.

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Тольяттинский государственный университет»

Кафедра «Прикладная математика и информатика»
(наименование кафедры полностью)

01.03.02 Прикладная математика и информатика
(код и наименование направления подготовки, специальности)

Компьютерные технологии и математическое моделирование
(направленность (профиль))

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
(БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА)

на тему «Применение методов математического моделирования в задачах оптимизации производственной структуры и производственных ресурсов в пищевой промышленности»

_

Обучающийся М. А. Мусатов
(И.О. Фамилия) (личная подпись)

Руководитель к.т.н., доцент, Н.А. Сосина
(ученая степень, звание, И.О. Фамилия)

Консультант к.т.н., доцент, С.А. Гудкова
(ученая степень, звание, И.О. Фамилия)

Тольятти 2024

Аннотация

Название Выпускной квалификационной работы: «Применение методов математического моделирования в задачах оптимизации производственной структуры и производственных ресурсов в пищевой промышленности».

Цель выпускной квалификационной работы заключается в построении математической модели задачи оптимизации производства продукции по переработке мяса на предприятии и создании программного продукта на основе пакетов Python для решения поставленной задачи.

Известна рецептурная составляющая мясных изделий, возможные объемы закупки мяса, процент выхода мяса на переработку от живого веса, объемы продаж каждого из видов мясных изделий, затраты мяса на производство колбас, ограничения на временные затраты. На основе перечисленных данных строится математическая модель задачи линейного программирования. Тестируемая задача решается с помощью настройки «Поиск решений» в Excel. Проводится анализ оптимального решения на чувствительность. Осуществлена программная реализация задачи оптимизации на основе пакетов Python.

Структура выпускной квалификационной работы: введение, две главы, заключение, список литературы. В главе 1 рассматривается математическое моделирование процессов в пищевой промышленности, а также применение математических методов в создании рецептур. В главе 2 формулируется задача выпускной квалификационной работы, строится математическая модель технологического процесса с учетом рецептур колбасных изделий. Приводится решение задачи при заданных значениях параметров в Excel с помощью надстройки «Поиск решений». Проводится анализ оптимального решения на устойчивость. Осуществляется программная реализация задачи оптимизации на основе пакетов Python.

Выводы о проделанной работе и результаты описаны в заключение.

ABSTRACT

Title of the final qualification work: "Application of mathematical modeling methods in the optimization of production structure and production resources in the food industry".

The purpose of the final qualification work is to build a mathematical model of the problem of optimizing the production of meat processing products at the enterprise and create a software product based on Python packages to solve the problem.

The prescription component of meat products is known, possible volumes of meat purchases, the percentage of meat output for processing from live weight, sales volumes of each type of meat products, meat costs for sausage production, time constraints. Based on these data, a mathematical model of the linear programming problem is built. The task under test is solved using the "Search for solutions" setting in Excel. An analysis of the optimal solution for sensitivity is carried out. A software implementation of the optimization problem based on Python packages has been carried out.

The structure of the final qualifying work: introduction, two chapters, conclusion, list of references.

Chapter 1 discusses the mathematical modeling of processes in the food industry, as well as the application of mathematical methods in creating recipes.

In chapter 2, the task of the final qualification work is formulated, a mathematical model of the technological process is built taking into account the recipes of sausage products. The solution of the problem is given with the specified parameter values in Excel using the "Solution Search" add-in. An analysis of the optimal solution for stability is carried out. The optimization task is implemented programmatically based on Python packages.

The conclusions about the work done and the results are described in conclusion.

Оглавление

Введение

Любая технология производства продукции, в том числе и в пищевой промышленности, требует принятия технически и экономически обоснованных решений. Для того, чтобы принять грамотное управленческое решение необходимо уметь анализировать, прогнозировать и давать строгие количественные оценки технологическим процессам. Усложнение технологических процессов в пищевой промышленности стало возможным только с применением математических методов и современных компьютерных средств. Математическое моделирование в пищевой промышленности позволяет оптимизировать технологические процессы производства, вычислять показатели качества, разрабатывать новые рецептуры. Использование различных программных средств позволяет ускорить выбор оптимального решения для той или иной производственной задачи.

Цель выпускной квалификационной работы заключается в построении математической модели задачи оптимизации производства продукции по переработке мяса на предприятии и создании программного продукта на основе пакетов Python для решения поставленной задачи.

В решаемой задаче оптимизации известна рецептурная составляющая мясных изделий, возможные объемы закупки мяса, процент выхода мяса на переработку от живого веса, объемы продаж каждого из видов мясного изделия, затраты мяса на производство колбас, ограничения на временные затраты. В виду нестабильности цен на рынке, выручка от продажи мясных изделий задается в виде параметров. На основе перечисленных данных строится математическая модель задачи линейного программирования. Тестируемая задача решается с помощью настройки «Поиск решений» в Excel.

Объектом исследования данной выпускной квалификационной работы является задача оптимизации в пищевой промышленности.

Предметом исследования является математическая модель линейной задачи оптимизации.

Задачи ВКР для достижения цели:

- формулирование задачи оптимизации производства продукции по переработке мяса на предприятии;
- построение математической модели сформулированной задачи
- решение сформулированной задачи с помощью надстройки «Поиск решений» в Excel;
- анализ модели на чувствительность к изменению параметров;
- создание программного продукта на основе пакетов Python для решения поставленной задачи.

Структура выпускной квалификационной работы: введение, две главы, заключение, список литературы.

В главе 1 рассматривается математическое моделирование процессов в пищевой промышленности, а также применение математических методов в создании рецептур, приводятся теоретические сведения решения задачи линейного программирования.

В главе 2 формулируется задача выпускной квалификационной работы, строится математическая модель технологического процесса с учетом рецептур колбасных изделий, удовлетворяющих государственным стандартам. Приводится решение задачи при заданных значениях параметров в Excel с помощью надстройки «Поиск решений». Проводится анализ оптимального решения на устойчивость. Осуществляется программная реализация задачи оптимизации на основе пакетов Python.

Выводы о проделанной работе и результаты описаны в заключение.

Глава 1. Применение математических методов в создании рецептур пищевой промышленности

1.1 Математическое моделирование в пищевой промышленности

Для любого многокомпонентного производства требуется глубокий анализ и прогнозирование, что невозможно без применения математических методов и использования компьютерных систем. Эффективное управление производством не может обойтись без математического моделирования для получения количественных оценок.

В результате совершенствования технологических процессов в пищевой промышленности, применение математических методов при разработке рецептур новых изделий становится все более актуальным. Интересы менеджмента, занятого в пищевой промышленности, зачастую можно свести к задачам оптимизации: минимизация издержек, максимизация прибыли, максимизация объемов производства. При этом всегда присутствуют ограничения: на производственные мощности, сырьевые ресурсы, время…

Многие задачи, решаемые в пищевой промышленности, можно свести к задачам линейного программирования. В частности, к задачам линейного программирования можно свести задачи на составление рецептов, это так называемые «рецептурные задачи». Часто в качестве линейной функции-цели выбирается прибыль, получаемая при реализации готовой продукции, которая максимизируется, или выбирается функция издержек, которая минимизируется. Из множества допустимых решений (области производственных возможностей) выбирается множество максимизирующее (минимизирующее) значение целевой функции.

Составление рецептов продуктов пищевой промышленности, наилучшим образом отражающих требованиям, поставленным перед производителем, стало возможным в настоящее время благодаря использованию компьютерных систем в управлении технологическими процессами. Применение математических методов вместе с современными вычислительными средствами повышает эффективность производства многокомпонентных пищевых продуктов, экономит сырьевые ресурсы.

Задачу на составление рецепта многокомпонентного продукта можно рассматривать, как задачу линейного программирования, когда требуется из ограниченного множества рецептов выбрать тот, который больше соответствует линейной функции (желаемому признаку).

«Впервые задачу линейного программирования сформулировал в 1939 г. советский математик, лауреат Нобелевской премии академик Л.В. Канторович. Л.В. Канторович разработка общие методы решения задачи ЛП. В дальнейшем методы линейного программирования разрабатывались зарубежными американскими учеными. Основной метод решения таких задач – симплекс-метод – опубликован в 1949 г. американским ученым Дж. Данцигом. В своих работах Дж. Данциг ссылался на работы Л.В. Канторовича.

В пищевой промышленности проблемой оптимизации рецептуры и ассортимента пищевых продуктов плодотворно занимались русские ученые Ю.П. Маркин, Ю.А. Ивашкин. На примерах расчета рецептур мороженого и обоснования его ассортимента на фабриках ученые заложили основы решения оптимизационных задач в молочной промышленности. Работы Ю.П. Маркина (1972) и Ю.А. Ивашкина (1989) – учебные пособия, содержащие методику применения методов линейного программирования в пищевой промышленности. Авторы учебных пособий по технологии молока и молочных продуктов рекомендуют рассчитывать рецептуру продуктов графическим, нормативным, алгебраическим методами. В учебных пособиях приводится большой набор справочных (типовых) рецептур пищевых продуктов» [9].

Для разработки рецептов для продуктов, состоящих из большого числа ингредиентов, в последнее время все больше и больше применяется вычислительная техника. Появляются в программах для подготовки бакалавров и магистров новые дисциплины связанные методологией проектирования продуктов питания с применением цифровых технологий.

Таким образом, «большую роль в совершенствовании технологии продуктов сложного сырьевого состава и методов экономического анализа играет построение математических моделей и применение математических методов для решения задачи оптимизации. С целью разработки многокомпонентного продукта имеет место множество вариантов рецептур. Однако задача специалиста в этой области состоит в том, чтобы из множества вариантов выбрать рецептуру с заданными параметрами (например, с минимальной себестоимостью, высокими качественными показателями, максимальным использованием сырьевых ресурсов)» [10].

Под проектированием технологических процессов в пищевой промышленности подразумевается построение математических моделей, отражающих последовательность построения цепочки производства пищевых продуктов с заданными функциональными свойствами. Поэтапное формирование цепочки производства с учетом рецептурного состава многокомпонентного продукта можно представить в следующем виде.

1. Озвучивается предмет, формируются цели исследования. Например, повышение эффективности технологического процесса.

2. Выявляются факторные и результативные признаки. Например, в качестве факторных признаков могут быть рецептурные составляющие, затраты на покупку ингредиентов, составляющих планируемый к производству пищевой продукт. В качестве результативного признака могут быть выбраны затраты на производство единицы продукции, суммарная прибыль от реализации готовой продукции.

3. Связь между элементами модели озвучивается вербально.

4. Модель подлежит формализации с применением математических знаков и символов. Строятся балансовые ограничения на основе имеющегося банка данных с учетом стандартов по химическому составу входящих в разрабатываемый продукт компонентов сырья.

5. Строятся ограничения по составу ингредиентов, входящих в продукт, на основании стандартов и нормативной документации.

6. Линейная функция цели (критерий оптимальности), по которой в последствии проводится оптимизация технологического процесса производства, подлежит формализации.

7. Анализируется модель и математические методы применимые для решения задачи оптимизации. На основании чего, строится алгоритм. Выбираются компьютерные средства.

8. Решается задача оптимизации с привлечением математических методов и компьютерных средств.

9. Числовые значения, полученные в результате решения задачи оптимизации анализируются с технологической и экономической точек зрения, выбирают вариант, обеспечивающий максимум (минимум) целевой функции с учетом имеющихся ограничений.

10. Проверка адекватности модели. Результаты эксперимента должны отражать действительность и должны находиться в пределах определенной точности.

11. Возможна модификация модели. Модель в некоторых случаях приходится усложнить для того, чтобы она была реалистична, или, наоборот, модель упрощают, чтобы получить решение, которое можно принять.

Построенная модель позволяет выявлять особенности протекания технологического процесса, прогнозировать изменения при изменении каких-либо параметров.

Чаще всего модели подлежат доработке, так как любая экономическая модель абстрактна. При построении модели разработчики выявляют существенные факторы, определяющие технологический процесс, и отбрасывают детали, не существенные для решения поставленной задачи. Это с одной стороны упрощает исследование процесса производства, но с другой стороны может привести к неверным выводам. Не учтенные факторы, оказывающие малое воздействие, в совокупности могут привести к значительному отклонению от ожидаемого протекания процесса. В связи с чем, в процессе совершенствования математической модели, состав учтенных факторов и структура модели подлежат уточнению. Например, в некоторых случаях спрос можно рассматривать, как функцию цены. Но такие факторы, как достаток потребителей, традиции и климат региона, могут существенно исказить, построенную модель.

1.2 Математическая модель задачи линейного программирования

Задача нахождения оптимального решения на заданном множестве может быть сформулирована следующим образом:

$F(x) \rightarrow max \quad (min)$,

при условии, что $x \in X$,

где $F(x)$ – целевая функция (показатель эффективности),

X - допустимое множество значений x.

Чаще всего $x(x_1, x_2, \dots, x_n)$ - это n – мерный вектор, а $X \subset R^n$.

Точку x^*, в которой $F(x)$ достигает max (min), и при этом $x^* \in X$ называют оптимальным решением, таких точек может быть множество.

Если целевая функция и ограничения заданы при помощи линейных функций, то задача называется задачей линейного программирования (ЛП).

В общем виде задача линейного программирования формулируется следующим образом: задана линейная функция

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j \Rightarrow max \quad (min) . \qquad (1)$$

И система m линейных уравнений и неравенств с n переменными:

$$\{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j \leq b_i \qquad (i = 1,2, \dots, m), \qquad (2)$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, n}). \qquad (3)$$

«Необходимо найти такое решение системы ограничений (2) при условии не отрицательности переменных (3), при котором линейная функция $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ принимает оптимальное (т.е. максимальное или минимальное) значение.

Сформулируем несколько определений и теорем важных для нахождения решения задачи линейного программирования без приведения доказательства.

Теорема 1. Множество всех допустимых решений системы (2) является выпуклым многогранником (выпуклой многогранной областью) в
n- мерном пространстве.

Теорема 2. Если в задаче линейного программирования допустимое множество не пусто и целевая функция ограничена, то существует хотя бы одно оптимальное решение» [20].

Теорема 3. Для каждой задачи линейного программирования, записанной в стандартной форме (1) - (3), можно построить задачу в канонической форме. Верно и обратное утверждение.

Каноническая форма представлена системой ограничений в виде равенств, которые получаются из системы неравенств (2) введением балансовых переменных.

Теорема 4. Между множеством опорных решений задачи линейного программирования, записанной в канонической форме, и множеством угловых точек области допустимых решений соответствующей задачи, записанной в стандартной форме, существует взаимно однозначное соответствие.

Определение 1. Опорным решением может быть любое неотрицательное базисное решение.

Определение 2. Решение системы ограничений, записанной в канонической форме, в котором все свободные переменные равны нулю называется базисным решением.

Базисных решений ровно столько, каков ранг системы ограничений.

Определение 3. «Целевая функция в задаче ЛП называется ограниченной, если в задаче на максимум целевая функция ограничена на допустимом множестве сверху, а в задаче на минимум – снизу

Теорема 5. Если в задаче линейного программирования все переменные имеют условие не отрицательности и целевая функция ограничена сверху на допустимом множестве, то угловая точка, в которой целевая функция принимает наибольшее значение среди всех угловых точек множества допустимых решений, является оптимальным решением.

Аналогично, если в задаче линейного программирования все переменные имеют условие не отрицательности и целевая функция ограничена снизу на допустимом множестве, то угловая точка, в которой целевая функция принимает наименьшее значение среди всех угловых точек множества допустимых решений, является оптимальным решением.

Заметим, что задача линейного программирования может иметь и бесчисленное множество решений. Это возможно, когда целевая функция достигает наибольшего значения в двух соседних вершинах области допустимых решений системы неравенств (2), а значит и вдоль всего отрезка, соединяющего эти вершины. В этом случае говорят, что задача линейного программирования имеет альтернативное решение» [13].

1.3 Симплексный метод решения задачи линейного программирования

«Решить задачу линейного программирования можно методом перебора конечного числа опорных решений и выбрать среди них то, при котором линейная функция цели достигает своего наибольшего или наименьшего значения.

Но на практике число опорных решений может быть достаточно велико. Существует алгоритм, позволяющий на каждом шаге получать решения, по крайней-мере не хуже, чем на предыдущем шаге. Такой перебор позволяет сократить число шагов. Данный метод называется симплексным методом.

Геометрический смысл симплексного метода состоит в последовательном переходе от одной вершины многогранника допустимых решений к соседней, в которой целевая функция принимает значение “по крайней мере” не худшее, до тех пор, пока не будет найдено оптимальное» [17].

«Критерий оптимальности решения при отыскании максимума целевой функции в задаче линейного программирования: если в выражении целевой функции через свободные переменные отсутствуют положительные коэффициенты при свободных переменных, то решение оптимально.

Критерий оптимальности решения при отыскании минимума целевой функции в задаче линейного программирования: если в выражении целевой функции через свободные переменные отсутствуют отрицательные коэффициенты при свободных переменных, то решение оптимально» [12].

Для решения задачи ЛП (1) – (3) симплексным методом, необходимо от стандартного вида записи системы (2) перейти к канонической форме. Для перехода к канонической форме, в систему (2) вводится m балансовых переменных x_j $(j = n+1, \dots, n+m)$. В результате получим модель ЛП в виде

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j \Rightarrow max \quad (min) .$$
$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n+m} a_{ij} \cdot x_j = b_i \qquad (i = 1,2,\dots,m), \\ x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, n+m}). \end{cases} \qquad (4)$$

Если ранг расширенной матрицы $A \backslash B$ коэффициентов системы (4), равен рангу матрицы А и равен, допустим k $(k \leq m)$, то система уравнений (4), согласно теореме Кронекера – Капелле, совместна и имеет решение. Если в системе (3) при этом присутствует хотя бы одно из неравенств или присутствуют уравнения, являющиеся линейной комбинацией других уравнений системы (4), то ранг будет меньше, чем число неизвестных. В этом случае решений будет бесчисленное множество $(n > k$)

Базисных переменных будет ровно столько, каков ранг. Остальные переменные будут свободными. На первом шаге в качестве базисных переменных удобно взять балансовые переменные x_j $(j = \overline{k+1, n})$ так как система (4) легко разрешима относительно этих переменных. Оставшиеся переменные x_j $(j = \overline{1, k})$ будут свободными переменными.

Систему (4) решают относительно базисных переменных, приравнивая к нулю свободные переменные. Если все компоненты полученного решения будут неотрицательны, то получено первое базисное решение. В этом случае, полученное базисное решение будет опорным решением, при котором значение целевой функции равно нулю. Если же хотя бы одна из компонент решения примет отрицательное значение, то решение не будет опорным. В этом случае в качестве базисных переменных выбираются другие k переменных. Базисными переменными могут быть только k переменных, определитель матрицы коэффициентов, которых не равен нулю.

1.4 Возможности надстройки «Поиск решения» для решения рецептурных задач в пищевой промышленности

В настоящее время для создания рецептур многокомпонентных продуктов питания в технологические процессы широко внедряются программные средства такие, как MathCAD, Maple, Mathematica, Matlab, Statistika, Excel. В результате повышается значительно эффективность технологических процессов. Применение математических методов и информационных технологий позволяет разработчикам рецептур строить не только количественные оценки относительно состава изготавливаемого продукта, оценивая энергетическую, пищевую, биологическую составляющие, но и вносить элементы творчества в создание продукта. Построение математических моделей и применение информационных технологий позволяет разработчикам рецептов многокомпонентных продуктов осуществлять интегральную оценку сбалансированности проектируемых продуктов питания.

«На этапе создания нового продукта питания первостепенной задачей является проектирование рецептуры разрабатываемого продукта таким образом, чтобы она удовлетворяла всем потребностям потребителя. При разработке многокомпонентных продуктов питания с рядом ограничивающих факторов реализовать данную задачу без использования компьютерных технологий сложно и проблематично. Данную проблему решает использование системы табличного редактора Microsoft Excel. Наиболее распространённая программа – система Microsoft Excel с надстройкой «Поиск решения». Работа с табличным процессором Excel основана на введении необходимых для вычисления данных, расчетных формул в соответствующие ячейки электронной таблицы. Microsoft Excel обладает большими возможностями в рецептурных расчетах многокомпонентных пищевых систем. Данная надстройка позволяет эффективно решать рецептурные задачи, а представление результатов в виде таблиц обеспечивают удобную для учета и отчетности информацию. Более того, надстройки «Поиск решения» приложения Excel по своим функциональным возможностям не уступают аналогам специальных математических программ, например, MathCAD. При прочих равных условиях общепризнанным преимуществом Excel является простота интерфейса и доступность для широкого пользователя» [14].

Глава 2. Построение математической модели технологического процесса

2.1 Постановка задачи

Решим задачу оптимизации производства продукции по переработке мяса на предприятии.

В цех предприятия поступает мясо двух видов: крупный рогатый скот и свинина. Часть мяса поступает в продажу в сыром виде (говядина и свинина), а другая часть поступает в продажу в виде колбасных изделий.

Согласно рецептуре, известна структура колбасных изделий, известна выручка, получаемая при реализации 1 кг каждого из изделий. Требуется спланировать объемы производства продукции каждого вида для получения максимальной выручки.

Известно, что мясо говядины составляет 43,1% от единицы живой массы крупного рогатого скота; мясо свинины составляет 56,3% от единицы живой массы.

Производству колбас сопутствует производство сухих добавок, а также пищевых и технических жиров. Производство пищевых жиров составляет 4,1% от общего количества мяса, идущего на производство колбасы. Производство технических жиров составляет 2,4% от общего количества мяса, идущего на производство колбасы и соответственно масса сухих добавок – 0,9%

На одну т крупного рогатого скота приходится 21 кг шкур; на одну тонну свинины приходится 67 кг.

В месяц закупается U т живого мяса.

Объемы производства колбасного цеха в месяц V т.

Затраты труда в месяц C чел-час.

Расход говядины и свинины на одну тонну колбасных изделий представлен в таблице 1.

Таблица 1 – Расход говядины и свинины на одну тонну колбасных изделий

	Наименование производимой продукции	Говядина (%)	Свинина (%)	Минимальные объёмы производства в месяц (т.)	Максимальные объёмы производства в месяц (т.)
1.	Колбасы вареные	35	65	a_1	b_1
2.	Колбасы полу копченые	25	75	a_2	b_2
3.	Колбасы копченые	15	85	a_3	b_3
4.	Сосиски	33	67	a_4	b_4
5.	Котлеты	40	60	a_5	b_5
6.	Прочие	45	55	a_6	b_6

Выручка, получаемая при реализации одной тонны продукции представлена в таблице 2.

Таблица 2 – Выручка, получаемая при реализации одной тонны продукции

	Реализация одной тонны продукции	Выручка д. е.
	Говядины в свободной продаже	c_1
	Свинины в свободной продаже	c_2
	Вареных колбас	c_3
	Полу копчёных колбас	c_4
	Копченых колбас	c_5
	Сосисок	c_6
	Котлет	c_7
	Прочего	c_8

Требуется определить объёмы производства продукции каждого из перечисленных шести наименований при максимальном значении выручки.

Перед нами задача линейного программирования. Для построения модели введем обозначения:

x_1 (т.) – говядины расходуется для производства колбасных изделий;

x_2(т.) – говядины уходит в свободную продажу;

x_3(т.) – свинины расходуется для производства колбасных изделий;

x_4(т.) – свинины уходит в свободную продажу;

x_5(т.) – объемы производства пищевых жиров;

x_6(т.) – объемы производства технических жиров;

x_7 (т.) – объемы производства сухих кормов;

x_8(т.) – выход шкуры говядины;

x_9(т.) –выход шкуры свинины;

x_{10}(т.) – объемы закупки крупного рогатого скота на переработку;

x_{11}(т.) – объемы закупки свинины на переработку;

x_{12}(т.) – объемы производства вареных колбас;

x_{13}(т.) – объемы производства полукопченых колбас;

x_{14}(т.) – объемы производства копченых колбас;

x_{15}(т.) – объемы производства сосисок;

x_{16}(т.) – объемы производства котлет;

x_{17}(т.) – объемы производства прочего.

Выручка будет расти с ростом объёмов производства мясных изделий, но ограничения, накладываемые на объемы закупки КРС и свинины, а также ограничения, связанные с возможностью сбыта товара и оснащением цеха для производства конкретных наименований продукции, временными затратами на производство, не позволяет свободно расти выручке.

Количество говядины, идущее на производство колбасных изделий и в свободную продажу, должно быть равно убойному выходу говядины от живого веса на одну тонну сырья (43,1%) умноженному на объёмы закупки крупного рогатого скота:

$$x_1 + x_2 = 0{,}431 \cdot x_{10} \ . \qquad (1)$$

Аналогично, количество свинины, идущее на производство колбасных изделий и в свободную продажу, должно быть равно убойному выходу свинины от живого веса на одну тонну сырья (56,3%) умноженному на объёмы закупки свинины:

$$x_3 + x_4 = 0{,}563 \cdot x_{11} \ . \qquad (2)$$

На основании того, что масса пищевых жиров составляет 4,1% от общего количества мяса, идущего на производство колбасы, составим ограничение:

$$0{,}041 \cdot x_1 + 0{,}041 \cdot x_3 = x_5 \ . \qquad (3)$$

На основании того, что масса технических жиров составляет 2,4% от общего количества мяса, идущего на производство колбасы, составим ограничение:

$$0{,}024 \cdot x_1 + 0{,}024 \cdot x_3 = x_6. \qquad (4)$$

На основании того, что корма сухие составляет 0,9% от общего количества мяса, идущего на производство колбасы, составим ограничение:

$$0{,}009 \cdot x_1 + 0{,}009 \cdot x_3 = x_7. \qquad (5)$$

На основании того, что на одну тонну крупного рогатого скота приходится 21 кг шкур, составим ограничение:

$$x_8=0{,}0021 \cdot x_{10}. \qquad (6)$$

На основании того, что на одну тонну свинины приходится 67 кг шкур, составим ограничение:

$$x_9=0{,}0067 \cdot x_{11}. \qquad (7)$$

На основании того, что в год закупается U т живого мяса, составим ограничение:

$$x_{10}+x_{11} \leq U. \qquad (8)$$

На основании того, что объемы производства колбасного цеха в месяц **V** т, составим ограничение:

$$x_{12}+x_{13}+ x_{14}+x_{15} + x_{16}+x_{17} \leq V. \qquad (9)$$

По условию задачи затраты труда в год составляют С чел-час. Для того, чтобы составить ограничение на затраты труда за весь год необходимо оценить затраты труда на каждом этапе производства.

В среднем для разделки одной тонны говядины (свинины) на мясо (колбасу) требуется 11,45 чел-час.

На обработку одной тонны пищевых жиров требуется 23 чел-час.

На производство одной тонны вареных колбас требуется 65,8 чел-час.

На производство одной тонны полукопченых колбас требуется 67,4 чел-час.

На производство одной тонны копченых колбас требуется 69,4 чел-час.

На производство одной тонны сосисок требуется 65,2 чел-час.

На производство одной тонны котлет требуется 37,0 чел-час.

На производство одной тонны прочего требуется 65,6 чел-час.

Отсюда ограничение на затраты труда в месяц:

$$11{,}45(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) + 23(x_5 + x_6 + x_7) + 65{,}8\,x_{12} + 67{,}4\,x_{13} + 69{,}4\,x_{14} + 65{,}2\,x_{15} + 37{,}0\,x_{16} + 65{,}6\,x_{17} \le \mathrm{C}\,. \quad (10)$$

Составим ограничения на объемы производства по данным таблицы 1.

Ограничение на суммарный расход говядины:

$$0{,}35\mathrm{x}_{12} + 0.25\mathrm{x}_{13} + 0{,}15\mathrm{x}_{14} + 0{,}33\mathrm{x}_{15} + 0{,}40\mathrm{x}_{16} + 0{,}45\mathrm{x}_{17} = \mathrm{x}_1. \quad (11)$$

Ограничение на суммарный расход свинины:

$$0{,}65\mathrm{x}_{12} + 0.75\mathrm{x}_{13} + 0{,}75\mathrm{x}_{14} + 0{,}67\mathrm{x}_{15} + 0{,}60\mathrm{x}_{16} + 0{,}55\mathrm{x}_{17} = \mathrm{x}_3. \quad (12)$$

Согласно таблице 1, минимальные объёмы производства в месяц вареных колбас 54 т.; максимальные объёмы производства в год вареных колбас 123 т.:

$$a_1 \le x_{12} \le b_1. \quad (13)$$

Согласно таблице 1, минимальные объёмы производства в месяц в полукопченых колбас 23 т.; максимальные объёмы производства в месяц полукопченых колбас 63 т.:

$$a_2 \le x_{13} \le b_2. \quad (14)$$

Согласно таблице 1, минимальные объёмы производства в месяц в копченых колбас 51 т.; максимальные объёмы производства в месяц копченых колбас 71 т.:

$$a_3 \le x_{14} \le b_3. \quad (15)$$

Согласно таблице 1, минимальные объёмы производства в месяц сосисок 47 т.; максимальные объёмы производства в месяц сосисок 56 т.:

$$a_4 \leq x_{15} \leq b_4. \qquad (16)$$

Согласно таблице 1, минимальные объёмы производства в месяц котлет 42т.; максимальные объёмы производства в месяц котлет 60 т.:

$$a_5 \leq \ x_{16} \leq b_5. \qquad (17)$$

Согласно таблице 1, минимальные объёмы производства в месяц прочего 46т.; максимальные объёмы производства в месяц прочего 58 т.:

$$a_6 \leq x_{17} \leq b_6. \qquad (18)$$

Построим целевую функцию *F(x)*, где *x* вектор пространства R^{17} . Целевая функция будет равна максимально возможной выручке, полученной при реализации продукции за весь месяц:

$$c_1 x_2 + c_2 x_4 + c_3 x_{12} + c_4 x_{13} + c_5 x_{14} + c_6 x_{15} + c_7 x_{16} + c_8 x_{17} \rightarrow \max. \qquad (19)$$

В результате получим модель исходной задачи:

$$c_1 x_2 + c_2 x_4 + c_3 x_{12} + c_4 x_{13} + c_5 x_{14} + c_6 x_{15} + c_7 x_{16} + c_8 x_{17} \rightarrow \max,$$

$$
\begin{cases}
x_1 + x_2 = 0{,}431 \cdot x_{10}, \\
x_3 + x_4 = 0{,}563 \cdot x_{11}, \\
0{,}041 \cdot x_1 + 0{,}041 \cdot x_3 = \ x_5, \\
0{,}024 \cdot x_1 + 0{,}024 \cdot x_3 = \ x_6, \\
0{,}009 \cdot x_1 + 0{,}009 \cdot x_3 = \ x_7, \\
x_8 = 0{,}0021 \ \cdot x_{10,} \\
x_9 = 0{,}0067 \ \cdot x_{11}, \\
x_{10} + x_{11} \le U, \\
x_{12} + x_{13} + \ x_{14} + x_{15} + x_{16} + x_{17} \le V, \\
11{,}45(x_1 + x_2 + \ x_3 + x_4) + 23(x_5 + x_6 + x_7) + 65{,}8\, x_{12} + \\
+67{,}4\, x_{13} + 69{,}4\, x_{14} + 65{,}2\, x_{15} + 37{,}0\, x_{16} + 65{,}6\, x_{17} \le \text{C}, \\
0{,}35x_{12} + 0.25x_{13} + \ 0{,}15x_{14} + 0{,}33x_{15} + 0{,}40x_{16} + 0{,}45x_{17} = x_{1,} \\
0{,}65x_{12} + 0.75x_{13} + \ 0{,}75x_{14} + 0{,}67x_{15} + 0{,}60x_{16} + 0{,}55x_{17} = x_{3,} \\
a_1 \le x_{12} \le b_1, \\
a_2 \le x_{13} \le b_2, \\
a_3 \le x_{14} \le b_3, \\
a_4 \le x_{15} \le b_4 \\
a_5 \le \ x_{16} \le b_5 \\
a_6 \le x_{17} \le b_6, \\
x_i \ge 0 \\
(i = \overline{1; 17}).
\end{cases}
$$

Решим задачу в Excel.

2.2 Решение задачи в Microsoft EXCEL

«Программа MS Excel содержит модуль «Поиск решения», позволяющий осуществлять поиск оптимальных решений, в том числе решение задач линейного, целочисленного, нелинейного и стохастического программирования.

Поскольку задача решается с помощью программы MS Excel, то и подготовку всей исходной информации для построения модели целесообразно осуществлять также с использованием программы. Это облегчает не только расчеты технико-экономических коэффициентов и других данных, но и дает в дальнейшем возможность автоматического обновления информации в экономико-математической модели» [22].

Рассмотрим применение этого модуля на примере решения тестируемой задачи. Решим задачу, задав параметры.

В месяц закупается $U = 1460$ т живого мяса;

объемы производства колбасного цеха в месяц V =420 т.;

Затраты труда в месяц C=35000 чел-час.

В таблице 3 зададим значения параметров.

Таблица 3 – Ограничения на объёмы производства колбасных изделий в месяц

	Наименование продукции	Минимальные объёмы производства в месяц (т.)	Максимальные объёмы производства в месяц (т.)
7.	Колбасы вареные	a_1=50	b_1 =120
8.	Колбасы полукопченые	a_2=30	b_2 =66
9.	Колбасы копченые	a_3 =50	b_3 =74
10.	Сосиски	a_4 =42	b_4 =62
11.	Котлеты	a_5 =40	b_5 =64
12.	Прочие	a_6=40	b_6 =60

Для наглядности и простоты расчетов введем в модель в качестве коэффициентов целевой функции выручку, получаемую при реализации одной тонны продукции в денежных единицах, приравняв одну денежную единицу 100 000 рублям.

В таблицу 4 внесем выручку, получаемую при реализации одной тонны продукции в условных денежных единицах.

Таблица 4 – Выручка, получаемая при реализации одной тонны продукции

	Реализация одной тонны продукции	Выручка д. е.
1	Говядины в свободной продаже	$c_1=5{,}2$
2	Свинины в свободной продаже	$c_2=3{,}99$
3	Вареных колбас	$c_3=5$
4	Полу копчёных колбас	$c_4=6$
5	Копченых колбас	$c_5=7$
6	Сосисок	$c_6=5$
7	Котлет	$c_7=3$
8	Прочего	$c_8=3$

Модель исходной задачи примет вид:

$$5{,}2x_2+3{,}99x_4+5x_{12}+6x_{13}+7x_{14}+5x_{15}+3x_{16}+3x_{17}\rightarrow max,$$

$$\left\{\begin{array}{c}
x_1+x_2=0{,}431\cdot x_{10},\\
x_3+x_4=0{,}563\cdot x_{11}\\
0{,}041\cdot x_1+0{,}041\cdot x_3=\ x_5\\
0{,}024\cdot x_1+0{,}024\cdot x_3=\ x_6\\
0{,}009\cdot x_1+0{,}009\cdot x_3=\ x_7\\
x_8=0{,}0021\cdot x_{10}\\
x_9=0{,}0067\cdot x_{11}.\\
x_{10}+x_{11}\le 1460\\
x_{12}+x_{13}+x_{14}+x_{15}+x_{16}+x_{17}\le 420\\
11{,}45(x_1+x_2+x_3+x_4)+23(x_5+x_6+x_7)+65{,}8\,x_{12}+\\
+67{,}4\,x_{13}+69{,}4\,x_{14}+65{,}2\,x_{15}+37{,}0\,x_{16}+65{,}6\,x_{17}\le 35000.\\
0{,}35x_{12}+0.25x_{13}+0{,}15x_{14}+0{,}33x_{15}+0{,}40x_{16}+0{,}45x_{17}=x_1\\
0{,}65x_{12}+0.75x_{13}+0{,}75x_{14}+0{,}67x_{15}+0{,}60x_{16}+0{,}55x_{17}=x_3\\
50\le x_{12}\le 120\\
30\le x_{13}\le 66\\
50\le x_{14}\le 74\\
50\le x_{14}\le 74\\
42\le x_{15}\le 62\\
40\le x_{17}\le 60\\
x_i\ge 0\\
(i=\overline{1;17})
\end{array}\right.$$

Решим поставленную задачу в табличном процессоре Microsoft EXCEL, выполним следующие действия.

«Введем условие задачи.

Создадим экранную форму для ввода условия задачи.

Введем исходные данные в экранную форму: коэффициенты ЦФ, коэффициенты при переменных в ограничениях, правые части ограничений.

Введем зависимости из математической модели в экранную форму: формулу для расчета ЦФ, формулы для расчета значений левых частей ограничений.

Зададим ЦФ (в окне «Поиск решения») целевую ячейку, направление оптимизации ЦФ (максимизируем).

Введем ограничения и граничные условия (в окне «Поиск решения»): ячейки со значениями переменных, граничные условия для допустимых значений переменных, соотношения между правыми и левыми частями ограничений. Экранную форму для ввода условия задачи представим на рисунке 1» [2].

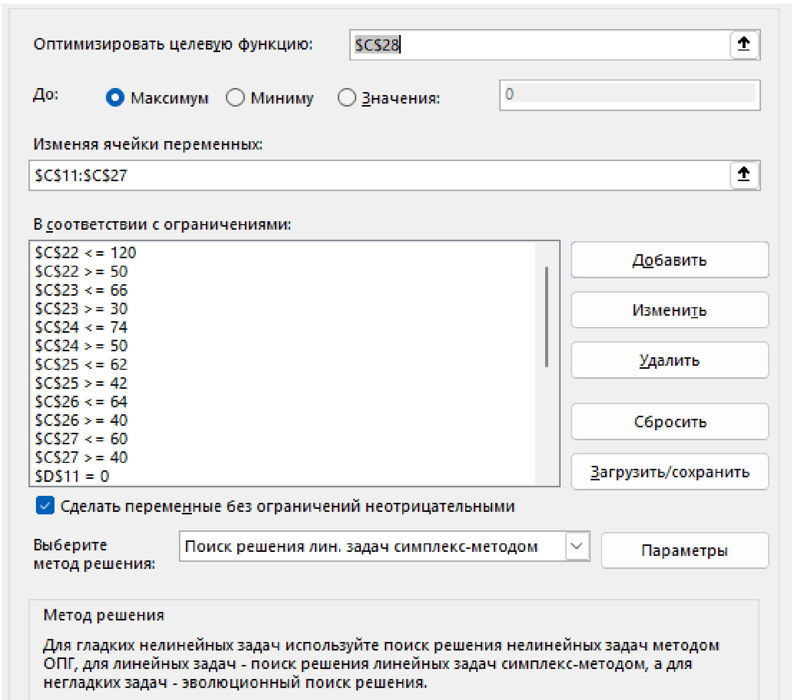

Рисунок 1 – Экранная форма для ввода условия задачи

Изменение ограничений представим на рисунке 2.

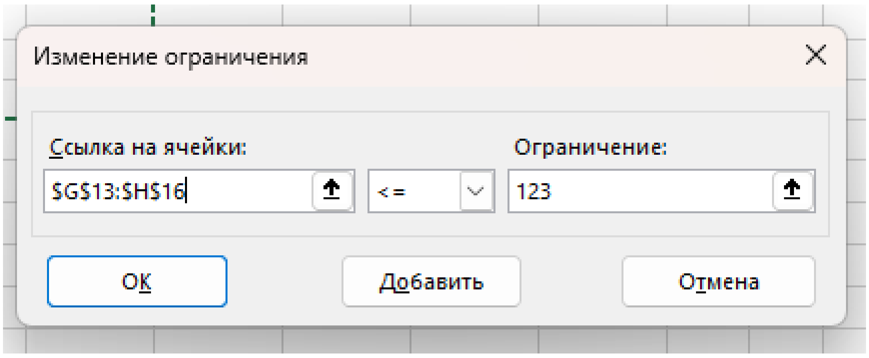

Рисунок 2 – Экранная форма для ввода отдельных ограничений

Процесс решения задачи.

Установим параметры решения задачи (в окне «Поиск решения»).

Точность зададим числом 0,0001. Параметр «Точность» служит для задания точности, с которой определяется соответствие ячейки целевому значению или приближение к указанным границам.

«Параметр «Допустимое отклонение» задается в процентах. «Допустимое отклонение» - служит для задания допуска на отклонение от оптимального решения, если множество значений влияющей ячейки ограничено множеством целых чисел. При указании большего допуска поиск решения заканчивается быстрее.

Укажем, что модель линейная. Данный параметр служит для ускорения поиска решения линейной задачи оптимизации.

Параметр «Оценка» служит для указания метода экстраполяции — линейная или квадратичная — используемого для получения исходных оценок значений переменных в каждом одномерном поиске. Линейная экстраполяция осуществляется вдоль касательного вектора. Квадратичная служит для использования квадратичной экстраполяции, которая дает лучшие результаты при решении нелинейных задач. Так как в данном случае решается линейная задача, то выбирается метод линейной экстраполяции.

Параметр «Метод» служит для выбора алгоритма оптимизации — метода Ньютона или сопряженных градиентов. Для решения задачи выберем метод Ньютона, так как для решения линейных задач он более рационален.

Параметры «Максимальное время» и «Число итераций» задаются по умолчанию. Параметр «Максимальное время» служит для ограничения времени, отпускаемого на поиск решения задачи. В поле можно ввести время (в секундах) не превышающее 32767; значение 100, используемое по умолчанию, подходит для решения большинства простых задач. Параметр «Число итераций» служит для управления временем решения задачи, путем ограничения числа промежуточных вычислений. В поле можно ввести время (в секундах) не превышающее 32767; значение 100, используемое по умолчанию, подходит для решения большинства простых задач» [16].

Переход к результатам поиска представлен на рисунке 3.

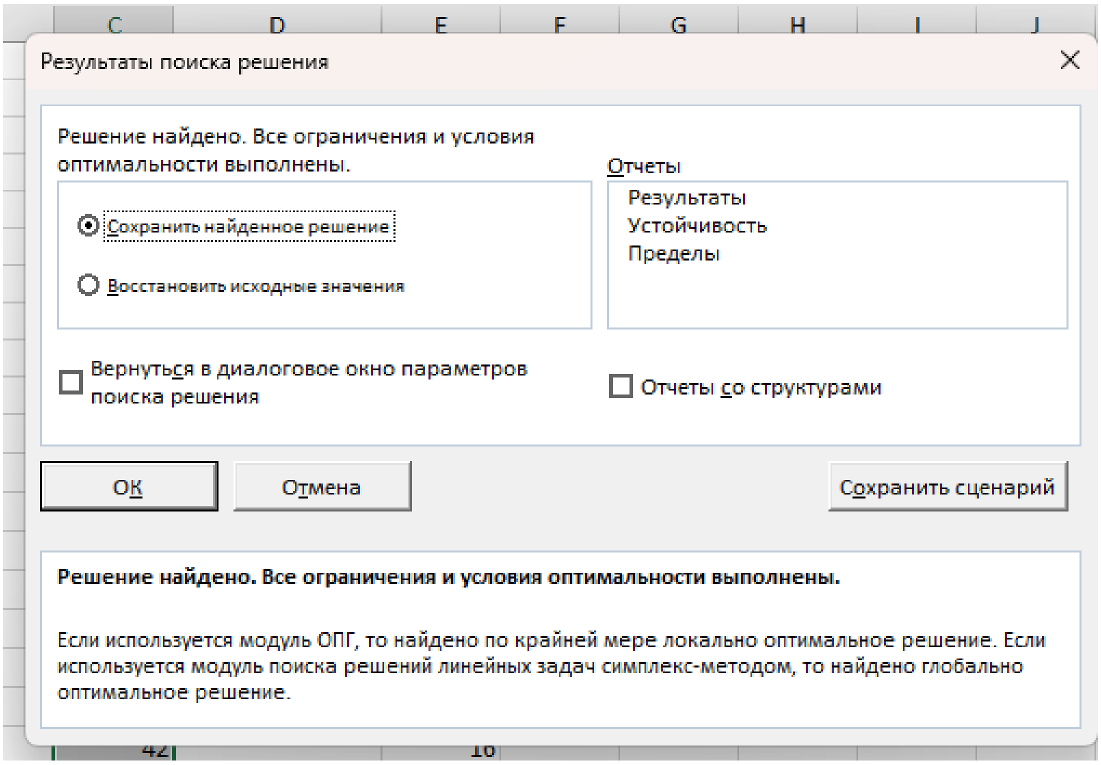

Рисунок 3 – Экранная форма для подтверждения вывода результатов

После того как все параметры введены, для нахождения оптимального решения, запустим задачу на решение (в окне «Поиск решения»); выберем формат вывода решения (в окне «Результаты поиска решений»).

В результате решения и сохранения результатов поиска на листе модель примет вид, представленный на рисунке 4.

0	ПЕРЕМЕННЫЕ (т)			ОГРАНИЧЕНИЯ
1	расход говядины на колбасные изделия	x1	127,56	0
2	кол-во говядины на реализацию в продажу	x2	267,3095	0
3	расход свинины на колбасные изделия	x3	277,04	0
4	кол-во свинины на реализацию в продажу	x4	29,13597	0
5	производство жиров пищевых	x5	16,5886	0
6	производство жиров технических	x6	9,7104	-8,43769E-15
7	производство кормов сухих	x7	3,6414	2,08722E-14
8	шкуры говядины	x8	1,923958	0
9	шкуры свинины	x9	3,643657	-8
0	покупка крупного рогатого скота на переработ	x10	916,1706	4,87489E-10
1	покупка свинины на переработку	x11	543,8294	0
2	производство вареных колбас	x12	130	0
3	производство полукопченых колбас	x13	66	
4	производство копченых колбас	x14	74	
5	производство сосисок	x15	62	
6	производство котлет	x16	40	
7	производство прочего	x17	40	
8	прибыль	F	3745,674	

Рисунок 4 – Экранный вывод решения тестируемой задачи

На основании экранного вывода решения задачи построим таблицу 5, в которую внесем оптимальное решение задачи.

Таблица 5 – Оптимальное решение при заданных значениях параметров

N	$x*$	Наименование, изготавливаемой продукции	Оптимальное значение объемов производства в т.
1.	x_1*	говядины расходуется для производства колбасных изделий;	124,06
2.	x_2*	говядины уходит в свободную продажу	78,32
3.	x_3*	свинины расходуется для производства колбасных изделий;	270,54
4.	x_4*	свинины уходит в свободную продажу;	280,08
5.	x_5*	производство жиров пищевых;	16,18
6.	x_6*	производство жиров технических;	9,47
7.	x_7*	производство кормов сухих;	3,55
8.	x_8*	шкуры говядины;	0,99
9.	x_9*	шкуры свинины;	6,64
10.	$x_{10}*$	покупка крупного рогатого скота на переработку;	469,55
11.	$x_{11}*$	покупка свинины на переработку;	999,45
12.	$x_{12}*$	производство вареных колбас;	120
13.	$x_{13}*$	производство полукопченых колбас;	66
14.	$x_{14}*$	производство копченых колбас;	74
15.	$x_{15}*$	производство сосисок;	62
16.	$x_{16}*$	производство котлет;	40
17.	$x_{17}*$	производство прочего	40
18.	$F(x*)$	Выручка	3745674 руб.

В таблице 5 представлены оптимальные значения объемов производства колбасных изделий

2.3 Анализ оптимального решения на чувствительность

Анализ моделей на чувствительность – это процесс, реализуемый после получения оптимального решения. В рамках такого анализа выявляется чувствительность оптимального решения к определенным изменениям исходной модели. В рассматриваемой задаче может представлять интерес вопрос о том, как повлияет на оптимальное решение изменение пропорций производства колбасных изделий различных наименований, а также изменение пропорций закупаемого сырья. Может также потребоваться анализ влияния рыночных цен на оптимальное решение.

Для анализа рассматриваемой задачи примем, что неравенства системы ограничений могут быть активными или пассивными. Оптимальное решение будет соответствовать активным ограничениям, Пассивным ограничениям соответствует недефицитный ресурс.

При анализе модели на чувствительность к правым частям ограничений, определяются:

а) предельно допустимые увеличения запаса дефицитного ресурса, позволяющие улучшить найденное оптимальное решение;

б) предельно допустимое снижение запаса недефицитного ресурса, не изменяющие найденное ранее оптимальное значение целевой функции.

Выделим мышью, после запуска «Поиск решения», отчет «Устойчивость». Получим отчет об устойчивости в виде рисунка 5.

Ячейки переменных

Ячейка	Имя	Окончательное Значение	Приведенн. Стоимость	Целевая функция Коэффициент	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
C11	x1	124,06	0	0	3,921595342	1,015994178
C12	x2	78,31671444	0	5,2	0,01199536	0,018815424
C13	x3	270,54	0	0	2,677311257	0,547073788
C14	x4	287,0824821	0	3,99	0,013785725	0,009182948
C15	x5	16,1786	0	0	39,18016473	8,673121028
C16	x6	9,4704	0	0	66,93278142	14,81658176
C17	x7	3,5514	0	0	178,4874171	39,51088468
C18	x8	0,986058237	0	0	2,461904762	3,791427414
C19	x9	6,636004671	0	0	1,188357846	0,771641791
C20	x10	469,5515416	0	0	0,00517	0,007961998
C21	x11	990,4484584	0	0	0,007961998	0,00517
C22	x12	120	0,355597962	5	1, 034569845	0,355597962
C23	x13	66	1,471124891	6	1,704569846	1,471124891
C24	x14	74	2,98486575	7	3,234590233	2,98486575
C25	x15	62	0,381850364	5	0,623459099	0,381850364
C26	x16	40	-1,606386754	3	1,606386754	0,120047869
C27	x17	40	-1,764717904	3	1,764717904	0,876508222

Рисунок 5 – Экранный вывод отчета об устойчивости решения

Согласно полученному отчету, можно сделать вывод, что для увеличения выручки следует увеличить производство колбасных изделий. Допустимое увеличение говядины на производство колбасных изделий возможно до 3921 килограмм в месяц, свинины – до 2676 килограмм в месяц.

Для увеличения выручки, в первую очередь, следует увеличить производство копченных колбас. При этом увеличение производства копченных колбас не должно превышать 3235 кг. Дальнейшее увеличение приведет к тому, что область допустимых решений окажется пустым множеством. Увеличение производства полукопченых колбас на 1704 кг также позволит увеличить выручку.

Анализ решения на устойчивость также показал, что увеличение производства котлет и прочей продукции только снизит выручку.

2.4. Разработка алгоритма и программная реализация решения задачи на Python

Почти все широко используемые библиотеки линейного программирования и смешанно-целочисленного линейного программирования написаны на языках Fortran, C или C++, так как линейное программирование требует интенсивной вычислительной работы с матрицами, часто очень большими. Для создания программы, решающей задачу линейного программирования, были использованы язык программирования Python.

Приведем основные характеристики Python. «Интерпретируемость. В «Питоне» операторы кода исполняются последовательно с помощью программы-интерпретатора. Если по ходу исполнения программы встречается ошибка, оно сразу же прекращается. Это позволяет Python-разработчику быстро обнаружить и устранить недочеты, но в то же время снижает производительность.

Динамическая типизация. Это автоматическое связывание переменной и типа в момент, когда ей присваивается определенное значение. Такой механизм ускоряет написание программы в различных ситуациях (например, при работе с переменными данными), но повышает вероятность ошибки.

Язык высокого уровня. Python по своему синтаксису и грамматике близок к естественным языкам. Благодаря этому программисту с его помощью легче описать различные структуры данных и операции, что также ускоряет и упрощает написание кода. Кроме того, это делает ПО, написанное на «Питоне», менее зависимым от платформы.

Объектно-ориентированность. Написанная на «Питоне» программа представляет собой совокупность объектов, каждому из которых присвоены определенный класс и место в иерархии. Таким образом проще управлять процессом программирования, что особенно важно при создании сложных проектов» [24].

Экосистема Python включает несколько мощных инструментов линейного программирования. Соответствующие инструменты Python – это просто удобные интерфейсы для работы с низкоуровневыми библиотеками – солверами. Python был выбран из-за своей простоты и гибкости.

В работе для определения и решения задач линейного программирования мы будем использовать Python-библиотеки SciPy и PuLP.

SciPy – универсальный пакет для научных вычислений с Python. Его внутренний пакет scipy.optimize можно использовать как для линейной, так и для нелинейной оптимизации.

PuLP – API линейного программирования Python для определения задачи и вызова солверов. По умолчанию в качестве солвера используется COIN-OR Branch and Cut Solver (CBC). Еще один отличный солвер с открытым исходным кодом – GNU Linear Programming Kit (GLPK). Библиотека PuLP предоставляет удобные средства для формулирования и решения оптимизационных задач. Pulp упрощает решение задач линейного программирования, поскольку содержит встроенные инструменты поддержки низкого уровня алгоритмов решения.

Рассмотрим, как использовать библиотеку SciPy по оптимизации и поиску корней для линейного программирования. Прежде всего, была выбрана модель задачи, представлена на рисунке 6.

```
# Создание задачи линейного программирования
prob = LpProblem("Моя оптимизационная задача", LpMaximize)
```

Рисунок 6 – Выбор модели

Далее были определены переменные, коэффициенты целевой функции и все ограничения, представлены на рисунке 7.

```python
# Определение переменных
x = [LpVariable(f'x{i}', lowBound=0, cat="Continuous") for i in range(1, 18)]
```

Рисунок 7 – Обозначения переменных и коэффициентов целевой функции

Независимые переменные x_j $(j = \overline{1,17})$, которые нужно найти называют переменными решения (decision variables). Функция, которую необходимо максимизировать (F), – это целевая функция (objective function), функция прибыли (cost function) или просто цель (goal). Неравенства (или уравнения), которым необходимо удовлетворять, называются ограничениями (inequality constraints или equality constraints для обычных уравнений).

Следующим шагом было введение параметров модели, которые легко можно изменять рисунок 8.

```python
c1 = 5.2
c2 = 3.99
c3 = 5
c4 = 6
c5 = 7
c6 = 5
c7 = 3
c8 = 3

U = 1460
V = 420
C = 35000
a1 = 50; b1 = 120
a2 = 30; b2 = 66
a3 = 50; b3 = 74
a4 = 50; b4 = 74
a5 = 42; b5 = 62
a6 = 40; b6 = 60
```

Рисунок 8 – Введение значений параметров тестируемой задачи

На рисунке 9 представлено добавление целевой функции

```
# Добавление целевой функции
prob += c1*x[1] + c2*x[3] + c3*x[11] + c4*x[12] + c5*x[13] + c6*x[14]
+ c7*x[15] + c8*x[16], "Целевая функция"
```

Рисунок 9 – Добавление целевой функции

На рисунке 10 представлено добавление ограничений в модель, используя библиотеку PuLP.

```
# Добавление условий
prob += x[0] + x[1] == 0.431 * x[9], "Условие 1"
prob += x[2] + x[3] == 0.563 * x[10], "Условие 2"
prob += 0.041 * x[0] + 0.041 * x[2] == x[4], "Условие 3",
prob += 0.024 * x[0] + 0.024 * x[2] == x[5], "Условие 4",
prob += 0.009 * x[0] + 0.009 * x[2] == x[6], "Условие 5",
prob += x[7] == 0.0021 * x[9], "Условие 6",
prob += x[8] == 0.0067 * x[10], "Условие 7",
prob += x[9] + x[10] <= U, "Условие 8",
prob += x[11] + x[12] + x[13] + x[14] + x[15] + x[16] <= V, "Условие 9",
prob += 11.45 * (x[0] + x[1] + x[2] + x[3]) + 23 * (x[4] + x[5] + x[6])
+ 65.8 * x[11] + 67.4 * x[12] + 69.4 * x[13] + 65.2 * x[14] + 37.0 * x[15]
+ 65.6 * x[16] <= C, "Условие 10",
prob += 0.35 * x[11] + 0.25 * x[12] + 0.15 * x[13] + 0.33 * x[14] + 0.40 * x[15]
+ 0.45 * x[16] == x[0], "Условие 11",
prob += 0.65 * x[11] + 0.75 * x[12] + 0.75 * x[13] + 0.67 * x[14] + 0.60 * x[15]
+ 0.55 * x[16] == x[2], "Условие 12",
prob += a1 <= x[11] <= b1, "Условие 13",
prob += a2 <= x[12] <= b2, "Условие 14",
prob += a3 <= x[13] <= b3, "Условие 15",
prob += a4 <= x[14] <= b4, "Условие 16",
prob += a5 <= x[15] <= b5, "Условие 17",
prob += a6 <= x[16] <= b6, "Условие 18",
for i in range(1, 18):
    prob += x[i-1] >= 0, f"Условие {i + 18}"
```

Рисунок 10 – Добавление ограничений

После этого задача была передана на решение с помощью метода “solve()”. PuLP автоматически выбирает подходящий алгоритм для решения задачи. На рисунке 11 представлено добавление решателя задачи PROBLEM SOLVER.

```
# Решение задачи
prob.solve()
```

Рисунок 11 – Добавление PROBLEM SOLVER

После успешного решения задачи линейного программирования программа выводит информацию о результатах оптимизации, Результаты решения включает в себя статус, который сообщает о том, была ли задача решена оптимально или возникли какие-либо проблемы. Затем программа выводит решение в виде оптимальных значений переменных, которые были получены в результате решения задачи. После чего, программа выводит значение целевой функции в точке оптимума. На рисунке 12 представлена информация о результатах оптимизации.

```python
# Вывод результатов
sorted_variables = sorted(prob.variables(), key=lambda v: int(v.name[1:]))
print("Статус:", LpStatus[prob.status])
for v in sorted_variables:
    print(v.name, "=", v.varValue)
print("Значение целевой функции:", value(prob.objective))
```

Рисунок 12 – Информацию о результатах оптимизации

Полученный результат оптимизации, представленный на рисунке 13, совпадает с результатом решения тестируемой задачи в Excel.

```
Статус: Optimal
x1 = 94.02
x2 = 0.0
x3 = 232.58
x4 = 466.58501
x5 = 13.3906
x6 = 7.8384
x7 = 2.9394
x8 = 0.45810209
x9 = 8.3204362
x10 = 218.14385
x11 = 1241.8561
x12 = 120.0
x13 = 66.0
x14 = 74.0
x15 = 74.0
x16 = 0.0
x17 = 0.0
Значение целевой функции: 3745.6741899
```

Рисунок 13 – Результат оптимизации

Информация, полученная с помощью программы, помогает принять эффективное решение в рамках задачи оптимизации, выбрать правильные пропорции в производстве имеющихся наименований колбасных изделий в зависимости от спроса и прибыли, получаемой при реализации готовых изделий.

Созданная программа предоставляет несколько преимуществ по сравнению с решением задачи оптимизации в Excel.

Во-первых, программа позволяет автоматизировать процесс решения задачи линейного программирования, что экономит время и снижает вероятность ошибок.

Во-вторых, программа обеспечивает гибкость и расширяемость. Пользователь может легко изменять параметры модели, добавлять новые переменные и ограничения, что делает ее более адаптивной к изменяющимся условиям задачи.

Кроме того, программа обеспечивает более удобную визуализацию результатов. Результаты решения, включая значения переменных и целевой функции, выводятся в удобочитаемом формате непосредственно в консоль, что позволяет быстро и эффективно анализировать результаты и принимать соответствующие решения.

Заключение

В ходе выполнения выпускной квалификационной работы проанализированы возможности математических методов для решения поставленной технологической задачи. Осуществлено математическое моделирование планирования технологического процесса производства мясных изделий. Поставленная в выпускной квалификационной работе задача, сведена к задаче линейного программирования. В роли линейной функции-цели выступает выручка, получаемая при реализации готовой продукции в виде мяса и колбасных изделий.

Математическая модель задачи построена на рецептурной основе колбасных изделий ООО «Фабрика качества», также с учетом ГОСТ 31476-2012 и ГОСТ 34120-2017. В работе приводится анализ устойчивости оптимального решения, позволяющий варьировать объемы производства, изготавливаемой продукции, добиваться оптимального решения при максимальной выручке и контроле остатков сырья.

Тестируемая задача решается с помощью надстройки «Поиск решений» в EXCEL. Проведено обоснование выбора языка программирования. Осуществлена программная реализация задачи оптимизации на основе пакетов Python. Программа успешно прошла тестирование.

В работе проводится подробное обоснование того, что перевод технологических задач в математическую форму позволяет не только уточнить существенные стороны самой задачи, но и значительно сократить время и затраты на ее решение. Программный продукт, созданный в работе, может быть полезен для принятия эффективных решений менеджментом предприятия по изготовлению мясных изделий.

Список используемой литературы

1. Алексеев, Г.В. Математические методы в пищевой инженерии [Электронный ресурс] : учеб. пособие / Г.В. Алексеев, Б.А. Вороненко, Н.И. Лукин. — Электрон. дан. — Санкт-Петербург : Лань, 2012. — 176 с. – Режим доступа: https://e.lanbook.com/book/4039.

2. Балдин, К.В. Математическое программирование : учебник / К.В. Балдин, Н.А. Брызгалов, А.В. Рукосуев ; под общ. ред. К.В. Балдина. – 2-е изд. – Москва : Дашков и К°, 2018. – 218 с. : ил. – Режим доступа: по подписке. – URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=112201 3.

3. Вороненко Б.А. Введение в математическое моделирование: Учеб.-метод. пособие / Б.А. Вороненко, А.Г. Крысин, В.В. Пеленко, О.А. Цуранов. – СПб.: НИУ ИТМО; ИХиБТ, 2014. – 44 с.

4. Голубева, Н.В. Математическое моделирование систем и процессов: учебное пособие для студентов вузов / Н.В. Голубева. – СПб.: Лань, 2013.

5. ГОСТ 31476-2012 Свиньи для убоя. Свинина в тушах и полутушах. Технические условия.

6. ГОСТ 34120-2017 Крупный рогатый скот для убоя. Говядина и телятина в тушах, полутушах и четвертинах Технические условия

7. Данциг Дж. Линейное программирование, его обобщения и применение / Дж. Данциг. – М.: Прогресс, 1966. – 294 с.

8. Дворецкий Д. С. Математическое моделирование процессов и аппаратов химических и пищевых производств: учебное пособие / Д. С. Дворецкий, С. И. Дворецкий, Е. В. Пешкова, М. С. Темнов. – Тамбов: Изд-во ФГБОУ ВПО «ТГТУ», 2014. – 80 с.

9. Жирков А.В., Митин. В.В., Жданов. В.Ф., Копылова Н., Математическое моделирование и оптимизация структуры производства продуктов питания / материалы VII Всероссийской выставки научно-технического творчества молодежи НТТМ-2007. М., ВВЦ ,2007, с.108-109.

10. Жирков А.В., Митин. В.В., Жданов. В.Ф., Копьшова Н., Исследование математического моделирования и структурного анализа социально-экономических, технических и биологических систем // Материалы 5-го Международного форума Министерства Сельского Хозяйства РФ «Мясная промышленность. Куриный король/VIV Russia - 2007». М., МСХ РФ, 2007.

11. Жирков А.В., Митин. В.В., Жданов. В.Ф., Копьшова Н., Математическое моделирование производств продуктов питания с использованием информационных методов // Материалы итоговой конференции Федерального агентства по науке и инновациям (Роснаука) и Института молекулярной биологии им. В.А.Энгельгардта РАН «Живые системы» 2008.

12. Исследование операций в экономике: учебник для вузов / под редакцией Н. Ш. Кремера. — 4-е изд., перераб. и доп. — Москва: Издательство Юрайт, 2023. — 414 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-12800-0. — Текст: электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/510512 (дата обращения: 15.03.2023).

13. Канторович Л.В. Экономика и оптимизация / Л.В. Канторович, В. Лассман, Х. Шилар. – М.: Наука, 1990. – 239 с.

14. Лисин П.А. Компьютерные технологии в производственных процессах пищевой промышленности / П.А. Лисин. – СПб.: ЛАНЬ, 2016. – 256 с. 15.

15. Лысенко М.В., Лысенко Ю.В., Таипова Э.Х. Экономико-математическое моделирование оптимизации производства продукции // Фундаментальные исследования. – 2014. – № 11-8. – С. 1750-1755.

16. Научная электронная библиотека: http://elibrary.ru; Библиотека. Единое окно доступа к образовательным ресурсам: http://window.edu.ru.

17. Подробный разбор симплекс-метода [Электронный ресурс]. URL: https://habr.com/ru/post/474286/ (дата обращения: 30.04.2024).

18. Российская электронная библиотека: http //www.elbib.ru; http://www.milkbranch.ru/publ/view/118.

19. Руководство по Tkinter [Электронный ресурс]. URL: https://metanit.com/python/tkinter/?ysclid=lw6kmbg95700050158 (дата обращения: 30.04.2024).

20. Сосина Н.А. Исследование операций. Электронное учебное пособие. В 2-х частях. Часть I/ Тольятти: ФГБОУ ВО «Тольяттинский государственный университет», 2022г. Электронный ресурс, 3,3 Мб. ISBN 978-5-8259-1045-1. С. 7-67.

21. Смирнов С.П. Системный подход к разработке программных систем для многокритериального анализа, применимых для разработки рационов питания // E-Scio. 2020. № 7(46). С. 1–10. EDN: RFZONU.

22. Шапкин, А.С. Математические методы и модели исследования операций: учебник / А.С. Шапкин, В.А. Шапкин. – 7-е изд. – Москва: Дашков и К°, 2022. – 398 с.

23. Lambert, C. Simulation of a sugar beet factory using a chemical engineering software (ProSimPlus®) to perform Pinch and exergy analysis / C. Lambert, B. Laulan, M. Decloux // Journal of Food Engineering. – 2018. – № 225. – P. 1–11. DOI: 10.1016/j.jfoodeng.2018.01.004.

24. Python 3.12.3 documentation [Электронный ресурс]. URL: https://docs.python.org/3.12/ (дата обращения: 30.04.2024).