МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Тольяттинский государственный университет»

Институт общеинженерной подготовки
(наименование института полностью)

Кафедра «Высшая математика и математическое образование»
(наименование)

44.04.01 Педагогическое образование
(код и наименование направления подготовки)

Математическое образование
(направленность (профиль))

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА (МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ)

на тему «Эвристический метод обучения решению алгебраических задач в общеобразовательной школе»

Обучающийся К.С. Пиминова
(Инициалы Фамилия) (личная подпись)

Научный руководитель канд. пед. наук, доцент, Н.А. Демченкова
(ученая степень (при наличии), ученое звание (при наличии), Инициалы Фамилия)

Тольятти 2024

Оглавление

Введение

Актуальность и научная значимость исследования. Создание условий для раскрытия и развития творческого потенциала учеников является приоритетом современного образования. В соответствии с Федеральным законом «Об образовании в Российской Федерации» [73] и Концепцией развития математического образования [40] важным аспектом является возможность не только получать готовые знания, но и формировать навыки выдвижения и проверки гипотез, уметь анализировать и делать выводы, а также решать сложные нестандартные задачи. Как в профессиональной сфере, так и в повседневной жизни любому человеку необходима способность самостоятельно учиться и развиваться. Реализация этих вопросов достигается благодаря эвристическим приемам, применение которых в учебной деятельности способствует формированию умений поиска решений новых нестандартных задач.

Суть данного метода состоит в том, что преподаватель не дает готовые знания, а ставит перед учениками разного уровня учебные проблемы. Далее, последовательно выполняя учебные задания с помощью преподавателя, ученики самостоятельно приходят к решению проблем.

Современные исследования все чаще фокусируются на проблемах, связанных с организацией эвристического обучения, а также на вопросах формирования эвристических приемов. Многие авторитетные ученые и педагоги – В.И. Андреев [1], [2], В.Н. Введенский [21], И.И. Ильясов [31], Ю.Н. Кулюткин [44], О.К. Огурцова [57], Д. Пойа [66], [67], Г.И. Саранцев [75], Е.И. Скафа [77], [78], А.В.Хуторской [93], [94] и другие в своих работах изучают методические, психологические и дидактические основы эвристической деятельности.

Современный подход к эвристическому обучению в школе направлен на формирование и развитие эвристических навыков у учащихся. Овладение этими навыками включает в себя развитие у учеников умения применять различные эвристические приемы и действия.

По мнению М.Б. Балка [11], В.А. Далингера [28], Ю.М. Колягина [37], Д. Пойа [66], [67], Г.И. Саранцева [75], Л.М. Фридмана [89], Р.А. Хабиба [90] и других, обучение решению математических задач закладывает фундамент для развития эвристических навыков. Эвристические приемы играют важную роль в развитии способностей к решению задач, особенно когда требуется нестандартный подход.

Существующие исследования эвристических методов обучения решению математических задач, в том числе алгебраических, демонстрируют обширную базу знаний о различных эвристических стратегиях и приемах [3], [26], [56], [57], [72]. Отдельные работы, например, посвященные методу проб и ошибок, аналогии, индукции и дедукции, предлагают ценные инструменты для поиска решений. Однако, значительная часть этих методов, разработанных преимущественно для решения сложных задач в научно-исследовательской деятельности или профессиональной сфере, не адаптирована к специфике обучения школьников. Эвристические подходы, представленные в существующей литературе, зачастую слишком сложны, абстрактны или не учитывают возрастные особенности и уровень подготовки школьников, что затрудняет их непосредственное применение в школьном курсе математики.

Кроме того, исследования, посвященные эвристическим методам в математическом образовании, часто сосредоточены на анализе отдельных эвристических приемов или конкретных типов задач. Они не всегда рассматривают целостную систему обучения, включающую развитие навыков поиска решений и эвристических способов мышления у учащихся.

Так, существующее противоречие между потребностями современного общества в творческих, самостоятельных и независимых личностях и традиционной образовательной практикой проявляется в недостаточном использовании эвристических методов обучения. Отсутствует разработанная и апробированная методика поэтапного введения и развития эвристических стратегий в учебный процесс, которая учитывала бы индивидуальные особенности учеников и динамику их развития. В связи с чем, необходима дополнительная теоретическая и методическая поддержка для внедрения эвристических методов в образовательный процесс.

Таким образом, актуальной остается проблема разработки практических методик, позволяющих интегрировать эвристические подходы в преподавание алгебры, и обеспечивающих эффективный процесс формирования у учащихся умений поиска решений алгебраических задач. В связи с этим, настоящая магистерская диссертация направлена на решение данной проблемы.

Противоречие заключается в растущей потребности применения эвристического метода обучения решению алгебраических задач в школьном курсе алгебры и недостаточной разработанностью методических материалов ее реализации.

Данное противоречие позволило сформулировать проблему диссертационного исследования: эвристический метод обучения в общеобразовательной школе.

Объект исследования: процесс обучения алгебре в общеобразовательной школе.

Предмет исследования: решение алгебраических задач с применением эвристического метода при обучении учащихся общеобразовательной школы.

Цель исследования: разработка методики обучения решению алгебраических задач с применением эвристического метода у учащихся старших классов общеобразовательной школы.

Гипотеза исследования состоит в том, что, если активно применять эвристический метод при решении алгебраических задач, то повышается качество обучения учащихся общеобразовательной школы.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи:

1. Проанализировать сущность и использование эвристического метода обучения.

2. Выявить эвристическую составляющую в обучении решению алгебраических задач.
3. Изучить возможность реализации эвристического метода обучения на уроках алгебры при решении алгебраических задач.
4. Разработать элективный курс «Решение задач с параметрами» для учащихся старших классов с применением эвристического метода обучения.
5. Разработать методические материалы обучения решению алгебраических задач по теме «Прогрессии».
6. Провести педагогический эксперимент с целью оценки эффективности разработанной методики в условиях общеобразовательной школы.

Теоретико-методологическую основу исследования составили научные работы В.И. Андреева [1], [2], Я.А. Коменского [38], [39], А.М. Матюшкина [49], Д. Пойа [66], [67], М.И. Махмутова [50]-[52], А.В. Хуторского [93], [94], Е.И. Скафа [77], [78], В.Н. Соколова [79]-[83].

Базовыми для настоящего исследования послужили работы С.Р. Мугаллимовой [56], О.К. Огурцовой [57], Н.П. Алешиной [3].

Методы исследования: анализ психолого-педагогической, методической литературы по теме исследования; изучение и анализ состояния исследуемой проблемы в школьной практике; анализ собственного опыта работы в школе; педагогический эксперимент и обработка результатов эксперимента.

Основные этапы исследования:

– первый этап (2022/2023 уч. г.): ознакомление с существующими исследованиями по теме диссертации, анализ учебных ресурсов, справочников и сборников задач по математике, а также изучение нормативных документов, таких как стандарты и учебные программы;

– второй этап (2023/2024 уч. г.): определение теоретических основ, касающихся темы диссертации;

– третий этап (2023/2024 уч. г.): диагностика методических основ исследования, создание материалов, направленных на развитие эвристических методов через обучение решению алгебраических задач;

– четвертый этап (2024/2025 уч. г.): обобщение и систематизация собранных данных, анализ результатов эксперимента, формулирование выводов и подготовка диссертации.

Опытно-экспериментальной базой исследования являлось общеобразовательное частное учреждение «Школа «Новое образование»» г. Москвы.

Научная новизна исследования заключается в предложенных методических рекомендациях применения эвристического метода при обучении решению алгебраических задач.

Теоретическая значимость исследования заключается в предложенной методике обучения решению алгебраических задач с применением эвристического метода обучения.

Практическая значимость исследования состоит в том, что представленные в работе методические материалы могут быть использованы учителями математики при обучении учащихся общеобразовательной школы.

Достоверность и обоснованность результатов исследования гарантируются путем комбинированного использования теоретических аспектов и практических методов исследования, а также анализа педагогической практики.

Личное участие автора в организации и проведении исследования состоит в том, что автором были сформулированы методические рекомендации обучения решению алгебраических задач с применением эвристического метода обучения, разработан элективный курс «Решение задач с параметром» для старшеклассников, представлены методические материалы применения эвристического метода при решении алгебраических задач по теме «Прогрессии», проведен педагогический эксперимент с описанием полученных результатов.

Апробация и внедрение результатов работы велись в течение всего исследования. Предложенные методические рекомендации были экспериментально проверены в период производственной практики (научно-исследовательской работы) и преддипломной практики, которые проходили на безе кафедры высшей математики и математического образования Тольяттинского государственного университета.

Основные положения и результаты исследования докладывались на Всероссийской студенческой научно-практической междисциплинарной конференции с международным участием «Молодежь. Наука. Общество» (Тольятти, 2024), XXIII Всероссийской научно-практической конференции «Актуальные проблемы естественнонаучного и математического образования» (Самара, 2024).

По теме исследования имеются две публикации [60], [61].

На защиту выносятся:

1. Методические рекомендации обучения решению алгебраических задач с применением эвристического метода обучения.
2. Элективный курс «Решение задач с параметром» для учащихся старших классов с применением эвристического метода обучения в образовательной школе.

Структура магистерской диссертации. Работа состоит из введения, двух глав, заключения, содержит 8 рисунков, 7 таблиц, список использованной литературы (101 источник). Основной текст работы изложен на 118 страницах.

Глава 1 Теоретические основы эвристического метода обучения решению алгебраических задач в общеобразовательной школе

1.1 Сущность и использование эвристического метода обучения

Слово «эвристика» относится к ставшему легендарным возгласу «Эврика!», который в греческом переводе значит «открыть, найти». Так воскликнул Архимед, когда обрадовался найденному решению задачи, заказанной ему Гиероном. Четкое определение понятия «эвристика» дает педагог Дж. Пойа: «Наука делать открытия» [67]. Вопрос о природе поиска неизвестного: «Как мы можем открыть то, чего не знаем, и если знаем, зачем нам это искать?» [66] стал точкой отсчета для развития эвристики в древнегреческой философии.

Термин «эвристика» приписывают математику Паппу Александрийскому, жившему в III веке н.э. Он проанализировал и систематизировал работы древнегреческих математиков, выделив методы, которые отличаются от строгой логики. Эти методы он объединил под названием «эвристика». Его трактат «Искусство решать задачи» является первым учебным пособием, посвященным поиску решений в ситуациях, когда математические и логические методы не дают результата [93, с. 19].

Любопытно, что сходство эвристического метода с «сократическими беседами» заключается в том, что в обоих случаях отсутствует иерархия между участниками диалога, и все они являются равными партнерами. Путем постановки и задания хитрых вопросов достигалось решение проблемы. Сократ последовательно предлагал вопросы таким образом, чтобы ответы противоречили друг другу. Собеседник исправлял свои ответы, пока не достигал правильного решения. Таким образом, собеседник самостоятельно приходил к пониманию истины [63].

Смысл этого диалогического процесса заключался в том, чтобы знания и истина рождались в диалоге на основе вопросной и ответной формы, а не передавались человеку в готовой форме. Поэтому важным условием в такой беседе являлось умение собеседника задавать вопросы [64].

Современная педагогика отмечает, что метод Сократа важен не тем, что он дает готовые ответы, а тем, что он развивает у учащихся способность к самостоятельному мыслительному процессу в ходе диалога. Многие известные педагоги давали высокую оценку сократическому методу, построенному на преодолении разногласий в умозаключениях собеседников с целью достижения истины в споре.

Против догматизма и схоластики, царивших в средневековой школе, Я.А. Коменский, выдающийся чешский педагог XVII века, предлагал вернуться к идеям «духовного акушерства», заимствованным у Сократа, указывая на то, что учение – это «открытие скрытого источника знаний в уме, а не орошение этого источника потоками других» [39, с. 177-178].

Немецкий педагог А. Дистервег (1790-1866) говорил о методе Сократа, как о «вершине искусства учителя» [29], и писал: «Развитие и образование не даются и не передаются никому» [29, с.90].

Подход эвристического обучения был разработан английским ученым и педагогом Г.Э. Армстронгом. Он считал, что репродуктивные методы не способствуют хорошей подготовке учащихся, и предлагал вместо этого использовать эвристический (исследовательский) метод, который помогает педагогу развивать мыслительные умения обучающихся.

Тем не менее, для того чтобы добиться высоких показателей система эвристического обучения, представленная Г.Э. Армстронгом, подразумевала приложение существенных усилий и времени, что не является оптимальным.

Такие известные российские ученые и педагоги, как В.И. Водовозов [25], П.П. Каптерев [33], [34], К.Д. Ушинский [86], К.В. Ельницкий [30] и др., выступали за распространение и использование эвристического метода обучения в школе дореволюционного периода. В частности, К.Н. Вентцель утверждал, что большую пользу приносит самостоятельный поиск ответов на вопросы, нежели получать готовый ответ. Он писал, что метод освобождения творческих сил позволяет подходить к вопросу индивидуально и легче решать проблему индивидуализации преподавания [22, с. 34-35]. П.Ф. Каптерев и В.П. Вахтеров пропагандировали применение эвристического обучения, акцентируя внимание на том, что способность к исследованию и экспериментированию присуща всем детям [20], [33], [34]. К.Д. Ушинский рекомендовал использовать сократовский метод, чтобы развить у детей навык логического мышления и критического мышления [86, с. 415-416].

В середине XX века развитие кибернетики, научной и технической деятельности, а также формирование новых методов обучения стимулировали разработку эвристического программирования и развитие эвристических методов в различных областях [79, с.41]. Особую роль в этом сыграл математик и педагог Д. Пойя, который разработал общие правила для поиска решений задач. Его работы способствовали применению эвристики в образовании и научно-техническом творчестве [66], [67]. Российские ученые, такие как Е.Ф. Мишина [54] и Н.М. Плескацевич [65], внесли свой вклад в развитие эвристики в образовании и научной деятельности. Введение эвристического метода в процесс обучения позволило повысить у обучающихся уровень знаний и их качество, при этом, не затрачивая много времени. Построенная на системе вопросов эвристическая беседа создавала благоприятные условия для развития мыслительных способностей и создавала стимул для самостоятельного образования.

В своей диссертации Н.М. Плескацевич детально рассматривает и изучает метод эвристической беседы. Автор считает, что «эвристическая беседа – это система логически связанных вопросов, при этом каждый из них является для ученика мыслительной задачей и дает возможность прийти к истине самостоятельно» [65].

«Например, рассмотрим решение задания на вычисление суммы последовательности с помощью эвристического метода.

Вычислить $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3$.

Решение. При поиске решения данного задания учащимся необходимо сделать ряд предварительных шагов, а именно:

– рассмотреть суммы первых элементов (так сумма 1-го элемента равна 1, двух – 9, трех – 36, четырех – 100);

– определить предполагаемую общую формулу для данных сумм.

Чтобы школьники самостоятельно пришли к этому, им можно поставить ряд наводящих вопросов:

– какие числа представлены? (каждое число - это точный квадрат);

– на что похожи данные суммы?

– с суммой какой последовательности они сравнимы (с суммой арифметической прогрессии в квадрате)?

В результате ответов учащиеся приходят к общей формуле $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Далее необходимо доказать это предположение.

Тут школьники отвечают на вопрос «Всегда ли верна эта формула?», ведь мы предположили ее истинность из нескольких расчетов. И учащиеся сами приходят к пониманию того, что это еще необходимо доказать.

Далее с помощью наводящего вопроса: «Чем отличается сумма первых n и n+1 элементов?» учитель подводит их к тому, что разница между этими суммами должна быть $(n+1)^3$ по виду последовательности.

То есть $\frac{(n+1)^3(n+2)^2}{4} - \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ должно равняться $(n+1)^3$, что доказывается приведением к общему знаменателю и сокращением множителя.

Как видим, серия наводящих вопросов при решении данной задачи помогает учащимся практически самостоятельно найти необходимое искомое. Такой подход к решению задач формирует у учащихся умение выделять составляющие задачи, самостоятельно выстраивать цепочку логических умозаключений, что делает школьника полноправным субъектом собственной познавательной деятельности, результат труда которой становится не просто шаблонным копированием образца решения учителя, а продуктом интеллектуальной активности школьника» [91].

По мнению Н.М. Плескацевича, «эвристическая беседа состоит из следующих элементов: искомое, способ решения, деятельность по решению проблемы и ее результат» [65]. Также он разделил эвристические беседы на три категории в зависимости от того, что является целью поиска:

«– на поиск ответа в случае знания способа решения,

– на поиск способа решения в случае знания ответа,

– на поиск как способа решения, так и ответа» [65].

Ю.Н. Кулюткин, известный российский психолог, утверждает, что эвристические методы обучения требуют более широкого и всеобъемлющего исследования. Он считает, что «существуют универсальные принципы творческой работы, которые применимы к любой предметной области и не зависят от индивидуальных особенностей учащихся. Ученый полагает, что эвристические методы обучения относятся к метаспособам, которые представляют собой общую схему исследования различных отношений» [44, с. 12-13].

Тем не менее, Ю.Н. Кулюткин считает, что эвристики сводятся только к действиям и не могут распространяться на другие компоненты дидактики. Данную проблему успешно смог решить советский и российский педагог В.И. Андреев. В работе [1] он проанализировал и упорядочил эвристические методы, описал принципы и правила их использования, привел разнообразные модификации уже распространенных эвристик. Педагог рассматривает в качестве эвристик вопросы, помогающие учащимся преодолеть трудности или создающие подходящие условия, которые способствуют их творческому развитию [2].

Проблемы эвристического метода обучения были также изучены Н.В. Соколовым. В своих научных трудах он пытался применить эвристику, как научную область на практике в образовательном процессе. Особое место в работе автора отводится разработке модели педагогического взаимодействия, оптимальной для реализации эвристического метода обучения [81]. Соколов показывает, что применение объективных законов эвристики, а также итеративно-дуального подхода позволяет достичь наивысшего уровня развития эвристических умений учеников [79, с. 41].

Таким образом, в системе общего образования Н.В. Соколов выделяет эвристическое обучение, которое считает приоритетной целью и действенным механизмом, служащим для полноценного и ориентированного на результат творческого развития учеников.

Труды еще одного ученого посвящены теории эвристического обучения. А.В. Хуторской понимает под дидактической эвристикой «систему, состоящую из целей и закономерностей, принципов, содержания, приемов, форм, методов и средств, обеспечивающую самореализацию и образовательное развитие учащихся и педагогов в процессе получения образовательных результатов в области усваиваемых знаний и деятельности» [94, С. 96]. Им изложены и конкретизированы основные принципы и закономерности эвристического обучения, а также представлена классификация его форм и методов [93, с. 27].

Работы академика Н.Н. Трофимова посвящены возможности применения эвристического обучения в высших учебных заведениях [85]. Разработанный им комплекс задач, основанных на решении проблем, является средством формирования и развития у студентов аналитического и интегративного мышления. Проведенный в высшей школе педагогический эксперимент показал, что данная система задач может оказать содействие при замене устаревших методов обучения на прогрессивные развивающие.

В научной работе Н.Е. Хрипуновой на примере математики рассматриваются и обсуждаются условия эффективного использования эвристического метода [92]. Автор подтверждает положительное влияние, которое оказывает комплексное использование эвристического обучения в сочетании с другими методами. Это способствует росту творческого потенциала студентов и формирует в процессе обучения психологически комфортную атмосферу.

В свою очередь, А.Ф. Астахов разработал методику проблемно-ориентированного обучения с целью развития профессионального самосознания у студентов, обучающихся по техническим специальностям. Его методология «опирается на принципы модульности, концептуальности и рефлексивности профессиональной подготовки обучающихся. Автор предлагает строить эвристическую деятельность учащихся на основе вероятностной модели творческой деятельности, которая состоит из условных дискретных этапов. Такой подход дает возможность преподавателю стимулировать непрерывный поиск решения задач студентами. Вероятностная непрерывность, содержащая последовательный поиск цели, вероятностную оценку его результатов, выбор альтернатив для продолжения поиска и т.д. – основная черта эвристической деятельности студентов» [10, с. 300-301].

Идею эвристического обучения развивали многие выдающиеся педагоги и ученые, в том числе В.И. Водовозов [25], Я.Л. Коменский [38], [39], К.В. Ельницкий [30], А. Дистерверг [29], К.Д. Ушинский [86], К.Н. Вентцель [22], П.П. Каптерев [33], [34] и многие другие. Переход к современному развитию эвристического обучения связывают с исследованиями, проведенными математиком Д. Пойа, во II половине XX века.

«Эвристическое обучение – это особый тип познавательной деятельности, в котором учитель и ученик взаимодействуют в диалоге, стремясь к самореализации и развитию творческих способностей. Эвристическое обучение рассматривается с точки зрения особого процесса познания, которое строится на взаимодействии и диалоге учителя и ученика, с целью самореализации и становления творческой личности. При этом взаимодействие между учителем и учеником не является строго регламентированным, возможна вариативность и вероятностный поиск в субъективно допустимых «коридорах отклонений»» [80, с. 194-195].

Эвристический метод обучения характеризуется следующими особенностями: интерактивное взаимодействие, многовариантность и проблемный характер.

Обучение, основанное на интерактивном взаимодействии, должно отражать интерактивный характер личной и общественной жизни. Диалог в этом процессе должен быть многогранным, чтобы обеспечить многомерное развитие личности.

Диалог – это взаимодействие между людьми, осуществляемое через речь, в результате которого возникают и развиваются разнообразные межличностные отношения. В нем встречаются и взаимодействуют два равноправных человека, каждый имеющий свое мнение и позицию. В связи с этим диалог происходит в том случае, когда суждения человека находят отражение в словах. Каждая фраза беседы содержит слово, произнесенное в той или иной форме, которое подвергается рассмотрению, восприятию, переосмыслению и оспариванию. Для диалога характерны три фактора, без которых он становится невозможен. К ним относятся желание обоих собеседников развивать разговор, языковая общность, а также различные подходы к теме беседы. «Без первого условия субъекты не захотят общаться, без второго – не смогут ничего сказать, а без третьего – им нечего будет сказать друг другу» [46, с.115].

По мнению профессора М.С. Кагана, диалог может служить лишь формой коммуникации участников образовательного процесса, так как подразумевается индивидуальность каждого собеседника, их равенство, своеобразность позиций, а также нацеленность на понимание и принятие других точек зрения [32, с. 152].

Взаимодействие в виде диалога позволяет расширить позицию каждого участника беседы, что является несомненным достоинством такого типа коммуникации. Это дает возможность партнеру рассмотреть и оценить свою сформулированную гипотезу через позицию другого человека, и в тоже время принимать участие в разработке гипотезы оппонента [12, с. 149].

Другим свойством, которым характеризуется эвристическое обучение, является многовариантность процесса обучения и его результатов. Сущность данной характеристики строится на том, что при рассмотрении, анализе проблемы и в процессе поиска ее решения возникает сразу несколько различных гипотез. Безусловно, все гипотезы имеют разный уровень успеха. Однако преимуществом является то, что учащиеся таким образом не ищут единственно «верное» решение, а учатся видеть многообразие стратегий к проблеме и ее решениям. Это дает возможность расширить границы поиска, создать дивергентную мысль и, как результат, способствовать развитию творческих умений учащихся.

Диалог, построенный на таком методе, носит не фиксированный и заранее продуманный характер, а формируется в соответствии с личностными особенностями учащегося и преподавателя, а также могут присутствовать составляющие, являющиеся малоизвестными для участников процесса обучения. Учителя «не играют в игры незнания и непонимания» [45]. Диалог в образовательной сфере считается продуктивным только при условии, если это способствует переходу участников на уровень, когда конечное решение проблемы неизвестно ни учащимся, ни преподавателю. Для учителей вопросы диалога в образовательном процессе имеют личную значимость, и им приходится искать в учениках, а также в себе новые пути решения проблемы [45]. Итоги диалога получаются многообразными, оригинальными и несут в себе особое значение и для преподавателя, и для ученика. Учащиеся становятся организаторами своего учебного процесса, «планируют уроки и определяют собственную позицию по отношению к ключевым вопросам из разных областей деятельности» [93, с. 41].

Третьей характеристикой эвристического метода обучения является проблемный характер. На сегодняшний день принято считать, что проблемное обучение, прежде всего, способствует формированию необходимого для учащихся образовательного пространства, навыков, умений, а также обеспечивает высокую степень развития навыков самостоятельного обучения. А также помогает развитию индивидуального стиля мышления, повышению поисковой активности и формированию творческого подхода у учеников.

Как считает М.И. Махмутов, «закон эффективной творческой деятельности» [52] можно рассматривать как проблемную ситуацию. Такая ситуация возникает, когда ученик сталкивается с интеллектуальными трудностями и не может достичь цели, используя знакомые методы.

Важно понимать разницу между проблемными ситуациями и задачами. Проблемная ситуация в познании возникает, когда человек сталкивается с затруднениями и противоречиями, часто выражающимися в форме вопросов. Без этих затруднений и противоречий проблемная ситуация не может быть сформирована [49, с. 182]. Проблемные задачи, опираясь на имеющиеся знания и практический опыт ученика, эффективно создают такие ситуации, формируя противоречие между существующими представлениями и новой, проблемной ситуацией. Их цель – стимулировать у ученика желание применить полученные знания к подобным ситуациям и запустить самостоятельную поисковую деятельность.

Эвристический метод обучения ориентирован на формирование и развитие у учащихся способности к поиску проблем, предложению возможных решений, самостоятельной аргументации, выводу заключений и проверке результатов. В этом методе преподаватель вовлекает учеников в совместную деятельность, давая им возможность самостоятельно действовать и учиться.

Некоторые ученые и педагоги сравнивают эвристический метод обучения с проблемно-ориентированным, тем не менее А.В. Хуторской находит между ними различия.

Как известно, проблемное обучение основывается на том, что ученики изучают новый материал в процессе решения ими некоторых познавательных задач. Что касается эвристического обучения, то учащиеся вместе с преподавателем концентрируют внимание на способах достижения ранее неизвестного результата, а не на анализе известных данных.

Зачастую проблемно-ориентированное обучение связано лишь с воспитательным содержанием и определенными обучающими методиками.

В отличие от проблемного обучения, эвристический метод охватывает весь учебный процесс: от постановки целей и разработки теоретической базы до методов контроля знаний. Это делает эвристический подход более комплексным. Проблемное обучение наиболее эффективно в дисциплинах, требующих глубокого анализа, в то время как эвристический метод более гибкий и применим в любых предметных областях, включая те, где важную роль играют эмоциональные и образные компоненты [93, с. 38].

Например, научная работа известного педагога С.И. Брызгаловой посвящена рассмотрению некоторых особенностей взаимосвязи проблемно-поискового обучения и эвристической беседы [15].

Позиция А.В. Хуторского противоположна взглядам исследователей В.М. Медведева и В.Н. Соколова на данный вопрос. По их мнению, сущность и структура традиционного проблемного обучения совпадает с проблемно-эвристическим. Кроме того, это «решительно другая его направленность, основанная на теоретико-методологических положениях педагогической эвристики, ориентирующихся на целенаправленную инициацию, организацию и управление эвристической деятельностью творческого характера» [53, с. 202-203].

Проблематика является методологической основой для различных подходов к обучению, однако «сама по себе не гарантирует усвоения и развития опыта творческой деятельности учащихся, не является эвристикой» [41, с. 202-203]. «Учитывая их мнение, эвристический метод нельзя разъединить с проблемным подходом, и эвристическое обучение не следует рассматривать как отдельный вид обучения» [53, с. 202-203].

Таким образом, в отличие от традиционных методов, основанных на передаче готовых знаний и алгоритмов, эвристический метод поддерживает активное включение учащихся в процесс поиска решений. Его главными характеристиками являются интерактивное взаимодействие, многовариантность и проблемный характер.

1.2 Эвристическая составляющая в обучении решению алгебраических задач

Изучение учебников алгебры и математического анализа для старших классов показало, что, несмотря на соответствие уровню подготовки учащихся, материал представляет собой непростую задачу. Многочисленные абстрактные понятия требуют значительных усилий по обобщению, структурированию и анализу. Поэтому эффективное обучение данному предмету необходимо организовать специальным образом. В основе учебной деятельности положено использование таких мыслительных операций, которые позволяют не только овладеть новыми знаниями и умениями, но и сформировать что-то принципиально новое.

Применение задач, в основе решения которых лежит использование эвристических приемов, может способствовать развитию эвристических навыков учеников в процессе обучения математике. Эти задачи способны подтолкнуть учеников самостоятельно искать решение, рассматривать возможные варианты и делать выводы на основе полученных результатов [72, с. 77-82].

При этом важным условием является организация дискуссий среди учеников, что позволит им обмениваться идеями, взглядами на проблему и находить различные пути решения. Такой подход способствует развитию аналитического мышления и способности анализировать различные варианты решения задачи.

Также можно использовать различные игровые и практические формы работы, которые помогут учащимся применять эвристические приемы на практике. Игры и практические задания могут помочь учащимся развить свою креативность, наблюдательность и логическое мышление.

Важно предоставить учащимся возможность самостоятельно открыть новые понятия и закономерности, повлечь их собственные выводы и делать собственные открытия. Такой подход поможет развить их творческий потенциал и интерес к математике. «Ученикам предстоит также научиться сопоставлять разные термины и методы, видеть общие признаки и принципы и использовать их при решении задач различного уровня сложности» [72, с. 77-82].

Так, в процессе изучения математики разработка учебной деятельности, ориентированной на становление и совершенствование эвристических умений, должна включать использование разнообразных задач, игровых и практических занятий, коллективное обсуждение и самостоятельные исследовательские работы.

Проблеме формирования эвристических умений учащихся уделяется внимание множеством исследователей. Среди них – Н.П. Алешина [3], О.К. Огурцова [57], С.Р. Муггалимова [56], Е.В. Власенко [23], Е.И. Скафа [77], [78], В.С. Прач [70], И.В. Гончарова [26]и другие.

Профессор Е.И. Скафа [77] в своих работах реализовала теоретические и методические аспекты овладения эвристическими приемами в учебном процессе математики с применением современных технологий обучения. Научная работа педагога И.В. Гончаровой [26] посвящена рассмотрению и изучению эффективного метода развития эвристических умений у учеников 7-9 классов, посещающих математический факультативный курс с эвристическим подходом.

Автор публикации [70, с. 275] В.С. Прач изучала вопрос, посвященный эвристическому обучению учеников, получающих образование в классах гуманитарного профиля.

Преподаватель Е.В. Власенко проиллюстрировала в работе [23] методику, с помощью которой возможно сформировать приемы эвристики, в частности, на уроках геометрии у учащихся математических классов, а О.К. Огурцова [57], в свою очередь, – на уроках стереометрии.

Автор многочисленных работ С.Р. Муггалимова [56] показала, что большое значение при развитии эвристических приемов обучающихся играет применение векторного метода.

В диссертационной работе Н.П. Алёшиной обуславливается «положительное влияние на формирование логического и эвристического мышления старшеклассников на примере разработанного элективного курса, посвященному решению задач с применением законов логики союзов» [3].«В качестве примера рассмотрим закон дистрибутивности импликации относительно эквиваленции.

Что касается зарубежных исследований, то в работе [97] автор подчеркивает, что совершенствование математического образования – многогранный процесс, поэтому к нему необходимо подходить с разных сторон. Наряду с совершенствованием содержания и методов обучения математике в начальной школе необходимо обеспечить высокую заинтересованность, инициативность и активность учащихся. В статье широко исследуются пути использования частично-поисковой и эвристической методической системы в математическом образовании.

В исследовании [100] определяется влияние эвристического метода на успеваемость учащихся по математике 7 класса государственной национальной средней школы на Филиппинах в учебном году 2022-2023. Проведенный эксперимент показал, что возраст, пол, итоговая оценка по математике 6 класса учащихся не имеет существенной связи с их уровнем математических установок и успеваемостью. Однако значительное увеличение результатов тестов между предварительным и последующим тестированием приводит к существенной разнице между средними показателями обеих групп. Таким образом, стратегии обучения могут стимулировать учащихся повышать свою успеваемость. Был сделан вывод, что эвристическая модель обучения помогает учащимся лучше изучать математику. Исследователи настоятельно рекомендуют искать больше методов обучения, которые могли бы помочь повысить успеваемость учащихся.

Научный исследователь Hardi Tambunan из Университета HKBP Nommensen в своей статье [101] исследовал влияние эвристической стратегии на математические способности студентов в области высокого порядка мышления. Для этого автор использовал линейный регрессионный анализ и анализ дисперсии (ANOVA). Результаты исследования показали, что эвристические стратегии частично влияют на способность студентов понимать концепции, проявлять креативность, математическую коммуникацию, решать проблемы и рассуждать.

В статье [99] описывается исследование, в котором рассматривается использование эвристического подхода к решению проблем для развития математического мышления студентов STEM. В ходе исследования студенты были ознакомлены с различными эвристиками, которые можно использовать для решения задач. Гибкое применение эвристик помогает студентам направлять свое мышление на решение нестандартных проблем. Исследование показало, что эвристический подход к решению проблем способствует развитию концептуального математического понимания у студентов.

Автор статьи [98] рассматривает проблему эвристического метода преподавания математики. Обосновывается тезис о том, что «эвристический метод обучения является одним из важнейших методов преподавания математики. В работе предпринята попытка раскрыть систему педагогических умений учителя эвристического обучения математике. Здесь были продемонстрированы педагогические навыки, необходимые для организации и управления эвристической деятельностью студентов и полностью описывающие этапы образовательного процесса» [98].

Рассматривая и анализируя основную образовательную программу по математике для 10-11 классов [87], стоит отметить, что более высоких показателей результатов, касающихся личностного, метапредметного и предметного развития обучающихся, можно добиться при применении эвристических приемов в процессе изучения данного предмета.

Рассматривая традиционную учебную деятельность, можно отметить, что добиться высокого уровня результатов является достаточно сложной задачей. Достижение успеха возможно при правильно и грамотно организованной работе, в задачу которой входит как поддержание базового уровня знаний обучающихся, так и становление их эвристических навыков.

Эвристические навыки характеризуются рядом значимых функций. Во-первых, «они помогают обучению и процессу познания, давая возможность учащимся самостоятельно овладевать новыми знаниями, основываясь на уже полученные» [78]. Во-вторых, способствуют освоению эвристическими методами и способами обучения, обогатить знания и систематизировать их. В-третьих, эвристические способности оказывают важную роль в процессе прививания учащимся принципов рациональной организации умственной деятельности. В-четвертых, к развивающей функции относится способность активизировать эвристический способ мышления, совершенствовать навыки рассуждения и взращивать интерес к новым знаниям.

Так, эвристическим навыкам в процессе обучения придается большое значение, с их помощью происходит накопление знаний, интеллектуальное развитие и воспитание самостоятельности учащихся.

Теория эвристической математики предполагает такие эвристические умения, как:

– «анализ заданной ситуации с целью выявления важности искомых данных и их свойств; выяснение объема, логичности условия задачи и ее составляющих» [77];

– «соотнесение известных данных задач с искомыми; сопоставление предлагаемой задачи с известными» [77];

– «обнаружение неявных специфических черт задачи; образование новых комбинаций известных понятий и условий, которые связаны с компонентами определенных задач, а также соотнесение их с целями и задачами» [77];

– «разработка несложной математической модели для определенной задачи; сопоставление функциональных элементов с модельными элементами; определение однотипности свойств модели и предлагаемой проблемной задачи, требуемых для ее решения» [77];

– «понимание условия заданной задачи и построения ее структурных элементов; умение проектировать соответствующую микротеорию; нахождение особенностей, важных со стороны общего построения задачи или тематики поиска решений, основанных на различных типах эвристических приемов и, в частности, методике «интеграционного анализа»» [77];

– «проведение мысленного эксперимента и прогнозирование промежуточных и конечных результатов; осмысленная разработка гипотез; разбивать предлагаемую задачу на подзадачи, когда пошаговое решение порождает основное; обнаруживать определенные проблемы, решение которых способствует нахождению элементов для главной задачи» [77];

– «применение интуиции, логических рассуждений и рассудительности; использование дедукции для проверки предлагаемых гипотез и их опровержения противоположным примером; осуществление необходимых расчетов действенно и результативно» [77];

– «представление итогов проделанной работы над данной моделью задачи; применение языка ситуации, выраженного с использованием терминологии модели, и расшифровка полученных результатов» [77].

Как считает Е.И. Скафа [77], подобные эвристические способности могут быть реализованы на трех уровнях:

– низкий – ученики действуют согласно модели, проводят эвристическую близкую замену. В этом случае учащимся требуется большая помощь преподавателя, а эвристическая деятельность не привлекает внимание и не возбуждает интерес;

– средний – ученики применяют эвристики в схожих ситуациях, однако стараются найти необычные. При значительной помощи преподавателя учащиеся ощущают интерес к данной форме деятельности, однако он неустойчив;

– продвинутый уровень – по большей части ученики сами выполняют эвристические переносы. Они сильно заинтересованы этой формой деятельности.

Лишь продвинутый уровень эвристических способностей может быть связан с предполагаемыми итогами обучения. Таким образом, главная задача учителя – развивать и совершенствовать эвристические навыки учащихся, применяя эвристические приемы в ходе решения алгебраических задач. Рассмотрим пример.

«Пример 1. На этапе закрепления темы «Показательные уравнения», учащимся можно предложить решить следующий блок уравнений.

$9^{x^2-1}-36\cdot 3^{x^2-3}+3=0; 4\cdot 9^x-7\cdot 12^x+3\cdot 16^x=0;$

$7\cdot 4^{x^2}-9\cdot 14^{x^2}+2\cdot 49^{x^2}=0;$

$2^{2x}\cdot 9^x-2\cdot 6^{3x-1}+4^{2x-1}\cdot 3^{4x-2}=0;$

$3^{4x^2-6x+3}-10\cdot 3^{2x^2-3x+1}+3=0.$

Процесс поиска решения данных уравнений, направлен на формирование эвристического умения: вводить вспомогательную переменную. За счет того, что уравнения аналогичны, но с нарастающей сложностью, будет формироваться эвристическое умение: проводить аналогию» [75].

Эвристический подход к обучению алгебре и математическому анализу предполагает развитие у учащихся системы эвристических навыков, необходимых для эффективной учебной и познавательной деятельности.

К общим эвристикам относятся:

– «эвристические приемы мыслительной деятельности: анализ, сравнение, синтез, обобщение, сходство, систематизация, концептуализация, получение результатов и др.» [78];

– «эвристические ориентиры: исследовать по единицам, делить на случаи, обобщать, искать сходство» [78].

К специальным эвристикам относятся: «эвристические предписания (эвристические вопросы, инструкции, рекомендации); диалогические концентры (развитие сократовского диалога); базовые эвристики для решения эвристических задач (введение вспомогательной переменной, разделение на подзадачи, переход к аналогичной задаче)» [78].

«Пример 2. При поиске решения неравенства со знаком модуля

$$\left|x-2\sqrt{x}+2\right|+\left|2\sqrt{x}+3-x\right|\leq 7$$

должны быть применимы следующие эвристические приемы: на первом этапе решения, с учетом ОДЗ $x\geq 0$, и того что

$x-2\sqrt{x}+2>0$ при $\forall x\geq 0$, а $x-2\sqrt{x}-3=\left(\sqrt{x}-3\right)\left(\sqrt{x}+1\right)$,

используем эвристический прием переход к равносильному неравенству:

$x-2\sqrt{x}+2+\left(\sqrt{x}+1\right)\left|\sqrt{x}-3\right|\leq 7.$

Далее рассматриваем частные случаи: $\sqrt{x}<3$ и $\sqrt{x}\geq 3$. Во втором случае, мы получим следующее неравенство: $x-2\sqrt{x}-4\leq 0$, при решении которого нужно ввести вспомогательную переменную $t=\sqrt{x}$.

В процессе обсуждения решения неравенства обучающимся задается задание: найти другие способы решения неравенства. Выработка гипотез и поиск новых подходов к решению задачи позволяет овладеть новыми эвристическими умениями» [75].

Согласно мнению А.В. Хуторского формы и методы эвристического обучения ориентированы на формирование эвристических способностей обучающихся и базируются на соответствующих типах заданий:

«Задания когнитивного типа:

– решить реальную проблему, которая существует в науке: доказать математическую закономерность, лемму, теорему; объяснить графическую форму цифр их взаимосвязь и последовательность;

– исследование объекта (число, уравнение, задача); установить его происхождение, смысл. Строение, признаки, функции, связи. Применение разных научных подходов к исследованию одного итого же объекта;

– проведение математического опыта, эксперимента;

– исследование исторических фактов (например, создание десятеричной системы счисления);

– вычленение общего и отличного в разных системах, например, в разных типах языков, к примеру, чисел, форм.

Задания креативного типа:

– предложить ученикам иными способами выполнить задачу или придумать обозначение числа, понятия; дать определение изучаемому объекту, явлению; сформулировать математическую закономерность и т.д.;

– сочинить задачу или математическое задание в занимательной, игровой форме (математическую сказку, математический кроссворд, викторину, составить сборник своих задач);

– изготовить модель, математическую фигуру или другую математическую поделку;

– провести урок в роли учителя. Разработать учебные пособия, памятки, алгоритмы решения задач.

Задания оргдеятельностного типа:

– разработать цели собственных занятий по математике на день, на четверть, на год; разработать план домашней, классной или творческой работы по математике;

– составить и провести викторину или урок по математике для младших классов» [96].

Приведем примеры реализации заданий когнитивного типа в старших классах.

Пример 3. «Найти значение параметра a, при котором уравнение

$\sqrt{x^2+6x+5}=\sqrt{a-6x}$ имеет ровно один отрицательный корень.

Это задание было предложено учащимся после изучения темы «Решение иррациональных уравнений», поэтому они без труда перешли к равносильной системе: $\begin{cases} x \in (-\infty; -5]; [-1; +\infty) \\ x^2 + 12x + 5 - a = 0 \end{cases}$

Далее следует цепочка эвристических вопросов по управлению мыслительной деятельностью учащихся:

Изменилось ли качество уравнения после равносильного преобразования? (Да, вместо иррационального, оно стало квадратным).

Сформулируйте вопрос к новой задаче. (Найти а, при котором уравнение имеет ровно один корень на промежутках $(-\infty; -5]$ и $[-1; +\infty)$)

Сколько неизвестных в данном уравнении? Что в таком случае будет решением уравнения? (Упорядоченная пара чисел $(x; a)$)

Где можно изобразить упорядоченную пару чисел? Что для этого надо сделать? (В прямоугольной системе координат xOa, для этого одну переменную надо выразить через другую). Сделаем это. (Учащиеся без труда строят параболу $a = x^2 + 12x + 5$ (рис. 1)) и выделяют ГМТ координатной плоскости, соответствующее неравенствам $x \geq -1$и $x \leq -5$.

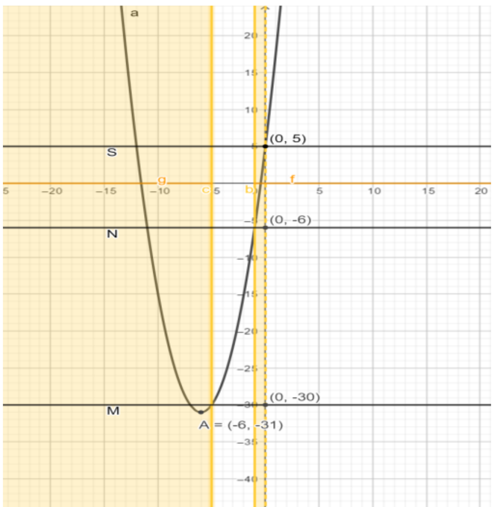

Рисунок 1 – График функции $a = x^2 + 12x + 5$

Затем аналитически находят границы значений параметра: $a = -31$; $a(-5) < a < a(-1)$; $a \geq a(0)$ и получают ответ: $\{-31\}$; $(-30; -6)$; $[5; +\infty)$.

Таким образом, в результате решения данной эвристической задачи старшеклассники «открыли» новый метод решения задач с параметром, который в будущем может быть успешно применен для решения других задач, а так же повысили мотивацию к изучению предмета, т.к. рассматриваемая задача является заданием №18 ЕГЭ» [47].

Пример 4. «Решить уравнение $\sqrt{x} = \frac{17}{x+1} + 3$.

Разумеется, решение этого задания несомненно вызовет у школьников затруднения, так как правая часть уравнения представлена дробно-рациональной функцией. После безуспешных попыток решить данное уравнение традиционными способами, предложить учащимся проанализировать графическую иллюстрацию левой и правой частей уравнения, как функций от x (рис. 2).

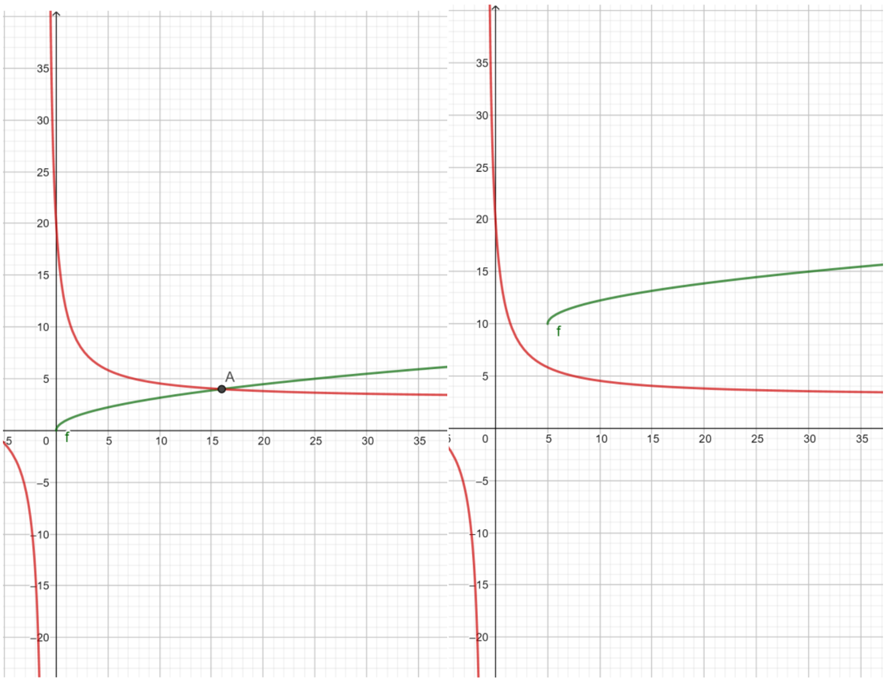

Рисунок 2 – Решение уравнения $\sqrt{x} = \frac{17}{x+1} + 3$.

Каков характер монотонности функций, стоящих в левой и правой частях уравнения?

Как это связано с количеством корней уравнения?

Сформулируйте предположение, используя математическую терминологию. (Если левая и правая части уравнения разные по характеру монотонности функции, то уравнение имеет один корень)

Измените уравнение так, чтобы условие вашей теоремы выполнялось, а заключение – нет. (Учащиеся сразу догадываются, что если «передвинуть» график ограниченной функции вверх, то уравнение не будет иметь корней, при этом левая часть уравнения может выглядеть так $\sqrt{x-5}+10$)

Теперь изложите формулировку теоремы в новой редакции. (Если левая и правая части уравнения разные по характеру монотонности функции, то уравнение имеет не более одного корня).

Далее учителем проводится доказательство «открытой» учащимися теоремы и делаются выводы о том, что необязательно всякий раз прибегать к построению графиков функций, входящих в уравнение. Достаточно обосновать разный характер монотонности функций, входящих в левую и правую части уравнения и попытаться найти его корень подбором.

Можно ли утверждать, что если корень отгадать не удалось, то уравнение не имеет корней?

Сформулируйте последовательность шагов при использовании метода монотонности функций, входящих в уравнение? (обосновать разный характер монотонности функций, входящих в левую и правую части уравнения и сделать вывод о количестве его корней; найти ОДЗ уравнения; попытаться отгадать корень, взятый из ОДЗ; выполнить проверку)» [47].

Примеры задач креативного типа.

Пример 5. Преобразование задачи.

«Решение задач с параметром методом замены переменной приводит учащихся к преобразованию исходной задачи к задаче другого качества. С этой целью полезно организовать работу в группах, предложив выполнить следующее упражнение: произведите замену переменной и сформулируйте новое условие задачи» [47] (табл. 1).

Таблица 1 – Решение примера 5

Задача	Преобразованная задача
1. «Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $(a+1)\cdot 4^x + 8\cdot 6^x + (a-5)\cdot 9^x = 0$ имеет ровно одно решение.	$t = \left(\frac{2}{3}\right)^x, t > 0$ Найдите все значения параметра а, при которых уравнение $(a+1)t^2 + 8t + (a-5) = 0$ имеет единственный положительный корень.
2. Найдите все значения параметра а, при которых уравнение $9^{-\|x-2\|} - 4\cdot 3^{-\|x-2\|} - a = 0$ имеет хотя бы одно решение.	$t = 3^{-\|x-2\|}, 0 < t \leq 1$ Найдите все значения параметра а, при которых уравнение $t^2 - 4t - a = 0$ имеет хотя бы один корень, принадлежащий промежутку (0;1]
3. Найдите все значения параметра а, при которых уравнение $4^x + a\cdot 2^{x+1} + a^2 + a - 2 = 0$ имеет два корня разных знаков.	$t = 2^x, t > 0$ Найдите все значения параметра а, при которых уравнение $t^2 + 2at + a^2 + a - 2 = 0$ имеет два положительных корня, один из которых больше 1, а другой меньше 1.
4. Найдите все значения параметра p, при которых наименьшее значение функции $y = 4^x - p\cdot 2^{3+x} + 7p^2$на отрезке [-2; 0] отрицательно.	$t = 2^x, \frac{1}{4} \leq t \leq 1$ Найдите все значения параметра р, при которых наименьшее значение функции $f(t) = t^2 - 8pt + 7p^2$на промежутке $\left[\frac{1}{4}; 1\right]$отрицательно» [47].

Пример 6. «Конструирование задачи, аналогичной данной, но более сложной. На уроке повторения и обобщения темы «Показательная и логарифмическая функции» учащимся предлагается, взяв за основу квадратное неравенство $a^2 + 4a - 5 < 0$, сконструировать новое, более сложное задание с помощью промежуточных переменных. При этом необходимо выполнить преобразование условия неравенства так, чтобы ничего в условии не напоминало о квадратном неравенстве. Данное задание выполняется в группах, затем учащиеся обмениваются задачами, решают и обсуждают решение (табл. 2)» [47].

Таблица 2 – Решение примера 6

	Промежуточные переменные	Составленное неравенство
1 группа	$\sqrt{t};\ \log_5 p\,; x+2$	$4\sqrt{\log_5(x+2)} < \log_{0,2}\dfrac{x+2}{3125}$
2 группа	$\sqrt{t};\ 5^t; x+2$	$4\left(\sqrt{5}\right)^{x+2} < 5-0{,}2^{x+2}$

В заключении можно сделать вывод о том, что изучение алгебры и начал математического анализа способствует развитию у школьников способности к нестандартному мышлению и решению задач. Эти навыки помогают глубоко понимать и усваивать материал, расширяя творческие и интеллектуальные способности. В результате учащиеся могут находить несколько различных подходов к решению одной и той же задачи. Развитие эвристических навыков обеспечивает способность к анализу, систематизации, обобщению и синтезу новых знаний. В конечном счете, это позволяет обучающимся применять полученные знания в различных областях и на разных уровнях сложности.

1.3 Реализация эвристического метода обучения на уроках алгебры при решении алгебраических задач

Эвристический метод в математике обычно описывается как метод обучения, который акцентирует внимание на самостоятельном исследовании, открытии и решении проблем. Наиболее соответствующей технологией обучения математике для эвристического метода может быть проблемно-ориентированное обучение.

Для педагогики понятие проблемного обучения не является новаторским. Когнитивная активность является залогом успешного запоминания, детального рассмотрения явлений, предметов и самых различных жизненных процессов, помогает основательно разобраться практически в любом вопросе. Таким подходом человечество пользуется не одно тысячелетие, все более углубляясь в познании мира и себя самого.

Например, философские поиски Сократа строились как раз по такому методу: перед собеседником, как правило, был поставлен сложный вопрос (проблема), поиски ответа на который, стимулировали умственную активность личности и призывали участвовать в интересных дискуссиях. Последователи пифагорейской школы философии и другого древнегреческого философского направления – софисты также прибегали к столь эффективному методу обучения.

Позднее Фрэнсис Бэкон стал продолжателем доброй традиции активного обучения, хоть и подход к нему рассматривался под другим углом согласно контексту нового времени. Для эмпиризма уже было недостаточно одних словесных изысканий, истину необходимо было подтверждать практическим опытом, только так в глазах приверженцев этой философской школы она могла иметь право на существование. Фактически – это былоновым вызовом для привычной модели обучения, выражающейся лишь в запоминании прежде опубликованных печатными изданиями аксиом и истин.

Что же касается сторонников использования метода активного учения для учащихся школ: ярким его представителем несомненно считается чешский легендарный педагог Ян Амос Коменский, благодаря которому педагогика стала рассматриваться научным сообществом как самостоятельная и уникальная дисциплина. В своем знаменитом педагогическом трактате «Великая дидактика» Коменский использует следующий постулат, объясняющий, что одним из важнейших навыков в процессе обучения является формирование собственного мнения и логических выводов на основе доказательной базы, а не зазубривание ранее написанных догм: «воспламенять в мальчике жажду знания и пылкое усердие к учению» [39].

Великий мыслитель эпохи Просвещения французский философ Жан Жак Руссо также в своих трудах указывал необходимость проделывания собственной исследовательской работы в процессе познания «… сделайте вашего ребенка внимательным к явлениям природы… Ставьте доступные его пониманию вопросы и предоставьте ему решать их. Пусть он узнает не потому, что вы сказали, а потому, что сам понял…» [51]. Конечно, такой подход был слишком прогрессивным для своего времени и едва ли в полной мере реализовался на практике. Однако акцентирование внимания на проблеме активного учения, при котором ребенку становилось необходимым активно пользоваться своими когнитивными способностями и развивать их, принесло свои плоды для всех последующих поколений.

Немецкий педагог-гуманист Адольф Дистервег мыслил созвучно и отмечал, что «хорош только тот метод обучения, который активизирует познавательную деятельность ученика, и плох тот, который ориентирует его только на запоминание изучаемого материала» [29]. А проблемное обучение является именно таким методом по своей сути.

Не менее видным продолжателем подхода проблемного обучения без сомнений является американский педагог и философ Джон Дьюи, именно он, развивая идею дальше, смог основать Чикагскую опытную школу, где обучение строилось вокруг игровой и трудовой деятельности, а не ординарного учебного плана. Опыт новой школы стал не только новой популярной концепцией, но и целым практическим педагогическим трендом в конце девятнадцатого века и начале двадцатого. Принципы этого обучения распространялись не только на штаты, но и на страны других континентов, исключением из которых не стала Российская Империя, а позже и СССР. Однако необходимо отметить, что в 1932 подход все же запретили.

Новой волной распространения концепции проблемного обучения можно назвать 60-80-е годы двадцатого столетия. Ее выражением можно считать многочисленные публикации в сфере литературы по педагогике, доказывающие важность исследовательской основы в рамках гуманитарных и естественнонаучных дисциплин. Наш соотечественник, ученый-академик, знаменитый педагог Николай Кириллович Гончаров в своих очерках заметил, что в «этот период встает задача более широкого применения элементов исследовательского метода, а точнее, исследовательского принципа. Задача школы состоит в том, чтобы постепенно подводить учащихся к овладению методом науки, будить и развивать у них самостоятельную мысль. Можно школьнику формально сообщать знания, и он их усвоит, и можно преподавать творчески, сообщать знания в их развитии и движении» [51].

Более подробно концепцию проблемного обучения разработали советские ученые-академики Алексей Михайлович Матюшкин и Мирза Исмаилович Махмутов во второй половине 60-х годов, вклад которых сложно переоценить. Алексею Михайловичу принадлежит множество научных трудов, посвященных роли проблемных ситуаций. А вот саму методику использования проблемного обучения и этапы его грамотного внедрения в образовательные программы на практике определил уже Мирза Исмаилович. Несомненно, были и другие важнейшие представители, описывающие метод и его эффективность в академических кругах. О них речь пойдет дальше. Например, свою классификацию метода создавали советско-российские педагоги Исаак Яковлевич Лернер и Михаил Николаевич Скаткин «на основе принципа возрастающей степени самостоятельности учащихся: проблемное изложение знаний, частично-поисковый метод, исследовательский метод» [76].

И хотя рассматриваемая нами тема является предметом широкого изучения, является достаточно обсуждаемой и популярной, перед педагогическим сообществом все еще остается множество задач, требующих решения и в теоретическом, и в практическом поле. О чем упоминал М.И. Махмутов: «основные трудности связаны с недостаточной разработанностью методики организации проблемного обучения, сложностью подготовки учебного материала в виде проблемных познавательных задач, а также недостаточной подготовленностью педагога к организации проблемного обучения».

Понятие проблемного обучения неоднозначно и трактуется педагогами-психологами по-разному. Далее представлены некоторые из распространенных определений. Профессор В.Т. Кудрявцев полагает, что «проблемное обучение заключается в создании перед учащимся проблемных ситуаций, в осознании, принятии и разрешении этих ситуаций учащимися в ходе совместной деятельности учащихся с учителем при оптимальной самостоятельности первых и под общим руководством последнего» [43, с.15].

Польский педагог Винценты Оконь пишет: «В наиболее общем виде под проблемным обучением мы разумеем совокупность таких действий, как организация проблемных ситуаций, формулирование проблем... оказание ученикам необходимой помощи в решении проблем, проверка этих решений, и наконец, руководство процессом систематизации знаний» [58, с. 11].

Доктор педагогических наук Иван Федорович Харламов трактует проблемное обучение как « … такую организацию учебного процесса, которая включает в себя создание проблемной (поисковой) ситуации на уроке, возбуждение у учащихся потребности в решении возникшей проблемы, вовлечение их в самостоятельную познавательную деятельность, направленную на овладение новыми знаниями, умениями и навыками, развитие их умственной активности формирование у них умений и способностей к самостоятельному осмыслению и усвоению новой научной информации» [91, с. 17].

М.И. Махмутов определяет понятие по-своему: «Проблемное обучение – тип развивающего обучения, в котором сочетаются систематическая самостоятельная поисковая деятельность учащихся с усвоением ими готовых выводов науки, а система методов построена с учетом принципов проблемности; процесс взаимодействия преподавания и усвоения ориентирован на формирование познавательной самостоятельности учащимися, устойчивых мотивов учения и мыслительных (включая и творческие) способностей в ходе усвоения ими научных понятий и способов деятельности, детерминированной системой проблемных ситуаций» [51].

Притом, что все приведенные определения разнятся, нельзя не заметить, что в своей основе они все-таки совпадают. Каждое из описаний предполагает, что для функционирования и эффективности метода необходима инициация проблемной ситуации в виде сложной задачи, заставляющей находить решение, будучи при этом в ситуации, когда накопленные ранее теоретические и практические знания, навыки и умения, а также выдвинутые требования могут вступать в противоречия.

Считаем важным перечислить некоторые из задач, которые решает метод проблемного обучения:

– нестандартность подхода напрямую влияет на интерес школьника, мотивирует его запускать сложные когнитивные процессы;

– учащиеся проявляют инициативу, развивают творческий подход к решениям;

– школьники на практике оценивают собственные возможности, учатся объективно отмечать собственные сильные стороны и недостатки, требующие доработки;

– формируется вовлеченность в исследовательские процессы;

– развиваются навыки коммуникации и понимание своей ответственности.

Однако для реализации поставленных проблемным обучением задач, необходимо понимать его технологию: «последовательность этапов, включающих: постановку учебно-проблемной задачи, создание для учащихся проблемной ситуации; осознание, принятие и разрешение возникшей проблемы, в процессе которого они овладевают обобщенными способами приобретения новых знаний; применение данных способов для решения конкретных задач» [91].

Согласно новым стандартам образования, технология проблемного обучения стимулирует способности учащихся к самообразованию, а также:

– помогает верно обозначать проблему, находить ее решение, а также брать за него ответственность;

– заставляет определять цели своей деятельности локально и глобально, рассчитывать необходимые силы и ресурсы для ее достижения, понимать планомерность будущих шагов;

– способствует осмыслению проделанной работы и полученных результатов, их трезвой оценке.

Чтобы понять, в чем разница двух подходов: традиционного и проблемного, можно обратиться к их анализу ученого В. Оконя [58]. Таблица 3 позволяет провести наглядное сравнение.

Таблица 3 – Сравнительные характеристики традиционного и проблемного обучения

Традиционное обучение	Проблемное обучение
Преподаватель действует только согласно программе, предлагая учащимся уже готовые материалы	Знания добываются учащимися и в процессе решения теоретических вопросов, и в процессе практических
Основное объяснение материала происходит в устной форме, либо в виде чтения дидактических материалов, что способствует отвлечению внимания учащихся и временному выпаданию из учебного процесса	Инициативность, интуиция, активность и самостоятельность являются главенствующими чертами исследовательского процесса
Скорость прохождения программы и темп озвучивания материала, как правило, ориентирован на одну из групп обучающихся: сильную, среднюю, слабую	Темп обучения и получения сведений зависит от самого школьника или группы, в которой он состоит
Контроль успеваемости и достижений школьника – отдельная часть процесса, не являющаяся естественным включением органики учебного процесса	Проверка полученных результатов носит менее формальный характер, вследствие чего у ребенка сохраняется позитивное восприятие процесса
Сомнительные возможности реализации теоретически полученных знаний на практике, а также невозможность получения высшего результата для всех школьников группы	Сравнительно высокие результаты преподавания. Школьники легче адаптируют полученные знания, сталкиваясь с новыми вызовами, к процессу решения подходят творчески

Исходя из таблицы, можно понять, что педагог, работающий в рамках традиционного обучения, объясняет материал, иллюстрируя его различными примерами, научными экспериментами и опытами, предлагая учащимся уже готовые знания для усвоения. После чего степень изученности темы проверяется при помощи контрольных заданий по пройденной теме. Каждому из школьников выставляется оценка, подтверждающая его уровень закрепления полученных знаний.

Работа преподавателя характеризуется, прежде всего, трансляционной формой, в то время как деятельность учащихся репродуктивна, дети повторяют изученное, осмысливают, пробуют применять информацию на практике. Здесь важно пояснить, что репродуктивность обязательна не только для традиционных форм обучения, а для всех методик, иначе каждому ребенку пришлось бы самостоятельно опытно проходить всю историю развития человечества, что, как мы понимаем, не является реальным [88].

Метод проблемного обучения ставит же перед собой задачу разработки целой системы умственного аппарата, позволяющей не привязываться к конкретной изучаемой теме, а использовать совокупность умственных инструментов для решения широкого спектра задач. Такой метод предполагает некоторую универсальность используемых знаний.

Большую роль в проблемном методе играет самообучение ребенка, который комплексно использует ранее полученную информацию, перерабатывает ее и обобщает. Самостоятельно находит новые пути для решения поставленных задач, прежде ему неизвестных. Уникальность метода в том, что учащийся собственными силами разрабатывает путь решения проблемы, не прибегая к помощи учителя, родителей, друзей, книг и интернета. Таким образом, ранее полученные знания применяются в рамках большого круга тем, что способствует их углублению.

Давайте рассмотрим необходимые характеристики проблемных ситуаций, отвечающие за успешное применение метода на практике. Проблемная ситуация должна:

– соответствовать цели формирования структурированной системы знаний и навыков;

– отвечать реальному уровню знаний учеников и их когнитивным возможностям;

– инициировать самостоятельность исследовательской деятельности учащихся;

– уровень заданий должен позволять учащимся найти решение и получить верный ответ, однако он не предполагает использование уже известных методов решения, подходящих к конкретному типу задач.

Поставленные цели проблемного обучения подразумевают следующую модель развития:

– инициирование проблемной ситуации;

– осмысление учениками наличия противоречия и, как следствие, определение проблемы, ее формулирование;

– установление приемлемого пути решения проблемной ситуации, выдвижение гипотез;

– аналитическая оценка выбранных путей решения;

– подтверждение эффективности выбранного решения.

Очевидна необходимость верной постановки проблемной ситуации, так как она определяет всю возможность последующего получения знаний по методу проблемного обучения и влияет на нахождение нужного решения задачи в частности.

Для учащегося первый этап выглядит как ознакомление с проблемной ситуацией и ее первичный анализ. Если формулировка задачи произошла грамотно, мотивация к решению не заставляют себя ждать, побуждает к активному исследовательскому процессу.

Понимание сущности затруднения у учащихся становится возможным, если они осознают объективные причины усвоенных методов и могут сопоставить эти причины с реальными условиями решаемой задачи. Это также подразумевает способность осуществлять рефлексивный контроль над своими действиями или действиями учителя [52].

Результатом оценки проблемной ситуации, основанной на самоанализе и контроле своих действий, является не только понимание недостатка уже имеющихся вариаций решения, но и осмысление причин этой недостаточности. В результате подобной проработки проблемная ситуация преобразуется в задачу. Такой этап в проблемном обучении имеет ключевое значение для формирования научного взгляда на мир и стимулирования самостоятельности учащихся. Завершение этого этапа необходимо для устранения противоречий и успешного окончания проблемного обучения. Навыки, приобретенные на этом этапе, становятся неоценимыми для развития у учащегося умения вести самостоятельную научную деятельность.

Формулировка проблемы и её четкое определение часто требуют не меньшего умственного напряжения, чем последующее решение. Если учащиеся самостоятельно ставят проблемные задачи, это показывает, что они близки к решению и интуитивно проходят циклы «определение проблемы – выдвижение гипотезы – их проверка». Процесс выявления и формулировки проблемы активирует более широкие области мозга, требует высокого уровня обобщения, умение отделять важное от несущественного и выявлять основные причины проблемы. Четко сформулированная проблема вызывает появление ряда проблемных вопросов, которые ведут задачу к выбору оптимальных решений, задействующих разные подходы и способы.

Далее учащиеся собирают данные о характеристиках и особенностях элементов, формирующих проблемную ситуацию, чтобы выбрать самый адекватный путь решения. Однако стоит отметить, что не все учащиеся подходят к сбору информации одинаково; некоторые из них могут больше довериться собственной интуиции, что нередко несет в результате научные озарения. Такой креативный метод в рамках проблемного обучения не только не отрицается, но и активно поддерживается.

Тем не менее, для полного развития учащихся процесс не стоит ограничивать лишь гипотезами. Учащиеся должны уметь их аргументировать и проверять на соответствие данным условиям задачи. Анализ гипотез, их правки могут претерпевать неоднократные видоизменения, поэтому стоит учитывать, что проблемное обучение может приводить к заметному снижению объема материала, знаний и навыков, которые можно получить за схожий временной промежуток по методу традиционного обучения.

После того как учащиеся докажут свою гипотезу через выводы и их проверку, наступает заключительный этап: оценивание выбранного решения и его применимость к другим задачам. Усвоение полученных знаний может происходить и по традиционной схеме с использованием методов репродуктивных, и в методе проблемного обучения с элементами изменения условий исходной ситуации.

Согласно М.И. Махмутову [50] у проблемного обучения существует четыре уровня полноты, их выделяют относительно степени самостоятельности ученика во время создания и процессе решения проблемной ситуации:

1 уровень. Основная роль в постановке проблемы и ее решении принадлежит преподавателю, уровень самостоятельности учащегося не высок.

2 уровень. Формулировка проблемной ситуации дается преподавателем, а все последующие этапы, раскрывающие проблему, проходят только при условии участия учеников.

3 уровень. Аналогично предыдущему пункту происходит формулировка проблемной ситуации, но уже непосредственно учащимися и их педагогом, создается пространство для поиска совместных решений.

4 уровень. Каждый этап по решению проблемной ситуации проходят непосредственно учащиеся, что отвечает высшей степени их самостоятельности и когнитивной активности.

Вышеописанные этапы проблемного обучения иллюстрируют ключевые моменты организации современных проблемных уроков, способных принимать различные формы в зависимости от их типа. При внедрении технологии проблемного обучения важно понимать методические аспекты организации процесса получения знаний. Реализация проблемного обучения может варьироваться в зависимости от целей, поставленных на разных типах уроков. В таблице 4 ниже указаны типология занятий и методические приемы применения проблемного обучения в зависимости от этих целей.

Таблица 4 – Методические приемы, зависящие от цели занятия и его типа

Тип занятия	Задача занятия	Используемые приемы методики
Внедрение новой информации	Освоение новых понятий и терминов	Внедрение нового знания через проблемно-диалоговый подход с акцентом на противоречия.
Применение полученной информации	Усовершенствовать навыки использования накопленных знаний для обогащения опыта в творческой деятельности	Конструирование различных проблемных ситуаций и решение задач с использованием дифференциации
Обобщение и систематизация полученных знаний	Скомпоновать основные аспекты темы с акцентом на практическое применение знаний	Сравнение явлений, их анализ и схематическое сопоставление
Проверка усвоения знаний	Проверить способность использовать знания для решения практических задач	Решение тестов, самостоятельных или контрольных работ, выступление с собственными проектами

«На уроках математики могут быть использованы следующие варианты создания проблемных ситуаций через:

– умышленно допущенные учителем ошибки;

– использование занимательных задач;

– решение задач, связанных с жизнью;

– различные способы решения одной задачи;

– выполнение небольших исследовательских заданий» [68].

«Создание проблемных ситуаций через умышленно допущенные учителем ошибки.

По мнению учеников, учитель все знает и никогда не ошибается. Все утверждения, доказательства, объяснения учителя практически никогда не подвергаются сомнениям со стороны учеников. Именно на этом факте основана данная проблемная ситуация.

Пример 7. Тема: «Линейные уравнения» (алгебра 7 класс)

Решить уравнение и выполнить проверку $2(x-6)=-34$.

Прописываю решение уравнения на доске, проговаривая процесс решения на доске:

$$2(x-6)=-34$$

$$2x-6=-34$$

$$2x=-28$$

$$x=-28\div 2$$

$$x=-14.$$

Классу предлагается выполнить проверку. В процессе решения найденное решение не является корнем уравнения. Возникает проблемная ситуация. В процессе исследования выясняется, что корень уравнения найден неверно. Учитель ошибся. Ситуация вызывает удивление. Ученики находят выход из сложившейся проблемной ситуации. Дальнейшая работа на уроке проходит при повышенном внимании и заинтересованности.

Пример 8. Подготовка к ОГЭ по математике в 9 классе.

Вычислите $\frac{121^{-5}\cdot 121^{-6}}{121^{-10}}$

Варианты ответа: 1) 11; 2) $\frac{1}{11}$; 3) 121 4) $\frac{1}{121}$.

Прописываю решение уравнения на доске, проговаривая процесс решения. В процессе решения получаю $121^{30}:121^{-10}=121^{20}$.

При выборе номера правильного ответа выясняется, что такого варианта ответа нет. Поступают предложения, что среди предложенных нет правильного ответа. Затем решают проверить ход решения. Находят ошибку, решают данное задание верно, определяют номер ответа. В результате созданной проблемной ситуации активизируется внимание, мыслительная активность, совершенствуются навыки самоконтроля, взаимопроверки» [68].

«Создание проблемных ситуаций через использование игровых ситуаций и занимательных задач.

Пример 9. Игровая ситуация «Математические предсказания»

Тема: «Формулы сокращенного умножения» (алгебра 7 класс)

Предлагаю ученикам придумать задания на возведение в квадрат разности или суммы двух выражений, произведения суммы и разности двух выражений. Предложенные задания решаются учениками на доске с применением правила умножения многочленов. Учитель выступает в роли предсказателя ответов придуманных заданий: не глядя на доску, предсказывает будущие ответы. Результаты учеников и «предсказания» учителя прописываются на доску. Ответы действительно одинаковые. Ученики удивлены. В результате решения проблемной ситуации, выясняется, что секрет данного математического фокуса кроется в формулах сокращенного умножения» [68].

Пример 10. «Тема «Сумма n-первых членов арифметической прогрессии» (алгебра 9 класс)

Изучение вопроса о сумме n-первых членах арифметической прогрессии в 9-ом классе начинаю с рассказа: «Примерно 200 лет тому назад в одной из школ Германии на уроке математики учитель предложил ученикам найти сумму первых 100 натуральных чисел. Все принялись подряд складывать числа, а один ученик почти сразу же дал правильный ответ».

Имя этого ученика Карл Фридрих Гаусс. Впоследствии он стал великим математиком. Как удалось Гауссу так быстро подсчитать эту сумму?

Проблемная ситуация: как найти быстро сумму первых 100 натуральных чисел?

Решение проблемы $(1 + 100) \cdot 50 = 5050$

Последовательность чисел 1, 2, 3,…,100 является арифметической прогрессией. Теперь выводим формулу суммы n-первых членов арифметической прогрессии.

Главный фактор занимательности – это приобщение учащихся к творческому поиску, активизация их самостоятельной исследовательской деятельности, так как уникальность занимательной задачи служит мотивом к учебной деятельности, развивая и тренируя мышление вообще и творческое, в частности» [66].

«Создание проблемных ситуаций через решение задач, связанных с жизнью.

Пример 11. Тема: «Масштаб» (математика 6 класс)

Ситуационное задание:

«Вычисление количества денежных средств на перевозку учащихся на автобусе».

Задачная формулировка. Три раза в день, шесть раз в неделю учеников отдаленной территории забирает автобус и отвозит в школу. Сколько денежных средств необходимо выделить школе на бензин, чтобы дети не пропускали учебные занятия в школе? Необходимо рассчитать километраж маршрута по карте города. По данным источникам вычислить расходы на бензин.

Источник (содержит информацию, необходимую для успешной деятельности учащегося по выполнению задания):

Карта города.

Примерный расход бензина на километр автобуса (ПАЗ), 31,6 л/100 км.

Стоимость бензина: 28,30 рублей.

Длина пути: 16,1 см на карте.

Масштаб карты: 1 : 700 (1 см = 700 метров).

Измерить:

Длину пути 16, 1 см.

Выразить его в километрах: $16{,}1 \cdot 700 = 11{,}27$ км.

Найти сколько километров в день проходит автобус:$11{,}27 \cdot 6 = 67{,}62$ км.

В неделю: $67{,}62 \cdot 6 = 405{,}72$ км.

В месяц: $405{,}72 \cdot 4 = 1622{,}88$ км.

Количество бензина: $1622{,}88 \cdot 31{,}6/100 = 512{,}83$ литра на месяц.

Стоимость всего бензина: $512{,}83 \cdot 28{,}3 = 14512{,}81$ рублей» [68].

«Создание проблемных ситуаций через различные способы решения одной задачи.

Тема: «Распределительный закон умножения относительно сложения» (математика 5 класс).

На данном уроке учащимся предлагается решить следующие задачи:

Пример 12. В школьном саду посажены фруктовые деревья в 10 рядов. В каждом ряду посажено по 5 груш и по 7 яблонь. Сколько всего деревьев посажено в саду?

Решение.

1 способ. $(7 + 5) \cdot 10 = 120$

2 способ. $7 \cdot 10 + 5 \cdot 10 = 120$

Ответ: 120 деревьев» [68].

Пример 13. «Две автомашины одновременно выехали навстречу друг другу из двух пунктов. Скорость первой автомашины 80 км в час, скорость второй 60 км в час. Через 3 часа автомашины встретились. Какое расстояние между пунктами, из которых выехали автомашины?

Решение.

1 способ. $(80 + 60) \cdot 3 = 420$

2 способ. $80 \cdot 3 + 60 \cdot 3 = 420$

Ответ: 420 км.

В результате такого сравнения учащиеся пришли к следующим выводам:

– 1-й способ решения всех задач одинаков, 2-й – тоже;

– выражения, полученные при решении задач, отличаются друг от друга только числовыми данными;

– выражения, полученные при решении задачи №1 и № 2 1-м и 2-м способами, отличаются друг от друга числом арифметических действий и порядком действий;

– числовые значения выражений, полученные при решении задачи №1 2-мя способами, одинаковы, а, значит, можно сделать такую запись:

$(80 + 60) \cdot 3 = 80 \cdot 3 + 60 \cdot 3;$

$(5 + 3) \cdot 4 = 5 \cdot 4 + 3 \cdot 4.$

Далее предлагается ученикам заменить одинаковые цифры в полученных выражениях одинаковыми буквами. В результате получены три одинаковых выражения, а именно: $(a+b)\cdot c = ac + bc$.

Ученики с помощью учителя формулируют этот закон словесно и на примерах новый закон умножения: распределительный закон умножения относительно сложения. Убеждаются в целесообразности усвоения и запоминания этого закона: он облегчает вычисления» [66].

«Создание проблемных ситуаций через выполнение небольших исследовательских заданий.

Пример 14. Тема «Длина окружности» (математика 5 класс)

Еще древние греки находили длину окружности по формуле $C=\pi d$, d – это диаметр окружности.

Вопрос: а что же такое π?

Работаем в парах, выполняя необходимые измерения.

Опоясать стакан ниткой, распрямить нитку, длина нитки примерно равна длине окружности стакана. Чтобы получить более точный результат, нужно это проделать несколько раз. Занесите данные в следующую таблицу 5.

Таблица 5 – Результаты измерений

№ опыта	Длина окружности	Диаметр	π
1	C_1	d_1	
2	C_2	d_2	
3…	$C_{3...}$	d_3	

Измерьте диаметр стакана линейкой. Данные занесите в таблицу.

Найдите значение π, как неизвестного множителя. Можно пользоваться калькулятором.

Каждой паре занести вычисленное значение π в таблицу.

π – это бесконечная дробь, современные машины могут определить до миллиона знаков после запятой. $\pi \approx 3{,}1415926\ldots$

Для того чтобы легче запомнить цифры надо запомнить считалку: «Надо только постараться и запомнить все как есть: 3, 14, 15, 92 и 6». В дальнейшей работе мы будем использовать значение $\pi \approx 3{,}14$.

Исследование проведено. На уроке кроме исследовательской работы удачно использовалась работа в парах. Сотрудничество и взаимопомощь принесли желаемый результат. Проблема решена» [68].

Так, технология проблемного обучения позволяет учащимся искать альтернативные способы решения проблем, поощряет критическое мышление и помогает им развивать навыки самостоятельного исследования. Данная методология обучения позволяет ученикам самостоятельно формулировать вопросы, искать решения, анализировать результаты и создавать свои собственные математические концепции.

Таким образом, использование проблемного обучения в математике может наилучшим образом соответствовать эвристическому методу обучения, поскольку оно предоставляет студентам возможность активно участвовать в процессе обучения, исследовать математические проблемы и развивать свои навыки самостоятельного решения задач.

Выводы по первой главе:

– эвристический метод обучения является активным подходом, который направлен на развитие самостоятельного, критического мышления, аналитических навыков и творческих способностей учащихся;

– принцип данного метода заключается в стимулировании независимого поиска решений проблем и задач с помощью творческих приемов, основанного на идеях исследовательской деятельности;

– применение эвристических методов в обучении решению алгебраических задач позволяет учащимся не только понимать материал на глубоком уровне, но и вырабатывать ценные навыки решения задач;

– анализ условия задачи, построение модели и проверка найденного решения – это эвристические приемы, которые помогают ученикам самостоятельно решать задачи и развивать творческий потенциал;

– эвристический метод обучения может быть эффективно реализован в рамках проблемно-ориентированного обучения, которое способно стимулировать активную мыслительную деятельность учащихся;

– в отличие от традиционных методов, основанных на передаче готовых знаний и алгоритмов, эвристический метод поддерживает активное включение учащихся в процесс поиска решений, его главными характеристиками являются интерактивное взаимодействие, многовариантность и проблемный характер.

Глава 2 Методические основы эвристического метода обучения решению алгебраических задач в общеобразовательной школе

2.1 Разработка элективного курса «Решение задач с параметрами» для учащихся старших классов с применением эвристического метода обучения в общеобразовательной школе

В методической системе для обучения решению эвристических задач требуется разнообразие форм организации данного вида деятельности, чтобы создать комфортные условия для развития творческого мышления учащихся. «Классический урок, кружки, домашняя работа, практикумы, факультативные занятия, а также олимпиады, конкурсы, интеллектуальные игры и экскурсии – все это может выступать в роли эффективного инструмента для формирования и развития эвристических навыков и умений» [34]. «Каждая форма организации занятий обладает своими преимуществами, отличается по составу участников, времени и месту проведения, а также по характеру деятельности, что дает возможность принимать во внимание индивидуальные особенности учеников. Важно учитывать, что для решения эвристической задачи зачастую необходимо затратить больше времени, чем предоставляется на уроке. Поэтому внеурочные формы занятий играют важную роль в развитии у учащихся навыков решения нестандартных и сложных задач» [61].

В данном параграфе представлен элективный курс на тему «Решение задач с параметрами» по улучшению эвристических навыков учащихся старших классов общеобразовательных учреждений.

Программа элективного курса «Решение задач с параметрами»

Пояснительная записка

«Программа элективного курса «Решение задач с параметрами» разработана для учащихся старших классов, стремящихся углубить знания по математике на профильном уровне и развить аналитические способности. Курс разработан на основе программы основного курса, но предусматривает более сложные задачи, которые требуют от учащихся глубокого понимания материала и применение нестандартных подходов.

Задачи с параметрами занимают важное место, так как являются прекрасным инструментом для формирования и развития логического и алгоритмического мышления. Решение таких задач вызывает потребность не только знать формулы и алгоритмы, но и уметь анализировать, классифицировать и искать нестандартные решения проблем.

Как показывает практика, учащиеся сталкиваются с наибольшими трудностями при выполнении задач с параметрами. Однако в учебной программе этому виду задач уделяется недостаточно времени, поэтому курс создан для их дополнительного изучения. Электив разработан не только для углубления знаний учеников, но и для стимулирования их интереса к предмету, развития любознательности и логического мышления.

Решение задач с параметрами служит не только способом проверить уровень знаний, но и источником развития необходимых математических навыков, которые могут быть применены в различных областях знаний. Элективный курс даст возможность учащимся не просто заучивать формулы, а действительно понять суть материала, овладеть творческим подходом к решению задач и повысить интеллектуальный уровень.

Цели элективного курса:

– повышение математической культуры путем развития аналитических навыков и глубокого понимания математических принципов;

– развитие интереса к математике через увлекательные задачи, нестандартные решения;

– углубление математических знаний по материалу школьной программы;

–подготовка к продолжению образования для успешного обучения в вузе.

Задачи элективного курса:

– расширить знания о задачах с параметрами;

– обучить алгоритмам решения задач с параметрами;

– повысить уровень математической компетенции» [61].

«Программа элективного курса: продолжительность: 17 часов (1 час в неделю); класс: 11 класс (профильная подготовка); формы занятий: коллективные (практикумы, лекции, учебно-исследовательские конференции); групповые (учебный проект); индивидуальные (самостоятельное решение задач).

Большая часть времени уделяется решению практических задач. Учебно-тематическое планирование разработанного элективного курса представлено в таблице 6.

Результат изучения данного курса:

– освоить основные методы решения (учащиеся должны владеть основными приемами решений уравнений с параметрами);

– применять алгоритмы (обучающиеся будут способны выполнять последовательные шаги при решении задач с параметрами);

– проводить полное обоснование (учащиеся смогут обосновать каждый шаг решения и сделать полное, логически построенное решение)» [61].

Подведение итогов:

– итоговая контрольная работа (оценивает приобретенные практические навыки использования изученных методов решения задач с параметрами);

– защита проектов (дает возможность ученикам показать свое глубокое понимание материала, творческих подход и способность применять полученные знания на практике).

Таблица 6 – Учебно-тематическое планирование элективного курса «Решение задач с параметрами»

Тема	Кол-во часов	Виды занятий
1. «В мир задач с параметрами: введение и мотивация	1	Вводное занятие
2. Иррациональные уравнения с параметром: освоение новых горизонтов	3	Лекция, практика
3. Тригонометрические уравнение с параметром: гармония и точность	3	Лекция, практика
4. Производная в действии: решая задачи ЕГЭ	3	Лекция, практика
5. Логарифмические уравнения с параметром: разгадывая тайны логарифмов	3	Лекция, практика
6. Контрольная работа: проверка знаний и навыков	2	Самостоятельное решение задач
7. Защита проектов	2	Учебно-исследовательская конференция» [61]
Итого:	17	

Содержание элективного курса

Тема 1. В мир задач с параметрами: введение и мотивация (1 ч).

Это важная начальная стадия лекционного курса, позволяющая учащимся окунуться в мир задач с параметром и мотивировать их науспешное изучение этой интересной тематики.

Цель: познакомить учащихся с целями, задачами, организацией и требованиями элективного курса «Решение задач с параметрами», а также сформировать мотивацию к изучению данной темы.

Вводная беседа. Знакомство с элективным курсом: краткое описание, цели и задачи. Знакомство с преподавателем, расписание занятий, форматом работы. Рассматривается, что такое параметр в математике, основные типы задач с параметром (нахождение решений при заданных значениях параметра, нахождение значений параметра, при которых уравнение имеет решения, и т.д.), краткий обзор основных методов решения, пояснение особенностей решения задач с параметром по сравнению с традиционными задачами.

Тема 2. Иррациональные уравнения с параметром: освоение новых горизонтов (3 ч).

Шаг к освоению навыков решения иррациональных уравнений с параметром, что поспособствует глубокому пониманию методов решения и применению их на практике даже в нестандартных ситуациях.

Основная цель: помочь учащимся освоить более сложные типы уравнений с параметрами, развивая аналитическое мышление и способность решать задачи с разными типами уравнений.

Разбор и анализ решения разнообразных задач с параметром, включающих в себя иррациональные уравнения, учет особенностей области допустимых значений и правильной интерпретации решения. Самостоятельное решение иррациональных уравнений, содержащих параметр.

Тема 3. Тригонометрические уравнение с параметром: гармония и точность (3 ч).

Значимый шаг, способствующий глубокому пониманию тригонометрии и решению сложнейших задач с параметром. Изучение данного материала развивает аналитические способности, формирует навыки выбора оптимального и рационального метода решения, а также позволяет учащимся уверенно выполнять задачи любой сложности.

Цель занятий: освоить решение тригонометрических уравнений, содержащих параметр, и научить выбирать рациональный способ решения в зависимости от особенностей предложенного задания.

В рамках занятий будет проведено повторение основных формул и тождеств тригонометрии, разобраны и проанализированы задачи, содержащие тригонометрические уравнения с параметром, а также предусмотрено самостоятельное решение с последующим обсуждением и выявлением ошибок.

Тема 4. Производная в действии: решая задачи ЕГЭ (3 ч).

Занятия посвящены углубленному пониманию применения производной в решении задач с параметром и подготовке к ЕГЭ.

Цель: научить обучающихся применять производную и экстремальные свойства функций для решения задач с параметрами, в том числе задач уровня ЕГЭ (часть С), и а также повысить уровень математической подготовки.

Актуализация знаний, анализ типичных задач ЕГЭ с параметром, содержащих производную, и самостоятельное решение упражнений.

Тема 5. Логарифмические уравнения с параметром: разгадывая тайны логарифмов (3 ч).

Завершающая ступень курса, по итогам которой учащиеся освоят уверенное решение логарифмических уравнений, содержащих параметр.

Цель данного этапа: представить учащимся курса различные способы решения логарифмических уравнений с параметром, в том числе нестандартных, глубоко осмысливая применение данных методов.

Повторение основных свойств логарифмов, применение различных методов решения в логарифмических задачах с параметром в процессе решения упражнений, самостоятельная работа с последующим обсуждением результатов и ошибок.

Контрольная работа: проверка знаний и навыков (2 ч.)

Цель: проверить уровень усвоения материала элективного курса «Решение задач с параметрами», закрепить полученные знания и навыки.

Формат: продолжительность –2 часа; структура: 4 задачи, по одной из тем 2-5; тип задач: нестандартные задачи, которые требуют применение изученных методов решения.

Оценивание: шкала: 5-бальная шкала оценивания; критерии: правильность решения (правильность применения методов решения, логичность суждений и точность вычислений); полнота решения (полное решение с учетов всех необходимых пояснений); качество оформления (аккуратность оформления, четкость записи решений).

Защита проектов (2 ч.)

Важный путь формирования творческого мышления, развития коммуникативных навыков и обучения самостоятельной работе.

Цель заключается в том, чтобы представить результаты своего исследования, продемонстрировать осознание проблемы проекта, проиллюстрировать ход поиска решения проблемы, показать найденное решение и осуществить самоанализ его эффективности.

Каждый ученик представляет свой проект в виде презентации.

Методические рекомендации по проведению элективного курса

В мир задач с параметрами: введение и мотивация (1 ч.)

Занятие 1 (вводное)

Цель: познакомить учащихся с целями, задачами, организацией и требованиями элективного курса «Решение задач с параметрами», а также сформировать мотивацию к изучению данной темы.

Что такое параметр. В повседневной жизни мы довольно часто сталкиваемся с параметрами. Например, при выборе товара, будь то телевизор или другая вещь, обращаем внимание на такие характеристики, как производительность, комплектация, размер, цена – все это параметры, помогающие сделать подходящий выбор. Аналогично, в разнообразных жизненных ситуациях мы принимаем решения, делая свой выбор на основании различных параметров.

В математике параметры имеют важное значение при решении уравнений. Если обратить внимание на такие уравнения, как $kx + 1 = 0$, $ax^2 + bx + c = 0$, то можно заметить, что при нахождении корней некоторые переменные считаются заданными и фиксированными. Эти переменные и называют параметрами.

Существуют разные подходы к определению параметра в математике. В простейшем варианте параметром можно назвать «независимую переменную, значение которой в задаче считается заданным фиксированным или произвольным действительным числом» [27]. Это число может принадлежать заранее оговоренному множеству.

Следует понимать, что параметр не зависит от условий задачи. Например, если в уравнении $|x| = a - 1$ левая часть неотрицательна, то это не означает, что выражение $a - 1$ также неотрицательно. Если $a - 1 \leq 0$, то уравнение не будет иметь решений.

Решение задачи с параметром. «Решить задачу с параметром» означает найти решение, которое зависит от значения некоторой переменной, называемой параметром. Это не просто получить одно числовое решение, а определить, как оно будет изменяться в зависимости от значения параметра.

Пример 1. Решить уравнение с параметром a:

$$x + a = 10$$

Решить эту задачу – значит найти решение дляxв зависимости отa. В этом случае решение будет$x = 10 - a$.

При этом возможны следующие варианты условия задачи:

«Решение для всех значений параметра, то есть требуется найти решение для любого возможного значения параметра, как в примере выше.

Решение для определенного множества значений параметра, когда необходимо найти решение только для значений параметра, принадлежащих определенному множеству» [27]. Например, для $a < 0$.

Найти значения параметра, удовлетворяющие некоторому условию. Например, найти a, при котором уравнение имеет два различных корня.

Следует помнить, что запись ответа – это ключевой момент в решении задачи с параметром, так как она позволяет проследить, как меняется решение в зависимости от значения параметра.

«Основные типы задач с параметрами. В математике задачи с параметрами представляют собой уравнения, неравенства или системы уравнений, где решения зависят от значения параметра.

Существует четыре основных типа таких задач:

1 тип: решение для всех значений параметра (задача заключается в решении уравнения (или неравенства, системы) для любого значения параметра, либо для значений, принадлежащих определенному множеству).

2 тип: определение количества решений (необходимо выяснить, сколько решений имеет уравнение (или неравенство, система) в зависимости от значения параметра).

3 тип: поиск значений параметра (требуется найти все значения параметра, при которых уравнение (или неравенство, система) имеет заданное число решений). Эта задача является, по сути, обратной задаче типа 2.

4 тип: удовлетворение условий решения (необходимо определить значения параметра, при которых решения уравнения (или неравенства, системы) удовлетворяют определенным условиям)» [27].

Отметим, что задачи с параметрами встречаются во всех областях школьной математики, но большинство задач на выпускных и вступительных экзаменах относятся к этим четырем основным типам.

Основные способы решения задач с параметром.

«При решении задач с параметром можно использовать различные подходы:

– аналитический (прямое решение); этот способ повторяет стандартные методы решения задач без параметров, он требует глубокого понимания теории и значительных усилий для освоения, но позволяет получить точный ответ;

– графический метод; в зависимости от условия задачи, строятся графики в разных координатных плоскостях (например, (x; y) или (x; a)). Визуальное представление позволяет найти решение задачи;

– решение относительно параметра. В этом методе переменные x и a считаются как равноправные» [95]. Выбирается та переменная, относительно которой решение легче. После упрощений возвращаются к исходному значению переменных x и a, и задача решается [95].

Иррациональные уравнения с параметром: освоение новых горизонтов

Занятия 2-4 (лекция, практикум)

Цель: научить учащихся решать иррациональные уравнения с параметром, углубляя их знания и понимание методов решения, а также развивая способность применять эти навыки на практике при нестандартных условиях.

При решении иррациональных уравнений важно помнить, что возведение обеих частей в квадрат не всегда равносильно исходному уравнению. То есть уравнение $f^2(x) = g^2(x)$, которое получено в результате возведения во вторую степень правой и левой частей уравнения $f(x) = g(x)$, может быть как равносильным, так и неравносильным исходному уравнению $f(x) = g(x)$. Это связано с тем, что квадрат отрицательного числа равен квадрату его положительного аналога. Например, уравнение 5 = -5 неверно, но после возведения в квадрат обеих частей получаем верное равенство 25 = 25. Таким образом, решение, полученное после возведения в квадрат, может быть посторонним корнем.

Чтобы избежать появления посторонних корней, следует возводить в квадрат только уравнения, где обе части имеют одинаковые знаки. Это означает, что перед возведением в квадрат необходимо убедиться, что выполняется требование $g(x) \geq 0$ при решении уравнения $f(x) = g(x)$.

«Самым простым иррациональным уравнением, которое изучают школьники, является уравнение вида: $\sqrt{f(x)} = a$.

Рассмотрим следующие случаи, которые возникнут при решении данного уравнения при различных значениях параметра: если $a < 0$, то уравнение не имеет корней; если $a = 0$, то $f(x) = 0$; если $a > 0$, то $f(x) = a^2$» [9].

Иррациональные уравнения с параметром можно классифицировать на два основных типа: $\sqrt[n]{f(x,a)} = g(x,a)$; $\sqrt[n]{f(x,a)} = \sqrt[m]{g(x,a)}$, где $n, m \in N$.

Большинство иррациональных уравнений сводятся к одному из этих типов или представляют собой их частный случай. Более сложные иррациональные уравнения могут содержать суммы или разности корней, например: $\sqrt[n]{f(x,a)} \pm \sqrt[m]{g(x,a)} = h(x,a)$; $\sqrt[n]{f(x,a)} \pm \sqrt[m]{g(x,a)} = \sqrt[k]{h(x,a)}$, где $n, m, k \epsilon N$.

Важно помнить, что решение таких уравнений может потребовать дополнительных преобразований и проверки полученных корней, чтобы исключить посторонние решения.

Пример 2. Для каждого значения параметра а решить уравнение

$\sqrt{x^2-1} + \sqrt{x^2-2} = a$[18, с. 202-203].

Решение. Для решения уравнения необходимо найти область допустимых значений. Уравнение содержит два корня $\sqrt{x^2-1}$ и $\sqrt{x^2-2}$, подкоренные выражения должны быть неотрицательными, следовательно, составим систему неравенств: $\begin{cases} x^2-1 \geq 0, \\ x^2-2 \geq 0 \end{cases} \begin{cases} |x| \geq 1, \\ |x| \geq \sqrt{2} \end{cases} |x| \geq \sqrt{2}$.

ОДЗ: $|x| \geq \sqrt{2}$.

Для упрощения уравнения введем новые переменные: $\sqrt{x^2-1} = u$; $\sqrt{x^2-2} = v$, тогда система уравнений примет вид: $\begin{cases} u+v=a; \\ u^2-v^2=1; \\ u \geq 0; \\ v \geq 0. \end{cases}$

Отметим, что при $a = 0$ система не имеет решений. Так как $u^2 - v^2 = (u+v)(u-v) = a(u-v) = 1$, то при $a \neq 0$ получаем $(u-v) = \frac{1}{a}$. Учитывая, что $u + v = a$, находим $u = \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right)$, $v = \frac{1}{2}\left(a - \frac{1}{a}\right)$.

«Для выполнения условий $u \geq 0$ и $v \geq 0$, необходимо решить систему неравенств $\begin{cases} a + \frac{1}{a} \geq 0; \\ a - \frac{1}{a} \geq 0. \end{cases}$ Первое неравенство выполняется при $a > 0$, а второе – при $a \epsilon [-1; 0) \cup [1; +\infty)$. Таким образом, оба неравенства выполняются одновременно при $a \geq 1$» [18]. При найденных значениях параметра получаем уравнение, которое можем решить, используя полученные значения u и v.

$x^2 - 1 = u^2 = \frac{1}{4}\left(a + \frac{1}{a}\right)^2$;

$x^2 = \frac{1}{4}\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + 1;$

$x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{1}{4}\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + 1}.$

Ответ: «Если $a \geq 1$, то $x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{1}{4}\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + 1}$; если $a < 1$, то решений нет» [18].

Пример 3. «Для каждого значения параметра a решить уравнение

$x^2 - a = \sqrt{a - x}$ [18].

Решение. Для упрощения задачи введем новую переменную $y = \sqrt{a - x}$, где $y \geq 0$. Подставив это значение в исходное уравнение, получим систему: $\begin{cases} x^2 - y = a, \\ y^2 + x = a \end{cases}$» [18].

Вычтем из первого уравнения системы второе уравнение, чтобы избавиться от параметра a: $x^2 - y - y^2 - x = 0$.

Сгруппируем члены и вынесем общий множитель:

$(x - y)(x + y) - (x + y) = 0;$

$(x + y)(x - y - 1) = 0.$

«Полученное уравнение равносильно совокупности двух уравнений:

$$\left[\begin{aligned} x + y = 0, \\ x - y - 1 = 0. \end{aligned}\right.$$

Совершим обратную замену:

$$\left[\begin{aligned} x = -\sqrt{a - x}, \\ x - 1 = \sqrt{a - x}. \end{aligned}\right.$$

Оба уравнения совокупности имеют вид $f(x) = \sqrt{g(x, a)}$.

Для решения таких уравнений можно применить метод перехода к смешанной системе. Основываясь на этом, решим последовательно уравнения: $x = -\sqrt{a - x}$.

Возведем обе части в квадрат: $\begin{cases} x^2 = a - x, \\ x \leq 0 \end{cases}$

перепишем в стандартный вид $\begin{cases} x^2 + x - a = 0, \\ x \leq 0. \end{cases}$

Найдем корни квадратного уравнения относительно переменной x с помощью формулы» [18]: $D = 1 + 4a$;$\sqrt{D} = \sqrt{1 + 4a}$;

$x_1 = \frac{-1+\sqrt{1+4a}}{2}$; $x_2 = \frac{-1-\sqrt{1+4a}}{2}$ при $a \geq -\frac{1}{4}$ $(D \geq 0)$.

Выполним проверку условий

$x_1 \leq 0$:$\frac{-1+\sqrt{1+4a}}{2} \leq 0$;$-1 + \sqrt{1 + 4a} \leq 0$;$\sqrt{1 + 4a} \leq 1$;$4a \leq 0$;$a \leq 0$,

Следовательно, x_1 является корнем уравнения при $a \epsilon [-\frac{1}{4}; 0]$.

$x_2 \leq 0$: $\frac{-1-\sqrt{1+4a}}{2} \leq 0$;$-1 - \sqrt{1 + 4a} \leq 0$;$\sqrt{1 + 4a} \geq -1$; $4a \geq -2$.

Это условие выполняется для любого $a \geq -\frac{1}{4}$.

По аналогии решим второе уравнение совокупности $x - 1 = \sqrt{a - x}$, возведя обе части в квадрат: $\begin{cases} x^2 - 2x + 1 - a + x = 0; \\ x \geq 1 \end{cases}$

$$\begin{cases} x^2 - x + 1 - a = 0; \\ x \geq 1 \end{cases}$$

$D = 1 - 4 + 4a = 4a - 3$;$\sqrt{D} = \sqrt{4a - 3}$; $x_3 = \frac{-1+\sqrt{4a-3}}{2}$;$x_4 = \frac{-1-\sqrt{4a-3}}{2}$ при $a \geq \frac{3}{4}$ $(D \geq 0)$.

Выполним проверку условия $x \geq 1$ для корня x_3:$\frac{1+\sqrt{4a-3}}{2} \geq 1$;$1 + \sqrt{4a - 3} \geq 2$;$\sqrt{4a - 3} \geq 1$;$4a \geq 4$;$a \geq 1$.

Следовательно, x_3– корень уравнения $x - 1 = \sqrt{a - x}$ при условии $a \geq 1$.

Аналогично выполним проверку условия $x \geq 1$ для x_4: $\frac{1-\sqrt{4a-3}}{2} \geq 1$;

$1 - \sqrt{4a - 3} \geq 2$;$\sqrt{4a - 3} \leq -1$.

Это неравенство не имеет решений, так как корень из положительного числа всегда неотрицательный.

Ответ: «Если $a \le -\frac{1}{4}$, то решений нет; если$-\frac{1}{4} \le a \le 0$, то$x_1 = \frac{-1+\sqrt{1+4a}}{2}$; $x_2 = \frac{-1-\sqrt{1+4a}}{2}$; если $0 < a < 1$, то$x = \frac{-1-\sqrt{1+4a}}{2}$; если $a \ge 1$, то $x_1 = \frac{1+\sqrt{4a-3}}{2}$; $x_2 = \frac{-1-\sqrt{1+4a}}{2}$» [18].

Пример 4. «Найти все значения параметра а, при каждом из которых уравнение $\mathrm{a}(\mathrm{x}+1) = \sqrt{\mathrm{x}}$ имеет хотя бы один корень.

Решение. Графически, задача сводится к нахождению всех значений параметра a, при которых прямая вида $y = a(x+1)$ пересекает график функции $y = \sqrt{x}$ хотя бы в одной точке. Отметим, что параметр a определяет наклон прямой $y = a(x+1)$, так как является ее угловым коэффициентом. При изменении a прямая вращается вокруг точки (-1;0), вследствие того, что для любого a $y(-1) = 0$.

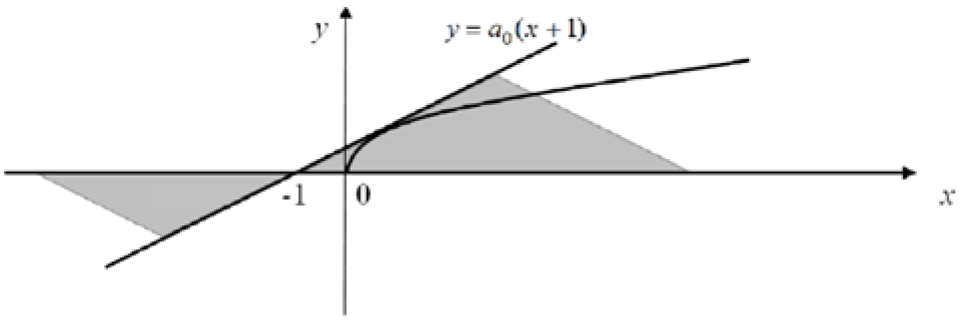

Рисунок 3 – Решение уравнения $\mathrm{a}(\mathrm{x}+1) = \sqrt{\mathrm{x}}$

Анализируя график (рис. 3), видно, что искомые прямые должны лежать внутри двух вертикальных углов, включая сами лучи. Соответствующие значения a лежат в промежутке $[0; a_0]$, где a_0 – значение параметра, при котором прямая $y = a(x+1)$ касается графика функции $y = \sqrt{x}$ (очевидно, что $a_0 > 0$).

Для нахождения a_0 необходимо решить уравнение $\mathrm{a}(\mathrm{x}+1) = \sqrt{\mathrm{x}}$ при условии, что оно имеет один корень. Преобразуя это уравнение, получим квадратное уравнение:

$a_0^2x^2 + (2a_0^2 - 1)x + a_0^2 = 0; D = 1 - 4a_0^2; 1 - 4a_0^2 = 0; a_0 = -0{,}5$ или $a_0 = 0{,}5$.

Из условия, что $a_0 > 0$, искомым значением является $a_0 = 0{,}5$.

Ответ:а $\in [0; 0{,}5]$» [24].

Задания для самостоятельной работы

«Пример 5. Найдите корни уравнения $\sqrt{a-2x} = 1$ с параметром a.

Пример 6. Решите иррациональное уравнение $\sqrt{3x+2} = 2 - a$ при всех значениях параметра a.

Пример 7. Решите иррациональное уравнение $\sqrt{x+a-2} = 2a$ для каждого действительного значения параметра *а*.

Пример 8. При каких значениях параметра *а* уравнение $\sqrt{x-a} = -a$ не имеет решений?

Ответы. Пример 5: если $a \in R$, то $x = \frac{a-1}{2}$. Пример 6: если $a \in (-\infty; 2]$, то $x = \frac{a^2-4a+2}{3}$; если $a \in (2; +\infty)$, то решений нет. Пример 7: если $a \in [0; +\infty)$, то $x = 4a^2 - a + 2$; если $a \in (-\infty; 0)$, то решений нет. Пример 8: $a \in (0; +\infty)$» [18], [24].

Тригонометрические уравнение с параметром: гармония и точность(3ч.)

Занятия 5-7

Цель занятий: освоить решение тригонометрических уравнений, содержащих параметр, и научить выбирать рациональный способ решения в зависимости от особенностей предложенного задания.

Сначала предлагается повторить основные тригонометрические формулы и тождества, а также решение ранее изученных простейших уравнений. Затем решаем несколько «модифицированных» задач, требующих применения ранее изученного материала и аналитического подхода.

$\sin\left(\frac{2}{3}x - \frac{\pi}{3}\right) = 1$ Ответ: $x = \frac{5\pi}{4} + 3\pi k, k \in Z$

$tg(3x) = \sqrt{3}$ Ответ: $x = \frac{\pi}{9} + \frac{\pi}{3}k, k \in Z$.

Устные упражнения.

«При каких значениях a уравнение $2\sin 3x = a$ не имеет корней? Ответ.$a \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$

Решить уравнение: $\cos x = 5a$. Ответ. $x = \pm \arccos 5a + 2\pi n, n \in Z$ при $a \in [-\frac{1}{5}; \frac{1}{5}]$

При каких значениях параметра a уравнение$a \sin x + 8\cos x = 10$ имеет корни? Ответ. $a \in (-\infty; -6) \cup (6; +\infty)$» [41], [42].

Решение задач.

Пример 9. «Найти все решения уравнения: $\sin^4 x + (a-6)\sin^2 x - 4(a-2) = 0$»[19].

Решение. Введем новую переменную $\sin^2 x = t$. Поскольку $-1 \leq \sin x \leq 1$, то $0 \leq t \leq 1$. Подставим t в исходное уравнение и получим

$$t^2 + (a-6)t - 4(a-2) = 0.$$

Решаем квадратное уравнение относительно t: $D = (a-6)^2 + 16(a-2) = (a+2)^2$. Получаем два корня: $t = 2 - a$ или $t = 4$. Второй корень не удовлетворяет условию замены, поэтому отбрасываем его.

Возвращаемся к исходной переменной x: $\sin^2 x = 2 - a$.

Используя формулу понижения степени, получим: $\frac{1-\cos 2x}{2} = 2 - a$, преобразуем к виду $\cos 2x = 2 - 3a$, $x = \pm\frac{1}{2}\arccos(2-3a) + \pi n, n \in Z$;

Для того чтобы $\arccos(2-3a)$ существовал, должно выполняться условие: $-1 \leq 2 - 3a \leq 1$, то есть$-\frac{1}{3} \leq a \leq 1$.

Ответ:$x = \pm\frac{1}{2}\arccos(2-3a) + \pi n, n \in Z$ при $a \in [-\frac{1}{3}; 1]$.

Пример 10. «Для каких значений параметра aуравнение $\sin(x+5a) + 3\cos^2 x = 4$ имеет корни?

Решение. Воспользуемся методом оценки. Так как максимальное значение левой части уравнения не превышает4, а правая часть равна 4, то исходное уравнение равносильно системе» [27]:

$\begin{cases}\sin(\mathrm{x}+5a)=1,\\ \cos^2\mathrm{x}=1;\end{cases}\begin{cases}\sin(\mathrm{x}+5a)=1,\\ \dfrac{1+\cos 2\mathrm{x}}{2}=1;\end{cases}\begin{cases}\sin(\mathrm{x}+5a)=1,\\ \cos 2\mathrm{x}=1;\end{cases}\begin{cases}\sin(\mathrm{x}+5a)=1,\\ x=\pi n, n\epsilon \mathrm{Z};\end{cases}$

Имеем, $\sin(5a+\pi n)=1{,}5a+\pi n=\frac{\pi}{3}+2\pi n, n\in Z, a=\frac{\pi}{10}+\frac{\pi n}{5}, n\in Z.$

Ответ: $a=\frac{\pi}{10}+\frac{\pi n}{5}, n\in Z.$

Пример 11. «Найти значения параметра a, при которых уравнение $\cos 2x+2\cos x+2a^2-2a+1=0$ имеет единственное решение промежутке на $[0;\,2\pi)$?» [19]

Решение. Преобразуем заданное уравнение, используя тригонометрическую формулу двойного аргумента:

$2\cos^2 x-1+2\cos x-2a^2-2a+1=0,$

$\cos^2 x+\cos x-(a^2+a)=0.$

Заметим, что левая часть уравнения представляет собой квадратный трехчлен относительно $\cos x$. «Решим его: $\cos x=a$ при $-1\le a\le 1$ или $\cos x=-a-1$ при $-2\le a\le 0$.

Для того чтобы исходное уравнение имело единственный корень на полуинтервале $[0{:}2\pi)$, необходимо:

$\cos x=-a-1=1$. Это возможно только при $a=-2$. В этом случае единственным решением будет $x=0$. Уравнение $\cos x=a=-2$ не имеет корней.

$\cos x=a=1$. Это возможно только при $a=1$. Следовательно, единственное решение $x=0$. А уравнение $\cos x=-a-1=-2$ не имеет корней.

Ответ: -2; 1» [19].

Задания для самостоятельной работы.

«Пример 12. При каких значениях параметра a имеет корни уравнение $a\sin x-4\cos x=5$? Ответ: $(-\infty;-3]\cup[3;+\infty)$.

Пример 13. При каких значениях параметра a уравнение $2\cos 2x + 2a\sin x + a - 1 = 0$ имеет лишь единственный корень на интервале$\left(\frac{\pi}{2}; 0\right)$? Ответ: $(-\infty; -3] \cup \{-2\} \cup [-1; +\infty)$.

Пример 14. При каких значениях параметра a уравнение $\cos^2 x + 6\sin x = 4a^2 - 2$ имеет корни? Ответ: $\left[-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right]$.

Пример 15. Найти все значения параметра a, при которых уравнение $\sin^4 x + \cos^2 x - a = 0$ не имеет корней. $(-4; 0)$» [19], [27], [41], [42].

Производная в действии: решая задачи ЕГЭ(3 ч.).

Занятия 8-10

Цель: научить обучающихся применять производную и экстремальные свойства функций для решения задач с параметрами, в том числе задач уровня ЕГЭ (часть С), и а также повысить уровень математической подготовки.

Повторение материала.

Пример 16. «Найдите производные следующих функций: $y = x^4 + 3x^2 - 12$, $y = \ln(x - 1)$.

Объясните, что представляет собой геометрический смысл производной функции в точке. Составить уравнение касательной к графику функции$y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0. Опишите алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке $[a;b]$. Какое условие должно выполняться, чтобы функция непрерывно возрастала на всей числовой прямой?» [35].

Решение задач.

Пример 17. «Найдите все значения параметра a,при которых функция $f(x) = ax^3 - 6x^2 + 4x + 7$ имеет одну стационарную точку.

Решение. Функция определена для всех действительных чисел, то есть$D(f) = R$. Стационарными точками функции являются точки, в которых производная равна нулю. Найдем производную и приравняем ее к 0:

$$f'(x) = 3ax^2 - 12x + 4,$$

$$3ax^2 - 12x + 4 = 0.$$

Для того чтобы уравнение имело единственный корень, дискриминант должен быть равен 0. Возможны два случая: при $a \neq 0$: $D_1 = 36 - 12a = 0$, тогда$a = 3$;при $a = 0$: $12x + 4 = 0$,получаем$x = \frac{1}{3}$.

Ответ: при $a = 0, a = 3$» [35].

Пример 18. «Определить значения параметра a, при которых наименьшее значение функции$y = x^3 - 12x + a$ на отрезке $[1; 3]$ равно нулю.

Решение. Функция является непрерывной на отрезке [1;3] и дифференцируемой на интервале (1;3).

Вычислим стационарные точки, для чего найдем производную и приравняем ее к нулю:

$y'(x) = 3x^2 - 12$, $3x^2 - 12 = 0$, $x = -2; 2$. Корень $-2 \notin (1; 3)$.

Определим значения функции на концах отрезка и в стационарной точке: y(1) = $a - 11$; $y(2) = a - 16$; $y(3) = a - 9$; $a - 16$ является наименьшим значением функции, следовательно, $a - 16$ =0, получаем $a = 16$.

Ответ: при $a = 16$» [36, С. 9].

Пример 19. «Найти все значения параметра *a,* при которых касательные к графикам функции $y = x^7$и $y = x^8$в точке $x_0 = a$ не пересекаются» [41].

Решение. Для того чтобы прямые не пересекались, они должны либо совпадать, либо быть параллельными. Это значит, что их угловые коэффициенты равны.

Найдем уравнения касательных к графикам функций $y = x^7$и $y = x^8$ в точке $x_0 = a$:

$y'(x) = 8x^7$, $y'(a) = 8a^7$, $y(a) = a^8$, $y = a^8 + 8a^7(x - a)$, $y = 8a^7x - 7a^8$;

$y'(x) = 7x^6$, $y'(a) = 7a^6$, $y(a) = a^7$, $y = a^7 + 7a^6(x - a)$, $y = 7a^6x - 6a^7$.

Приравниваем угловые коэффициенты: $8a^7 = 7a^6$, разложим на множители $a^6(8a - 7) = 0$, $a = 0$ или $a = \frac{7}{8}$.

Ответ: при $a = 0$; $\frac{7}{8}$.

Задания для самостоятельной работы

«Пример 20. Найдите значения параметра a, при которых функция имеет одну стационарную точку: $f(x) = ax^3 - 6x^2 + 4x + 7$, $f(x) = ax^3 + 6x^2 - 2x + 7$?

Ответ: $a = 0$, a=3. a=0; a=6.

Пример 21. Найдите значения параметра a, при которых касательная к графику функции $y = ax^2 + 5x + 4$ в точке $x_о$=1 образует с осью абсцисс угол 135°?

Ответ: a=3.

Пример 22. Найдите значения параметра a, при которых функция $y = ax^3 + 3ax^2 + 6x + 7$возрастает на всей числовой прямой.

Ответ: [0;2).

Пример 23. При каких положительных значениях параметра a функция $y = ax^2 - \ln x$ убывает на интервале (0;5)?

Ответ: (0;1/50]» [35], [36], [41].

5. Логарифмические уравнения с параметром: разгадывая тайны логарифмов (3 ч.)

Занятия 11-13

Цель данного этапа: представить учащимся курса различные способы решения логарифмических уравнений с параметром, в том числе нестандартных, глубоко осмысливая применение данных методов.

Актуализация знаний учащихся: повторение основных свойств логарифмов и логарифмической функции. Обратить внимание на область допустимых значений в логарифмических уравнениях и условия существования решений.

Решение задач.

Пример 24. Решить уравнение $\frac{\lg(ax)}{\lg(x+1)} = 2$ в зависимости от значений параметра a [24].

Решение. Для того чтобы логарифмы были определены, необходимо выполнение следующих условий:

$$\begin{cases} ax > 0 \\ x+1 > 0. \\ x+1 \neq 1 \end{cases}$$

Применяя свойства логарифмов, преобразуем исходное уравнение:

$\lg(ax) = 2\lg(x+1)$,$\lg(ax) = \lg(x+1)^2$,$ax = (x+1)^2$.

Объединяя ОДЗ и преобразования, получим:

$$\begin{cases} ax > 0 \\ x+1 > 0 \\ x+1 \neq 1 \\ ax = (x+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 > 0 \\ x \neq 0 \\ x^2 + x(2-a) + 1 = 0 \end{cases}.$$

$x^2 + x(2-a) + 1 = 0.$

$D = a^2 - 4a$, $x_{1;2} = \frac{a-2\pm\sqrt{a^2-4a}}{2}$.

$$\begin{cases} x > -1 \\ x \neq 0 \\ a = \frac{(x+1)^2}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x \neq 0 \\ a = x + \frac{1}{x} + 2 \end{cases}.$$

Покажем на рисунке 4 решение данной системы.

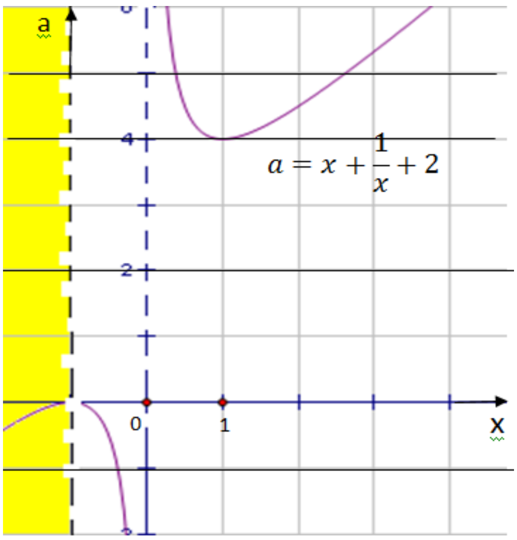

Рисунок 4 – Решение уравнения $\frac{\lg(ax)}{\lg(x+1)} = 2$

Ответ: при$a < 0$ $x = \frac{a-2+\sqrt{a^2-4a}}{2}$, при $0 \leq a < 4$ $\emptyset$, при $a = 4$ $x = 1$, при$a > 4$ $x = \frac{a-2\pm\sqrt{a^2-4a}}{2}$.

Пример 25. «Определите все значения параметра a, при которых хотя бы при одном значении x сумма логарифмов $\log_a(\sin x + 2)$и $\log_a(\sin x + 3)$ будет равна 1»[42]?

Решение. «Уравнение $\log_a(\sin x + 2) + \log_a(\sin x + 3) = 1$ должно иметь хотя бы один корень» [42]. Так как $\sin x$ ограничен отрезком [-1; 1], то условия $\sin x + 2 > 0$ и $\sin x + 3 > 0$выполняются для всех действительных значений x.

Найдем ОДЗ: $\begin{cases} a > 0 \\ a \neq 1 \\ a \in R \end{cases}$

$\log_a(\sin x + 2)(\sin x + 3) = \log_a a$, $(\sin x + 2)(\sin x + 3) = a$,

$\sin^2 x + 5\sin x + 6 - a = 0$.

Пусть $\sin x = t, t \in [-1; 1]$.

Уравнение преобразуется к виду $t^2 + 5t + 6 - a = 0$,

$D = 1 + 4a$. При этом $1 + 4a > 0$ при всех $a \in ОДЗ$.

«Функция $f(t) = t^2 + 5t + 6 - a$ представляет собой параболы, ветви которых направлены вверх и пересекающих ось абсцисс в двух точках. Вершина парабол имеет абсциссу$t_0 = -2{,}5$» [42] (рис. 5).

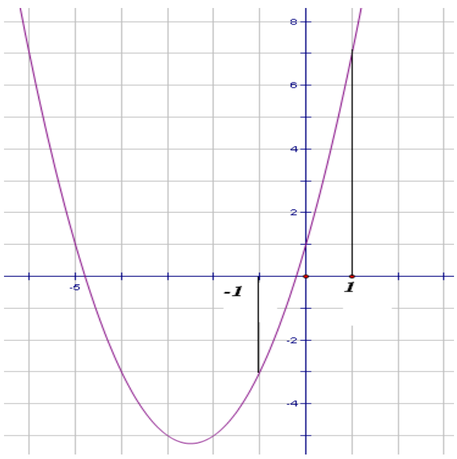

Рисунок 5 – График функции $f(t) = t^2 + 5t + 6 - a$.

«По графику видно, что только больший корень квадратного трехчлена принадлежит отрезку $t \in [-1;1]$.Это условие можно выразить через значения функции $f(t)$ на концах интервала:

$$\begin{cases} f(-1) \le 0 \\ f(1) \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-5+6-a \le 0 \\ 1+5+6-a \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \ge 0 \\ a \le 12 \end{cases} \Leftrightarrow a \in [2;12]$$

Ответ:$a \in [2;12]$» [42].

Пример 26. «Найти все значения параметра a, при которых корни уравнения

$(a-1)log_3^2(x-2)$ +2$(a+1)\log_3(x-2)+a-3=0$ меньше 3» [55].

Решение. Для того чтобы логарифмы были определены, необходимо найти ОДЗ: $x-2>0$, то есть $x>2$.

По условию задачи все корни уравнения должны быть меньше 3, то есть$x<3$. Объединяя два этих условия, получим $2<x<3$, а, следовательно, $0<x-2<1$. Значит, $\log_3(x-2)<0$.

Если обозначить $y=\log_3(x-2)$, то исходное уравнение можно представить в виде равносильной системы

$$\begin{cases} (a-1)y^2+2(a+1)y+a-3=0 \\ y<0 \end{cases}.$$

Если $a=1$, то уравнение приобретает вид $4y-2=0$, и т. о. $y=\frac{1}{2}$. Однако, данное значение y не удовлетворяет условию $y<0$.

Если$a \ne 1$, то рассмотрим квадратный трехчлен $f(y)=(a-1)y^2+2(a+1)y+a-3$. Его корни будут меньше 0, если выполнятся следующее условия:

$$\begin{cases} D \ge 0 \\ y_b < 0 \\ (a-1)f(0) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \ge \frac{1}{3} \\ \frac{a+1}{a-1} > 0 \\ (a-1)(a-3) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow a > 3$$

Ответ:$a>3$.

Пример 27. «Найти значения параметра a, при которых сумма квадратов корней уравнения

$2\log_4(2x^2-x+2a-4a^2)+\log_{0,5}(x^2+ax-2a^2)=0$ больше 1» [59].

Решение. Используя свойства логарифмов, преобразуем уравнение к виду:

$\log_2(2x^2 - x + 2a - 4a^2) = \log_2(x^2 + ax - 2a^2)$.

$$\begin{cases} 2x^2 - x + 2a - 4a^2 = x^2 + ax - 2a^2 \\ x^2 + ax - 2a^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - (1+a)x + 2a(1-a) = 0 \\ (x+2a)(x-a) > 0 \end{cases}$$

$x^2 - (1+a)x + 2a(1-a) = 0$.

$x_1 = 1 - a, x_2 = 2a$.

$x_1 = 1 - a$,

$(1 - a + 2a)(1 - a - a) > 0, (1 + a)(1 - 2a) > 0, a \in (-1; \frac{1}{2})$

$x_2 = 2a$,

$(2a + 2a)(2a - a) > 0, 4a \cdot a > 0, a \in (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$.

Чтобы уравнение имело два корня, необходимо, чтобы $a \in (-1; 0) \cup (0; \frac{1}{2})$ (*)

Условие суммы квадратов корней:

$x_1^2 + x_2^2 > 1, \quad x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (1 + a)^2 - 2 \cdot 2a \cdot (1 - a)$=$5a^2 - 2a + 1$.

$5a^2 - 2a + 1 > 1,\ 5a^2 - 2a > 0, a \in (-\infty; 0) \cup (\frac{2}{5};\ \infty)$.*(**)*

Найдя пересечение множества * и **, запишем результат:

$a \in (-1; 0) \cup (\frac{2}{5}; \frac{1}{2})$.

Ответ: $a \in (-1; 0) \cup (\frac{2}{5}; \frac{1}{2})$.

Задания для самостоятельной работы

Пример 28. «Найти значения параметра a, при которых выражения $(a + 1)\lg(2a + 3)$ и $a + 1$ принимают одинаковые значения?

Ответ: при $a = -1; 3{,}5$.

Пример 29. Найти значения параметра a, при которых уравнение $\log_{2x+1}(3x^2 - ax - 0{,}25a) = 2$ имеет ровно два различных корня?

Ответ: при а $\in (-\infty; -4)$.

Пример 30. Решить уравнение $\log_3(x - 5) = \log_9(x^2 + 3x - a)$ для каждого значения параметра a.

Ответ: если $a \leq 40$, то корней нет; если $a > 40$, то $x = \frac{a+25}{13}$» [42], [59], [55].

Контрольная работа: проверка знаний и навыков (2 ч.)

Занятия 14-15

Рекомендации:

– перед контрольной работой рекомендуется повторить все темы курса, обратить внимание на методы решения задач и особенности каждой темы;

– проанализировать ошибки, допущенные в решении задач во время изучения курса, и обратить внимание на их исправление.

Пример 31. «Решите уравнение $\sqrt{x+8} = a$» [69].

Решение. Чтобы избавиться от корня, возведем обе части уравнения в квадрат, при этом запишем условие не отрицательности. Получим эквивалентную систему:

$$\sqrt{x+8} = a \iff \begin{cases} x+8 = a^2, \\ a \geq 0. \end{cases} \begin{cases} x = a^2 - 8 \\ a \geq 0. \end{cases}$$

Ответ: при $a < 0$, уравнение не имеет решений; при $a \geq 0$, решение имеет вид: $x = a^2 - 8$.

Пример 32. «Решите относительно переменной x уравнение:

$\cos 2x - a\cos x + a^2 + 1 = 0$» [19].

Решение. Преобразуем исходное уравнение:

$2\cos^2 x - 1 - a\cos x + a^2 + 1 = 0,$

$2\cos^2 x - a\cos x + a^2 = 0.$

Рассмотрим полученное уравнение как квадратное относительно $\cos x$. Введем новую переменную $t = \cos x$.

Рассмотрим вспомогательное уравнение.

$2t^2 - at + a^2 = 0.$

Его дискриминант: $D = a^2 - 8a^2 = -7a^2 \leq 0.$

Видно, что это уравнение имеет решение только при a=0. При остальных значениях параметра уравнение решений не имеет.

Проверим, дает ли полученное решение вспомогательного уравнения решение исходного уравнения.

Если a = 0,то $t = \cos x = 0$. Отсюда $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$.

Ответ: при a = 0 $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$, при $a \neq 0$ решений нет.

Пример 33. «Определите значения параметра a, при которых функция $y = (a^2 - 1)\frac{x^3}{3} + (a - 1)x^2 + 2x + 1$ возрастает на всей числовой прямой.

Решение. Функция определена для всех действительных значений x, то есть $D(y) = R$.

Для того чтобы функция возрастала на всей числовой прямой, ее производная должна быть положительной для всех действительных значенийx.

Определим производную функции: $y'(x) = (a^2 - 1)x^2 + 2(a - 1)x + 2$ и решим неравенство $(a^2 - 1)x^2 + 2(a - 1)x + 2 > 0$.

Неравенство$y'(x) > 0$ будет верным для всех $x \in R$ при следующих условиях: если $a^2 - 1 > 0$; дискриминант уравнения $(a^2 - 1)x^2 + 2(a - 1)x + 2 = 0$ меньше нуля, чтобы у уравнения не было корней.

Найдем дискриминант: $D = (a - 1)^2 - 2(a^2 - 1) = -a^2 - 2a + 3$, $-a^2 - 2a + 3 < 0$, следовательно, $a^2 + 2a - 3 > 0$.

Объединяя решение двух неравенств, получаем: $a \in (-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$.

Отдельно рассмотрим случай, когда $a^2 - 1 = 0$, то есть $a = -1$ или $a = 1$.

При $a = -1$ неравенство $y'(x) > 0$ превращается в $-4x + 2 > 0$, что выполняется только для $x < \frac{1}{2}$. Но данное решение не удовлетворяет условию задачи.

При $a = 1$ неравенство $y'(x) > 0$ преобразуется в $2 > 0$, что верно для всех $x \in R$.

Ответ:$(-\infty; -3) \cup [1; +\infty)$» [96].

Пример 34. «При каких значениях параметраaуравнение $\log_{1+x}(3 + 4x - a) = 2$ имеет хотя бы один корень, принадлежащий промежутку (-1;2)» [14]?

Решение. Учитывая ОДЗ и применяя свойства логарифмов, запишем эквивалентную систему:

$$\log_{1+x}(3 + 4x - a) = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + x > 0 \\ 1 + x \neq 1 \\ 3 + 4x - a = (1 + x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x \neq 0 \\ a = -x^2 + 2x + 2 \end{cases}.$$

Построим график полученной функции в координатах (x; a) и наложим ограничения (рис. 6).

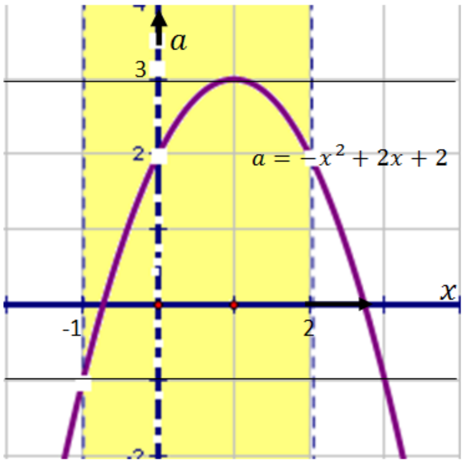

Рисунок 6 – График функции $a = -x^2 + 2x + 2$.

Уравнение будет иметь хотя бы один корень при $a \in (-1; 2) \cup (2; 3]$.

Ответ: $a \in (-1; 2) \cup (2; 3]$.

Критерии оценивания письменной контрольной работы

«Оценка «отлично»:

– работа выполнена полностью и без ошибок;

– логические рассуждения и обоснования четкие и правильные;

– допускается одна неточность или описка, не являющаяся следствием пробелов в знаниях.

Оценка «хорошо»:

– работа выполнена полностью, однако обоснования некоторых шагов решения недостаточны;

– сделана одна ошибка или имеется 2-3 недочета в чертежах, рисунках или записях.

Оценка «удовлетворительно»:

– имеется более одной ошибки или боле 2-3 недочетов в чертежах или записях, при этом учащийся демонстрирует базовое понимание проверяемой темы.

Оценка «неудовлетворительно»:

– имеются существенные ошибки, свидетельствующие о недостаточном уровне владения материалом по проверяемой теме;

–учащийся не демонстрирует обязательные умения по данной теме» [69].

Защита проектов

Занятия 16-17

Для выполнения индивидуальных и групповых проектов можно предложить учащимся следующие темы исследовательских работ:

«Решение уравнений с параметром, содержащих модуль:

- анализ различных типов уравнений с модулем и параметром;
- разработка алгоритма решения уравнений с модулем и параметром;
- примеры решения уравнений с модулем и параметром с различными типами решений» [36].

«Свойства функций в задачах с параметром:

- исследование влияния параметра на свойства функции (монотонность, экстремумы, асимптоты);
- построение графиков функций с параметром;

– решение задач оптимизации с использованием свойств функций с параметром» [59].

«Рациональные задачи с параметром:

– анализ различных типов задач с параметрами;

– разработка алгоритма решения задач с параметрами;

– примеры решения задач с параметрами с различными типами решений» [59].

Критерии оценивания:

–качество исследования (применение оптимальных методов решения, логичность, правильность);

–качество презентации (ясность изложения, визуальное оформление, ответы на вопросы).

2.2 Методические материалы применения эвристического метода при решении алгебраических задач по теме «Прогрессии»

Тема «Прогрессии» занимает важное место в курсе алгебры основной школы. Изучение арифметической и геометрической прогрессий формирует у учащихся важные математические понятия, развивает логическое мышление и способствует развитию умения моделировать реальные ситуации с помощью математических инструментов. Прогрессии широко применяются в различных областях знаний – от физики и экономики до информатики и биологии, что делает их изучение особенно актуальным.

В тоже время в современных условиях перед образованием ставится задача формирования критического мышления, способности к самостоятельному поиску информации и решению нестандартных задач. Технология проблемного обучения является эффективным методом активизации познавательной деятельности учащихся. Она позволяет поставить перед учащимися проблемную ситуацию, заставить их самостоятельно искать пути ее решения, развивать критическое мышление и творческие способности.

Цель: спроектировать изучение темы «Прогрессии» с использованием технологии проблемного обучения.

Основные задачи:

- выполнить методический анализ теоретического и практического содержания выбранной темы;
- обосновать выбор профиля для реализации темы проекта;
- обосновать выбор основного учебника для выбранного профиля;
- выполнить анализ практического опыта учителей по теме проекта;
- выделить основные цели и задачи изучения темы «Прогрессии»;
- дать характеристику уровня требований к знаниям, умениям и навыкам обучающихся по данной теме;
- обосновать целесообразность использования технологии проблемного обучения для реализации обучения темы «Прогрессии» на практике;
- разработать конспекты уроков по теме «Прогрессии».

Практическая значимость: представленная методическая разработка может быть использована учителями математики на практике в 9 классах общеобразовательной школы.

Методический анализ темы.

Базовые знания:

- понятие арифметической прогрессии;
- формула n-ого члена арифметической прогрессии;
- формула суммы членов конечной арифметической прогрессии;
- характеристическое свойство арифметической прогрессии;
- понятие геометрической прогрессии;
- формула n-ого члена геометрической прогрессии;
- формула суммы членов конечной геометрической прогрессии;
- характеристическое свойство геометрической прогрессии.

Рассматриваемые сведения:

– задачи на нахождение члена последовательности;

– задачи на составление формулы n-ого члена последовательности по условию;

– задачи на нахождение суммы n первых членов прогрессии;

– задачи на нахождение количества членов последовательности;

– задачи на нахождение разности (знаменателя) арифметической (геометрической прогрессии).

Теоретический материал.

Были проанализированы учебники для 9-х классов авторов Ш.А. Алимов и др. [7], Г.В. Дорофеев и др. [6], А.Г. Мордкович [9] и Макарычев Ю.Н. [4].

Учебник Алимова и соавторов [7] рассматривает тему «Прогрессии» (глава IV), начиная с определения числовой последовательности (§17), затем вводя понятие арифметической прогрессии и её разности, формулу n-го члена с примерами и задачей на рекуррентное задание (§18). В §19 доказывается формула суммы первых n членов арифметической прогрессии, иллюстрируемая примерами, включая нахождение суммы первых ста натуральных чисел.

В главе IV учебника, после изучения арифметической прогрессии, рассматривается геометрическая прогрессия. В §20 дается определение геометрической прогрессии и её знаменателя, а также формулируется её характеристическое свойство (постоянство частного соседних членов). Затем выводится формула n-го члена с примерами. §21 посвящен выводу и применению формулы суммы первых n членов. Наконец, §22 рассматривает бесконечно убывающую геометрическую прогрессию, выводит формулу её суммы и приводит примеры. Главу завершают упражнения для закрепления материала.

Учебник Дорофеева и соавторов [6] (глава 4) начинает изучение прогрессий с понятия числовой последовательности (4.1), затем переходит к арифметической прогрессии (4.2), выводя формулу n-го члена и демонстрируя её линейную зависимость от номера. Формула суммы первых n членов выводится методом Гаусса (4.3), а практические применения рассматриваются в пункте 4.6. Глава включает также сумму квадратов первых n натуральных чисел (4.7) и треугольник Паскаля (4.8). В каждом пункте есть упражнения двух уровней сложности (А и В), а в конце главы – дополнительные задания.

Геометрическая прогрессия изучается в пункте 4.4, включая определение, знаменатель и характеристическое свойство (постоянство частного соседних членов), формулу n-го члена с примерами. Формула суммы первых n членов и её применение рассматриваются в пункте 4.5. Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия не рассматривается. Главу завершают упражнения для закрепления.

В учебнике Мордковича [9] (глава 4) тема прогрессий начинается с арифметической прогрессии (§16), где вводятся основные понятия, выводится формула n-го члена, доказывается формула суммы первых n членов, и формулируется её характеристическое свойство. Геометрическая прогрессия рассматривается в §17, включая определение и знаменатель (§17.1), вывод формулы n-го члена методом математической индукции (§17.2), доказательство формулы суммы первых n членов с примерами (§17.3), и характеристическое свойство (§17.4). В конце главы приводится сводка основных результатов, а в соответствующем задачнике [8] – упражнения различной сложности. Учебник Мордковича включает рассмотрение бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

Учебник Макарычева и соавторов [4] (глава 4, «Последовательности») вводит понятие числовой последовательности и способы её задания (§10), затем определяет арифметическую прогрессию и её разность (§11), выводя формулу n-го члена, доказывая характеристическое свойство и представляя две формулы суммы первых n членов. Геометрическая прогрессия (§12) определяется вместе со знаменателем и характеристическим свойством (постоянство частного соседних членов), с выводом формулы n-го члена, примерами и формулой суммы первых n членов с примерами её применения. В учебнике Макарычева понятие бесконечно убывающей геометрической прогрессии не рассматривается. В конце параграфа представлены упражнения для закрепления материала.

Анализ учебников алгебры [4], [6]-[9] подтверждает важность темы «Прогрессии» в школьном курсе математики. Наиболее полное её изложение представлено в учебнике Мордковича [9] для профильных классов. Изучение прогрессий ограничено 9 классом, при этом учебники предлагают обширный и разнообразный набор задач различной сложности.

Выбор математического профиля для реализации темы «Прогрессии» обусловлен следующими факторами:

– глубина изучения и расширение понятий: математический профиль позволяет углубиться в теорию арифметических и геометрических прогрессий, изучить их свойства, формулы суммы n членов, рекуррентные формулы, применение в решении задач повышенной сложности, включая задачи с параметрами. Базовый уровень ограничивается более поверхностным изучением и простыми задачами;

– развитие математического мышления: математический профиль ориентирован на развитие абстрактного и логического мышления, умение анализировать, обобщать и применять математические знания в нестандартных ситуациях. Решение более сложных задач на прогрессии способствует развитию этих качеств;

– подготовка к ЕГЭ: математический профиль обеспечивает качественную подготовку к ЕГЭ по математике профильного уровня, где задачи на прогрессии часто встречаются в части 2 (задачи повышенной сложности);

– связь с другими предметами: понимание прогрессий необходимо для успешного изучения физики (например, при изучении равноускоренного движения), информатики (алгоритмы, рекурсия) и экономики (финансовые расчеты);

– развитие исследовательских навыков: математический профиль предоставляет возможности для проведения математических исследований, связанных с прогрессиями. Например, ученики могут исследовать различные виды прогрессий, находить новые свойства, разрабатывать алгоритмы для решения сложных задач.

Таким образом, изучение прогрессий на математическом профиле обеспечивает более полное и глубокое понимание темы, развивает важные математические навыки, подготавливает к успешной сдаче ЕГЭ и укрепляет связь математики с другими науками.

Выбор учебника для математического профиля является ключевым этапом в планировании учебного процесса. Он определяет уровень глубины изучения темы, методы представления материала, а также способствует формированию у учащихся необходимых компетенций.

При реализации методических материалов по теме «Прогрессии» рекомендуется использовать учебник «Алгебра и начала математического анализа. 9 класс» под редакцией А.Г. Мордковича [9].

Выбор данного учебника обусловлен следующими факторами:

– учебник входит в федеральный перечень учебников, рекомендованных Министерством Просвещения Российской Федерации к использованию в образовательном процессе;

– учебник написан в соответствии с ФГОС ООО [48];

– учебник предлагает более глубокое и детальное изложение темы «Прогрессии», включая разнообразные типы задач, методы решения и теоретические понятия. Он позволяет углублять знания учащихся и подготавливать их к решению нестандартных задач, что соответствует требованиям математического профиля;

– учебник содержит богатое разнообразие задач, отражающих различные аспекты изучаемой темы. Это позволяет учащимся закрепить теоретические знания на практике и развивать навыки решения задач различной сложности;

–структура учебника продумана и логична, что облегчает поиск необходимой информации и улучшает понимание материала.

Таким образом, выбор учебника «Алгебра и начала математического анализа. 9 класс» под редакцией А.Г. Мордковича [9] является оптимальным решением для реализации методических материалов по теме «Прогрессии». Он обеспечивает необходимый уровень глубины изучения темы, предлагает богатое разнообразие задач и дополнительных материалов, а также отличается современным дизайном и удобной структурой.

Был проведен анализ практического опыта учителей по теме «Прогрессии», представленный в статьях и учебно-методической литературе.

Работа В.В. Вавилова и Р.Л. Ткачук «Две прогрессии» [17] посвящена исследованию свойств арифметических и геометрических прогрессий, а также их взаимозависимости, с добавлением исторического экскурса. Авторы иллюстрируют свой анализ примерами задач на арифметическую прогрессию, среди которых встречаются как старинные задачи, так и задачи из конкурсного сборника для абитуриентов МГУ.

В статье Я.Н. Суконник «Арифметико-геометрическая прогрессия» [84] представлен исчерпывающий анализ этого типа прогрессии, включающий описание свойств, вывод формулы общего члена и характеристического признака. Работа содержит решенные примеры, упражнения с решениями и задания для самостоятельного выполнения.

В книге Л.Ф. Пичурина «За страницами учебника алгебры» [62] предложены дополнительные учебные материалы по арифметическим и геометрическим прогрессиям. Помимо определений и формул, она содержит широкий спектр задач, расширяющих базовые теоретические знания.

Семнадцатичасовой элективный курс С.Н. Бородиной и Л.А. Лопатиной «Эти известные-неизвестные прогрессии» [14], разработанный для девятиклассников, представляет собой углубленное изучение темы прогрессий. Включая повторение базовых понятий, курс фокусируется на решении сложных, олимпиадных и геометрических задач, способствуя развитию исследовательских навыков и подготовке к ЕГЭ.

Девятиклассники могут углубить свои знания о прогрессиях, пройдя 19-часовой элективный курс О.П. Беспаловой, И.Ю. Мартынюк и Т.А. Чугуновой «Прогрессия» [13]. Этот курс систематизирует и обобщает знания, делая акцент на практическом применении прогрессий в решении задач, в том числе прикладных, из разных областей науки (биология, физика, астрономия). Программа способствует развитию творческого и исследовательского мышления, способностей к анализу и обобщению, а также помогает подготовиться к ОГЭ и ЕГЭ.

Таким образом, анализ темы в учебно-методической литературе и научных публикациях [13], [14], [17], [62], [84] показывает интерес к теме «Прогрессии».

Согласно Примерной основной образовательной программы основного общего образования [71] изучение темы «Прогрессии» на профильном уровне преследует следующие цели:

«– формирование у учащихся представлений о числовых последовательностях, арифметических и геометрических прогрессиях как важнейших математических моделях.

– развитие навыков работы с числовыми последовательностями, вычисления членов прогрессий и сумм их конечных участков.

– развитие умений и навыков применения формул, свойств и признаков прогрессий для решения математических задач.

– развитие логического мышления, умения анализировать, обобщать и применять полученные знания в нестандартных ситуациях.

– формирование у учащихся понимания прикладного значения прогрессий в различных областях знаний и практических ситуациях (экономике, финансах, физике и т.д.)» [71].

Основные задачи:

«– изучение основных понятий: арифметическая прогрессия, геометрическая прогрессия, формулы n-го члена и суммы n первых членов прогрессий.

– освоение формул для вычисления членов и сумм конечных участков арифметической и геометрической прогрессий.

– развитие умений применять полученные знания и навыки при решении задач разного уровня сложности.

– решение задач на нахождение членов прогрессий, их характеристик, а также задач на вычисление сумм прогрессий.

– применение знаний о прогрессиях в решении задач прикладного характера (например, задача о накоплении денег с процентами, задача о росте популяции и т.д.)» [71].

– развитие умения устанавливать связь между понятиями арифметической и геометрической прогрессии и их свойствами.

– развитие навыков работы с учебником, умения находить и использовать дополнительную информацию по изучаемой теме.

– выработка умения проводить самооценку своей работы.

– формирование положительного отношения к математике.

Изучение темы «Прогрессии» согласно Примерной основной образовательной программы основного общего образования [71] предполагает достаточно высокий уровень требований к знаниям, умениям и навыкам учащихся.

Знания:

– теоретические основы прогрессий: учащиеся должны знать определения арифметической и геометрической прогрессий, формулы n-го члена и суммы первых n членов прогрессии.

– свойства прогрессий: учащиеся должны знать основные свойства арифметической и геометрической прогрессий, такие как разность арифметической прогрессии, знаменатель геометрической прогрессии и т.д.

– связь между прогрессиями и другими разделами алгебры: учащиеся должны понимать связь между прогрессиями и другими разделами алгебры, такими как уравнения, неравенства, функции [71].

Умения**:**

– решать стандартные задачи по теме «Прогрессии»: учащиеся должны уметь решать задачи на нахождение n-го члена, суммы первых n членов прогрессии, нахождение неизвестных членов прогрессии, и т.д.

– анализировать условия задач: учащиеся должны уметь выделять главное в условии задачи, определять неизвестные величины и формулировать гипотезы о возможных путях решения.

– применять различные методы решения задач.

– оценивать результаты решения: учащиеся должны уметь проверять результаты решения задачи, оценивать их правильность и обосновывать свой ответ [71].

Навыки:

– работа с информацией: учащиеся должны уметь самостоятельно искать и анализировать информацию по теме «Прогрессии» из учебников, интернета и других источников.

– работа в группе: учащиеся должны уметь работать в группе, обмениваться идеями, обсуждать решения и совместно приходить к общему решению.

– самостоятельное решение задач: учащиеся должны быть способны решать проблемные задачи самостоятельно, используя свои знания, умения и навыки [71].

Использование технологии проблемного обучения при изучении темы «Прогрессии» в математическом профиле является целесообразным и эффективным подходом по следующим причинам. Во-первых, данная технология соответствует современным требованиям образования, которое ставит во главу угла формирование у учащихся критического мышления, способности к анализу информации, генерации идей и принятию решений

[43], [49]. Проблемное обучение как раз и направлено на развитие этих важных компетенций. В современном мире важно не только знать информацию, но и уметь ее применять в практике. Проблемное обучение стимулирует учащихся к самостоятельному поиску решений, развивает их творческие способности и готовность к решению нестандартных задач [40].

Во-вторых, технология проблемного обучения способствует повышению эффективности обучения. Проблемное обучение делает учебный процесс более интересным и активным за счет использования реальных жизненных ситуаций, практических задач и творческих подходов [16]. Это повышает мотивацию учащихся к изучению математики и способствует более глубокому усвоению знаний. Также проблемное обучение ориентировано на решение практических задач, что позволяет учащимся применить полученные знания в реальных условиях и развивать важные практические навыки [58].

В-третьих, проблемное обучение соответствует специфике математического профиля. Проблемное обучение позволяет углублять знания учащихся по теме «Прогрессии», развивать их математические способности и подготавливать к решению задач различной сложности. Учащиеся математического профиля часто выбирают профессии, требующие развития аналитического мышления, способности к решению сложных задач и умения работать с информацией. Проблемное обучение помогает им развить эти важные компетенции, необходимые для успешной профессиональной деятельности [10], [50].

Таким образом, использование технологии проблемного обучения при изучении темы «Прогрессии» является целесообразным решением, которое позволяет повысить эффективность обучения, развить творческие способности учащихся и подготовить их к успешной профессиональной деятельности.

Согласно примерному планированию по учебнику А.Г. Мордковича [9] на тему «Прогрессии» отводится 16 часов.В качестве примера представим следующие конспекты урока по теме «Прогрессии» на основе технологии проблемного обучения.

Урок по теме: Сумма n первых членов арифметической прогрессии.

Цель урока: разрешить противоречие между необходимостью быстрого вычисления суммы большого количества членов арифметической прогрессии и трудоемкостью последовательного сложения, путем самостоятельного вывода и применения соответствующих формул.

Ход урока (45 мин)

Организационный момент – 2 мин

Мотивационно-ориентированная часть – 4 мин.

«Тема нашего урока: «Формулы суммы n первых членов арифметической прогрессии». Вдумайтесь в формулировку темы и попытайтесь сформулировать проблемы, которые на ваш взгляд мы должны решить по этой теме.

Учащиеся называют проблемы, а учитель кратко записывает их на доске и обещает, что на все вопросы мы постараемся узнать ответы на этом или последующих уроках. Учитель сообщает учащимся, какие ещё проблемы ему удалось выделить.

Проблемы:

– Как выглядят формулы суммы n первых членов арифметической прогрессии?

– Как вывести формулы суммы n первых членов арифметической прогрессии?

– Зачем нужно уметь вычислять сумму n первых членов арифметической прогрессии?» [5]

Изучение нового материала – 15 мин.

Пример 15. Найти сумму чисел от 1 до 100.

Формулирование проблемы. Учащиеся предлагают варианты решения, в том числе сложить последовательно все числа.

Учитель: Да, можно решить эту задачу непосредственным сложением чисел. Но будет ли этот способ рациональный? Сколько времени вам потребуется?

«С формулой суммы нескольких членов арифметической прогрессии связан один из эпизодов биографии немецкого математика Карла Гаусса (1777 – 1855), который уже в раннем возрасте проявил необыкновенные математические способности.

Однажды на уроке, чтобы надолго занять третьеклассников, пока он будет заниматься с первоклассниками, учитель велел сложить все числа от 1 до 100. Он надеялся, что старшие дети будут долго решать этот пример, но девятилетний Карл сразу же поднял руку и показал учителю ответ. Изумленный учитель понял, что это самый способный ученик в его практике.

Работа мальчика удивила учителя. Решение мальчика было не только правильным, но к тому же весьма простым и оригинальным. В решении Карла ярко проявилась его математическая зоркость. Ему оказалось достаточным взглянуть на запись задания

$1 + 2 + 3 + \ldots + 98 + 99 + 100$.

Подумайте, как рассуждал мальчик. Он заметил, что $(1 + 100) = (2 + 99) = \ldots = (50 + 51) = 101$. Таких пар было в 2 раза меньше, чем всех слагаемых, т.е. 50. Выходит, что вся сумма равна $101 \times 50 = 5050$» [66].

«Учитель просит вывести формулу для вычисления суммы n первых членов арифметической прогрессии. В случае затруднения можно подсказать, что можно пользоваться принципом второго способа оформления решения задачи» [74].

Таким образом, для любого числа n получена формула $S_n = \frac{(a_1+a_n)\cdot n}{2}$.

– А если вам будут известны a_1 и d, то каковы будут ваши действия?

Зная, что $a_n = a_1 + d(n-1)$, можно получить другую формулу $s_n = \frac{2a_1+d(n-1)}{2} \cdot n$.

Закрепление изученного материала. Применение полученных знаний – 20 мин.

Предлагаю вам решить еще одну задачу.

Пример 16.Строительная компания возводит многоэтажный дом. На первом этаже используется 1000 кирпичей, на втором – 980, на третьем – 960, и так далее, на каждом последующем этаже на 20 кирпичей меньше, чем на предыдущем. Сколько кирпичей потребуется для строительства 50-этажного дома? [74]

Учащиеся сталкиваются с проблемой: 50 этажей – слишком много для последовательного сложения. Поэтому требуется найти путь быстрого подсчета.

Решение. Количество кирпичей на каждом этаже составляет арифметическую прогрессию с a_1 = 1000, d = -20, n = 50. Найдем сумму всех кирпичей, используя формулу суммы: $s_n = \frac{2\cdot 1000+(-20)(50-1)}{2} \cdot 50 = 25500.$

Ответ: 25500 кирпичей.

Пример 17.Найти сумму четных чисел от 2 до 1000000.

У учащихся возникает проблема – как сложить такое большое количество чисел?

Решение. Четные числа от 2 до 1000000 образуют арифметическую прогрессию, где: первый член a_1=2, последний член a_n=1000000, разность d=2. Чтобы найти количество членовn, используем формулу для n-го члена: $a_n = a_1 + d(n-1)$

Подставляем известные значения: $1000000 = 2 + 2(n-1)$

Решим уравнение: $2(n-1) = 999998, n-1 = 499999, n = 500000.$

Теперь подставим значения в формулу суммы:

$S_{500000} = \frac{2+1000000}{2} \cdot 500000 = 2{,}5 \cdot 10^{11}.$

Ответ: $2{,}5 \cdot 10^{11}.$

Пример18. «На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 нарисована «змейка», представляющая собой ломаную, состоящую из четного числа звеньев, идущих по линиям сетки. На рисунке 7 изображен случай, когда последнее звено имеет длину 10. Найдите длину ломаной, построенной аналогичным образом, последнее звено которой имеет длину 170» [13].

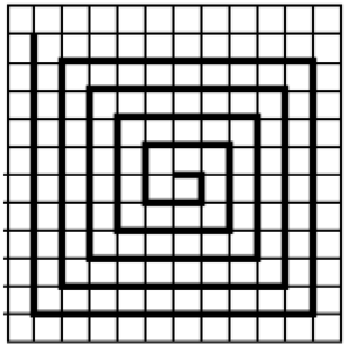

Рисунок 7 – Условие примера 18.

Формулирование проблемы: «Если мы попытаемся составить формулу длины произвольной ломанной, которая начинается с единичного отрезка, то у нас не получится четкая арифметическая прогрессия, потому что каждая длина будет повторяться два раза: L = 1 + 1 + 2 + 2 + 3 + 3 + ... + 10 + 10» [13]. Как же посчитать длину всей ломанной при условии, что длина последнего звена равна 170? Если выполнять последовательные действия, то это займет много времени.

Решение. Длина змейки, изображенной на рисунке, составляет $1+1+2+2+3+3+\cdots+8+9+9+10+10$ и представляет арифметическую прогрессию, члены которой учтены два раза, первый член равен 10, а разность – 1.

Найдем сумму арифметической прогрессии для змейки, звено последнее звено которой 120: $S_{170}=\frac{1+170}{2}\cdot 170=14535$.

Каждый член прогрессии должен быть учтен дважды, следовательно, длина змейки $S=2S=29070$.

Ответ: 29070.

Домашнее задание – 2 мин.

Пример 19. «Ребенок выкладывает спички в виде треугольников. Первый треугольник состоит из 3 спичек, второй – из 6 (добавилось 3), третий – из 9 (еще 3 добавилось), и так далее. Сколько спичек потребуется, чтобы выложить 100 таких треугольников?» [84]

Решение. Количество спичек в каждом треугольнике образует арифметическую прогрессию: $a_1 = 3$, $d = 3$, $n = 100$.

Нужно найти сумму членов этой арифметической прогрессии. Используем формулу: $S_n = \frac{2a_1+d(n-1)}{2} \cdot n.$

Подставляем значения: $S_{100} = \frac{2\cdot3+3(100-1)}{2} \cdot 100 = 15150.$

Для того чтобы выложить 100 треугольников, потребуется15150спичек.

Ответ: 15150 спичек.

Пример 20. На стадион входят зрители. В первую минуту зашло 50 человек, во вторую – 55, в третью – 60, и так далее, с приростом 5 человек в минуту. Сколько зрителей будет на стадионе через 60 минут? (Предположим, что никто не выходит со стадиона) [8].

Решение. Количество зрителей образует арифметическую прогрессию, в которой $a_1 = 50$, $d = 5$, $n = 60$. Применяя формулу суммы арифметической прогрессии получим: $S_{60} = \frac{2\cdot50+5(60-1)}{2} \cdot 60 = 11850$ зрителей.

Ответ: 11850 зрителей.

Подведение итогов – 2 мин.

«Предложить учащимся ответить на вопросы.

– Какую новую информацию вы получили на сегодняшнем уроке?

– Это только наше предположение или доказанный факт?

– Назовите формулы для вычисления суммы *n* первых членов арифметической прогрессии?» [74]

Урок по теме: Сумма *n* первых членов геометрической прогрессии.

Цель урока: через анализ и решение проблемных задач самостоятельно вывести формулы для нахождения суммы членов конечной геометрической прогрессии, а также научиться применять данную формулу для решения практических задач.

Ход урока (45 мин)

Организационный момент – 2 мин.

Устная работа – 8 мин.

Устный опрос.

– Какая последовательность называется геометрической прогрессией?

– Как называют число q и по какой формуле оно вычисляется?

– Запишите формулу n-го члена геометрической прогрессии?

Сравните числовые последовательности:1; 2; 4;-8;…;   1; -2; 4; -8;…; 1; -2; -4; -8;…;   1; 2; 4; 8;…?

Найдите лишнее:2,3; 3,5; 4,7; 5,9;…;-½; 1; -2; 4;…;   3; -9; 27; 81;…;3; 5; 7; 9;…?

Является ли число ¼ членом геометрической прогрессии 8; 4; 2;…? Если является, то укажите номер.

Объяснение нового материала – 15 мин.

Создание учителем проблемной ситуации.

Пример 21. Дано равенство: $S = 1+3+3^2+3^3+3^4+3^5+\ldots+3^{100}$. Найдите сумму S. Учащиеся предлагают варианты решения, но возникает проблема – прямой подсчет становится неэффективным при большом количестве членов прогрессии, реально посчитать это невозможно. Поэтому требуется рациональный способ. Учитель предлагает учащимся вспомнить известные им сведения, необходимые для решения возникшей проблемы:

«– Что вам известно из характеристики данной математической записи? – Это сумма; ее слагаемые образуют геометрическую прогрессию.

– С учетом этого, как вы сформулировали бы вопрос, на который нам необходимо найти ответ?» [74]

Учитель записывает на доске сформулированный детьми проблемный вопрос: «Как найти сумму n-первых членов геометрической прогрессии?»

«Умножим обе части равенства на 3: $3S = 3+3^2+3^3+3^4+3^5+3^6+\ldots+3^{101}$.

Перепишем равенства: $S = 1+(3+3^2+3^3+3^4+3^5+\ldots+3^{100})$.

$3S = (3+3^2+3^3+3^4+3^5+3^6+\ldots+3^{100})+3^{101}$.

Выражения в скобках одинаковы. Поэтому, вычитая из нижнего равенства верхнее, получаем: $3S - S = 3^{101} - 1$,

$S = \frac{3^{101}-1}{2}$.

Работа с учебником.

Учащиеся читают учебник и сопоставляют свою формулу с той, которая дана в тексте.

Формулирование окончательных выводов.

На доске и в тетрадях учащихся записывается формула для нахождения суммы n-первых членов геометрической прогрессии $S_n = \frac{b_1(q^n-1)}{q-1}$.

Закрепление изученного материала. Применение полученных знаний – 15 мин.

Учитель предлагает ученикам применить выведенную ими формулу для решения следующих задач» [74].

Пример 22. «К купцу на ночлег попросился путник и предложил такую сделку: «Если пустишь меня на постой, то я тебе в течение месяца каждый день буду платить по 1000 рублей. А ты мне будешь отдавать в первый день – 1 копейку, во второй – 2 копейки, в третий – 4 копеек, в четвертый – 8 копеек и так далее, увеличивая плату каждый день в 2 раза». Купец подсчитал: за месяц он получит 30 000 тысяч рублей, а отдавать ему придется какие-то копейки. И с радостью согласился» [47].

«Учитель обращается к классу с вопросом:

– Как вы думаете, кто выиграет в этой сделке?

Осознание и формулирование проблемы.

Учащиеся высказывают свои соображения, в том числе предлагают посчитать сумму, которую получит путник к концу месяца. После совместного выполнения нескольких действий становится очевидно, что подсчеты предстоят очень долгие и утомительные. Учитель «недоумевает»:

– Как же быть? Так и будем считать до вечера? Учащиеся говорят о том, что для решения этой задачи необходимо найти какой-то способ быстрого подсчета суммы» [74].

Решение. Пусть b_k– количество денег, отданных богачом в k-й день (копеек). Тогда $b_1 = 1, b_2 = 2, b_3 = 4, \ldots, b_{30} = 2^{29}$. Применим формулы суммы членов геометрической прогрессии, тогда богач отдал $S_{30} = \frac{b_1(q^{30}-1)}{q-1} = \frac{1\cdot(2^{30}-1)}{2-1} = 2^{30} - 1$копеек.

$$\approx 1070000000 \text{ коп.} \approx 10 \text{ млн. руб.}$$

А получил богач 30000 руб. Поэтому получается, что богач проиграл.

Ответ: богач проиграл.

Пример 23. Вы положили 10000 рублей на банковский вклад под 5% годовых, с ежегодным начислением процентов. Какая сумма будет на вашем счету через 20 лет?

Формулирование проблемы.

Учащиеся осознают, что прямой подсчет требует 20 последовательных вычислений, что очень трудоемко и подвержено ошибкам, поэтому формулируется проблема – как провести расчет рационально.

Решение. Решение осуществляется с применением формулы, так как это геометрическая прогрессия с первым членом b_1 = 10000, знаменателем q = 1 + 0,05 = 1,05, и числом членов n = 20. Используем формулу суммы членов геометрической прогрессии:

$$S_{20} = \frac{10000(1{,}05^{20}-1)}{1{,}05-1} \approx \frac{10000\cdot(2{,}6533-1)}{0{,}05} \approx 330660 \text{ рублей [8].}$$

Пример 24. «По преданию, индийский принц Сирам, восхищенный остроумием и разнообразием возможных положений шахматных фигур, призвал к себе ее изобретателя, ученого Сету и сказал ему: «Я желаю достойно вознаградить тебя за прекрасную игру, которую ты придумал. Я достаточно богат, чтобы исполнить любое твое желание». Принц рассмеялся, услышав, какую награду попросил у него изобретатель шахмат: за 1-ю клетку шахматной доски – одно зерно, за 2-ю – два, за 3-ю – четыре и так до 64-го поля. Обрадованный принц приказал выдать такую «скромную» награду. Сможет ли принц выполнить желание Сеты?» [47]

Формулирование проблемы.

Учащиеся предлагают свои варианты решения, однако выясняется, что прямой подсчет практически невозможен, так как число клеток 64. В связи с чем возникает вопрос: «Как же быть? Как подсчитать количество зерен?»

Решение. Предлагается провести расчет с использованием формулы, так как количество зерен представляет собой геометрическую прогрессию, в которой $b_1=1$, $q=2$, $n=64$. Число зерен, которые нужно выдать, равно сумме геометрической прогрессии: $S_n = \frac{1(2^{64}-1)}{2-1} = 2^{64} \approx 1{,}8 \cdot 10^{19}$. Такое количество зерен пшеницы можно собрать лишь с площади в 2000 раз большей поверхности Земли. Оказалось, что принц не в состоянии выполнить желание Сеты.

Домашнее задание – 2 мин.

Пример 25. «Некто продал лошадь за 156 рублей. Но покупатель, приобретая лошадь, раздумал её покупать и возвратил продавцу, говоря: «Нет мне расчета покупать за эту цену лошадь, которая таких денег не стоит». Тогда продавец предложил другие условия: «Если по-твоему, цена лошади высока, то купи только ее подковные гвозди. Лошадь же тогда получишь в придачу бесплатно. Гвоздей в подкове 6. За 1-ый гвоздь дай мне всего 1/4 копейки, за третий 1 копейку и т.д.». Покупатель, соблазненный низкой ценой и, желая даром получить лошадь, принял условия продавца, рассчитывая, что за гвозди придётся уплатить не более 10 рублей. Так ли это?» [84]

Решение. За 24 подковных гвоздя пришлось уплатить $\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{24-3}$ копеек. Сумма эта равна $S_{24} = \frac{\frac{1}{4}(2^{24}-1)}{2-1} = 2^{22} - \frac{1}{4} = 4194303\frac{3}{4}$ коп. ≈ 42 тыс. руб.

Ответ: покупатель заплатит $4194303\frac{3}{4}$ коп.

Придумать задачу на применение выведенной формулы в жизненной ситуации.

Рефлексия. Подведение итогов – 3 мин.

Учитель организует беседу по вопросам:

«– Смогли ли мы ответить на проблемный вопрос урока?

– Кто будет в выигрыше в рассмотренных нами ситуациях сделок?

–Как мы решали проблему? Каков был наш путь к ответу?» [74]

Контроль в рамках реализации методического проекта по теме «Прогрессии» должен быть комплексным и ориентированным на оценку достижения как знаний, так и развития компетенций, необходимых для проблемного обучения.

Цель: проверить знания учащихся по изученной теме.

Вариант самостоятельной работы по теме «Прогрессии».

Пример 26. Фигура составляется из квадратов так, как показано на рисунке 8: в каждой следующей строке на 8 квадратов больше, чем в предыдущей. Из скольких квадратов состоит фигура, в которой 58 строк?

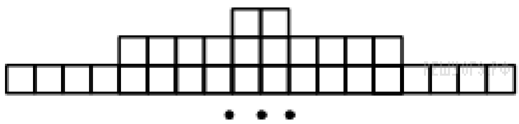

Рисунок 8 – Условие задания примера 26

Решение. Число квадратов в строке представляет собой арифметическую прогрессию с первым членом $a_1 = 2$ и разностью $d = 8$. Сумма членов арифметической прогрессии с $n = 56$ может быть найдена по формуле $S_{56} = \frac{2 \cdot 2+8(56-1)}{2} \cdot 56 = 12432$.

Ответ: 12432 квадрата.

Пример 27. Автомобиль проезжает первые 10 км за первый день, а затем каждый день пробег увеличивается на 5 км. Какой общий пробег будет через год?

Решение. Для решения задачи воспользуемся формулой суммы членов арифметической прогрессии, в которой первый член равен $a_1 = 10$ км, разность $d = 5$ км, количество членов $n = 365$ дней. Тогда $S_{365} = \frac{2 \cdot 10 + 5(365-1)}{2} \cdot 365 = 335800$ км.

Ответ: 335800 км.

Пример 28. «Митя играет в компьютерную игру. Он начинает с 0 очков, а для перехода на следующий уровень ему нужно набрать не менее 30 000 очков. После первой минуты игры добавляется 2 очка, после второй – 4 очка, после третьей – 8 очков и так далее. Таким образом, после каждой следующей минуты игры количество добавляемых очков удваивается. Через сколько минут Митя перейдет на следующий уровень» [13]?

Решение. Пусть

$b_1 = 2$ - количество очков, набранных за первую минуту игры,

$b_2 = 4$ - количество очков, набранных за вторую минуту,

$b_3 = 8$ - количество очков, набранных за третью минуту,

....

b_n- количество очков, набранных за последнюю минуту.

Количество очков постоянно удваивается, значит, дело мы имеем с геометрической прогрессией со знаменателем $q = 2$. Каждую минуту очки суммируются, т.е. актуальна будет формула суммы первых n членов прогрессии $S_n = \frac{b_1(q^n-1)}{q-1}$. К тому же, эта сумма должна быть не меньше 30 000.

Подставляя известные величины в формулу, получим такое неравенство:

$\frac{2(2^n-1)}{2-1} > 30000, 2^n - 1 > 15000, 2^n > 15001.$

Подберем n, при котором данное неравенство будет верным.

При $n = 14$ выражение 2^n будет больше 15 001 ($2^{14} = 16384$). Это значит, что через 14 минут Митя наберет больше 30 000 очков и перейдет на следующий уровень.

Ответ: 14.

Пример 29. «Бактерия, попав в живой организм, к концу 20-й минуты делится на две бактерии, каждая из них к концу следующих 20 минут делится опять на две и т.д. Найдите число бактерий, образующихся из одной бактерии к концу суток.

Решение. В сутках 1440 минут, каждые двадцать минут появляется новое поколение – за сутки 72 поколения. По формуле суммы n первых членов геометрической прогрессии, у которой b_1=1, q=2, n=72, находим, что $S_{72} = \frac{1(2^{72}-1)}{2-1} = 2^{72} - 1 = 4\,722\,366\,482\,869\,645\,213\,696 - 1 =$ $4\,722\,366\,482\,869\,645\,213\,695$.

Ответ: $4\,722\,366\,482\,869\,645\,213\,695$» [9].

Критерии оценивания: каждое задание оценивается в 2 балла. Отметка «отлично» ставится ученику при 7-8 баллах, «хорошо» – при 5-6 баллах, «удовлетворительно» – при 3-4 баллах, «неудовлетворительно» – при 0-2 баллах.

Таким образом, реализация методических материалов по теме «Прогрессии» с использованием технологии проблемного обучения способствует более глубокому пониманию понятий арифметической и геометрической прогрессий, учащиеся учатся самостоятельно формулировать гипотезы, решать проблемные задачи и применять полученные знания в нестандартных ситуациях. Использование проблемных задач стимулирует познавательную активность учащихся и способствует развитию критического мышления.

2.3 Описание проведенного педагогического эксперимента и его результатов

Педагогический эксперимент был проведен на базе общеобразовательного частного учреждения «Школа «Новое образование»» г. Москвы.

«Основываясь на теоретических выводах диссертационного исследования, был организован и проведен констатирующий эксперимент с целью оценить практическое применение учителями эвристических методов обучения на уроках математики в основной школе.

На данном этапе ставились следующие задачи:

– разработать анкету для сбора данных о применении эвристических методов учителями;

– провести анкетирование среди учителей общеобразовательной школы» [61];

– проанализировать полученные результаты, чтобы понять, как часто учителя применяют эвристические методы, какие преимущества и трудности они видят в этом подходе.

При проведении констатирующего эксперимента использованы такие методы исследования, как теоретический анализ научных и методических материалов, анкетирование, качественный и количественный анализ полученных данных.

«Участники эксперимента: 10 учителей общеобразовательной школы.

Вопросы анкеты:

1. Как бы Вы описали эвристический метод своими словами?

2. Как часто Вы применяете эвристические методы обучения на уроках математики?

(редко / иногда / часто / всегда)

3. Считаете ли Вы, что эвристический метод способствует лучшему усвоению материала учащимися?

(да / нет / затрудняюсь ответить)

4. Достаточно ли Вам доступных методических материалов, посвященных эвристическим методам обучения?

(да / нет / затрудняюсь ответить)

5. Сколько времени уходит на подготовку к уроку, на котором Вы применяете эвристический метод обучения?

(немного / средне / много)

6. Сталкиваетесь ли Вы с какими-то трудностями при использовании эвристических методов на уроках математики?

(да / нет / затрудняюсь ответить)

Результаты анкетирования представлены в таблице 7» [61].

Таблица 7 – Результаты анкетирования

№ вопроса	Вопрос анкеты	Ответ
1	«Как бы Вы описали эвристический метод своими словами?	1) стимулирование самостоятельной мыслительной деятельности учеников – 3; 2) исследовательский подход – 5; 3) метод открытия – 2.
2	Как часто Вы применяете эвристические методы обучения на уроках математики?	«редко» – 4, «иногда» – 3, «часто» – 2, «всегда» – 1
3	Считаете ли Вы, что эвристический метод способствует лучшему усвоению материала учащимися?	«да» – 8, «нет» – 0, «затрудняюсь ответить» – 2
4	Достаточно ли Вам доступных методических материалов, посвященных эвристическим методам обучения?	«да» – 3, «нет» – 5, «затрудняюсь ответить» – 2
5	Сколько времени уходит на подготовку к уроку, на котором Вы применяете эвристический метод обучения?	«немного» – 2, «средне» – 6, «много» – 2
6	Сталкиваетесь ли Вы с какими-то трудностями при использовании эвристических методов на уроках математики?	«да» – 4, «нет» – 5, «затрудняюсь ответить» – 1» [61]

«Проведенное анкетирование демонстрирует, что, хотя все учителя знакомы с понятием «эвристический метод обучения», его практическое применение в школе остается недостаточным. Несмотря на то, что большинство учителей считают проблемное обучение эффективным для усвоения материала, они сталкиваются с некоторыми препятствиями, такими как недостаток методических материалов, нехватка времени на уроке и необходимость дополнительных подготовительных работ. Так, несмотря на признание ценности эвристического метода, его широкое внедрение в практику обучения основной школы требует дополнительных усилий и решений.

Таким образом, результаты проведенного исследования подтверждают актуальность темы диссертации и необходимость создать практические инструменты для учителей, которые помогут им эффективно использовать эвристические методы в своей работе. Для этой цели был разработан элективный курс по теме «Решение задач с параметром» для учащихся старших классов.

Педагогический эксперимент, позволяющий увидеть и оценить эффективность нашего электива на основе эвристического метода, проводился в 11 А (контрольная группа) и Б (экспериментальная группа) классах общеобразовательного частного учреждения «Школа «Новое образование»» г. Москвы. Заметим, что ранее учащиеся обоих классов, сдающие профильный уровень ЕГЭ по математике обучались только по традиционной методике, и их результаты оценивались как «хорошо» и «отлично»» [61].

«На заключительном этапе педагогического эксперимента была проведена контрольная работа в обоих классах для проверки усвоения знаний и приобретенных умений. По итогам контрольной работы учащиеся экспериментальной группы, которые прошли элективный курс, продемонстрировали более высокие результаты, чем учащиеся контрольной группы. В экспериментальной группе процент успешно выполнивших работу учеников был на 30% выше по сравнению с контрольной группой. Учащиеся второй группы показали более глубокое понимание темы, лучшую способность к анализу задач и применение различных подходов к решению задач.

Таким образом, результаты проведенного педагогического эксперимента подтверждают эффективность эвристического метода обучения решению алгебраических задач. Так, разработанный элективный курс «Решение задач с параметрами» может быть рекомендован для практической деятельности в общеобразовательной школе» [61].

Выводы по второй главе:

– разработаны методические материалы применения эвристического метода при решении алгебраических задач по теме «Прогрессии», направленные на развитие способности учащихся к самостоятельному решению проблем и повышения мотивации к изучению математики;

– разработанный элективный курс по теме «Решение задач с параметром» для учащихся старших классов, предназначен для развития эвристических способностей обучающихся;

– элективный курс состоит из специально подобранных задач, которые требуют использование эвристических приемов для нахождения путей решения проблемы, а также методические материалы для преподавателей;

– результаты педагогического эксперимента демонстрируют эффективность представленного элективного курса в процессе формирования и развития эвристических способностей учеников.

Заключение

Проведенное исследование подтверждает актуальность использования эвристического метода обучения в общеобразовательной школе, в том числе и при решении алгебраических задач. В работе рассмотрены теоретические аспекты эвристического метода, проведен анализ специфических особенностей в контексте обучения математике, а также предложены практические рекомендации по его применению.

Основные выводы:

– эвристический метод обучения может являться эффективным средством развития аналитического мышления, творческих способностей и самостоятельности учащихся. Он дает возможность углубить математические знания и улучшить их понимание;

– проблемно-ориентированное обучение служит наиболее подходящей технологией для реализации эвристического метода на уроках математики. Важно создавать проблемные ситуации и задачи, которые бы стимулировали активное мышление обучающихся;

– разработаны методические материалы по теме «Прогрессии», ориентированные на учащихся математического профиля. В них предлагается система проблемных ситуаций, учебных задач и методических рекомендаций, направленных на активизацию познавательной деятельности учащихся;

– разработанный элективный курс «Решение задач с параметром» сосредоточен на формировании эвристических приемов решения алгебраических задач и является важным шагом в повышении качества обучения математике. Программа курса построена на принципах проблемно-ориентированного обучения и содержит специально подобранные задачи и методические материалы;

– результаты педагогического эксперимента подтверждают эффективность элективного курса в формировании и развитии эвристических способностей учеников. Эксперимент показывает, что прошедшие курс учащиеся демонстрируют более высокие показатели математических умений, более высокий уровень самостоятельности и креативного подхода в процессе решения заданных проблем и задач;

– представленный элективный курс «Решение задач с параметром» может быть применен учителями математики в своей педагогической деятельности;

– результаты педагогического эксперимента демонстрируют эффективность представленного элективного курса в процессе формирования и развития эвристических способностей учеников.

Основываясь на вышесказанное, можно судить о том, что задачи исследования выполнены, гипотеза подтверждена, цель достигнута.

Список используемой литературы и используемых источников

1. Андреев В.И. Эвристическое программирование учебно-исследовательской деятельности: методическое пособие / В.И. Андреев // М.: 1981. 240 с.

2. Андреев В.И. Эвристическое программирование учебно-исследовательской деятельности: методическое пособие / В.И. Андреев // М.: 1981. С. 97.

3. Алёшина Н.П. Развитие эвристического и логического мышления старшеклассников в процессе обучения математике (на примере элективного курса по решению задач с помощью законов логики союзов): дисс. на соискание уч. ст. канд. пед. наук / Н.П. Алёшина // Рязанский государственный университет имени С.А. Есенина. Саранск. 2008. 189 с.

4. Алгебра 9 класс: учеб. пособие для общеобразовательных организаций: углубл. уровень / Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.Н. Нешков, К.Н. Нешков и др. Просвещение, 2018. 400 с.

5. Алгебра 9 класс: методическое пособие для учителя / А.Г. Мордкович, П.В. Семенов. М.: Бином. Лаборатория знаний, 2018. 22 с.

6. Алгебра 9 класс: учебник для общеобразовательных учреждений / Г.В. Дорофеев, С.Б. Суворова, Е.А. Бунимович и др.; под ред. Г.В. Дорофеева. 5-е изд. М.: Просвещение, 2010. 304 с.

7. Алгебра 9 класс: учебник для общеобразовательных учреждений / Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин, Ю.В. Сидоров и др. 17-е изд. М.: Просвещение, 2012. 287 с.

8. Алгебра 9 класс: задачник для общеобразовательных организаций (углубленный уровень) / А.Г. Мордкович, Н.П. Николаев, П.В. Семенов. М.: Мнемозина, 2015. 205 с.

9. Алгебра 9 класс: учебник для общеобразовательных организаций (углубленный уровень) / А.Г. Мордкович, Н.П. Николаев. М.: Мнемозина, 2015. 248 с.

10. Астахов А.Ф. Проблемно-эвристическая технология в обучении и формировании личности учащегося // Актуальные проблемы развития высшего и среднего образования на современном этапе: Материалы III Самарской региональной научно-практической конференции ученых и педагогов-практиков 23-24 сентября 2004 г. / А.Ф. Астахов // Самара, 2005. С. 300-301.

11. Балк М.Б. Математика после уроков: пособие для учителей / М.Б. Балк, Г.Д. Балк. Москва: Просвещение, 1971. 461 с.

12. Белова Е.С. Развитие диалога в процессе решения школьниками мыслительных задач / Е.С. Белова // Вопросы психологии, 1991. № 2. С. 149.

13. Беспалова О.П. Элективный курс по теме «Прогрессия». 11-й класс / О.П. Беспалова, И.Ю. Мартынюк, Т.А. Чугунова // Сайт Открытый урок. Первое сентября [Электронный ресурс]. Режим доступа: https://urok.1sept.ru/articles/628058?ysclid=m3ypkmitg6322253024.

14. Бородина С.Н. Программа предметного элективного курса по математике «Эти известно-неизвестные прогрессии» / С.Н. Бородина, Л.А. Лопатина // Сайт Открытый урок. Первое сентября [Электронный ресурс]. Режим доступа: https://urok.1sept.ru/%-D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/589241/.

15. Брызгалова С.И. Функция и место проблемного изложения и эвристической беседы в обучении старшеклассников: Автореферат дисс. на соискание уч. ст. канд. пед. наук / С.И. Брызгалова // Науч.-исслед. ин-т общей педагогики АПН СССР. Москва, 1976. 31 с.

16. Буторина Г.Г. Проблемное обучение на уроках математики / Г.Г. Буторина // Образовательная социальная сеть [Электронный ресурс]. Режим доступа: https://nsportal.ru/shkola/obshchepedagogicheskie-tekhnologii/library/2012/04/22/problemnoe-obuchenie-na-urokakh (дата обращения: 21.09.2024).

17. Вавилов В.В. Две прогрессии / В.В. Вавилов, Р.Л. Ткачук // Учебно-методическая газета «Математика», 2006. № 6. С. 17-28.

18. Важенин Ю.М. Самоучитель решения задач с параметрами // Екатеринбург: УрГУ, 1996. 84 с.

19. Васильева В.А. Тригонометрические уравнения и неравенства: учеб. пособие / В.А. Васильева, Р.Н. Молодожникова // Моск. гос. авиац. ин-т (техн. ун-т). Москва: Изд-во МАИ, 1994. 66с.

20. Вахтеров В.П. Избранные педагогические сочинения / В.П. Вахтеров // М., 1987. С. 249.

21. Введенский В.Н., Формирование эвристической деятельности старшеклассников в процессе обучения: автореф. дисс. канд. пед. наук / В.Н. Введенский // Новосиб. гос. архитектур.-строит. университет. Новосибирск, 1999. 21 с.

22. Вентцель К.Н. Новые пути воспитания и образования детей / К.Н. Вентцель // М., 1910. С. 34-35.

23. Власенко К.В. Формирование приемов эвристической деятельности учащихся на уроках геометрии в классах с углубленным изучением математики: автореф. дисс. на соискание уч. ст. канд. пед. наук / Е.В. Власенко // Киев, 2003. 20 с.

24. Власова А.П. Задачи с параметрами. Логарифмические и показательные уравнения, неравенства, системы уравнений. 10-11 классы // Дрофа, Москва. 2007.

25. Водовозов В.И. Избранные педагогические сочинения / под ред. В.З. Смирнова // Акад. пед. наук РСФСР, ИН-т теории и истории педагогики. М.: Изд-во Акад. пед. наук РСФСР, 1958. 632 с.

26. Гончарова И.В. Методика формирования эвристических умений учеников основной школы на факультативных занятиях по математике: дисс. на соискание уч. ст. канд. пед. наук / Гончарова И.В. // Донецкий национальный университет, 2009. 274 с.

27. Горштейн П.И., Болтянский В.Б., Якир М.С. Задачи с параметрами // М., Илекса, 1998. 290 с.

28. Далингер В.А. Пути дальнейшего развития школьного математического образования // Проблемы теории и практики обучения математике: сб. науч. работ, представл. на Междунар. науч. конф. «67 Герценовские чтения». СПб.: изд-во РГПУ им. А.И. Герцена, 2014. С. 196-200.

29. Дистервег А. Избранные педагогические сочинения / А. Дистервег // М., 1956. С. 90.

30. Ельницкий К.В. Избранные педагогические статьи / К. Ельницкий // Москва: скл. изд. в кн. маг. К.Н. Тихомирова, 1896. 429 с.

31. Ильясов И.И. Система эвристических приемов решения задач: Учебное пособие для студентов факультетов психологии высших учебных заведений / И.И. Ильясов. М.: Учебно-методический коллектор «Психология», 2001. 154 с.

32. Каган М.С. Мир общения: Проблема межсубъектных отношений / М.С. Каган // М., 1988. С. 152.

33. Каптеров П.Ф. Эвристическая форма обучения в народной школе / Антология педагогической мысли России второй половины XX-начала XXI в. / П.Ф. Каптеров // М., 1990. С. 221.

34. Каптеров П.Ф. Эвристическая форма обучения в народной школе / Антология педагогической мысли России второй половины XX-начала XXI в. / П.Ф. Каптеров // М., 1990. С. 219.

35. Кармакова Т.С., Володькин Е.Г. Способы решения нестандартных уравнений и систем уравнений: Дидактические материалы для учителей математики. Хабаровск. Издательство ХК ППК ПК. 2015. 60 с.

36. Кожухов С.К. Различные способы решения задач с параметром // Математика в школе. 1998. №6. С. 9.

37. Колягин Ю.М. Методические проблемы применения задач в обучении математике // Роль и место задач в обучении математике: сборник научных трудов. Вып. 5. М., 1978. С. 5-12.

38. Коменский Я.А. Избранные педагогические сочинения // М., 1955. 655 с.

39. Коменский Я.А. Избранные педагогические сочинения: В 2 т. Т. 1 // М., 1938. С. 177-178.

40. Концепция развития математического образования в Российской Федерации / Утверждена распоряжением Правительства Российской Федерации от 24 декабря 2013 г. № 2506-р [Электронный ресурс]. Режим доступа: https://docs.edu.gov.ru/document/b18bcc453a2a1f7e855416b198e5e276/download/2744/(дата обращения: 21.09.2024).

41. Кочагин В.В. Курс: Уравнения и неравенства с параметрами // Математика. 2002. № 27-28.

42. Кочарова К.С. Об уравнениях с параметрами и модулем // Математика в школе. 1955. № 2.

43. Кудрявцев В.Т. Проблемное обучение: истоки, сущность, перспективы. М.: «Знание», 1991. 80 с.

44. Кулюткин Ю.Н. Эвристические методы в структуре решений / Ю.Н. Кулюткин // М., 1970. С. 12-13.

45. Курганов С.Ю. Ребенок и взрослый в учебном диалоге / С.Ю. Курганов // М., 1989. 126 с.

46. Кучинский Г.М. Диалог в процессе совместного решения мыслительных задач // Проблема общения в психологии / Под ред. Б.Ф. Ломова. М., 1981. С. 115.

47. Лисовская Н.А. Применение эвристических методов и приемов на уроках математики // Сайт Мультиурок [Электронный ресурс]. Режим доступа: https://multiurok.ru/index.php/files/primenenie-evristicheskikh-metodov-pri-obuchenii-u.html?ysclid=m3ypsqa58s547566207 (дата обращения 10.09.2024).

48. Маеренкова В.В. Технологии проблемного обучения как средство формирования и развития универсальных учебных действий учащихся на уроках математики в условиях реализации ФГОС / В.В. Маеренкова // Школьная педагогика, 2016. № 1 . С. 53-55.

49. Матюшкин А.М. Проблемные ситуации в мышлении и обучении / А.М. Матюшкин // М., 1972. С. 182.

50. Махмутов М.И. Проблемное обучение. Основные вопросы теории. М.: Педагогика, 1975. С. 246-258.

51. Махмутов М.И. Современный урок. М., 1977.

52. Махмутов М.И. Проблемное обучение: основные вопросы теории / М.И. Махмутов // М., 1975. 364 с.

53. Медведев В.М., Соколов В.Н. Некоторые тенденции формирования проблемно-эвристического обучения на основе методологии педагогической эвристики / В.М. Медведев, В.Н. Соколова // Актуальные проблемы университетского образования: Материалы межвузовской научно-методической конференции. Самара, 2003. С. 202-203.

54. Мишина Е.Ф. Эвристический метод в преподавании органической химии: дисс. на соискание уч. ст. канд пед. наук / Е.Ф. Мишина // Акад. пед. наук РСФСР. Науч.-исслед. ин-т методов обучения. Москва, 190. 256 с.

55. Мордкович А.Г. Уравнения и неравенства с параметрами // Математика. 1994. № 38.

56. Муггалимова С.Р. Формирование эвристических приемов у учащихся в процессе обучения решению задач векторным методом: дисс. на соискание уч. ст. канд. пед наук / С.Р. Мугаллимова // Омский государственный педагогический университет. Омск, 2008. 214 с.

57. Огурцова О.К. Частные эвристики как условие включения учащихся в поисковую деятельность на уроках стереометрии: дисс. на соискание уч. ст. канд. пед. наук / О.К. Огурцова // Нижний Новгород, 2002. 208 с.

58. Оконь В. Основы проблемного обучения. М.: Просвещение, 1968.

59. Олехник С.Н. Уравнения, неравенства. Нестандартные методы решения. 10-11 кл. // М.: Дрофа, 1995. 219 с.

60. Пиминова К.С. Эвристический метод обучения решению алгебраических задач в общеобразовательной школе / К.С. Пиминова, Н.А.

Демченкова // XXIII Всероссийская научно-практическая конференция «Актуальные проблемы естественнонаучного и математического образования», Самара, 2024.

61. Пиминова К.С. Элективный курс как средство формирования эвристических приемов // Вестник магистратуры, 2024. № 9-2 (156). С. 74-76.

62. Пичурин Л.Ф. За страницами учебника алгебры / Л.Ф. Пичурин // М.: Просвещение, 1990. 228 с.

63. Платон // Собрание сочинений: В 4 т. Т. 2. М., 1993. С. 201-202.

64. Платон // Собрание сочинений: В 4 т. Т. 2. М., 1993. С. 221-223.

65. Плескацевич Н.М. Эвристическая беседа и ее роль в процессе обучения (на материале предметов гуманитарного цикла в средних классах школы): Автореферат дисс. на соискание уч. ст. канд. пед. наук / Н.М. Плескацевич // Минский гос. пед. ин-т им. А.М. Горького. Минск, 1969. 24 с.

66. Пойа Д. Как решать задачу? / Д. Пойа // М., 1961. 207 с.

67. Пойа Д. Математическое открытие / Д. Пойа // М., 1976. 448 с.

68. Полтавская Г.Б. Математика. 5-11 классы: проблемно-развивающие задания, конспекты уроков, проекты // Г.Б. Полтавская / изд. 3-е перераб. Волгоград: Учитель, 2013.

69. Полякова Е.А. Уравнения и неравенства с параметрами в профильном 11 классе // ИЛЕКСА Москва, 2012. 96 с.

70. Прач В.С. Эвристическое обучение математики: путешествие в мир эвристики: Факульт. курс для учащихся гуманит. направления / В.С. Прач, Е.И. Скафа // Донецк: Ноулидж, 2012. С. 275.

71. Примерная основная образовательная программа основного общего образования. Одобрена решением федерального учебно-методического объединения по общему образованию / М-во образования и науки РФ. М.: Просвещение, 2015. 560 с.

72. Пустовая Ю.В. Эвристические умения как продукт учебно-познавательной эвристической деятельности учащихся при изучении курса

алгебры и начал математического анализа / Ю.В. Пустовая // Дидактика математики: проблемы и исследования, 2020. № 51. С. 77-82.

73. Российская Федерация. Законы. Об образовании в Российской Федерации: Федеральный закон от 29.12.2012 № 273-ФЗ: [принят Государственной Думой 21 декабря 2012 года: одобрен Советом Федерации 26 декабря 2012 года]. Новосибирск: Норматика, 2015. 143 с.

74. Рурукин А.Н. Поурочные разработки по алгебре: 9 класс / А.Н. Рурукин, И. А. Масленникова, Т.Г. Мишина / М.: ВАКО, 2011. 288 с.

75. Саранцев Г.И. Методика обучения математике в средней школе: Учеб. пособие для студентов мат. спец. пед. вузов и ун-тов / Г.И. Саранцев. М.: Просвещение, 2002. 224 с.

76. Скаткин М.Н. Проблемы современной дидактики. 2-е изд. М.: Педагогика, 1984.

77. Скафа Е.И. Педагогические технологии как инструмент формирования эвристических приемов у обучающихся в современной школе / Е.И. Скафа // Дидактика математики: проблемы и исследования: Международ. сборник наус. работ, 2020. № 52. С. 17-21.

78. Скафа Е.И. Технологии эвристического обучения математике: учебное пособие / Е.И. Скафа, И.В.Гончарова, Ю.В. Абраменкова // 2-е изд. Донецк: ДонНУ, 2019. 220 с.

79. Соколов В.Н. Методологические и теоретические основы педагогической эвристики: дисс. на соискание уч. ст. докт. пед. наук / В.Н. Соколов // Самарская государственная академия культуры и искусств. Самара, 1999. С. 41.

80. Соколов В.Н. Педагогическая эвристика. Введение в теорию и методику эвристической деятельности / В.Н. Соколов // М., 1995. 254 с.

81. Соколов В.Н. Педагогические взаимодействие в эвристическом обучении: автореферат дисс. на соискание уч. ст. канд. пед. наук / В.Н. Соколов // Волгоградский гос. пед. университет. Волгоград, 1997. 42 с.

82. Соколов В.Н. Проблемно-эвристическая организация интеллектуальной деятельности в общем и профессиональном образовании: монография / В.Н. Соколов // Краснодар: Кубанский кн. изд-во, 2006. 342 с.

83. Соколов В.Н. Педагогическая эвристика и проблемно-эвристическое обучение: перспективы дальнейших экспериментальных, методологических и теоретических исследований // Актуальные проблемы университетского образования: Материалы межвузовской научно-методической конференции / В.Н. Соколов // Самара, 2003. С. 194-195.

84. Суконник Я.Н. Арифметико-геометрическая прогрессия // Кант, 1975. № 1. С. 36-39.

85. Трофимова Н.Н. Развитие мыслительных операций анализа и синтеза у студентов посредством системы проблемно-эвристических задач: дисс. на соискание уч. ст. канд. псих. наук / Н.Н. Трофимова // Самарский гос. пед. университет. Самара, 2000. 214 с.

86. Ушинский К.Д. Педагогические сочинения: В 6 т. Т. 6 / К.Д. Ушинский // М., 1990. С. 415-416.

87. Федеральная рабочая программа среднего общего образования. Математика (для 10-11 классов образовательных организаций) // Москва, 2023. 65 с.

88. Федотова Г.А. Профессионально-ориентированные технологии обучения в высшей школе: Учеб. пособие / Г.А. Федотова, Е.Ю. Игнатьева / Великий Новгород: НовГУ имени Ярослава Мудрова, 2010. 104 с.

89. Фридман Л.М. Методика обучения решению математических задач // Л.М. Фридман / Математика в школе. 1991. № 5. С. 59-63.

90. Хабиб Р.А. Активизация познавательной деятельности учащихся на уроках математики: Метод. пособие / Р.А. Хабиб // Киев: Рад. шк., 1985. 154 с.

91. Харламов И.Ф. Активизация учения школьников // И.Ф. Харламов / М., 1970.

92. Хрипунова Н.Е. Условия эффективного применения эвристического метода обучения курсантов военного вуза (на примере математических дисциплин): дисс. на соискание уч. ст. канд. пед. наук / Н.Е. Хрипунова // МВД России Санкт-петербургский гос. университет. СПб., 2002. 176 с.

93. Хуторской А.В. Дидактическая эвристика: Теория и технология креативного обучения / А.В. Хуторской // М., 2003. С. 19.

94. Хуторской А.В. Эвристическое обучение: Теория, методология, практика / А.В. Хуторской // М., 1998. С. 96.

95. Цыпкин А.Г., Пинский А.И. Справочник по методам решения задач по математике // М., Наука, 1998. 577 с.

96. Шарыгин И.Ф. Факультативный курс по математике // М., Просвещение, 1991. 252 с.

97. Mustafaeva F. Mathematics teaching technologies depending on students' cognitive activity characteristics: partial search and heuristic method / F. Mustafayeva // Scientific Works, 2024. V. 91, No. 1. PP. 130-133.

98. Nokhatbayeva K.R. The effects of heuristic teaching methods in mathematics // Proceeding of International Young Scholars Workshop, [S.1], 2020. V. 9. PP. 142-156.

99. Parmjit Singh, Sian Hoon Teoh, Tau Han Cheong, Nor Syazwani MdRasid, Liew Kee Kor, Nurul Akmal MdNasir. The use of problem-solving heuristics approach in enhancing STEM students development of mathematical thinking // INT ELECT J MATH ED, 2018. V.13. Issue 3. PP. 289-303.

100. Pugosa Ch.M., Yumol C., Nogadas C., Etcuban J. Effects of heuristic methods on students' performance in mathematics / Ch.M. Pusova, C. Yumol, C. Nogadas, J. Etcuban // British Journal of Teacher Education and Pedagogy. 2024. V. 3. No. 2. PP. 69-86.

101. Tambunan H. Impact of heuristic strategy on students' mathematics ability in high order thinking // INT ELECT J MATH ED, 2018. V. 13. Issue 3. PP. 321-328.