход от метода элементарных задач к методу неэлементарных задач.

Таким образом, при обучении школьников решению задач в общеобразовательной школе необходимо использовать различные методы закрепления приёмов их решения. Применение этих приемов будет способствовать повышению качества математического образования обучающихся, развитию у них логического и алгоритмического мышления.

## **Глава 2 Методические основы методов закрепления приемов решения задач в курсе алгебры и начал математического анализа**

### **2.1 Методические особенности применения различных методов закрепления приемов решения задач при обучении математике в общеобразовательной школе**

В статье Л.С. Капкаевой и Е.А. Тагаевой «Поисково-исследовательские задачи по математике как средство реализации преемственности обучения в школе и вузе» авторы описывают «методику решения поисково-исследовательских задач, которые представляют собой серию упражнений, одно из которых поисковое, а следующие за ним два–три более общего вида. Для решения этих задач используется метод решения первой (поисковой) задачи. Подобные задачи содержатся как в школьном курсе математики, так и в вузовском, однако они не объединены и решаются разрозненно, вне связи друг с другом, а это препятствует формированию метода в целом решения поисково-исследовательских задач, а впоследствии и исследовательских задач» [13]. Авторами приведены «серии поисково-исследовательских задач школьного курса математики, решаемые с помощью приемов, в основе которых лежит: индуктивный метод, дедуктивный метод, сочетание индуктивного и дедуктивного методов, аналитико-синтетический метод» [13].

Например, «найдите область значения функции  $y = \frac{12x}{x^2-x-6}$  (мотивационная задача), на основе ее строится обобщенная задача: найдите зависимость значений функции  $y = \frac{kx}{ax^2+bx+c}$  от параметров  $a, b, c$  и  $k$ » [13].

Также в качестве примера поисково-исследовательских задач из школьного курса математики авторы приводят задачу: «Выполните следующие задания последовательно.

1. Найдите производную функции: а)  $x^2 - 5x + 6$ ; б)  $-2x^3 + 18x$ .

2. Выясните, при каких значениях  $x$  производная функции  $f'(x)$  принимает отрицательные значения (добавлено ещё одно действие)  
 $f(x) = x^2 - 5x + 6$ .

3. Выясните, при каких значениях  $af'(x) \geq 0$  для всех действительных значений  $x$ , если  $f(x) = x^3 + 3x^2 + ax$  (введен параметр  $a$ )» [13].

Также Л.С. Капкаева в своем исследовании использует интеграцию алгебраических и геометрических методов при обучении школьников решению задач.

Пример 12. Решить задачу: «В одном элеваторе было зерна в два раза больше, чем в другом. Из первого элеватора вывезли 750 т зерна, во второй элеватор привезли 350 т, после чего в обоих элеваторах зерна стало поровну. Сколько зерна было первоначально в каждом элеваторе?»

Для решения этой задачи используем метод уравнений и неравенств из алгебры и метод длин из геометрии, основанный на свойствах длины отрезка.

Алгебраический метод. Пусть  $x$  т зерна было первоначально во втором элеваторе, тогда  $2x$  т зерна было первоначально в первом элеваторе;  $(2x - 750)$  т зерна осталось в первом элеваторе, а  $(x + 350)$  т зерна стало во втором элеваторе. Так как в обоих элеваторах зерна стало поровну, то можно составить уравнение:  $2x - 750 = x + 350$ , откуда  $x = 1100$ ,  $2x = 2 \cdot 1100 = 2200$ . Ответ: 2200 т зерна было в первом элеваторе и 1100 т - во втором.

Геометрический метод. Решаем данную задачу с помощью линейной диаграммы. Линейная диаграмма - это, обычно, отрезок или несколько отрезков, длины которых соответствуют численным значениям рассматриваемой величины» [12].

Об интеграции разных приемов и методов решения задач, в частности геометрических, пишет в своем исследовании и А.А. Папышев. «В процессе решения одной задачи интегрируются знания и умения из разных разделов

школьного курса математики, что ведет к неформальному усвоению и применению их на практике и в других дисциплинах» [32].

Автор приводит примеры задач, решение которых «интегрируют:

- метод подобия треугольников и метод уравнений и неравенств (найдите площадь квадрата, вписанного в правильный треугольник со стороны  $a$ );
- векторный метод и метод треугольников (точка  $O$  – произвольная точка плоскости,  $AETD$  – четырехугольник,  $M$  – середина отрезков  $AB$  и  $BO$ , а  $H$  – середина отрезков  $BD$  и  $OT$ . Докажите, что  $AETD$  – параллелограмм). Интеграция выступает здесь в виде сочетания данных методов;
- векторный метод и метод подобия треугольников (на сторонах  $AB$  и  $BC$  треугольника  $ABC$  отмечены соответственно точки  $M$  и  $N$  так, что  $AB = 2BM$ ,  $BC = 2BN$ ). Интеграция может выступать здесь как в виде сочетания указанных методов, так и в виде слияния их в одном методе» [32].

Н.Л. Стефанова, Н.С. Подходова в своей книге описывают такой метод закрепления приемов решения задач при обучении математике учащихся общеобразовательной школы, как составление задач, обратных данной.

Например, задача: «Два автомобиля выезжают одновременно навстречу друг другу из  $A$  в  $B$  и из  $B$  в  $A$ . После встречи одному из них приходится быть в пути 2 ч, а другому –  $\frac{9}{8}$  ч. Найдите скорости автомобилей, если расстояние  $AB$  равно 210 км» [27]. Для проверки задачи нужно составить новую задачу, в которой найденные значения скорости включены в условие. Например, задача: «Два автомобиля выехали одновременно навстречу друг другу из двух пунктов, расстояние между которыми равно 210 км, со скоростями 60 и 80 км/ч соответственно. Сколько времени был в пути каждый автомобиль после встречи?» [27].

Еще одним из методов закрепления приемов решения задач является анализ ошибок и работа над ними по результатам различных проверочных работ. Для их ликвидации и знакомства с новыми методами задач используется технология консультирования, которую описывают Н.Л. Стефанова, Н.С. Подходова в своей работе [27]. Более подробно применение этой технологии при обучении математике будет рассмотрено в параграфе 2.2.

Н.Л. Стефанова, Н.С. Подходова рассматривают пример применения технологии консультирования при обучении теме «Квадратичная функция».

Другим методом закрепления приемов решения задач является применение систем упражнений по определенным темам.

А.А. Папышев раскрывает методы и приемы решения задач на основе деятельностного подхода при обучении математике.

Автором сформулированы требования к структуре системы задач:

- «с целью осуществления в обучении математике теории деятельностного подхода необходимо, чтобы системы задач состояли из конкретных учебных задач, направленных на достижение обобщенной цели учебной деятельности;
- в системе выделяются подсистемы задач для изучения отдельных блоков теоретического материала и общих приемов решения, связанных с этим материалом задач;
- система задач должна содержать цели по формированию у учащихся
- теоретических знаний и способов действия на каждом из четырех этапов процесса решения задач;
- система задач должна включать цели по осуществлению действий самоконтроля и самооценки с целью формирования у школьников способов самостоятельного приобщения знаний;
- система задач должна на основе их систематизации постепенное нарастание сложности задач;
- в систему задач должны быть обязательно в небольших количествах

- включены традиционные алгоритмические задачи, которые выделяются в каждом блоке учебного материала» [32].

А.А. Папышевым сформулированы требования к содержанию задач:

- «в системе должны присутствовать задачи, содержание которых может способствовать осознанному усвоению теоретического материала и служить средством овладения общими приемами решения содержащихся в данной теме конкретно-практических задач;
- содержание задач должно быть направлено на развитие всех выделенных действий по решению задачи;
- содержание традиционных алгоритмических задач должно предполагать
- овладение учащимися определенными умениями и навыками» [32].

Автором сформулированы требования к особенностям формулировки задач: «выделенные типы задач по своему характеру предполагают нетрадиционную формулировку задания к задачам традиционного содержания (не только «решить уравнение», а предварительно «назвать возможные способы решения уравнения», «оцепить уже решенные задачи с точки зрения способа решения», «проанализировать влияние изменения условия задачи на ее решение» и так далее)» [32].

В своей диссертации А.А. Папышев приводит разработанные «системы задач на текстовые задачи, показательные и логарифмические уравнения, неравенства и их системы, рациональные уравнения» [32].

В свою очередь учитель математики А.Н. Мамаева использует занимательные задания в обучении математике для закрепления приемов решения задач. По ее словам: «достоинство многих занимательных задач заключается в том, что при их решении у учащихся возникает необходимость менять ход мыслей на обратный. Как известно, умение менять ход своей мысли на обратный – ценнейшее качество ума. Занимательные задания способствуют формированию гибкости ума, освобождению мышления от шаблонов. Приемы занимательности часто связаны с общими проблемами

обучения: развитием приемов мышления, общеучебных умений и навыков» [25].

В частности, автор предлагает использовать «задание с продолжением». Новое задание получается из предыдущего путем дописывания к формулировке старого задания одного или нескольких слов (символов). Главное достоинство этого задания – экономия времени на уроке.

Прочитав условие задания, и вникнув в него, ученик решает его успешно. Продолжение задачи заинтересовывает его, к тому же требуется меньше времени на знакомство с условием. Решение второй задачи может быть аналогичным решению первой задачи, а может быть совершенно другим. Если решение аналогичное, то происходит закрепление приобретенных навыков, если же решение существенно отличается от первого, то необходимо проявить определенную гибкость ума, чтобы сориентироваться в данной ситуации.

Пример 13. Решить задания:

- «1. Запишите функцию, графиком которой является парабола.
2. И ее ветви опущены вниз.
3. И она проходит через точку  $(-1; -8)$ » [25].

Пример 14. Решить задания:

- «1. Запишите такой четырехчлен, чтобы его можно было разложить на множители.
2. И чтобы первый множитель был равен  $3x - 2c$ .
3. А второй  $2x + 7y$ » [25].

Другой учитель математики, Н.А. Максимова, при решении иррациональных и логарифмических уравнений использует равносильные переходы и нестандартные приемы.

«Конечно, невозможно указать все методы решения «нестандартных» задач. Здесь приходится применять и графики, и самые различные свойства функций, и неравенства, и – последнее по счету, но первое по важности – логику», - считает Н.А. Максимова [24].

Пример 15. Решить уравнение:  $\sqrt{x^2 + 4} + \sqrt{x^2 + 9} = 4$ .

Решение: «Используем для решения метод оценки:  $\sqrt{x^2 + 4} \geq 2$ ;  $\sqrt{x^2 + 9} \geq 3$ , поэтому сумма  $\sqrt{x^2 + 4} + \sqrt{x^2 + 9} \geq 5$ . Ответ: корней нет» [24].

В.С. Галактионова при решении логарифмических уравнений и неравенств использует следующее утверждение: сумма двух неотрицательных выражений равна нулю только тогда, когда каждое из выражений равно нулю.

Пример 16. Решить уравнение:  $\lg^2(x^2 + 3x + 3) + \sqrt{x^3 + 4x + 5} = 0$ .

Решение. «Сумма двух неотрицательных выражений равна нулю, если каждое из выражений равно нулю. Приравняем первое выражение к нулю, решим логарифмическое уравнение и его корни подставим во второе выражение для проверки.

$\lg^2(x^2 + 3x + 3) \geq 0$  и  $\sqrt{x^3 + 4x + 5} \geq 0$ , тогда

$\lg(x^2 + 3x + 3) = 0$  и  $x^3 + 4x + 5 = 0$ ;

$x^2 + 3x + 3 = 1$ ;  $(-2)^3 - 8 + 5 \neq 0$ ;

$x = -2; -1$ .  $(-1)^3 - 4 + 5 = 0$ . Ответ:  $-1$ » [4].

А.В. Демина применяет свойства квадрата целого числа в решении задач на делимость с целью сформировать знания, умения и навыки при решении в целых числах уравнений, содержащих квадрат целого числа; создать условия для преодоления у выпускников трудностей при решении заданий ЕГЭ по математике.

Пример 17. Решить в целых числах уравнение:  $n! + 5n + 13 = k^2$ .

Решение. «Так как  $n!$  – произведение первых  $n$  натуральных чисел, значит  $n \in N$ , а целым может быть только  $k$ .

Если  $n = 1$ , то  $n! + 5n + 13 = 1 + 5 + 13 = 19$ , тогда  $k^2 = 19$ ,  $k \notin Z$ .

Если  $n = 2$ , то  $n! + 5n + 13 = 2 + 10 + 13 = 25$ , тогда  $k^2 = 25$ ,  $k = \pm 5$ .

Если  $n = 3$ , то  $n! + 5n + 13 = 6 + 15 + 13 = 34$ , тогда  $k^2 = 34$ ,  $k \notin Z$ .

Если  $n = 4$ , то  $n! + 5n + 13 = 24 + 20 + 13 = 57$ , тогда  $k^2 = 57$ ,  $k \notin Z$ .

$$\left. \begin{array}{l} n! \text{ оканчивается } 0, \\ \text{Если } n \geq 5, \text{ то } 5n \text{ оканчивается } 0 \text{ или } 5, \\ 13 \text{ оканчивается } 3. \end{array} \right\}$$

Значит  $n! + 5n + 13$  оканчивается 3 или 8. Но по свойству квадрат целого числа не может оканчиваться ни числом 3, ни числом 8, значит, других целых решений уравнение не имеет. Ответ:  $n = 2; k = \pm 5$ » [7].

Учитель математики В.В. Маеренкова разработала элективный курс «Параметры и их практическая значимость», предназначенный для «учащихся классов естественнонаучного профиля, которые хотят научиться способам решения задач повышенного уровня сложности по алгебре и началам анализа. Задачи с параметрами играют важную роль в формировании логического мышления и математической культуры у школьников, но их решение вызывает у них значительные затруднения. Это связано с тем, что каждое уравнение или неравенство с параметрами представляет собой целый класс обычных уравнений и неравенств, для каждого из которых должно быть получено решение» [23].

Автор пишет, что «методы, используемые учителем при проведении занятий, разнообразны и зависят от особенностей тематики. Для передачи теоретического материала наиболее эффективна школьная лекция, сопровождающаяся беседой с учащимися. Для закрепления материала проводятся семинары по обсуждению теории, практикумы по решению математических задач. При сохранении традиционных форм обучения возможно применение тестирования, дискуссий, направленных на аргументацию вариантов своих решений и различных форм индивидуальной или групповой деятельности учащихся. Часть занятий отводится работе на компьютере (решение уравнений и неравенств с параметрами). Доминантной формой учебного процесса должна стать исследовательская деятельность учащихся, используемая не только на занятиях в классе, но и в ходе самостоятельной работы, которая организуется через:

- работу с дидактическим материалом и тестами;

- решение предложенных задач с последующей проверкой и разбором вариантов решения;
- подготовку сообщений, защиту рефератов и творческих работ, являющуюся одной из форм демонстрации достижений учащихся в усвоении изученного материала.

Для воплощения целей и задач курса целесообразно применять технологии, включающие школьников в активную учебно-познавательную деятельность, обеспечивающие личностное развитие каждого ученика в процессе самостоятельного построения ими новых знаний» [23].

Таким образом, существует множество методов закрепления приемов решения задач, выбор которых зависит от целей урока, содержания задачи, уровня подготовки обучающихся и т. д.

## **2.2 Системы задач на применение методов закрепления приемов решения задач в курсе алгебры и начал математического анализа при изучении темы «Показательные уравнения и неравенства»**

Изучение математики в школе направлено на развитие математического мышления, на овладение основными навыками и формирования творческого потенциала учащихся. Изучать учебный предмет «Математика» следует в соответствии с требованиями Федерального государственного образовательного стандарта [42].

Согласно ФГОС СОО [42] требования к предметным результатам освоения базового курса математики должны отражать:

- на базовом уровне: умение оперировать понятиями показательные уравнения и неравенства, их системы; умение оперировать понятиями функция, исследовать в простейших случаях функции на монотонность, умение оперировать понятиями показательная функция; умение строить графики изученных функций, использовать графики

при изучении процессов и зависимостей, при решении задач из других учебных предметов и задач из реальной жизни;

– на углубленном уровне: умение оперировать понятиями уравнение, неравенство, система уравнений и неравенств, равносильность уравнений, неравенств и систем, показательные уравнения и неравенства и их системы; умение решать уравнения, неравенства и системы с помощью различных приемов; решать уравнения, неравенства и системы с параметром; применять уравнения, неравенства, их системы для решения математических задач и задач из различных областей науки и реальной жизни; умение свободно оперировать понятиями: график функции, показательная функция; умение строить графики функций, выполнять преобразования графиков функций; умение использовать графики функций для изучения процессов и зависимостей при решении задач из других учебных предметов и из реальной жизни; умение свободно оперировать понятиями: ограниченность функции, монотонность функции; изображать на координатной плоскости множества решений уравнений, неравенств и их систем.

Отметим, что основной целью изучения темы «Показательные уравнения и неравенства» является: научить решать показательные уравнения, неравенства и их системы.

Задачи:

- сформировать умения решать показательные уравнения различными методами: уравниванием оснований, уравниванием показателей, вынесением общего множителя за скобки, введением новой переменной и другими;
- познакомить с методом логарифмирования при решении показательных уравнений;
- сформировать умения решать показательные неравенства различными методами;

- познакомить с методом рационализации при решении показательных неравенств;
- сформировать умения решать системы показательных уравнений;
- сформировать умений применять свойства показательной функции при решении задач различными методами.

Нами был проведен методический анализ рассматриваемой темы перед составлением системы задач.

Методический анализ темы.

Базовые знания:

- «понятие «уравнение», понятие «корень уравнения»;
- понятие «неравенство»,
- понятие «решить уравнение»; понятие «решить неравенство»,
- понятие «равносильные уравнения (неравенства)»,
- область допустимых значений уравнения (неравенства),
- основные виды алгебраических уравнений (неравенств),
- понятие «показательная функция», свойства показательной функции.

Рассматриваемые сведения:

- понятие «показательное уравнение»,
- теорема о равносильности показательного уравнения,
- понятие «показательное неравенство»,
- теорема о равносильности показательного неравенства,
- методы и приемы решения показательных уравнений и неравенств,
- основные типы задач на решение показательных уравнений и неравенств» [29].

Теоретический материал.

Приведем результаты анализа содержания темы «Показательные уравнения и неравенства» в учебниках для базового и углубленного уровней авторов А.Г. Мордковича [28] - [31]; Ш.А. Алимова [1]; Ю.М. Колягина [19].

Согласно пособию Т.А. Бурмистровой «Алгебра и начала математического анализа. Сборник рабочих программ. 10-11 классы» [3] на изучение темы «Показательные уравнения и неравенства» отводится:

- на базовом уровне 8-9 часов по учебникам Ш.А. Алимова, Ю.М. Колягина;
- на углубленном уровне 9-10 часов по учебникам Ш.А. Алимова, Ю.М. Колягина.

В учебнике А.Г. Мордковича (базовый и углубленный уровни) на изучение темы предусмотрено 5 / 7 / 9 часов в зависимости от варианта планирования учебного материала.

Рассмотрим подробнее содержание темы в учебниках.

В учебнике Ш.А. Алимова тема «Показательные уравнения и неравенства» изучается в 3 главе «Показательная функция», после изучения главы «Степенная функция».

Так, «§12 «Показательные уравнения», §13 «Показательные неравенства», §14 «Системы показательных уравнений и неравенств» изучаются после §11 «Показательная функция, ее свойства и график» [1].

В §12 «Показательные уравнения» автор рассматривает определение показательных уравнений, т.е. «уравнений, в которых неизвестное содержится в показателе степени» [1].

«Решение показательных уравнений часто сводится к решению уравнения  $a^x = a^b$ , где  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ,  $x$  – неизвестное. Это уравнение решается с помощью свойства степени: степени с одинаковым основанием  $a > 0$ ,  $a \neq 1$  равны тогда и только тогда, когда равны их показатели» [1].

Далее приводятся примеры решения показательных уравнений: методом уравнивания показателей, методом вынесения общего множителя за скобки, методом почленного деления, методом группировки, методом введения новой переменной.

В §13 «Показательные неравенства» рассматривается определение показательных неравенств, «решение которых часто сводится к решению неравенств  $a^x > a^b$  или  $a^x < a^b$ » [1].

Указано, что «эти неравенства решаются с помощью свойства возрастания или убывания показательной функции: для возрастающей функции большему значению функции соответствует большее значение аргумента, а для убывающей функции большему значению функции соответствует меньшее значение аргумента» [1].

Приводятся примеры решения показательных неравенств: методом уравнивания показателей, методом введения новой переменной, функционально-графическим методом.

В учебнике Ю.М. Колягина тема «Показательные уравнения и неравенства» изучается в главе 6 «Показательная функция», после изучения главы «Степенная функция».

Так, «§2 «Показательные уравнения», §3 «Показательные неравенства», §4 «Системы показательных уравнений и неравенств» изучаются после §1 «Показательная функция, ее свойства и график» [19].

В §2 «Показательные уравнения» автор рассматривает несколько примеров показательных уравнений, т. е. «уравнений, в которых неизвестное содержится в показателе степени. Решение показательных уравнений часто сводится к решению уравнения  $a^x = a^b$ , где  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ,  $x$  – неизвестное. Это уравнение решается с помощью свойства степени: степени с одинаковым основанием  $a > 0$ ,  $a \neq 1$  равны тогда и только тогда, когда равны их показатели» [19].

В §3 «Показательные неравенства» автор рассматривает определение показательных неравенств, «решение которых часто сводится к решению неравенств  $a^x > a^b$  или  $a^x < a^b$ » [19].

Указывается, что «эти неравенства решаются с помощью свойства возрастания или убывания показательной функции: «для возрастающей функции большему значению функции соответствует большее значение

аргумента, а для убывающей функции большему значению функции соответствует меньшее значение аргумента» [19].

Приводятся примеры решения показательных неравенств: методом уравнивания показателей, методом введения новой переменной, функционально-графическим методом.

В учебнике А.Г. Мордковича тема «Показательные уравнения и неравенства» изучается в главе 7 «Показательная и логарифмическая функция», после изучения главы 6 «Степени и корни. Степенные функции».

Так, «§40 «Показательные уравнения и неравенства» изучается после §39 «Показательная функция, ее свойства и график» и перед §41 «Понятие логарифма» [29].

В учебнике автор приводит определение: «Показательными уравнениями называют уравнения вида  $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ , где  $a$  – положительное число, отличное от 1, и уравнения, сводящиеся к этому виду» [29].

Опираясь на приведенные в предыдущем параграфе теоремы 1 и 3, согласно которым равенство  $a^t = a^s$ , где  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ , справедливо тогда и только тогда, когда  $t = s$ , формулируется следующее утверждение.

Теорема 1. «Показательное уравнение  $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ , где  $a > 0$ ,  $a \neq 1$  равносильно уравнению  $f(x) = g(x)$ » [29].

Далее приведены примеры решения показательных уравнений методом уравнивания показателей, методом введения новой переменной, функционально-графическим.

«Выделяется три основных метода решения показательных уравнений: методом уравнивания показателей, методом введения новой переменной, функционально-графическим» [29].

Далее автор переходит к показательным неравенствам. «Показательными неравенствами называют неравенства вида  $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ , где  $a$  – положительное число, отличное от 1, и уравнения, сводящиеся к этому виду» [29].

Теорема 2. «Если  $a > 1$ , то показательное неравенство  $a^{f(x)} > a^{g(x)}$  равносильно неравенству того же смысла:  $f(x) > g(x)$ .

Если  $0 < a < 1$ , то показательное неравенство  $a^{f(x)} > a^{g(x)}$  равносильно неравенству противоположного смысла:  $f(x) < g(x)$ » [29].

Далее разобраны типовые примеры решения показательных неравенств.

Тему «Показательные уравнения неравенства» изучают в 10-11 классах (по учебникам Ш.А. Алимова, Ю.М. Колягина – в 10 классе, по учебнику А.Г. Мордковича – в 11 классе). В таблице 2 приведем результаты анализа методов решения показательных уравнений и неравенств.

Таблица 2 – Результаты анализа методов решения показательных уравнений и неравенств в различных учебниках алгебры и начал математического анализа

| Метод \ Автор                                                 | Ш.А. Алимов | Ю.М. Колягин | А. Г. Мордкович |
|---------------------------------------------------------------|-------------|--------------|-----------------|
| Показательные уравнения                                       |             |              |                 |
| уравнивания показателей                                       | +           | +            | +               |
| вынесения общего множителя за скобки                          | +           | +            | -               |
| почленного деления                                            | +           | +            | +               |
| группировки                                                   | +           | +            | -               |
| введения новой переменной                                     | +           | +            | +               |
| функционально-графический                                     | -           | -            | +               |
| логарифмирования                                              | +           | +            | +               |
| Показательные неравенства                                     |             |              |                 |
| приведения к одному основанию и сравнения показателей степени | +           | +            | +               |
| вынесения общего множителя за скобки                          | -           | -            | -               |
| почленного деления                                            | -           | -            | -               |
| группировки                                                   | -           | -            | -               |
| введения новой переменной                                     | +           | +            | +               |
| функционально-графический                                     | +           | +            | +               |
| рационализации                                                | -           | -            | -               |

Задачный материал.

В учебниках для 10 класса Ш.А. Алимова, Ю.М. Колягина не рассматриваются показательные уравнения на функционально-графический метод; во всех учебниках метод логарифмирования рассматривается после изучения логарифмической функции, при обучении логарифмическим уравнениям.

В учебниках для 10 класса Ш.А. Алимова, Ю.М. Колягина не рассматривается решение показательных неравенств методом почленного деления, методом группировки; в задачнике для 11 класса А.Г. Мордковича - методом группировки. Метод вынесения общего множителя за скобки, метод почленного деления, метод рационализации не рассматриваются ни в одном из анализируемых учебников.

Кроме того, решение показательных уравнений и неравенств является одним из контрольно-измерительных материалов при проведении ЕГЭ на базовом уровне при решении простейших показательных уравнений и неравенств (методом уравнивания показателей); на профильном уровне встречаются задания на решение более сложных заданий по теме (различные методы).

Для введения теоретического материала эффективна исследовательская работа учеников, которая должна сопровождаться беседами учителя с учащимися. Для закрепления материала должны использоваться задания учебника и дополнительная литература. Особое место должно отводиться самостоятельной работе — решению уравнений и неравенств, отработке умений и навыков.

Важно изучать отдельные темы и математику в целом на профильном уровне по следующим причинам:

- подготовка к осознанному выбору профессии. Профильное обучение позволяет изучить школьный курс математики в том объеме, который выбрал сам учащийся, расставить приоритеты разделам и темам в

соответствии с требованиями будущей профессии и интересами самого учащегося.

- развитие логического мышления и творческих способностей. Это необходимо для продолжения образования и для самостоятельной деятельности в области математики в будущей профессии.
- формирование математической культуры. Для учеников, чья будущая профессиональная деятельность будет связана с математикой, знание данного предмета и успешная сдача профильного экзамена просто необходимы.
- повышение качества общего образования. Изучение математики на профильном уровне направлено на удовлетворение интересов учащихся и создание условий для оптимального развития их способностей.

Таким образом, профильное обучение математике помогает решить проблему профессионального самоопределения, выстроить индивидуальную образовательную траекторию с учётом личностного развития школьника и подготовить учащихся к успешной профессиональной деятельности.

Приведем результаты анализа опыта учителей по данной теме.

В статье Т.А. Киренковой «Методическая разработка. Решение показательных уравнений и неравенств» [14] особое место отводится методическим рекомендациям по изучению решения рассматриваемых уравнений и неравенств, даются указания по работе с ними, алгоритмы решения заданий и приводятся решения заданий повышенной трудности с подробной записью хода решения. Изложение материала ведется с соблюдением примерного планирования учебного материала. Включены задания для самостоятельного решения.

В научно-популярном физико-математическом журнале «Квант», в статье А. Егорова «Показательные уравнения» [8], рассматриваются показательные уравнения, которые часто встречались на вступительных

экзаменах. Автор знакомит абитуриентов с некоторыми методами их решения, предлагает задания для самостоятельного решения.

В статье Е.А. Жолобовой и А.В. Фоминой в электронном научном журнале «Информационно-коммуникационные технологии в педагогическом образовании» [10] описаны методические аспекты применения цифровых образовательных ресурсов на уроках математики при изучении темы «Показательные уравнения и неравенства». Статья посвящена проблеме применения цифровых образовательных ресурсов на уроках математики при обучении решению показательных уравнений и неравенств.

М.А. Колесник [17], Э.И. Фазлеевой [40] описывается метод рационализации при решении показательных неравенств.

Кроме учебников и задачником есть довольно большое количество интернет-ресурсов, на которых представлено множество заданий по данной теме.

Например, сайт РЕШУ ЕГЭ [34] позволяет проработать конкретную тему отдельно. Если у ученика есть сложности с определённой темой, он может выбрать её и решать связанные с ней задачи и примеры. Кроме того на сайте есть большое количество полезной справочной информации. Если после объяснения учителем определённой темы ученик не до конца понял материал, он может найти эту тему и задания к ней на сайте, посмотреть примеры решений вариантов заданий.

Еще одним популярным интернет-ресурсом для изучения материала и проработки заданий является Школково – Подготовка к ЕГЭ [46]. Преимуществами данного ресурса является его направленность на развитие самостоятельности, доступность занятий, наличие индивидуальных заданий, подготовка по схеме, аналогичной реальным экзаменам.

Также нельзя оставить без внимания ЯКласс – цифровой образовательный ресурс для школ [48], в котором имеет место огромная база заданий по данной теме, возможность выбора задания по уровню сложности,

детальный разбор решения каждого задания, неограниченное количество подходов к решению задания, электронные домашние задания.

Далее представим разработанные системы задач по теме «Показательные уравнения и неравенства».

Данные системы задач могут быть использованы при проектировании уроков по данной теме в рамках технологии консультирования, которая направлена на отработку методов и приемов решения задач при ее изучении.

Обоснуем применение этой технологии при обучении решению задач по выбранной теме.

Н.Л. Стефановой, Н.С. Подходовой указано, что основными задачами уроков-консультаций являются:

- «ликвидация пробелов в знаниях;
- углубление знаний;
- формирование новых знаний (например, знакомство с новыми методами решения задач);
- передача как опыта учителя, так и положительного опыта учащихся по решению задач» [27].

Вместе с этим, авторы пишут, что «применение технологии консультирования позволяет организовать новый способ познавательной деятельности обучающихся на уроках математики. В процессе обучения учитель применяет промежуточные консультации, перед итоговым контролем проводится обобщающая консультация по теме. Урок-консультацию проводят перед контролем знаний, умений и навыков» [27].

Отметим, что «ученик в процессе выполнения задания по предложенной программе составляет карточку, где формулирует вопросы теории, в которых не смог разобраться, фиксирует те задачи, которые не смог решить, отмечает наиболее интересную задачу, решением которой он хотел бы поделиться. Эту карточку он отдает учителю за день до урока-консультации.

На основе таких карточек учитель планирует урок-консультацию. Целесообразно, чтобы отобранный материал был логически связан между собой и выстроен таким образом, чтобы каждый ученик получил ответы на поставленные им вопросы. По каждому из выделенных блоков учитель разрабатывает задания с теоретическим и практическим содержанием, которые предлагаются учащимся для самостоятельного изучения» [27, с. 238-240].

Некоторые преимущества технологии консультирования при обучении математике:

- ликвидация пробелов в знаниях. Технология консультирования помогает ученикам самостоятельно преодолевать пробелы в математических знаниях и умениях;
- развитие когнитивных способностей. Это улучшает процесс усвоения материала;
- развитие рефлексивных умений. Такие умения помогают повысить саморегуляцию в математической деятельности;
- развитие способности к самостоятельной работе. Ученики учатся получать новые знания из разных источников информации;
- повышение личной ответственности. Ученики начинают принимать ответственность за своё математическое образование на себя;
- создание сотрудничества и взаимопонимания в классе. Например, сильные ученики могут помогать слабым, предлагая различные стратегии решения задач, объясняя математические концепции и демонстрируя примеры [27].

Нами спроектированы три урока консультации: один урок - после изучения показательных уравнений, один - после изучения показательных неравенств, один – на закреплении знаний и умений при решении систем показательных уравнений и неравенств.

При использовании технологии консультирования при изучении темы «Показательные уравнения и неравенства» следует учитывать следующие методические особенности:

- при выполнении письменных заданий учитель обязан принимать во внимание личностные характеристики учеников старших классов и специфику подросткового развития;
- ответственность за верное решения задач и успешное освоение темы делят между собой не только педагоги, но и учащиеся благодаря умению применять изученное во время занятий;
- необходимо обеспечить развитие инициативности учащихся старших классов в процессе решения задач, минимизируя их зависимость от учителя;
- учащиеся должны уметь организовать свою работу так, чтобы работать организованно, избегая превращения процесса обучения в беспорядок;
- самостоятельность и умение структурировать работу при выполнении письменных заданий должны поддерживать целостность обстановки в классе, укреплять взаимодействие среди учеников старших классов через разнообразные формы коллективной деятельности.

Задания для отработки навыка решения задач взяты из учебников 10-11 класса по алгебре и началам математического анализа, а также интернет-ресурсов.

Предполагается отработка приведенных выше заданий в течение двух уроков (90 минут), которая состояла из следующего: проработки системы задач учениками у доски самостоятельно и вместе с учителем поэтапно; разделения класса на 6 групп по 5 человек, в каждой группе был выбран 1 сильный ученик, назначенный ответственным в группе, и 4 послабее. Задача каждой группы заключалась в том, чтобы решить задачи совместно, помогая и объясняя друг другу, затем ученики обменивались тетрадями и

проверяли работы одноклассников и ставили им оценки. Оставшиеся нерешенные задачи учащиеся доделывали дома, тем самым готовясь к контрольной работе.

Содержание темы «Показательные уравнения и неравенства» разобьем на три блока.

Блок 1. Задания на решение показательных уравнений различными методами.

Блок 2. Задания на решение показательных неравенств различными методами.

Блок 3. Задания на решение систем уравнений и неравенств.

Далее представим разработанные системы задач на разные методы их решения.

Блок 1. Задания на решение показательных уравнений различными методами.

– метод уравнивания показателей:

Решить уравнения:

Задача 1.  $4^{x-1} = 1$  [1, с. 79].

Решение. Правую часть уравнения представим в виде степени числа  $4^0$  и получаем:  $4^{x-1} = 4^0$ . Так как равны основания левой и правой части, то равны и показатели степени. Имеем линейное уравнение  $x - 1 = 0$ .

Корень данного уравнения  $x = 1$  является решением данного уравнения. Ответ: 1.

Задача 2.  $27^x = \frac{1}{3}$  [1, с. 79].

Решение. Левую часть уравнения представим в виде степени числа  $3^{3x}$ . Правую часть уравнения представим в виде степени числа  $3^{-1}$  и получаем:  $3^{3x} = 3^{-1}$ . Так как равны основания левой и правой части, то равны и показатели степени. Имеем линейное уравнение  $3x = -1$ .

Корень данного уравнения  $x = -\frac{1}{3}$  является решением данного уравнения. Ответ:  $-\frac{1}{3}$ .

Задача 3.  $\left(\frac{1}{5}\right)^x = 25$  [1, с. 79].

Решение. Правую часть уравнения представим в виде степени числа

$\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}$  и получаем:  $\left(\frac{1}{5}\right)^x = \left(\frac{1}{5}\right)^{-2}$ . Так как равны основания левой и правой части, то равны и показатели степени. Корень данного уравнения  $x = -2$  является решением данного уравнения. Ответ:  $-2$ .

Задача 4.  $2 \cdot 4^x = 64$  [1, с. 79].

Решение. Разделим левую и правую части уравнения на 2. Получается уравнение  $4^x = 32$ . Левую часть уравнения представим в виде степени числа  $2^{2x}$ . Правую часть уравнения представим в виде степени числа  $2^5$  и получаем:  $2^{2x} = 2^5$ . Так как равны основания левой и правой части, то равны и показатели степени. Имеем линейное уравнение  $2x = 5$ . Корень данного уравнения  $x = 2,5$  является решением данного уравнения. Ответ: 2,5.

Задачи для самостоятельного решения в классе и домашнего задания:

а)  $0,3^{3x-2} = 1$  [1, с. 79];

б)  $3 \cdot 9^x = 81$  [1, с. 79];

в)  $0,5^x = 0,125$  [30, с. 134];

г)  $400^x = \frac{1}{20}$  [1, с. 79];

д)  $3^{x^2+x-12} = 1$  [1, с. 79];

е)  $2^{x^2-7x+10} = 1$  [1, с. 79].

ж)  $2^{\frac{x-1}{x-2}} = 4$  [1, с. 79];

– метод введения новой переменной:

Решить уравнения:

Задача 1.  $9^x - 4 \cdot 3^x + 3 = 0$  [1, с. 79].

Решение. Упростим показательное уравнение  $(3^x)^2 - 4 \cdot 3^x + 3 = 0$ , применим метод введения новой переменной, пусть  $3^x = t$ ,  $t > 0$ , данное уравнение можно записать в виде  $t^2 - 4t + 3 = 0$ , решаем это

квадратное уравнение:  $D = 16 - 12 = 4$ ;  $t_1 = \frac{4+2}{2} = 3$ ;  $t_2 = \frac{4-2}{2} = 1$ .

Возвращаемся к замене, теперь задача сводится к решению уравнений:  $3^x = 3$ ;  $3^x = 1$ ; имеем  $3^x = 3^1$ ;  $x = 1$ ;  $3^x = 3^0$ ;  $x = 0$ . Ответ: 0; 1.

Задача 2.  $64^x - 8^x - 56 = 0$  [1, с. 79].

Решение. Упростим показательное уравнение  $(8^x)^2 - 8^x - 56 = 0$ , применим метод введения новой переменной, пусть  $8^x = t$ ,  $t > 0$ , данное уравнение можно записать в виде  $t^2 - t - 56 = 0$ , решаем это квадратное уравнение:  $\begin{cases} t_1 + t_2 = 1 \\ t_1 \cdot t_2 = -56 \end{cases}$ ;  $t_1 = 8$ ,  $t_2 = -7$  - посторонний корень, т.к. не удовлетворяет условию  $t > 0$ . Возвращаемся к замене, теперь задача сводится к решению уравнения:  $8^x = 8$ ;  $8^x = 8^1$ ;  $x = 1$ . Ответ: 1.

Задачи для самостоятельного решения в классе и домашнего задания:

а)  $25^x - 6 \cdot 5^x + 5 = 0$  [1, с. 79];

б)  $16^x - 17 \cdot 4^x + 16 = 0$  [1, с. 79];

в)  $36^x - 4 \cdot 6^x - 12 = 0$  [18];

г)  $100^x - 11 \cdot 10^x + 10 = 0$  [18];

д)  $2^{2x} - 6 \cdot 2^x + 8 = 0$  [30];

е)  $3 \cdot 9^x - 10 \cdot 3^x + 3 = 0$  [30];

ж)  $(0,25)^x + 1,5 \cdot 0,5^x - 1 = 0$  [30];

з)  $4^x - 2^{x+3} + 15 = 0$  [46].

– метод вынесения общего множителя за скобки:

Решить уравнения:

Задача 1.  $3^{2x-1} + 3^{2x} = 108$  [1, с. 79].

Решение: т.к.  $3^{2x-1}$  равносильно  $3^{2x} \cdot \frac{1}{3}$ , запишем как  $3^{2x} \cdot \frac{1}{3} + 3^{2x} =$

108. Вынесем  $3^{2x}$  за скобку:  $3^{2x} (\frac{1}{3} + 1) = 108$ ;  $3^{2x} \cdot \frac{4}{3} = 108$ .

$3^{2x} = 108 \cdot \frac{3}{4}$ ;  $3^{2x} = 81$ ;  $3^{2x} = 3^4$ ;  $2x = 4$ ;  $x = 2$ . Ответ: 2.

Задача 2.  $2^{x+1} + 2^{x-1} + 2^x = 28$  [1, с. 79].

Решение: т.к.  $2^{x+1}$  равносильно  $2^x \cdot 2$ , а  $2^{x-1}$  равносильно  $2^x \cdot \frac{1}{2}$ , запишем как  $2^x \cdot 2 + 2^x \cdot \frac{1}{2} + 2^x = 28$ . Вынесем  $2^x$  за скобку:

$$2^x (2 + \frac{1}{2} + 1) = 28; \quad 2^x \cdot \frac{7}{2} = 28; \quad 2^x = 28 \cdot \frac{2}{7}; \quad 2^x = 8; \quad 2^x = 2^3; \quad x = 3. \text{ Ответ: } 3.$$

Задачи для самостоятельного решения в классе и домашнего задания:

а)  $2^{3x+2} - 2^{3x-2} = 30$  [1, с. 79];

б)  $3^x - 3^{x+3} = -78$  [30, с. 136];

в)  $5^{2x-1} - 5^{2x-3} = 4,8$  [30, с. 136];

г)  $4^{x+1} + 4^x = 320$  [18, с. 231].

д)  $\left(\frac{1}{3}\right)^{5x-1} + \left(\frac{1}{3}\right)^{5x} = \frac{4}{9}$  [30, с. 136];

е)  $7^{x+2} + 4 \cdot 7^{x+1} = 539$  [18];

ж)  $2 \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^{3x+7} - 7 \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^{3x+8} = 49$  [30, с. 136];

– метод почленного деления (для однородных уравнений 1 и 2 степени):

Решить уравнения:

Задача 1.  $3^{2x+6} = 2^{x+3}$  [1, с. 80].

Решение:  $(3^2)^{x+3} = 2^{x+3}$ ;  $9^{x+3} = 2^{x+3}$ . Разделим левую и правую части уравнения на  $2^{x+3} \neq 0$ .  $\left(\frac{9}{2}\right)^{x+3} = 1$ ;  $\left(\frac{9}{2}\right)^{x+3} = \left(\frac{9}{2}\right)^0$ ;  $x + 3 = 0$ ;  $x = -3$ . Ответ:  $x = -3$ .

Задача 2.  $4 \cdot 9^x - 13 \cdot 6^x + 9 \cdot 4^x = 0$  [1, с. 81].

Решение. Представим уравнение в виде  $4 \cdot 3^{2x} - 13 \cdot 2^x \cdot 3^x + 9 \cdot 2^{2x} = 0$ . Разделим почленно на  $2^{2x} \neq 0$ ;  $4 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{2x} - 13 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x + 9 = 0$ .

Пусть  $\left(\frac{3}{2}\right)^x = t$ ,  $t > 0$ ;  $4t^2 - 13t + 9 = 0$ ;  $D = 169 - 144 = 25$

$t_1 = \frac{13+5}{8} = \frac{9}{4}$ ;  $t_2 = \frac{13-5}{8} = 1$ . Возвращаемся к замене, теперь задача сводится к решению уравнений:  $\left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{9}{4}$  или  $\left(\frac{3}{2}\right)^x = 1$ . Имеем:  $\left(\frac{3}{2}\right)^x = \left(\frac{3}{2}\right)^2$  или  $\left(\frac{3}{2}\right)^x = \left(\frac{3}{2}\right)^0$ ;  $x = 2$  или  $x = 0$ . Ответ: 0; 2.

Задачи для самостоятельного решения в классе и домашнего задания:

а)  $2^x \cdot 3^x = 36^{x^2}$  [1, с. 80];

б)  $5^{x-2} = 4^{2x-4}$  [1, с. 80];

в)  $16 \cdot 9^x - 25 \cdot 12^x + 9 \cdot 16^x = 0$  [1];

г)  $7^{x-2} = 4^{2-x}$  [18, с. 232];

д)  $5^{x+1} = 8^{x+1}$  [18, с. 232];

е)  $\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} = \left(\frac{1}{4}\right)^{1-x}$  [18, с. 232];

ж)  $25^x = 7^{2x}$  [30, с. 137].

– функционально-графический метод:

Решить уравнения:

Задача 1.  $3^x = -x - \frac{2}{3}$  [30, с. 137].

Решение. Строим 2 графика функций (рисунок 2):  $y = 3^x$  и  $y = -x - \frac{2}{3}$ . Запишем таблицы значений, которые приведены в таблице 3 и таблице 4.

Таблица 3 – Значения функции  $y = 3^x$ .

|     |   |   |               |               |
|-----|---|---|---------------|---------------|
| $x$ | 0 | 1 | -1            | -2            |
| $y$ | 1 | 3 | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{9}$ |

Таблица 4 – Значения функции  $y = -x - \frac{2}{3}$ .

|     |                |               |
|-----|----------------|---------------|
| $x$ | 0              | -1            |
| $y$ | $-\frac{2}{3}$ | $\frac{1}{3}$ |

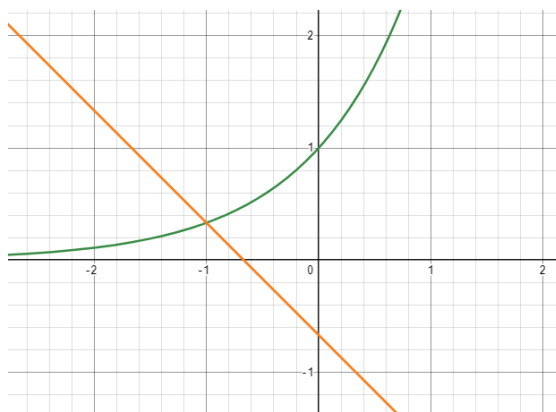


Рисунок 2 – Графики функций  $y = 3^x$  и  $y = -x - \frac{2}{3}$ .

Построив графики этих функций, найдем абсциссу точки пересечения, она и будет корнем уравнения  $x = -1$ . Ответ:  $-1$ .

Задача 2.  $\left(\frac{1}{2}\right)^x = x - \frac{1}{2}$  [1, с. 83].

Решение. Строим 2 графика функций:  $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$  и  $y = x - \frac{1}{2}$  (рисунок 3).

Запишем таблицы значений, которые приведены в таблицах 5 - 6.

Таблица 5 – Значения функции  $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ .

|     |   |               |               |    |    |
|-----|---|---------------|---------------|----|----|
| $x$ | 0 | 1             | 2             | -1 | -2 |
| $y$ | 1 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ | 2  | 4  |

Таблица 6 – Значения функции  $y = x - \frac{1}{2}$ .

|     |                |               |
|-----|----------------|---------------|
| $x$ | 0              | 1             |
| $y$ | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |

Построив графики этих функций, найдем абсциссу точки пересечения, она и будет корнем уравнения  $x = 1$ . Ответ: 1.

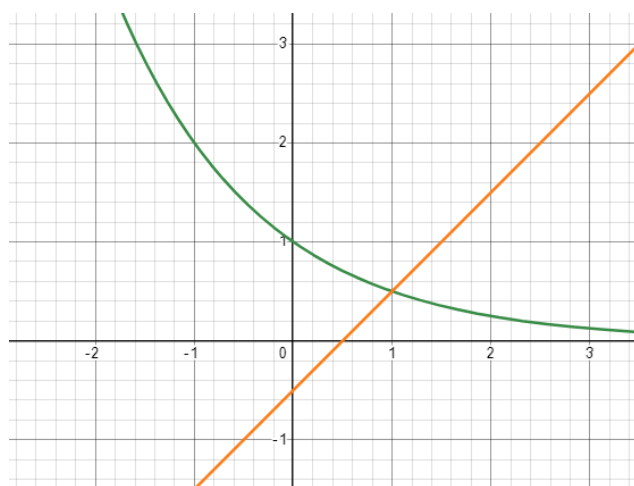


Рисунок 3 – Графики функций  $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$  и  $y = x - \frac{1}{2}$

Задачи для самостоятельного решения в классе и домашнего задания:

а)  $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 4x + 6$  [30, с. 137];

б)  $2x + 1,8 = -5^x$  [30, с. 137];

в)  $\left(\frac{1}{4}\right)^x = 3x + 1$  [30, с. 137];

г)  $3^{\frac{x}{2}} = -0,5x + 4$  [30, с. 137];

д)  $\left(\frac{1}{3}\right)^x = x + 1$  [1, с. 83];

е)  $2^x = -x - \frac{7}{4}$  [1, с. 83].

– метод группировки:

Решить уравнение:

Задача 1.  $2^{8-x} + 7^{3-x} = 7^{4-x} + 2^{3-x} \cdot 11$  [1, с. 80].

Решение. Сгруппируем слагаемые следующим образом:

$$2^{8-x} - 2^{3-x} \cdot 11 = 7^{4-x} - 7^{3-x}.$$

$$2^8 \cdot 2^{-x} - 2^3 \cdot 2^{-x} \cdot 11 = 7^4 \cdot 7^{-x} - 7^3 \cdot 7^{-x}.$$

Вынесем в левой части  $2^{-x}$  за скобки, а в правой  $7^{-x}$

$$2^{-x}(256 - 88) = 7^{-x}(2401 - 343); \quad 168 \cdot 2^{-x} = 2058 \cdot 7^{-x}$$

$$4 \cdot 2^{-x} = 49 \cdot 7^{-x}; \quad 2^2 \cdot 2^{-x} = 7^2 \cdot 7^{-x}; \quad 2^{2-x} = 7^{2-x}$$

Разделим обе части уравнения на  $7^{2-x} \neq 0$ .

$$\left(\frac{2}{7}\right)^{2-x} = 1; \quad \left(\frac{2}{7}\right)^{2-x} = \left(\frac{2}{7}\right)^0; \quad 2-x = 0; \quad x = 2. \text{ Ответ: } x = 2.$$

$$\text{Задача 2. } 3^{x+3} + 3^x = 7^{x+1} + 5 \cdot 7^x [1, \text{ с. 80}].$$

Решение. Так как слагаемые уже сгруппированы, то представим уравнение в виде  $3^x \cdot 3^3 + 3^x = 7^x \cdot 7 + 5 \cdot 7^x$ . Вынесем в левой части  $3^x$  за скобки, а в правой  $7^x$ :  $3^x(27 + 1) = 7^x(7 + 5); \quad 28 \cdot 3^x = 12 \cdot 7^x; \quad 7 \cdot 3^x = 3 \cdot 7^x$ . Разделим обе части уравнения на  $7^x \neq 0$ .

$$7 \cdot \left(\frac{3}{7}\right)^x = 3; \quad \left(\frac{3}{7}\right)^x = \frac{3}{7}; \quad \left(\frac{3}{7}\right)^x = \left(\frac{3}{7}\right)^1; \quad x = 1. \text{ Ответ: } 1.$$

Задачи для самостоятельного решения в классе и домашнего задания:

$$\text{а) } 3^{x+4} + 3 \cdot 5^{x+3} = 5^{x+4} + 3^{x+3} [1, \text{ с. 80}];$$

$$\text{б) } 2^{x+1} + 2^{x-1} - 3^{x-1} = 3^{x-2} - 2^{x-3} + 2 \cdot 3^{x-3} [1, \text{ с. 80}];$$

$$\text{в) } 2^{x+4} + 2^{x+2} = 5^{x+1} + 3 \cdot 5^x [1, \text{ с. 89}];$$

$$\text{г) } 5^{2x} - 7^x - 5^{2x} \cdot 17 + 7^x \cdot 17 = 0 [1, \text{ с. 89}];$$

$$\text{д) } 2^{x^2-1} - 3^{x^2} = 3^{x^2-1} - 2^{x^2+2} [1, \text{ с. 89}].$$

– метод логарифмирования:

Решить уравнения:

$$\text{Задача 1. } x^{\log_3 x - 2} = 27 [48].$$

Решение. ОДЗ:  $x > 2$ . Прологарифмируем обе части уравнения по основанию 3:  $\log_3 x^{\log_3 x - 2} = \log_3 27; \quad (\log_3 x - 2) \cdot \log_3 x = 3$ .

Пусть  $\log_3 x = t$ ;  $(t - 2) \cdot t = 3$ ;  $t^2 - 2t - 3 = 0$ . По теореме Виета:  

$$\begin{cases} t_1 + t_2 = 2 \\ t_1 \cdot t_2 = -3 \end{cases} \Rightarrow t_1 = 3; \quad t_2 = -1. \text{ Вернемся к замене: } \log_3 x = 3; \quad \log_3 x = -1; \quad x_1 = 27; \quad x_2 = \frac{1}{3} - \text{ложный корень. Ответ: } 27.$$

$$\text{Задача 2. } 2^x = 3 [26].$$

Решение. Прологарифмируем обе части уравнения по основанию 2:

$$\log_2 2^x = \log_2 3; \quad x \cdot \log_2 2 = \log_2 3; \quad x = \log_2 3. \text{ Ответ: } x = \log_2 3.$$

$$\text{Задача 3. } x^{1+\lg x} = 10x [34].$$

Решение. ОДЗ:  $x > 0$ . Прологарифмируем обе части уравнения по основанию 10:

$$\lg(x^{1+\lg x}) = \lg(10x); \lg x + \lg x \cdot \lg x = \lg 10 + \lg x;$$

$$(1 + \lg(x)) \cdot \lg(x) = 1 + \lg(x).$$

$$(1 + \lg(x))(\lg(x) - 1) = 0; \lg(x) = 1, \lg(x) = -1.$$

$$x_1 = 10, x_2 = 0,1. \text{ Ответ: } 0,1; 10.$$

Задачи для самостоятельного решения в классе и домашнего задания:

а)  $3^x = 4$  [26];

б)  $x^{\log_2 x} = 4x$  [26];

в)  $(x + 5)^{\log_7(x+5)} = 7$  [46];

г)  $x^{\log_3 x+1} = 9$  [46];

д)  $2x^{\log_2 x} = 32$  [46].

В таблице 7 приведены умения и знания, необходимые для выполнения данных заданий.

Приведем примерные вопросы, которые могут быть заданы школьникам при проведении урока-консультирования:

- С помощью каких методов были решены уравнения?
- Какова основа каждого из рассмотренных методов решения показательных уравнений? Когда целесообразно применить выбранный метод решения?
- Можно ли какое-то из решенных уравнений решить другими методами?

Таблица 7 – Требования к выполнению заданий:

| Знания                                                                                                                            | Умения                                                                                                            |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Определение показательного уравнения - это уравнение, в котором переменная находится в показателе степени.                        | Решать простые показательные уравнения. Для этого используются свойства степеней.                                 |
| Свойства показательной функции $y = a^x$ . Например, при $a > 1$ такая функция возрастает, а при $a < 1$ (но больше 0) — убывает. | Преобразовывать выражения. Например, делать так, чтобы либо основания, либо степенные показатели стали одинаковы. |
| Теорема: если равны основания степеней, то равны и показатели степеней.                                                           | Использовать метод замены переменной.                                                                             |
| Утверждение: простейшее показательное уравнение вида $a^x = b$ имеет корень                                                       | Решать показательные уравнения различными методами, уметь их                                                      |

|                                         |                                                |
|-----------------------------------------|------------------------------------------------|
| тогда и только тогда, когда $b > 0$ .   | комбинировать.                                 |
| Методы решения показательных уравнений. | Применять полученные знания при решении задач. |

На уроке-консультации обучающиеся знакомятся с решением показательных уравнений методом логарифмирования, который рассматривается в учебниках после изучения логарифмической функции, при обучении логарифмическим уравнениям.

Домашнее задание:

а)  $4^x = 64$  [1, с. 79];

б)  $9^x - 8 \cdot 3^x - 9 = 0$  [1, с. 79];

в)  $3^{x-1} - 3^x + 3^{x+1} = 63$  [1];

г)  $2^x = 3^x$  [30, с. 137];

д)  $3^x = 11 - x$  [46];

е)  $x^{\log 4x-2} = 2^{2(\log 4x-1)}$  [48];

ж)  $3 \cdot 4^x + \frac{1}{3} \cdot 9^{x+2} = 6 \cdot 4^{x+1} - \frac{1}{2} \cdot 9^{x+1}$  [48];

з)  $\begin{cases} x - y = 2 \\ 3^{x^2+y} = \frac{1}{9} \end{cases}$  [1, с. 86].

Блок 2. Задания на решение показательных неравенств различными методами.

– метод приведения к одному основанию и сравнению показателей степени:

Решить неравенства:

Задача 1.  $3^x > 9$  [1, с. 83].

Решение:  $3^x > 3^2$ . Т.к.  $a = 3 > 1$ , то  $y = 3^x$  - возрастающая функция, тогда  $x > 2$ . Ответ:  $x \in (2; +\infty)$ .

Задача 2.  $\left(\frac{1}{2}\right)^x > \frac{1}{4}$  [1, с. 83].

Решение:  $\left(\frac{1}{2}\right)^x > \left(\frac{1}{2}\right)^2$ . Т.к.  $a = \frac{1}{2} < 1$ , то  $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$  - убывающая функция,  $x < 2$ . Ответ:  $x \in (-\infty; 2)$ .

Задача 3.  $5^{x-1} \leq \sqrt{5}$  [1, с. 83].

Решение:  $5^{x-1} \leq 5^{\frac{1}{2}}$ ; т.к.  $a = 5 > 1$ , то  $y = 5^x$  - возрастающая функция, тогда  $x - 1 \leq 0,5$ ;  $x \leq 1,5$ . Ответ:  $x \in (-\infty; 1,5]$ .

Задача 4.  $2^{-x^2+3x} < 4$  [1, с. 83].

Решение:  $2^{-x^2+3x} < 2^2$ ; т.к.  $a = 2 > 1$ , то  $y = 2^x$  - возрастающая функция,  $-x^2 + 3x < 2$ ;  $-x^2 + 3x - 2 < 0$ , решим квадратное неравенство.

Приравниваем выражение к нулю и находим точки пересечения параболы с осью Ох (рисунок 4):  $-x^2 + 3x - 2 = 0$ ;  $D = 9 - 8 = 1$ ;  $x_1 = \frac{-3+1}{-2} = 1$ ;  $x_2 = \frac{-3-1}{-2} = 2$ . Имеем:  $x \in (-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$ .



Рисунок 4 – К решению неравенства  $-x^2 + 3x - 2 < 0$

Ответ:  $x \in (-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$ .

Задачи для самостоятельного решения в классе и домашнего задания:

а)  $\left(\frac{1}{4}\right)^x < 2$  [1, с. 83];

б)  $4^x < \frac{1}{2}$  [1, с. 83];

в)  $3^{\frac{x}{2}} > 9$  [1, с. 83];

г)  $3^{x^2-4} \geq 1$  [1, с. 83];

д)  $\left(\frac{13}{11}\right)^{x^2-3x} < \frac{121}{169}$  [1, с. 83];

е)  $0,7^{x^2+2x} < 0,7^3$  [1, с. 88].

– метод вынесения общего множителя за скобки.

Решить неравенства:

Задача 1.  $3^{x+2} + 3^{x-1} < 28$  [1, с. 83].

Решение. Вынесем за скобки общий множитель  $3^x$ ;  $3^x(3^2 + 3^{-1}) < 28$

$$3^x \cdot (9 + \frac{1}{3}) < 28; \quad 3^x < 28 \div \frac{28}{3}; \quad 3^x < 3; \quad 3^x < 3^1. \text{ Т.к. } a = 3 > 1, \text{ то}$$

$y = 3^x$  - возрастающая функция,  $x < 1$ . Ответ:  $x \in (-\infty; 1)$ .

$$\text{Задача 2. } 2^{x-1} + 2^{x+3} > 17 \text{ [1, с. 83].}$$

Решение. Вынесем за скобки общий множитель  $2^x$ .

$$2^x(2^{-1} + 2^3) > 17; \quad 2^x(0,5 + 8) > 17; \quad 2^x > 17 \div 8,5; \quad 2^x > 2.$$

Т.к.  $a = 2 > 1$ , то  $y = 2^x$  - возрастающая функция;  $2^x > 2^1$ ;  $x > 1$ .

Ответ:  $x \in (1; +\infty)$ .

Задачи для самостоятельного решения в классе и домашнего задания:

$$\text{а) } 2^{2x-1} + 2^{2x-2} + 2^{2x-3} \geq 448 \text{ [1, с. 83];}$$

$$\text{б) } 5^{3x+1} - 5^{3x-3} \leq 624 \text{ [1, с. 83];}$$

$$\text{в) } \left(\frac{2}{3}\right)^x + \left(\frac{2}{3}\right)^{x-1} > 2,5 \text{ [18, с. 232];}$$

$$\text{г) } \left(\frac{4}{3}\right)^{x+1} - \left(\frac{4}{3}\right)^x > \frac{3}{16} \text{ [18, с. 232];}$$

$$\text{д) } 2^x + 2^{x+2} \leq 20 \text{ [30, с. 139];}$$

$$\text{е) } 3^{2x-1} - 3^{2x-3} < \frac{8}{3} \text{ [30, с. 139];}$$

$$\text{ж) } 0,3^{6x-1} - 0,3^{6x} \geq 0,7 \text{ [30, с. 139].}$$

– метод введения новой переменной.

Решить неравенства:

$$\text{Задача 1. } 9^x - 3^x - 6 > 0 \text{ [1, с. 84].}$$

Решение. Упростим показательное неравенство  $(3^x)^2 - 3^x - 6 > 0$ , применим метод введения новой переменной, пусть  $3^x = t$ ,  $t > 0$ , неравенство можно записать в виде  $t^2 - t - 6 > 0$ .

Приравниваем выражение к нулю и находим точки пересечения параболы с осью  $Ox$  (рисунок 5):  $t^2 - t - 6 = 0$ ;  $D = 1 + 24 = 25$ ;  
 $t_1 = \frac{1+5}{2} = 3$ ,  $t_2 = \frac{1-5}{2} = -2$ .

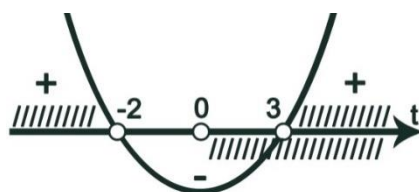


Рисунок 5 – К решению неравенства  $t^2 - t - 6 > 0$

Решением неравенства является:  $t > 3$ .

Вернемся к замене:  $3^x > 3$ ;  $3^x > 3^1$ . Т.к.  $a = 3 > 1$ , то  $y = 3^x$  - возрастающая функция, тогда  $x > 1$ . Ответ:  $x \in (1; +\infty)$ .

Задача 2.  $5^{2x+1} + 4 \cdot 5^x - 1 > 0$  [1, с. 84].

Решение: Упростим показательное неравенство

$5 \cdot (5^x)^2 + 4 \cdot 5^x - 1 > 0$ , применим метод введения новой переменной; пусть  $5^x = t$ ,  $t > 0$ , данное неравенство можно записать в виде  $5t^2 + 4t - 1 > 0$ .

Приравниваем выражение к нулю и находим точки пересечения параболы с осью Ох (рисунок 6):

$$5t^2 + 4t - 1 = 0; \quad D = 16 + 20 = 36; \quad t_1 = \frac{-4+6}{10} = \frac{1}{5};$$

$$t_2 = \frac{-4-6}{10} = -1 \text{ посторонний корень, т.к. не удовлетворяет условию } t > 0.$$

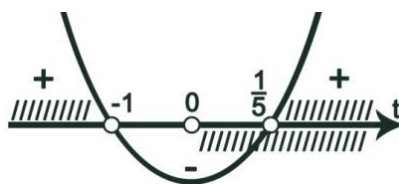


Рисунок 6 – К решению неравенства  $5t^2 + 4t - 1 > 0$

Возвращаемся к замене:  $5^x > \frac{1}{5}$ ;  $5^x > 5^{-1}$ . Т.к.  $a = 5 > 1$ , то  $y = 5^x$  - возрастающая функция;  $x > -1$ .

Ответ:  $x \in (-1; +\infty)$ .

$$1) \frac{2 \cdot 4^{x-2}}{2 \cdot 4^{x-2} - 1} \geq \frac{7}{4^x - 1} + \frac{40}{16^x - 9 \cdot 4^x + 8} \quad [48].$$

Решение. Пусть  $4^x = t$ ,  $t > 0$ ;  $\frac{2t \cdot \frac{1}{16}}{2t \cdot \frac{1}{16} - 1} \geq \frac{7}{t-1} + \frac{40}{t^2-9t+8}$ ;  $\frac{\frac{1}{8}t}{\frac{1}{8}t-1} \geq \frac{7}{t-1} +$   
 $+\frac{40}{t^2-9t+8}$ ;  $\frac{\frac{1}{8}t}{\frac{1}{8}t-1} - \frac{7}{t-1} - \frac{40}{(t-1)(t-8)} \geq 0$ ;  $\frac{\frac{1}{8}t(t-1)(t-8)-7(\frac{1}{8}t-1)(t-8)-40(\frac{1}{8}t-1)}{(\frac{1}{8}t-1)(t-1)(t-8)}$ ;  
 $\frac{\frac{1}{8}t^3-t^2-\frac{1}{8}t^2+t-\frac{7}{8}t^2+7t+7t-56-5t+40}{(\frac{1}{8}t-1)(t-1) \cdot 8(\frac{1}{8}t-1)} \geq 0$ ;  $\frac{\frac{1}{8}t^3-2t^2+10t-16}{(\frac{1}{8}t-1)^2(8t-8)} \geq 0$ ;  $\frac{t^3-16t^2+80t-128}{(\frac{1}{8}t-1)^2(8t-8)} \geq 0$ ;  
 $\frac{t^3-4t^2-12t^2+48t+32t-128}{8(\frac{1}{8}t-1)^2(8t-8)} \geq 0$ ;  $\frac{(t-4)(t^2-12t+32)}{8(\frac{1}{8}t-1)^2(8t-8)} \geq 0$ ;  $\frac{(t-4)^2(t-8)}{8(\frac{1}{8}t-1)^2(8t-8)} \geq 0$ .

Решим неравенство методом интервалов (рисунок 7).



Рисунок 7 – К решению неравенства  $\frac{(t-4)^2(t-8)}{8(\frac{1}{8}t-1)^2(8t-8)} \geq 0$ .

Имеем:  $t = 4$ ;  $t \in (-\infty; 1) \cup (8; +\infty)$ .

Вернемся к замене:  $4^x < 1$ ;  $x < 0$ ;  $4^x = 4$ ;  $x = 1$ ;  $4^x > 8$ ;  $x > 1,5$ .

Ответ:  $(-\infty; 0) \cup \{1\} \cup (1,5; +\infty)$ .

Задачи для самостоятельного решения в классе и домашнего задания:

а)  $4^x - 2^x < 12$  [1, с. 84];

б)  $3 \cdot 9^x + 11 \cdot 3^x < 4$  [1, с. 84];

в)  $4^x - 2^{x+1} - 8 > 0$  [18, с. 232];

г)  $\pi^x - \pi^{2x} \geq 0$  [18, с. 232];

д)  $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-1} - 10 \cdot 3^{-x} + 3 < 0$  [18];

е)  $\left(\frac{1}{36}\right)^x - 5 \cdot 6^{-x} - 6 \leq 0$  [18];

ж)  $\frac{4}{3^x-27} \geq \frac{1}{3^x-9}$  [26];

з)  $\frac{2^{x+1}-17 \cdot 2^{2-x}}{2^x-2^{6-x}} \geq 1$  [48];

и)  $\frac{4^x+2^{x+1}-36}{2^x-5} + \frac{4^{x+1}-2^{x+5}+4}{2^x-8} \leq 5 \cdot 2^x + 7$  [34].

– функционально-графический метод.

Решить неравенства:

Задача 1.  $2^x \leq 9 - \frac{1}{3}x$  [1, с. 84].

Решение. Строим 2 графика функций (рисунок 8):  $y = 2^x$  и  $y = 9 - \frac{1}{3}x$ .

Строим таблицы значений, которые приведены в таблице 8 и таблице 9.

Таблица 8 – Значения функции  $y = 2^x$ .

|     |   |   |               |               |   |
|-----|---|---|---------------|---------------|---|
| $x$ | 0 | 1 | -1            | -2            | 3 |
| $y$ | 1 | 2 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ | 8 |

Таблица 9 – Значения функции  $y = 9 - \frac{1}{3}x$ .

|     |   |   |
|-----|---|---|
| $x$ | 0 | 3 |
| $y$ | 9 | 8 |

Ответ:  $x \in (-\infty; 3]$ .

Задача 2.  $3^x \geq 4 - x$  [18, с. 232].

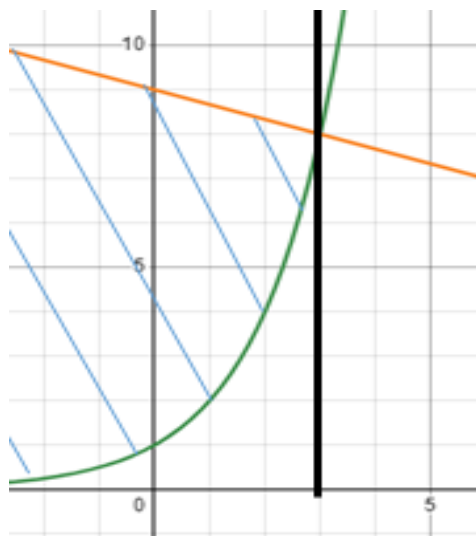


Рисунок 8 - Графики функций  $y = 2^x$  и  $y = 9 - \frac{1}{3}x$ .

Решение. Строим 2 графика функций (рисунок 9):  $y = 3^x$  и  $y = 4 - x$ .

Приведем таблицы значений (таблицы 10 – 11).

Таблица 10 – Значения функции  $y = 3^x$ .

|     |   |   |               |               |   |
|-----|---|---|---------------|---------------|---|
| $x$ | 0 | 1 | -1            | -2            | 2 |
| $y$ | 1 | 3 | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{9}$ | 9 |

Таблица 11 – Значения функции  $y = 4 - x$ .

|     |   |   |
|-----|---|---|
| $x$ | 0 | 1 |
| $y$ | 4 | 3 |

Ответ:  $x \in [1; +\infty)$ .

Задачи для самостоятельного решения в классе и домашнего задания:

а)  $\left(\frac{1}{3}\right)^x \geq x + 1$  [1, с. 84];

б)  $\left(\frac{1}{2}\right)^x < x - \frac{1}{2}$  [1, с. 84];

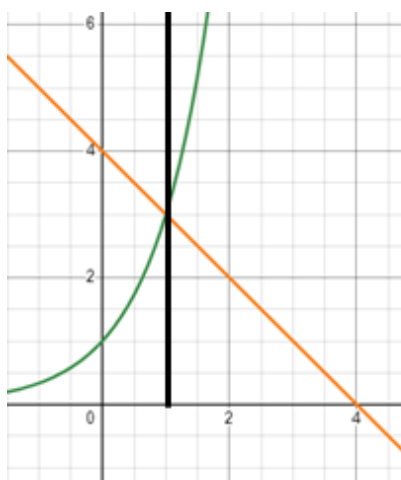


Рисунок 9 - Графики функций  $y = 3^x$  и  $y = 4 - x$ .

в)  $3^x > -\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$  [1, с. 84];

г)  $2^x \leq 3 - x$  [18, с. 232];

д)  $\left(\frac{1}{3}\right)^x \leq 2x + 5$  [18, с. 232];

е)  $\left(\frac{1}{4}\right)^x \geq 2x + 1$  [18, с. 232];

ж)  $5^x \leq -x + 6$  [30, с. 139];

з)  $\left(\frac{1}{2}\right)^x < 0,5x + 5$  [30, с. 139].

– метод почленного деления (для однородных уравнений 1 и 2 степени).

Решить неравенства:

Задача 1.  $3^x < 5^x$  [30, с. 140].

Решение. Разделим левую и правую часть неравенства на  $5^x \neq 0$ .

$$\left(\frac{3}{5}\right)^x < 1; \quad \left(\frac{3}{5}\right)^x < \left(\frac{3}{5}\right)^0; \quad \text{т.к. } a = \frac{3}{5} > 1, \text{ то } y = \left(\frac{3}{5}\right)^x - \text{убывающая}$$

функция,  $x > 0$ . Ответ:  $x \in (0; +\infty)$ .

Задача 2.  $\left(\frac{12}{13}\right)^x \leq 12^x$ .

Решение. Разделим левую и правую часть неравенства на  $12^x \neq 0$ .

$$\left(\frac{1}{13}\right)^x \leq 1; \quad \left(\frac{1}{13}\right)^x \leq \left(\frac{1}{13}\right)^0; \quad \text{т.к. } a = \frac{1}{13} > 1, \text{ то } y = \left(\frac{1}{13}\right)^x - \text{убывающая}$$

функция,  $x \geq 0$ . Ответ:  $x \in [0; +\infty)$ .

Задача 3.  $16^x - 12^x - 2 \cdot 9^x \leq 0$ .

Решение. Представим уравнение в виде  $4^{2x} - 4^x \cdot 3^x - 2 \cdot 3^{2x} \leq 0$ .

Разделим почленно на  $3^{2x} \neq 0$ ;  $\left(\frac{4}{3}\right)^{2x} - \left(\frac{4}{3}\right)^x - 2 \leq 0$ . Пусть  $\left(\frac{4}{3}\right)^x = t$ ,

$t > 0$ ; данное неравенство можно записать в виде:  $t^2 - t - 2 \leq 0$ .

Приравниваем выражение к нулю и находим точки пересечения параболы с

осью Ох (рисунок 10):  $t^2 - t - 2 = 0$ ;  $D = 1 + 8 = 9$ ;  $t_1 = \frac{1+3}{2} = 2$ ;

$t_2 = \frac{1-3}{2} = -1$  – посторонний корень, т.к. не удовлетворяет условию  $t > 0$ .

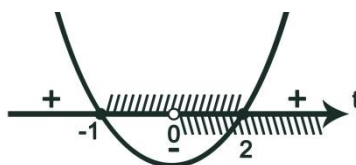


Рисунок 10 – К решению неравенства  $t^2 - t - 2 \leq 0$

Вернемся к замене:  $\left(\frac{4}{3}\right)^x \in (0; 2]$ ;  $\left(\frac{4}{3}\right)^x \leq 2$ . Прологарифмируем левую и правую часть неравенства по основанию  $\frac{4}{3}$ . Тогда:  $\log_{\frac{4}{3}} \left(\frac{4}{3}\right)^x \leq \log_{\frac{4}{3}} 2$ ;  $x \leq \log_{\frac{4}{3}} 2$ . Ответ: Ответ:  $x \in (-\infty; \log_{\frac{4}{3}} 2]$ .

Задачи для самостоятельного решения в классе и домашнего задания:

- а)  $6^x \geq 2^x$  [30, с. 140];
- б)  $0,6^x > 3^x$  [30, с. 140];
- в)  $9^x - 2 \cdot 6^x - 3 \cdot 4^x \leq 0$  [34];
- г)  $36^x - 2 \cdot 5^{2x} + 30^x > 0$  [34].
- д)  $3 \cdot 25^{x+0,5} + 4^{2x+1,5} \leq 22 \cdot 20^x$  [34].

– метод рационализации.

Решить неравенства:

Задача 1.  $(4x^2 + 2x + 1)^{x^2-x} > 1$  [26].

Решение. Перепишем неравенство в виде  $(4x^2 + 2x + 1)^{x^2-x} - 1 > 0$ .

ОДЗ:  $4x^2 + 2x + 1 > 0$ ,  $4x^2 + 2x + 1 \neq 1$ , то есть  $x \in (-\infty; -0,5) \cup (1; +\infty)$ . Используя формулу  $h^f - 1 = (h - 1)f$ , где  $h > 0$ ,  $h \neq 1$  по методу

рационализации, получим неравенство  $(4x^2 + 2x)(x^2 - x) > 0$ .

$2x(2x + 1)x(x - 1) > 0$ , то есть  $2x^2(2x + 1)(x - 1) > 0$ , решим неравенство методом интервалов (рисунок 11). Учтем ОДЗ неравенства.



Рисунок 11 – К решению неравенства  $2x^2(2x+1)(x-1) > 0$

Ответ:  $x \in (-\infty; -0,5) \cup (1; +\infty)$ .

Приведем решение данного неравенства другим методом.

$$(4x^2 + 2x + 1)^{x^2-x} > 1.$$

Решение. 1 случай:  $\begin{cases} 4x^2 + 2x + 1 > 1, \\ x^2 - x > 0. \end{cases}$  Решением системы является:

$$x \in (-\infty; -0,5) \cup (1; +\infty).$$

2 случай  $\begin{cases} 0 < 4x^2 + 2x + 1 < 1, \\ x^2 - x < 0 \end{cases}$ . Решением системы является:  $x \in \emptyset$ .

Объединяя решения, получаем:  $x \in (-\infty; -0,5) \cup (1; +\infty)$ .

Ответ:  $x \in (-\infty; -0,5) \cup (1; +\infty)$ .

Решение данного неравенства свелось к составлению равносильной совокупности.

$$\text{Задача 2. } \frac{4^{x^2+3x-2-(0,5)^{2x^2+2x-1}}}{5^{x-1}} \leq 0 \text{ [46].}$$

Решение. Преобразовав левую часть по методу рационализации, получим равносильное неравенство:

$$\frac{2^{2x^2+6x-4-2^{-2x^2-2x+1}}}{5^{x-5^0}} \leq 0; \quad \begin{cases} \frac{2x^2+6x-4+2x^2+2x-1}{x} \leq 0, \\ x \neq 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} \frac{4x^2+8x-5}{x} \leq 0, \\ x \neq 0 \end{cases};$$

$$4x^2 + 8x - 5 = 0; \quad D = 64 + 80 = 144; \quad x_1 = \frac{-8+12}{8} = 0,5;$$

$x_2 = \frac{-8-12}{8} = -2,5; \quad \frac{(x-0,5)(x+2,5)}{x} \leq 0$ . Решим неравенство методом интервалов (рисунок 12).

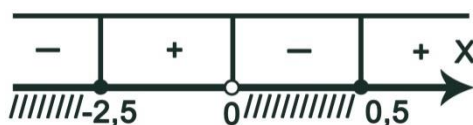


Рисунок 12 – К решению неравенства  $\frac{(x-0,5)(x+2,5)}{x} \leq 0$

Ответ:  $x \in (-\infty; -2,5] \cup (0; 0,5]$ .

Задача 3.  $\left(\frac{x}{x^2-1}\right)^{x-1} \leq \left(\frac{x}{x^2-1}\right)^{2x}$  [46].

Решение. Применим метод рационализации для данного неравенства, так как оно уже записано в нужном нам виде:  $h^f \leq h^g$ :

$$\begin{cases} \left(\frac{x}{x^2-1} - 1\right) ((x-1) - (2x)) \leq 0; \\ \frac{x}{x^2-1} > 0. \end{cases}; \quad \begin{cases} \frac{(x^2-x-1)(x+1)}{(x-1)(x+1)} \leq 0; \\ \frac{x}{(x-1)(x+1)} > 0. \end{cases}$$

Решим каждое неравенство методом интервалов:

$$x^2 - x - 1 = 0; \quad D = 1 + 4 = 5; \quad x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}; \quad x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

$\frac{(x-\frac{1-\sqrt{5}}{2})(x-\frac{1+\sqrt{5}}{2})(x+1)}{(x-1)(x+1)} \leq 0$  . Решим данное неравенство методом интервалов (рисунок 13).

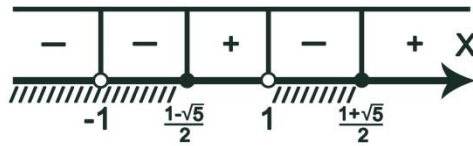


Рисунок 13 – К решению неравенства  $\frac{(x-\frac{1-\sqrt{5}}{2})(x-\frac{1+\sqrt{5}}{2})(x+1)}{(x-1)(x+1)} \leq 0$

Тогда  $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; \frac{1-\sqrt{5}}{2}] \cup (1; \frac{1+\sqrt{5}}{2}]$ .

Решим второе неравенство  $\frac{x}{x^2-1} > 0$  методом интервалов (рисунок 14)

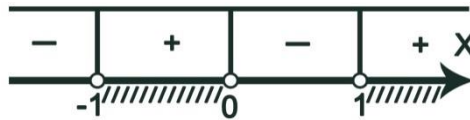


Рисунок 14 – К решению неравенства  $\frac{x}{x^2-1} > 0$

Тогда  $x \in (-1; 0) \cup (1; +\infty)$ .

Найдем пересечение множеств решений этих двух неравенств (рисунок 15).

Ответ:  $x \in (-1; \frac{1-\sqrt{5}}{2}] \cup (1; \frac{1+\sqrt{5}}{2}]$ .



Рисунок 15 – К нахождению множества решений полученных неравенств

Задачи для самостоятельного решения в классе и домашнего задания:

а)  $(x + 2)^{3-7x} \geq (x + 2)^{6-5x}$  [46];

б)  $\left(\frac{x}{x+1}\right)^{x^2} > \left(\frac{x+1}{x}\right)^{x+1}$  [48];

в)  $\frac{2^{x+5}-2^{-x}}{2^{3-x}-4^{-x}} \geq 2^x$  [48].

На уроке-консультации обучающиеся знакомятся с решением показательных неравенств методом рационализации, которого нет в анализируемых учебниках.

Приведем примерные вопросы, которые могут быть заданы школьникам при проведении урока -консультирования:

- С помощью каких методов были решены неравенства?
- Какова основа каждого из рассмотренных методов решения показательных неравенств? Когда целесообразно применить выбранный метод решения?
- Можно ли какое-то из решенных неравенств решить другими методами?
- Каким методом можно было также решить неравенство, которое было решено методом рационализации?

Средствами обучения являются: печатные (учебники А.Г. Мордковича [28], [29], [30], [31], Ю.М. Колягина [18], Ш.А. Алимова [1]); электронные образовательные ресурсы: Решу ЕГЭ [34], Школково – Подготовка к ЕГЭ [46], ЯКласс – цифровой образовательный ресурс для школ [48]; аудиовизуальные (презентации, видеоуроки); наглядные плоскостные (плакаты в классе, иллюстрации настенные, магнитные доски).

В качестве форм контроля могут быть использованы: устный контроль (оценка знаний учащихся и уровня их развития с помощью устных вопросов по теме. Позволяет оценить развитость памяти учащихся); письменный контроль (оценка уровня знаний учащихся на основании письменного задания – контрольной работы); взаимный контроль (организация работы учащихся группах. Каждый учащийся проверяет знания и навыки другого); самоконтроль (оценка учащимися своих знаний и навыков и управление ими своей образовательной деятельностью. Учащиеся сами оценивают уровень усвоения учебного материала, что позволяет сформировать уверенность в своих силах, веру в себя и собственные возможности).

Домашнее задание:

а)  $0,7^{x^2+2x} < 0,7^3$  [1, с. 88];

б)  $\left(\frac{4}{3}\right)^{x+1} - \left(\frac{4}{3}\right)^x > \frac{3}{16}$  [1, с. 88];

в)  $\pi^x - \pi^{2x} \geq 0$  [1, с. 88];

г)  $\left(\frac{1}{2}\right)^x < 0,5x + 5$  [30, с. 139];

д)  $9^x - 2 \cdot 6^x - 3 \cdot 4^x \leq 0$  [46];

е)  $(x+2)^{3-7x} \geq (x+2)^{6-5x}$  [46];

ж)  $\left(\frac{x}{x+1}\right)^{x^2} > \left(\frac{x+1}{x}\right)^{x+1}$  [46];

з)  $\begin{cases} (0,2^y)^x = 0,008, \\ 0,4^y = 0,4^{3,5-x}, \\ 2^x \cdot 0,5^y > 1. \end{cases}$  [1, с. 87].

В таблице 12 приведены умения и знания, необходимые для выполнения данных заданий.

Таблица 12 – Требования к выполнению заданий:

| Знания                                                                                                                   | Умения                                                                                                                                                                                     |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Определение показательных неравенств. Это неравенства, которые включают в себя переменную, стоящую в показателе степени. | Решать простейших показательных неравенств, приводя их к одинаковому основанию степени. Затем переходить к рациональному неравенству, учитывая, что если основание степени больше единицы, |

|                                                                                                                                                           |                                                                                                                                      |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                                                                                                                                                           | то знак неравенства менять не нужно, а если основание степени меньше единицы, то нужно поменять знак неравенства на противоположный. |
| Свойства показательной функции $y = a^x$ . Например, следствие монотонности показательной функции, на котором основываются все методы решения неравенств. | Преобразовывать выражения.                                                                                                           |
| Основные правила решения неравенств.                                                                                                                      | Использовать метод замены переменной.                                                                                                |
| Методы решения показательных неравенств.                                                                                                                  | Решать показательные неравенства различными способами.                                                                               |

### Блок 3. Задания на решение систем уравнений и неравенств.

Решить задания.

– метод подстановки.

Задача 1.  $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 5^{x+y} = 25 \end{cases}$  [1, с. 86].

Решение:  $\begin{cases} y = 2x - 1 \\ 5^{x+y} = 25 \end{cases}; 5^{x+2x-1} = 25; 5^{3x-1} = 25; 5^{3x-1} = 5^2.$

$3x - 1 = 2; 3x = 3; x = 1; y = 2 \cdot 1 - 1; y = 1.$

Ответ: (1; 1).

– функционально-графический метод.

Задача 2.  $\begin{cases} x + y = 1 \\ 2^{x-y} = 8 \end{cases}$  [1, с. 86].

Решение:  $\begin{cases} x + y = 1, \\ 2^{x-y} = 2^3. \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 1, \\ x - y = 3. \end{cases}$  Решим систему графически, для

этого преобразуем уравнения:  $\begin{cases} y = 1 - x, \\ y = x - 3. \end{cases}$  Строим 2 графика функций (рисунок 16):  $y = 1 - x$  и  $y = x - 3$ . Приведем таблицы значений (таблицы 13 – 14).

Таблица 13 – Значения функции  $y = 1 - x$

|     |   |    |
|-----|---|----|
| $x$ | 1 | 2  |
| $y$ | 0 | –1 |

Таблица 14 – Значения функции  $y = x - 3$

|     |    |    |
|-----|----|----|
| $x$ | 1  | 2  |
| $y$ | -2 | -1 |

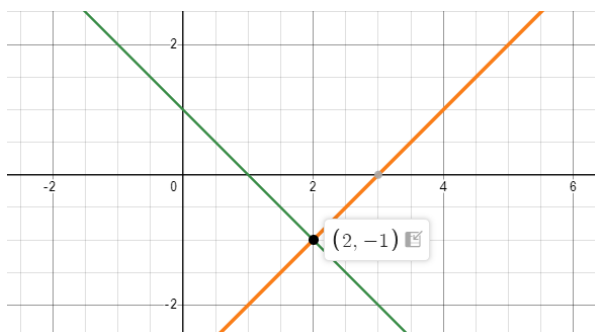


Рисунок 16 – Графики функций:  $y = 1 - x$  и  $y = x - 3$ .

Построив графики этих функций, найдем абсциссу и ординату точки пересечения, это и будет решением системы уравнений. Ответ:  $(2; -1)$ .

– метод алгебраического сложения.

Задача 1.  $\begin{cases} 4^x \cdot 2^y = 32 \\ 3^{8x+1} = 3^{3y} \end{cases}$  [1, с. 86].

Решение:  $\begin{cases} 2^{2x} \cdot 2^y = 2^5 \\ 3^{8x+1} = 3^{3y} \end{cases}; \begin{cases} 2^{2x+y} = 2^5 \\ 3^{8x+1} = 3^{3y} \end{cases}; \begin{cases} 2x + y = 5, \\ 8x + 1 = 3y. \end{cases}$

Умножим первое уравнение на  $-4$  и сложим со вторым.

$$\begin{cases} -8x - 4y = -20 \\ 8x - 3y = -1 \end{cases}; \quad -7y = -21; \quad y = 3; \quad 8x = -1 + 3y; \quad x = \frac{-1+3y}{8};$$

$$x = \frac{-1+3 \cdot 3}{8}; \quad x = 1. \text{ Ответ: } (1; 3).$$

Задача 2.  $\begin{cases} 2^x + 2^y = 6 \\ 2^x - 2^y = 2 \end{cases}$  [1, с. 86].

Решение. Сложим уравнения:  $2^x + 2^x = 8$ ;  $2 \cdot 2^x = 8$ ;  $2^x = 4$ .

$$2^x = 2^2; \quad x = 2; \quad 2^x + 2^y = 6; \quad 2^2 + 2^y = 6; \quad 2^y = 2; \quad 2^y = 2^1; \quad y = 1$$

Ответ:  $(2; 1)$ .

Задача 3.  $\begin{cases} 5^x - 5^y = 100 \\ 5^{x-1} + 5^{y-1} = 30 \end{cases}$  [1, с. 86].

Решение:  $\begin{cases} 5^x - 5^y = 100 \\ \frac{5^x}{5} + \frac{5^y}{5} = 30 \end{cases}$ ; домножим второе уравнение на 5.

$$\begin{cases} 5^x - 5^y = 100, \\ 5^x + 5^y = 150. \end{cases} \text{ Сложим уравнения: } 5^x + 5^x = 250; \quad 2 \cdot 5^x = 250.$$

$$5^x = 125; \quad 5^x = 5^3; \quad x = 3; \quad 5^x - 5^y = 100; \quad 5^y = 5^x - 100.$$

$$5^y = 125 - 100; \quad 5^y = 25; \quad 5^y = 5^2; \quad y = 2. \quad \text{Ответ: } (3; 2).$$

– метод замены переменной:

$$\text{Задача 1. } \begin{cases} 16^y - 16^x = 24, \\ 16^{x+y} = 256. \end{cases}$$

$$\text{Решение: } \begin{cases} 16^y - 16^x = 24, \\ 16^x \cdot 16^y = 256, \end{cases} \quad \text{Пусть } 16^x = a, \quad 16^y = b, \quad a > 0, \quad b > 0.$$

$$\begin{cases} b - a = 24, \\ a \cdot b = 256, \end{cases} \quad \begin{cases} b = 24 + a, \\ a \cdot b = 256, \end{cases} \quad a(24 + a) = 256; \quad a^2 + 24a - 256 = 0.$$

$$D = 576 + 1024 = 1600; \quad a_1 = \frac{-24+40}{2} = 8, \quad a_1 = \frac{-24-40}{2} = -32 \quad -$$

посторонний корень, т.к.  $a > 0$ ;  $b = 24 + a$ ;  $b = 24 + 8$ ;  $b = 32$ . Вернемся к замене:  $16^x = a$ ;  $16^x = 8$ ;  $2^{4x} = 2^3$ ;  $4x = 3$ ;  $x = 0,75$ .

$$16^y = b; \quad 16^y = 32; \quad 2^{4y} = 2^5; \quad 4y = 5; \quad y = 1,25. \quad \text{Ответ: } (0,75; 1,25).$$

Система решена методом замены переменной и методом подстановки.

Задачи для самостоятельного решения в классе и домашнего задания:

$$\text{а) } \begin{cases} x - y = 2 \\ 3^{x^2+y} = \frac{1}{9} \end{cases} [1, \text{ с. 86}];$$

$$\text{б) } \begin{cases} x + 2y = 3 \\ 3^{x-y} = 81 \end{cases} [1, \text{ с. 86}];$$

$$\text{в) } \begin{cases} 3^{3x-2y} = 81 \\ 3^{6x} \cdot 3^y = 27 \end{cases} [1, \text{ с. 86}];$$

$$\text{г) } \begin{cases} 3^x + 5^y = 8 \\ 3^x - 5^y = -2 \end{cases} [1, \text{ с. 86}];$$

$$\text{д) } \begin{cases} 2^x - 9 \cdot 3^y = 7 \\ 2^x \cdot 3^y = \frac{8}{9} \end{cases} [1, \text{ с. 86}];$$

$$\text{е) } \begin{cases} 3^x + 2^{x+y+1} = 5 \\ 3^{x+1} - 2^{x+y} = 1 \end{cases} [1, \text{ с. 87}].$$

– различные методы:

$$\text{Задача 1. } \begin{cases} 5^{2x+1} > 625 \\ 11^{6x^2-10x} = 11^{9x-15} \end{cases} [1, \text{ с. 87}].$$

$$\text{Решение: } \begin{cases} 5^{2x+1} > 5^4, \\ 6x^2 - 10x = 9x - 15 \end{cases}; \quad \begin{cases} 2x + 1 > 4, \\ 6x^2 - 10x - 9x + 15 = 0. \end{cases}$$

$\begin{cases} x > 1,5, \\ 6x^2 - 19x + 15 = 0. \end{cases}$  Решим квадратное уравнение:  $6x^2 - 19x + 15 = 0$ .  $D = 361 - 360 = 1$ ;  $x_1 = \frac{19+1}{12} = \frac{5}{3}$ ;  $x_2 = \frac{19-1}{12} = 1,5$  - не удовлетворяет решению неравенства  $x > 1,5$ . Ответ:  $x = \frac{5}{3}$ .

Данное задание решено на основе метода приведения к одному основанию и сравнению показателей степени.

Задача 2.  $\begin{cases} (5^x)^y = 5^{21} \\ 5^x \cdot 5^y = 5^{10} \text{ [1, с. 87].} \\ 3^x > 3^y \end{cases}$

Решение. Решим сначала систему уравнений  $\begin{cases} (5^x)^y = 5^{21}, \\ 5^x \cdot 5^y = 5^{10}. \end{cases}$

$$\begin{cases} 5^{xy} = 5^{21}, \\ 5^{x+y} = 5^{10}; \end{cases} \begin{cases} xy = 21, \\ x + y = 10. \end{cases}$$

По теореме, обратной теореме Виета, находим решения: (3; 7), (7; 3).  
Имеем:  $3^x > 3^y$ . Так как  $3 > 1$ , то  $x > y$ .

Решение системы (7; 3) удовлетворяет неравенству  $x > y$ , а решение (3; 7) не удовлетворяет.

Ответ: (7; 3).

Система уравнений решена на основе метода уравнивания показателей, далее задание - методом приведения к одному основанию и сравнению показателей степени.

Задачи для самостоятельного решения в классе и домашнего задания:

а)  $\begin{cases} 0,3^{10x^2-47x} = 0,3^{-10x-7}, \\ 3,7^{x^2} = 3,7^{0,04}. \end{cases}$  [1, с. 87];

б)  $\begin{cases} 3^{x^2-2x-1} \geq 1, \\ 3^{x^2-2x-1} \leq 9. \end{cases}$  [1, с. 87].

В таблице 15 приведены умения и знания, необходимые для выполнения данных заданий.

Таблица 15 – Требования к выполнению заданий:

| Знания | Умения |
|--------|--------|
|--------|--------|

|                                                                                                                                                                                                  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Определение системы уравнений - это несколько уравнений с одной переменной, для которых нужно найти все те значения переменной, которые удовлетворяют одновременно каждому из этих уравнений.    | Решать системы показательных уравнений. Для этого нужно привести каждое из показательных уравнений к одинаковому показателю степени или к одинаковому основанию.                                                                                                                                                      |
| Определение системы неравенств - это несколько неравенств с одной переменной, для которых нужно найти все те значения переменной, которые удовлетворяют одновременно каждому из этих неравенств. | Решать показательные неравенства, приводя их к одинаковому основанию степени. Затем переходить к рациональному неравенству, учитывая, что если основание степени больше единицы, то знак неравенства менять не нужно, а если основание степени меньше единицы, то нужно поменять знак неравенства на противоположный. |
| Определение решения системы уравнений (неравенств).                                                                                                                                              | Решать системы показательных уравнений и неравенств.                                                                                                                                                                                                                                                                  |
| Свойства показательной функции $y = a^x$ .                                                                                                                                                       | Применять полученные знания для решения задач.                                                                                                                                                                                                                                                                        |

Приведем примерные вопросы, которые могут быть заданы школьникам при проведении урока -консультирования:

- С помощью каких методов были решены системы уравнений и неравенств?
- Какова основа каждого из рассмотренных методов решения систем уравнений и неравенств? Когда целесообразно применить выбранный метод или методы решения?
- Можно ли какую-то из решенных систем уравнений и неравенств решить другими методами?

Отметим, что основной метод закрепления приемов решения задач – это систематическая отработка заданий: у доски, в домашних заданиях, в проверочных работах.

### 2.3 Педагогический эксперимент и его результаты

Педагогический эксперимент проводился на базе МОУ СОШ №1 Московской области г. Можайска в период с января по февраль 2025 г.

В данном эксперименте принимало участие 30 учеников 10 «А» класса (контрольная группа) и 30 учеников 10 «Б» класса (экспериментальная группа), обучающихся по учебнику Ш.А. Алимова [1].

Учитель математики Н.П. Камозина была непосредственным исполнителем педагогического эксперимента.

Педагогический эксперимент включал в себя три этапа: констатирующий, поисковый и контрольный.

На констатирующем этапе было осуществлено: анкетирование учителей математики и анкетирование учеников; наблюдение за деятельностью учащихся; посещение и анализ уроков; опрос учеников; проведение контрольной работы на выявление исходного уровня знаний и умений обучающихся по теме «Показательные уравнения и неравенства».

Приведем вопросы анкетирования учителей математики:

Вопрос 1. Какие затруднения испытывают школьники при изучении темы «Показательные уравнения и неравенства»?

Вопрос 2. Какие методы и приемы закрепления знаний и умений вы используете, чтобы ликвидировать ошибки и вызвать интерес к предмету?

Вопрос 3. Какими вспомогательными дидактическими материалами, кроме учебников, вы пользуетесь?

Вопрос 4. С какими трудностями при объяснении данной темы вы сталкиваетесь?

Вопрос 5. Чтобы вы посоветовали другим учителям при закреплении приемов решения задач по теме «Показательные уравнения и неравенства»?

Приведем вопросы анкетирования обучающихся:

Вопрос 1. Для чего вы изучаете математику в школе? ЕГЭ по математике какого уровня вы собираетесь сдавать?

Вопрос 2. Какое место вы отводите математике в будущем?

Вопрос 3. Какие методы и приемы закрепления знаний и умений необходимо использовать учителю, чтобы ликвидировать ошибки при изучении темы «Показательные уравнения и неравенства» и вызвать ваш интерес к предмету?

Вопрос 4. Сколько времени вы отводите на домашнее задание по математике?

Вопрос 5. Какие задания по теме «Показательные уравнения и неравенства» на ваш взгляд более сложные, вызывают затруднения?

В результате анкетирования было выявлено, что большинство учеников будет сдавать профильную математику и планируют в дальнейшем продолжить ее изучение в ВУЗе. Самым сложным, на их взгляд, является применение метода введения новой переменной, не забывать о нахождении области допустимых значений. Кроме того, обучающимся хотелось бы больше работать в группах и выступать иногда в роли учителя, то есть помогать в объяснении материала одноклассникам «послабее», также проверять их работы и выставлять оценки.

Учителя при анкетировании выделили ряд затруднений, которые испытывают школьники при изучении данной темы: незнание четкого алгоритма решения уравнений и неравенств (ими могут производиться неравносильные преобразования, при решении уравнения или неравенств методом введения новой переменной многие из них забывают делать обратную замену); отсутствие понимания межпредметных связей (множество процессов и явлений в природе описываются на основе показательной функции, ученики не понимают, как использовать имеющиеся знания по теме для решения задач из других областей); отсутствие умения определить тип уравнения или неравенства и применять для их решения соответствующие методы; ошибки при решении систем показательных уравнения или неравенств (здесь важно правильно определить метод решения); неграмотное оформление решений неравенств (ряд учеников могут находить решения

уравнений или неравенств и делать обратную замену, но не указывать верно промежутки в решении, также при решении систем или совокупностей).

Учителя отметили, что в качестве методов закрепления приемов решения задач преобладают традиционные: работа у доски, работа с учебником математики и рабочей тетрадью, постепенное усложнение задач и другие. Но при этом ими используются и современные методы закрепления приемов решения задач: применение кейс-технологии и проектной деятельности, использование в процессе обучения интерактивных технологий и математических игр, викторин, квестов, конкурсов, олимпиад, использование мультимедийных технологий.

Вместе с этим, для успешного изучения темы учителя математики рекомендуют повторить метод интервалов при решении неравенств, разложение многочлена на множители, свойства показательной функции.

В ходе констатирующего этапа учащимся 10 класса предлагалось за один урок (45 минут) решить контрольную работу, которая состояла из шести заданий, взятых из контрольно-измерительных материалов А.Н. Рурукина, представленную в двух вариантах [36, с. 24-25].

Контрольная работа «Показательные уравнения и неравенства»

1 вариант

№1. Решите уравнение:  $3^{5x+2} = 81^{x-1}$ .

Решение.  $3^{5x+2} = (3^4)^{x-1}$ ;  $3^{5x+2} = 3^{4x-4}$ ;  $5x + 2 = 4x - 4$ ;  $x = -6$ .

Ответ:  $x = -6$ .

№2. Найдите решение уравнения:  $2^{2x} - 3 \cdot 2^x - 4 = 0$ .

Решение. Пусть  $2^x = t$ ,  $t > 0$ , тогда  $t^2 - 3t - 4 = 0$ ;  $D = 9 + 16 = 25$ ;  $t_1 = \frac{3+5}{2} = 4$ ;  $t_2 = \frac{3-5}{2} = -1$  - посторонний корень, т.к.  $t > 0$ .

Вернемся к замене:  $2^x = 4$ ;  $2^x = 2^2$ ;  $x = 2$ . Ответ:  $x = 2$ .

№3. Решите систему уравнений: 
$$\begin{cases} \left(\frac{1}{3}\right)^{2x-y} = 27, \\ 5^{3x-y} = \frac{1}{25}. \end{cases}$$

Решение:

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{3}\right)^{2x-y} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-3} \\ 5^{3x-y} = 5^{-2} \end{cases}; \quad \begin{cases} 2x - y = -3 \\ 3x - y = -2 \end{cases}; \quad y = 2x + 3; \quad 3x - (2x + 3) = -2$$

$x = 1; \quad y = 2 + 3; \quad y = 5$ . Ответ: (1; 5).

№4. Сколько целочисленных решений имеет неравенство

$$\left(\frac{1}{7}\right)^{2x^2-3x} \geq \frac{1}{49}?$$

Решение:  $\left(\frac{1}{7}\right)^{2x^2-3x} \geq \left(\frac{1}{7}\right)^2; \quad 2x^2 - x \leq 2; \quad 2x^2 - 3x - 2 \leq 0;$

Приравниваем выражение к нулю и находим точки пересечения параболы с осью  $Ox$  (рисунок 17).



Рисунок 17 – К решению неравенства  $2x^2 - 3x - 2 \leq 0$

$$2x^2 - 3x - 2 = 0; \quad D = 9 + 16 = 25; \quad x_1 = \frac{3+5}{4} = 2; \quad x_2 = \frac{3-5}{4} = -0,5.$$

Тогда  $x \in [-0,5; 2]$ . Отберем целые значения из интервала.

Ответ: 3 целочисленных решения:  $x = 0; x = 1; x = 2$ .

№5. Решите уравнение:  $5^{2x+1} = 25 + 74 \cdot 5^x + 2 \cdot 5^{2x}$

Решение.  $5^{2x} \cdot 5 = 25 + 74 \cdot 5^x + 2 \cdot 5^{2x}$ . Пусть  $5^x = t, t > 0$ ,

$$\text{тогда } 5t^2 = 25 + 74t + 2t^2; \quad 5t^2 - 2t^2 - 74t - 25 = 0.$$

$$3t^2 - 74t - 25 = 0; \quad D = 5476 + 300 = 5776; \quad t_1 = \frac{74+76}{6} = 25,$$

$$t_2 = \frac{74-76}{6} = -\frac{1}{3} - \text{посторонний корень, т.к. } t > 0. \text{ Вернемся к замене:}$$

$$5^x = 25; \quad 5^x = 5^2; \quad x = 2. \text{ Ответ: } x = 2.$$

№6. Решите неравенство:  $\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{x+1}{x-2}} > 64^{\frac{x-1}{x+2}}$ .

Решение:  $\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{x+1}{x-2}} > 64^{\frac{x-1}{x+2}}$ . ОДЗ:  $x \neq -2, x \neq 2$ .

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{x+1}{x-2}} > \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{-3x+3}{x+2}}; \quad \frac{x+1}{x-2} - \frac{-3x+3}{x+2} < 0; \quad \frac{(x+1)(x+2) - (-3x+3)(x-2)}{(x-2)(x+2)} < 0;$$

$$\frac{x^2+2x+x+2+3x^2-6x-3x+6}{(x-2)(x+2)} < 0; \quad \frac{4x^2-6x+8}{(x-2)(x+2)} < 0; \quad \frac{2x^2-3x+4}{(x-2)(x+2)} < 0;$$

решим неравенство. Имеем:  $2x^2 - 3x + 4 = 0$ ;  $D = 9 - 32 = -23$ .  $D < 0$ , значит  $2x^2 - 3x + 4 > 0$  при  $\forall x$ . Решим неравенство методом интервалов:  $(x - 2)(x + 2) < 0$  (рисунок 18).

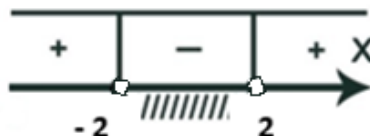


Рисунок 18 – К решению неравенства  $(x - 2)(x + 2) < 0$

Ответ:  $x \in (-2; 2)$ .

2 вариант

№1. Решите уравнение:  $2^{5x-4} = 16^{x+3}$ .

Решение:  $2^{5x-4} = (2^4)^{x+3}$ ;  $2^{5x-4} = 2^{4x+12}$ ;  $5x - 4 = 4x + 12$ ;  $x = 16$

Ответ:  $x = 16$ .

№2. Найдите решение уравнения:  $3^{2x} - 2 \cdot 3^x - 3 = 0$ . Пусть  $3^x = t$ ,  $t > 0$ ; тогда  $t^2 - 2t - 3 = 0$ ;  $D = 4 + 12 = 16$ ,  $t_1 = \frac{2+4}{2} = 3$ ;  $t_2 = \frac{2-4}{2} = -1$  - посторонний корень. Вернемся к замене:  $3^x = 3$ ;  $x = 1$ . Ответ:  $x = 1$ .

№3. Решите систему уравнений: 
$$\begin{cases} \left(\frac{1}{5}\right)^{5x-y} = 25, \\ 2^{2x-y} = \frac{1}{32}. \end{cases}$$

Решение: 
$$\begin{cases} \left(\frac{1}{5}\right)^{5x-y} = \left(\frac{1}{5}\right)^{-2} \\ 2^{2x-y} = 2^{-5} \end{cases}; \quad \begin{cases} 5x - y = -2 \\ 2x - y = -5 \end{cases}; \quad \begin{cases} 5x - y = -2 \\ -2x + y = 5 \end{cases}; \quad 3x = 3;$$

$x = 1$ ;  $y = 5x + 2$ ;  $y = 5 + 2$ ;  $y = 7$ . Ответ:  $(1; 7)$ .

№4 Сколько целочисленных решений имеет неравенство  $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-x} \geq \frac{1}{9}$ ?

Решение:  $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-x} \geq \left(\frac{1}{3}\right)^2$ ;  $x^2 - x - 2 \leq 0$ . Приравниваем выражение к

нулю и находим точки пересечения параболы с осью  $Ox$  (рисунок 19):

$$x^2 - x - 2 = 0; \quad D = 1 + 8 = 9 \quad x_1 = \frac{1+3}{2} = 2; \quad x_2 = \frac{1-3}{2} = -1.$$



Рисунок 19 – К решению неравенства  $x^2 - x - 2 \leq 0$

Имеем:  $x \in [-1; 2]$ . Отберем целые значения из интервала.

Ответ: 4 целочисленных решения:  $x = -1; x = 0; x = 1, x = 2$ .

№5. Решите уравнение  $3^{2x+1} = 27 + 53 \cdot 3^x + 3^{2x}$ .

Решение:  $3^{2x} \cdot 3 = 27 + 53 \cdot 3^x + 3^{2x}$ . Пусть  $3^x = t, t > 0$ , тогда  $3t^2 = 27 + 53t + t^2$ ;  $2t^2 - 53t - 27 = 0$ ;  $2t^2 + t - 54t - 27 = 0$ ;  $t(2t + 1) - 27(2t + 1) = 0$ ;  $(2t + 1)(t - 27) = 0$ ;  $t = 27$ ;  $t = -\frac{1}{2}$  – посторонний корень. Вернемся к замене:  $3^x = 27$ ;  $3^x = 3^3$ ;  $x = 3$ . Ответ  $x = 3$ .

№6. Решите неравенство:  $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{x-1}{x-4}} > 9^{\frac{x-4}{x+4}}$ .

ОДЗ:  $x \neq 4, x \neq -4$ .  $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{x-1}{x-4}} > \left(\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}\right)^{\frac{x-4}{x+4}}$ ;  $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{x-1}{x-4}} > \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{-2x+8}{x+4}}$ ;

$$\frac{x-1}{x-4} < \frac{-2x+8}{x+4}; \quad \frac{x-1}{x-4} - \frac{-2x+8}{x+4} < 0; \quad \frac{(x-1)(x+4) - (-2x+8)(x-4)}{(x-4)(x+4)} < 0;$$

$$\frac{x^2+4x-x-4-(-2x^2+8x+8x-32)}{(x-4)(x+4)} < 0; \quad \frac{x^2+4x-x-4+2x^2-8x-8x+32}{(x-4)(x+4)} < 0; \quad \frac{3x^2-11x+28}{(x-4)(x+4)} < 0;$$

решим неравенство; имеем:  $3x^2 - 11x + 28 = 0$ ;  $D = 121 - 336 = -215$ ;  $D < 0$ , значит  $3x^2 - 11x + 28 > 0$  при  $\forall x$ . Решим неравенство методом интервалов  $(x - 4)(x + 4) < 0$  (рисунок 20).



Рисунок 20 – К решению неравенства  $(x - 4)(x + 4) < 0$

Ответ:  $x \in (-4; 4)$ .

Критерии оценивания заданий: за каждое правильно выполненное задание с 1 по 4 задание будет ставиться 0-2 балла, а за верно решенное 5 и 6 задание по 0-3 балла. Отметка «5» ставится за 13-14 баллов; отметка «4» - за 10-12 баллов; отметка «3» - за 7-9 баллов; отметка «2» - за менее 7 баллов.

Можно выделить следующие типы ошибок, которые могут быть допущены учениками при выполнении заданий контрольной работы: грубые ошибки: вычислительные ошибки, неправильное решение задачи (неправильные действия, лишние действия, неверный ход решения); недоведение до конца решения задачи, невыполненное задание; негрубые ошибки: неверно оформленный ответ задачи; описки и помарки, не доведение до конца преобразований, неточности в построении графика функции.

Задания направлены на закрепление методов и приемов решения показательных уравнений и неравенств. В ходе контрольной работы учащимся разрешалось конспектами, алгоритмами решения заданий, формулами.

Результаты эксперимента показали, что при выполнении заданий №1-2 было большое количество вычислительных ошибок. При решении заданий №3-5 ошибки были связаны с неверным применением формул, правил или алгоритмов, теорем, что говорит о недостаточном уровне понимания материала, пробелах в знаниях этой темы или в смежных темах.

Кроме того, причиной ошибок послужило волнение некоторых учеников (обучающийся решал это задание у доски, но самостоятельно в контрольной работе решить его не смог). Это говорит о том, что данному ученику необходимо проработать свою неуверенность с помощью дополнительных заданий, чтобы впоследствии не допускать этих ошибок.

В таблице 16 представлены результаты констатирующего этапа в контрольной группе - 10 «А» класс.

Таблица 16 – Результаты контрольной работы в 10 «А» классе

| № задания | Выполнили верно | Выполнили неверно | Не приступили к решению |
|-----------|-----------------|-------------------|-------------------------|
| 1         | (50%) 15        | (23%) 7           | (27%) 8                 |
| 2         | (47%) 14        | (23%) 7           | (30%) 9                 |
| 3         | (47%) 14        | (20%) 6           | (33%) 10                |
| 4         | (43%) 13        | (27%) 8           | (30%) 9                 |
| 5         | (30%) 9         | (33%) 10          | (37%) 11                |
| 6         | (23%) 7         | (37%) 11          | (40%) 12                |

В таблице 17 представлены результаты констатирующего этапа в экспериментальной группе - 10 «Б» класс.

Таблица 17 – Результат контрольной работы в 10 «Б» классе

| № задания | Выполнили верно | Выполнили неверно | Не приступили к решению |
|-----------|-----------------|-------------------|-------------------------|
| 1         | (47%) 14        | (30%) 9           | (23%) 7                 |
| 2         | (43%) 13        | (27%) 8           | (30%) 9                 |
| 3         | (43%) 13        | (27%) 8           | (30%) 9                 |
| 4         | (50%) 15        | (27%) 8           | (23%) 7                 |
| 5         | (33%) 10        | (30%) 9           | (37%) 11                |
| 6         | (23%) 7         | (37%) 11          | (40%) 12                |

В таблице 18 представлены оценки за контрольную работу в 10 «А» и 10 «Б» классах (констатирующий этап).

Таблица 18 – Оценки за контрольную работу (констатирующий этап)

| Оценка | Контрольная группа | Экспериментальная группа |
|--------|--------------------|--------------------------|
| «5»    | (23%) 7            | (23%) 7                  |
| «4»    | (20%) 6            | (27%) 8                  |
| «3»    | (37%) 11           | (33%) 10                 |
| «2»    | (20%) 6            | (17%) 5                  |

Приведем результаты констатирующего этапа в 10 «А» и 10 «Б» классах на диаграмме (рисунок 21).

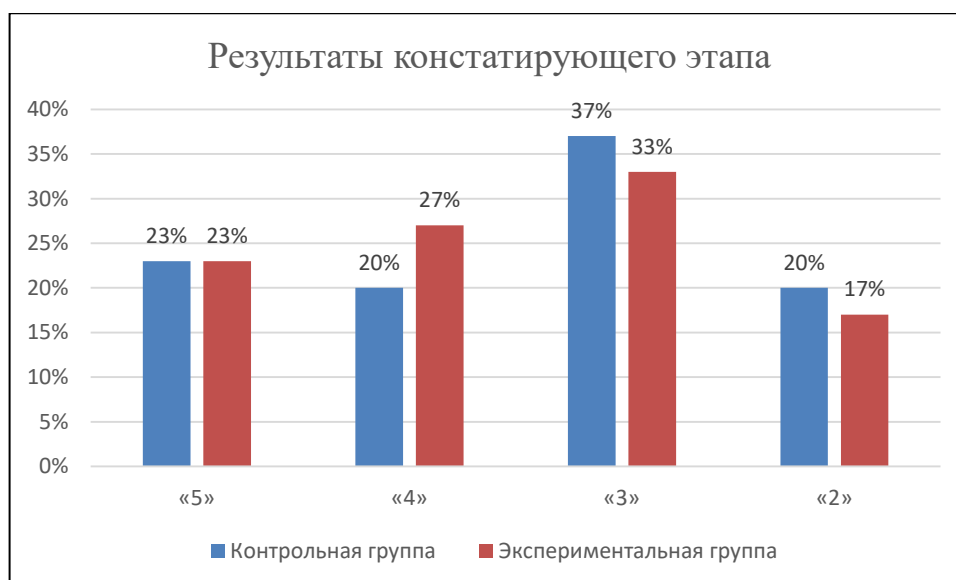


Рисунок 21 - Диаграмма, на которой представлены результаты контрольной работы в 10 «А» и 10 «Б» классах

В таблице 19 приведен анализ ошибок участников эксперимента в ходе выполнения контрольной работы.

Поисковый этап эксперимента занял два урока (90 минут) и состоял из следующего: проработки системы задач учениками у доски самостоятельно и вместе с учителем поэтапно; разделения класса на 6 групп по 5 человек, в каждой группе был выбран один «сильный» ученик, назначенный ответственным в группе, и четыре «послабее»; задача каждой группы заключалась в том, чтобы решить задачи совместно, помогая и объясняя друг другу, затем ученики обменивались тетрадями и проверяли работы одноклассников и ставили им оценки; оставшиеся нерешенные задачи учащиеся доделывали дома, тем самым готовясь к контрольной работе.

Таблица 19 – Анализ ошибок в контрольной работе

| № задания | Типы ошибок                                                                                                                                                                |
|-----------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1         | Вычислительные ошибки.                                                                                                                                                     |
| 2         | Неправильный алгоритм решения задачи, не выявлен посторонний корень или не объяснено, почему корень посторонний, неверно выполнена обратная замена, вычислительные ошибки. |
| 3         | Не записан подробно ход решения задачи, ошибки в решении системы уравнений (неверно использован метод подстановки), вычислительные                                         |

|   |                                                                                                                                                                                                                                                                                           |
|---|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|   | ошибки.                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
| 4 | Неправильный алгоритм решения задачи: не поменяли знак неравенства на противоположный, неверно решено квадратное неравенство. Нет ответа на вопрос задачи при полностью верном решении. Вычислительные ошибки.                                                                            |
| 5 | Неправильный алгоритм решения задачи (не произведена замена переменной), не выявлен посторонний корень или не объяснено, почему корень посторонний, неверно выполнена обратная замена, вычислительные ошибки.                                                                             |
| 6 | Неправильный алгоритм решения задачи: не приведено к одному основанию или приведено с ошибкой. Не сменили знак неравенства на противоположный, неверно решено неравенство, не указана область допустимых значений.<br>Не записан подробно ход решения неравенства. Вычислительные ошибки. |

В ходе данного этапа эксперимента были апробированы разработанные системы задач по теме «Показательные уравнения и неравенства».

Контрольный этап состоял из проведения повторной контрольной работы и ее анализа. Результаты повторной контрольной работы представлены в таблице 20 (10 «А» класс – контрольная группа).

Таблица 20 – Результат контрольной работы в 10 «А» классе

| № задания | Выполнили верно | Выполнили неверно | Не приступили к решению |
|-----------|-----------------|-------------------|-------------------------|
| 1         | (63%) 19        | (20%) 6           | (17%) 5                 |
| 2         | (57%) 17        | (20%) 6           | (23%) 7                 |
| 3         | (53,33%) 16     | (23,33%) 7        | (23,33%) 7              |
| 4         | (50%) 15        | (23%) 7           | (27%) 8                 |
| 5         | (37%) 11        | (30%) 9           | (33%) 10                |
| 6         | (37%) 11        | (30%) 9           | (33%) 10                |

В таблице 21 представлены результаты повторной контрольной работы в 10 «Б» классе.

Таблица 21 – Результаты контрольной работы в 10 «Б» классе

| № задания | Выполнили верно | Выполнили неверно | Не приступили к решению |
|-----------|-----------------|-------------------|-------------------------|
| 1         | (73,33%) 22     | (13,33%) 4        | (13,33%) 4              |
| 2         | (60%) 18        | (20%) 6           | (20%) 6                 |
| 3         | (63%) 19        | (17%) 5           | (20%) 6                 |
| 4         | (60%) 18        | (20%) 6           | (20%) 6                 |
| 5         | (43%) 13        | (27%) 8           | (30%) 9                 |
| 6         | (43%) 13        | (27%) 8           | (30%) 9                 |

В таблице 22 представлены оценки за повторную контрольную работу в 10 «А» и 10 «Б» классах (контрольный этап).

Таблица 22 – Оценки за контрольную работу (контрольный этап)

| Оценка | Контрольная группа | Экспериментальная группа |
|--------|--------------------|--------------------------|
| «5»    | (27%) 8            | (37%) 11                 |
| «4»    | (27%) 8            | (33%) 10                 |
| «3»    | (40%) 12           | (27%) 8                  |
| «2»    | (6%) 2             | (3%) 1                   |

Приведем результаты контрольного этапа в 10 «А» и 10 «Б» классах на диаграмме (рисунок 22).

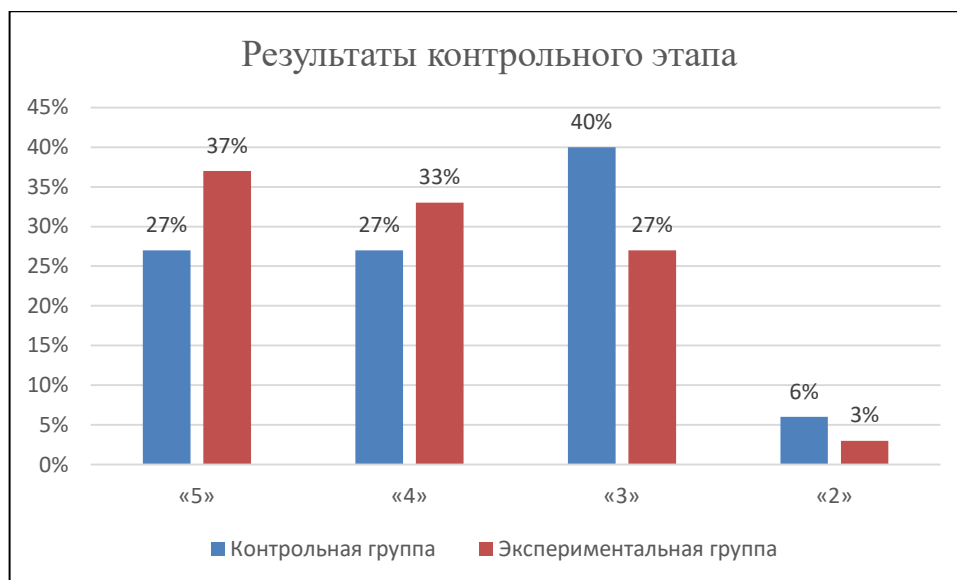


Рисунок 22 - Диаграмма, на которой представлены результаты повторной контрольной работы в 10 «А» и 10 «Б» классах

Таким образом, по итогам повторной контрольной работы видно, что количество верно решенных заданий стало больше и соответственно оценки стали выше в обеих группах, но в экспериментальной группе – чуть лучше. Можно сделать вывод об эффективности разработанных систем задач и использовании таких методов закрепления приемов решения задач, как работа у доски, групповая работа, выполнение домашних заданий и проверочных работ.

## Выводы по второй главе

Выделены методические особенности применения различных методов закрепления приемов решения задач.

Установлено, что при решении поисково-исследовательских задач могут применяться «приемы, в основе которых лежат такие методы, как: индуктивный, дедуктивный, аналитико-синтетический, также сочетание индуктивного и дедуктивного методов» [13].

Л.С. Капкаева, А.А. Папышев рекомендуют применять интеграцию алгебраических и геометрических методов при обучении школьников решению задач, что ведет к неформальному усвоению и применению их на практике и в других дисциплинах.

Н.Л. Стефанова, Н.С. Подходова описывают такой метод закрепления приемов решения задач при обучении математике учащихся, как составление задач, обратных данной. Также авторы для ликвидации ошибок и работы над ними и знакомства с новыми методами решения задач рекомендуют использовать технологию консультирования.

Другим методом закрепления приемов решения задач является применение систем упражнений по определенным темам.

Вместе с этим, учителя математики для закрепления приемов решения задач используют занимательные задания; задачи повышенной трудности на применение определенных свойств, теорем и утверждений.

Выбор методов закрепления приемов решения задач зависит от целей урока, содержания задачи, уровня подготовки обучающихся и т. д.

Разработаны системы задач на применение методов закрепления приемов решения задач в курсе алгебры и начал математического анализа при изучении темы «Показательные уравнения и неравенства».

Перед составлением системы задач был проведен методический анализ рассматриваемой темы.

Системы задач составлены на основе заданий из учебников алгебры и начала математического анализа 10-11 класса таких авторов, как А.Г. Мордкович, Ш.А. Алимов, А.Н. Колмогоров и других источников.

Определено, что в учебниках для 10 класса Ш.А. Алимова, Ю.М. Колягина не рассматриваются показательные уравнения на функционально-графический метод; во всех учебниках метод логарифмирования рассматривается после изучения логарифмической функции, при обучении логарифмическим уравнениям. В учебниках для 10 класса Ш.А. Алимова, Ю.М. Колягина не рассматриваются показательные неравенства на метод почленного деления и метод группировки; в задачнике для 11 класса А.Г. Мордковича - метод группировки. Метод вынесения общего множителя за скобки, метод почленного деления, метод рационализации не рассматриваются ни в одном из анализируемых учебников.

Решение показательных уравнений и неравенств входит в ЕГЭ на базовом и профильном уровнях.

Для введения теоретического материала эффективна исследовательская работа учеников, которая должна сопровождаться беседами учителя с учащимися. Для закрепления материала должны использоваться задания учебника и дополнительная литература. Особое место должно отводиться самостоятельной работе — решению уравнений и неравенств, отработке умений и навыков.

Приведены результаты анализа опыта учителей по данной теме.

Обосновано применение технологии консультирования при обучении решению задач по выбранной теме.

Содержание темы «Показательные уравнения и неравенства» разбито на три блока: первый - задания на решение показательных уравнений различными методами; второй - задания на решение показательных неравенств различными методами; третий - задания на решение систем уравнений и неравенств.

Представлены разработанные системы задач на разные методы их решения с учетом выделенных блоков.

Решение данных систем задач позволит закрепить материал путем повторения прошлых тем и изучения новых.

Описаны результаты педагогического эксперимента на базе МОУ СОШ №1 Московской области г. Можайска в период с января по февраль 2025 г. Участниками его были 30 учеников 10 «А» класса (контрольная группа) и 30 учеников 10 «Б» класса (экспериментальная группа), обучающихся по учебнику Ш.А. Алимова.

На констатирующем этапе было осуществлено: анкетирование учителей математики и анкетирование учеников; наблюдение за деятельностью учащихся; посещение и анализ уроков; опрос учеников; проведение контрольной работы на выявление исходного уровня знаний и умений обучающихся по теме «Показательные уравнения и неравенства».

Задания контрольной работы были направлены на закрепление методов и приемов решения показательных уравнений и неравенств.

Эксперимент показал, что большинство ошибок были допущены из-за невнимательности и неправильного понимания условия задачи. Соответственно были неправильно использованы методы и приемы решения, что привело как к частично, так и к полностью неверному решению. Вторая часть ошибок допускалась из-за небрежного ведения и оформления рабочей тетради (помарки, неразборчивый почерк, неаккуратные графики и рисунки).

В ходе поискового этапа эксперимента были апробированы разработанные системы задач по теме «Показательные уравнения и неравенства».

По итогам контрольной работы на контрольном этапе эксперимента видно, что количество верно решенных заданий стало больше и соответственно оценки стали выше в обеих группах, но в экспериментальной группе – немного лучше.

Можно сделать вывод об эффективности разработанных систем задач и использовании таких методов закрепления приемов решения задач, как работа у доски, групповая работа, выполнение домашних заданий и проверочных работ. Итоги эксперимента подводились также на основе наблюдений за работой учащихся у доски и их совместной работой, бесед с ними, результатов выполнения школьниками контрольной работы, сравнения оценок.

## Заключение

Сформулируем основные выводы и результаты, полученные в ходе проведенного исследования:

Определены понятие задачи и их роль при обучении математике в школе.

Установлено, что в настоящее время существуют разные трактовки понятия «задача»; Г.И. Саранцев отождествляет понятие задача с упражнением и считает, что, «в контексте учебников математики школьные задачи являются упражнениями» [37]. За основу взято определение задачи Т.А. Ивановой, которая утверждает, что «под задачей мы будем понимать задание, которое должен выполнить субъект, или вопрос, на который он должен найти ответ, опираясь на указанные условия и все вытекающие из них следствия» [11]. При решении задач реализуются образовательные, практические и воспитательные цели обучения математике. По мнению Г.И. Саранцева, задачи направлены на развитие пространственного мышления, творческой деятельности школьников, «в процессе решения задач формируются не только логическая, эвристическая, алгоритмическая составляющие мышления, но и многие нравственные качества учащихся» [37].

Раскрыто понятие метода и приема решения задач в школьном курсе математики.

Ю.М. Колягин пишет, что для решения задачи необходимо применять не только стандартные алгоритмы и правила, но и переосмыслить условие задачи. Это будет способствовать поиску новых методов решения. Прием решения задачи – это простейший способ ее решения, позволяющий решать задачу в одно или несколько несложных действий. Также опираясь на работы Л.М. Фридмана, Д. Пойа, Г.И. Саранцева большой акцент делается на эвристические приемы решения задач, которые включают в себя поиск

решения, развитие правильного мышления и нестандартного поиска приема решения задачи.

На основе анализа методической литературы выделены следующие приемы решения задач: правильное чтение; разделение текста задачи на логически связанные блоки информации; переосмысления текста задачи; переформулирование условия задачи; использование реальных объектов, их физических моделей или графических изображений в виде схемы для моделирования ситуации, представленной в задании; проверка результатов решения задачи, в том числе на основе составления обратной задачи; решение задачи другим методом или способом; разбор готового решения.

Выделены функции математических задач как средства закрепления знаний учащихся в общеобразовательной школе.

Установлено, что при использовании систем различных упражнений и задач для практического применения усвоенных знаний, происходит закрепление знаний и формирование необходимых умений и навыков. Обучение решению задач направлено, главным образом, на интеллектуальное развитие учеников, формирование культуры и самостоятельности их мышления, а также на развитие познавательных процессов школьников. Задачи формируют не только логические, но и нравственные понятия. При решении задач развивается не только мыслительные и вычислительные навыки, но и множество других, применимых также для изучения других предметов. Процесс овладения знаниями будет завершенным лишь в том случае, если обучающиеся научатся применять эти знания и умения на практике. Первичное закрепление осуществляется как в средних, так и в старших классах, но его роль в процессе обучения варьируется. В ходе обучения математике в школе учителем выделяются уроки, посвященные закреплению знаний, умений и навыков, на которых происходит вторичное осмысление изучаемого материала.

Выявлены такие методы закрепления приемов решения задач при обучении математике учащихся общеобразовательной школы, как: работа с учебником математики, работа с рабочей тетрадью; работа у доски; постепенное усложнение задач (от более простых к сложным); составление задач аналогичных по сюжету, по методу и приему решения; составление задач, обратных данной; составление цепочек взаимосвязанных задач на различные приемы их решения; применение систем упражнений по определенным темам; решение практико-ориентированных задач; проведение математических диктантов, самостоятельных, практических или контрольных работ; анализ ошибок и работа над ними по результатам различных проверочных работ; повторение изученного материала; использование дифференцированного подхода в обучении; применение кейс-технологии и проектной деятельности; использование в процессе обучения интерактивных технологий и математических игр, викторин, квестов, конкурсов, олимпиад; применение проблемного обучения на уроках математики; использование мультимедийных технологий.

При обучении школьников решению задач в общеобразовательной школе необходимо использовать различные методы закрепления приёмов их решения. Применение этих приемов будет способствовать повышению качества математического образования обучающихся, развитию у них логического и алгоритмического мышления.

Выделены методические особенности применения различных методов закрепления приемов решения задач.

Установлено, что при решении поисково-исследовательских задач могут применяться приемы, в основе которых лежат различные методы. Рекомендуется применять интеграцию алгебраических и геометрических методов. Другим методом закрепления приемов решения задач является применение систем упражнений по определенным темам. Вместе с этим, учителя математики для закрепления приемов решения задач используют занимательные задания; задачи повышенной трудности на применение

определенных свойств, теорем и утверждений. Выбор методов закрепления приемов решения задач зависит от целей урока, содержания задачи, уровня подготовки обучающихся и других аспектов.

Разработаны системы задач на применение методов закрепления приемов решения задач в курсе алгебры и начал математического анализа при изучении темы «Показательные уравнения и неравенства».

Обосновано применение технологии консультирования при обучении решению задач по выбранной теме. Ее содержание разбито на блоки: первый - задания на решение показательных уравнений различными методами; второй - задания на решение показательных неравенств различными методами; третий - задания на решение систем уравнений и неравенств. Представлены разработанные системы задач на разные методы их решения с учетом выделенных блоков.

Описаны результаты педагогического эксперимента на базе МОУ СОШ №1 Московской области г. Можайска в 10 «А», 10 «Б» классах.

На констатирующем этапе было осуществлено: анкетирование учителей математики и анкетирование учеников; наблюдение за деятельностью учащихся; посещение и анализ уроков; опрос учеников; проведение контрольной работы на выявление исходного уровня знаний и умений обучающихся по теме «Показательные уравнения и неравенства». В ходе поискового этапа эксперимента были апробированы разработанные системы задач по теме «Показательные уравнения и неравенства». По итогам контрольной работы на контрольном этапе эксперимента видно, что количество верно решенных заданий стало больше и соответственно оценки стали выше в обеих группах, но в экспериментальной группе – немного лучше. Можно сделать вывод об эффективности разработанных систем задач и использовании определенных методов закрепления приемов решения задач.

Все это дает основание считать, что задачи, поставленные в исследовании, полностью решены.

## Список используемой литературы и используемых источников

1. Алимов Ш.А. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы: учеб. для общеобразоват. организаций: базовый и углубл. уровни / [Ш. А. Алимов, Ю.М. Колягин, М.В. Ткачев и др.]. М.: Просвещение, 2019. 463 с.
2. Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф., Кадомцев С.Б. Геометрия. 7–9 классы: учеб. для общеобразоват. учреждений. М.: Просвещение, 2009. 384 с.
3. Бурмистрова Т.А. Алгебра и начала математического анализа. Сборник рабочих программ. 10-11 классы: учеб. пособие для учителей общеобразоват. организаций: базовый и углуб. уровни / сост. Т.А. Бурмистрова. М.: Просвещение, 2016. 128 с.
4. Галактионова В.С. Урок алгебры в 11-м классе на тему «Решение логарифмических уравнений и неравенств» // Фестиваль педагогических идей «Открытый урок». [Электронный ресурс]. URL: <https://urok.1sept.ru/articles/565919> (дата обращения: 13.02.2025).
5. Горюнова Е.А. Методы закрепления приемов решения задач при обучении математике в общеобразовательной школе // Вестник магистратуры. 2025. № 2-2(161). С. 21-24.
6. Груденов Я.И. Психолого-дидактические основы методики обучения математике / Я.И. Груденов. М.: Педагогика, 1987. С. 137 -144.
7. Демина А.В. Применение свойств квадрата целого числа в решении задач на делимость // Фестиваль педагогических идей «Открытый урок» [Электронный ресурс]. URL: <https://urok.1sept.ru/articles/600309> (дата обращения: 13.02.2025).
8. Егоров А. Показательные уравнения // Научно-популярный физико-математический журнал «Квант». 1981. № 1. С. 40-42.

9. Епишева О.Б., Крупич В.И. Учить школьников учиться математике: Формирование приемов учеб. деятельности: Кн. для учителя / О.Б. Епишева, В.И. Крупич. М.: Просвещение. 1990. 127 с.
10. Жолобова Е.А., Фомина А.В. Применение цифровых образовательных ресурсов на уроках математики при изучении темы «Показательные уравнения и неравенства // Информационно-коммуникационные технологии в педагогическом образовании. Ч. 2. 2022. № 1(76). [Электронный ресурс]. URL: <https://infed.ru/articles/1195/> (дата обращения: 05.04.2025).
11. Иванова Т.А., Перевощикова Е.Н., Кузнецова Л.И., Григорьева Т.П. Теория и технология обучения математике в средней школе: Учеб. пособие. для студ. математических спец. педвузов / Под ред. Т.А. Ивановой, 2-е изд., испр. и допол. Нижний Новгород: НГПУ, 2009. 355 с.
12. Капкаева Л.С. Интеграция алгебраического и геометрического методов в среднем математическом образовании: автореф. дис. ... докт. пед. наук: 13.00.02 / Морд. гос. пед. ин-т им. М.Е. Евсевьева. Саранск, 2004. 41 с.
13. Капкаева Л.С., Тагаева Е.А. Поисково-исследовательские задачи по математике как средство реализации преемственности обучения в школе и вузе // Мир науки. Педагогика и психология. 2019. Том 7. №6.
14. Киренкова Т.А. Методическая разработка по математике. Тема: «Решение показательных уравнений и неравенств» / Т.А. Киренкова. Текст: непосредственный // Школьная педагогика. 2017. № 1 (8). С. 64-72. URL: <https://moluch.ru/th/2/archive/53/1923/> (дата обращения: 05.04.2025).
15. Кислякова М.А. Методика рефлексивного обучения решению математических задач // Вестник Томского государственного педагогического университета 2020. № 6 (212). С. 92-98.
16. Клековкин Г.А. Решение геометрических задач векторным методом: учебное пособие для учащихся 10-11 классов / Г.А. Клековкин. Самара: СФ ГАОУ ВО МГПУ, 2016. 180 с.

17. Колесник М.А. Метод рационализации при решении показательных и логарифмических неравенств [Электронный ресурс]. URL: <https://multiurok.ru/files/metod-ratsionalizatsii-pri-reshenii-pokazatelnykh.html> (дата обращения: 11.03.2025).

18. Колмогоров А.Н. Алгебра и начала математического анализа: учеб. для 10-11 кл. общеобразоват. учреждений / [А.Н. Колмогоров, А.М. Абрамов, Ю.П. Дудницын и др.]; под ред. А.Н. Колмогорова. 17-е изд. М.: Просвещение, 2008. 384 с.

19. Колягин Ю.М. Алгебра и начала математического анализа: Учебник для 10 кл. средней школы (базовый и профильный уровни) / Ю.М. Колягин, М.В. Ткачева, Н.Е. Федорова, М.И. Шабунин. 4-е изд., стер. Москва: Просвещение, 2022. 384 с.

20. Колягин Ю.М. Задачи в обучении математике: В 2-х ч. Ч 1. Математические задачи как средство обучения и развития учащихся. / Ю.М. Колягин. М.: Просвещение, 1977. 144 с.

21. Колягин Ю.М. Задачи в обучении математике: В 2-х ч. Ч 2. Обучение математике через задачи и обучение решению задач. / Ю.М. Колягин. М.: Просвещение, 1977. 110 с.

22. Кулабухов С.Ю. Математика. ЕГЭ. Решение задач по стереометрии методом координат: учебно-методическое пособие / Под редакцией Ф.Ф. Лысенко. Ростов-на-Дону: Легион, 2017. 48 с.

23. Маеренкова В.В. Элективный курс «Параметры и их практическая значимость» // Фестиваль педагогических идей «Открытый урок» [Электронный ресурс]. URL: <https://urok.1sept.ru/articles/500354> (дата обращения: 13.02.2025).

24. Максимова Н.А. Использование равносильных переходов и нестандартных приемов при решении иррациональных и логарифмических уравнений // Фестиваль педагогических идей «Открытый урок» [Электронный ресурс]. URL: <https://urok.1sept.ru/articles/569331> (дата обращения: 13.02.2025).

25. Мамаева А.Н. Составление и использование занимательных заданий в обучении математике [Электронный ресурс]. URL: <https://urok.1sept.ru/articles/311645> (дата обращения: 04.03.2025).

26. Математика Онлайн. Платформа для учителей математики 10-11 классов РФ [Электронный ресурс]. URL: <https://mathcourse.ru/> (дата обращения: 01.03.2025).

27. Методика и технология обучения математике. Лабораторный практикум: учеб. пособие для студентов матем. факультетов пед. университетов/ под науч. ред. В. В. Орлова. М.: Дрофа, 2007. 320 с.

28. Мордкович А.Г. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс (профильный уровень): методическое пособие / А.Г. Мордкович, П.В. Семенов. 2-е изд., стер. М.: Мнемозина, 2010. 239 с.

29. Мордкович А.Г. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 класс. В 2 ч. Ч. 1. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений (базовый и углубленный уровни) / [А.Г. Мордкович и др.]. 10-е изд., перераб. М.: Мнемозина, 2015. 399 с.

30. Мордкович А.Г. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 класс. В 2 ч. Ч. 2. Задачник для учащихся общеобразовательных учреждений (базовый и углубленный уровни) / [А.Г. Мордкович и др.]. 10-е изд., перераб. М.: Мнемозина, 2015. 239 с.

31. Мордкович А.Г. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс (базовый и углубленный уровни): методическое пособие для учителя / А.Г. Мордкович, П.В. Семенов. 4-е изд., перераб. М.: Мнемозина, 2017. 226 с.

32. Папышев А.А. Теоретико-методологические основы обучения учащихся решению математических задач в контексте деятельностного подхода : автореф. дис. докт. пед. наук: 13.00.02 / Морд. гос. пед. ин-т им. М.Е. Евсевьева. Саранск, 2012. 44 с.

33. Пойа Д. Как решать задачу. М.: Учпедгиз, 1961, с. 203.

34. РЕШУ ЕГЭ [Электронный ресурс]. URL: <https://math-ege.sdamgia.ru/> (дата обращения: 15.02.2025).

35. Рубинштейн С.Л. Основы общей психологии / С.Л. Рубинштейн. СПб: Питер, 2000. 712 с.

36. Рурукин А.Н. Контрольно-измерительные материалы. Алгебра и начала анализа. 11 класс. М.: ВАКО, 2021. 5-е изд. 98 с.

37. Саранцев Г.И. Методика обучения математике в средней школе: Учеб. пособие для студентов мат. спец. пед. вузов и ун-тов / Г.И. Саранцев. М.: Просвещение, 2002. 224 с.

38. Тарасова О.В. Умение решать задачи в математике и в жизни (к 95-летию со дня рождения академика РАО, заслуженного учителя РФ, заслуженного деятеля науки РФ, доктора педагогических наук, профессора Юрия Михайловича Колягина) // Continuum. Математика. Информатика. Образование. 2022. №4. С. 98-106.

39. Темербекова А.А., Чугунова И.В., Байгонакова Г.А. Методика обучения математике: Учебное пособие. СПб.: Издательство «Лань», 2015. 512 с.: ил. (Учебники для вузов. Специальная литература).

40. Фазлеева Э.И. О применении метода рационализации при решении неравенств [Электронный ресурс]. URL: [https://kpfu.ru/staff\\_files/F1977879220/Metod\\_racionalizacii.pdf](https://kpfu.ru/staff_files/F1977879220/Metod_racionalizacii.pdf) (дата обращения: 01.03.2025).

41. Федеральная образовательная программа среднего общего образования. Утверждена приказом Минпросвещения России от 18.05.2023 №371 (с изменениями на 19 марта 2024 г.) [Электронный ресурс]. URL: <https://sudact.ru/law/prikaz-minprosveshcheniia-rossii-ot-18052023-n-371/federalnaia-obrazovatelnaia-programma-srednego-obshchego/iv/133/> (дата обращения: 05.02.2025).

42. Федеральный государственный образовательный стандарт среднего общего образования. Утвержден приказом Минобрнауки России от 17.05.2012 №413 (с изменениями на 27 декабря 2023 г.) [Электронный

ресурс]. URL: <https://docs.cntd.ru/document/902350579> (дата обращения: 01.02.2025).

43. Федеральный закон от 29.12.2012 №273-ФЗ «Об образовании в Российской Федерации» (в редакции от 08.08.2024) [Электронный ресурс]. URL:[https://s3510033.gosuslugi.ru/netcat\\_files/30/50/FZ\\_Ob\\_obrazovanii\\_v\\_RF\\_ot\\_01.09.2024.pdf](https://s3510033.gosuslugi.ru/netcat_files/30/50/FZ_Ob_obrazovanii_v_RF_ot_01.09.2024.pdf) (дата обращения: 01.02.2025).

44. Фридман Л. М., Турецкий Е. Н. Как научиться решать задачи: Кн. для учащихся ст. классов сред. шк. / Л. М. Фридман, Е. Н. Турецкий. 3-е изд., дораб. М.: Просвещение, 1989. 191 с.

45. Царева С.Е. Обучение решению задач // Начальная школа. 1998. №1. С.102-107.

46. Школково – Подготовка к ЕГЭ [Электронный ресурс]. URL: <https://3.shkolково.online/> (дата обращения: 13.01.2025).

47. Эрганова Н.Е. Основы методики профессионального обучения: Учеб. пособие. 2-е изд., испр. и доп. Екатеринбург: Изд-во Урал. гос. проф.-пед. ун-та, 1999. 138 с.

48. ЯКласс – цифровой образовательный ресурс для школ [Электронный ресурс]. URL: <https://www.yaklass.ru/> (дата обращения: 03.02.2025).

49. Ahlam EL-Shaer. Impact of Problem-Based Learning on Students` Critical Thinking Dispositions, Knowledge Acquisition and Retention [электронный ресурс] /Ahlam EL-Shaer, H. Gaber // Journal of Education and Practice. 2014. URL: <https://core.ac.uk/download/pdf/234635738.pdf>.

50. Cirrito F., Buckle N., Dunbar L. Mathematics higher level (core). Mathematics. International Baccalaureate. Series Title: International Baccalaureate in Detail. Published by IBID Press, Victoria. Printed by SHANNON Books, Australia, 2007. 1001 p. URL: <https://wepdf.com/mathematics-higher-level-core-solutions-manual-pdf-dl1861755>.

51. John R. Savery. Overview of Problem-based Learning: Definitions and Distinctions. / John R. Savery // Interdisciplinary Journal of Problem-Based

Learning. 2006. Volume 1. Issue 1. Article 3. PP. 9-20. URL: <http://docs.lib.purdue.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1002&context=ijpbl>.

52. Problem-Based Learning. Stanford University newsletter on Teaching // winter, 2001, URL: [https://www.researchgate.net/publication/332352523\\_Problem\\_Based\\_Learning\\_A\\_StudentCentered\\_Approach/link/67765ea5c1b013546508e253/download?\\_tp=eyJjb250ZXh0Ijp7ImZpcnN0UGFnZSI6InB1YmxpY2F0aW9uIiwicGFnZSI6InB1YmxpY2F0aW9uIn19](https://www.researchgate.net/publication/332352523_Problem_Based_Learning_A_StudentCentered_Approach/link/67765ea5c1b013546508e253/download?_tp=eyJjb250ZXh0Ijp7ImZpcnN0UGFnZSI6InB1YmxpY2F0aW9uIiwicGFnZSI6InB1YmxpY2F0aW9uIn19).

53. Saragih S., Habeahan W.L.. The Improving of Problem Solving Ability and Students' Creativity Mathematical by Using Problem Based Learning in SMP Negeri 2 Siantar [электронный ресурс]/S.Saragih, W.L. Habeahan// Journal of Education and Practice. 2014. URL: [https://www.researchgate.net/publication/314116485\\_The\\_Improving\\_of\\_Problem\\_Solving\\_Ability\\_and\\_Students'\\_Creativity\\_Mathematical\\_by\\_Using\\_Problem\\_Based\\_Learning\\_in\\_SMP\\_Negeri\\_2\\_Siantar](https://www.researchgate.net/publication/314116485_The_Improving_of_Problem_Solving_Ability_and_Students'_Creativity_Mathematical_by_Using_Problem_Based_Learning_in_SMP_Negeri_2_Siantar).