МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Тольяттинский государственный университет»

Институт общеинженерной подготовки
(наименование института полностью)

Кафедра «Высшая математика и математическое образование»
(наименование)

44.04.01 Педагогическое образование
(код и наименование направления подготовки)

Математическое образование
(направленность (профиль))

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА (МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ)

на тему «Элективные курсы по математике как средство реализации преемственности предпрофильной подготовки и профильного обучения в общеобразовательной школе»

Обучающийся Е.Е. Шерстобитова
(Инициалы Фамилия) (личная подпись)

Научный руководитель д-р пед. наук, профессор, Р.А. Утеева
(ученая степень (при наличии), ученое звание (при наличии), Инициалы Фамилия)

Тольятти 2024

Оглавление

Введение

Актуальность и научная значимость настоящего исследования. В Российской Федерации образовательные стандарты регламентируются Федеральным законом "Об образовании в Российской Федерации" N 273-ФЗ от 29 декабря 2012 года с изменениями 2020 года. Документ содержит основные принципы государственной политики в области образования:

- «приоритетности;
- недопустимости дискриминации;
- гуманистический характер образования;
- единства образовательного пространства;
- демократичности» [67].

Образовательные организации разных ступеней образования имеют право устанавливать собственную образовательную траекторию, использовать различные учебные программы.

Концепция модернизации российского образования на старшей ступени общеобразовательной школы предусматривает профильное обучение, ставится задача создания системы специализированной подготовки (профильного обучения) в старших классах общеобразовательной школы, ориентированной на индивидуализацию обучения и социализацию обучающихся, в том числе с учетом реальных потребностей рынка труда; отработки гибкой системы профилей и кооперации старшей ступени школы с учреждениями начального, среднего и высшего профессионального образования.

Профильное обучение направлено на адаптацию процесса обучения к реальным условиям и ориентациям профессиональных направлений. Главная его цель – сформировать у учащихся адекватное понимание своих возможностей и помочь самоопределиться с выбором дальнейшего пути. Старшая школа должна иметь инструмент, способствующий правильному выбору ученика своего профессионального будущего, подталкивать и направлять к успешной самореализации, обеспечивать преемственность между школьным и профессиональным образованием [77].

Элективные курсы обладают большим потенциалом в реализации этой задачи, они позволяют дифференцировать обучение, создают ситуацию выбора, отвечая основным принципам государственной политики, они гибкие по содержанию и помогают принять осознанный выбор будущего образовательно-профессионального направления. В настоящее время элективные курсы входят в программы 8–11 классов.

В информационном письме Минобразования РФ «Об элективных курсах в профильном обучении» (от 13 ноября 2003 г. №14-51-277/13) [42] говорится о том, что «элективные курсы являются одним из важнейших средств индивидуализации учебной программы, так как предоставляют возможность выбора каждому подростку стратегию образовательной деятельности наиболее важную и интересную для него, согласно его способностям и для реализации последующих жизненных планов. Элективные курсы – обязательные для посещения курсы по выбору учащихся, входящие в состав профиля обучения на старшей ступени школы. Они связаны с удовлетворением индивидуальных образовательных интересов, потребностей и склонностей каждого школьника, направленных на формирование компетенций» [42].

Проблеме профильного обучения школьников и месту элективных курсов в нем уделяли внимание М.А. Донцова [17], Д.С. Ермаков [20], А.Г. Каспржак [21], [22], Е.И. Коновалова [25], Н.М. Новак [41], Ю.Н. Пудовкина [48] и др.

По мнению А.Г. Каспржака, содержание программ элективных курсов должно отвечать следующим требованиям:

– «позволять использовать активную, информационную и проектную формы проведения занятий;

– курс должен помогать ученику оценить свой образовательный потенциал;

– разрабатывая курс, учитель должен постараться сам себе ответить на вопросы: «Почему ученик выберет именно этот курс, а не другой? Чем он будет ему полезен, интересен?»;

– курсы должны мотивировать на самостоятельный интерес к изучаемому материалу» [21].

Автор также подчеркивает, что курсы должны познакомить ученика со спецификой видов деятельности, которые будут для него приоритетными; курсы должны опираться на какое-либо пособие; содержание элективных курсов не должно выходить за рамки предметов, обязательных для изучения; программа курса должна иметь принцип завершенности.

В статье А.И. Бородиной [9] элективные курсы рассматриваются как система особой подготовки старшеклассников, направленная на то, чтобы сделать обучение в старшей школе интереснее, индивидуализировать и адаптировать под реальные запросы в самостоятельной будущей жизни.

Д.С. Ермаков и Г.Д. Петрова обращают внимание на то, что при разработке элективных курсов необходимо опираться «на основные мотивы выбора, которые движут старшеклассниками:

– подготовка к ЕГЭ по профильным предметам,

– желание соответствовать рынку труда,

– возможность успешной карьеры,

– любознательность,

– приобретение знаний и навыков для решения практических и жизненных задач,

– помощь при изучении базовых программ» [20].

При подготовке молодых учителей, конструированию элективных уделяется не много внимания, всё еще этот процесс остается не простым и требующим анализа профессиональных сфер и их требований, интересов школьников, рынка труда, современных IT-технологий, учебного материала, что, в свою очередь, предполагает высокую степень заинтересованности и вовлеченности учителей в этот процесс.

Таким образом, актуальность темы исследования обусловлена сложившимися к настоящему времени противоречиями между:

– необходимостью выбора дальнейшего профиля обучения и недостаточной подготовленностью учащихся к такому выбору;

– увеличением числа выпускников ВУЗов, работающих не по специальности и нехваткой квалифицированных кадров, в результате выбора не актуального для себя профиля обучения.

Данное противоречие позволило сформулировать проблему диссертационного исследования: каким должно быть научно-методическое обеспечение проектирования содержания элективных курсов, как средств реализации преемственности предпрофильной подготовки и профильного обучения по математике?

Объект исследования: процесс обучения математике в общеобразовательной школе.

Предмет исследования: содержательный компонент элективных курсов как средств реализации преемственности предпрофильной подготовки и профильного обучения математике в общеобразовательной школе и методика его проектирования.

Цель исследования заключается в обосновании научно-методического обеспечения проектирования содержания элективных курсов, как средств реализации преемственности предпрофильной подготовки и профильного обучения по математике (на примере курса алгебры и начал математического анализа).

Гипотеза исследования основана на предположении о том, что если за основу научно-методического проектирования содержания элективных курсов по математике выбрать основные содержательно-методические линии школьного курса математики, то это позволить обеспечить реализацию преемственности предпрофильной подготовки выпускников основной школы и осознанный выбор профиля дальнейшего обучения в старшей школе.

Для достижения поставленной цели и проверки сформулированной гипотезы необходимо решить следующие задачи:

1. Раскрыть понятие преемственности в обучении математике.
2. Выделить основные цели и задачи элективных курсов обучающихся в рамках предпрофильной подготовки и профильного обучения математике.
3. Обосновать роль элективных курсов по математике в реализации преемственности предпрофильной подготовки и профильного обучения в общеобразовательной школе.
4. Разработать элективные курсы, основанные на содержательно-методической линии школьного математики «Уравнения и неравенства», на примере иррациональных уравнений для предпрофильной подготовки и для углубленного профиля в старших классах.
5. Провести педагогический эксперимент.

Теоретико-методологическую основу данного исследования составили работы Н.С. Подходовой [31], [43], [60], М.А. Родионова [50], Г.И. Саранцева [52], [53], Н.Л. Стефановой [31], [48], [58], Р.А. Утеевой [63], [64], [65].

Базовыми для настоящего исследования явились также работы А.С. Алфимовой [3], Н.В. Аммосовой [4], Ю.Н. Пудовкиной [48] и Е.В. Тагаевой [59], [60], С.В. Щербатых [76].

Методы исследования: анализ психолого-педагогической, научной и учебно-методической литературы; изучение, наблюдение и обобщение школьной практики; систематизация полученных в результате анализа данных; педагогический эксперимент.

Основные этапы исследования:

– 1 семестр (2022/23 уч.г.): анализ различных подходов к понятию преемственности, выделение основных целей и задач предпрофильной подготовки и профильного обучения математике, раскрытие роли элективных курсов в предпрофильной подготовке и профильном обучении;

– 2 семестр (2023 уч.г.): определение теоретических и методических основ преемственности предпрофильной подготовки и профильного обучения на основе элективных курсов по математике;

– 3 семестр (2023/24 уч.г.): проектирование элективных курсов по теме «Иррациональные уравнения» для предпрофильной подготовки (9 класс) и «Методы решения иррациональных уравнений» для профильного обучения (10–11 класс);

– 4 семестр (2024 уч.г.): равершение работы над диссертацией внесение корректив или уточнений, описание результатов экспериментальной работы, формулирование выводов.

Опытно-экспериментальная база исследования: НИЛ «Школа математического развития и образования – 5+» Тольяттинского государственного университета

Новизна исследования заключается в обосновании идеи реализации преемственности предпрофильной подготовки и дальнейшего профильного обучения в старших классах через проектирование элективных курсов по той или иной основной содержательно-методической линии школьного курса математики (на примере линии «Уравнения и неравенства»).

Теоретическая значимость исследования заключается в предложенной методике реализации преемственности содержания элективных курсов на примере линии «Уравнения и неравенства» в курсе алгебры и начал анализа общеобразовательной школы.

Практическая значимость исследования определена тем, что в нем разработаны программы и содержание элективных курсов «Иррациональные уравнения» и «Методы решения иррациональных уравнений», которые могут быть использованы учителями математики на практике.

Достоверность и обоснованность результатов исследования обеспечивались сочетанием теоретических и практических методов исследования, анализом педагогической практики.

Личное участие автора в организации и проведении исследования состоит в выявлении методических особенностей и формулировании методических рекомендаций по реализации преемственности элективных курсов в рамках предпрофильной и профильной ступени общеобразовательной школы, а также разработке программ элективных курсов « Иррациональные уравнения» и «Методы решения иррациональных уравнений».

Апробация и внедрение результатов работы велись в течение всего исследования. Его результаты докладывались на следующих конференциях:

– научно-практической конференции «Студенческие Дни науки в ТГУ» (Тольятти, ТГУ, апрель 2023, 2024 гг.);

– Всероссийской научно-практической междисциплинарной конференции «Молодежь. Наука. Общество» (Тольятти, ТГУ, декабрь, 2022 г.).

По теме исследования имеются 2 публикации [79], [80].

На защиту выносятся следующие положения:

– реализация преемственности предпрофильной подготовки и профильного обучения математике может обеспечиваться элективными курсами, спроектированными на основе единой содержательно-методической линии, одной из которых является линия уравнений и неравенств;

– методика реализации элективных курсов, основанная на уровневой дифференциации обучения математике Р.А. Утеевой [63], способствует достижению целей предпрофильной подготовки и дальнейшего осознанного выбора учащимися углубленного математического профиля обучения в старших классах.

На защиту также выносятся:

– содержание элективного курса «Иррациональные уравнения» в рамках предпрофильной подготовки учащихся по математике (9 класс) и его методическое обеспечение (учебно-тематический план, примеры и образцы решения иррациональных уравнений, дифференцированные задания дя разных типологических групп обучающихся);

– содержание элективного курса «Методы решения иррациональных уравнений» (11 класс) и его методическое обеспечение (учебно-тематический план, примеры и образцы решения иррациональных уравнений, дифференцированные задания дя разных типологических групп обучающихся).

Структура магистерской диссертации. Работа состоит из введения, двух глав, заключения, содержит 9 рисунков, 4 таблицы, список используемой литературы (84 источника). Основной текст работы изложен на 92 страницах.

Глава 1 Теоретические основы преемственности предпрофильной подготовки и профильного обучения в образовательной школе

1.1 Различные подходы к понятию преемственности в обучении математике

Преемственность в образовании –это концепция, которая существует уже не одно столетие. Она утверждает, что образование должно представлять собой непрерывный процесс, который начинается в детском саду и продолжается до конца жизни человека. Очень важным аспектом преемственности является передача знаний и опыта от поколения к поколению. И уже на протяжении многих веков образование было связано с идеей преемственности.

В Древней Греции образование было организовано в виде гимназии, где мальчики получали обширную подготовку в литературе, музыке, геометрии, философии и др. [16]. Программа включала в себя обязательную фазу обучения, которая продолжалась несколько лет, а затем широкий выбор необязательных курсов.

Позже в средневековой Европе учебный план был нацелен на подготовку молодых людей к религиозной службе. Для этого были созданы университеты, где студенты изучали латынь, греческий, философию и богословие. Это привело к возникновению классического учения и традиционной образовательной системы, которая просуществовала в течение многих веков.

Д.В. Горобец [15], О.В. Кожевникова [23], Е.А. Комарова [24], Л.П. Коннова [26], А.К. Мендыгалиева [32], К.И. Нешков [40], Л.Ю. Нестерова [39], Г.И. Саранцев [52], [53] и др. исследовали проблемы преемственности в математическом образовании. Проанализировав диссертационные исследования и научные статьи по теме раскроем понятие преемственности.

И.В. Антонова под преемственностью в обучении понимает принцип, согласно которому:

«а) процесс обучения делится на этапы;

б) при обучении на каждом этапе надо опираться на ранее полученные знания, то есть включать в новое те элементы содержания прошедшего, которые не утратили своей актуальности в новом материале и которые способствуют усвоению данного материала;

в) при обучении на каждом этапе необходимо готовить учащихся к обучению на следующем этапе;

г) при завершении каждого этапа надо убедиться в психологической готовности учащихся к обучению на следующем этапе» [5, с. 5-6].

Основными целями реализации преемственности между школой и вузом автор считает формирование психологической готовности к обучению в вузе, повторение и систематизацию школьного курса математики.

С точки зрения К.И. Нешкова, преемственность тесно связана с повторением и пропедевтикой. «Преемственность требует повторения, но такого повторения, которое обеспечивает непрерывное развитие системы понятий, а не повторения ради повторения, ради сохранения на достаточно высоком уровне некоторых навыков учащихся. Если мы хотим, чтобы преемственность осуществлялась по существу, а не по форме, то повторение должно быть органически включено в новую тему и по мере развития темы должно соответственно меняться, не сводясь к механическому повторению одних и тех же упражнений» [40].

Л.П. Коннова [26] в диссертационном исследовании отмечает, что вопрос преемственности рассматривался в основном между начальной школой и средней, между старшей школой и высшим образованием. Гораздо реже встречаются исследования вопроса преемственности между 5-6 классом и курсом алгебры и геометрии, а также между средней школой и старшими классами. Автор отмечает, что обучение на любом этапе должно носить опережающий характер, поэтому обновление школьного образования– вопрос времени. Один из способов реализации преемственности автор описывает на примере «теории графов».

В методическом пособии Е.А. Комаровой [24] ключевой целью педагогического аспекта преемственности является создание эффективной системы обучения, которая будет удовлетворять потребности учащихся в конкретный момент их жизни. Эта система должна обеспечивать логическую связь между содержанием учебных программ, методами обучения, уровнем сложности и развитием профессиональных навыков учащихся. Автор отмечает, что формально преемственность между этапами обучения математике гарантируется учебной программой, необходимым минимумом содержания по математике для основной школы, учебниками, учебными, дидактическими и наглядными пособиями, методическими пособиями для учителя, инструктивно-методическими письмами о преподавании предмета.

Л. Ю. Нестерова определяет, что «преемственность в обучении связана с реализацией внутрипредметных и межпредметных связей, трактовкой основных понятий, последовательностью изложения учебного материала, уровнями возрастания его сложности и трудности, форм и методов организации процесса обучения на разных этапах» [39]. Автор считает, что необходимо рассматривать вопрос преемственности в системе «школа-педвуз-школа», так как знания, полученные студентами в педвузах, не соотносятся с их будущей деятельностью учителя математики.

А. К. Мендыгалиева отмечает, что преемственность рассматривается не только в рамках одного предмета, но и выходит за его рамки, тем самым охватывая проблему межпредметных связей. Автор рассматривает преемственность как «установление необходимой связи и правильного соотношения между частями учебного предмета на разных ступенях его изучения. Обучение математике в начальной школе реализует принцип преемственности, если оно подготавливает детей к изучению дальнейших тем внутри начальной школы и обеспечивает пропедевтику обучения в следующих классах» [33].

Н.А. Арзяева рассматривает преемственность между предпрофильным и профильным обучением. Автор отмечает, что основной целью предпрофильной подготовки обучающихся является создание условий для их самоопределения в отношении выбора профиля будущего обучения в 10-11 классах. В связи с этим образовательной задачей предпрофильной подготовки в 8-9 классах является комплексная работа с обучающимися по обоснованному и жизненно важному выбору дальнейшего пути обучения. «Суть предпрофильной подготовки –создать образовательное пространство, способствующее самоопределению обучающихся 8-9 классов через организацию курсов по выбору, информационную работу и профильную ориентацию. Одним из важнейших компонентов такого образовательного пространства являются элективные курсы, призванные не только подготовить обучающегося к ситуации выбора направления дальнейшего пути образования, сориентировать его в различных образовательных областях, профилях, но и помочь в дальнейшем построить индивидуальную образовательную траекторию обучения и развития» [6].

Н.С. Подходова рассматривает проблему преемственности между предпрофильной подготовкой в основной школе и профильным обучением математике в старших классах в аспекте содержательного компонента. Автором выделены следующие функции элективных курсов:

– «предметная;
– прикладная;
– мировоззренческая;
– профессионально-деятельностная
– и мета-функции» [43].

В методическом пособии Е.А. Комаровой ключевой целью педагогического аспекта преемственности является создание эффективной системы обучения, которая будет удовлетворять потребности учащихся в конкретный момент их жизни. Эта система должна обеспечивать логическую связь между содержанием учебных программ, методами обучения, уровнем сложности и развитием профессиональных навыков учащихся. Автор отмечает, что «формально преемственность между этапами обучения математике гарантируется учебной программой, необходимым минимумом содержания по математике для основной школы, учебниками, учебными, дидактическими и наглядными пособиями, методическими пособиями для учителя, инструктивно-методическими письмами о преподавании предмета. Автор предлагает реализовывать преемственность с помощью повторения и проведения смежных уроков между 7-8, 8-9, 9-10 классами, что будет способствовать систематизации и упорядочиванию знаний» [24].

З.М. Шугаипова рассматривает понятие преемственности через присущие ему признаки: «процесс развития, связь между новым и старым; наличие в новом более развитых элементов, сторон, тенденций старого; появление новых сторон, свойств, качеств развивающихся явлений; внутренняя целостность» [78, с. 9].

По мнению Н.В. Решетниковой, реализация преемственности возможна в процессе систематизации и обобщения знаний с помощью преобразования существующих знаний под влиянием новых. В диссертации рассматриваются следующие требования для реализации преемственности в обучении математики:

– «использование элементов проблемного обучения;
– учет возрастных особенностей;
– связь математики с жизнью;
– применение информационных технологий;
– создание условий для анализа, систематизации, обобщения знаний;
– взаимосвязь целей, методов, форм, средств, приемов обучения» [49, с. 11].

Таким образом, под преемственностью в обучении математики мы понимаем непрерывность образовательного процесса на всех ступенях, взаимосвязь изучаемого материала с ранее изученным, связь учебного материала с подходом к его изучению.

Сегодня преемственность в образовании является неотъемлемой частью современной образовательной системы [1].

Целью преемственной образовательной программы является создание непрерывной цепочки передачи знаний и опыта, которая позволит обеспечить стабильность в процессе обучения на протяжении всей жизни.

Таким образом, преемственность в образовании –это важный аспект, который присутствовал в образовании на протяжении многих столетий. Она означает передачу знаний и опыта от предыдущего поколения к следующему. Существование такой концепции положительно влияет на стабильность и непрерывность в процессе обучения. Важность преемственности в образовании не может быть недооценена ни на одной стадии процесса обучения математике.

Педагогический аспект преемственности в образовании существует для того, чтобы обеспечить связь между всеми этапами образовательного процесса и обеспечить последовательность и непрерывность обучения. Он основывается на принципах, которые учитывают, как индивидуальные особенности учащихся, так и стратегии обучения, которые используют различные методы, технологии и формы организации учебного процесса.

Ключевой целью педагогического аспекта преемственности является создание эффективной системы обучения, которая будет удовлетворять потребности учащихся в конкретный момент их жизни. Эта система должна обеспечивать логическую связь между содержанием учебных программ, методами обучения, уровнем сложности и развитием профессиональных навыков учащихся. Важной составляющей педагогического аспекта преемственности является разработка методологии, которая будет включать в себя организацию учебной программы, методы преподавания, а также мониторинг и оценку процесса обучения. Это позволит грамотно построить систему подготовки учащихся к профильному обучению в математике, начиная с базовых и до элективных курсов. «Методы, используемые при организации учебного процесса в рамках педагогического аспекта преемственности, должны учитывать потребности учащихся, а также последовательность усвоения знаний. Они могут включать в себя визуализацию материала, использование интерактивных методов, индивидуальную и групповую работу, а также современные мультимедийные технологии» [7].

Кроме того, педагогический аспект преемственности включает в себя стратегии оценки и мониторинга успеваемости учащихся, которые позволяют оценить качество обучения и результаты обучения в целом. Это помогает анализировать результаты и принимать необходимые меры для улучшения качества образования.

В целом, педагогический аспект преемственности играет ключевую роль в обеспечении эффективной и продуктивной системы обучения, которая учитывает индивидуальные потребности учащихся и обеспечивает связь между всеми этапами образовательного процесса. Он позволяет привлечь большее количество учащихся к изучению математики, а также улучшить качество образования в целом.

Для усвоения математических знаний необходимо иметь определенный уровень предварительной подготовки. Связь между предпрофильной подготовкой и профильным обучением в математике очень важна для эффективного освоения математических дисциплин [27].

Роль предпрофильной подготовки в обучении математике состоит в том, что она является фундаментом для последующего профильного обучения. Ведь без хорошей прикладной математической подготовки на начальном этапе ученик не сможет успешно усваивать более сложные математические понятия в дальнейшем.

Предпрофильная подготовка включает в себя такие разделы математики как арифметику, геометрию, алгебру, теорию вероятности и математическую статистику. Ученик должен освоить базовые математические понятия на начальном этапе обучения, чтобы иметь возможность эффективно подготовиться к профильному курсу математики. Знание основ математики, как известно, является основой любой профессиональной деятельности, которая связана с вычислениями. При определении необходимости предпрофильной подготовки следует учитывать индивидуальные особенности ученика.

Например, если ученик проявляет высокий уровень математической способности и профильный курс математики предполагает достаточно высокий уровень знаний, то ему может понадобиться более серьезная предпрофильная подготовка. И наоборот, если ученик сталкивается с трудностями в усвоении математических понятий на начальном этапе, ему может потребоваться дополнительное обучение перед началом профильного курса.

Таким образом, предпрофильная подготовка играет важную роль в процессе обучения математике и должна быть оптимальной для каждого ученика в зависимости от его индивидуальных потребностей. Учителям следует уделить должное внимание этому вопросу, ведь это является ключевым моментом в освоении математических знаний и тем самым гарантирует успешное прохождение профильного курса математики.

Для того, чтобы начать профильное обучение математике, необходимо иметь определенные знания и навыки, которые были получены в рамках предпрофильной подготовки. Эти знания важны в качестве фундамента, который позволяет ученикам быстрее и эффективнее осваивать новые материалы в математике. В противном случае, если у ученика нет достаточной подготовки, он может столкнуться с большими трудностями, что может привести к его неудаче в профильном обучении математике. Основание знаний для начала профильного обучения математике должно включать в себя понимание основных понятий, принятых в математике, а также базовые методы решения математических задач. Например, ученик должен знать основные арифметические действия, уметь работать с геометрическими фигурами, знать основы алгебры и трезво оценивать свои способности в математике.

Важно понимать, что предпрофильная подготовка должна быть тщательно организована, чтобы ученики получили все необходимые знания и навыки. Это включает в себя сбалансированную программу обучения, а также опытных учителей, которые могут помочь ученикам справиться с трудностями и ответить на все их вопросы.

Связь между предпрофильной подготовкой и профильным обучением математике очень важна, потому что она позволяет ученикам чувствовать себя увереннее и успешнее в процессе обучения математике. В конечном счете это поможет им лучше усваивать материал и достигать высоких результатов в профильном обучении математике.

Как отмечают Н.В. Аммосова и Г.Г. Краснова «в процессе обучения математике в основной школе учащиеся приобретают фундамент знаний, на котором строится освоение алгебры в старшей школе. Следовательно, без хорошего уровня усвоения данного материала, изучение алгебры и начала анализа в старших классах становится непосильной задачей для ученика, тем самым полностью теряется интерес к данному предмету» [4].

Тем самым преемственность является одним из ключевых организационных принципов обучения, как и последовательность и систематичность. Необходимо определить цели и задачи предпрофильной подготовки и профильного обучения математике, которые оказывают существенное влияние на разработку содержательного компонента элективных курсов.

1.2 Цели и задачи предпрофильной подготовки и профильного обучения математике

Предпрофильная подготовка представляет собой систему педагогической, психологической, информационной и организационной поддержки учащихся основной школы, содействующей их самоопределению по завершении основного общего образования.

От правильного выбора профиля во многом будет зависеть дальнейшая судьба старшеклассников, в частности - мера их подготовленности к успешной сдаче единых государственных экзаменов и перспективы на продолжение образования после школы. Предпрофильная подготовка помогает учащимся сделать осознанный выбор будущей сферы деятельности. Во многом именно от правильности и обоснованности принятого решения зависит, как сложится дальнейшая жизнь человека.

Таким образом предпрофильная подготовка должна выступать для каждого конкретного ученика не столько абстрактной формой их подготовки к выбору «профиля вообще», сколько средством подготовки, помощью к выбору профиля и конкретного места получения полного среднего образования в следующем учебном году.

Предпрофильная подготовка в школе направлена на помощь учащимся в выборе будущей профессиональной деятельности и дальнейшего образовательного пути и должна обеспечивать, в случае необходимости, возможность переориентации школьника с одного профиля на другой.

Цель предпрофильной подготовки – способствовать принятию школьниками решения о выборе направления дальнейшего обучения и созданию условий для повышения готовности подростков к социальному, профессиональному и культурному самоопределению в целом.

Задачи предпрофильной подготовки:

– помощь учащимся в определении своих интересов, склонностей и способностей в различных профессиональных областях;
– актуализация процесса первичного самоопределения учащихся, благодаря получению знаний о себе и мире профессий;
– развитие личностных и профессиональных компетенций;
– обеспечение учащимся возможности получить базовые знания и навыки, необходимые для успешного освоения профильных дисциплин;

– оказание психолого-педагогической помощи в приобретении школьниками представлений о жизненных, социальных ценностях, в том числе связанных с профессиональным становлением;

– формирование способности принимать осознанное решение о выборе дальнейшего направления образования, пути получения профессии.

Реализация предпрофильной подготовки осуществляется через:

– организацию курсов по выбору, которые могут быть как предметно-ориентированными, так и ориентационными;

– проведение профориентационных мероприятий, таких как дни открытых дверей, встречи с представителями различных профессий, экскурсии на предприятия;

– проведение диагностических тестов и анкетирований для выявления профессиональных интересов и способностей учащихся;

– профильную ориентацию;

– формирование «Портфолио достижений» девятиклассников.

Предпрофильная подготовка необходима для рациональной и успешной организации профильного обучения в старшей школе.

Российская школа накопила немалый опыт по дифференцированному обучению учащихся. Первая попытка осуществления дифференциации обучения в школе относится к 1864 г. В конце 80-х - начале 90-х годов в стране появились новые виды общеобразовательных учреждений (лицеи, гимназии), ориентированные на углубленное обучение школьников по избираемым ими образовательным областям с целью дальнейшего обучения в вузе.

В соответствии с постановлением Правительства РФ «О концепции модернизации российского образования на период до 2010 года» в последних двух классах общеобразовательной школы предусматривается профильное обучения старшеклассников, ориентированное на индивидуализацию обучения и социализацию обучающихся, в том числе с учетом реальных потребностей рынка труда. Традиционно профильное обучение использовалось как средство дифференциации и индивидуализации обучения, обеспечивающих учет интересов и способностей школьников. Многолетняя практика убедительно показала, что в системе образования должны быть созданы условия для реализации обучающимися своих интересов, способностей и дальнейших жизненных планов. Дифференциация является неотъемлемой частью образования будущего, так как по мнению исследователей на успеваемость учащихся по математике влияет пол ребенка, эффективность учителя, интерес родителей к предмету и другие факторы [82].

Профильное обучение — система организации среднего образования, при которой в старших классах обучение проходит по разным программам (профилям) с преобладанием тех или иных предметов. Главное его преимущество в том, что оно дает возможность школьникам сосредоточиться на предметах, которые необходимы им в будущем в первую очередь. При этом ученики получают достаточный объем знаний для поступления в ВУЗ. Профильное образование направлено на развитие у детей самостоятельности и на стимуляцию желания учиться.

Профильные программы открываются на III ступени обучения (10-11-е классы). Это программы, ориентированные на будущую профессию, на развитие профессионального самоопределения. Профильное обучение не является профессиональным или производственным, его главная цель – самоопределение учащихся, формирование адекватного представления о своих возможностях.

В настоящее время ФГОС среднего образования «определено пять профилей обучения:

– естественно-научный,
– гуманитарный,
– социально-экономический,
– технологический,
– универсальный» [69].

Цели профильной подготовки в школе:

– обеспечить углубленное изучение отдельных предметов;

– выработать у учащихся навыки самостоятельной познавательной деятельности;

– расширить возможности социализации учащихся, обеспечить преемственность между общим и профессиональным образованием, более эффективно подготовить выпускников школы к освоению программ высшего профессионального образования.

Задачи профильного обучения:

– создание условий для учета и развития учебно-познавательных и профессиональных интересов, способностей и потребностей учащихся в процессе их общеобразовательной подготовки.

В соответствии с требованиями ФГОС профильное обучение должно:

– «быть нацелено на развитие школьников, на формирование их профессиональных устремлений;

– иметь деятельностный, продуктивный характер;

– обеспечивать интеграцию образовательного процесса с реальной действительностью, с социумом;

– отличаться вариативностью;

– обеспечивать индивидуализацию и дифференциацию образования;

– быть ориентированным как на потребности личности, так и на потребности рынка труда;

– учитывать потребности регионов в специалистах определенных профессий» [69].

С.Н. Чистякова выделяет следующие принципы профильного обучения старших школьников:

– «региональности,

– вариативности,

– индивидуализации» [72].

1.3 Роль элективных курсов по математике в реализации преемственности предпрофильной подготовки и профильного обучения

Как правило, элективные курсы по математике – это курсы, которые предлагаются ученикам в качестве дополнительного материала к предмету математики. На выбор учеников предоставляются различные темы, которые могут быть связаны с основным курсом математики, либо они представляют собой независимые темы. Целью элективных курсов по математике может быть привлечение учеников к предмету математики, повышение их интереса и мотивации к изучению математики, а также расширение их знаний и умений в этой области. Задачи элективных курсов по математике могут включать, например, изучение более продвинутых или специализированных тем математики, расширение представлений об использовании математических знаний в реальной жизни, развитие аналитического и логического мышления и т.д. В зависимости от школы и специфики учебных программ, элективные курсы могут иметь различный уровень сложности и включать в себя различные виды модификаций, такие как углубленное изучение конкретных тем, проектная работа, использование новых методов обучения и т.д. Важно отметить, что элективные курсы по математике могут быть представлены не только в форме уроков, но и в виде лекций, семинаров, онлайн-курсов и других форматов [28].

Элективные курсы по математике существуют для того, чтобы расширить и углубить знания учеников в этой области знаний, а также для подготовки их к профильному обучению математике или для сдачи экзаменов в высшие учебные заведения. В ходе изучения элективных курсов ученики могут выбрать наиболее подходящую траекторию развития своего математического образования, в зависимости от своих интересов и потребностей. Одной из целей элективных курсов по математике является углубление знаний учеников в различных областях математики, таких как алгебра, геометрия, тригонометрия, математический анализ и другие. Более того, элективные курсы позволяют учащимся изучать темы, которые им необходимы для достижения своих целей, например, подготовки к экзаменам или профильному обучению в университетах.

Еще одной целью элективных курсов по математике является тематическое разнообразие, которое они предлагают. В этих курсах ученики изучают математические темы, которые могут быть не представлены в базовом или профильном уровне программы [61]. Такие темы могут включать в себя топологию, криптографию, математическую логику и многие другие. Помимо углубления знаний и разнообразия тем, элективные курсы по математике призваны также повысить интерес к данной области знаний у учащихся. Изучение математики может быть отнесено к группе «сложных увлечений», поскольку зачастую включает в себя много теоретических понятий и сложных вычислений. Однако, благодаря элективным курсам, ученики могут глубже понять значимость математики в реальной жизни и стать более заинтересованными в ее изучении.

Среди задач элективных курсов по математике следует отметить использование интерактивных методов обучения, таких как групповые проекты и командную работу. Такой подход к обучению повышает мотивацию обучающихся, способствует развитию коммуникативных навыков и формирует навыки сотрудничества и взаимодействия в коллективе. Другой важной задачей элективных курсов по математике является подготовка учеников к более сложной математике, которую они будут изучать в рамках университетских программ. В зависимости от выбираемого курса, учащиеся могут изучать темы, такие как топология, комбинаторика или дифференциальные уравнения, которые помогут им получить сильную предпосылку для более глубокого изучения математики.

Таким образом, элективные курсы – это обязательные курсы по выборуучащихся, входящие в состав профиля обучения на старшей ступени школы. Целью элективных курсов является предоставление учащимся индивидуального обучения и социализации.

Как отмечают исследователи, в соответствии с целями профильного обучения тематика и содержание элективных курсов должны отвечать следующим требованиям:

- «способствует социализации и адаптации студентов и предоставляет им возможность выбора индивидуальной образовательной траектории и принятия обоснованных профессиональных самоопределений;
- поддерживает изучение базовых и специализированных общеобразовательных предметов и обеспечивает необходимые условия для профессионализации образования;
- обладает значительным потенциалом развития, способствует формированию целостной картины мира и развитию общих интеллектуальных и профессиональных компетенций и ключевых компетенций;
- предполагает социальную и личностную актуальность и пригодность с точки зрения подготовки компетентных кадров, так и с точки зрения личностного развития учащихся» [26], [41], [48], [49].

В соответствии с целями и задачами профильного обучения элективные курсы могут выполнять различные функции:

- один из элективных курсов может выступать в качестве "надстройки" и дополнять содержание профильного курса;
- освоение содержания другого базового предмета на уровне минимального общего образования, изучаемого в данной школе (классе);
- удовлетворение познавательного интереса отдельных учащихся к областям человеческой деятельности за пределами выбранного ими профиля.

«Элективные курсы играют важную роль в системе профильного обучения на старшей ступени школы. В отличие от факультативных курсов, существовавших в школе, элективные курсы обязательны для старшеклассников» [20].

В концепции профильного обучении на старшей ступени общего образования, утвержденной приказом Минобразования России от 18.07.02 №2783, обозначены цели перехода к профильному обучению, среди которых выделим цель «создания условий для существенной дифференциации содержания обучения старшеклассников с широкими и гибкими возможностями построения школьниками индивидуальных образовательных программ» [47]. С этой целью помимо профильных образовательных предметов вводятся элективные курсы – обязательные для посещения по выбору учащихся. «Набор профильных и элективных курсов на основе базовых общеобразовательных предметов составляет индивидуальную образовательную траекторию для каждого школьника» [9]. Элективные курсы реализуются за счет школьного компонента и могут выполнять сразу несколько функций: дополнять содержание профильного курса, развивать содержание одного из базовых курсов, удовлетворять разнообразные познавательные интересы школьников, выходящих за рамки выбранного им профиля.

Важно отметить, что в любом случае по элективным курсам единый государственный экзамен не проводится.

Элективные курсы направлены как на внутрипрофильную дифференциацию, так и на компенсацию профильной однонаправленнности; они способствуют углублению индивидуализации профильного обучения, расширению мировоззренческих представлений учащихся [3].

Перед элективными курсами стоит ряд задач:

- «расширить знания по изучаемым предметам;
- обеспечить более высокий уровень знаний, умений и навыков;

– способствовать активному самоопределению, в том числе и профессиональному;

– формировать и развивать познавательный интерес к предметам» [22].

Цель элективных курсов – раскрыть потенциал каждого ребенка, помочь ему определиться с выбором будущей профессии. Так же, как на факультативных занятиях, ученики углубленно изучают интересующий их предмет или область деятельности. Разница в том, что элективные курсы входят в учебный план и являются обязательными для старшеклассников. Но какие именно курсы посещать – решают они сами.

Все многообразие элективных курсов можно классифицировать на ряд категорий. «Первый тип – предметные элективные курсы, их задача углубление и расширение знаний по предметам, входящих в базисный учебный план школы (курсы по углубленному изучению предмета, курсы для более детального изучения отдельных разделов, прикладные курсы, курсы для изучения разделов основного материала, которые не входят в образовательную программу).

Второй тип – межпредметные элективные курсы, цель которых – интеграция знаний учащихся о природе и обществе. Такие курсы могут выполнять двоякую функцию: быть компенсирующим курсом для классов гуманитарного и социально-экономического профилей или быть обобщающим курсом для классов естественнонаучного профиля.

И третий тип элективных курсов – не предметные элективные курсы, т.е. изучающие материал, который не входит в базисный учебный план. Это курсы, посвященные психологическим, социальным, культурологическим, искусствоведческим проблемам» [18].

Основная цель преподавания математики должна заключаться в развитии способностей к пониманию и анализу. отношения количества и пространства, необходимые для лучшего понимания прогресса цивилизации и лучшее понимание жизни и вселенной вокруг нас и развивать те привычки мышления, которые сделают эти силы эффективными в жизни человека [84].

Математика является как базовым, так и профильным предметом по техническому и технологическому направлениям, поэтому содержание элективных курсов должно удовлетворять следующим требованиям:

– «научности, системности, последовательности изложения и т.д.;

– не должно дублировать обязательный минимум содержания по математике;

– необходимо продумать варианты и формы некой итоговой аттестации при изучении курсов» [16].

Содержание курса находится в непосредственной зависимости от состава группы обучающихся и может быть разным:

– «направлено на корректировку, закрепление базовой дидактической единицы школьного образования и оценивается через контрольную работу;

– включает в себя не только базовую дидактическую единицу школьного образования, но и дидактическую единицу, которая должна идти в зачет как базовый курс по некоторым специальностям среднего профессионального образования;

– идет в зачет только как часть профильного курса высшего профессионального образования» [20].

Останавливаясь на особенностях математических элективных курсов, исследователи отмечают, что эти курсы предполагают создание условий для формирования и развития у школьников:

– умения пользоваться справочной литературой;

– интеллектуальных и практических умений;

– интереса к изучению математики;

– самостоятельности в приобретении и применении полученных знаний;

– способности творчески мыслить, работать в группе, грамотно вести дискуссию, уметь отстоять свою точку зрения.

Как отмечено в работе Г.А.Ворониной, «педагог, подготавливающий и проводящий элективный курс, должен быть теоретически и практически грамотен. Элективные курсы предназначены для построения личных траекторий образования обучающегося. Занятия могут проходить в традиционной форме, как лекция, семинар, дискуссия, диспут, выступления с докладами и т.д. » [14].

В первую очередь следует «конкретизировать специфику и содержание курса, насколько он значим в процессе обучения, какие знания и умения он будет формировать у обучающегося, и насколько это для него актуально» [23]. При последующем составлении плана курса необходимо принимать во внимание индивидуальные возможности и интересы обучающихся, факт учебно-методической базы. «Возникновение элективных курсов в процессе обучения требует модификации методических подходов к обучению» [60]. Следует выделить тот факт, что классическими методами обучения сложно сохранять заинтересованность у обучающихся, сформировать навыки и умения, и по этой причине необходима переключение методик на активные и интерактивные: учебные практики, исследовательские проекты, дискуссии и другие. Элективные курсы, которые входят в концепцию профильного обучения и охватывают 20% программы обучения, представляют огромную значимость в реализации индивидуальных потребностей и возможностей каждого обучающегося.

«Базовые требования к содержанию программ элективных курсов:

- ориентация на инновационные технологии обучения;
- учебная нагрузка обучающихся соответствует нормам;
- соответствие принятым правилам оформления программ;
- необходимо наличие учебного пособия, содержащего всю нужную информацию;
- ориентация на непродолжительное проведение курса (не более 72 часов);

– степень новизны для учащихся, в программе должен быть материал, который не содержится в базовых курсах;

– мотивирующий потенциал программы. Содержание программы должно вызывать интерес у обучающихся;

– развивающий потенциал программы, программа развивает в школьнике интеллект, творческий и эмоциональный потенциал; подразумевает применение методов активного обучения;

– содержательные линии программы полны и завершены в соответствии с поставленными целями;

– связность и систематичность изложенного материала, содержание программы должно быть разработано так, чтобы изучение последующих тем было связано со знаниями из предыдущих или со знаниями из базовых курсов; между частными и общими знаниями прослеживается взаимосвязь;

– методы обучения, программа формируется в большей степени на методах активного обучения (проектные, исследовательские, игровые и т.д.);

– степень контролируемости, в программе однозначно установлены ожидаемые результаты, ожидающиеся от обучения и те методы с помощью которых будет проверяться их достижимость;

– реалистичность с точки зрения ресурсов, программа должна быть реалистична с точки зрения применения средств (учебно-методические и материально-технические), должна учитываться кадровая составляющая школы;

– формальная структура программы, в программе необходимо наличие следующих разделов: пояснительная записка (с обязательной постановкой целей); основное (тематического) содержание; результаты, ожидающиеся от обучения; список использованной литературы» [14].

Подготовка учащихся к профильному обучению математике – важный аспект образовательного процесса. Это обеспечивает учащимся прочную базу знаний, необходимых для дальнейшего изучения математики на более продвинутом уровне. Введение элективных курсов по математике является одной из эффективных методик подготовки учащихся к профильному обучению. «Элективные курсы по математике дают возможность учащимся углубленно изучить тот материал, который им понравился или который может пригодиться им в будущем, отталкиваясь от их потенциальных профессиональных интересов и предпочтений. Такие курсы исключают посредственность и позволяют каждому ученику получать знания, адаптированные к его потребностям. Они помогают раскрыть учащимся полный потенциал, повышают их мотивацию и развивают критическое мышление» [66].

Результаты исследований показывают, что элективные курсы по математике имеют положительный эффект на обучение учащихся и помогают им подготовиться к профильному обучению математике. Такие курсы дают учащимся возможность получить дополнительные знания и навыки в математике, что повышает их уверенность и мотивацию. Кроме того, они помогают учащимся определить свои профессиональные интересы, что делает профильное обучение более целесообразным [84].

Понимание того, как ведется обучение математике на элективных курсах, требует широкого анализа зарубежного опыта. Важно учесть, что в разных странах и системах образования элективные курсы могут иметь разные направления и особенности. Так, например, в США элективные курсы по математике могут предоставляться как дополнительное образование для студентов, желающих развивать свой талант в этой области [82]. В свою очередь, в некоторых странах, таких как Финляндия, элективные курсы могут предоставляться в рамках регулярного учебного плана, чтобы дать студентам возможность выбирать, какие аспекты математики им интересны. Кроме того, важно обратить внимание на то, что элективные курсы могут фокусироваться на разных аспектах математики. Например, в некоторых случаях эти курсы могут быть ориентированы на подготовку учащихся к математическим олимпиадам в то время, как в других случаях они могут быть нацелены на развитие конкретных навыков или тематических областей математики. Исследование зарубежного опыта также позволяет выявить, какие методы и подходы к обучению математике на элективных курсах могут быть наиболее эффективными. Один из подходов, который широко используется за рубежом, – это интегрированный подход к изучению математики, который позволяет сочетать различные темы и идеи в единый курс, который может быть более интересен и увлекательным для учащихся. Также следует обратить внимание на то, как элективные курсы по математике могут быть интегрированы в широкий контекст образования, включая использование современных информационных технологий и методов обучения [51].

Например, в некоторых случаях курсы могут быть ориентированы на использование интерактивных заданий и игровых элементов для более эффективного обучения, а также на использование онлайн-платформ и программ для дистанционного обучения.

Важно подчеркнуть, что в процессе анализа зарубежного опыта необходимо учитывать специфику национальных систем образования и культурных особенностей, чтобы адаптировать эти методы и подходы для использования в конкретной среде образования [10]. Также следует учитывать и достижения науки и технологии в данной области для постоянного улучшения процесса обучения.

Итак, введение элективных курсов по математике является полезным подходом для подготовки учеников общеобразовательной школы к профильному обучению математике. Такие курсы дополняют учебный план и помогают школьникам получить необходимые знания и навыки. Они также могут помочь ученикам определить свои профессиональные интересы и настроиться на профильное обучение [75].

Выводы по первой главе

В первой главе рассмотрены теоретические основы преемственности между предпрофильным и профильным обучением. Проанализирован опыт исследователей по проблеме преемственности и история её развития. Раскрыто определение предпрофильной и профильной подготовки, их основные цели и задачи, а также методы реализации. Отметим, что предпрофильная подготовка является базой для начала профильной ориентации школьников, что, в свою очередь, является неотъемлемой частью концепции профильного образования.

Элективные курсы являются одним их методов реализации предпрофильной и профильной подготовки, позволяют учащимся получить необходимые для выбора дальнейшего пути развития знания. Стоит отметить, что благодаря элективным курсам, ученики могут глубже понять значимость математики в реальной жизни и стать более заинтересованными в ее изучении.

«Выбор элективного курса должен стать действительно осознанным и возможным. Обучающийся должен иметь возможность заранее ознакомиться с программой курса, изучить краткие аннотации к курсу.

Учителю необходимо провести презентацию своего курса, чтобы старшеклассники могли оценить не только содержание курса, но и получше узнать учителя, который будет его вести.

Цель элективных курсов – индивидуализация обучения, подготовка к осознанному и ответственному выбору сферы будущей профессиональной деятельности, расширение или углубление рамок школьного курса алгебры и геометрии» [73].

Актуальным также остаётся вопрос, как реализовать элективный курс, который будет являться средством преемственности между предпрофильной подготовкой и профильным обучением математике.

Глава 2 Методические основы реализации преемственности предпрофильной подготовки и профильного обучения математике в образовательной школе

2.1 Линия уравнений в школьном курсе алгебры как основа преемственности

Большинство задач о пространственных формах и количественных отношениях нашего мира сводится к решению различных видов уравнений. Изначально введению понятия уравнения в начальном курсе математики предшествует знакомство школьников с такими важнейшими математическими понятиями, подводящими к понятию уравнения, как: выражение, равенство, неравенство.

Как отмечается в курсе лекций по методике и технологии обучения математике «уравнение как общематематическое понятие многоаспектно» [31]. Учебный материал, связанный с решением уравнений, представляет собой значительную часть школьного курса математики, а его изучение в современной методике обучения математике выделено в отдельную содержательно-методическую линию. «Понимание и решение любых уравнений с неизвестными требует наличия некоторой степени абстрактного мышления. Сам язык – уже набор символов, ведь любое слово и предмет, обозначаемый этим словом (именем) – это разные вещи, а человек научился многим успешным операциям с помощью выработанных символов и обозначений» [59].

С простейшими уравнениями учащиеся знакомятся в курсе математики начальной школы. По мере того, как вводятся новые виды выражений и изучаются их преобразования, расширяется и круг рассматриваемых уравнений. Приобретенные навыки в решении уравнений и их систем находят применение при решении текстовых задач, что позволяет убедить учащихся в значимости их алгебраических знаний. «При изучении любой темы уравнения могут быть использованы как эффективное средство закрепления, углубления, повторения и расширения теоретических знаний, развития творческой математической деятельности учащихся» [24, с. 58].

В ФГОС основного общего образования устанавливается требование «выполнение несложных преобразований … выражений с квадратными корнями; раскрытие скобки, приведение подобных слагаемых, использование формулы сокращенного умножения»[68], в ФГОС среднего общего образования «владение стандартными приемами решения рациональных и иррациональных уравнений, … , использование готовых компьютерных программ, в том числе, для поиска пути решения и иллюстрации решения уравнений и неравенств»[68].

Проследим развитие линии уравнений в курсе алгебры, согласно Примерной основной образовательной программы (углубленный уровень) с 7 по 11 класс (таблица 1) на основе источников [45], [46].

Л.Н. Евелина обращает внимание на то, что «изучение математики очень трудно представить без установления преемственных связей. В частности, для решения уравнений нам необходимы знания о числовых множествах, свойствах арифметических операций, свойствах функций, логарифмов, степеней и многое другое» [19].

А.А. Сафарян отмечает, что «одним из сложных разделов линии уравнений являются иррациональные уравнения и неравенства, так как в школе им уделяют достаточно мало внимания» [54].

Анализ содержания линии уравнений, представленной в таблице 1, позволяет убедиться в преемственности образовательной линии уравнений на протяжении всего курса алгебры.

При анализе результатов ЕГЭ А.Е. Томилова отмечает, что «последнее время учителя акцентируют внимание на решение тригонометрических, показательных и логарифмических уравнений и неравенств, и меньше времени уделяют рассмотрению иррациональных уравнений и неравенств, уравнений и неравенств с модулем» [62].

Таблица 1 – Линия уравнений в школьной программе

Класс	Содержание учебного курса
7	«Уравнение с одной переменной. Корень уравнения. Свойства уравнений с одной переменной. Равносильность уравнений. Уравнение как математическая модель реальной ситуации. Линейное уравнение с одной переменной. Число корней линейного уравнения. Решение текстовых задач с помощью линейных уравнений. Линейное уравнение, содержащее знак модуля» [46].
8	«Квадратное уравнение. Формула корней квадратного уравнения. Количество действительных корней квадратного уравнения. Теорема Виета. Уравнения, сводимые к линейным уравнениям или к квадратным уравнениям. Квадратное уравнение с параметром. Решение текстовых задач с помощью квадратных уравнений. Дробно-рациональные уравнения. Решение дробно-рациональных уравнений. Решение текстовых задач с помощью дробно-рациональных уравнений. Графическая интерпретация уравнений с двумя переменными» [46].
9	«Биквадратные уравнения. Примеры применений методов равносильных преобразований, замены переменной, графического метода при решении уравнений 3-й и 4-й степеней. Решение дробно-рациональных уравнений. Решение систем уравнений с двумя переменными. Решение простейших систем нелинейных уравнений с двумя переменными. Графический метод решения системы нелинейных уравнений с двумя переменными. Система двух нелинейных уравнений с двумя переменными как модель реальной ситуации» [46].
10	«Тождества и тождественные преобразования. Уравнение, корень уравнения. Равносильные уравнения и уравнения-следствия. Основные методы решения целых и дробно-рациональных уравнений. Многочлены от одной переменной. Деление многочлена на многочлен с остатком. Теорема Безу. Многочлены с целыми коэффициентами. Теорема Виета. Иррациональные уравнения. Основные методы решения иррациональных уравнений. Показательные уравнения. Основные методы решения показательных уравнений. Логарифмические уравнения. Основные методы решения логарифмических уравнений. Основные тригонометрические формулы. Преобразование тригонометрических выражений. Решение тригонометрических уравнений. Решение систем линейных уравнений. Матрица системы линейных уравнений. Решение прикладных задач с помощью системы линейных уравнений. Построение математических моделей реальной ситуации с помощью уравнений» [45].
11	«Система и совокупность уравнений. Равносильные системы и системы-следствия. Отбор корней тригонометрических уравнений с помощью тригонометрической окружности. Основные методы решения систем и совокупностей рациональных, иррациональных, показательных и логарифмических уравнений. Уравнения и системы с параметрами. Применение уравнений, систем к решению математических задач и задач из различных областей науки и реальной жизни, интерпретация полученных результатов» [45].

Проведем анализ практического опыта учителей по теме «Иррациональные уравнения», опубликованный в статьях и учебно-методических пособиях.

В статье К.О. Селезневой «Иррациональные уравнения, неравенства и их системы» [56] автор выделяет следующие методы:

– «решение уравнения с использованием монотонности функции;
– метод возведения обеих частей уравнений в одну и ту же степень;
– решение уравнений с использованием замены переменной;
– метод разложения на множители выражений, входящих в уравнение;
– метод выделения полных квадратов при решении иррациональных уравнений;
– метод оценки» [56].

На сайте «Мультиурок» Л. Р. Авхатовой представлена технологическая карта занятия по теме «Решение иррациональных уравнений» Автор выделяет, что «результатом успешного усвоения данной темы является формирование у учащихся навыка классифицировать иррациональное уравнение и правильно подбирать алгоритм и метод для его решения, тем самым развивая математический кругозор» [2].

В открытом уроке И.А. Берговиной [8] говорится, что в результате овладения содержанием модуля иррациональные уравнения учащиеся должны уметь решать простейшие уравнения по заданному алгоритму на базовом уровне, решать самостоятельно, выбирая метод, на профильном уровне, выделять альтернативные способы достижения цели и выбирать наиболее эффективный.

В статье «О методике обучения школьников решению иррациональных уравнений» А.Н. Марасанов [30] предлагает алгоритм для метода возведения обеих частей уравнения в одну и ту же степень:

«1) нахождение области допустимых значений (ОДЗ) уравнения;

2) возведение обеих частей уравнения (возможно неоднократное) в одну и ту же степень и решение получившегося при этом уравнения;

3) выполнение проверки:

а) найденные значения переменной проверяют на принадлежность к ОДЗ уравнения;

б) значения переменной, входящие в ОДЗ, подставляют в само уравнение: те из которых обращают данное уравнение в верное числовое равенство, являются корнями исходного уравнения; в противном случае значение переменной является посторонним корнем» [30].

В журнале «Математика в школе» А.Н. Смоляков рассматривает несколько нестандартных способов решения иррациональных уравнений [57].

Согласно И.В. Яковлеву основными методами решения иррациональных уравнений принято считать:

– « метод нахождения ОДЗ;

– метод возведения обеих частей уравнения в одну и ту же степень (метод равносильных преобразований);

– метод замены переменной» [79].

А.А. Чугунова, А.С. Рванова [71] выделяют ряд трудностей возникающих при изучении иррациональных уравнений:

– «отсутствие единого алгоритма решения иррациональных уравнений;

– использование при решении иррациональных уравнений преобразований, приводящих первоначальное уравнение к не равносильному уравнению, что может привести к ошибке при решении, так как могут появиться посторонние корни» [76].

В.И. Мишин [37] в методических рекомендациях по обучению математике в средней школе выделяет следующие трудности, возникающие у учеников при обучении темы «Иррациональные уравнения». Они заключаются в том, что «даже в начале изучения простейшего класса иррациональных уравнений учащимся приходится преодолевать трудности, связанные с освоением специфической символики, в частности узнавать новые формы записи чисел. Значительно чаще, чем в предшествующих изученных уравнениях, используются неравносильные преобразования и подстановки» [37]. Поэтому В.И. Мишин говорит о том, что «весь материал, связанный с иррациональными уравнениями, требует в еще большей мере достаточной логической грамотности учащихся» [37].

Итак, выбор иррациональных уравнений в качестве основы для разработки программ элективных курсов в рамках предпрофильной подготовки и профильного обучения математике обоснован ранее высказанными причинами. Он также основан на анализе научно-методического опыта и практики обучения решению иррациональных уравнений в курсе математики в общеобразовательной школе.

2.2 Предпрофильный элективный курс по теме «Иррациональные уравнения»

Специфика разработанного нами элективного курса заключается в том, что его содержательный и организационные компоненты основаны на технологии уровневой дифференциации Р.А. Утеевой [63].

Главной целью рассматриваемой технологии уровневой дифференциации является определение для каждого обучающегося (группы обучающихся) наиболее эффективного и целесообразного вида учебной деятельности, формы работы на уроке и содержания дифференцированных заданий, в том числе , при организации, как урочной, так и домашней работы.

При этом также учитываются индивидуальные особенности (уровень подготовки, развитие мышления, познавательного интереса к предмету и т.д.) учащихся каждой типологической группы.

Применение технологии уровневой дифференциации Р.А. Утеевой [63] позволяет организовать новый способ познавательной деятельности обучающихся на уроках математики, более подробно разобрать материал, дать возможность обучающимся разных уровней знаний проявить себя. Рассмотрим более подробно данную технологию.

Данная технология предусматривает самостоятельную работу учащихся по дифференцированным заданиям.

«Дифференцированное задание – задание, построенное с учетом особенностей типологической группы учащихся, т.е. группы, объединенной «одинаковым» уровнем знаний и умений по предмету (теме, разделу, курсу) и уровнем их усвоения» [64].

Автор выделяет 4 типологические группы учащихся, вводя условное обозначение A, B, C, D. Рассмотрим характеристику каждой группы подробнее:

> «Группа А . Учащийся имеет глубокие и полный знания по пройденному курсу, умеет доказывать, комментировать и обобщать математические факты. Может приводить свои примеры. Знает основные методы и алгоритмы решения задач.
>
> Группа В. Учащийся имеет хорошие знания основных фактов, однако не всегда может аргументировать, доказывать, обобщать, приводить свои примеры. Знает основные методы решения задач пройденного курса, но затрудняется при решении задач, требующих творческого подхода, и справляется только с помощью учителя.
>
> Группа С. Учащийся обладает минимумом знаний, достаточных для их применения по образцу и в сходной ситуации. Может воспроизвести текст учебника, решать стандартные задачи. Не обладает навыками рационального решения задач.
>
> Группа D. Учащийся с трудом осваивает факты, понятия, правила и способы решения задач. Не всегда понимает смысл математический предложений, условия задач. Не умеет применять известные правила без помощи учителя» [64].

В нашем курсе мы не будем учитывать группу D так как в математическом профиле ученики таких групп отсутствуют.

В комплексе заданий выделены следующие уровни сложности: репродуктивный, репродуктивно-исследовательский, исследовательский.

При разработке содержания элективного курса нами были проанализированы учебные программы по учебникам С.М. Никольского[38], А.Г Мерзляка [34, 35], А.Г. Мордковича [36].

Предлагаемый элективный курс «Иррациональные уравнения» в рамках предпрофильной подготовки, рассчитан на 17 часов для учащихся 9 классов с углубленным изучением математики.

Программа курса представлена в таблице 2.

Цель курса:

- систематизация и обобщение видов, свойств и методов решения иррациональных уравнений по программе основной школы,
- развитие логического и аналитического мышления,
- подготовка к углубленному изучению математики в старших классах.

Задачи курса:

- сформировать четкое понимание разницы между уравнениями равносильными и уравнениями следствия,
- сформировать навыки решения иррациональных уравнений методами возведения в квадрат, заменой переменных, на основе свойств.

Вводное занятие (2 часа).

Тема 1. Иррациональные уравнения: Понятие и основные свойства иррациональных уравнений. Понятие равносильных уравнений и уравнений следствия.

Цель занятия:

- систематизация и обобщение ранее изученных по программе видов иррациональных уравнений,
- выявление уровня теоретических знаний и умений по теме.

Таблица 2 – Учебно-тематический план

Тема урока	Кол-во часов	Вид урока	Форма работы
Иррациональные уравнения: Понятие и основные свойства иррациональных уравнений. Понятие равносильных уравнений и уравнений следствия	2	Вводное занятие	фронтальная, групповая дифференцированная
Метод возведения обеих частей в степень корня.	3	урок-лекция-практикум	фронтальная, групповая дифференцированная
Метод замены (введения новой переменной)	4	урок-лекция-практикум	фронтальная, групповая дифференцированная
Иррациональные уравнения с модулем	4	урок-лекция-практикум	фронтальная, групповая дифференцированная
Иррациональные уравнения с параметром	2	урок-практикум	групповая дифференцированная
Итоговая контрольная работа	2	Урок контроля знаний и умений	индивидуальная дифференцированная
Итого	17 часов		

В учебнике С.М. Никольского [38] определение иррационального уравнения дается следующим образом: «Уравнение, в котором хотя бы один член содержит неизвестное под знаком корня, называют иррациональным уравнением» [13].

Рассмотрим основные свойства иррациональных уравнений:

1) «если обе части уравнения возвести в нечётную степень, то получим уравнение, равносильное данному;

2) при возведении обеих частей уравнения в чётную степень получаем уравнение, являющееся следствием данного;

3) уравнение вида $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$ равносильно системе $\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) \geq 0 \end{cases}$;

4) уравнение вида $\sqrt{f(x)} = g(x)$ равносильно системе $\begin{cases} f(x) = \left(g(x)\right)^2 \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$;

5) если для любого $x \in M$ выполняются неравенства $f(x) \geq 0$ и $f(x) \geq$ ≥ 0, то уравнения $f(x) = g(x)$ и $\left(f(x)\right)^{2k} = \left(y(x)\right)^{2k}$, $k \in N$, равносильны на множестве M» [35].

Иногда для решения иррационального уравнения достаточно посмотреть на ОДЗ, до применения каких-либо преобразований.

Определение 1: «Область допустимых значений (ОДЗ) уравнения есть множество значений переменной, при которых обе части данного уравнения имеют смысл» [36, с. 1].

Пример 1. Решить уравнение

$$\sqrt{6x - x^2 - 8} + \sqrt{x - 4} = x^2 - 7x + 12.$$

Решение: Найдем ОДЗ

$$\begin{cases} 6x - x^2 - 8 \geq 0 \\ x - 4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \leq x \leq 4 \\ x \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow x = 4.$$

Таким образом, ОДЗ состоит из одной точки, выполним проверку. Подставив в уравнение, убедимся, что данное число действительно является корнем уравнения.

Ответ: 4.

Пример 2. Решить уравнение

$$\sqrt{x - 13} - \sqrt{10 - x} = 2.$$

Решение: Найдём ОДЗ

$$\begin{cases} x - 13 \geq 0 \\ 10 - x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 13 \\ x \leq 10 \end{cases} \Leftrightarrow \emptyset.$$

Ответ: нет решений.

Пример 3. Решить уравнение

$$\sqrt{3 - x} = x - 3.$$

Решение: при решении рассматривается только арифметический корень, поэтому должно выполняться условие $x - 3 \geq 0$, получаем систему с учетом ОДЗ

$$\begin{cases} 3 - x \geq 0 \\ x - 3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3,$$

выполнив проверку, убедимся, что $x = 3$ – корень уравнения.

Ответ: 3.

Пример 4. Решить уравнение

$$\sqrt{x} + \sqrt{x-2} = 1 - x.$$

Решение: найдём ОДЗ

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x - 2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 2$$

дополнительное условие

$$1 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1.$$

Рисунок 1 – Графическая интерпретация решения уравнения

Ответ: нет решений (рисунок 1).

Задания для самостоятельной работы на уроке

Группа А

Докажите, что уравнение не имеет решения:

а) $\frac{\sqrt[4]{x^4-16}+\sqrt[6]{x^3-8}}{3x-x^2-2} = 0,$

б) $\sqrt{1-x} = \sqrt[3]{x-2}.$

Решите уравнения используя метод определения ОДЗ:

а) $\sqrt{6-4x} + \sqrt{x-6} = 3,$

б) $\sqrt{-4+x} - \sqrt{5x-1} = \sqrt{3-x}.$

Группа В

Докажите, что уравнение не имеет решения:

а) $\sqrt{x-4} + \sqrt{x^2-3} = 0,$

б) $5\sqrt{x-2} - \sqrt{4-x^2} = \frac{1}{2-x}.$

Решите уравнения используя метод определения ОДЗ:

а) $\sqrt{x-13}-\sqrt{10-x}=2$,

б) $\sqrt{x}+\sqrt{x-2}=1-x$.

Группа С.

Докажите, что уравнение не имеет решения:

а) $\sqrt{3x-1}+\sqrt{5x+}8+1=0$,

б) $\sqrt{8-x^2}-2\sqrt{x-3}=1$.

Определение 2. «Два уравнения называются равносильными, если множества их решений совпадают, иначе, если они имеют только одинаковые корни или совсем не имеют корней»[36].

Определение 3 . «Уравнение называется следствием уравнения, если все корни второго уравнения являются корнями первого»[36].

Первое уравнение может иметь дополнительные корни, которые для второго уравнения называются посторонними. Посторонние корни могут появиться при преобразованиях, необходимых для нахождения корней уравнений.

Дифференцированная групповая работа

Группа А.

Равносильны ли уравнения:

а) $\sqrt[5]{x-1}=-x$ и $x-1=-x^5$,

б) $\sqrt[4]{x-2}=|x|$ и $x-2=x^4$.

Группа В.

Равносильны ли уравнения:

а) $\sqrt[3]{2-x}=-3$ и $2-x=-27$,

б) $\sqrt[4]{2-x}=-3$ и $2-x=81$.

Группа С.

Равносильны ли уравнения:

а) $\sqrt{x-5}=9$ и $x-5=81$,

б) $\sqrt{x-5}=x$ и $x^2=x-5$.

Фронтальная работа. Все группы предоставляют отчёт о результатах, который обсуждается всем классом.

Занятия 3–5 (3 часа).

Тема 2. Метод возведения обеих частей в степень корня

Наиболее общий путь решения иррациональных уравнений состоит в возведении обеих частей уравнения в степень корня и последующим «освобождением» от радикалов. В основе этого способа лежат хорошо знакомые утверждения:

«если обе части уравнения возвести в нечётную степень, то получим уравнение, равносильное данному;

при возведении обеих частей уравнения в чётную степень получаем уравнение, являющееся следствием данного» [35].

При возведении в четную степень возможно появление посторонних корней. Поэтому обязательная проверка (подстановка полученных корней в исходное уравнение).

Пример 5. Решить уравнение

$$\sqrt{x+3} = 5.$$

Решение: возведём в квадрат левую и правую часть уравнения

$$\left(\sqrt{x+3}\right)^2 = 5^2,$$

тогда получим обычное уравнение, решив его получаем *x=22.*Советуем в иррациональных уравнениях приучать учеников всегда делать проверку своего ответа, даже если она не требуется.

Ответ: 22.

Пример 6. Решим уравнение

$$\sqrt{2x-3} = \sqrt{x-2}$$

Возведем обе части уравнения в квадрат:

$$\left(\sqrt{2x-3}\right)^2 = \left(\sqrt{x-2}\right)^2,$$
$$2x-3 = x-2,$$
$$x = 1.$$

Проверим, что полученное числа является решением уравнения:

$$x = 1$$
$$\sqrt{2 \cdot 1 - 3} = \sqrt{x - 2},$$
$$\sqrt{-1} = \sqrt{-1}.$$

Обе части уравнения не имеют смысла. Следовательно, уравнение не имеет решений.

Пример 7. Решим уравнение

$$\sqrt{x-5} + \sqrt{10-x} = 3.$$

Возведем обе части уравнения в квадрат:

$$\left(\sqrt{x-5} + \sqrt{10-x}\right)^2 = 3^2,$$
$$\left(\sqrt{x-5}\right)^2 + 2 \cdot \sqrt{x-5} \cdot \sqrt{10-x} + \left(\sqrt{10-x}\right)^2 = 9,$$
$$x - 5 + 2\sqrt{(x-5)(10-x)} + 10 - x = 9,$$
$$2\sqrt{(x-5)(10-x)} = 4,$$
$$\sqrt{-x^2 + 15x - 50} = 2,$$
$$\left(\sqrt{-x^2 + 15x - 50}\right)^2 = 2^2,$$
$$-x^2 + 15x - 50 = 4,$$
$$x^2 - 15x + 54 = 0,$$
$$x_1 = 6, \quad x_2 = 9.$$

Проверим, что полученные числа являются решениями уравнения:

$$x_1 = 6$$
$$\sqrt{6-5} + \sqrt{10-6} = 3.$$
$$\sqrt{1} + \sqrt{4} = 3,$$
$$3 = 3.$$

$$x_2 = 9$$
$$\sqrt{9-5} + \sqrt{10-9} = 3.$$
$$\sqrt{4} + \sqrt{1} = 3,$$
$$3 = 3.$$

Следовательно, $x=6$ и $x=3$ – решения данного уравнения.

Пример 8. Решить уравнение

$$\sqrt{x^2 + 5x + 1} + 1 - 2x = 0.$$

Решение: преобразуем и возведем обе части уравнения в квадрат:

$$\sqrt{x^2+5x+1}=2x-1,$$
$$\left(\sqrt{x^2+5x+1}\right)^2=(2x-1)^2,$$
$$x^2+5x+1=4x^2-4x+1,$$
$$3x^2-9x=0,$$
$$3x\cdot(x-3)=0,$$
$$x_1=0,\ \ x_2=3.$$

Проверим, что полученные числа являются решениями уравнения:

$$x_1=0$$
$$\sqrt{0^2+5\cdot0+1}+1-2\cdot0=0,$$
$$\sqrt{1}+1-0=0,$$
$$2\neq0.$$

Следовательно, $\mathrm{x}=3$ – решение данного уравнения.

Пример 9. Решить уравнение

$$\sqrt{1+\mathrm{x}\sqrt{\mathrm{x}^2-24}}=\mathrm{x}-1,$$

если в уравнение входят несколько радикалов, то их нужно исключать последовательно. Преобразуем

$$\mathrm{x}\left(\sqrt{\mathrm{x}^2-24}-\mathrm{x}+2\right)=0,$$

воспользуемся правилом «произведение равно нулю, если один из множителей равен нулю», получим x=0 или $\sqrt{\mathrm{x}^2-24}-\mathrm{x}+2=0.$

Уединив радикал с одной стороны уравнения получим

$$\sqrt{\mathrm{x}^2-24}=\mathrm{x}-2,$$

выполним повторное возведение в квадрат и у нас получится квадратное уравнение

$$\mathrm{x}^2-24=\mathrm{x}^2-4\mathrm{x}+4,$$

его решением будет x=7. Выполнив проверку при x=0, ответ будет некорректным

$$\sqrt{1+0\sqrt{0-24}}=-1,$$

при x=7 ответ корректный.

Ответ: 7.

Задания для самостоятельной работы по группам

Группа А

Решите уравнения, используя метод возведения в степень корня

а) $\sqrt[3]{6x+1}=-5$,

б) $\sqrt{3x+1}=x-3$,

в) $\sqrt{x+5}+\sqrt{2x+8}=7$,

г) $\sqrt{9-x\sqrt{x^2-18}}=x-3$,

д) $\sqrt{x\sqrt[4]{x\sqrt[3]{x}}}=4$.

Группа В

Решите уравнения, используя метод возведения в степень корня Указания:

а) $\sqrt[3]{6x+1}=-5$, при возведении в нечётную степень получается равносильное уравнение;

б) $\sqrt{3x+1}=x-3$, воспользуйтесь формулой квадрата разности;

в) $\sqrt{x+5}+\sqrt{2x+8}=7$, воспользуйтесь формулой квадрат суммы и выполните повторное возведение в квадрат;

г) $\sqrt{9-x\sqrt{x^2-18}}=x-3$, перед повторным возведением в квадрат уедините радикал с одной стороны уравнения;

д) $\sqrt{x\sqrt[4]{x\sqrt[3]{x}}}=4$, последовательно выполняйте возведение в степень корня.

Группа С

Решите уравнения, используя метод возведения в степень корня Указания

а) $\sqrt[3]{6x+1}=-5$, возведите обе части уравнения в куб;

б) $\sqrt{3x+1}=x-3$, при возведении в квадрат правой части уравнения воспользуйтесь формулой $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$,

в) $\sqrt{x+5}+\sqrt{2x+8}=7$, при возведении левой части уравнения в квадрат воспользуйтесь формулой $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$, затем уедините корень в левой части уравнения и выполните повторное возведение в квадрат;

г) $\sqrt{9-x\sqrt{x^2-18}}=x-3$, решите уравнение по примеру, выполненному в классе;

д) $\sqrt{x\sqrt[4]{x\sqrt[3]{x}}}=4$, выполните пример по аналогии

$$\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}=2,$$

$$x\sqrt{x\sqrt{x}}=4,$$

$$\sqrt{x\sqrt{x}}=\frac{4}{x},$$

$$x\sqrt{x}=\frac{16}{x^2},$$

$$\sqrt{x}=\frac{16}{x^3},$$

$$x=\frac{256}{x^6},$$

$$x^7=256,$$

$$x=2\sqrt[7]{2}.$$

Занятия 6–9 (4 часа).

Тема 3. Метод замены (введения новой переменной)

Данный метод используется для упрощения выражения, в том случае если подкоренные и/или не подкоренные совпадают, или совпадают после преобразований.

Новая переменная в уравнениях иногда действительно очевидна, но иногда ее трудно увидеть, а можно выявить только лишь в процессе каких либо преобразований.

Бывает полезно ввести не одну, а две переменные.

Пример 10. Решить уравнение

$\sqrt{x^2 - 3x + 5} + x^2 = 3x + 7.$

Решение: преобразуем $\sqrt{x^2 - 3x + 5} + x^2 - 3x - 7 = 0$,

положим $\sqrt{x^2 - 3x + 5} = t, t \geq 0.$

Тогда $x^2 - 3x + 5 = t^2$, а $x^2 - 3x - 7 = t^2 - 12$, исходное уравнение примет вид $t^2 + t - 12 = 0.$

Из двух корней лишь одно попадает область задания *t*:

$$\left[\begin{array}{c} t = -4 \notin [0, \infty) \\ t = 3 \end{array}\right. .$$

Зная, чему равно t, решаем уравнение относительно x:

$$\sqrt{x^2 - 3x + 5} = 3,$$

$$x^2 - 3x + 5 = 9,$$

$$x^2 - 3x - 4 = 0,$$

имеем $x = 4; x = -1.$

Решение, найденное таким путём проверки не требует, но советуем обращать внимание учеников на то, что лучше выполнить проверку в любом случае.

Ответ: $\{-1: 4\}.$

Пример 11. Решить уравнение

$$2x^2 + 3x + \sqrt{2x^2 + 3x + 9} = 33.$$

Решение: перенесем всё в одну сторону и представим 33 как сумму двух чисел 9 и -42

$$2x^2 + 3x + 9 - 42 + \sqrt{2x^2 + 3x + 9} = 0,$$

положим $\sqrt{2x^2 + 3x + 9} = t, t \geq 0$ уравнение примет вид

$$t^2 + t - 42 = 0,$$

решая квадратное уравнение получаем $t = -7; t = 6$, $t = -7 \leq 0$ не удовлетворяют наложенному ограничению. Подставим

$$\sqrt{2x^2 + 3x + 9} = 6,$$

решая метод возведения в степень получим корни $x_1 = 3; x_1 = -4{,}5$. Выполняя проверку убеждаемся, что оба корня подходят.

Ответ: $\{3; -4{,}5\}$

Задания для работы в классе

Группа А

а) $\sqrt{\frac{4}{x-2}} + 1 = \frac{1}{x-2}$,

б) $2\sqrt{2x^2 - x + 8} = x^2 - 2x^2 + 7$,

в) $\sqrt{3x^2 - 9x - 26} = 12 + 3x - x^2$,

г) $\sqrt[3]{x+2} + 2\sqrt[6]{x+2} = 3$,

д) $\sqrt{x^1 - x + 2} + \sqrt{x^2 - x + 7} = \sqrt{2x^2 - 2x + 21}$.

Группа В

а) $\sqrt{\frac{4}{x-2}} + 1 = \frac{1}{x-2}$, положим $\sqrt{\frac{1}{x-2}} = t$,

б) $2\sqrt{2x^2 - x + 8} = x - 2x^2 + 7$, преобразуйте правую часть уравнения вынеся минус за скобку;

в) $\sqrt{3x^2 - 9x - 26} = 12 + 3x - x^2$, разложите на множители выражение под корнем $3x^2 - 9x$,

г) $\sqrt[3]{x+2} + 2\sqrt[6]{x+2} = 3$, положим первое слагаемое равно t;

д) $\sqrt{x^2 - x + 2} + \sqrt{x^2 - x + 7} = \sqrt{2x^2 - 2x + 21}$, часть подкоренного выражения необходимо заменить на новую переменную.

Группа С

а) $\sqrt{\frac{4}{x-2}} + 1 = \frac{1}{x-2}$, положим $\sqrt{\frac{1}{x-2}} = t$, тогда $2t + 1 = t$;

б) $2\sqrt{2x^2 - x + 8} = x - 2x^2 + 7$, преобразуйте правую часть уравнения вынеся минус за скобку$-(2x^2 - x - 7)$, положим $2x^2 - x = t$, тогда $2\sqrt{t + 8} = -(t - 7)$;

в) $\sqrt{3x^2 - 9x - 26} = 12 + 3x - x^2$,преобразуем

$\sqrt{3(x^2 - 3x) - 26} = 12 - (x^2 - 3x)$;

г) $\sqrt[3]{x + 2} + 2\sqrt[6]{x + 2} = 3$, положим $\sqrt[3]{x + 2} = t$;

д) $\sqrt{x^2 - x + 2} + \sqrt{x^2 - x + 7} = \sqrt{2x^2 - 2x + 21}$,положим $x^2 - x = t$.

Занятие 10–13 (4 часа)

Тема 4. Иррациональные уравнения с модулями

Рассмотрим способы решения уравнений с модулем.

1) по определению.

$$|a| = \begin{cases} a, \text{если } a \geq 0 \\ -a, \text{если } a < 0 \end{cases}$$

Пример 12. Решить уравнение

$$|2x - 3| = 3 - 2x.$$

Решение: если $|a| = -a$, тогда и только тогда, когда a≤0. Следовательно,

$$2x - 3 \ll 0 \to x \leq \frac{3}{2}.$$

Ответ: $(\infty;\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}]$.

2) замена переменной.

Можно сделать замену$|x - a| = t$, зная, что $(x - a)^2 = |x - a|^2 = t^2$

Пример 13. Решить уравнение

$$(x - 7)^2 - |x - 7| = 30.$$

Решение: положим $|x - 7| = t$, получаем

$$t^2 - t - 30 = 0$$

$$\begin{cases} t = 6 \\ t = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x - 7| = 6 \\ |x - 7| = -5 \end{cases}$$’

второе уравнение не имеет решений (отрицательное значение модуля). Решением первого уравнения служат числа 1 и 13.

Ответ: 1, 13.

3) перебор промежутков.

Модуль снимается в зависимости от знаков выражения под модулем прибегая к определению.

Пример 14. Решить уравнение

$$|2-x|=5-4x$$

Решение: рассмотрим две системы

$$\begin{cases} 2-x\geq 0 \\ 2-x=5-4x \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} 2-x<0 \\ x-2=5-4x \end{cases}$$

Решение первой системы x=1, у второй системы решений нет.

Ответ: 1.

Задания для работы по группам

Группа А

а) $\sqrt{5x-34}=|x-3|-4$,

б) $\sqrt{|x^2+14x+47|-1}=|x+7|-1$,

в) $|x-7|=2\sqrt{2x-8}-3$.

Группа В

а) $\sqrt{5x-34}=|x-3|-4$, имеет решение, если правая часть неотрицательна;

б) $\sqrt{|x^2+14x+47|-1}=|x+7|-1$.

Введем подстановку $|x+7|=t\geq 0$;

в) $|x-7|=2\sqrt{2x-8}-3$, возведем обе части в квадрат

$(|x-7|+3)^2=4(2x-8)$.

Группа С

а) $\sqrt{5x-34}=|x-3|-4$, имеет решение, если правая часть неотрицательна$|x-3|\geq 4\rightarrow\begin{cases} x\geq 7 \\ x\leq -1 \end{cases}$;

$$\sqrt{|x^2+14x+47|-1}=|x+7|-1.$$

Введем подстановку $|x+7| = t \geq 0$, исходя из того, что $|a|^2 = a^2$, получаем $|x+7|^2 = t^2$.

б) $|x-7| = 2\sqrt{2x-8} - 3$, возведем обе части в квадрат

$(|x-7|+3)^2 = 4(2x-8)$, заметим, что $|x-7|^2 = (x-7)^2$.

Занятия 14–15 (2 часа).

Тема 5. Иррациональные уравнения с параметром

Рассмотрим уравнение с параметром на примере уравнения.

Пример 15. «Решить уравнение

$$\sqrt{x-a} = 2a - x.$$

Решение: сначала будем действовать по стандартной схеме – возведём обе части уравнения в квадрат и решим полученное квадратное уравнение:

$$x - a = 4a^2 - 4ax + x^2,$$

$$x^2 - (4a+1)x + 4a^2 + a = 0,$$

найдем дискриминант: $D = (4a+1)^2 - 4(4a^2+a) = 4a+1$,

значит $x_{1,2} = \frac{4a+1 \pm \sqrt{4a+1}}{2}$.

Теперь нужно выполнить проверку, подставляя поочередно каждый корень в исходное уравнение.

Эта проверка, видимо будет весьма трудной.

Мы выберем другой путь – графический, построим графики функций $y = \sqrt{x-a}$ и $y = 2a - x$ и найдём их точки пересечения.

При этом целесообразно рассмотреть три случая: $a = 0$; $a < 0$; $a > 0$.

В первом случае $(a = 0)$ заданное уравнение принимает вид $\sqrt{x} = -x$.

Построив графики функций $\boldsymbol{y} = \sqrt{x}$, $y = -x$ (рисунок 2), убеждаемся, что имеют одну общую точку $(0; 0)$, поэтому уравнение имеет только один корень $x = 0$.

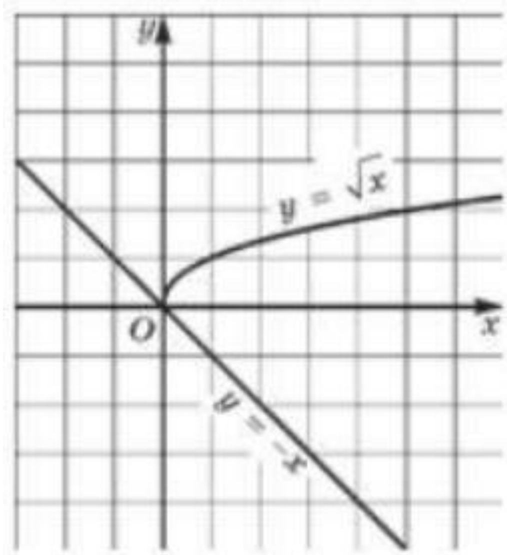

Рисунок 2 – Графики функций $\mathbf{y = \sqrt{x}, y = -x}$

Во втором случае ($a < 0$) графики функций $y = 2a - x$ и $y = \sqrt{x - a}$ не пересекаются (рисунок 3), следовательно, заданное уравнение не имеет корней.

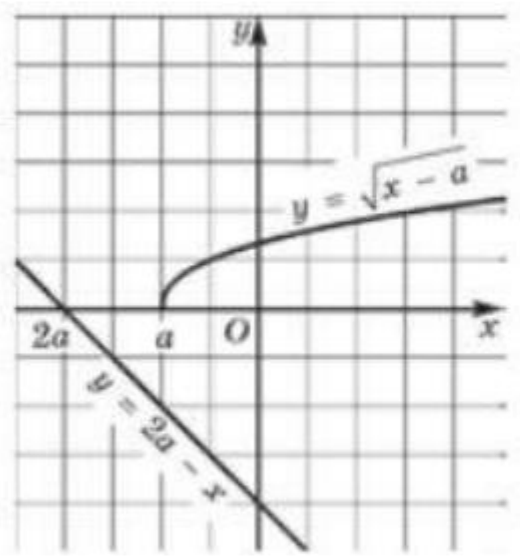

Рисунок 3 – Графики функций $y = 2a - x$ и $y = \sqrt{x - a}$ при $a < 0$

В третьем случае ($a > 0$) графики функций $y = 2a - x$ и $y = \sqrt{x - a}$ пересекаются в одной точке (рисунок 4), значит, заданное уравнение имеет один корень.

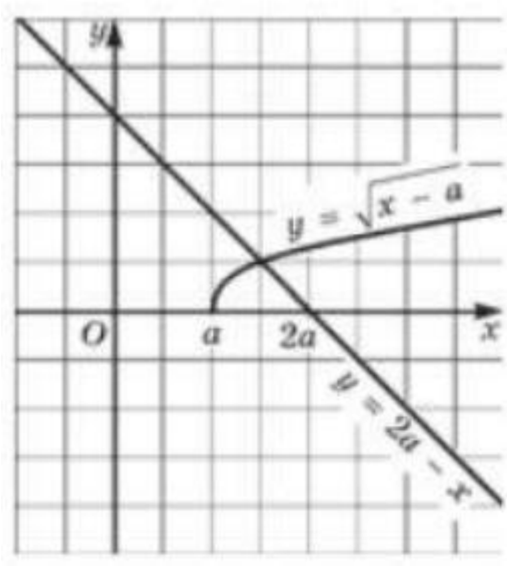

Рисунок 4 – Графики функций $y = 2a - x$ и $y = \sqrt{x - a}$ при $a > 0$

Таким образом, из двух полученных выше корней один окажется посторонним. Какой? Ответ можно почерпнуть из графической иллюстрации на рисунке 3.

Абсцисса точки пересечения графиков меньше чем $2a$ (это – абсцисса точки пересечения прямой $y = 2a - x$ с осью x).

Из двух найденных выше корней $x_2 = \frac{4a+1+\sqrt{4a+1}}{2}$ явно больше, чем $2a$; чтобы убедиться, достаточно переписать второй корень в виде $x_2 = 2a + \frac{1+\sqrt{4a+1}}{2}$.

Итак, если $a > 0$, то заданное уравнение имеет один корень

$$x = \frac{4a+1-\sqrt{4a+1}}{2}.$$

Если $a < 0$, то корней нет; если $a = 0$, то $x = 0$» [36].

Задания для групповой работы на уроке

Группа А

а) Решить уравнение

$$x - \sqrt{a - x^2} = 1.$$

б) Для каждого значения параметра a, определить число решений:

$$\sqrt{2|x| - x^2} = a,$$

выполнив вычисление, проанализируйте решение и сделайте выводы.

Группа В

а) Решить уравнение

$$x - \sqrt{a - x^2} = 1$$

Выполните решение методом возведение в квадрат.

б) Найдите все значения параметра а, при которых уравнение

$$\sqrt{5ax + 3} = 5x + 3,$$

имеет только одно решение. Выполните переход к равносильной системе и найдите дискриминант.

Группа С

а) Решить уравнение

$$x - \sqrt{a - x^2} = 1.$$

Указание: Выполните решение методом возведение в квадрат.

$$\sqrt{a - x^2} = x - 1 \quad (\mathbf{1})$$

$$a - x^2 = x^2 - 2x + 1$$

$$2x^2 - 2x + (1 - a) = 0.$$

Вычислите дискриминант и выполните проверку каждого типа корней.

б) Найдите все значения параметра а, при которых уравнение

$$\sqrt{5ax + 3} = 5x + 3,$$

имеет только одно решение.

Указание. Выполните переход к равносильной системе и найдите дискриминант. При D = 0 уравнение имеет только один корень.

2.3 Элективный курс по теме «Методы решения иррациональных уравнений»

Предложенный элективный курс предназначен для учащихся 10-11 классов общеобразовательной школы и является предметноориентированным, направлен на углубление знаний по теме, построен с опорой на знания, полученные в результате изучения элективного курса по теме «Иррациональные уравнения» в рамках профильного обучения. Допускается использование курса без предпрофильной подготовки только в классах с углубленным изучением математики.

В сборнике рабочих программ по алгебре Т.А. Бурмистровой выделяются следующие требования к знаниям и умениям учащихся, которые они должны освоить при изучении темы «Иррациональные уравнения»:

« – решать основные виды уравнений с одной переменной;

– понимать уравнение как важнейшую математическую модель для описания и изучения разнообразных реальных ситуаций;

– овладеть специальными приемами решения уравнений, уверенно применять аппарат уравнений для решения разнообразных задач из математики, смежных предметов, практики» [11].

Помимо задач выше, представленный элективный курс направлен на развитие умения находить выход из поставленных перед учеником задач с помощью анализа дополнительной литературы, обучение компьютерным программам-помощникам для решения уравнений, формирование интереса к предмету.

Цель курса:

– повысить уровень понимания и осознанного выбора профиля обучения;

– сформировать знания о приёмах и методах решения иррациональных уравнений и умения по их применению к решению задач разных типов и видов.

Задачи курса:

– приобщение учащихся к самостоятельной работе с дополнительной литературой;

– повышение математической культуры ученика;

– развитие логического мышления и математической интуиции;

– подготовка к успешной сдаче ЕГЭ по математике.

Программа элективного курса представлена в таблице 3 и рассчитана на 17 часов.

Таблица 3 – Учебно-тематический план

Тема урока	Кол-во часов	Вид урока	Форма работы
Метод домножения на сопряженное	2	лекция-практикум	фронтальная, индивидуальная дифференцированная
Графический метод	2	лекция-практикум	фронтальная, индивидуальная дифференцированная
Метод замены переменной	3	лекция-практикум	фронтальная, групповая дифференцированная
Нестандартные методы	3	лекция-практикум	фронтальная, групповая дифференцированная
Уравнения из ЕГЭ	4	практикум	групповая дифференцированная
Итоговая контрольная работа	2	Урок контроля	индивидуальная дифференцированная

Она предполагает изучение различных методов решения иррациональных уравнений с применением технологии уровневой дифференциации.

Формы контроля: домашние, самостоятельные, контрольные работы, рефераты, исследовательские работы.

Ожидаемые результаты:

– умение решать иррациональные уравнения используя различные методы;

– уметь выполнять тождественные преобразования иррациональных уравнений;

– развить способности самостоятельного поиска решений примеров в дополнительной литературе;

– приобрести опыт в выборе методов для решения нестандартных задач;

– иметь представление о заданиях единого государственного экзамена.

Тема 1. Метод домножения на сопряженное.

Данный метод используется, когда в уравнение входит сумма или разность корней. Тем самым при умножении на сопряженное можно избавиться от корней, необходимо учитывать ОДЗ.

Пример 1. Решить уравнение

«$\sqrt{5x+7}-\sqrt{3x+1}=\sqrt{x+3}$ » [44].

Решение.

Умножим обе части уравнения на сопряженный множитель $\sqrt{5x+7}+$ $+\sqrt{3x+1}$, получим

$$2(x+3)=\sqrt{x+3}\left(\sqrt{5x+7}+\sqrt{3x+1}\right),$$

разделим обе части уравнения на $\sqrt{x+3}$:

$$2\sqrt{x+3}=\sqrt{5x+7}+\sqrt{3x+1},$$

составим систему уравнений и решим ее методом сложения

$$\begin{cases}2\sqrt{x+3}=\sqrt{5x+7}+\sqrt{3x+1},\\ \sqrt{x+3}=\sqrt{5x+7}-\sqrt{3x+1}\end{cases},$$

Отсюда

$$9(x+3)=2\sqrt{5x+7,}$$

тогда $x=-\frac{1}{11}$.

Корень требует проверки, так как использовались неравносильные преобразования.

Ответ: $-\frac{1}{11}$.

Пример 2. Решить уравнение

$$\sqrt{3x^2-1}+\sqrt{x^2-x+1}=\sqrt{3x^2+2x+1}+\sqrt{x^2+2x+4},$$

перенесём всё в одну сторону и сгруппируем

$(\sqrt{3x^2+2x+1}-\sqrt{3x^2-1})+(\sqrt{x^2+2x+4}-\sqrt{x^2-x+1})=0,$

выражение в каждой скобке умножим и разделим на сопряжённые (которые не обращаются в 0 ни при каких значениях переменной)

$$\frac{\left(\sqrt{3x^2+2x+1}-\sqrt{3x^2-1}\right)\cdot\left(\sqrt{3x^2+2x+1}+\sqrt{3x^2-1}\right)}{2\sqrt{3x^2+2x+1}+\sqrt{3x^2-1}}$$

$$+\frac{\left(\sqrt{x^2+2x+4}-\sqrt{x^2-x+1}\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+2x+4}+\sqrt{x^2-x+1}\right)}{\sqrt{x^2+2x+4}+\sqrt{x^2-x+1}}$$

$$=0,$$

упростим, используя формулу разность квадратов и вынесем общий множитель за скобки

$$\frac{3x^2+2x+1-(3x^2-1)}{\sqrt{3x^2+2x+1}+\sqrt{3x^2-1}}+\frac{x^2+2x+4-(x^2-x+1)}{\sqrt{x^2+2x+4}+\sqrt{x^2-x+1}}=0,$$

$$(x+1)\cdot\left(\frac{2}{\sqrt{3x^2+2x+1}+\sqrt{3x^2-1}}+\frac{3}{\sqrt{x^2+2x+4}+\sqrt{x^2-x+1}}\right)=0,$$

допустимыми являются значения переменной, которые удовлетворяют условию $3x^2-1\geq 0$, выражение в скобках положительно при всех значения переменной x.

$$\begin{cases} x+1=0 \\ 3x^2-1\geq 0' \end{cases}$$

$$x=-1.$$

Ответ: -1.

Задания для самостоятельной работы

Группа А

а) $\sqrt{x+3}+\sqrt{x+8}=5,$

б) $\sqrt{2x^3+3x+5}+\sqrt{2x^3-3x+5}=3x$

в) $\sqrt{3x^2-7x+3}-\sqrt{x^2-2}=\sqrt{3x^2-5x-1}-\sqrt{x^2-3x+4}.$

Для решения примеров можно воспользоваться дополнительной литературой [70].

Группа В

а) $\sqrt{x+3}+\sqrt{x+8}=5,$умножьте на сопряжённое $\sqrt{x+3}-\sqrt{x+8},$

б) $\sqrt{3x^2-5x+7}+\sqrt{3x^2-7x+2}=3,$ умножьте на сопряжённое, выполните сложение полученного уравнения и исходного, повторно возведите в квадрат.

в) $\sqrt{3x^2-7x+3}-\sqrt{x^2-2}=\sqrt{3x^2-5x-1}-\sqrt{x^2-3x+4}$,

перенеся всё в одну сторону и сделав группировку слагаемых так, чтобы была сумма двух разностей, умножьте и разделите обе разности на сопряженное.

Группа С

а) $\sqrt{x+3}+\sqrt{x+8}=5$.

Указаия: умножьте на сопряжённое $\sqrt{x+3}-\sqrt{x+8}$, затем выполните сложение получившегося уравнения с исходным,

б) $\sqrt{3x^2-5x+7}+\sqrt{3x^2-7x+2}=3$.

в) Указание: умножьте на сопряжённое $\sqrt{3x^2-5x+7}-\sqrt{3x^2-7x+2}$, выполните сложение полученного уравнения и исходного, повторно возведите в квадрат.

г) $\sqrt{3x^2-7x+3}-\sqrt{x^2-2}=\sqrt{3x^2-5x-1}-\sqrt{x^2-3x+4}$

Указание: перенеся всё в одну сторону и сделав группировку слагаемых так, чтобы была сумма двух разностей, умножьте и разделите обе разности на сопряженное, упростите используя формулу разности квадратов, оцените значение полученного уравнения.

Тема 2. Графический метод.

Обычно графическим методом решаются уравнения тогда, когда не видно другого, более простого метода и графики функций довольно просто построить. Без использования компьютерных программ довольно сложно добиться высокой точности построения, но используя программу GeoGebra мы можем построить любую функцию и оценить количество корней, найти точки пересечения, наибольший и наименьший корень. Для наглядности способа, экономии времени и обучения учеников работой с компьютерными технологиями, что позволит повысить интерес к теме.

Пример 3. Решить уравнение

$$2\sqrt{x+4}-1=\sqrt[3]{2x}.$$

Решение: рассмотрим две функции $\boldsymbol{y} = 2\sqrt{\mathrm{x}+4} - 1$ и $\mathrm{y} = \sqrt[3]{2\mathrm{x}}$, точки пересечения этих графиков и будут являться решением данного уравнения.

Построим с помощью программы GeoGebra графики этих функций (рисунок 5).

Очевидно, графики функций не пересекаются (рисунок 5).

За пределами видимой области пересечений тоже нет (функция $\mathrm{y} = 2\sqrt{\mathrm{x}+4} - 1$ растет быстрее функции $\mathrm{y} = \sqrt[3]{2\mathrm{x}}$).

Следовательно, уравнение $2\sqrt{\mathrm{x}+4} - 1 = \sqrt[3]{2\mathrm{x}}$ не имеет решений.

Ответ: $\emptyset$.

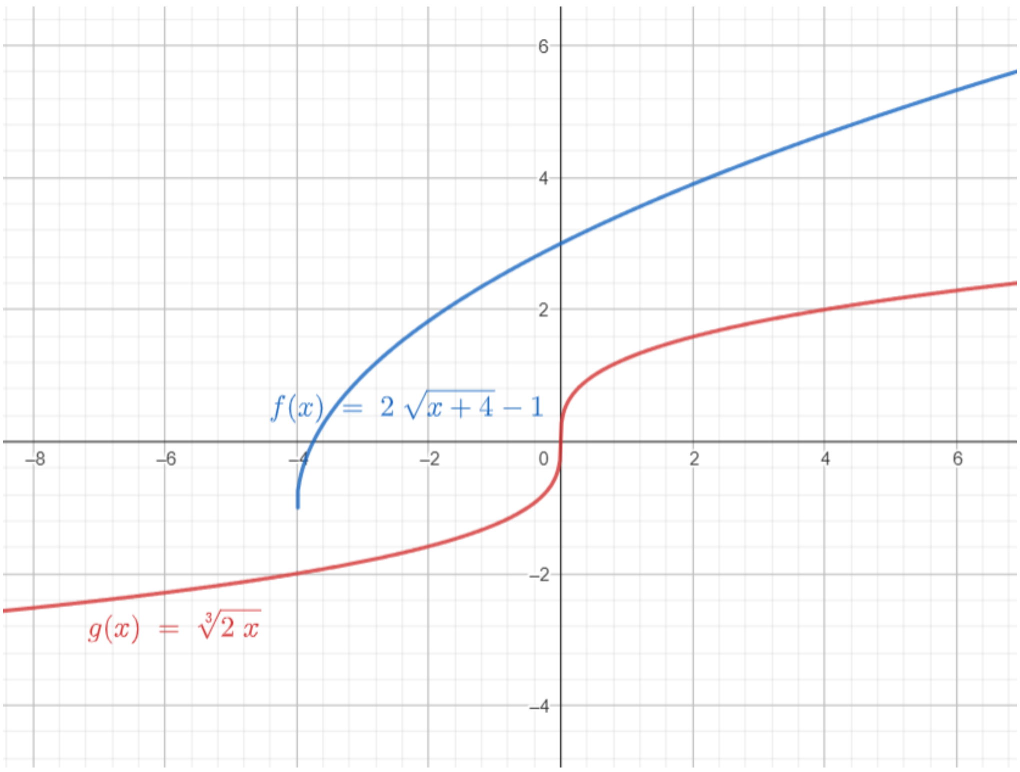

Рисунок 5 – Решение уравнения $2\sqrt{x+4} - 1 = \sqrt[3]{2x}$

Пример 4. Решить уравнение

$$\frac{1}{(x-1)^2} = \sqrt{2x+5} - 2.$$

Решение: функции $y = \frac{1}{(x-1)^2}$ и $y = \sqrt{2x+5} - 2$, довольно просто построить методом переноса.

Но мы воспользуемся программой (рисунок 6), но учитывая ОДЗ.

По чертежу видно, что графики имею одну точку пересечения, следовательно и уравнение имеет одно решение.

Нас интересует абсцисса $x = 2$.

Выполним проверку подставив в исходное уравнение. Подстановка даёт верное равенство, следовательно корень подходит.

Ответ: 2.

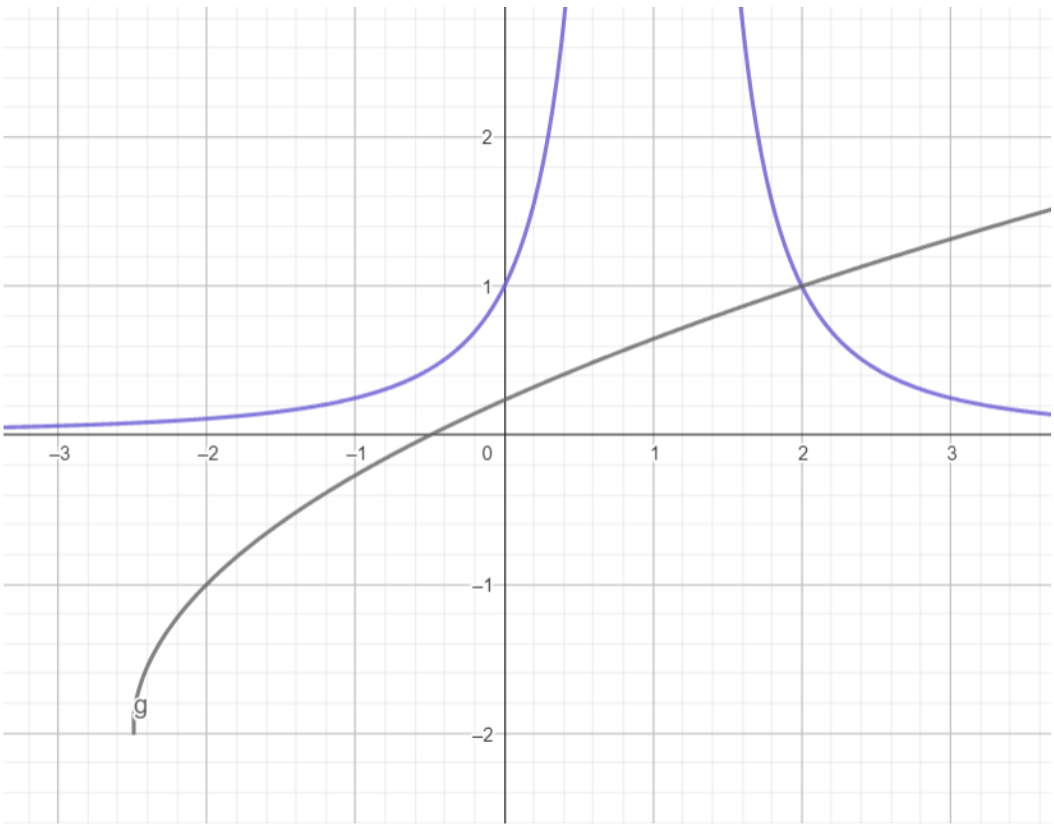

Рисунок 6 – Решение уравнения $\frac{1}{(x-1)^2} = \sqrt{2x+5} - 2$

Пример 5. Найдите наименьшее решение уравнения

$$\sqrt{x+4} = x^2 - 4x + 2.$$

Очевидно, что при возведении в квадрат получим уравнение 4ой степени. Заметим, что обе части уравнения являются хорошо известными нам функциями. Построим им (рисунок 7):

Уравнение имеет два корня, но по условию задания нам необходим только наименьший, очевидно, что это $x = 0$. Выполнив проверку, убедимся, что корень подходит.

Ответ: наименьшее значение 0.

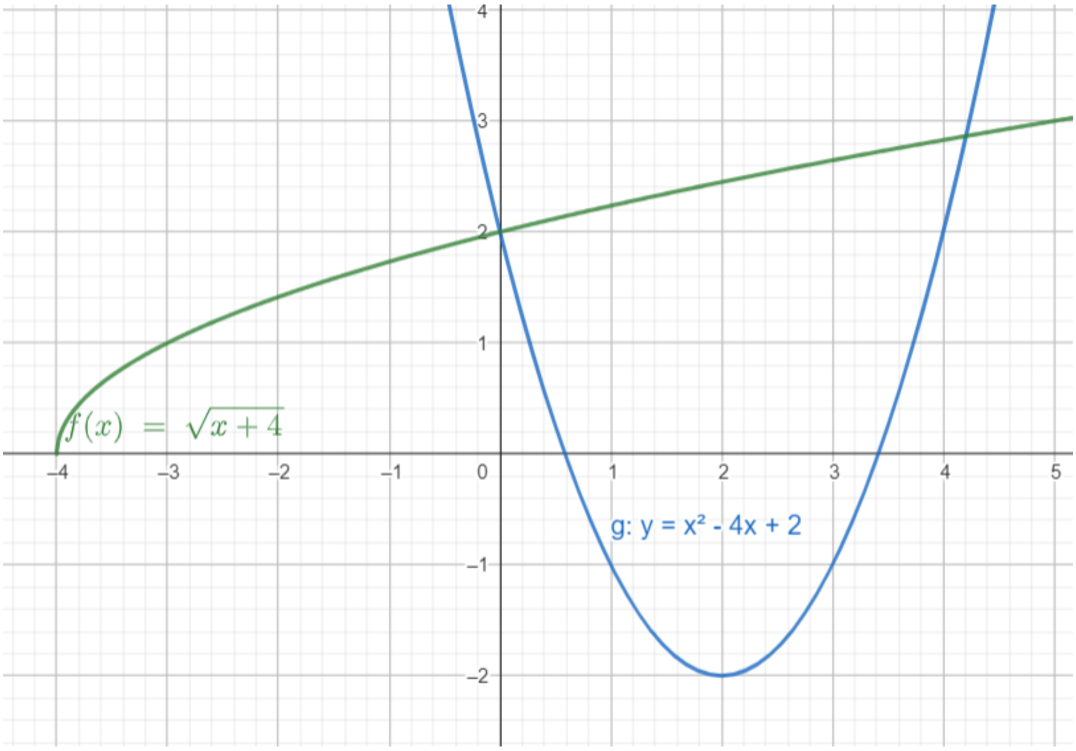

Рисунок 7 – Решение уравнения $\sqrt{x+4} = x^2 - 4x + 2$

Пример 6. Решить уравнение

$$\sqrt{2|x| - x^2} = a.$$

Построим график функции $\sqrt{2|x| - x^2} = a$.

Пусть $x \geq 0$, тогда $y = \sqrt{2x - x^2}$.

$$x^2 - 2x + 1 - 1 + y^2 = 0,$$

$(x-1)^2+y^2=1$ – окружность с центром (1;0) и радиусом 1.

Пусть x <0, тогда y=$\sqrt{-2x-x^2}$.

$$x^2+2x+1-1+y^2=0,$$

$(x+1)^2+y^2=1$ – окружность с центром (-1;0) и радиусом 1.

Применение данного метода позволяет выделить следующие преимущества: наглядность, легкость в вычислениях (рисунок 8).

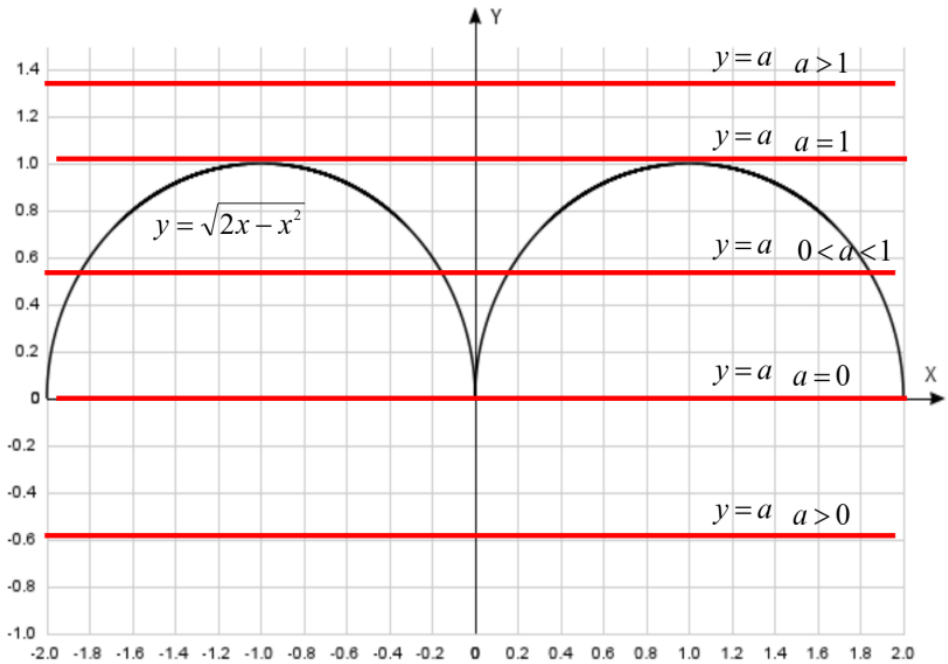

Рисунок 8 – Графическая интерпретация уравнения $\sqrt{2|x|-x^2}=a$

Рассмотрим функцию y=a.

Посмотрим случаи этой прямой:

– при a>1, уравнение не имеет решения;

– при a=1, уравнение имеет 2 решения;

– при a=0, уравнение имеет 3 решения;

– при 0< a<1, уравнение имеет 4 решения.

Задания для самостоятельной индивидуальной домашней работы

Группа А.

Придумать собственные пять примеров иррациональных уравнений, которые проще будет решать графическим методом. Построить их решение в программе GeoGebra, сделать презентацию своей работы.

Группа B.

Найти пять примеров решение которых проще графическим методом. Воспользуйтесь дополнительной литературой (журнал «Квант», «математика в школе»). Построить решение в программе GeoGebra.

Группа C.

Из предложенных примеров выбрать те, которые проще решить графическим методом, построить их решение в программе GeoGebra.

а) $(x^2 + x - 6)\sqrt{x+1} = 0$,

б) $x = \sqrt{8x+9}$,

в) $\sqrt{3x+2} = 2x - 4$,

г) $x + \sqrt{2x^2 - 14x + 13} = 5$,

д) $-x - \sqrt{-x} = 20$,

е) $x^2 + 2\sqrt{x^2 + 3x - 4} = 4 - 3x$.

Тема 3. Метод замены переменной

Пример 7. Решить уравнение

$$\sqrt[3]{x+6} + \sqrt{11-x} = 5.$$

Решение: пусть $\sqrt[3]{x+6} = u$, а $\sqrt{11-x} = v$.

Тогда $u^3 = x + 6$ и $v^2 = 11 - x$, причем $v \geq 0$, Имеем систему трёх уравнений:

$$\begin{cases} u^3 = x + 6 \\ v^2 = 11 - x \cdot \\ u + v = 5 \end{cases}$$

Сложив первое и второе уравнение системы, получим уравнение

$$u^3 + v^2 = 17,$$

решим систему

$$\begin{cases} u^3 + v^2 = 17 \\ u + v = 5 \end{cases},$$

методом подстановки получаем

$$u^3 + u^2 - 10u + 8 = 0,$$

решив это уравнение $u_1 = 1; u_2 = 2; u_3 = -4$, отсюда $v_1 = 4;\ v_2 = 3;\ v_3 = 9$. Каждое значение $\boldsymbol{v}$ удовлетворяет $v \geq 0$, подставив полученные значения в $u^3 = x + 6$, найдём корни $x_1 = -5; x_2 = 2; x_3 = -70$.

Ответ: –5; 2; –70.

Пример 8. «Решить уравнение

$$\sqrt[3]{x + 24} + \sqrt{x + 1} = 5\text{» [87].}$$

Решение.

При условии, что $x + 1 \geq 0,\ x \geq -1$ положим

$$u = \sqrt[3]{x + 24};\ v = \sqrt{x + 1},$$

из этого следует, что

$$x = u^3 - 24;\ x = v^2 - 1,$$

и в результате мы можем записать систему

$$\begin{cases} u + v = 5 \\ u^3 - 24 = v^2 - 1 \end{cases},$$

найдем $\boldsymbol{v}$ из первого уравнения и подставим во второе,

$$u^3 - 24 - (5 - u)^2 + 1 = 0,$$

$$u^3 - u^2 + 10u - 48 = 0,$$

применив метод группировки

$$u^2(u - 3) + 2u(u = 3) + 16(u - 3) = 0,$$

$$(u - 3)(u^2 + 2u + 16) = 0,$$

Решив это уравнение мы получаем $u = 3$.

Подставим и найдём $v = 2$, для нахождения корня уравнения достаточно подставить в любую из замен

$$2 = \sqrt{x + 1} \Rightarrow 4 = x + 1 \Rightarrow x = 3.$$

Ответ: 3.

Задания для самостоятельной работы

Группа А.

а) $2\sqrt{2x^2 - x + 8} = x - 2x^2 + 7$ Ответ: -0,5; 1.

б) $\sqrt{x + 2 + 2\sqrt{x+1}} + \sqrt{x + 1 - 2\sqrt{x+1}} = 2$ Ответ: $[-1; 0]$

в) $\sqrt[4]{1-x} + \sqrt[4]{1+x} = 4.$

Группа В.

а) $\frac{1}{2} - x^2 = \sqrt{\frac{1}{2} - x}$ Ответ: $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$

б) $\sqrt{2x^2 - 8x + 25} - \sqrt{x^2 - 4x + 13} = 2$ Ответ: 6; -2.

в) $\sqrt[4]{1-x} + \sqrt[4]{1+x} = 4$, используйте двойную замену.

Группа С.

а) $\frac{1}{2} - x^2 = \sqrt{\frac{1}{2} - x}$ Ответ: $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$

б) $-x - \sqrt{-x} = 20$ Ответ:-25.

в) $\sqrt[4]{1-x} + \sqrt[4]{1+x} = 4$, используйте двойную замену и решите систему $\begin{cases} t + z = 4 \\ t^4 + z^4 = 2 \end{cases}$. При необходимости воспользуйтесь дополнительной литературой [57].

Тема 4. Нестандартные методы.

Пример 9.

«Решите уравнение

$$\sqrt{x^2 - 5x\sqrt{2} + 25} + \sqrt{x^2 - 12x\sqrt{2} + 144} = 13$$ » [80].

Решение. Геометрическая интерпретация уравнения представлена на рисунке 9.

Из ΔABC по теореме Пифагора AB = 13. $D \in AB$, так как $\min f(x) = \min(AB + DB) = AB$, где

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 5x\sqrt{2} + 25} + \sqrt{x^2 - 12x\sqrt{2} + 144} = 13.$$

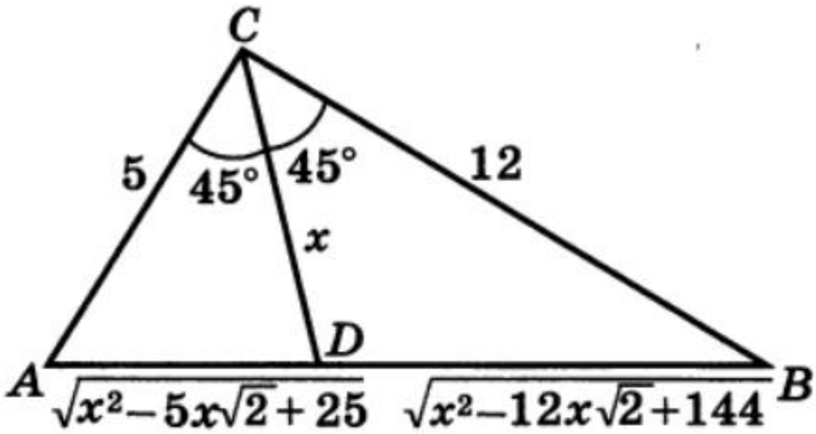

Рисунок 9 – Графическая интерпретация уравнения

Чтобы найти значение x, заметим, что если уравнение имеет корни, то они должны быть положительными (при $x \leq 0$ значение левой части уравнения не меньше 17.

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 12 = 30,$$

$$S_{\Delta}ACD = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot x \cdot \sin 45^0 = \frac{5x\sqrt{2}}{4},$$

$$s_{\Delta BCD} = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot x \cdot \sin 45^0 = 3x\sqrt{2},$$

значит,

$$30 = \frac{5x\sqrt{2}}{4} + 3x\sqrt{2} \text{ и } x = \frac{60\sqrt{2}}{17}.$$

Ответ: $\boldsymbol{\frac{60\sqrt{2}}{17}}$.

Пример 10. Решить уравнение

$$\sqrt[3]{25x(2x^2 + 9)} = 4x + \frac{3}{x},$$

Решение.

Замечаем, что $x \in R$ и $x \neq 0$.

Умножим обе части уравнения на $x \neq 0$.

Получаем

$$\sqrt[3]{25x^4(2x^2+9)} = 4x^2 + 3,$$

положим, $x^2 = t$, где $t \geq 0$.

Тогда уравнение пример вид

$$50t^3 + 225t^2 - (4t+3)^3 = 0.$$

Путём подбора находим, что $t = 3$, откуда $x = \pm\sqrt{3}$.

Докажем, что уравнение не может иметь других корней.

Рассмотрим функцию

$$f(t) = 50t^3 + 225t^2 - (4t+3)^3,$$

и найдём ее производную:

$$f'(t) = 150t^2 + 150t - 12(4t+3)^2 = 150t + 250t - 192t^2 - 288t - 108$$
$$= -2(21t^2 + 19t + 54),$$

$f'(t) < 0$, значит функция $f(t)$ является убывающей и уравнение $f(t) = 0$ не может иметь более одного корня.

Тема 5. Уравнения из ЕГЭ.

Пример 11. «Решите уравнение

$$\sqrt{x^4 + 8x^3 + 2x^2 - 1} = \sqrt{x^4 + 2x^2}$$

и найдите корни уравнения, принадлежащие отрезку $[\log_3 0,5; \log_3 2]$.

Решение: подкоренные выражения должны быть равны и неотрицательны:

$$\begin{cases} x^4 + 2x^2 \geq 0 \\ x^4 + 8x^3 + 2x^2 - 1 = x^4 + 2x^2 \end{cases}$$

$$8x^3 - 1 = 0 \Rightarrow x^3 = \frac{1}{8} \Rightarrow x = \frac{1}{2}.$$

Заметим, что $\frac{1}{2} = \log_3 3^{\frac{1}{2}} = \log_3 \sqrt{3}$. Неравенство $0,5 \leq \sqrt{3} \leq 2$ является верным, следовательно, корень $x = \frac{1}{2}$ принадлежит отрезку $[\log_3 0,5; \log_3 2]$» [55].

Ответ: $\frac{1}{2}$.

Пример 12. «Решите уравнение

$$\sqrt{x^3 - 4x^2 - 10x + 29} = 3 - x$$

и в ответе укажите все корни, принадлежащие промежутку $[-\sqrt{3}; \sqrt{30}]$.

Решение:

$$\begin{cases} 3 - x \geq 0 \\ x^3 - 4x^2 - 10x + 29 = (3 - x)^2 \end{cases},$$

$$\begin{cases} x \leq 3 \\ x^3 - 5x^2 - 4x + 20 = 0 \end{cases},$$

$$\begin{cases} x \leq 3 \\ (x - 5)(x^2 - 4) = 0 \end{cases},$$

$$\begin{cases} x \leq 3 \\ x = 5; x = -2; x = 2 \end{cases} \Rightarrow x = -2; x = 2.$$

Поскольку $-2 < -\sqrt{3} < 3 < \sqrt{30}$, отрезку $[-\sqrt{3}; \sqrt{30}]$ принадлежит только число 2 » [55].

Ответ: 2.

Задания для самостоятельной работы:

Каждой группе решить уравнения и представить презентацию решения на следующий урок для подробного разбора всем классом.

Группа А.

Решить уравнение двумя способами

$$\sqrt{x + y\sqrt{x - 4}} + \sqrt{x - 4\sqrt{x - 4}} = 4$$

и найти все корни, принадлежащие промежутку $[2\sqrt{3} + 1; 10]$.

Группа В.

Решить уравнение

$$\sqrt{x^3 + 4x^2 + 9} - 3 = x$$

и найти все корни, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{9}{2}; \frac{7}{5}\right]$.

Группа С.

Решить уравнение

$$\sqrt{x+4} = x^2 - 4$$

и найти все корни, принадлежащие промежутку $[-2;\ 3]$.

2.4 Педагогический эксперимент

Целью педагогического эксперимента является определение эффективности разработанных элективных курсов как средства реализации преемственности предпрофильного и профильного обучения.

Опытно-экспериментальную базу исследования составила НИЛ «Школа математического развития и образования - 5+» Тольяттинского государственного университета.

В рамках констатирующего этапа эксперимента осуществлена оценка уровня знаний учащихся в области решения иррациональных уравнений, а также знание различных методов решения таких уравнений. Осуществлен анализ уровня понимания и применения различных методов для решения уравнений и способность учащихся применять их к представленным заданиям.

С целью проверки знаний учащихся и организации контроля усвоения материала предложен следующий вариант самостоятельной работы.

Для оценки правильности выполненных заданий самостоятельной работы выбраны критерии для оценивания заданий ЕГЭ представленные в таблице 4.

Самостоятельная работа для оценки уровня знаний по теме «Иррациональные уравнения».

Решите уравнения:

а) $\sqrt{x+4} = 2,$

б) $\sqrt{x-1} = x,$

в) $\sqrt{2x+3} = x+1$,

г) $\sqrt{x+2} + \sqrt{x-1} = 3$,

д) $\sqrt{2x-1} = \sqrt{x^2+4x-16}$,

е) $\sqrt[9]{x^2-8x+6} = \sqrt[9]{3x^2-4x}$,

ж) $\sqrt{5+8x-4x^2} = 4x-1$,

з) $x^2 + \sqrt{x^2+11} = 31$,

и) $\sqrt{x+2+2\sqrt{x+1}} + \sqrt{x+1-2\sqrt{x+1}} = 2$,

к) $\sqrt{2x^2+5x+2} - \sqrt{x^2+x-2} = \sqrt{3x+6}$.

Таблица 4 - Критерии оценивания заданий

Количество баллов	Критерий оценки
2	приведено полностью обоснованное решение, получены верные ответы;
1	получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения;
0	решение неверно или отсутствует.

На занятиях в математической школе при ТГУ с учащимися 10-х и 11-х классов были решены задачи из ОГЭ, ЕГЭ, журнала «Квант» и «Математика в школе».

Задача ОГЭ.

Пример 1: «Решите уравнение $x^2 - 2x + \sqrt{3-x} = \sqrt{3-x} + 8$» [55].

Решение:

$$\begin{cases} 3-x \geq 0 \\ x^2-2x-8=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ x=-2; x=4 \end{cases} \Rightarrow x=-2.$$

Ответ: - 2.

В статье А.И. Рубинштейна «Об одном случае появления посторонних решений уравнения» рассматривают пример уравнения с кубическими корнями «как известно, в поле действительных чисел возведение в куб приводит к равносильному уравнению» [50]. Однако в рассматриваемом примере равносильность теряется.

Пример 2. «Решить уравнение

$$3\sqrt{9-x}+\sqrt[3]{7+x}=-2\text{» [50].}$$

Решение:

$$\left(\sqrt[3]{y-x}\right)^3+\left(\sqrt[3]{7+x}\right)^3+3\sqrt[3]{9-x}\cdot\sqrt[3]{7+x}\cdot\left(\sqrt[3]{9-x}+\sqrt[3]{7+x}\right)=(-2)^3,$$

$$9-x+7+x+3\sqrt[3]{63+2x-x^2}\cdot(-2)=-8,$$

$$24=6\sqrt[3]{63+2x-x^2},$$

$$4^3=\left(\sqrt[3]{63+2x-x^2}\right)^3,$$

$$x^2-2x+1=0,$$

$$x=1.$$

Очевидно, что $x=1$ не является корнем уравнения, поскольку $\sqrt[3]{9-1}+$ $+\sqrt[3]{7+1}=4\neq-2$.

Пример 3. «Решить уравнение

$$2x^2+3x+\sqrt{2x^2+3x+9}=33\text{» [59].}$$

Решение.

Пусть $y=\sqrt{2x^2+3x+9}$, $y\geq 0$, тогда получаем $y^2+y-42=0$,

$$y=6; y=-7\ \notin[0;\infty).$$

После обратной замены получаем $x=3; x=-4{,}5$.

Ответ: $3; -4{,}5$.

Поисковый этап эксперимента был направлен на проектирование элективных курсов в рамках предпрофильной и профильной подготовки на основе применения технологии уровневой дифференциации Р.А. Утеевой [63] и их апробации в математической школе.

После решения ключевой задачи и рассмотрения решений уравнений разными методами, обучающимся предлагаются иррациональные уравнения, составленные с учетом типологических групп А, В, С. Задания в типологических группа используются одинаковые, но изменяется уровень помощи. Так ученики группы А способны исследовательски подходить к задачам, искать пути решения самостоятельно, группы В нуждаются в небольшой помощи на старте, своеобразном толчке, группы С нуждаются в более серьезной помощи, иногда на стадии выполнения всего примера. Выбор одинаковых примеров обусловлен тем, что требования при сдаче ОГЭ, ЕГЭ выдвигаются одинаковыми в независимости от уровня подготовки учеников.

Итак, для проектирования элективных курсов по теме «Иррациональные уравнения» в рамках рассматриваемой технологии уровневой дифференциации следует:

– выделить основные методы решения иррациональных уравнений;

– привести примеры основных методов решения иррациональных уравнений;

– подобрать соответствующие уравнения на различных уровнях сложности;

– определить степень помощи ученику в решении каждого вида уравнений.

Результаты поискового этапа эксперимента свидетельствуют о том, что предложенное разделение на группы и соответствующая им дифференциация, вызвала интерес у обучающихся, позволила проявить себя на всех уровнях знаний, почувствовать себя увереннее более слабым ученикам и боле самостоятельными сильным ученикам. Кроме того, результаты показали, что за счет того, что содержательный компонент элективного курса обеспечивает преемственность между предпрофильным и профильным обучением, школьникам стало проще ориентироваться в своих силах, осознавать дальнейший путь своего развития. Эксперимент также показал, что решение нестандартных иррациональных уравнений различными методами в рамках программы элективного курса позволяет обучающимся почувствовать себя увереннее перед ОГЭ и ЕГЭ, формирует у них навыки самостоятельной исследовательской работы, волю, настойчивость, трудолюбие, навыки тождественных преобразований и вычислительную культуру, развивает социальные навыки при работе в группах, лидерские качества, желание проявить себя.

Выводы по второй главе

Во второй главе рассмотрена линия уравнений в школьном курсе алгебры как основа преемственности. Отметим, что иррациональным уравнениям уделяется недостаточное количество времени. Данный тип уравнений присутствует на ЕГЭ и нередко вызывает трудности со стороны школьников. Тем самым для элективного курса нами была выбрана тема «Иррациональные уравнения». Проанализировав учебники с 8 по 11 класс [12, 34, 13, 36, 29, 38], изучив школьную программу и требования ФГОС нами были спроектированы элективные курсы для предпрофильной и профильной подготовки, в рамках сохранения преемственности между этими ступенями обучения. При их создании использовалась за основу технология уровневой дифференциации Р.А. Утеевой [63]. Приведено описание констатирующего и поискового этапов педагогического эксперимента.

Заключение

В ходе проведенного исследования были получены следующие результаты:

- раскрыто понятие преемственности в обучении математике и история его развития;
- рассмотрена преемственность между предпрофильным и профильным обучением, основные цели и задачи каждого вида обучения и способы их реализации. одним из основных способов реализации указанной преемственности являются элективные курсы;
- вариативный компонент предпрофильного и профильного обучения предоставляет широкие возможности для начального профессионального обучения;
- выделены основные цели и задачи элективных курсов в рамках предпрофильной подготовки и профильного обучения математике, проанализирован опыт исследователей по данной теме. Изученный материал дал основу для разработки собственных элективных курсов;
- обоснована роль элективных курсов по математике в реализации преемственности предпрофильной подготовки и профильного обучения в общеобразовательной школе.

Предпрофильный элективный курс помогает девятикласснику сделать осознанный выбор направления в профильной школе. В то же время он формирует готовность изучения предмета на профильном уровне.

На этапе профильной школы происходит дифференциация обучения в зависимости от выбранного профиля и профильный элективный курс имеет так же профориентационные и пропедевтические цели.

- разработаны элективные курсы по теме «Иррациональные уравнения» для предпрофильной подготовки и для углубленного профиля в старших классах;

- проведен констатирующий и поисковый этапы педагогического эксперимента и представлены его результаты. Эксперимент проводился на базе НИЛ «Школа математического развитяи и образования -5+» ТГУ.

Результатом эксперимента стало подтверждение гипотезы о том, что если за основу научно-методического проектирования содержания элективных курсов по математике выбрать основные содержательно-методические линии школьного курса математики, то это позволить обеспечить реализацию преемственности предпрофильной подготовки выпускников основной школы и осознанный выбор профиля дальнейшего обучения в старшей школе.

Все поставленные задачи решены, цель данной работы достигнута.

Исследование может быть продолжено в направлении проверки дальнейшей эффективности других содержательно-методических линий школьного курса математики для реализации предпрофильной подготовки и профильного обучения в основной и старшей школе. Например, функциональной линии или стохастической линии, которые входят как в базовый курс математики, так и в профильный. Задания по этим линиям также включены в содержание итоговой аттестации по математике (ОГЭ и ЕГЭ).

Список используемой литературы и используемых источников

1. Абакумова Н. Н., Малкова И. Ю. Компетентностный подход в образовании: организация и диагностика. Т. : Томский государственный университет, 2007. 368 с. https://pedlib.ru/Books/6/0438/6_0438-1.shtml
2. Авхатова Л. Р. Методическая разработка открытого урока «решение иррациональных уранений» [Электронный ресурс] // «Мультиурок». 2018. URL: https://multiurok.ru/files/mietodichieskaia-razrabotka-otkrytogho-uroka-poma.html(дата обращения: 29.05.2024)
3. Алфимова А. С. Элективный курс «элементы дискретной математики» как средство внутрипрофильной специализации обучения в старших классах естественно-математического профиля [Электронный ресурс] // Известия. ВГПУ. 2009. №6. URL: https://cyberleninka.ru/article/n/elektivnyy-kurs-elementy-diskretnoy-matematiki-kak-sredstvo-vnutriprofilnoy-spetsializatsii-obucheniya-v-starshih-klassah-estestvenno (дата обращения: 12.05.2024).
4. Аммосова Н. В., Краснова Г. Г. Реализация преемственности в обучении математике в основной и старшей школе (на примере изучения уравнений) // Сибирский педагогический журнал. 2012. №3. URL: https://cyberleninka.ru/article/n/realizatsiya-preemstvennosti-v-obuchenii-matematike-v-osnovnoy-i-starshey-shkole-na-primere-izucheniya-uravneniy (дата обращения: 06.05.2024).
5. Антонова И. В. Реализация принципа преемственности обучения математике в средней и высшей школах: автореф. дис. канд. пед. наук: 13.00.02. М. : МПГУ, 2005. С. 20. https://www.dissercat.com/content/realizatsiya-printsipa-preemstvennosti-obucheniya-matematike-v-srednei-i-vysshei-shkolakh
6. Арзяева Н. А., Горячева К. Г. Предпрофильная подготовка обучающихся 8-9 классов по математике / Красноярск: КГПУ им. В. П. Астафьева, 2016. С. 12–18.

7. Артемова Л. К. «Профильное обучение»: опыт, проблемы, пути решения // Школьные технологии. 2003. №4. С. 22–31. https://narodnoe.org/downloads/states/23916

8. Берговина И. А. Методическая разработка открытого урока «Иррациональные уравнения» [Электронный ресурс] // «Копилка уроков». 2018. URL: https://kopilkaurokov.ru/matematika/prochee/otkrytyi-urok-po-tiemieirratsional-nyie-uravnieniia(дата обращения: 29.05.2024)

9. Бородина А. И. Элективные курсы в профильном обучении. // Профильное обучение в современной российской школе: сб. науч. тр. / М.: РУДН, 2015. 176 с.

10. Булгакова С. Н. Профильное обучение на старшей ступени общего образования в контексте российского и международного опыта // Мир науки, культуры, образования. 2007. №4(7). 76 с.

11. Бурмистров Т. А. Алгебра. Сборник рабочих программ. 7 – 9 классы: пособие для учителей общеобразоват. учреждений / М.: Просвещение, 2011. 96 с.

12. Буцко Е. В., Мерзляк А. Г., Полонский В. Б., Якир М. С. Математика: алгебра и начала математического анализа. // Углублённый уровень. 10 класс: методическое пособие / М. :Вентана-Граф, 2020. 92 с.

13. Виленкин Н. Я., Виленкин А. Н., СурвиллоГ. С. Алгебра. 8 класс :учеб. для общеобразоват. учреждений и шк. с углубл. изучением математики / М. : Просвещение, 2010. 303 с.

14. Воронина Г. А. Элективные курсы: алгоритмы создания, примеры программ: практическое руководство для учителя. М.: Айрис-пресс, 2008. 128 с.

15. Горобец Д. В. Анализ преемственности профессионального образования в мировом образовательном пространстве // Проблемы современного педагогического образования. 2018. №60-2. URL: https://cyberleninka.ru/article/n/analiz-preemstvennosti-professionalnogo-

obrazovaniya-v-mirovom-obrazovatelnom-prostranstve (дата обращения: 10.05.2024).

16. Джуринский А. Н. История педагогики : учеб. пособие. М.: Гуманитар. изд. цетр ВЛАДОС. 1999. 431 с

17. Донцова М. А. Использование принципа вложенности при составлении программ элективных курсов по математическому анализу в профильных классах старшей школы [Электронный ресурс] // Глобус: психология и педагогика. 2019. №3 (31). URL: https://cyberleninka.ru/article/n/ispolzovanie-printsipa-vlozhennosti-pri-sostavlennii-programm-elektivnyh-kursov-po-matematicheskomu-analizu-v-profilnyh-klassah (дата обращения: 12.05.2024).

18. Егорова А. М. Профильное обучение и элективные курсы в средней школе // Теория и практика образования в современном мире: материалы I Междунар. науч. конф. (г. Санкт-Петербург, февраль 2012 г.). Т. 1. Санкт-Петербург: Реноме, 2012. С. 173–179. URL:https://moluch.ru/conf/ped/archive/21/1617/(дата обращения: 25.04.2024).

19. Евелина Л. Н., Щербакова А. В. Преемственность как важный дидактический принцип в обучении математике. // Revistă Ştiinţifică Progresivă. 2021. № 1(7). С. 8-11.

20. Ермаков Д. С., Петрова Т. Д. Элективные учебные курсы для профильного обучения // Народное образование. 2004. №2. С.114-119.

21. Каспржак А. Г. Проблема выбора: элективные курсы в школе. М.: Новая школа, 2004. 160 с.

22. Каспржак А. Г. Элективные курсы в профильном обучении // НФПК, 2004 с. 9

23. Кожевникова О. В. Преемственность в образовании: представления участников образовательной системы о выпускнике школы // Педагогическое образование в России. 2013.№ 1. С. 86–93.

24. Комарова Е. А. Преемственность в обучении математике: Методическое пособие. Вологда : Издательский центр ВИРО, 2007. 108 с.

25. Коновалова Е. И. Элективный курс как фактор реализации индивидуальной образовательной траектории школьников / Вестник Бурятского государственного университета, выпуск №15. 2013. С. 130–133.

26. Коннова Л. П. Преемственность между предпрофильной и профильной школой в элективном обучении математическому моделированию с помощью графов / автореф. дис. канд. пед. наук : 13.00.02. Самара : МГПУ, 2009. 20 с.

27. Кузнецов А. А. Профильное обучение: проблемы, перспективы развития // Народное образование. 2003. №4. С. 85-88.

28. Кондратенко Л. Н. Методические особенности проектирования ориентационных элективных курсов по математике на старшей ступени общего образования [Электронный ресурс] / Наука и школа : общероссийский научно-педагогический журнал. М. : МПГУ, 2012. № 4. 200 с. URL: https://znanium.com/catalog/product/972629 (дата обращения: 20.05.2024).

29. Макарычев Ю. Н. Алгебра 9 класс : учеб. пособие для обещеобразоват. организаций: углуб. уровень / Ю. Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк, К. И. Нешков и др. М. : Просвещение, 2018. 400 с.

30. Марасанов А. Н. О методике обучения школьников решению иррациональных уравнений [Электронный ресурс] // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. 2010. №3. С. 127–134. URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=15281989(дата обращения: 29.05.2024).

31. Методика и технология обучения математике : курс лекций : пособие для пед. вузов / под науч. ред. Н. Л. Стефановой Н. С., Подходовой. М. : Дрофа, 2008. 416 с.

32. Мендыгалиева А. К. Методические основы преемственности в обучении математике // Известия Самарского научного центра РАН. 2009. №4-3. URL: https://cyberleninka.ru/article/n/metodicheskie-osnovy-preemstvennosti-v-obuchenii-matematike (дата обращения: 24.05.2024).

33. Мендыгалиева А. К. Обеспечение преемственности в обучении математике как условие повышения его качества // Вестник БГУ. 2012. №1 (2). URL: https://cyberleninka.ru/article/n/obespechenie-preemstvennosti-v-obuchenii-matematike-kak-uslovie-povysheniya-ego-kachestva (дата обращения: 14.06.2024).

34. Мерзляк А. Г., Поляков В. М., Алгебра. 8 класс : учеб. для общеобразоват. учрежд. 2-е изд., стереотип. М.: Вентана-Граф, 2019. 384 с.

35. Мерзляк А. Г., Поляков В. М. Алгебра. 10 класс : учеб. для общеобразоват. учрежд. 2-е изд., стереотип. М.: Вентана-Граф, 2019. 477 с.

36. Мордкович А. Г., Николаев Н. П. Алгебра. 8 класс : учеб. для общеобразоват. организаций (углубленный уровень). В 2 ч. Ч. 1. 15-е изд., стереотип. М. : Мнемозина, 2019. 288 с.

37. Мишин В. И. Методика преподавания математики в средней школе: Частная методика : учеб. пособие для студентов пед. ин-тов по физ. – мат. спец./ А. Я. Блох, В. А. Гусев, Г. В. Дорофеев и др.; Сост. В. И. Мишин. М.: Просвещение, 1987. 416 с.

38. Никольский С. М. Алгебра 9 класс : учеб. для общеобразоват. организаций / С. М. Никольский, М. К. Потапов, Н. Н. Решетников и др. М. : Просвещение, 2014. 335с.

39. Нестерова Л. Ю. Преемственность в обучении математике в средней школе и педвузе // дис…канд. пед. наук : 13.00.02. Арзамас, 1997. 171с.

40. Нешков К.И. Некоторые вопросы преемственности в обучении математике // Преемственность в обучении математике: пособие для учителей / Сборник статей. Сост. А. М. Пышкало. М.: Просвещение, 1978. С. 13–18.

41. Новак Н. М. Элективные курсы как компонент профильного обучения в старшей школе : учебно-методическое пособие / Н. М. Новак. – Оренбург : ОГПУ, 2014. 40 с. текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. URL: https://e.lanbook.com/book/74529 (дата обращения: 16.04.2024).

42. Письмо Минобразования РФ от 13.11.2003 N 14-51-277/13 «Об элективных курсах в профильном обучении» // [Электронный ресурс] URL: https://www.consultant.ru/cons/cgi/online.cgi?req=doc&base=EXP&n=450589&ysclid=lxf2t5xnah660584168#wAoZhFU4QKFf3feO (дата обращения: 03.04.2024).

43. Подходова Н. С. Методика обучения математике : учебное пособие / Н. С. Подходова, Н. Л. Стефанова, В. И. Снегурова. Санкт-Петербург : РГПУ им. А. И. Герцена, 2020. 264 с. ISBN 978-5-8064-2816-6. Текс : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. URL: https://e.lanbook.com/book/252377 (дата обращения: 03.06.2024).

44. Поленок В. Ф. А как проще? // Математика в школе. 2000. №6. С. 8–9.

45. Примерная рабочая программа основного общего образования. Математика. Углублённый уровень (для 10-11 классов). Министерство просвещения Российской Федерации. 2022. 74 с. https://fgosreestr.ru/oop/primernaia-rabochaia-programma-srednego-obshchego-obrazovaniia-uchebnogo-predmeta-matematika-uglublennyi-uroven-dlia-10-11-klassov-obrazovatelnykh-organizatsii

46. Примерная рабочая программа основного общего образования. Математика. Углублённый уровень (для 7-9 классов). Министерство просвещения Российской Федерации. 2022. 89 с.

47. Приказ Министерства Образования РФ от 18.07.2002 №2783 «Об утверждении Концепции профильного обучения на старшей ступени общего образования» // [Электронный ресурс] URL: https://docs.cntd.ru/document/901837067?marker=65A0IQ (дата обращения: 10.05.2024).

48. Пудовкина Ю. Н., Родионов М. А. Особенности организации предпрофильной подготовки школьников на основе рационального сочетания базовых и элективных математических курсов [Электронный ресурс] / Вестник северного (арктического) федерального университета. Серия:

гуманитарные и социальные науки. 2011. №1. URL: https://cyberleninka.ru/article/n/osobennosti-organizatsii-predprofilnoy-podgotovki-shkolnikov-na-osnove-ratsionalnogo-sochetaniya-bazovyh-i-elektivnyh (дата обращения: 12.05.2024).

49. Решетникова Н. В. Преемственность реализации прикладной направленности обучения математике в основной и старшей школе // автореф. дис. .канд. пед. наук : 13.00.02. Омск, 2009. 23 с. https://www.dissercat.com/content/preemstvennost-realizatsii-prikladnoi-napravlennosti-obucheniya-matematike-v-osnovnoi-i-star

50. Рубинштейн А. И. Об одном случае появления посторонних решений уравнения // Математика в школе. 2001. №4. С. 62-63.

51. Рудской А. И. Инженерное образование: мировой опыт подготовки интеллектуальной элиты / А. И. Рудской, А. И. Боровков, П. И. Романов, К. Н. Киселева. СПб. : Изд-во Политехн. ун-та, 2017. 216 с. https://ksid.spbstu.ru/userfiles/files/pdf/news/2017_0523/2017_0523-Kniga-Inzhenernoe-obrazovanie.pdf

52. Саранцев Г. И. Общая методика преподавания математики : учебное пособие для студентов математич. спец. пед. вузов и университетов. Саранск: Тип. «Красный Октябрь», 1999. 208 с.

53. Саранцев Г. И. Методика обучения математике в средней школе: Учеб. пособие для студ. мат. спец. пед. вузов и ун-тов. М. : Просвещение. 2002. 224 с. URL https: //www.mathedu.ru/text/sarantsev_metodika_obucheniya_matematike_v_sredney_shkole_2002/p0/

54. Сафарян А. А. Линия уравнений в школьном курсе алгебры основной школы // Вестник Таганрогского института имени А. П. Чехова. 2016. №1. URL: https://cyberleninka.ru/article/n/liniya-uravneniy-v-shkolnom-kurse-algebry-osnovnoy-shkoly (дата обращения: 21.06.2024).

55. Сдам ГИА : Решу ЕГЭ Образовательный портал для подготовки к экзаменам // [Электронный ресурс] URL: https://ege.sdamgia.ru/ (дата обращения: 29.05.2024)

56. Селезнева К. О. Иррациональные уравнения, неравенства и их системы // Энергия науки : Электронный сборник материалов VII Международной студенческой научно-практической Интернет-конференции, Ханты-Мансийск, 24–28 мая 2017 года. Ханты-Мансийск: Югорский гос. университет, 2017. С. 794–798. URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=30090020(дата обращения: 29.05.2024)

57. Смоляков А. Н. Иррациональные уравнения: нетрадиционные способы решения иррациональных уравнений // Математика в школе. 2002. №7. С. 35–36.

58. Стефанова Н. Л. Методика обучения математике в профильной школе : учебное пособие / Н. Л. Стефанова, Н. С. Подходова, М. В. Солдаева. Санкт-Петербург : РГПУ им. А. И. Герцена, 2012. 235 с. ISBN 978-5-8064-1678-1. Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. URL: https://e.lanbook.com/book/5872 (дата обращения: 03.06.2024).

59. Тагаева Е. А. Обучение старшеклассников решению задач по алгебре и началам математического анализа в условиях преемственности между школой и вузом: дис. канд. пед. наук: 5.8.2. Саранск: Мордовский. гос. пед. университет, 2023. 214 с.
https://www.mordgpi.ru/upload/iblock/34c/Dissertatsiya-_1_.pdf

60. Тагаева Е. А. Проблема преемственности в обучении: исторический аспект // Гуманитарные науки и образование. 2010. № 3. С. 119–121.

61. Теремов А. В. Элективные курсы в профильном обучении школьников : учебное пособие. М. : МПГУ, 2017. 120 с. текст : электронный. URL: https://znanium.com/catalog/product/1341073 (дата обращения: 23.04.2024).

62. Томилова А. Е. О типичных ошибках участников профильного ЕГЭ по математике // Актуальные проблемы обучения математике и информатике

в школе и вузе : Материалы V международной заочной научной конференции, Москва, 18–22 декабря 2019 года / под ред. Л.И. Боженковой, М.В. Егуповой. М. :МПГУ, 2020. С. 188–192.

63. Утеева Р. А. Дифференцированные формы учебной деятельности учащихся // Математика в школе. 1995. №5. С.32–35.

64. Утеева Р. А. Групповая работа как одна из форм деятельности учащихся на уроке // Математика в школе. 1985. №2. С.21–23.

65. Утеева Р. А. Практико-ориентированная подготовка магистров математического образования к проектированию содержания элективных курсов // Проблемы и перспективы физико-математического и технического образования. Сборник материалов Всероссийской научно-практической конференции с международным участием / Ответ. ред. Т.С. Мамонтова. Ишим: филиал Тюменского государственного университета, 2014. С. 75–81.

66. Ференчук, Л. В. Проблемы преемственности в обучении математики между школой и вузом // Территория науки. 2013. № 5.

67. Федеральный закон от 29 декабря 2012 г. N 273-ФЗ «Об образовании в Российской Федерации» [Электронный ресурс] : URL: https://obrnadzor.gov.ru/wp-content/uploads/2020/11/federalnyj-zakon-ot-29-dekabrya-2012-g-n-273-fz-ob-obrazovanii-v-rossijskoj-fede.pdf (дата обращения 27.04.2024). https://legalacts.ru/doc/273_FZ-ob-obrazovanii/

68. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования. Приказ Минобрнауки России от 17.12.2010 № 1897 (ред. от 11.12.2020). URL: https://fgos.ru/fgos/fgos-ooo/ (дата обращения 27.05.2024).

69. Федеральный государственный образовательный стандарт среднего общего образования [Электронный ресурс] Приказ Минобрнауки России от 17.05.2012 № 413 (ред. от 11.12.2020). URL: https://fgos.ru/fgos/fgos-soo/ (дата обращения 27.05.2024).

70. Фирер А. В., Яковлева Е.Н., Елисова А.П., Захарова Т.В. Элементарная математика. Иррациональные уравнения и неравенства:

учебное пособие /Красноярск: Сибирский федеральный ун-т, 2021. 114 с. https://lpi.sfu-ras.ru/files/elementarnaya_matematika._irracionalnye_uravneniya_i_ neravenstva_ 2021.pdf

71. Чугунова А., А. Рванова А. С. Развитие аналитико-синтетической деятельности при обучении решению иррациональных уравнений // Вектор науки тольяттинского государственного университета. Серия: педагогика, психология. 2013. №12. С. 280–283. URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=18934479

72. Чистякова С. Н., Лернер П. С., Родичев Н. Ф., Кузина О. В., Крапивянская С. О. Профильное обучение и новые условия подготовки // Школьные технологии. 2002. № 1. С. 101–108.

73. Шерстобитова Е.Е. Элективные курсы по математике как форма реализации профильного обучения. // Молодежь. Наука. Общество – 2022. Тольятти. 2022. с. 331–336.

74. Шерстобитова Е.Е. Элективный курс «Иррациональные уравнения» для предпрофильной подготовки учащихся основной школы // Вестник магистратуры. 2024 г. (в печати).

75. Шмакова А. Д. Профильное обучение как предмет исследования педагогической психологии: исторический аспект // Мир науки, культуры, образования. 2011. № 6 (31). С. 158–160. https://lib.nspu.ru/views/sbo/1089/read.php

76. Щербатых С. В., Лыкова К. Г. Технология проектирования элективных курсов по математике при подготовке к ЕГЭ в целях развития вероятностного стиля мышления обучающихся // Профильная школа 2019. № 5 (98). текст : электронный. URL: https://znanium.com/catalog/product/1002273 https://znanium.ru/read?id=352576&pagenum=40

77. Щербо И. Н. Реализация профильного обучения в школе //Директор школы, 2005. №4. С.47–56.

78. Шугаипова З. М. Преемственность в обучении элементам алгебры в 1-6 классах :Дис. канд. пед. наук : 13.00.02 : Махачкала, 2000. 144 с.

https://www.dissercat.com/content/preemstvennost-v-obuchenii-elementam-algebry-v-1-6-klassakh

79. Яковлев И. В. Иррациональные уравнения и системы: материалы по математике [Электронный ресурс] // «MathUs». – 2018. URL: http://mathus.ru/math/irrurs.pdf(дата обращения 27.05.2024).

80. Akhadovna A. G., Yuldashevna M. O. Extreme issues related to irrational functions and geometric methods for solving equations. [Электронныйресурс] // International Journal on Orange Technologies, № 3(5), с. 93–96. URL: https://journals.researchparks.org/ /index.php/IJOT/article/view/1819 (дата обращения 26.05.2024).

81. An S., Kulm G., Wu Z. The pedagogical content knowledge of middle school, mathematics teachers in China and the U.S. [Электронныйресурс] / Journal of Mathematics Teacher Education, 2004. №7(2). С. 145–172. URL: https://doi.org/10.1023/B:JMTE.0000021943.35739.1c (дата обращения 16.05.2024).

82. Bright A., Welcome N. B., Arthur Y. D. The effect of using technology in teaching and learning mathematics on student's mathematics performance: The mediation effect of students' mathematics interest. [Электронныйресурс] / Journal of Mathematics and Science Teacher, 4(2), URL: https://doi.org/10.29333/mathsciteacher/14309

83. Kodirov K. R., Kukieva S.S., Mirzakarimova N.M. Some ways to solve irrational equations. [Электронныйресурс] / European multidisciplinary journal of modern science, 2022, с. 261–264. URL: https://emjms.academicjournal.io/index.php/emjms/article/view/626 (датаобращения 12.05.2024).

84. Elective courses in mathematics for secondary schools. [Электронныйресурс] / The mathematics teacher, vol. 14, № 4, 1921, с. 161–70. URL:http://www.jstor.org/stable/27950325. (дата обращения 27.05.2023).