МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Тольяттинский государственный университет»

Институт общеинженерной подготовки
(наименование института полностью)

Кафедра «Высшая математика и математическое образование»
(наименование)

44.04.01 Педагогическое образование
(код и наименование направления подготовки)

Математическое образование
(направленность (профиль))

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
(МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ)

на тему «Методика подготовки старшеклассников к решению олимпиадных задач по математике»

Обучающийся В.Б. Джеджея
(Инициалы Фамилия) (личная подпись)

Научный руководитель д-р пед. наук, профессор, Р.А. Утеева
(ученая степень (при наличии), ученое звание (при наличии), Инициалы Фамилия)

Тольятти 2024

Оглавление

Введение

Актуальность и научная значимость настоящего исследования. В школе математика является одним из базовых предметов общеобразовательной подготовки, это основополагающий инструмент для изучения других школьных предметов. Решение математических задач способствует развитию рационального и критического мышления, формирует у учащихся аналитический склад ума, воспитывает личность.

В настоящее время математика в рамках общеобразовательного школьного курса изучается с 1 по 11 классы, программа разделяется согласно ступеням обучения: начальная, средняя, старшая школа, каждая из которых ставит определенные цели и задачи с учетом преемственности каждого этапа обучения.

Говоря о задачах курса математики старшей школы, обратимся к федеральному государственному образовательному стандарту (ФГОС) среднего общего образования, согласно которому изучение соответствующего курса должно обеспечить наличие следующих компетенций:

«– сформированность представлений о социальных, культурных и исторических факторах становления математики;

– сформированность основ логического, алгоритмического и математического мышления;

– сформированность умений применять полученные знания при решении различных задач;

– сформированность представлений о математике как части общечеловеческой культуры, универсальном языке науки, позволяющем описывать и изучать реальные процессы и явления» [61].

Итак, основными задачами изучения математики в школе является развитие математического мышления, приобретение соответствующих навыков и умений, в связи с этим решение математических задач – это наиболее эффективный способ освоения необходимых математических методов и принципов. Важное место в развитии математического мышления и навыков практического применения математических методов занимают олимпиадные задачи. Отличие олимпиадных задач заключается в их нестандартности и в необходимости применения творческих и оригинальных подходов к решению задач. Математические олимпиады направлены на выявление талантливых учеников с нестандартным складом ума, имеющих математические способности, а также на приобретение новых знаний и закрепление знаний основной школьной программы.

Согласно Концепции развития математического образования в Российской Федерации основными направлениями для ее реализации в рамках среднего общего математического образования являются:

«– предоставление каждому обучающемуся возможности достижения уровня математических знаний, необходимого для дальнейшей успешной жизни в обществе;

– предоставление учащимся возможности для развития навыков, необходимых для применения в последующей практической деятельности;

– подготовка учащихся с учетом индивидуальных потребностей и способностей» [35].

Необходимо создать условия для достижения высокого уровня образования через развитие специализированных школ и классов, а также расширение системы дополнительного образования по математике и проведение математических соревнований, включая олимпиады.

Федеральный проект «Успех каждого ребенка» [73] направлен на создание системы выявления, поддержки и развития способностей и талантов детей и молодежи. Проект обеспечивает равные возможности для доступа к актуальным и востребованным программам дополнительного образования, выявляет таланты каждого ребенка и занимается ранней профориентацией учащихся.

Концепция общенациональной системы выявления и развития молодых талантов (утв. Президентом РФ 03.04.2012 № Пр-827) [33] определяет основные принципы выявления и развития молодых талантов и формулирует основную цель государства в этой области в создании эффективной системы образования, которая обеспечит условия для обучения, развития способностей всех детей и молодежи, позволив им реализовывать свой потенциал, независимо от места жительства, социального положения и финансовых возможностей их семей.

Согласно Постановлению Правительства РФ от 17 ноября 2015 г. № 1239 «Об утверждении Правил выявления детей, проявивших выдающиеся способности, и сопровождения их дальнейшего развития» [59] для выявления одаренных детей требуется предоставление результатов интеллектуальной деятельности, в том числе участие в олимпиадах и других конкурсах, направленных на развитие творческих и интеллектуальных способностей.

В России интеллектуальные конкурсы для школьников имеют большую историю. Русское астрономическое общество проводило первые олимпиады «для учащейся молодежи» еще в конце 19 века, в 30-е годы в СССР проводились городские олимпиады по математике и естественным наукам: первая олимпиада состоялась в 1934 году, организованная Ленинградским университетом по инициативе ученого Бориса Делоне, первая московская олимпиада по математике прошла в 1935 году при содействии Московского математического общества [22].

В настоящее время, помимо соревновательной и обучающей направленности, олимпиады также дают возможность учащимся получить дополнительные баллы для поступления в высшие учебные заведения. Например, победители Всероссийской или международной олимпиады могут поступить в высшие учебные заведения без сдачи вступительных экзаменов, зачислиться вне конкурса, получить 100 баллов по Единому государственному экзамену (ЕГЭ).

Существует большое количество исследовательских работ, посвященных предметным олимпиадам в общеобразовательных школах и методам их подготовки. Олимпиады признаются важной составляющей в развитии интеллектуальных способностей учащихся.

О.Н. Шамайло [77] в своей работе отмечает, что в различных исследованиях, таких как диссертации В. И. Вышнепольского, Д.В. Подлесного, И.Г. Шомполова и Ю.Д. Эпштейна и других, отмечается, что в подготовке учащихся к олимпиадам эффективными формами обучения являются семинары и кружковая работа, которые уже широко используются в общеобразовательных школах.

В работах О.В. Бахтиной [3], И.С. Гумерова [19] и Е.Л. Мардахаевой [39] было отмечено, что внеурочные формы занятий математикой (как, например, математические кружки, научные семинары, олимпиады) играют важную роль в системе непрерывного математического образования. Они способствуют повышению уровня математического образования и развитию одаренных детей [32].

Ю.Д. Эпштейн [80] в своей работе формулировал цели обучения при подготовке к предметным олимпиадам в общеобразовательной школе, рассматривал формы и методы обучения при подготовке к олимпиадам.

И.Н. Тоболкина [68] изучала педагогические условия развития одаренности детей в общеобразовательном учреждении, включающие содержательный, организационный и мотивационный аспекты целостного педагогического процесса.

Н.Х. Агаханов [1] писал о работе с математически одарёнными детьми в многоуровневой системе предметных олимпиад и конкурсов.

Таким образом, актуальность темы исследования обусловлена сложившимися к настоящему времени противоречиями между востребованностью и важностью олимпиадного движения, в особенности для учащихся старших классов, и отсутствием комплексного подхода для подготовки учеников к участию в олимпиадах, недостаточным уровнем качества методических материалов, необходимых для учителей школ.

Проблема исследования: каковы методические основы организации подготовки старшеклассников к решению олимпиадных задач по математике?

Объект исследования: процесс подготовки мотивированных обучающихся общеобразовательной школы к решению олимпиадных задач.

Предмет исследования: содержание и методика подготовки старшеклассников к решению олимпиадных задач по математике.

Цель исследования: выявление методических основ организации подготовки старшеклассников к решению олимпиадных задач по математике на примере решения уравнений второй и высших степеней.

Гипотеза исследования состоит в предположении о том, что подготовка старшеклассников к решению олимпиадных задач по математике будет продуктивной, если её:

– содержательный компонент будет обеспечивать преемственность между базовым и элективными курсами по математике;

– организационный компонент основан на применении различных форм и методов, а также технологии развивающего обучения решению математических задач.

Задачи исследования:

1. Раскрыть теоретические основы обучения старшеклассников решению олимпиадных задач по математике.

2. Определить методические особенности подготовки старшеклассников к решению олимпиадных задач по математике на примере уравнений второй и высших степеней.

3. Разработать программу элективного курса «Уравнения второй и высшей степеней в олимпиадных задачах по математике»

4. Провести педагогический эксперимент по проверке гипотезы исследования.

Теоретико-методологическую основу данного исследования составили работы Т.А. Ивановой [24], Ю.М. Колягина [32],Н.И. Мерлиной [41], Л.М. Фридмана [74].

Базовыми для настоящего исследования явились также работы Н.Х. Агаханова [1], О.А. Беляниной [4], Е.Л. Мардахаевой [39], А.Ф. Фаркова[70], [71].

Методы исследования: анализ психолого-педагогической, научной и учебно-методической литературы; изучение, наблюдение и обобщение школьной практики; анализ опыта работы педагогов по данной проблеме; педагогический эксперимент.

Основные этапы исследования:

На первом этапе (2022/2023 уч.г.) выявлялись различные подходы к раскрытию понятия олимпиадной задачи, изучались нормативные документы, анализировались ранее выполненные исследования по теме диссертации, пособия по подготовке обучающихся к олимпиадам по математике.

На втором этапе (2022/2023 уч.г.) определялись теоретические и методические основы исследования по проблеме организации подготовки старшеклассников к решению олимпиадных задач по математике, проводился констатирующий этап эксперимента.

На третьем этапе (2023/2024 уч.г.) была разработана и апробирована программа и методическое обеспечение элективного курса «Алгебраические уравнения второй и высших степеней в олимпиадных задачах по математике», подборка ключевых задач по теме и проектирование системы олимпиадных задач на основе применения технологии развивающего обучения решению задач Т.А. Ивановой [24].

На заключительном этапе (2023/2024 уч.г.) осуществлялось оформление диссертации, корректировка ранее представленного материала, уточнение аппарата исследования, описание результатов экспериментальной работы, формулирование выводов.

Опытно-экспериментальная база исследования: Научно-исследовательская лаборатория «Школа математического развития и образования- 5+» Тольяттинского государственного университета.

Новизна исследования заключается в разработке научно-методического обеспечения (содержание, программа, система задач, методические рекомендации) элективного курса «Алгебраические уравнения второй и высшей степеней в олимпиадных задачах» для обучающихся 9-11 классов.

Теоретическая значимость исследования определяется тем, что в нем предложена методика подготовки старшеклассников к решению олимпиадных задач по математике.

Практическая значимость исследования заключается в разработанной программе элективного курса «Алгебраические уравнения второй и высшей степеней в олимпиадных задачах» для обучающихся 9-11 классов, которая может быть рекомендована учителям математики общеобразовательной школы».

Достоверность и обоснованность результатов исследования обеспечивались сочетанием теоретических и практических методов исследования, анализом педагогической практики и результатами педагогического эксперимента в математической школе в ТГУ.

Личное участие автора в организации и проведении исследования состоит в систематизации и обобщении теоретического и практического материала по теме; написании самой диссертации, проектировании программы элективного курса.

Апробация и внедрение результатов работы велись в течение всего исследования. Его результаты докладывались и обсуждались на научно-методическом семинаре и заседании кафедры «Высшая математика и математическое образование» ТГУ, а также в Открытой научно-практической конференция «Качество обучения как проблема контроля и оценки образовательной деятельности образовательных организаций (учреждений)» (21-22 февраля 2023 год).

По теме исследования имеется одна публикация [20].

На защиту выносятся следующие положения:

– содержательный компонент элективного курса «Алгебраические уравнения второй и высшей степеней в олимпиадных задачах» обеспечивает преемственность с базовым курсом алгебры 7-11 классов;

– организационно-методический компонент, основанный на применении технологии развивающего обучения решению математических задач Т.А. Ивановой, способствует продуктивной подготовке старшеклассников к решению олимпиадных задач по математике.

На защиту также выносится подборка задач, которая может быть использована в рамках дополнительного математического образования с обучающимися при изучении темы «Алгебраические уравнения второй и высшей степеней».

Структура магистерской диссертации. Работа состоит из введения, двух глав, заключения, содержит 2 рисунка, 11 таблиц, список используемой литературы и используемых источников (85 источников). Основной текст работы изложен на 94 страницах.

Глава 1 Теоретические основы обучения старшеклассников решению олимпиадных задач по математике

1.1 Понятие олимпиадной задачи по математике и основные требования к ним

Согласно ФГОС СОО портрет выпускника среднего общеобразовательного учреждения включает такие характеристики как: «креативный и критически мыслящий, активно и целенаправленно познающий мир, осознающий ценность образования и науки, труда и творчества для человека и общества; владеющий основами научных методов познания окружающего мира; мотивированный на творчество и инновационную деятельность» [61]. Современное общество, динамически изменяющееся, со свойственной ему нестабильностью и стремительностью перемен, диктует определенные задачи для нынешнего поколения учащихся, такие как, самостоятельность в действиях и принимаемых решениях, критичность ума и адаптивность, без потери, своей уникальности и нравственных начал, желания и стремления к саморазвитию и самопознанию. Перед учителями стоит основополагающая задача в воспитании и развитии творческих и социально-активных начал у обучающихся, познавательных способностей, помощь в раскрытии познавательных интересов, мотивировании на творчество и инновационную деятельность. Особое место среди всех видов и форм деятельности учащихся, которое бы удовлетворяло всем вышеперечисленным требованиям к развитию и реализации творческого потенциала личности, занимает участие в олимпиадах. Предметные олимпиады являются соревнованием детей по общеобразовательным предметам. «Главная их задача заключается в повышении интереса обучающихся к изучению учебных предметов и выявлению талантливых учеников» [63].

Олимпиады дают возможность ученикам проявить себя, проверить свои способности, оценив их критически, а также помогают в построении пути для дальнейшего образования. Подготовка к решению олимпиадных задач является одним из эффективных способов развития учеников, так как «олимпиадные задачи требуют глубокого понимания материала и развивают умение быстро и точно анализировать задачи, охватывают более широкий круг знаний по предмету и развивают эрудицию, привносят в изучение предмета творческое начало, что также немаловажно учитывать любому педагогу» [81].

Говоря об олимпиадах по математике, важно отметить, что одними из главных целей математического образования являются интеллектуальное развитие учащихся, формирование качеств мышления, характерных для математической деятельности, подготовка ученика к современной жизни. Одной из форм такой подготовки выступает участие в олимпиадах, которое способствует формированию интереса учащихся к математике, желанию проверить свои интеллектуальные и математические способности, а также привлекает к занятиям в математических кружках.

Согласно М. А. Бочко и Е. В. Кавериной, «олимпиада – это проверенный способ выявить детей, имеющих выдающиеся способности, мотивировать их и дать им возможность для дальнейшего развития и реализации этих способностей. Возможности, предоставляемые школьникам олимпиадой – это, прежде всего, возможность получить новые знания, определить и развить свои способности и интересы, приобрести самостоятельность мышления и действия, проявить себя» [7].

Олимпиадные задачи в математике – это специальный тип задач, который требует знания школьного курса математики, но для их решения необходимо использование нестандартных и оригинальных подходов, которые обычно не изучаются в школе.

«Олимпиадные задачи могут быть разделены на две группы: первая группа содержит задачи, которые близки к школьному курсу математики, но углубляющие и дополняющие его различные разделы, такие как геометрия.

Вторая группа включает задачи, которые не могут быть отнесены к какой-либо конкретной теме математики, и для их решения необходимо уметь рассуждать, догадываться и строить логические выводы. Для решения таких задач часто требуется использование каких-то методов и идей, относящихся к классическим олимпиадным тематикам» [67].

Олимпиадная задача – это задача, условия которой подразумевают использование нестандартных методов решения. «Нестандартные задачи – это такие задачи, для которых в курсе математики не имеется общих правил и положений, определяющих точную программу их решения» [74, С. 112].

Ю.М. Колягин дает определение понятию «нестандартное задание»: «– задание, при предъявлении которого, учащиеся заранее не знают ни метода, ни учебного материала, на котором основывается решение», а «нестандартная задача – это задача, решение которой для данного ученика не является известной цепью известных действий» [32].

Нестандартные задачи должны удовлетворять определённым требованиям:

« –соответствовать учебной программе по математике и не выходить за её рамки;

– быть интересными и оригинальными по своей тематике, и иметь нестандартное решение;

– важно, чтобы условия задач были краткими и понятными, и они допускали вариативность решения;

– уровень задач должен соответствовать уровню обучения, на котором они предлагаются;

– быть доступными для решения учениками» [2].

А. В. Фарков дает следующее определение олимпиадным задачам по математике: «это задачи повышенной трудности, нестандартные по формулировке или по методам их решения» [70, с. 7]. Согласно А. В. Фаркову, задачи на олимпиадах могут быть классифицированы на два типа – стандартные и нестандартные. Нестандартные задачи в математике отличаются от типичных задач тем, что они требуют необычных идей и специальных методов решения. С другой стороны, стандартные задачи представляют собой задачи, которые уже известны и обычно решаются стандартными способами. Тем не менее, они также могут быть решены быстро и оригинальным способом.

А. В. Фарков выделяет следующие основные типы олимпиадных задач по математике: «задачи на применение специальных методов решения; задачи, использующие программный материал, но повышенной трудности; комбинированные задачи, которые используют программный материал и идеи, изучаемые на кружках, факультативах» [72].

А. О. Келдибекова пишет: «Олимпиадные – задачи с неизвестным способом решения, нестандартные, содержание которых соответствует логической структуре математической компетентности творческого уровня»[27].

А. Я. Канель-Белов, А. К. Ковальджи дают следующее определение: «это тип задач, занимающих промежуточное положение между школьными задачами и научными проблемами. Поскольку время на олимпиаде ограничено, желательно, чтобы отыскание пути к решению было главной трудностью, а оформление решения не требовало больших усилий» [26].

А. Р. Тугузбаева констатирует: «олимпиадная задача по математике представляет собой задачу повышенного уровня трудности, нестандартной как по формулировке, так и по методикам решения» [69].

Н. Б. Васильев характеризует олимпиадные задачи как «теоремы, которые нужно доказать, задачи на отыскание…, требующие некоторого исследования» [9].

Согласно Методическим рекомендациям по проведению школьного и муниципального этапов Всероссийской олимпиады школьников по математике задания олимпиады должны удовлетворять следующим требованиям:

– задания не должны носить характер обычной контрольной работы по различным разделам школьной математики; большая часть заданий должна включать в себя элементы (научного) творчества;

– в задания нельзя включать задачи по разделам математики, не изученным хотя бы по одному из базовых учебников по математике, алгебре и геометрии в соответствующем классе к моменту проведения олимпиады;

– задания олимпиады должны быть различного характера сложности для того, чтобы, с одной стороны, обеспечить практически каждому ее участнику возможность выполнить наиболее простые из них, с другой стороны, достичь одной из основных целей олимпиады – определения наиболее способных участников. Желательно, чтобы с первым заданием успешно справлялись не менее 70% участников, со вторым – около 50%, с третьим –20%-30%, а с последними – лучшие из участников олимпиады;

– в задания должны включаться задачи, имеющие привлекательные, запоминающиеся формулировки;

– формулировки задач должны быть корректными, четкими и понятными для участников. Задания не должны допускать неоднозначности трактовки условий. Задания не должны включать термины и понятия, не знакомые учащимся данной возрастной категории;

–вариант по каждому классу должен содержать в себе 4-6 задач. – тематика заданий должна быть разнообразной, по возможности охватывающей все разделы школьной математики: арифметику, алгебру, геометрию;

– варианты также должны содержать в себе логические задачи (в начальном и среднем звене школы), комбинаторику.

Таким образом, для 4–6 классов рекомендуется включать задачи по арифметике, логические задачи, задачи по наглядной геометрии, задачи, использующие понятие четности; в 7-8 классах добавляются задачи, использующие для решения преобразования алгебраических выражений, задачи на делимость, геометрические задачи на доказательство, комбинаторные задачи; в 9-11 последовательно добавляются задачи на свойства линейных и квадратичных функций, задачи по теории чисел, неравенства, задачи, использующие тригонометрию, стереометрию, математический анализ, комбинаторику.

Также авторы рекомендаций отмечают, что «задания олимпиады не должны составляться на основе одного источника, с целью снижения риска знакомства одного или нескольких ее участников со всеми задачами, включенными в вариант. Предпочтительно использование различных источников, незнакомых участникам Олимпиады, либо включение в варианты новых задач» [42].

1.2 Основные цели и задачи подготовки старшеклассников к олимпиадам по математике

Первоначальной целью проведения олимпиад было развитие интереса учащихся к школьным предметам. В настоящее время олимпиада имеет также немаловажную роль, связанную с введением ЕГЭ и возможностью для школьников поступать в ВУЗЫ на определенных условиях. Успешное выступление на олимпиаде дает школьникам преимущество при поступлении в ВУЗЫ страны и своего региона. Математические олимпиады, в свою очередь, не только помогают определить степень математической подготовленности и выявить наиболее математически одаренных учеников, но и представляют собой стимул для глубокого изучения предмета. Квалифицированно составленные математические олимпиады предоставляют возможность для раскрытия интеллектуального потенциала, а также в рамках честного и объективного соревнования оценить свои способности и соотнести их с другими учащимися. Привлекает и нестандартность содержания олимпиадных задач, требующих демонстрации креативности от участников, они обладают заметным отличием по сравнению с заданиями школьного курса, направленных на работу со строгими и стандартизированными алгоритмами. Помимо этого, важнейшими задачами олимпиады являются выявление творческих способностей, интереса не только к математике, но и к научно-исследовательской деятельности, а также в целом повышение уровня математического образования. Немаловажен и тот факт, что успехи от участия в олимпиадах важны для самооценки и мотивации учащегося, а также, возможно, в изменении оценки его способностей со стороны учителей в положительную сторону. Таким образом, основными целями математических олимпиад являются выявление талантливых математически одаренных учеников, развитие интереса к изучению математики, повышение математической культуры, интеллектуального уровня учащихся создание необходимых условий для поддержки одаренных детей. И для обеспечения реализации соответствующих целей немаловажной является роль учителя, который осуществляет помощь и поддержку в ходе подготовки учеников к участию в олимпиадах [84], [85].

Подготовка учащихся к олимпиадам по математике реализуется в рамках дополнительных занятий, кружков, факультативов. На занятиях изучаются методы решения олимпиадных задач, разбираются типовые задания, которые часто встречаются на олимпиадах. Школьники обучаются определенным алгоритмам и схемам решения, учатся мыслить самостоятельно, проявляя и развивая креативные навыки. Для учащегося подготовка к олимпиаде обладает рядом преимуществ, таких как развитие математического, критического и логического мышления, интеллектуальное развитие. Работая с учителем, ученики заручаются поддержкой и помощью при решении сложных задач, имеют возможность разобрать все интересующие вопросы, вызывающие сложности в ходе работы. Для получения хороших результатов необходима планомерная систематическая подготовка, которая организовывается, в первую очередь, преподавателем.

Немаловажно при этом учитывать индивидуальные особенности учащихся: когнитивные способности, уровень самостоятельности и ответственности, трудолюбие и работоспособность, обучаемость и др. Также учителю необходимо осуществлять подбор системы задач с учетом специфики задач олимпиады, то есть требующие для своего решения нестандартный подход.

Таким образом, подготовка старшеклассников к решению олимпиадных задач ставит следующие цели:

– расширение знаний по математике, повышение интереса учеников к более глубокому изучению предмета «Математика»;

– раскрытие способностей по решению нестандартных задач, развитие творческого потенциала школьников;

– углубление и расширение знаний студентов об олимпиадных математических задачах, основных методах и приемах их решения;

– подготовка обучающихся к самостоятельной исследовательской деятельности;

– повышение интереса школьников к внеурочной и внешкольной деятельности.

Задачи подготовки старшеклассников к решению олимпиадных задач:

– обеспечить индивидуальный подход к олимпиадной подготовке каждого учащегося, учитывая его уровень знаний и личностные особенности;

– создать структурированную систему методов и техник подготовки к олимпиаде;

– обеспечить условия, которые помогут развить исследовательские навыки учащихся;

– обеспечить осуществление систематизации и обобщения информации, изученной на уроках математики, для более успешного решения олимпиадных задач;

– обеспечить развитие логических навыков, необходимых для решения олимпиадных задач;

– разработать методические рекомендаций для подготовки учащихся к олимпиадам;

– идентифицировать трудности, которые возникают при подготовке учеников к олимпиадам, обеспечить поиск путей их преодоления;

– ознакомиться с психологическими условиями, которые способствуют успешной работе с учащимися и их родителями в процессе подготовки к олимпиадам.

О. Н. Шамайло выделяет следующие цели методической системы подготовки учащихся к математической олимпиаде:

« – развитие творческого потенциала;

– развитие заинтересованности учащихся в научно-исследовательской деятельности;

– увеличение интереса учеников к фундаментальному образованию в целом;

– создание условия для того, чтобы учащиеся могли реализовать свой потенциал и свои интересы;

– обучение решению сложных задач по математике и другим предметам, которые могут использоваться на олимпиадах и конкурсах» [77].

Автор также отмечает, что из представленных целей «можно сделать локальной только одну: обучение решению задач олимпиадного типа, если придать этому обучению диагностичность и операциональность. Достижение этой локальной цели приводит к осуществлению и других (глобальных) вышеназванных целей» [77].

Решая задачи, студент приобретает опыт работы с алгоритмами их решения, углубляет свои теоретические знания. Академик А. Н. Колмогоров подчёркивал, что главной непреходящей ценностью математических олимпиад являются олимпиадные задачи.

Таким образом, содержанием обучения методической системы являются новые методы решения задач, которыми обучающиеся овладевают в процессе решения задач прошлых олимпиад.

И. В. Сафонова в методическом пособии по подготовке учащихся к олимпиадам по математике выделяет следующие принципы подготовки:

«– принцип максимальной самостоятельности в подготовке к олимпиадам предполагает, что ученик получает возможность решать задачи и упражнения самостоятельно, что помогает ему лучше усваивать материал. Учитель следит за процессом и оказывает тактическую помощь, обсуждая нерешенные задачи и предоставляя результаты решения задач;

–принцип активности знаний означает, что олимпиадные задания разрабатываются с учетом предыдущих знаний и требований стандарта образования. При подготовке учащихся к олимпиадам происходит углубление, уточнение и расширение знаний. Разбор предыдущих олимпиадных заданий является эффективной формой подготовки учащихся к участию в олимпиадах;

–принцип опережающего уровня сложности предполагает, что ученики подготавливаются к заданиям более высокого уровня сложности для успешного участия в олимпиаде. Реализация этого принципа помогает ученикам получить уверенность, раскрепощает их и дает возможность успешно справиться с заданиями;

–анализ результатов предыдущих олимпиад помогает учителям выявить недостатки в подготовке и улучшить качество подготовки к олимпиаде. Этот принцип также помогает учащимся повысить прочность знаний и умений;

– если использовать индивидуальный подход в подготовке к олимпиадам, то для каждого ученика будет разработана своя программа подготовки, учитывающая его индивидуальные особенности. Эта программа будет отражать уникальный путь каждого ученика от незнания к знанию и от неумения решать сложные задачи к развитию творческих способностей, необходимых для выбора наиболее эффективных способов их решения» [64].

При подборе олимпиадных заданий для школьников необходимо учитывать их образовательный уровень, возрастные и индивидуальные особенности, а также соответствие заданий целям и задачам олимпиады. В целом, методика подбора олимпиадных заданий по математике может включать в себя следующие этапы:

–определение целей олимпиада, формата олимпиады;

– изучение критериев оценивания олимпиадных задач;

– изучение рекомендуемых учебных материалов для подготовки к олимпиаде;

– подбор заданий для подготовки, составление банка заданий, регулярное его обновление.

Таким образом, методика подбора олимпиадных заданий должна учитывать требования и критерии олимпиады, разнообразных источников заданий, классификацию и проверку заданий, а также адаптироваться в соответствии со спецификой олимпиады и возрастной категорией участников.

А. В. Фарков выделяет следующие главные требования к тексту математической олимпиады:

«– в тексте олимпиады может быть от 4 до 6 заданий, однако чаще всего их количество равно 5;

– задания в тексте олимпиады должны быть расположены в порядке возрастания трудности или сложности (сложность — это объективная характеристика задачи, определяемая ее структурой, трудность — субъективная характеристика задачи, определяемая взаимоотношениями между задачей и решающим ее учеником);

– первые одна-две задачи должны быть простыми и доступными для большинства участников олимпиады;

– следующие две-три задачи должны быть сложнее, при этом справиться с ними должна примерно половина участников;

– последние одна-две задачи могут содержать материал, не изучаемый в школе, и являются аналогами задач регионального этапа олимпиад;

– желательно включать задачу, содержащую год проведения олимпиады;

– в тексты олимпиады для разных классов нужно включать задачи из разных разделов школьного курса математики;

– в текстах олимпиад для разных классов могут быть как одинаковые задачи, так и задачи, использующие одну идею, но с постепенным усложнением от класса к классу;

– необходимо постоянно включать новые задачи в тексты олимпиад и менять тематику задач из года в год;

– нежелательно включать в тексты олимпиад задачи, требующие формального применения формул, с громоздкими вычислениями и применением трудно запоминающихся формул;

– количество задач в тексте олимпиады должно быть таким, чтобы можно было оценивать решение каждой задачи разным количеством баллов» [71].

Оценка олимпиадных заданий для школьников – это сложный процесс, требующий особого подхода. Для эффективной оценки заданий можно использовать следующую методику:

–оценка должна быть объективной и справедливой. Для этого необходимо разработать критерии оценки, которые будут наиболее точно отражать уровень знаний и умений участников олимпиады;

– оценка должна быть недвусмысленной и понятной. Каждый критерий оценки должен иметь четкие и конкретные описания примеров выполнения задания, которые помогут эксперту понять, насколько задание было успешно выполнено участником;

– оценка должна быть основана на настоящих заданиях. Эксперт должен иметь возможность ознакомиться с заданиями, на основе которых будет проводиться оценка;

– оценка должна учитывать разные уровни сложности заданий. Критерии оценки должны применяться к каждому заданию индивидуально, и участники должны получать баллы в зависимости от уровня сложности задания;

– оценка должна быть проведена специалистами в соответствующей области знаний. Эксперты должны иметь достаточный опыт и квалификацию для того, чтобы правильно оценить задания и применить к ним соответствующие критерии;

– оценка должна быть систематической и комплексной. Эксперты должны иметь возможность анализировать результаты олимпиады и делать выводы о том, удачна ли была методика оценки, и какие изменения нужно вносить в будущем.

В соответствии с этими принципами методика оценки олимпиадных заданий для школьников по А. В. Фаркову предусматривает установление критериев оценки для каждого задания, проведение оценки специалистами с достаточным опытом в соответствующей области знаний, оценку заданий на основе их уровня сложности и анализ результатов олимпиады.

Также согласно А.В. Фаркову, «для контроля и оценки членами жюри заданий, выполненных участниками на районной олимпиаде, предпочтительно иметь не менее трех судей в каждой категории, чтобы избежать пристрастия одного учителя и обеспечить объективную оценку. Существуют два варианта проверки заданий: в первом варианте каждый судья оценивает только одно или два задания и ставит количество баллов, а в другом варианте каждый судья проверяет несколько работ и оценивает все задания. Оба метода имеют свои преимущества и недостатки. Чтобы гарантировать справедливую оценку и назначить призовые места, после проверки всех работ члены жюри обсуждают результаты» [72].

1.3 Формы, методы и средства подготовки старшеклассников к решению олимпиадных задач по математике

Методологической основой ФГОС СОО является системно-деятельностный подход, который обеспечивает:

«– формирование готовности обучающихся к саморазвитию и непрерывному образованию;

– проектирование и конструирование развивающей образовательной среды организации, осуществляющей образовательную деятельность;

– активную учебно-познавательную деятельность обучающихся;

–построение образовательной деятельности с учетом индивидуальных, возрастных, психологических, физиологических особенностей и здоровья обучающихся» [61].

В педагогике системно-деятельностный подход определяют соответствующим образом: системно-деятельностный подход в обучении означает создание образовательного процесса, в котором центральное значение придается активной и разнообразной деятельности учащихся. Такой подход способствует формированию личности ученика и его развитию через собственную активность, которая направлена на раскрытие для него новых знаний, а не только на пассивное восприятие информации.

Таким образом, обучение основывается на самостоятельности и инициативе учащихся, которые активно участвуют в учебном процессе, поддерживая на практике теоретические знания.

Главная задача заключается в постепенном отходе от запоминания информации к умению применять знания на практике. То есть, ученики, не просто повторяют усвоенный материал, но понимают и умеют использовать его в различных действиях и ситуациях. Это способствует развитию творческого и креативного мышления у учеников и помогает им лучше усваивать знания.

А. И. Савенков считает, что « в последние годы все большее значение приобретает идея, что в образовательных системах необходимо учитывать уникальность каждого человека. То есть, важно принимать во внимание индивидуальные особенности каждого обучающегося, что поможет добиться качественных изменений в содержании образования для одаренных детей. И одним из ключевых способов реализации этой задачи является индивидуализация обучения» [63].

О. Н. Шамайло пишет, что «все авторы научных исследований (Б. П. Вирачёв, В. И. Вышнепольский, И. С. Петраков, Д. В. Подлесный, А. И. Попов, П. В. Сергеев, И. В. Старовикова, И. Г. Шомполов, Ю. Д. Эпштейн и др.), посвящённых предметным олимпиадам, подчёркивают, что обучение в условиях олимпиадного движения ориентировано на развитие личности и пропедевтику научного образования, способствует оптимизации учебного процесса. Это обучение успешно проводится там, где организованы хорошо продуманные занятия со школьниками и студентами, направленные на подготовку к олимпиадам. Следовательно, нужна система подготовки к студенческим математическим олимпиадам, состоящая из разработанной целевой программы, содержания, форм, методов и средств обучения» [77].

«В работах В. И. Вышнепольского, А. И. Попова, Б. П. Вирачёва, Б. С. Кирьякова, Д. В. Подлесного, И. В. Старовиковой, И. С. Петракова и П. В. Сергеева были предложены исследования по различным областям математики и физики в высшей и общеобразовательной школе. В этих исследованиях были разработаны предложения по содержанию подготовки к математическим олимпиадам, включая методы решения предыдущих задач олимпиад, и формы обучения, такие как семинары и кружки» [77].

Д. Б. Богоявленская, В. Д. Шадриков, Н. С. Лейтес [6] отмечают, что каждому ребенку необходимо равное начальное положение в проявлении своих способностей в конкретной области, чтобы обнаружить свой талант. Для этого нужно поддерживать интересы детей, мотивировать их развивать свои способности и помогать поддерживать их таланты.

В России основная работа по развитию различных видов детской одаренности проводится в образовательных учреждениях, таких как лицеи, гимназии, школы с углубленным изучением предметов или определенных областей, а также в дополнительных учебных учреждениях, включая внеклассные занятия [57].

Согласно Концепции развития дополнительного образования детей до 2030 года, дополнительное образование нацелено на развитие творческих способностей детей и взрослых, их интеллектуального, нравственного и физического совершенствования, а также на организацию их свободного времени. Дополнительное образование детей также помогает им адаптироваться к жизни в обществе, выбирать будущую профессию и найти реализацию своих способностей. Для достижения этих целей должны создаваться различные дополнительные общеобразовательные программы, учитывающие возраст и индивидуальные особенности каждого ребенка. Также через дополнительное образование важно формировать культуру здорового и безопасного образа жизни и укреплять здоровье детей и взрослых [34]. Исследования О. А. Беляниной [4], В. А. Березиной [5], Н. И. Мерлиной [41], И. Н. Тоболкиной [68] подтверждают, что дополнительное образование детей является эффективным средством для развития одаренности и творческого мышления. Согласно Ю. Д. Эпштейну [80], который изучал формы обучения для участия в олимпиадах, важную роль играют семинары и кружковые занятия, которые широко распространены в общеобразовательных школах.

Само понятие форма обучения представляет собой структурированные элементы учебного процесса, которые определяют организационную и временную часть образовательной деятельности и включают в себя разнообразные виды педагогических мероприятий. Следовательно, формы обучения в учебно-воспитательном процессе в определенное время выполняют функции организационного плана и решают следующие задачи:

– контролировать соотношение индивидуального, группового и коллективного обучения;

– регулировать совместную деятельность между преподавателем и студентами в процессе обучения;

– определять уровень активности студентов и средства улучшения их познавательных способностей;

– также формы обучения устанавливают требования к преподавателям, касающиеся организации различных типов занятий.

Форма обучения предусматривает упорядоченное взаимодействие между преподавателем и учащимся или между учащимися в процессе освоения знаний, а также приобретения практических навыков и умений.

Способы, которыми проводится обучение, зависят от общественных условий и меняются в процессе развития методов обучения.

Организационные формы обучения подразделяются на различные типы в зависимости от продолжительности занятий.

Существует несколько различных организационных форм обучения, которые различаются по нескольким критериям. Например, учебные занятия могут проводиться в различных местах, включая школы, внешкольные учебные заведения, лекционные аудитории или лаборатории. Продолжительность занятий может быть различной, например, 45 или 30 минут, или занятия могут быть сдвоенными. Количество учеников на занятии может также быть различным, причем состав учеников может быть постоянным или изменчивым, особенно при групповой работе. Наконец, организационные формы обучения могут различаться по характеру взаимодействия учащихся и учителя, включая фронтальную, групповую и индивидуальную формы.

И. В. Сафонова выделяет следующие формы подготовки учащихся к олимпиаде:

«– самостоятельная работа,

– кружки, факультативы,

– школьный урок,

– индивидуальные занятия и консультации,

– использование ИКТ,

– практические занятия» [64].

А. О. Келдибекова выявила, что «классификация форм обучения одаренных детей включает обучение в условиях школ, ориентированных на работу с одаренными людьми (лицеи, гимназии) и форм дополнительного образования (нетиповые образовательные учреждения)» [28], [82]. Обучение детей в системе дополнительного образования осуществляется в формах:

«–индивидуальное обучение или обучение в малых группах по программам творческого развития в области математики;

– работа по исследовательским и творческим проектам в режиме наставничества;

– очно-заочные школы;

–каникулярные сборы, лагеря, мастер-классы, творческие лаборатории;

– система творческих конкурсов, фестивалей, олимпиад;

–детские научно-практические конференции и семинары» [45].

М. А. Бочко и Е. В. Каверина при подготовке учащихся к олимпиадам рекомендуют использовать следующие формы работы: «на уроках математики следует включать занимательные задачи, такие как ребусы, анаграммы, криптограммы и софизмы, чтобы развить интерес к нестандартным задачам. Кроме того, для подготовки к олимпиадам можно давать домашние задания, включающие составление аналогичных задач, ребусов, кроссвордов и т.д. Учащимся стоит также рекомендовать использовать дополнительную литературу и искать самостоятельно решения задач» [7].

Формы и методы обучения тесно взаимосвязаны, что часто приводит к одинаковым названиям этих понятий. Например, лекция как форма обучения и лекционный метод передачи знаний, или игра как форма обучения и игровой метод проведения занятий. Однако, несмотря на сходство в названиях, существуют значительные различия между ними. «Формы обучения отражают организационную и временную характеристику учебно-воспитательного процесса, тогда как методы обучения касаются его процессуальной и методической стороны» [29].

Метод обучения– это совокупность методов, используемых учителем и обучающимися при выполнении дидактических задач для достижения целей занятия и развития слушателей. Он определяет цель обучения, способ его освоения и характер взаимодействия между учителем и обучающимися. Таким образом, этот термин включает в себя методы обучения, используемые педагогом и методы учебной работы, используемые школьниками, их специфику и цели достижения обучения.

Таким образом, методы обучения – это способы совместной деятельности, направленные на решение задач обучения. ««Метод» от «формы» отличает цель, и то, что в методе задан способ приобретения знаний и степень (характер) участия самого слушателя» [32].

Также выделяют следующие методы работы на уроке по подготовке учащихся к олимпиадам:

«– частично-поисковый: привлечение к поисковой деятельности,

–исследовательский метод,

– проблемный,

–метод проектов,

– проведение уроков в нетрадиционной форме: урок-КВН, урок-творческая мастерская, урок-конференция, урок-исследование и др.» [58].

Согласно И. В. Сафоновой методы и средства обучения «базируются на основных положениях концепции развивающего обучения:

–усвоение «знаний-умений-навыков» превращается в средство развития способностей;

– на смену «субъект-объектной» логике воздействия на ученика приходит логика содействия, сотрудничества;

–обучающийся становится субъектом своего собственного развития;

– ведущие методы творческого характера (проблемные, поисковые, исследовательские, проектные, эвристические в сочетании с методами самостоятельной, индивидуальной и групповой работы)»[64].

В образовательном процессе существуют различные методы и приемы обучения. Для их реализации учителю необходимо использовать разнообразные средства обучения: это могут быть как материальные предметы и объекты, так и идеальные, помещенные между преподавателем и учениками. Они используются для эффективной организации учебной деятельности и включают в себя различные виды деятельности, такие как учебная, игровая и трудовая. Кроме того, средствами обучения могут быть предметы материальной и духовной культуры, слово, речь и другие.

В. А. Сластенин определяет «дидактические средства» как «всевозможные материальные и технические объекты, которые обеспечивают достижение образовательных целей, включая учебные и наглядные пособия, демонстрационные устройства и прочие специальные средства обучения» [66, с. 276].

Т. В. Габай расшифровывает понятие «средства обучения» как «информационные носители, которые описывают способы выполнения определенных действий и изменение структуры элементов в ходе процесса, чтобы достичь заданный результат» [15, с. 32, 38].

М. А. Дмитриев подчеркивает важность средств обучения для передачи знаний, умений, навыков и взглядов, относя их к таким объектам, как учебные аудитории, кинозалы, и др. [21, с.129].

А. Г. Молибог и А. И. Тарнопольский охватывают средства обучения в составе лабораторно-технической базы, разделив их на две основные группы: «объекты изучения и технические средства обучения» [43, с.6-7].

Таким образом, выделим средства, которые могут помочь старшеклассникам в подготовке к решению олимпиадных задач по математике:

– учебники и пособия по математике, которые содержат теоретический материал по всем разделам математики, а также множество примеров и задач разного уровня сложности;

– онлайн-курсы и вебинары по математике, которые проводят профессиональные преподаватели и математики;

– математические кружки, где старшеклассники могут заниматься математикой в группе под руководством опытного учителя;

– решение олимпиадных задач, как на индивидуальных занятиях, так и на соревнованиях и олимпиадах;

– взаимодействие с профессионалами в области математики и научными сообществами через интернет;

– различные математические игры, с помощью которых можно развивать общее восприятие пространства и логику;

– тесты и задачи, созданные специально для подготовки к олимпиадам.

Для более эффективного использования данных средств необходимо составлять небольшие таблицы фиксации результатов обучения и систематически проводить самооценку. Также стоит убедиться, что вы используете как можно больше и разнообразных источников, а не ограничиваетесь только одним.

Также согласно М. А. Бочко и Е. В. Кавериной, программа подготовки обучающихся к олимпиадам должна отвечать следующим требованиям:

«–включать дополнительное изучение тем разделов и актуальных проблем области научных знаний;

–использовать целостный подход к изучению тем и проблем;

–предполагать изучение нерешенный актуальных проблем науки, позволяющих учитывать способности школьника к исследовательской деятельности;

–учитывать личностные интересы учащихся;

– поддерживать и развивать самостоятельность в обучении;

– обеспечивать гибкость и вариативность образовательного процесса с точки зрения содержания, форм и методов обучения;

–предусматривать свободный доступ и использование разнообразных источников и способов получения информации;

– обучать учащихся оценивать результаты своей работы, проводить самоанализ;

–развивать элементы индивидуальной психологической поддержки и помощи с учетом личности каждого участника олимпиад» [7].

Существует множество различных приемов и подходов для решения олимпиадных задач по математике. Ниже приведены некоторые из них.

Метод от противного: этот метод заключается в предположении, что то, что нужно доказать, не верно, а затем попытке найти противоречивые результаты. После этого можно вывести истинное утверждение.

Пример 1. В классе 40 учеников. Найдется ли такой месяц в году, в котором отмечают свой день рождения не меньше, чем 4 ученика этого класса?

Решение: предположим, что такой месяц не найдется. Тогда в каждом из 12 месяцев года отмечают свой день рождения не более трех одноклассников. В этом случае учащихся всего не более 12*3 = 36 человек, что противоречит условию задачи. Следовательно, найдётся месяц, в котором родились не менее 4 одноклассников [67].

Метод математической индукции: этот метод используется для доказательства утверждений при помощи математической индукции. При этом для всех натуральных чисел доказывается, что утверждение верно.

Пример 2. Докажите, что для любого натурального числа n выполнено равенство: $1 + 2 + 3 + \ldots + n = n(n + 1) / 2$.

Решение: при $n = 1$ легко установить, что $1 = 1(1 + 1) / 2$.

Индукционный шаг: пусть для некоторого k выполняется

$1 + 2 + 3 + ... + k = k(k + 1) / 2$

Тогда при $k + 1$ имеем:

$1 + 2 + 3 + ... + k + (k + 1) = (k(k + 1) / 2) + (k + 1) =$

$= (k(k+1)+2(k+1)) / 2 = (k+1)(k+2) / 2.$

Таким образом, мы показали, что равенство выполняется для $n = 1$, и что если оно выполняется для некоторого числа k, то оно выполняется и для $k + 1$.

По принципу математической индукции, оно выполняется для любого натурального числа n [25].

Метод перебора: этот метод заключается в том, чтобы рассматривать все возможные варианты решения задачи и выбрать наиболее подходящий.

Пример 3. Найти такое натуральное число, которое при умножении на 5 оканчивается на 3.

Решение: начнем перебирать натуральные числа, оканчивающиеся на 3, и проверять их произведение на 5.

Например: $1 \times 5 = 5$ (не оканчивается на 3)

$2 \times 5 = 10$ (не оканчивается на 3)

$3 \times 5 = 15$ (оканчивается на 5)

$4 \times 5 = 20$ (не оканчивается на 3)

$5 \times 5 = 25$ (оканчивается на 5)

$6 \times 5 = 30$ (оканчивается на 0, не подходит)

$7 \times 5 = 35$ (оканчивается на 5)

Таким образом, получаем, что искомое число должно оканчиваться на 7. Можно продолжить перебор среди натуральных чисел, оканчивающихся на 7, и найти искомое число: $3 \times 7 \times 5 = 105$ [83].

Ответ: 105.

Метод рассуждения: этот метод заключается в использовании логических выводов и аргументов для доказательства утверждения.

Выводы по первой главе

В первой главе диссертации описаны основные понятия, связанные с олимпиадными задачами, в том числе понятие олимпиады, олимпиадной задачи по математике, сформулированы требования к ним. Олимпиадные задачи могут быть различного уровня сложности: от классических задач с использованием школьных тем до нетривиальных задач, требующих применения продвинутых методов решения, они направлены на развитие навыков анализа, обобщения и логического мышления участников, а также поощряют креативные подходы к решению математических задач.

Осуществлен анализ целей и задач, выраженных в методических указаниях по математике для подготовки учеников старших классов к решению задач олимпиадного формата. Цели и задачи подготовки старшеклассников к решению олимпиадных задач по математике включают в себя не только обучение фундаментальным математическим знаниям и навыкам, но также развитие логического мышления, умение решать нетривиальные задачи, работать в команде, а также применение математических знаний на практике.

Рассмотрены такие понятия, как формы, методы и средства обучения: описываются разнообразные подходы к подготовке старшеклассников к решению олимпиадных задач по математике.

Рассматриваются различные методы обучения, разнообразные формы занятий, а также средства обучения и обучающие ресурсы, которые используются в процессе обучения.

Глава 2 Методические особенности подготовки старшеклассников к решению уравнений высших степеней в олимпиадных заданиях по математике

2.1 Анализ олимпиадных задач по теме «Алгебраические уравнения второй и высших степеней»

В средней школе алгебраический курс включает вывод формулы для решения квадратного уравнения. Курс физики демонстрирует необходимость и значимость этой формулы для решения различных физических проблем, таких как задачи по равноускоренному движению и другие.

Однако не только квадратные уравнения играют важную роль в математике и ее применениях. Третье и более высокие степени уравнений имеют не меньшее значение. Люди начали заниматься решением уравнений высших степеней почти так же давно, как и квадратных уравнений. Например, нас до сих пор поражают вавилонские клинописные таблички, на которых изображены решения некоторых кубических уравнений.

Тем не менее, основные факты о решении уравнений высших степеней были открыты только в XIX веке, несмотря на многовековые исследования в этой области.

Это связано с тем, что уравнения более высоких степеней не имеют такой универсальной формулы для их решения, как уравнения второй степени. В случаях, где такая формула существует, она обычно очень сложна и не даёт полной информации о свойствах уравнения [78].

Уравнение вида $p_n(x) = 0,$ где $p_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + {} + a_n$ - многочлен степени n; a_0,a_1, a_n - заданные действительные числа, $a_0 \neq 0$называют алгебраическим уравнением n-степени.

При $n = 1$ уравнение – линейное, при $n = 2$ – квадратное уравнение. Если n> 2, то уравнение $p_n(x) = 0$ называют уравнением высшей степени.

«Решить уравнение – значит, найти все его корни или доказать, что уравнение не имеет корней» [18].

Кубические уравнения (уравнения третьей степени) и уравнения четвертой степени являются наиболее распространенными типами уравнений высшей степени. Они широко применяются в различных областях математики и науки.

Уравнение третьей степени можно привести к виду:

$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, где x – переменная,a, b, c, d–некоторые числа, причем а $\neq 0$.Уравнение третьей степени может иметь не более трёх корней.

«Уравнение четвёртой степени можно привести к виду:

$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$, где x – переменная,$a, b, c, d, e$– некоторые числа, причем а $\neq 0$. Уравнение четвёртой степени может иметь не более четырёх корней» [36].

Однако существуют уравнения с более высокими степенями. В математике можно столкнуться с уравнениями пятой, шестой и более степеней, которые возникают при решении сложных задач и моделей. Часто для решения таких уравнений требуются специальные методы и техники, такие как теория групп и алгебраическая геометрия. Поэтому в математике есть широкий спектр уравнений высшей степени, и изучение их свойств и решений представляет интерес для математиков и исследователей.

Решение уравнений высшей степени может быть достаточно сложным и будет зависеть от степени самого уравнения. Для кубических и уравнений четвертой степени существуют специальные методы и формулы решения, которые помогают получить точное решение. Однако, для уравнений пятой и более высоких степеней не существует общей формулы, которая способна найти решение в общем виде. Поэтому для решения таких уравнений требуются более сложные методы, например, методы приближенного решения или численные методы. Эти методы помогают пошагово приближаться к решению, применяя итерации или делая предположения о значениях корней.

В любом случае, решение уравнений высоких степеней требует тщательного анализа и применения подходящих методов для достижения точного или приближенного результата.

Для алгебраических уравнений высших степеней характерны следующие свойства:

–всякое алгебраическое уравнение n-й степени в множестве чисел имеет n корней, среди которых могут быть и равные друг другу;

–всякий многочлен n-й степени в множестве чисел может быть представлен, и притом единственным способом, в виде произведения двучленов первой степени;

–если все коэффициенты уравнения целые и коэффициент при x_nравен единице, то рациональными корнями могут быть только целые числа;

– целые корни уравнения с целыми коэффициентами являются делителями свободного члена.

На олимпиадах по математике часто встречаются задачи, которые требуют навыков работы с уравнениями высших степеней. Такие задачи могут включать в себя как уравнения третьего порядка, так и более сложные уравнения четвертого, пятого и более высоких степеней. Иногда для их решения требуется использовать теорию комплексных чисел или специальные методы, такие как методы подстановки или замены переменных. Решение таких уравнений требует глубокого понимания алгебры и математического анализа, а также умения применять различные методы решения уравнений.

Умение решать задачи на уравнения высших степеней – важный компонент математической подготовки для участия в олимпиадах и других соревнованиях по математике. Такие задачи помогают развивать аналитическое мышление, умение генерировать новые идеи и находить нестандартные подходы к решению сложных математических проблем.

Рассмотрим примеры задач на тему уравнений высших степеней, которые встречаются в заданиях математических олимпиад, проводимых в последние годы.

Пример 1: «Решить уравнение $x^{10} - 3x^4 + x^2 + 1 = 0$» [49].

Решение: выполним замену $x^2 = t, t \geq 0$, тогда $t^5 - 3t^2 + t + 1 = 0$.

Заметим, что t = 1 является корнем ($1^5 - 3 * 1^2 + 1 + 1 = 0, 1 - 3 + +1 + 1 = 0, 0 = 0$). Разделим левую часть на (t –1), получим уравнение $(t-1)^2(t^3 + 2t^2 + 3y + 1) = 0$. Многочлен $t^3 + 2t^2 + 3y + 1$ имеет только положительные коэффициенты и поэтому у него нет и неотрицательных корней. Таким образом, t = 1 – единственный корень (кратности 2) и, возвращаясь к переменной x, получаем два корня $x = \pm 1$.

Ответ: $x = \pm 1$.

Пример 2: «Решить уравнение $(x^4 + x + 1)(\sqrt[3]{80} - \sqrt[3]{0{,}01} = 2(\sqrt[3]{5{,}12} + +\sqrt[3]{0{,}03375})$» [49].

Решение: умножим обе части уравнения на $\sqrt[3]{100}$, получим $(x^4 + x + +1)(\sqrt[3]{8000} - \sqrt[3]{1} = 2(\sqrt[3]{512} + \sqrt[3]{3{,}375})$;

$$19 * \ (x^4 + x + 1) = 2(8 + 1{,}5)$$

$$(x^4 + x + 1) = 1$$

$$x(x^3 + 1) = 0$$

Ответ: $x_1 = 0, x_2 = -1$.

Пример 3: «Докажите, что многочлен $P(t) = t^3 - 2t^2 - 10t - 3$ имеет три различных корня. Найдите многочлен $R(t)$ третьей степени с корнями $u = x^2y^2z, v = x^2z^2y, w = y^2z^2x,$ где x, y и z – различные корни многочлена $P(t)$» [48].

Решение: поскольку $P(-100) < 0,\ P(-1) > 0,\ P(0) < 0,\ P(100) > 0$. По теореме Виета $x + y + z = 0, xy + xz + yz = -10, xyz = 3$.

$$u + v + w = xyz(xy + xz + yz) = 3 * (-10) = -30$$

$$uv + uw + vw = x^3y^3z^3(x + y + z) = 3^3 * 2 = 54$$

$$uvw = x^5y^5z^5 = 3^5 = 243$$

Ответ: $R(t) = t^3 + 30t^2 + 54t - 243$.

Пример 4: «Решить уравнение $\frac{15}{x(\sqrt[3]{35-8x^3})} = 2x + \sqrt[3]{35 - 8x^3}$. В отчет запишите сумму всех полученных решений» [48].

Решение: выполним замену $u = \sqrt[3]{35 - 8x^3}$, $8x^3 = 35 - u^3$, тогда

$$\{\frac{15}{xu} = 2x + u, 8x^3 + u^3 = 35,$$

Выполним замену $t = 2xu, v = 2x + u$, тогда

$$\begin{cases} \frac{30}{t} = v, \\ v(v^2 - 3t) = 35, \end{cases}$$

$$\begin{cases} t = 6, \\ v = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} xu = 3, \\ 2x + u = 5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 5x + 3 = 0 \Rightarrow x_1 + x_2 = 2{,}5.$$

Ответ: 2,5.

Пример 5: «Даны различные вещественные числа a_1, a_2, a_3 и b. Оказалось, что уравнение $(x - a_1)(x - a_2)(x - a_3) = b$ имеет три различных вещественных корня c_1, c_2, c_3. Найдите корни уравнения $(x - a_1)(x - -a_2)(x - a_3) = b$» [40].

Решение 1: так как многочлен $(x - a_1)(x - a_2)(x - a_3) - b$ имеет старший коэффициент 1 и корни c_1, c_2, c_3, то $(x - a_1)(x - a_2)(x - a_3) - b = = (x - c_1)(x - c_2)(x - c_3)$. Подставим -$x$ в последнее равенство вместо x, получим $(-x - a_1)(-x - a_2)(-x - a_3) - b = (-x - c_1)(-x - c_2)(-x - c_3)$, что равносильно$(x + a_1)(x + a_2)(x + a_3) + b = (x + c_1)(x + c_2)(x + c_3)$. Из полученного равенства получаем, что тремя корнями уравнения $b = (x + c_1)(x + c_2)(x + c_3)$ являются числа $-a_1$, $-a_2$, $-a_3$.

Решение 2: по теореме Виета выполняются следующие соотношения:

$c_1 + c_2 + c_3 = a_1 + a_2 + a_3$,

$c_1c_2 + c_2c_3 + c_3c_1 = a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_1$,

$c_1c_2c_3 = a_1a_2a_3 - b$.

Эти же равенства можно переписать следующим образом:

$$(-a_1)+(-a_2)+(-a_3)=(-c_1)+(-c_2)+(-c_3)$$

$$a_1a_2+a_2a_3+a_3a_1=c_1c_2+c_2c_3+c_3c_1$$

$$-a_1a_2a_3=-c_1c_2c_3-b$$

Из чего следует, что числа $-a_1$,$-a_2$, $-a_3$являются корнями уравнение $(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)-b=0$.

Пример 6: «Найти целочисленные решения уравнения:

$2x^4-4y^4-7x^2y^2-27x^2+63y^2+85=0$» [65].

Решение: сделаем замену $x^2=a$ и $y^2=b$, тогда уравнение примет вид:

$$2a^2-4b^2-7ab-27a+63b+85=0$$

$$2a^2-(7b+27)a-4b^2+63b+85=0$$

Отсюда $D=(9b-7)^2$, корни уравнения $a_1=4b+5$ и $a_2=\frac{17-b}{2}$.

Первый случай:

$$a=4b+5$$

$$x^2=4y^2+5$$

$$x^2-4y^2=5$$

$$(x-2y)(x+2y)=5$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-2y=1,\\x+2y=5,\end{cases}\\\begin{cases}x-2y=5,\\x+2y=1,\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-2y=-1,\\x+2y=-5\end{cases}\\\begin{cases}x-2y=-5,\\x+2y=-1\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=3,\\y=1\end{cases}\\\begin{cases}x=3,\\y=-1\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=-3,\\y=-1\end{cases}\\\begin{cases}x=-3,\\y=1.\end{cases}\end{array}\right.$$

Второй случай:

$$a = \frac{17-b}{2} \Leftrightarrow 2x^2 = 17 - y^2 \Rightarrow 2x^2 \leq 17 \Leftrightarrow x^2 \leq 8{,}5.$$

Значит, x_2 может принимать значения 0, 1 или 4, вычисляем:

$$y^2 = 17 - 2x^2 \Longrightarrow [\{x^2 = 0, y^2 = 17, \quad \{x^2 = 1, y^2 = 15,$$

$$\{x^2 = 4, y^2 = 9 \Leftrightarrow [\emptyset, \emptyset, \{x = \pm 2, x = \pm 3$$

Ответ: $\{(3; \pm 1), (-3; \pm 1), (2; \pm 3), (-2; \pm 3)\}$.

Уравнения высших степеней с параметром – это уравнения, в которых наряду с неизвестной переменной также присутствует параметр, влияющий на вид и свойства уравнения. Решение таких уравнений требует не только знания алгебры, но и умения анализировать и исследовать зависимость между параметром и корнями уравнения. Данный тип уравнений часто встречается на олимпиадах, чтобы проверить участника на глубокое понимание математических концепций и умение применять их в сложных задачах.

Решение уравнений высших степеней и уравнений высших степеней с параметром требует применения различных методов и техник. Также необходимо умение анализировать и интерпретировать результаты, чтобы дать полное решение уравнения или системы уравнений.

Уравнения высших степеней с параметром – это уравнения, в которых один или несколько коэффициентов зависят от какого-то параметра. Например, уравнение $x^2 + px + q = 0$, где p и q - параметры. В этом случае количество и тип решений этих уравнений может изменяться с изменением параметра.

Пример 1: «Решите уравнение $x^3 - 3abx = a^3 + b^3$ при всех значениях параметров a, b. Укажите сумму корней уравнения, получающегося при $a == 2018, b = -2019$, или 0, если это уравнение не имеет корней» [52].

Решение: перепишем уравнение в виде $x(x^2 - 3ab) = (a + +b)((a + b)^2 - 3ab)$. Отсюда очевидно, что число $x = a + b$ является корнем уравнения при любых a и b. Таким образом, уравнение можно переписать в виде:

$$x^3 - (a+b)^3 - \big(3abx - 3ab(a+b)\big) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\big(x-(a+b)\big)(x^2+(a+b)x+(a+b)^2)-3ab\big(x-(a+b)\big)=0 \Leftrightarrow$$
$$\big(x-(a+b)\big)(x^2+(a+b)x+(a^2-ab+b^2))=0$$

Квадратичная скобка имеет дискриминант, равный $D=-3(a-b)^2\leq 0$.

Следовательно:

Если $a=b$, то $D=0$, откуда второй корень уравнения равен $x=-a$ (первый – это $x=a+b$);

Если $a\neq b$, то $D<0$ и тогда других корней, кроме $x=a+b$, уравнение не имеет.

При $a=2018, b=-2019$ имеем $x=a+b=-1$.

Ответ: $x=-1$.

Пример 2: «Определите все значения параметра а, при каждом из которых три различных корня уравнения $x^3+(a^2-15a)x^2+12ax-216=0$ образуют геометрическую прогрессию. Найдите эти корни» [30].

Решение: запишем формулы Виета для уравнения:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=15a-a^2, \\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=12a, \\ x_1x_2x_3=216. \end{cases}$$

Числа x_1, x_2 и x_3 (в указанном порядке) образуют геометрическую прогрессию тогда и только тогда, когда выполнено равенство $x_2^2=x_1x_3$. В таком случае из третьего уравнения системы находим $x_2^3=216$, то есть $x_2=6$, и тогда $x_1x_3=36$. Подставляя это в первые два уравнения системы, получим:

$$\begin{cases} x_1+x_2=15a-a^2-6, \\ (x_1+x_2)=12a-36 \end{cases}$$

откуда $15a-a^2-6=2a-6 \Leftrightarrow a^2-13a \Leftrightarrow a=0$ или $a=13$.

Проверка: если $a = 0$, то уравнение принимает вид $x^3 - 216 = 0$; это уравнение имеет единственный корень $x = 6$. Поэтому значение $a = 0$ не подходит.

Еслиа = 13, то уравнение принимает вид $x^3 - 26x^2 + 156x - 216 = 0$.

$$0 = (x^3 - 216) - (26x^2 - 156) = (x-6)(x^2 + 6x + 36) - 26(x-6)$$
$$= (x-6)(x^2 - 20x + 36) = (x-6)(x-2)(x-18).$$

Уравнение имеет три различных корня 2, 6 и 18, которые образуют геометрическую прогрессию. Следовательно, значение параметра а равно 13.

Ответ: $a = 13$, $x_1 = 2$, $x_2 = 6$, $x_3 = 18$.

Пример 3: «Найдите все значения параметра а, при каждом из которых среди решений уравнения $(a^4 + 2014a^3 + 2014a^2 + 2014a + 2013)x = a^3 + +3a^2 - 6a - 8$ есть неотрицательные числа»[52].

Решение: многочлен $a^4 + 2014a^3 + 2014a^2 + 2014a + 2013$ имеет корень $a = -1$ и раскладывается на множители:

$a^4 + 2014a^3 + 2014a^2 + 2014a + 2013 = (a+1)(a^3 + 2013a^2 + a + +2013)$.

Кубический многочлен в скобках раскладывается на множители непосредственной группировкой:

$a^3 + 2013a^2 + a + 2013 = (a^2 + 1)(a + 2013)$.

Аналогично раскладывается на множители и правая часть уравнения:

$a^3 + 3a^2 - 6a - 8 = (a^3 - 8) + 3a(a-2) = (a-2)(a^2 + 5a + 4) = (a-2)(a+1)(a+4)$.

Таким образом:

$(a+1)(a^2+1)(a+2013)x = (a-2)(a+1)(a+4)$.

Если $a = -1$, то уравнение принимает вид $0x = 0$. Решением такого уравнения является любое число (в частности, неотрицательное). Поэтому значение $a = -1$ подходит для решения.

Если $a = -2013$, то уравнение принимает вид $0x = -2015 * 2012 * 2009$. Такое уравнение не имеет корней. Значит, данное значение а не подходит.

Если $a \neq -1$ и $a \neq -2013$, то уравнение имеет единственное решение

$$x = \frac{(a-2)(a+4)}{(a^2+1)(a+2013)}.$$

Остается найти те значения а, при которых выполнено неравенство $\frac{(a-2)(a+4)}{(a^2+1)(a+2013)} \geq 0$.

Решив неравенство методом интервалов, получим ответ $(-2013; -4] \cup\cup \{-1\} \cup [2; +\infty)$.

Ответ: $(-2013; -4] \cup \{-1\} \cup [2; +\infty)$.

Пример 4: «При каких значениях a, b и c множество действительных корней уравнения $x^5 + 2x^4 + ax^2 + b = cx$ состоит в точности из чисел -1 и 1?» [51].

Решение: число $x = 1$ является корнем уравнения в том и только том случае, если выполнено равенство $3 + a + b = c$.

Аналогично, $x = -1$ является корнем уравнения тогда и только тогда, когда выполнено равенство $1 + a + b = -c$.

Вычитая из равенства $3 + a + b = c$ равенство $1 + a + b = -c$, получим $c = 1$. Тогда любое из этих равенств приводит к соотношению $b = -a - 2$. В итоге уравнение принимает вид $x^5 + 2x^4 + ax^2 - x - a - 2 = 0$. Уравнение имеет корни ± 1, поэтому выделяем множитель $x^2 - 1$:

$$x^5 + 2x^4 + ax^2 - x - a - 2 =$$

$$= (x^5 - x^3) + (x^3 - x) + (2x^4 - 2x^2) + (2x^2 - 2) + (ax^2 - a) =$$

$$= (x^2 - 1)(x^3 + 2x^2 + x + a + 2).$$

Таким образом, уравнение $x^5 + 2x^4 + ax^2 - x - a - 2 = 0$имеет вид $(x^2 - 1)(x^3 + 2x^2 + x + a + 2) = 0$.

Множество корней данного уравнения состоит из чисел ± 1 и корней уравнения $x^3 + 2x^2 + x + a + 2 = 0$. При любом a уравнение имеет хотя бы один корень, поскольку функция $y = x^3 + 2x^2 + x + a + 2$ является непрерывной, принимает отрицательные значения при $x \to -\infty$ и положительные – при $x \to +\infty$, и при некотором x обращается в нуль.

Если $x = 1$ является корнем уравнения $x^3 + 2x^2 + x + a + 2 = 0$, то выполнено $4 + a + 2 = 0 \Leftrightarrow a = -6$.

Это необходимое условие на параметр a; проверим его достаточность. Подставим $a = -6$ в уравнение $x^3 + 2x^2 + x + a + 2 = 0$:

$$x^3 + 2x^2 + x - 4 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 + 3x + 4) = 0.$$

Квадратный трехчлен $x^2 + 3x + 4$ не имеет корней, так что $x = 1$ - единственный корень уравнения $x^3 + 2x^2 + x + a + 2 = 0$. Следовательно, в случае $a = -6$ (и соответственно $b = 4$, $c = 1$) корни уравнения $3 + a + b = = c$ образуют множество $\{1,1\}$.

Если же $x = -1$ является корнем уравнения $x^3 + 2x^2 + x + a + 2 = 0$, то выполнено $a + 2 = 0 \Leftrightarrow a = -2$.

При таком a уравнение $x^3 + 2x^2 + x + a + 2 = 0$ принимает вид $x^3 + x^3 + 2x^2 + x = 0$ и имеет корень $x = 0$ (который соответственно является корнем исходного уравнения. Поэтому значение $a = -2$ не подходит.

Ответ: $a = -6, b = 4, c = 1$.

Согласно примерной рабочей программе по математике, основанной на ФГОС ООО, учащиеся осваивают следующие знания, которые являются фундаментальными для изучения уравнений высших степеней:

– многочлены: степень многочлена, сложение, вычитание, умножение многочленов, формулы сокращённого умножения: квадрат суммы и квадрат разности, формула разности квадратов, разложение многочленов на множители;

– квадратное уравнение, формула корней квадратного уравнения, теорема Виета, решение уравнений, сводящихся к квадратным.

Согласно примерной рабочей программе по математике, основанной на ФГОС СОО, учащиеся изучают основные методы решения целых и дробнорациональных уравнений, многочлены от одной переменной, деление многочлена на многочлен с остатком, теорему Безу, многочлены с целыми коэффициентами, теорему Виета, и др. в таблице 1 представлено содержание учебных пособий для учащихся 9-11 классов [62].

Таблица 1 – Содержание учебных пособий для учащихся 9-11 классов

Авторы	Содержание темы
Н.Я. Виленкин «Алгебра. 9 класс. Учебник для учащихся 9 классов с углубленным изучением математики» [10]	Формула для квадрата суммы нескольких слагаемых
	Деление многочлена на многочлен с остатком
	Симметрические многочлены от двух переменных
	НОД и НОК многочленов
	Теорема Безу
	Схема Горнера
А.Г. Мордкович, П.В. Семенов «Алгебра и начала математического анализа. 11 класс» [44]	Операции над многочленами (сложение, вычитание, перемножение и возведение в степень, деление многочлена на многочлен с остатком)
	Теорема Безу
	Схема Горнера
	Методы разложения многочлена на множители (вынесение общего множителя и использование формул сокращенного умножения)
	Теорема о нахождении целых корней многочлена с целыми коэффициентами
	Теорема о разложении многочлена степени большей или равной 3 в произведение многочленов первой и второй степени
	Многочлены от нескольких переменных
	Методы разложения их на множители
	Однородные и симметрические многочлены
	Теорема о рациональных корнях уравнений высших степеней
	Графический способ решения рациональных уравнений высших степеней
М.И. Шабунин, А.А. Прокофьев «Математика. Алгебра. Начала математического анализа. Профильный уровень: учебни для 10 класса» [75]	Понятие многочлена. Степень многочлена
	Операции сложения, вычитания и умножения многочленов. Теорема о делении многочлена на многочлен с остатком. Правило деления многочленов «углом». Метод неопределенных коэффициентов
	Схема Горнера.
	Теорема Безу и ее следствие
	Теорема о рациональных и целых корнях многочленов с целыми коэффициентами
	Формула Кардано

Продолжение Таблицы 1

Авторы	Содержание темы
М.И. Шабунин, А.А. Прокофьев задачник «Математика. Алгебра. математического анализа. Профильный уровень: задачник для 10-11 классов» [76]	Понятие многочлена, коэффициенты многочлена, свободный член, запись в каноническом виде
	Операции сложения, вычитания и умножения многочленов
	Правило деления многочленов «углом»
	Схема Горнера
	Теорема Безу и ее следствие
	НОД и НОК многочленов
Ю.М. Колягин, М.В. Ткачева «Алгебра и начала математического анализа (базовый и профильный уровни) 10 кл.» [31]	Понятие многочлена
	Основные действия над многочленами (сложения, вычитания и умножения многочленов)
	Правило деления многочленов «углом»
	Схема Горнера
	Теорема Безу и ее следствие
	Симметрические многочлены
	Многочлены от нескольких переменных
Н.Я. Виленкин, О.С. Ивашев-Мусатов, С.И. Шварцбурд «Алгебра и начала математического анализа. 11 класс. Углубленный уровень» [11]	Многочлены от нескольких переменных
	Симметрические многочлены
М. Я. Пратусевич, К. М. Столбов, А. Н. Головин «Алгебра и начала математического анализа, 10 класс» [60]	Понятие одночлена и многочлена
	Основные действия над многочленами (сложения, вычитания и умножения многочленов)
	Метод неопределенных коэффициентов
	Деление многочленов с остатком
	Теорема Безу и ее следствие
	Теорема Виета

Многочлены и уравнения высших степеней тесно связаны, поскольку уравнения высших степеней часто представляются в виде многочленов.

Уравнения высших степеней – это уравнения, в которых старшая степень переменной больше или равна трём.

Определение 1. «Уравнением n-ой степени называется уравнение вида $a_0x^{\mathrm{n}} + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$, где коэффициенты a_0, a_1, a_2, …, a_{n-1}, a_n – любые действительные числа, причем, $a_0 \neq 0$.

Многочлен $a_0x^{\mathrm{n}} + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ называют многочленом n-ой степени. Коэффициенты различают по названиям: a_0 – старший коэффициент; a_n – свободный член» [16].

Определение 2. «Решениями или корнями для данного уравнения являются все значения переменной x, которые обращают это уравнение в верное числовое равенство или, при котором многочлен $a_0 a_0 x^{\text{n}} + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$ обращается в нуль. Такое значение переменной x называют также корнем многочлена. Решить уравнение – это значит найти все его корни или установить, что их нет. Если $a_0 = 1$, то такое уравнение называют приведенным целым рациональным уравнением n-й степени» [16].

Рассмотрим теоретическую и практическую составляющие представленных методов решения уравнений высших степеней:

1) Метод разложения на множители

1.1) Группировка

Пример 1: «Решить уравнение $2x^3 - 3x^2 - 8x + 12 = 0$»[17].

Решение: $x^2(2x-3) - 4(2x-3) = 0$

$$(2x-3)(x^2-4) = 0$$

$$(2x-3)(x-2)(x+2) = 0$$

Ответ: $\frac{3}{2}, \pm 2$.

Пример 2: «Решить уравнение $x^3 - 3x^2 - 6x + 8 = 0$ »[31].

Решение. Осуществим группировку первого слагаемого с четвертым, второе с третьим.

$$(x^3 + 8) - (3x^2 + 6x) = 0$$

$$(x+2)(x^2 - 2x + 4) - 3x(x+2) = 0$$

$$(x+2)(x^2 - 5x + 4) = 0$$

Ответ: -2, 1, 4.

1.2) Формулы сокращенного умножения

Куб суммы: $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Куб разности: $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

Сумма кубов: $a^3 + b^3 = (a+b)(\,a^2 - ab + b^2)$

Разность кубов: $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

Пример3: решить уравнение $x^3 + 3x^2 + 3x - 1 = 0$ [18].

Решение: прибавим к обеим частям уравнения 2, получим:

$$x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 2;$$

$$(x + 1)^3 = 2;$$

$$x + 1 = \sqrt[3]{2};$$

$$x = \sqrt[3]{2} - 1.$$

Ответ: $\sqrt[3]{2} - 1$.

Пример4: «Решить уравнение $(x - 1)^3 + (2x + 3)^3 = 27x^3 + 8$» [44].

Решение: используя формулы сокращенного умножения

$a^3 + b^3 = (a + b)(\, a^2 - ab + b^2)$, представив левую часть уравнения в виде произведения, а правую часть перенести влево. Получим:

$$(x - 1 + 2x + 3)((x - 1)^2 - (x - 1)(2x + 3) + (2x + 3)^2)$$
$$- (3x + 2)(9x^2 - 6x + 4) = 0;$$

$$(3x + 2)(x^2 - 2x + 1 - 2x^2 + 2x - 3x + 3 + 4x^2 + 12x + 9)$$
$$- (3x + 2)(9x^2 - 6x + 4) = 0;$$

$$(3x + 2)(3x^2 + 9x + 13 - 9x^2 + 6x - 4) = 0;$$

$$(3x + 2)(-6x^2 + 15x + 9) = 0;$$

$$1)\ 3x + 2 = 0, x = -\frac{2}{3}.$$

$$2)\ -6x^2 + 15x + 9 = 0,$$

$$D = 225 + 216 = 441,$$

$$x_1 = \frac{-15 + 21}{-12} = -\frac{1}{2},$$

$$x_2 = \frac{-15 - 21}{-12} = 3.$$

Ответ: $x_1 = -\frac{2}{3}, x_2 = -\frac{1}{2}, x_3 = 3$.

1.3) Метод неопределенных коэффициентов

Метод неопределенных коэффициентов применяется в случаях, когда невозможно простыми способами разложить многочлен на множители. Данный метод используется для определения коэффициентов выражений, чей вид заранее известен. Он основан на следующих принципах:

– два многочлена будут тождественно равными, только если их коэффициенты при одинаковых степенях х равны;

– любой многочлен третьей степени может быть разложен на произведение линейных и квадратных множителей.

Пример 5: «Решить уравнение $x^3 - 5x^2 + 7x - 3 = 0$» [75].

Решение: осуществим поиск многочленов $x - a$ и $bx^2 + cx + d$.

$$x^3 - 5x^2 + 7x - 3 = (x-a)(bx^2 + cx + d)$$
$$= bx^3 - abx^2 + cx^2 - acx + dx - ad$$
$$= bx^3 - x^2(ab - c) - x(ac - d) - ad,$$

$$\begin{cases} b = 1, \\ ab - c = 5, \\ ac - d = -7ad = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = 1, \\ a - c = 5 \\ ac - d = -7, \\ ad = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = 1, \\ c = a - 5, \\ d = \dfrac{3}{a} a(a-5) - \dfrac{3}{a} = -7 \end{cases}$$

$$\{b = 1a_1 = 3;\ a_2 = 1c_1 = -2;\ c_2 = -4d_1 = 1;\ d_2 = 3$$

$$x^3 - 5x^2 + 7x - 3 = (x-3)(x^2 - 2x + 1) = 0; x = 3; x = 1 \text{ или}$$

$$x^3 - 5x^2 + 7x - 3 = (x-1)(x^2 - 4x + 3) = 0; x = 3; x = 1$$

Ответ: 1, 3.

2) Деление «уголком»

Если имеется два многочлена f и g, то можно разделить обычным способом, «уголком» тот из них, который имеет большую степень, на другой, и получим неполное частное q и остаток h, который имеет уже меньшую степень, чем делитель. Это можно записать в виде формулы $f = g * q + h$.

Деление с остатком – это общий примем, который сводит изучение пары многочленов f и g к изучению пары многочленов g и h, имеющих меньшие степени. Именно благодаря этому обстоятельству часто оказывается, что свойство пары многочленов могут быть легче изучены, чем свойство одного многочлена.

В качестве примера рассмотрим, как находятся общие корни двух многочленов f и g. «Если α есть корень многочлена f, так и многочлена g, то, полагая в соотношении $f = g * q + hx = \alpha$, мы получим, что и h должно обратиться в ноль, т.е. иметь корнем α. Таким образом, общий корень многочленов f и g является общим корнем многочленов g и h. Наоборот, из того же соотношения $f = g * q + h$ мы видим, что если α есть общий корень многочленов g и h, то он является также корнем f, т.е. общим корнем многочленов f и g. Взятые вместе, эти два утверждения показывают, что общие корни многочленов f и g, с одной стороны, и многочленов g и h, с другой, совпадают. Многочлены g и h имеют меньшие степени, чем f и g.

С g и h можно повторить те же рассуждения, разделив g с остатком на h. Таким образом, мы будем получать пары многочленов все меньших степеней, причем общие корни у всех этих пар многочленов будут одни и те же. В итоге будет достигнута пара многочленов u и v, один из которых, например v, есть ноль. Но в этом случае все корни многочлена u являются общими корнями u и v, так как v, будучи равно нулю, имеет все числа своими корнями.

Таким образом, нахождение общих корней многочленов f и g свелось к нахождению корней многочлена u, имеющего, как правило, гораздо меньшую степень» [78].

Преимуществом метода деления уголком является его простота в применении и эффективность при поиске корней многочленов. Однако стоит отметить, что этот метод не гарантирует нахождение всех корней многочлена, поэтому может потребоваться использование других методов для полного решения уравнений высших степеней.

Пример 6: «Найти общие корни многочленов $x^4 + x^3 + 3x + 1$ и $x^3 +$ $+x + 2$» [84].

Решение: делим первый многочлен с остатком на второй

$x^4 + x^3 + 3x + 1$	$x^3 + x + 2$
$x^4 + x^3 + 2x$	x
$x + 1$	

Остаток есть $x + 1$. Следовательно, общие корни у первоначальной пары многочленов те же, что и у многочленов $x^3 + x + 2$ и $x + 1$.

Делим опять первый многочлен с остатком на второй:

$x^3 + x + 2$	$x + 1$
$x^3 + x^2$	$x^2 - x + 2$
$-x^2 + x + 2$	
$-x^2 - x$	
$2x + 2$	
$2x + 2$	
0	

Остаток есть 0. Следовательно, общие корни те же, что и у многочленов $x + 1$ и 0, то - есть только один общий корень -1.

3) Подбор корня

Если p(x) — многочлен, и x_0 — корень уравнения p(x) = 0, то имеет место разложение на множители: $p(x) = (x - x_0)q(x)$, где q(x) — также некоторый многочлен (степень которого, как легко видеть, на единицу меньше степени многочлена p(x)). Зная корень x_0, мы получаем разложение $p(x) = (x - x_0)q(x)$ путем последовательной группировки слагаемых. Это следствие теоремы Безу, которая гласит, что остаток от деления многочлена p(x) на $x - x_0$ равен $p(x_0)$; значит, если x_0 — корень многочлена p(x), то указанный остаток равен нулю[50].

Для уравнений с целыми коэффициентами имеет место следующее утверждение:

Теорема. Если уравнение $x^{\mathrm{n}} + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x +$ $+ a_n = 0$ с целыми коэффициентами $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$ имеет целочисленный корень x_0, то x_0 является делителем свободного члена a_n[44].

Пример 7: «Решить уравнение $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$» [55].

Решение. Путем подбора выявлен корень x=2.

Воспользуемся формулой $p(x) = (x - x_0)q(x)$, где p(x) – многочлен, и x_0 — корень уравнения p(x) = 0, тогда левая часть уравнения должна иметь вид $(x-2)q(x)$.

$$x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = x^3 - 2x^2 - 7x^2 + 14x + 12x - 24$$
$$= x^2(x-2) - 7x(x-2) + 12(x-2)$$
$$(x-2)(x^2 - 7x + 12) = 0$$

Ответ: 2, 3, 4.

4) Применение теоремы Безу

Теорема: «если x_0 – произвольное число, то при делении многочлена P(x) на двучлен $(x - x_0)$ получается остаток, равный значению многочлена при $x = x_0$, т.е. $R = P(x_0)$» [44].

Разделив с остатком многочлен P(x) на двучлен $x - x_0$, получим равенство $P(x) = Q(x) * (x - x_0) + R,$ где остаток R – число. Подставив в это равенство вместо x значение x_0, получим $P(x_0) = Q(x_0) * (x_0 - x_0) + R$. Отсюда следует, что $R = P(x_0)$.

Из теоремы Безу вытекает следующее важное утверждение.

Теорема: «Число x_0 является корнем многочлена P(x) тогда и только тогда, когда многочлен P(x) делится нацело на двучлен $x - x_0$.

Если x_0 – корень многочлена P(x), то по теореме Безу $R = P(x_0)$=0, т.е. $P(x) = Q(x) * (x - x_0)$, а это значит, что многочлен P(x) делится нацело на двучлен $x - x_0$.

Пусть теперь R=0, т.е.$P(x) = Q(x) * (x - x_0)$, подставляя в равенство $x = x_0$, получаем $P(x_0) = 0$, т.е. x_0 – корень многочлена P(x)» [44].

Пример 8: «Решить уравнение $x^3 - x^2 - 8x + 6 = 0$»[56].

Решение: среди делителей числа 6 ищем корень, т.к. $a_n = a_3 = 1$:

$$\pm 1; \pm 2: \pm 3: \pm 6.$$

Находим x=3. Выполняя деление уголком, разложим данный многочлен на множители. Тогда $x^3 - x^2 - 8x + 6 = (x - 3)(x^2 + 2x - 2) == 0$.

$$x_1 = 3, x_{2,3} = -1 \pm \sqrt{3}$$

Ответ: $3; -1 \pm \sqrt{3}$.

5) Применение формулы Виета для кубического уравнения

Предположим, что кубическое уравнение

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

имеет 3 корня x_1, x_2, x_3. Тогда многочлен в левой части уравнения раскладывается на множители:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3).$$

Раскроем в этом равенстве скобки и приведем подобные слагаемые:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d =$$
$$= ax^3 - a(x_1 + x_2 + x_3)x^2 + a(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - ax_1x_2x_3.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\dfrac{b}{a}, \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \dfrac{c}{a}, \\ x_1x_2x_3 = -\dfrac{d}{a}. \end{cases}$$

Соотношения называют формулами Виета для кубического уравнения [75].

Пример 9: «Решить уравнение $x^3 + x^2 - 4x - 4 = 0$»[75].

Решение:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\dfrac{1}{1} = -1, \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = -\dfrac{4}{1} = -4, \\ x_1x_2x_3 = -\dfrac{4}{1} = -4. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -2, \\ x_2 = 2, \\ x_3 = -1. \end{cases}$$

Ответ: -2; -1; 2.

6) Применение схемы Горнера

Схема Горнера – способ деления многочлена

$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^{n-i} = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ на бином $x - a$.

В ходе решения осуществляется работа с таблицей, первая строка которой содержит коэффициенты заданного многочлена. Первым элементом второй строки будет число а, взятое из бинома $x - a$:

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$

Рассмотрим оформление таблицы по схеме Горнера (таблица 2)[44].

Таблица 2 -Оформление таблицы по схеме Горнера

	a_0	a_1	a_2	a_3	$\ldots$	a_{n-1}	a_n
a							

Вторая строка таблицы заполняется постепенно. Второй элемент этой строки (обозначим его b_0) равен a_0 (таблица 3):

Таблица 3 -Заполнение таблицы по схеме Горнера

	a_0	a_1	a_2	a_3	$\ldots$	a_{n-1}	a_n
a	$b_0 = a_0$						

Следующий элемент второй строки, обозначенный как b_1, находится по формуле: $b_1 = a * b_0 + a_1$(таблица 4):

Таблица 4 -Заполнение таблицы по схеме Горнера

	a_0	a_1	a_2	a_3	$\dots$	a_{n-1}	a_n
a	b_0	$b_1 = a * b_0 + a_1$					

Аналогично вычисляются элементы b_2, b_3и т.д. Общая формула для вычисления b_i, где i ≥ 1, будет следующей:

$$b_i = a * b_{i-1} + a_i$$

Последний элемент вычисляется по формуле$b_n = a * b_{n-1} + a_i$. Итог представлен в таблице 5:

Таблица 5 -Итоговая таблица, заполненная по схеме Горнера

	a_0	a_1	a_2	a_3	$\dots$	a_{n-1}	a_n
a	b_0	b_1	b_2	b_3	$\dots$	b_{n-1}	b_n

После деления исходного многочлена n-ой степени $P_n(x)$на бином $x - a$, получим многочлен, степень которого на единицу меньше исходного, т.е. равна $n - 1$. Последнее число второй строки, т.е. b_n, есть остаток от деления $P_n(x)$ на $x - a$:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$
$$= (x - a)(b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \cdots + b_{n-1}) + b_n$$

Если вспомнить теорему Безу, то можно сформулировать и так: число b_n равно значению многочлена $P_n(x)$при x = a, т.е. $b_n = P_n(a)$.

Если $b_n = 0$, то исходный многочлен делится на бином $x - a$ нацело, т.е. число a является корнем этого многочлена [44].

Пример 10: «Разделить многочлен $5x^4 + 5x^3 + x^2 - 11$ на $x - 1$ по схеме Горнера»[44].

Решение: для сокращения записи обозначим заданный многочлен как $P(x)$, т.е. $P(x) = 5x^4 + 5x^3 + x^2 - 11$. Начнем с созданиятаблицы, которая будет состоять из двух строк. В первой строке мы запишем коэффициенты многочлена $P(x)$, расположенные от большего к меньшему по степени переменной x. Обратим внимание, что данный многочлен не содержит переменную x в первой степени, поэтому коэффициент перед x в первой степени равен нулю:

$$5 * x^4 + 5 * x^3 + 1 * x^2 + 0 * x + (-11)$$

Поскольку выполняем деление на x - 1, поместим число 1 в первую ячейку второй строки. Форма таблицы, с которой предстоит работать, выглядит следующим образом (таблица 6):

Таблица 6 - Форма таблицы для решения задачи

	5	5	1	0	-11
1					

Осуществляем заполнение ячеек следующим образом (таблица 7):

Таблица 7 - Заполнение ячеек таблицы

	5	5	1	0	-11
1	5	$1 * 5 + 5 = 10$	$1 * 10 + 1 = 11$	$1 * 11 + 0 = 11$	$1 * 11 + (-11) = 0$

Итог представлен в таблице 8.

Таблица 8 - Итоговая таблица решения задачи

	5	5	1	0	-11
1	5	10	11	11	0

Вторая строка содержит числа, которые являются коэффициентами многочлена, полученного после деления $P(x)$на $x - 1$. Последнее число во второй строке представляет остаток от деления этого многочлена на х − 1. Остаток равен нулю, что означает, что многочлен делится на х – 1 без остатка.

$$P(x) = (x-1)(5*x^4 + 10*x^3 + 11*x^2 + 11*x) + 0$$
$$= (x-1)(5x^3 + 10x^2 + 11x + 11)$$

Можно описать полученный нами результат следующим образом: многочлен Р(х) имеет нулевое значение при $x = 1$. Поэтому, единица является корнем многочлена Р(х).

Ответ: $5x^4 + 5x^3 + x^2 - 11 = (x-1)(5x^3 + 10x^2 + 11x + 11)$

Пример 11: «Решить уравнение $x^3 - 7x^2 + 14x - 8 = 0$»[18].

Решение: сумма всех коэффициентов многочлена равна 1-7+14-8=0, следовательно $x = 1$ корень уравнения. Значит, по теореме Безу, многочлен $x^3 - 7x^2 + 14x - 8$ делится без остатка на двучлен $x - 1$. Осуществим деление с помощью схемы Горнера (таблица 9).

Таблица 9 - Деление с помощью схемы Горнера

	1	-7	14	-8
1	1	$-7+1*1 = -6$	$14+1*(-6) = 8$	$-8+1*8=0$

$$x^3 - 7x^2 + 14x - 8 = (x-1)(x^2 - 6x + 8) = (x-1)(x-2)(x-4) = 0$$
$$x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 4.$$

Ответ: 1; 2; 4.

7) Применение формулы Кардано

Процесс вывода формулы Кардано состоит из двух этапов.

1 этап. Уравнение вида $a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$, где a_0, a_1, a_2, a_3 - произвольные числа, $a_0 \neq 0$ приводится к виду трехчленного кубического уравнения (отсутствует x^2).

Выполним деление уравнения $a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$ на коэффициент a_0.

$\frac{a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3}{a_0} = x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, где a, b, c–действительные числа.

Пусть $x = y - \frac{a}{3}$.

Тогда $x^3 + ax^2 + bx + c = (y - \frac{a}{3})^3 + a(y - \frac{a}{3})^2 + b\left(y - \frac{a}{3}\right) + c = = y^3 - 3 * y^2 * \frac{a}{3} + 3 * y * \frac{a^2}{q} - \frac{a^3}{27} + a\left(y^2 - 2 * y * \frac{a}{3} + \frac{a^2}{q}\right) + by - \frac{ba}{3} + c == y^3 - y^2a + \frac{1}{3}ya^2 - \frac{a^3}{27} + ay^2 - \frac{2}{3}ya^2 + \frac{a^3}{9} + by - \frac{ba}{3} + c = y^3 - \frac{a^2y}{3} + \frac{2a^3}{27} + +by - \frac{ab}{3} + c = y^3 + \left(b - \frac{a^2}{3}\right)y + c + \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3}$.

Уравнение примет вид: $y^3 + \left(b - \frac{a^2}{3}\right)y + c + \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} = 0$

Обозначения: $p = b - \frac{a^2}{3}; q = c + \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3}$.

Уравнение примет вид: $y^3 + py + q = 0$, где p, q – числа.

2 этап. Приведение уравнения к квадратному виду.

Пусть: $y = z - \frac{p}{3z}$.

Тогда $y^3 + py + q = (\, z - \frac{p}{3z})^3 + p\left(z - \frac{p}{3z}\right) + q =$

$$= z^3 - 3 * z^2 * \frac{p}{3z} + 3 * z * \frac{p^2}{9z^2} - \frac{p^3}{27z^3} + pz - \frac{p^2}{3z} + q =$$

$$= z^3 - pz + \frac{p^2}{3z} - \frac{p^3}{27z^3} + pz - \frac{p^2}{3z} + q = z^3 - \frac{p^3}{27z^3} + q.$$

$$z^3 - \frac{p^3}{27z^3} + q = 0$$

Осуществим умножение на z^3: $z^6 + qz^3 - \frac{p^3}{27} = 0$.

Пусть $z^3 = t$.

Тогда $t^2 + qt - \frac{p^3}{27} = 0$

$$D = q^2 + \frac{4p^3}{27}$$

$$t_{1,2} = \frac{-q \pm \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2}$$

Осуществим обратную замену переменных: $z_1 = \sqrt{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$ и $z_2 = \sqrt{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$.

$$y = z - \frac{p}{3z}.$$

$$y_1 = \sqrt{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} - \frac{p}{3 * \sqrt{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}},$$

$$y_2 = \sqrt{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} - \frac{p}{3 * \sqrt{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}}.$$

$$y_1 = y_2:$$

$$y_1 = \sqrt{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} - \frac{p}{3 * \sqrt{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}} = \cdots = z_1 + z_2$$

$$y_2 = \sqrt{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} - \frac{p}{3 * \sqrt{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}} = \cdots = z_2 + z_1$$

Для решения уравнения $y^3 + py + q = 0$ получили формулу

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}},$$

Обозначим $D = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$, тогда формула будет иметь вид

$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{D}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{D}}$ – формула Кардано.

Корни данного уравнения зависят от знака выражения $D = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$,

Если $D > 0$, то уравнение имеет три различных корня, один из них действительный;

Если $D = 0$, то все три корня действительны, два из них равны;

Если $D < 0$, то все три корня действительные и различные[18].

Пример 12: решить уравнение $x^3 + 4x^2 + 6x + 3 = 0$[18].

Решение.

Приведем уравнение $x^3 + 4x^2 + 6x + 3 = 0$ к виду $x^3 + px + + q = 0$ заменой $x = y - \frac{a}{3}, x = y - \frac{4}{3}$.

$$(y - \frac{4}{3})^3 + 4(y - \frac{4}{3})^2 + 6\left(y - \frac{4}{3}\right) + 3 = 0$$

$$y^3 - 3y^2 * \frac{4}{3} + 3y * \frac{16}{9} - \frac{64}{27} + 4y^2 - 4 * 2y * \frac{4}{3} + 4 * \frac{16}{9} + 6y - 8 + 3 = 0$$

$$y^3 - 4y^2 + \frac{16}{3}y - \frac{64}{27} + 4y^2 - \frac{32}{3}y + \frac{64}{9} + 6y - 5 = 0$$

$$y^3 + \frac{2}{3}y - \frac{7}{27} = 0.$$

Найдем значение выражения:

$D = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = \frac{49}{27^2 * 4} + \frac{8}{27 * 27} = \frac{81}{27^2 * 4} > 0$

Уравнение имеет три различных корня, один из них действительный.

$$y = \sqrt[3]{\frac{7}{54} - \sqrt{\frac{81}{27^2 * 4}}} + \sqrt[3]{\frac{7}{54} + \sqrt{\frac{81}{27^2 * 4}}} =$$

$$= \sqrt[3]{\frac{7}{54} - \frac{9}{54}} + \sqrt[3]{\frac{7}{54} + \frac{9}{54}} = \sqrt[3]{-\frac{1}{27}} + \sqrt[3]{\frac{8}{27}} = -\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

Разделим по схеме Горнера $y^3 + \frac{2}{3}y - \frac{7}{27}$ на $x + \frac{1}{3}$ (таблица 10).

Таблица 10 - Деление по схеме Горнера

	1	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{7}{27}$
$\frac{1}{3}$	1	$0 + \frac{1}{3} * 1 = \frac{1}{3}$	$\frac{2}{3} + \frac{1}{3} * \frac{1}{3} = \frac{7}{9}$	$-\frac{7}{27} + \frac{1}{3} * \frac{7}{9} = 0$

$y^3 + \frac{2}{3}y - \frac{7}{27} = \left(y - \frac{1}{3}\right)\left(y^2 + \frac{1}{3}y + \frac{7}{9}\right) = 0, y = \frac{1}{3}$, второе уравнение действительных корней не умеет. Тогда $y = \frac{1}{3} - \frac{4}{3} = -1$.

Ответ: -1.

Пример 13: «В зависимости от параметра a найти число корней уравнения $x^3 - 3x - a = 0$» [18].

Решение: по формуле Кардано: $p = -3; q = -a$,

$$D = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = \frac{a^2}{4} + \frac{(-3)^3}{27} = \frac{a^2}{4} - 1 = \frac{a^2 - 4}{2};$$

Решив методом интервалов, получаем:

$$D > 0 \text{ при } a < -2, a > 2 - \text{один корень;}$$

$$D < 0 \text{ при } a\epsilon(-2; 2) - 3 \text{ корня}$$

$$D = 0 \text{ при } a = -2, \text{при } a = 2 - \text{три корня, два из них равны.}$$

8. Метод Феррари

Метод Феррари используется для решения уравнений четвертой степени, а также используется в случае, когда уравнение не имеет рациональных корней.

Суть метода Феррари заключается во введении параметра, происходит выделение полных квадратов, левая часть уравнения раскладывается на множители по формуле разности квадратов. Таким образом решение уравнения четвертой степени заменяется решением уравнения третьей степени, где параметр введен в качестве переменной [79].

В общем случае, приведенное уравнение четвертой степени вида $x^4 + +ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ можно решить методом Феррари.

Находится y_0 − любой из корней кубического уравнения $y^3 - by^2 + +(ac - 4d)y - a^2d + 4bd - c^2 = 0$. Затем решаются два квадратных уравнения $x^2 + \frac{a}{2}x + \frac{y_0}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a^2}{4} - b + y_0\right)x^2 + \left(\frac{a}{2}y_0 - c\right)x + \frac{{y_0}^2}{4} - d} = 0$, в которых подкоренное выражение является полным квадратом [36].

Корни этих уравнений являются корнями исходного уравнения четвертой степени.

Пример 14: «Решить уравнение $x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 2x - 5 = 0$»[65].

Решение: представим $4x^3$ как $2 * 2x^2 * 2x$. Введем а - параметр и выделим квадрат трехчлена $x^2 - 2x + a$. Тогда:

$$(x^2 - 2x + a)^2 + 3x^2 - 2ax^2 - a^2 + 4ax - 2x - 5 = 0;$$

$$(x^2 - 2x + a)^2 - (2a - 3)x^2 + 2(2a - 1)x - a^2 - 5 = 0;$$

$$(x^2 - 2x + a)^2 - ((2a - 3)x^2 - 2(2a - 1)x + a^2 + 5) = 0.$$

$D = (2a - 1)^2 - (2a - 3)(a^2 + 5) = 0$– необходимое условие для получения полного квадрата.

Далее: $2a^3 - 7a^2 + 14a - 16 = 0,$ а=2. Подставим а=2 в уравнение, получим:

$$(x^2 - 2x + 2)^2 - (x - 3)^2 = 0;$$

$$(x^2 - 2x + 2 + x - 3)(x^2 - 2x + 2 - x + 3) = 0;$$

$$(x^2 - x - 1)(x^2 - 3x + 5) = 0.$$

Таким образом, решением исходного уравнения будет $x_{1,2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Ответ: $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Пример 15: «Решить уравнение $x^4 + 3x^3 + 3x^2 - x - 6 = 0$»[65].

Решение: составим и решим кубическое уравнение

$y^3 - by^2 + (ac - 4d)y - a^2d + 4bd - c^2 = 0$;

$$y^3 - 3y^2 + 21y - 19 = 0.$$

Одним из корней кубического уравнения является $y_0 = 1$, так как $1^3 -$ $-3 * 1^2 + 21 * 1 - 19 = 0$.

Получаем два квадратных уравнения

$$x^2 + \frac{a}{2}x + \frac{y_0}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a^2}{4} - b + y_0\right)x^2 + (\frac{a}{2}y_0 - c)x + \frac{{y_0}^2}{4} - d} = 0$$

$$x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{25}{4}} = 0$$

$$x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} \pm \sqrt{(\frac{1}{2}x + \frac{5}{2})^2} = 0$$

$x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x + \frac{5}{2} = 0$ или $x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x - \frac{5}{2} = 0$

$x^2 + 2x + 3 = 0$ или $x^2 + x - 2 = 0$

$$x^2 + 2x + 3 = 0$$

$$x_{1,2} = -1 \pm i\sqrt{2}$$

$$x^2 + x - 2 = 0$$

$x_3 = 1, x_4 = -2$.

Ответ: $x_{1,2} = -1 \pm i\sqrt{2}, x_3 = 1, x_4 = -2$.

9. Симметрические или возвратные уравнения

Определение. «F(x) = $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = 0$ называется возвратным, если его коэффициенты, одинаково удаленные от начала и от конца, равны между собой. Иными словами, коэффициенты возвратного многочлена n-й степени удовлетворяют условию $a_k = a_{k-n}(k = 0, 1, \dots, n)$» [12].

Если в уравнении n-четное, то подстановка $x + \frac{1}{\mathrm{x}} = t;\ |t| \geq 1$.

Если в уравнении n-нечетное, то $x = -1$ – всегда корень уравнения.

«Алгебраическое уравнение вида f(x) = 0, где f(x) – возвратный многочлен, называют возвратным уравнением»[38]. Примерами таких уравнений являются:

$$x^3 - 2x^2 - 2x + 1 = 0,$$

$$2x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 3x + 2 = 0.$$

Рассмотрим решение возвратных уравнений третьей и четвертой степеней. Возвратное уравнение третьей степени имеет вид:

$$ax^3 + bx^2 + bx + a = 0.$$

Группируем члены, разложим выражение в левой части уравнения на множители:

$$a(x^3 + 1) + bx(x + 1) = a(x + 1)(x^2 - x + 1) + bx(x + 1)$$
$$= (x + 1)(ax^2 + (b - a)x + a).$$

Отсюда видно, что одним из корней уравнения (1) является $x = -1$. Два других корня получаются путем решения квадратного уравнения

$$ax^2 + (b - a)x + a = 0.$$

Рассмотрим возвратное уравнение четвертой степени:

$$ax^4 + bx^3 + \mathrm{c}x^2 + bx + a = 0.$$

Так как $a \neq 0$, то $x = 0$ не является корнем этого уравнения. Поэтому если разделить обе части этого уравнения на x^2, то получим равносильное уравнение:

$$a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c = 0.$$

Введем новое неизвестное z, положив z = $x + \frac{1}{x}$. Так как z^2 = $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 =$ $= x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}$, то $x^2 + \frac{1}{x^2} = z^2 - 2$. Следовательно, уравнение $a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) +$

$+b\left(x+\frac{1}{x}\right)+c=0$ превращается в квадратное уравнение относительно z: $a(z^2-2)+bz+c=0$.

Решив это уравнение, найдем его корни z_1 и z_2. Чтобы найти x, остается решить совокупность уравнений:

$$\frac{x+\frac{1}{x}=z_1,}{x+\frac{1}{x}=z_2.}$$

Она сводится к совокупности квадратных уравнений [38]:

$$\frac{x^2-z_1x+1=0,}{x^2-z_2x+1=0.}$$

Пример 16: «Решить уравнение$6x^4-35x^3+62x^2-35x+6=0$»[38].

Решение:

Перепишем это уравнение в виде

$$6\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-35\left(x+\frac{1}{x}\right)+62=0$$

И введем новое неизвестное z = $x+\frac{1}{x}$. Получим уравнение:

$$6(z^2-2)-35z+62=0$$

Или $6z^2-35z+50=0$.

Решая его, находим: $z_1=\frac{5}{2}, z_2=\frac{10}{3}$.

Далее надо решить следующие уравнения:

$$\frac{x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2},}{x+\frac{1}{x}=\frac{10}{3}.}$$

Из них получаем:

$$x_1=2, x_2=\frac{1}{2}, x_3=3, x_4=\frac{1}{3}.$$

Ответ: 2; $\frac{1}{2}$; 3; $\frac{1}{3}$.

10. Метод сведения уравнения к квадратному виду

10.1 Биквадратные уравнения, выделение полного квадрата

Метод замены неизвестного применяется для решения уравнений вида

$$ax^4 + bx^2 + c = 0, a \neq 0.$$

Такие уравнения называют биквадратными. Чтобы решить уравнение, заменим $x^2 = z$. Тогда получим квадратное уравнение:

$$az^2 + bz + c = 0.$$

Его корнями являются числа:

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Поэтому корни уравнения получаются путем решения уравнений $x^2 == z_1$ и $x^2 = z_2$. Значит, мы получим четыре корня уравнения:

$x_{1,2,3,4} = \pm\sqrt{\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$.

Пример 17: решить уравнение $x^4 - 25x^2 + 144 = 0$[38].

Решение: пусть $x^2 = z$, тогда

$$z^2 - 25z + 144 = 0.$$

Его корнями являются числа $z_1 = 9, z_2 = 16$. Значит, корни уравнения имеют вид: $x_{1,2} = \pm 3$, $x_{3,4} = \pm 4$.

Пример 18: «Решить уравнение $x^4 + 6x^2 - 10 = 0$»[56].

Решение: решим уравнение методом выделения полного квадрата

$$(x^2)^2 + 2x^2 * 3 + 3^2 - 9 - 10 = 0.$$

$$(x^2 + 3)^2 - \left(\sqrt{19}\right)^2 = 0.$$

$$(x^2 + 3 - \sqrt{19})(x^2 + 3 + \sqrt{19}) = 0.$$

$$x^2 + 3 - \sqrt{19} = 0$$

$x^2 = \sqrt{19} - 3 > 0$, т.к. $\sqrt{19} > 3$

$x = \pm\sqrt{\sqrt{19} - 3}$.

$$x^2 + 3 + \sqrt{19} = 0$$

$$x^2 = -\sqrt{19} - 3 < 0$$

Корней нет.

Ответ: $\pm\sqrt{\sqrt{19} - 3}$.

Также рассмотрим следующий прием в рамках решения биквадратных уравнений:

1) Уравнение $(x+a)^4+(x+b)^4=c$, где a, b, c – действительные числа, сводится к биквадратному, если сделать подстановку

$$t=\frac{x+a+x+b}{2}.$$

Пример 19: решить уравнение $(x-1)^4+(x+3)^4=82$[56].

Пусть $t=\frac{x+a+x+b}{2}$, тогда $x=t-1$.

$$(t-2)^4+(t+2)^2=82.$$

Применяем формулу $(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$, получаем:

$$2t^4+48t^2+2*16=82;$$

$$t^2+24t^2-25=0;$$

$t^2=-25$	$t^2=1$
Решений нет.	$t=\pm 1$
Находим $x=t-1$,	при $t=-1$
При $t=1$	$x=-1-1$
$x=1-1$	$x=-2$
$x=0$	

Ответ: 0, -2.

2) Уравнение вида $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)=l$ сводится к квадратному, если $a+b=c+d$[56].

Пример 20: $(x+1)(x+2)(x+4)(x+5)=10$[56].

$$1+5=2+4;$$

$$[(x+1)(x+5)][(x+2)(x+4)]=10;$$

$$(x^2+6x+5)(x^2+6x+8)=10;$$

Пусть $x^2+6x+5=t$:

$$t(t+3)-10=0;$$

$$t^2+3t-10=0;$$

$$t_1 = -5$$
$$x^2 + 6x + 5 = -5$$
$$x^2 + 6x + 10 = 0$$
$D < 0,$ решений нет.
$$t_2 = 2$$
$$x^2 + 6x + 5 = 2$$
$$x^2 + 6x + 3 = 0$$
$$D = 36 - 4 * 3 = 24$$
$$x_{1,2} = \frac{-6 \pm 2\sqrt{6}}{2} = -3 \pm \sqrt{6}$$

Ответ: $x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{6}$.

3) Уравнение вида $(ax^2 + bx + c)(ax^2 + dx + c) = Ax^2$, где $c \neq 0, A \neq 0$ сводится к квадратному следующим образом[56]:

1. разделим на $x^2 \neq 0$ обе части уравнения: $\left(ax + \frac{c}{x} + b\right)\left(ax + \frac{c}{x} + \right.$ $\left. + d\right) - A = 0$.

2. делаем замену $ax + \frac{c}{x} = t$, получаем квадратное уравнение $(t +$ $+ b)(t + d) - A = 0$, из которого находим t, а затем x.

Пример 21: "Решить уравнение $(x^2 + x + 2)(x^2 + 2x + 2) = 2x^2$, $x \neq 0$»[56].

$$\left(x + \frac{2}{x} + 1\right)\left(x^2 + \frac{2}{x} + 2\right) = 2$$

Пусть $x + \frac{2}{x} + 1 = t$

$$t(t + 1) = 2$$
$$t^2 + t = 0$$
$$t_1 = 1$$
$$x + \frac{2}{x} + 1 = 1$$
$$\frac{x^2 + 2}{x} = 0$$

Решений нет.

$t_2 = -2$; $x + \frac{2}{x} + 1 = -2$; $\frac{x^2 + 3x + 2}{x} = 0$; $x_1 = -1, x_2 = -2$

Ответ: -1, -2.

4) Уравнение вида $(x - a)(x - b)(x - c)(x - d) = Ax^2$, где a, b, c, d и A такие, что $a * b = c * d \neq 0$ сводится к квадратному; перемножив скобки, содержащие a и b, затем перемножить скобки, содержащие c и d, разделить обе части уравнения на $x^2 \neq 0$ и, сделав подстановку, можно свести к квадратному уравнению[56].

Пример 22: "Решить уцравнение$(x + 2)(x + 3)(x + 8)(x + 12) = 4x^2$»[56].

$$3 * 8 = 2 * 12$$

$$[(x + 2)(x + 3)(x + 8)(x + 12)] = 4x^2$$

$$(x^2 + 11x + 24)(x^2 + 14x + 24) = 4x^2, x \neq 0; x^2 \neq 0$$

$$\left(x + \frac{24}{x} + 11\right)\left(x + \frac{24}{x} + 14\right) = 14$$

Пусть $x + \frac{24}{x} + 11 = t$

$$t(t + 3) = 4$$

$$t^2 + 3t - 4 = 0$$

$$t_1 = -4$$

$$x + \frac{24}{x} + 11 = -4$$

$$x + \frac{24}{x} + 15 = 0$$

$$x^2 + 15x + 24 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-15 \pm \sqrt{129}}{2}$$

$$t_2 = 1$$

$$x + \frac{24}{x} + 11 = 1$$

$$x + \frac{24}{x} + 10 = 0$$

$$x^2 + 10x + 24 = 0$$

$$x_1 = -4, x_2 = -6$$

Ответ: $\frac{-15 \pm \sqrt{129}}{2}$, -4, -6.

11. Графический метод

Графический метод решения уравнений высших степеней является одним из подходов к нахождению приближенных значений корней уравнения, основанным на изучении графика функции и ее пересечения с осью абсцисс. Метод полезен в случаях, когда аналитическое решение сложно или невозможно найти.

Пример 23: «Решить уравнение $x^6 + x^2 - 8x + 6 = 0$» [18].

Решение: $x^6 = -x^2 - 8x + 6$

Рассмотрим две функции: $y = x^6$ и $y = -x^2 - 8x + 6$.

Построим в одной системе координат графики функций $y = x^6$ и $y = -x^2 - 8x + 6$, график представлен на рисунке 1.

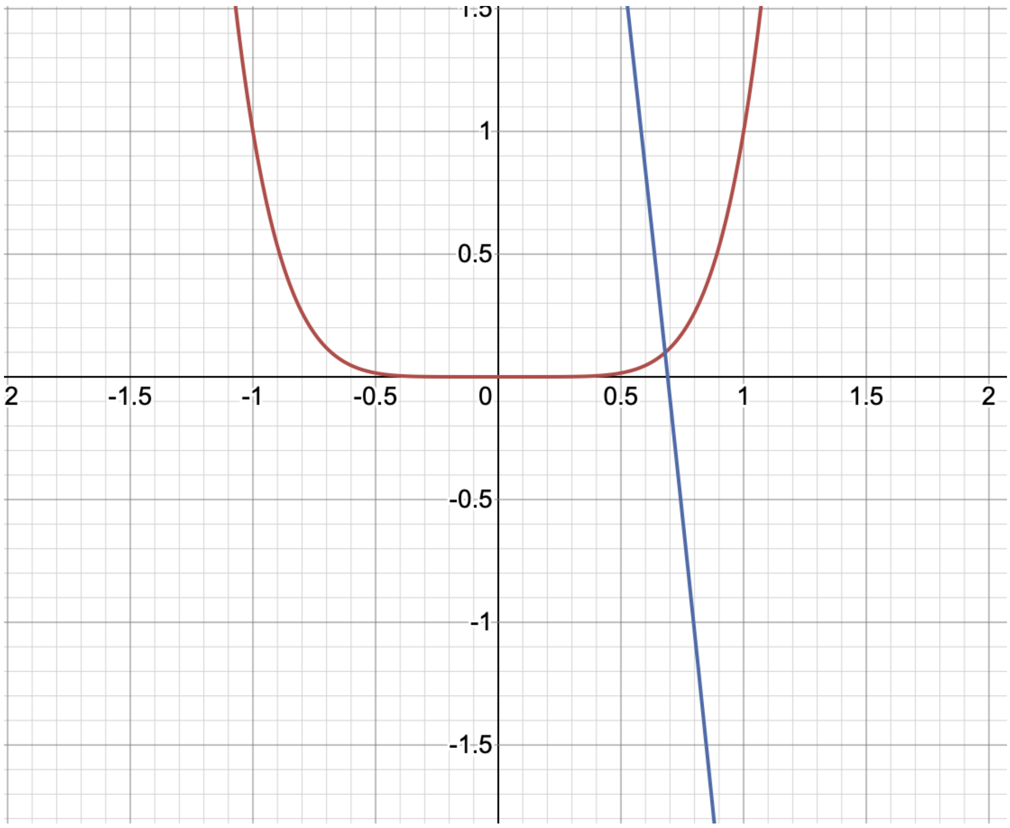

Рисунок 1 – Графики функций $y = x^6$ и $y = -x^2 - 8x + 6$

Судя по чертежу, графики пересекаются в точке (1;1), проверка показывает, что данные координаты удовлетворяют обоим уравнениям, следовательно решением является x=1.

Ответ: 1.

Пример 24: «Решить уравнение $x^3 - x^2 - 1 = 0$»[18].

Решение: запишем уравнение в виде $x^3 = x^2 + 1$. Построим в одной системе координат графики функций $y = x^3$ и $y = x^2 + 1$, график представлен на рисунке 2.

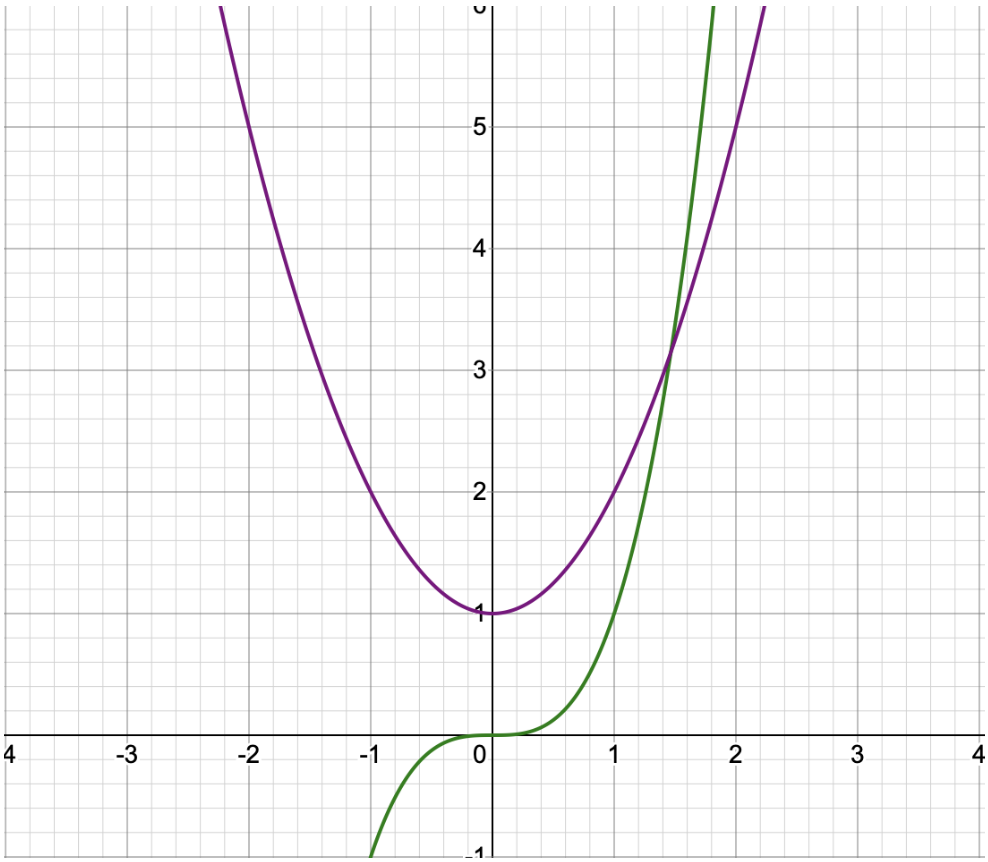

Рисунок 2 – Графики функций $y = x^3$ и $y = x^2 + 1$

Можно сделать вывод, что графики пересекаются в точке с абсциссой ≈ 1,5.

2.2 Элективный курс «Алгебраические уравнения второй и высших степеней»

В ходе проведения исследования был разработан элективный курс «Алгебраические уравнения второй и высших степеней», предназначенный для старшеклассников с целью расширения и углубления математических знаний, а также обучения приемам и методам решения алгебраических уравнений.

Цели:

– систематизация основных формул и методов решения алгебраических уравнений;

– знакомство с новыми приемами и методами решения алгебраических уравнений.

Задачи:

– изучить основные формулы и методы для решения алгебраических уравнений, включая квадратные, кубические и др.;

– подготовить примеры задач различной сложности для практической отработки и применения основных методов решения алгебраических уравнений;

– подготовить теоретический материал для изучения новых приемов и методов решения алгебраических уравнений;

– подготовить задания для демонстрации применения новых приемов и методов решения уравнений.

Для изучения рассматриваемой темы в рамках дополнительного математического образования обоснована к применению технология развивающего обучения решению задач Т.А. Ивановой [24].

Технологический подход основан на личностно-ориентированном обучении, автором представлена концепция гуманитаризации общего математического образования и технология обучения основным дидактическим единицам.

Т.А. Иванова пишет, что «обучение решению математических задач должно включать анализ условия задачи, использование теоретических положений, разработку эвристических приемов, решение стандартных задач, формулирование новых задач, владение методами математической деятельности и решение задач разными способами» [24, с.173-174].

В технологии Т.А. Ивановой под «ключевой задачей понимается самостоятельная дидактическая единица, единица усвоения» [24, с.179]

Рассматриваются способы решения ключевых задач на уровнях «Знание», «Понимание», «Применение» (таксономия Б. Блума) [24, с.302].

Ключевая задача – задача алгоритмического типа: по окончании её решения необходимо проанализировать основную идею решения, сделать выводы, раскрывающие ориентировочную основу действий или суть нового приема, зафиксировать их каким-либо из возможных способов.

Раскроем содержательно-методический аспект данного элективного курса.

Тема 1. Квадратные уравнения

Ключевая задача: «Найти значение выражения $(x_1^3 + x_2^3)$, если x_1 и x_2– корни уравнения $x^2 + 5x - 1 = 0$» [50].

Решение: по теореме Виета $x_1 + x_2 = -5$ и $x_1 x_2 = -1$, отсюда $(x_1^3 + x_2^3) = (x_1 + x_2)((x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2) = -5((-5)^2 + 3 = -140.$

Ответ: –140.

В результате решения ключевой задачи необходимо вспомнить и повторить формулы Виета для квадратных уравнений, а также тождества сокращенного умножения.

Способы (методы и приемы решения) квадратных уравнений

Метод разложения на множители

Задача: «Найти все простые числа, которые являются значениями многочлена $f\ (x)\ =\ 2x^2\ +\ x\ -\ 1$ при некоторых целых x» [14].

Решение. Разложим многочлен на множители:

$f(x) = 2x^2 + x - 1 = (2x - 1)(x + 1)$. Если его значение является простым числом, то одна из двух скобок по модулю равна 1, а другая –модулю этого простого числа. Итого, простыми значениями многочлена могут быть только числа 2 при х = 1 и 5 при х = –2.

Ответ: 2 и 5.

Метод замены переменной

Задача: «Пусть x_1, x_2, x_3, x_4 – различные корни уравнения $x^4 - 2^{121}x^2 + 121 = 0$, идущие в порядке возрастания, т.е. $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$.Найдите значение выражения $-\frac{(11+x_1)(11+x_3)}{(1+x_2)(1+x_4)}$»[46].

Решение: заменой $t = x^2$ уравнение приводится к квадратному:

$$t^2 - 2^{121}t + 121 = 0$$

Дискриминант уравнения положителен, поэтому оно имеет два различных корня t_1 и t_2. Из равенств $t_1 + t_2 = 2^{121}$, $t_1 t_2 = 121$ следует, что оба этих корня положительны. Пусть для определенности $t_1 < t_2$. Тогда $x_1 = -\sqrt{t_2}, x_2 = -\sqrt{t_1}, x_3 = \sqrt{t_1}, x_4 = \sqrt{t_2}$.

Заметим, что $x_1 x_3 = x_2 x_4 = -\sqrt{t_1 t_2} = -11$.

Кроме того, обозначим $k = \sqrt{t_2} - \sqrt{t_1} = x_2 + x_4 = -(x_1 + x_3)$.

Теперь имеем:

$$-\frac{(11 + x_1)(11 + x_3)}{(1 + x_2)(1 + x_4)} = -\frac{121 + 11(x_1 + x_3) + x_1 x_3}{1 + x_2 + x_4 + x_2 x_4} = -\frac{121 - 11k - 11}{1 + k - 11}$$
$$= \frac{11k - 110}{k - 10} = 11.$$

Ответ: 11.

Задача: «Найти сумму квадратов уравнения $(x^2 + 4x)^2 - 2016(x^2 + 4x) + 2017 = 0$»[48].

Решение: сделаем замену $x^2 + 4x + 4 = t$, тогда $x^2 + 4x = t - 4$ и уравнение примет вид:

$$(t - 4)^2 - 2016(t - 4) + 2017 = 0$$
$$t^2 - 2024t + 10097 = 0$$

Дискриминант уравнения больше нуля, следовательно, уравнение имеет два корня.

По теореме Виета: $t_1 + t_2 = 2024,\ t_1 t_2 = 10097$, значит, оба корня квадратного уравнения положительны. Сделаем обратную замену:

$$(x+2)^2 = t_1$$

$$x + 2 = \pm\sqrt{t_1}$$

$$x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{t_1}$$

$$(x+2)^2 = t_2$$

$$x + 2 = \pm\sqrt{t_2}$$

$$x_{3,4} = -2 \pm \sqrt{t_2}$$

$$x_1{}^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2 + x_4{}^2 =$$

$$= (-2+\sqrt{t_1})^2 + (-2-\sqrt{t_1})^2 + (-2+\sqrt{t_2})^2 + (-2-\sqrt{t_2})^2 =$$

$$= 2(4+t_1) + 2(4+t_2) = 16 + 2(t_1+t_2) = 16 + 2 * 2024 =$$

$$= 4064.$$

Ответ: 4064.

Система задач на тему «Квадратные уравнения»

Ключевая задача: «Числа a и b таковы, что каждый из двух квадратных трёхчленов $x^2 + ax + b$ и $x^2 + bx + a$ имеет по два различных корня, а произведение этих трёхчленов имеет ровно три различных корня. Найдите все возможные значения суммы этих трёх корней» [13].

Решение: из условия следует, что трёхчлены $x^2 + ax + b$ и$x^2 + bx +$ $+a$ имеют общий кореньx_0, а также отличные от него корниx_1 и x_2соответственно; в частности, $a \neq b$. Общий корень является также корнем разности этих трёхчленов, то есть $(a - b)(x_0 - 1) = 0$. Таким образом, $x_0 = = 1$. Подставляя этот корень в любой трёхчлен, получаем $1 + a + b = 0$, по теореме Виета $x_0 + x_1 = -a,\ x_0 + x_2 = -b$,откуда $x_0 + x_1 + x_2 = -x_0 - a - b = -(1 + a + b) = 0$.

Ответ: 0.

Задача 1: «Различные числа a, b и c таковы, что уравнения $x^2 + ax + +1 = 0$ и $x^2 + bx + c = 0$ имеют общий действительный корень. Кроме того, общий действительный корень имеют уравнения $x^2 + x + a = 0$ и $x^2 + cx + b = 0$. Найдите сумму $a + b + c$» [13].

Решение: Общий кореньx_1первых двух уравнений удовлетворяет уравнению $(a - b)\, x_1 + (1 - c) = 0$, то есть $x_1 = \frac{a-b}{c-1}$. Аналогично общий кореньx_2последних двух уравнений равен $\frac{c-1}{a-b}$. Поскольку $x_1 x_2 = 1$, то x_2– корень первого уравнения, то есть – общий корень уравнений $x^2 + ax + 1 = = 0$ и $x^2 + x + a = 0$. Отсюда $(a - 1)(x_2 - 1) = 0$. Но при $a = 1$ эти уравнения не имеют действительных корней. Значит, $x_2 = 1$, тогда $a = - 2, b + c = - 1$.

Ответ: -3.

Задача 2: «Выясните, может ли уравнение $x^2 +$ px $+ q = 0$ иметь целые корни, если p и q целые нечетные» [47].

Решение: пусть x_1и x_2 - целые корни уравнения. Тогда c $= a x_1 x_2$, и оно нечетное. Отсюда следует, что каждое из чисел a и x_1 и x_2 - нечетное. Тогда поскольку сумма двух нечетных чисел a $+$ c - четная, а сумма a $+ b + +$c нечетная, то число b - тоже нечетное. Но, с другой стороны, число b должно быть четным, так как $b = -a(x_1 + x_2)$, а сумма двух нечетных чисел $x_1 + x_2$ - четная. Противоречие.

Ответ. Не могут.

Задача 3: «Найдите все натуральные числа x такие, что произведение всех цифр в десятичной записи x равно $x^2 - 10x - 22$»[14].

Решение: во-первых, произведение всех цифр натурального числа неотрицательно, поэтому $x^2 - 10x - 22 \geq 0$, откуда $x \geq \frac{10+\sqrt{188}}{2}$, то есть $x \geq 12$. Во-вторых, если в произведении всех цифр натурального числа заменить все цифры, кроме первой, на десятки, то произведение не уменьшится, но будет не больше самого числа, поэтому произведение всех цифр числа не превосходят самого числа, значит $x^2 - 10x - 22 \leq 0$, откуда $x \leq \frac{11+\sqrt{209}}{2}$, то есть $x \leq 12$. Для $x = 12$ условие, очевидно, выполнено, следовательно, это единственный ответ.

Ответ: $x = 12$.

Тема 2. Кубические уравнения

Ключевая задача: «Решить уравнение $|x^3 - 3x^2 + 5x + 3| = 14$» [53].

Решение: данное уравнение равносильно совокупности уравнений

$$\left[\begin{array}{l} x^3 - 3x^2 + 5x - 11 = 0, \\ x^3 - 3x^2 + 5x + 17 = 0 \end{array}\right.$$

То есть $\left[\begin{array}{l} (x-1)^3 + 2(x-1) - 8 = 0 \\ (x-1)^3 + 2(x-1) + 20 = 0 \end{array}\right.$, которые после подстановки $x = y + 1$ преобразуются в уравнения

$$\left[\begin{array}{l} y^3 + 2y - 8 = 0, \\ y^3 + 2y + 20 = 0. \end{array}\right.$$

В левых частях стоят монотонно возрастающие функции, принимающие как положительные, так и отрицательные значения. Уравнения имеют, следовательно, ровно по одному действительному корню, которые согласно формуле Кардано равны

$$\left[\begin{array}{l} y_1 = \sqrt[3]{4 + \sqrt{\frac{8}{27} + 16}} + \sqrt[3]{4 - \sqrt{\frac{8}{27} + 16}}, \\ y_2 = \sqrt[3]{-10 + \sqrt{\frac{8}{27} + 100}} + \sqrt[3]{-10 - \sqrt{\frac{8}{27} + 100}}. \end{array}\right.$$

Искомая сумма поэтому равна

$$y_1 + 1 + y_2 + 1 = 2 + \sqrt[3]{4 + \sqrt{16\frac{8}{27}}} + \sqrt[3]{4 - \sqrt{16\frac{8}{27}}} +$$

$$+ \sqrt[3]{-10 + \sqrt{100\frac{8}{27}}} + \sqrt[3]{-10 - \sqrt{100\frac{8}{27}}}.$$

Ответ: $2+\sqrt[3]{4+\sqrt{16\frac{8}{27}}}+\sqrt[3]{4-\sqrt{16\frac{8}{27}}}+\sqrt[3]{-10+\sqrt{100\frac{8}{27}}}+$

$+\sqrt[3]{-10-\sqrt{100\frac{8}{27}}}$.

В результате решения ключевой задачи необходимо вспомнить и повторить правила раскрытия модуля, метод замены переменных и формулу Кардано.

Способы (методы и приемы решения) кубических уравнений

Теорема Виета

Задача: «Найти сумму $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$, если известно, что три различных действительных числа x, y и z удовлетворяют условиям:

$x^3+1009=2018x, y^3+1009=2018y, z^3+1009=2018z$» [52].

Решение: Кубическое уравнение $t^3-2018t+1009=0$ имеет три различных действительных корня (так как для функции $f(t)=t^3-2018t+$ $+1009$ выполняется $f(-100)<0$, $f(0)>0$, $f(20)<0$, $f(100)>0$). Эти корни и будут числами x, y и z. Поэтому по теореме Виета:

$$\begin{cases} x+y+z=0, \\ xy+yz+zx=-2018, \\ xyz=-1009. \end{cases}$$

Искомая сумма $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{xy+yz+xz}{xyz}=\frac{-2018}{-1009}=2.$

Ответ: 2.

Замена переменной

Задача: «Решить уравнение $\frac{15}{\mathrm{x}(\sqrt[3]{35-8\mathrm{x}^3})}=2\mathrm{x}+\sqrt[3]{35-8\mathrm{x}^3}$. В ответ запишите сумму всех полученных решений» [48].

Решение: выполним замену $\mathrm{u}=\sqrt[3]{35-8\mathrm{x}^3}$, $8\mathrm{x}^3=35-\mathrm{u}^3$, тогда

$$\begin{cases} \frac{15}{\mathrm{xu}}=2\mathrm{x}+\mathrm{u}, \\ 8\mathrm{x}^3+\mathrm{u}^3=35 \end{cases}$$

Выполним замену $\mathrm{t}=2\mathrm{xu}, \mathrm{v}=2\mathrm{x}+\mathrm{u}$, тогда

$$\begin{cases} \dfrac{30}{t} = v, \\ v(v^2 - 3t) = 35 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t = 6, \\ v = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} xu = 3, \\ 2x + u = 5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 5x + 3 = 0 \Rightarrow x_1 + x_2 = 2{,}5.$$

Ответ: 2,5.

Формула Кардано

Задача: «Найдите сумму всех действительных корней уравнения $x^3 +$ $+6x^2 + 12x + 35 = 0$»[54].

Решение: $a = 6, b = 12, c = 35$.

$$x = y - \frac{a}{3} = y - \frac{6}{3} = y - 2.$$

$$y^3 + \left(b - \frac{a^2}{3}\right)y + c + \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} = 0$$

$$y^3 + \left(12 - \frac{6^2}{3}\right)y + 35 + \frac{2 * 6^3}{27} - \frac{6 * 12}{3} = 0$$

$$y^3 + 35 + 16 - 24 = 0$$

$$y^3 + 35 + 16 - 24 = 0$$

$$y^3 + 27 = 0$$

$$y = -3$$

$$x = -3 - 2 = -5.$$

Ответ: -5.

Метод группировки

Задача: «Решите уравнение $\frac{x^3+9x^2+18x-2(x^2+9x)-36}{\sqrt{x+3}} = 0$»[51].

Решение: $x^3 + 9x^2 + 18x - 2(x^2 + 9x) - 36 = x(x^2 + 9x) - -2(x^2 +$ $9x) + 18x - 36 = (x^2 + 9x)(x - 2) + 18(x - 2) = (x - 2)(x^2 + +9x +$ $18) = (x - 2)(x + 3)(x + 6)$.

Таким образом, заданное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases}(x-2)(x+3)(x+6)=0,\\ x+3>0,\end{cases}$$

Решением которой служит $x = 2$.

Ответ: 2.

Система задач на тему «Кубические уравнения»

Ключевая задача: «Решите уравнение $2x^3 + 24x = 3 - 12x^2$» [51].

Решим исходное выражение:

$$2x^3 + 24x = 3 - 12x^2 \Leftrightarrow 2(x^3 + 6x^2 + 12x + 8) - 16 - 3 = 0 \Leftrightarrow (x+2)^3 = \frac{19}{2} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{19}{2}} - 2.$$

Ответ: $\sqrt[3]{\frac{19}{2}} - 2 \approx 0{,}12$.

Задача 1: «Решить уравнение $2021\text{x}^3 + 2022\text{x}^2 + 2022\text{x} + 674 = 0$» [13].

Решение: данное уравнение равносильно уравнению $1347\text{x}^3 + {}$ $+674(\text{x}+1)^3 = 0$, из которого и находится единственный действительный корень.

Ответ: $\text{x} = -\frac{\sqrt[3]{674}}{\sqrt[3]{1347}+\sqrt[3]{674}}$.

Задача 2: «Число p – корень кубического уравнения $x^3 + x - 3 = 0$.Придумайте кубическое уравнение с целыми коэффициентами, корнем которого будет числоp^2» [13].

Решение: из условия следует, что $p^3 + p = 3$.Значит, $(p^3 + p)^2 = 9 \Leftrightarrow p^6 + 2p^4 + p^2 - 9 = 0$.Таким образом,$p^2$ является корнем уравнения $x^3 + 2x^2 + x - 9 = 0$.

Ответ: $x^3 + 2x^2 + \text{x} - 9 = 0$.

Задача 3: «Докажите, что многочлен $P(t) = t^3 - 2t^2 - 10t - 3$ имеет три различных действительных корня. Найдите многочлен $R(t)$ третьей степени с корнями $u = x^2y^2z, v = x^2z^2y, w = y^2z^2x$, где x, y, z– различные корни многочлена $P(t)$» [48].

Решение: поскольку $P(-3) = -18 < 0$, а $P(-1) = 4 > 0$,то по теореме о промежуточном значении между – 3и– 1есть корень этого многочлена. $P(-1) = 4 > 0, P\,(0) = -3 < 0$, значит между − 1 и 0 у многочлена есть корень. $P(0) = -3 < 0, P(5) = 22 > 0$, значит между 0 и 5 у многочлена есть корень. Получили, что у многочлена есть три различных (потому что каждый находится в своем интервале) действительных корня. Из теоремы Виета для данного многочлена имеем:

$$x + y + z = 2, xy + yz + zx = -10, xyz = 3$$

Тогда можно через теорему Виета для $R(t)$ найти его коэффициенты:

$$x + y + z = xyz(xy + yz + zx) = 3 * (-10) = -30$$

$$uv + vw + wu = x^3y^3z^3(x + y + z) = 3^3 * 2 = 54$$

$$uvw = x^5y^5z^5 = 3^5 = 243$$

Отсюда $R(t) = t^3 + 30t^2 + 54t - 243$.

Ответ: $R(t) = t^3 + 30t^2 + 54t - 243$.

Тема 3. Решение уравнений высших степеней

Ключевая задача: «Решить уравнение $\mathrm{x}^{10} - 3\mathrm{x}^4 + \mathrm{x}^2 + 1 = 0$»[49].

Решение: выполним замену $\mathrm{x}^2 = \mathrm{t}, \mathrm{t} \geq 0$, тогда $\mathrm{t}^5 - 3\mathrm{t}^2 + \mathrm{t} + 1 = 0$.

Заметим, что t = 1 является корнем ($1^5 - 3 * 1^2 + 1 + 1 = 0, 1 - 3 + +1 + 1 = 0, 0 = 0$). Разделим левую часть на (t –1), получим уравнение $(\mathrm{t} - 1)^2(\mathrm{t}^3 + 2\mathrm{t}^2 + 3\mathrm{y} + 1) = 0$. Многочлен $\mathrm{t}^3 + 2\mathrm{t}^2 + 3\mathrm{y} + 1$ имеет только положительные коэффициенты и поэтому у него нет и неотрицательных корней. Таким образом, t = 1 – единственный корень (красности 2) и, возвращаясь к переменной x, получаем два корня $\mathrm{x} = \pm 1$.

Ответ: $\mathrm{x} = \pm 1$.

В результате решения ключевой задачи необходимо вспомнить и повторить метод замены переменной, прием подбора корня.

Способы (методы и приемы решения) уравнений высших степеней

Замена переменной

Задача: «Решить уравнение $(\mathrm{x} + 2)^4 + \mathrm{x}^4 = 82$»[13].

Решение: пусть $y = x + 1$, тогда

$$(y+1)^4 + (y-1)^4 = 82 \Leftrightarrow y^4 + 6y^2 - 40 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y^2 = -10, \\ y^2 = 4. \end{array}\right.$$

Вернемся к исходной переменной:

$$\left[\begin{array}{l} (x+1)^2 = -10, \\ (x+1)^2 = 4. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -3, \\ x = 1. \end{array}\right.$$

Ответ: -3, 1.

Задача: «Решите уравнение $(x-2020)^2 + (x-2020)^{10} = 2(x-2020)^{12}$»[13].

Решение: пусть $t = x - 2020$, тогда исходное уравнение перепишется в виде $t^2 + t^{10} = 2t^{12}$. Следовательно, $t = 0$ или $t = \pm 1$. Покажем, что других корней нет:

1) Если предположить, что $t^2 > 1$, то $t^{10} > t^2$ и $t^{12} > t^2$.
2) Если предположить, что $t^2 < 1$, то $t^{10} < t^2$ и $t^{12} < t^2$.

В обоих случаях уравнение не станет тождеством. Если $t = 0$, то $x = 2020$; Если $t = \pm 1$, то $x = 2019$ или $x = 2021$.

Ответ: 2019, 2020, 2021.

Теорема Виета

Задача: «Даны различные вещественные числа a_1, a_2, a_3 и b. Оказалось, что уравнение $(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3) = b$ имеет три различных вещественных корня c_1, c_2, c_3. Найдите корни уравнения $(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3) = b$»[13].

Решение 1: так как многочлен $(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3) - b$ имеет старший коэффициент 1 и корни c_1, c_2, c_3, то $(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3) - b == (x-c_1)(x-c_2)(x-c_3)$. Подставим $-x$ в последнее равенство вместо x, получим $(-x-a_1)(-x-a_2)(-x-a_3) - b = (-x-c_1)(-x-c_2)(-x-c_3)$, что равносильно $(x+a_1)(x+a_2)(x+a_3) + b = (x+c_1)(x+c_2)(x+c_3)$. Из полученного равенства получаем, то тремя корнями уравнения $b = (x+c_1)(x+c_2)(x+c_3)$ являются числа $-a_1$, $-a_2$, $-a_3$.

Решение 2: по теореме Виета выполняются следующие соотношения:

$c_1 + c_2 + c_3 = a_1 + a_2 + a_3,$

$c_1c_2 + c_2c_3 + c_3c_1 = a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_1,$

$c_1c_2c_3 = a_1a_2a_3 - b.$

Эти же равенства можно переписать следующим образом:

$$(-a_1) + (-a_2) + (-a_3) = (-c_1) + (-c_2) + (-c_3)$$

$$a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_1 = c_1c_2 + c_2c_3 + c_3c_1$$

$$-a_1a_2a_3 = -c_1c_2c_3 - b$$

Из чего следует, что числа $-a_1$, $-a_2$, $-a_3$ являются корнями уравнение $(x - a_1)(x - a_2)(x - a_3) - b = 0.$

Система задач на тему «Уравнения высших степеней»

Ключевая задача: «Решить уравнение $x^{10} + x^6 + 2 = 4x^4$»[53].

Решение: приведем несколько способов решения данной задачи.

Способ 1. По неравенству между средним арифметическим и средним геометрическим для четырех чисел,

$\frac{x^{10}+x^6+1+1}{4} \geq \sqrt[4]{x^{10} * x^6 * 1 * 1} = x^4.$

По условию, имеем равенство. Оно имеет место только в случае равенства всех слагаемых: $x^{10} = x^6 = 1$. Отсюда ответ.

Ответ: ± 1.

Способ 2. Воспользуемся дважды неравенством $a^2 + b^2 \geq 2ab$:

$$x^{10} + x^6 \geq 2x^8,$$

$$2(x^8 + 1) \geq 2 * 2x^4.$$

По условию, имеем равенство. Поскольку $a^2 + b^2 = 2ab \Leftrightarrow a = b$, получаем $x^{10} = x^6 = 1$. Отсюда ответ.

Способ 3. Замена $t = x^2$. Получаем уравнение

$$t^5 + t^3 - 4t^2 + 2 = 0.$$

Его можно представить в виде

$$(t - 1)^2(t^3 + 2t^2 + 4t + 2) = 0.$$

Единственное неотрицательное решение $t = 1$. Отсюда $x = \pm 1$.

Задача 1: «Решить уравнение $(x^4+x+1)(\sqrt[3]{80}-\sqrt[3]{0,01}=2(\sqrt[3]{5,12}+$ $+\sqrt[3]{0,03375})$» [49].

Решение: умножим обе части уравнения на $\sqrt[3]{100}$, получим $(x^4+x+$ $+1)(\sqrt[3]{8000}-\sqrt[3]{1}=2(\sqrt[3]{512}+\sqrt[3]{3,375})$;

$$19*\ (x^4+x+1)=2(8+1,5)$$

$$(x^4+x+1)=1$$

$$x(x^3+1)=0$$

Ответ: $x_1=0, x_2=-1$.

Задача 2: «Решить уравнение $(x^3+x^2+x+1)(x^{11}+x^{10}+\cdots+x+$ $+1)=(x^7+x^6+\cdots+x+1)^2$» [48].

Решение: домножим обе части уравнения на $(x-1)^2$, тогда уравнение примет вид:

$$(x^4-1)(x^{12}-1)=(x^8-1)^2,$$

Раскроем скобки, решим уравнение:

$$x^{16}-x^{12}-x^4+1=x^{16}-2x^8+1 \Leftrightarrow x^{12}-2x^8+x^4=0$$

$$\Leftrightarrow x^4(x^8-2x^4+1)=0 \Leftrightarrow x^4(x^4-1)^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0, \\ x=1, \\ x=-1. \end{array}\right.$$

Корень $x=1$ мог возникнуть из-за домножения на $(x-1)^2$, проверкой убеждаемся, что $x=1$ не является корнем исходного уравнения.

Ответ: -1, 0.

Задача 3:«Доказать, что уравнение $x^4-4x^3+12x^2-24x=0$ не имеет решений»[50].

Решение: преобразуем исходное выражение:

$$x^4-4x^3+12x^2-24x=x^4-4x^3+4x^2+8x^2-24x+24$$
$$=(x^2-2x)^2+8(x^2-3x+3)$$
$$=(x^2-2x)^2+8((x-1,5)^2+0,75)$$
$$=(x^2-2x)^2+8(x-1,5)^2+6\neq 0.$$

2.3 Педагогический эксперимент и его результаты

Цель педагогического эксперимента – определение эффективности разработанной методики подготовки старшеклассников к решению олимпиадных задач по математике.

Опытно-экспериментальную базу исследования составила НИЛ «Школа математического развития и образования -5+» Тольяттинского государственного университета.

В рамках констатирующего этапа эксперимента осуществлена оценка уровня знаний учащихся в области алгебраических уравнений, включая их непосредственное знание понятия алгебраического уравнения, понимание квадратных, кубических и других уравнений более высоких степеней, а также знание методов решения таких уравнений. Осуществлен анализ уровня понимания и применения различных методов для решения уравнений и способность учащихся применять их к представленным задачам.

На занятиях в математической школе при ТГУ с учащимися 8-9 и 10-х классов осуществлен разбор статей из журнала «Квант» по теме «Алгебраические уравнения в олимпиадных задачах по математике».

Задача олимпиады «Покори Воробьёвы горы!» в журнале Квант [8].

Задача: «Найти сумму $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$, если известно, что три различных действительных числа x, y и z удовлетворяют условиям:

$x^3+1009=2018x, y^3+1009=2018y, z^3+1009=2018z$» [8].

Решение: Кубическое уравнение $t^3-2018t+1009=0$ имеет три различных действительных корня (так как для функции $f(t)=t^3-2018t+$ $+1009$ выполняется $f(-100)<0$, $f(0)>0$, $f(20)<0$, $f(100)>0$). Эти корни и будут числами x, y и z. Поэтому по теореме Виета:

$$\begin{cases} x+y+z=0, \\ xy+yz+zx=-2018, \\ xyz=-1009. \end{cases}$$

Искомая сумма $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{xy+yz+xz}{xyz}=\frac{-2018}{-1009}=2$»

Ответ: 2.

В статье Л. Д. Курляндчик и С. В. Фомин «Теорема Виета и вспомогательный многочлен» пишут о том, что «многие задачи, так или иначе сводятся к нахождению корней алгебраических уравнений, но авторы рассматривают метод от обратного, когда для решения задачи осуществляется построение многочлена, корнями которого являются данные, известные числа» [37].

Задача: «Числа x, y, z удовлетворяют соотношениям:

$$x+y+z=a, \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{a}.$$

Докажите, что хотя бы одно из этих чисел равно а» [37].

Решение: для многочлена третьей степени с корнями x, y, z $P(t)=(t-x)(t-y)(t-z)=t^3+pt^2+qt+r$ справедливо следующее:

$$p=-x-y-z$$

$$q=xy+yz+zx$$

$$r=-xyz$$

Применяя формулы для решения, получим:

$$p=-a$$

$$q=\frac{xyz}{a}=-\frac{r}{a}$$

Поэтому $P(t)=t^3=at^2-\frac{r}{a}t+r=(t-a)(t^2-\frac{r}{a)}$.

Следовательно число а является корнем многочлена $P(t)$ и значит, совпадает с одним из числе x, y, z».

Задача: «Сумма трех целых чисел u, v, w равна нулю. Докажите, что число $2u^4+2v^4+2w^4$ – квадрат целого числа» [37].

Решение: пусть $P(t)=t^3+pt^2+qt+r$ – многочлен, корнями которого являются числа u, v, w. В силу теоремы Виета, $p=-(u+v+\ w)=$ $=0$. Имеем:

$$u^3 + qu + r = 0,$$
$$v^3 + qv + r = 0,$$
$$w^3 + qw + r = 0,$$

Чтобы получить выражение, фигурирующее в условии, домножим эти уравнения на $2u, 2v, 2w$ соответственно и сложим:

$2u^4 + 2v^4 + 2w^4 + 2q(u^2 + v^2 + w^2) = 0$ (мы использовали то, что $u + v + w = 0$). Но $u^2 + v^2 + w^2 = (u + v + w)^2 - 2q$, поэтому $2u^4 +$ $+2v^4 + 2w^4 = (2q)^2$».

Авторы отмечают, что нередко сходным образом решаются задачи, включаемые в олимпиады.

В статье А. Егорова «Алгебраические уравнения и неравенства. Задачи» [6] опубликованы подборка задач, содержащая алгебраические уравнения и неравенства. Задачи взяты из вариантов вступительных экзаменов в различные вузы, пособий для поступающих, а также составлены автором подборки. Например:

$$x^2 + 1993x + 1992 = 0;$$
$$1992x^2 - 1993x + 1 = 0;$$
$$(x^2 - 2x)^2 = 3(x - 1)^2 - 13.$$

С целью проверки знаний учащихся и организации контроля усвоения материала предложен следующий вариант самостоятельной работы.

Для оценки правильности выполненных заданий самостоятельной работы выбраны критерии для оценивания олимпиадных заданий, сформулированные А.В. Фарковым [71, с.13]. Критерии представлены в Таблице 11.

Задание 1.«а) Дано квадратное уравнение $x^2 - 9x - 10 = 0$. Пусть а - его наименьший корень. Найдите $a^4 - 909a$.

б) Для квадратного уравнения $x^2 - 9x + 10 = 0$, у которого b - наименьший корень, найдите $b^4 - 549b$» [49].

Таблица 11 - Критерии оценивания заданий

7 баллов	«Приведено полностью обоснованное решение, получены верные ответы»
6 баллов	«Приведено верное решение с недочетами»
4-5 баллов	«Решение в основных чертах верно, но неполно или содержит непринципиальные ошибки»
1-3 балла	«Решение в целом неверно, но содержит более или менее существенное продвижение в верном направлении»
0 баллов	«Решение неверно или отсутствует»

Решение: решим задачу в общем виде.

Пусть $x^2 - cx + d = 0$ — квадратное уравнение, а — его корень.

Тогда $a^4 = (ca - d)^2 = c^2a^2 - 2acd + d^2 = c^2(ca - d) - 2acd + d^2 =$ $= a(c^3 - 2cd) + d^2 - c^2d$. Значит, $a^4 - (c^3 - 2cd)a = d^2 - c^2d$.

При $c = 9, d = -10$ получим $a^4 - 909a = 910$, а при $= 9, d = 10$ имеем $b^4 - 549b = -710$.

Ответ: a) 910, b) -710.

Задание 2.«Решить уравнение $x^3 + 4x^2 + 6x + 3 = 0$» [13].

Решение: приведем уравнение $x^3 + 4x^2 + 6x + 3 = 0$ к виду $x^3 + px +$ $+q = 0$ заменой $x = y - \frac{a}{3}, x = y - \frac{4}{3}$.

$$(y - \frac{4}{3})^3 + 4(y - \frac{4}{3})^2 + 6\left(y - \frac{4}{3}\right) + 3 = 0$$

$$y^3 - 3y^2 * \frac{4}{3} + 3y * \frac{16}{9} - \frac{64}{27} + 4y^2 - 4 * 2y * \frac{4}{3} + 4 * \frac{16}{9} + 6y - 8 + 3 = 0$$

$$y^3 - 4y^2 + \frac{16}{3}y - \frac{64}{27} + 4y^2 - \frac{32}{3}y + \frac{64}{9} + 6y - 5 = 0$$

$$y^3 + \frac{2}{3}y - \frac{7}{27} = 0,$$

Найдем значение выражения $D = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = \frac{49}{27^2 * 4} + \frac{8}{27 * 27} = \frac{81}{27^2 * 4} > 0$

Уравнение имеет три различных корня, один из них действительный.

$$y=\sqrt[3]{\frac{7}{54}-\sqrt{\frac{81}{27^2*4}}}+\sqrt[3]{\frac{7}{54}+\sqrt{\frac{81}{27^2*4}}}=$$

$$=\sqrt[3]{\frac{7}{54}-\frac{9}{54}}+\sqrt[3]{\frac{7}{54}+\frac{9}{54}}=\sqrt[3]{-\frac{1}{27}}+\sqrt[3]{\frac{8}{27}}=-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$$

Разделим по схеме Горнера $y^3+\frac{2}{3}y-\frac{7}{27}$ на $x+\frac{1}{3}$ (таблица 12).

Таблица 12 - Деление по схеме Горнера

	1	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{7}{27}$
$\frac{1}{3}$	1	$0+\frac{1}{3}*1=\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}+\frac{1}{3}*\frac{1}{3}=\frac{7}{9}$	$-\frac{7}{27}+\frac{1}{3}*\frac{7}{9}=0$

$y^3+\frac{2}{3}y-\frac{7}{27}=\left(y-\frac{1}{3}\right)\left(y^2+\frac{1}{3}y+\frac{7}{9}\right)=0, y=\frac{1}{3}$, второе уравнение действительных корней не умеет. Тогда $y=\frac{1}{3}-\frac{4}{3}=-1$.

Ответ: -1.

Задание 3.«Вычислить сумму квадратов корней уравнения $3x^4+$ $+5x^3-2x^2+8x+1=0$» [50].

Решение:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=-\frac{5}{3}, \\ x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4=-\frac{2}{3}, \\ x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+x_1x_3x_4+x_2x_3x_4=-\frac{8}{3}, \\ x_1x_2x_3x_4=\frac{1}{3}. \end{cases}$$

Тождество: $(x_1+x_2+x_3+x_4)^2={x_1}^2+{x_2}^2+{x_3}^2+{x_4}^2+2(x_1x_2+$ $+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4)$

$$(-\frac{5}{3})^2={x_1}^2+{x_2}^2+{x_3}^2+{x_4}^2+2(-\frac{2}{3})$$

$$x_1{}^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2 + x_4{}^2 = \frac{37}{9}$$

Ответ: $\frac{37}{9}$.

Задание 4.«Решить уравнение $x^6 - 2022x^2 + \sqrt{2021} = 0$» [50].

Решение: $x^6 - 2022x^2 + \sqrt{2021} = 0 \Leftrightarrow x^2(x^4 - 2021) - (x^2 - -\sqrt{2021}) = 0 \Leftrightarrow x^2(x^2 - \sqrt{2021})(x^2 + \sqrt{2021}) - (x^2 - \sqrt{2021}) = 0 \Leftrightarrow (x^2 - \sqrt{2021})(x^4 + x^2\sqrt{2021} - 1) = 0 \Leftrightarrow$

$$\left[\begin{array}{l} x^2 - \sqrt{2021} = 0, \\ x^4 + x^2\sqrt{2021} - 1 = 0. \end{array}\right.$$

Первое уравнение совокупности имеет два решения $x_{1,2} = \pm\sqrt[4]{2021}$. Введем замену во втором уравнении $t = x^2$ $(t \geq 0)$, тогда

$$t^2 - t\sqrt{2021} - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{-\sqrt{2021} + 45}{2}, \\ t = \dfrac{-\sqrt{2021} - 45}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow t = \frac{-\sqrt{2021} + 45}{2}.$$

Вернемся к исходной переменной и получим $x_{3,4} = \pm\sqrt{\frac{-\sqrt{2021}+45}{2}}$.

Ответ: $\pm\sqrt[4]{2021}, \pm\sqrt{\frac{-\sqrt{2021}+45}{2}}$.

Задание 5.«Решить уравнение $x^2 + \frac{9x^2}{x^2+6x+9} = 7$» [48].

В ответ записать значение выражения $x_0^3 - 4x_0$ где x_0 — наибольший корень уравнения. Если полученный результат не является целым числом, округлить его до трёх значащих цифр по правилам округления.

Решение. Заметим, что левая часть уравнения представляем из себя сумму двух квадратов, добавим и отнимем удвоенное произведение и свернем слагаемые по формуле квадрат разности:

$$x^2 + \left(\frac{3x}{x+3}\right)^2 = 7 \Leftrightarrow (x)^2 + \left(\frac{3x}{x+3}\right)^2 + 2x * \frac{3x}{x+3} - 2x * \frac{3x}{x+3} = 7$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{3x}{x+3}\right)^2 + 2x * \frac{3x}{x+3} = 7 \Leftrightarrow (\frac{x^2}{x+3})^2 + \frac{6x^2}{x+3} - 7 = 0,$$

Делаем замену $\frac{x^2}{x+3} = t$, решаем полученное уравнение, получаем, что $\frac{x^2}{x+3} = -7$ или $\frac{x^2}{x+3} = 1$. Первое уравнение корней не имеет, корни второго $x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$. Наибольший корень $x_0 = \frac{1+\sqrt{13}}{2} \Rightarrow x_0^3 - 4x_0 = 3$.

Ответ: 3.

Поисковый этап эксперимента был направлен на проектирование системы олимпиадных задач на основе применения технологии развивающего обучения решению задач Т.А. Ивановой и её апробации в математической школе.

После решения ключевой задачи и рассмотрения решений задач разными методами, обучающимся предлагаются олимпиадные задачи на разных уровнях: «Знание», «Понимание», «Применение», т.е. система задач проектируется с учетом принципа постепенного возрастания степени самостоятельности обучающихся и нарастания трудности задач.

Итак, для проектирования системы олимпиадных задач по теме «Алгебраические уравнения второй и высшей степеней» в рамках рассматриваемой технологии обучения следует:

– определить ключевую задачу по каждой теме;

– выделить способы (приемы и методы решения) каждой ключевой задачи;

– подобрать соответствующие задачи на различных уровнях усвоения.

Результаты поискового этапа эксперимента свидетельствуют о том, что предложенная подборка олимпиадных задач, содержащих уравнения второй и высшей степеней, вызвала интерес у обучающихся, позволила им познакомиться с различными методами решения таких уравнений.

Кроме того, результаты показали, что за счет того, что содержательный компонент элективного курса обеспечивает преемственность между базовым курсом и олимпиадными задачами. Эксперимент также показал, что решение нестандартных алгебраических уравнений различными методами в рамках программы элективного курса позволяет обучающимся преодолеть страх перед олимпиадными задачами, формирует у них волю, настойчивость, трудолюбие, навыки тождественных преобразований и вычислительную культуру.

Выводы по второй главе

Проведен анализ задач олимпиад по теме «Алгебраические уравнения второй и высшей степеней» за последние годы, изучены различные методы и подходы к их решению.

Изучены приемы и методы решения уравнений высших степеней: представлены примеры решения уравнений высших степеней с описанием применяемых методов (применение теоремы Безу, применение формулы Виета для кубического уравнения, схемы Горнера, формула Кардано, и др.).

Представлена программа элективного курса «Алгебраические уравнения второй и высших степеней» и приведены образцы ключевых задач, а также методов их решения.

В заключение второй главы приводится описание констатирующего и поискового этапов педагогического эксперимента, проведенного с обучающимися 8 – 9-х и 10- х классов математической школы на базе НИЛ «Школа математического развития и образования -5+» Тольяттинского государственного университета. Элективный курс «Алгебраические уравнения второй и высшей степеней» может быть рекомендован к использованию на практике учителями математики в общеобразовательной школе или в системе дополнительного математического образования.

Заключение

В рамках магистерской диссертации описана история и развитие олимпиадного движения по математике, рассмотрены различные определения понятия «олимпиадная задача» и основные требования к ней. Сформулированы цели и задачи подготовки старшеклассников к олимпиадным задачам по математике, рассмотрены разнообразные подходы к подготовке старшеклассников к решению олимпиадных задач по математике, включая формы, методы и средства обучения.

Проведен анализ олимпиадных задач по теме «Алгебраические уравнения второй и высшей степеней», изучены различные примеры олимпиадных задач по теме за последние годы. Рассмотрены различные подходы к решению таких задач. Данный анализ необходим для понимания, какие умения и навыки нужны для успешного решения подобных задач, и каким методам следует уделить особое внимание при подготовке к математическим олимпиадам. Кроме того, анализ олимпиадных задач поможет определить, какие аспекты темы являются наиболее важными и актуальными для современных математических олимпиад.

Представлена программа элективного курса «Алгебраические уравнения второй и высших степеней». Описан педагогический эксперимент.

Гипотеза исследования нашла подтверждение, так как поисковый этап эксперимента показал, что содержательный компонент подготовки обучающихся к решению олимпиадных задач по математике обеспечивает преемственность между базовым и элективными курсами по математике, а организационный компонент, основанный на применении различных форм и методов, а также технологии развивающего обучения решению математических задач Т.А. Ивановой, – способствует повышению мотивации, формированию умений решать нестандартные задачи. Работа может быть продолжена в направлении дальнейшего исследования по теме.

Список используемой литературы и используемых источников

1. Агаханов Н. Х.Научно-методическое обеспечение работы с математически одаренными детьми в многоуровневой системе предметных олимпиад и конкурсов: автореферат дис. ... канд. пед. наук: 5.8.2: Елец, 2022.54 с.

2. Баишева М. И. Совершенствование методики подготовки учащихся к олимпиадам по математике: дис. ... канд. пед. наук: 13.00.02: Москва, 2004. 216 с.

3. БахтинаО. В. Современное состояние проблемы подготовки младших школьников к участию в математических олимпиадах и конкурсах // Известия Воронежского Государственного Педагогического Университета. – №2 (271). Воронеж: ВГПУ, 2016. С. 18-21.

4. БелянинаО. А. Развитие творческих способностей учащихся в учреждении дополнительного образования: дис. ... канд. пед. наук: 13.00.01. Иркутск, 2004. 191 с.

5. Березина В. А. Дополнительное образование детей как средство их творческого развития: автореферат дис. ... канд. пед. наук: 13.00.01.Москва, 1998. 22 с.

6. Богоявленская Д. Б.,Шадриков В.Д., Бабаева Ю.Б. БрушлинскийА.В. Дружинин, В.Н. и др.Рабочая концепция одаренности. М.: Магистр, 2003. 43 с.

7. Бочко М. А., КаверинаЕ.В. Методические рекомендации по подготовке обучающихся к участию в муниципальном и региональном этапах предметных олимпиад: метод. пособие.БелИРО. Белгород, 2019. 35с.

8. Будак Б.А. Олимпиада «Покори Воробьёвы горы!» // Квант, 2017. № 9. С. 55-58.

9. ВасильевН. Б., ЕгоровА.А. Задачи всесоюзных математических олимпиад: сборник задач / Москва: «Наука», 1988. 288 с.

10. Виленкин Н.Я. Алгебра. 9 класс: учебник для учащихся 9 классов с углубленным изучением математики/ Н.Я. Виленкин, Г.С. Сурвилло, А.С. Симонов, А.И. Кудрявцев; под ред. Н.Я Виленкина. 7-е изд. М.: Просвещение, 2006. 345 с.

11. Виленкин Н.Я. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс. Углубленный уровень: учебник для общеобразовательных учреждений/ Виленкин Н.Я., Ивашев-Мусатов О.С., Шварцбурд С.И. 312 с.

12. Виленкин Н.Я. Математический анализ: учебное пособие для IX—X классов средних школ с математической специализацией / Виленкин Н.Я., Шварцбурд С.И.М., Просвещение, 1969 г. 336 с.

13. Всероссийская олимпиада школьников по математике [Электронный ресурс]. URL:https://olimpiada.ru/activities

14. Всесибирская олимпиада школьников [Электронный ресурс]. URL:https://sesc.nsu.ru/olymp-vsesib/

15. Габай Т. В. Монография. Учебная деятельность и ее средства: учеб.-метод. пособие / Т. В. Габай. М.: Изд-во МГУ, 1988. 254 с.

16. Габов Н. А. Уравнения высших степеней с одной переменной // Международный школьный научный вестник. 2017. № 5. С. 78-83.

17. Галицкий М.Л. Сборник задач по алгебре: учебное пособие для 8-9 кл. с углубленным изучением математики/ М.Л. Галицкий, А.М. Гольдман, Л.И. Звавич / 7-е изд. М.: Просвещение, 2001. 271 с.

18. ГальскаяО.А.Кубические уравнения от простого к сложному[Электронный ресурс]. URL:http://genius.pstu.ru/file.php/1/pupils_works_2018/Galskaja_Olga.pdf

19. Гумеров И. С. Развитие творческих способностей обучающихся в системе непрерывного математического образования: дис. ... канд. пед. наук: 13.00.08. Магнитогорск, 2010. 196 с.

20. Джеджея В. Б. Методика подготовки старшеклассников к решению олимпиадных задач по математике // Материалы Открытой научно-практической конференции «Качество обучения как проблема контроля и

оценки образовательной деятельности образовательных организаций (учреждений)» (21-22 февраля 2023 год). Луганск, ЛНУ. 2023. 3 с.

21. Дмитриев М. А. Теория образования и обучения. Историческая и современная проблематика и основные педагогические идеи: учебно-методическое пособие / М. А. Дмитриев – Гомель, «Университетское», 1989.

22. Долго ли, коротко ли: история олимпиадного движения [Электронный ресурс]. URL:https://olimpiada.ru/article/687 (Дата обращения: 09.11.2022).

23. Иванова Т. А. Использование информационных технологий в обучении математике и информатике студентов средних специальных учебных заведений технического профиля: дис. ... канд. пед. наук: 13.00.08: Елабуга, 2008. 224 с.

24. Иванова Т. А. Теория и технология обучения математике в средней школе: учеб. пособие для студентов мат. спец. пед. вузов / Т. А. Иванова, Е. Н. Перевощикова, Л. И. Кузнецова, Т. П. Григорьева; под ред. Т. А. Ивановой; Нижегород. гос. пед. ун-т. 2-е изд., испр. и доп. Н. Новгород, 2009. 354 с.

25. Кабаева И.И.,ОвсянниковаА.Н. Применение математической индукции в олимпиадных задачах//Некоторые вопросы анализа, алгебры, геометрии и математического образования. 2014. № 2. С. 72-74.

26. Канель-Белов А. Я., КовальджиА.К. Как решают нестандартные задачи. 60-я Московская математическая олимпиада: подготовительный сборник. М.: МЦНМО, 1997. 96 с.

27. Келдибекова А. О. Компетентностный подход к содержанию школьных олимпиадных задач по математике // Международный журнал экспериментального образования. 2017. № 8. С. 39-45.

28. Келдибекова А. О. О проблеме углублённого изучения олимпиадной математики // Вестник НГУ им. С. Нааматова. № 2,3. Нарын, 2016. 23 с.

29. Ковтун В. В. Формы и методы обучения. Понятие и классификация [Электронный ресурс]. URL:https://infourok.ru/formi-i-metodi-obucheniya-ponyatie-i-klassifikaciya-3474921.html / (дата обращения: 20.04.2023)

30. Козко А. И., Чирский В. Г. Задачи с параметром и другие сложные задачи: учебное пособие. М.: МЦНМО, 2007. 296 с.

31. Колягин Ю.М. Алгебра и начала математического анализа (базовый и профильный уровни) 10 кл.: учебник для общеобразовательных учреждений/ Ю.М. Колягин, М.В. Ткачева, Н.Е. Федорова и др., под ред. Жижченко А.Б. М.: Просвещение, 2014. 464 с.

32. Колягин Ю. М. Учебные математические задания творческого характера /Роль и место задач в обучении математике: сборник статей / под ред. Ю. М. Колягина. М., 1973. Вып. 2. С. 5–19.

33. Концепция общенациональной системы выявления и развития молодых талантов (утв. Президентом РФ 03.04.2012 № Пр-827) [Электронный ресурс]. URL:https://www.consultant.ru/document/cons_doc_LAW_131119/

34. Концепции развития дополнительного образования детей до 2030 года [Электронный ресурс]. URL:https://www.consultant.ru/document/cons_doc_LAW_413581/1b1d2b8512a1ba1441c9a3f80cc4dbd5cda16c0f/

35. Концепция развития математического образования в Российской Федерации (С изменениями, внесенными распоряжением Правительства Российской Федерации от 8 октября 2020 года № 2604-р) [Электронный ресурс]. URL: https://docs.edu.gov.ru/id1787 (дата обращения 30.05.2022).

36. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 2003. 832 с.

37. Курляндчик Л. Д., Фомин С. В. Теорема Виета и вспомогательный многочлен // Квант. 1984. № 12. С. 14-16.

38. Лекция «Приближенные решения алгебраических и трансцендентных уравнений» [Электронный ресурс].

URL:https://b6.cooksy.ru/articles/nelineynye-uravneniya-algebraicheskie-i-transtsendentnye-uravneniya/

39. Мардахаева Е.Л. Математический кружок в системе дополнительного математического образования учащихся 5-7-х классов основной школы: дис... канд. пед. наук: 13.00.02: Москва, 2001. 242 с.

40. Материалы для проведения регионального этапа XLIX всероссийской математической олимпиады школьников 2022–2023 учебный год [Электронный ресурс]. URL:https://olympiads.mccme.ru/vmo/2023/iii-1.pdf

41. Мерлина Н. И. Теоретические основы дополнительного математического образования школьников: дис. … доктора педагогических наук: 13.00.02. Чебоксары, 2000. 289 с.

42. Методические рекомендации по проведению школьного и муниципального этапов Всероссийской олимпиады школьников по математике в 2020/21 учебном году [Электронный ресурс]. URL:https://www.ncfu.ru/export/uploads/Dokumenty-Obrazovanie/Metodrekomendacii_matematika.pdf (дата обращения: 19.03.2023).

43. Молибог А. Г.,ТарнопольскийА.И. Технические средства обучения и их применение: учебное пособие. Мн.: Университетское, 1985. 208 с.

44. Мордкович А.Г. Алгебра и начала математического анализа. Базовый уровень 11 класс. В 2 ч. Часть 2: учебник / А.Г. Мордкович, П.В. Семенов, Л.А. Александрова, Е.Л. Мардахаева. Москва: Просвещение, 2022. 208 с.

45. Одаренные школьники: выявление, поддержка и развитие. Современные инновационные практики и технологии [Электронный ресурс]. URL:https://admissions.kpfu.ru/sites/default/files/Центр%20РсОШ/Сборник%20статей%20Круглого%20стола%20педагогов%202022.pdf / (дата обращения: 20.04.2023)

46. Олимпиада школьников «Высшая проба» [Электронный ресурс]. URL:https://olymp.hse.ru/mmo/tasks-math

47. Олимпиада школьников «Надежда энергетики» [Электронный ресурс]. URL:https://www.energy-hope.ru

48. Олимпиада школьников «Шаг в будущее» [Электронный ресурс]. URL:https://olymp.bmstu.ru/ru/mathematics-olymp

49. Олимпиада «Будущие исследователи - будущее науки» [Электронный ресурс]. URL:http://www.unn.ru/bibn/preparation.html

50. Олимпиада школьников «Газпром» [Электронный ресурс]. URL:https://olympiad.gazprom.ru/

51. Олимпиада «Ломоносов» [Электронный ресурс]. URL:https://olymp.msu.ru/rus/page/main/29/page/zadaniya-olimpiady-proshlyh-let

52. Олимпиада «Покори Воробьёвы горы!» [Электронный ресурс]. URL:https://pvg.mk.ru/archive/2017-2018/

53. Олимпиада «САММАТ» [Электронный ресурс]. URL:https://sammat.samgtu.ru

54. Олимпиада «Физтех» по математике [Электронный ресурс]. URL: https://mathus.ru/olymp/fizteh11m2013.pdf

55. Олимпиадная математика, 11 класс. Задачник 11.2023 [Электронный ресурс]. URL:https://mathus.ru/math/11math2023.pdf

56. Основные методы решения уравнений высших степеней [Электронный ресурс]. URL:https://gimnazija11.edu.korolev.ru/wp-content/uploads/sites/135/2020/05/Уравнения-высших-степеней.pdf

57. Павлова Е. И. Методика использования систем задач как средства развития одаренности при подготовке школьников к олимпиадам по информатике: дис ... канд. пед. наук: 13.00.02. Волгоград, 2014. 219 с.

58. Педагогический практикум «Как подготовить к олимпиадам одаренных детей» [Электронный ресурс]. URL:http://gymnasium.pruzhany.by/wp-content/uploads/2018/04/plan_provedeniya.pdf / (дата обращения: 20.04.2023).

59. Постановление Правительства РФ от 17.11.2015 № 1239 (ред. от 18.09.2021) «Об утверждении Правил выявления детей, проявивших

выдающиеся способности, и сопровождения их дальнейшего развития» [Электронный ресурс]. URL:https://www.consultant.ru/document/cons_doc_LAW_189018/

60. Пратусевич М. Я. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений: профил. уровень / М. Я. Пратусевич, К. М. Столбов, А. Н. Головин. М.: Просвещение, 2009. 415 с.

61. Приказ Минобрнауки России от 17.05.2012 № 413 (ред. от 12.08.2022) «Об утверждении федерального государственного образовательного стандарта среднего общего образования» (Зарегистрировано в Минюсте России 07.06.2012 № 24480) [Электронный ресурс]. URL:https://www.consultant.ru/document/cons_doc_LAW_131131/

62. Примерная основная образовательная программа среднего общего образования (одобрена решением федерального учебно-методического объединения по общему образованию (протокол от 28.06.2016 № 2/16-з) [Электронный ресурс]. URL:http://www.consultant.ru/document/cons_doc_LAW_282289/bd1212ac0bf15d0e7457e7c86b2835a65fa83a05/ / (дата обращения: 20.04.2023)

63. Савенков А. И. Одаренные дети: методики диагностики и стратегии обучения // Директор школы. 1999. № 5. С. 55–63.

64. Сафонова И. В. Методические рекомендации подготовлены в помощь преподавателям корпуса, педагогам-психологам при подготовке обучающихся к Всеармейской Олимпиаде по математике [Электронный ресурс]. URL:https://adekkk.mil.ru/upload/site15/document_file/9tL2wDXwMd.pdf (дата обращения: 20.03.2023)

65. СДАМ ГИА: РЕШУ ОЛИМП [Электронный ресурс]. URL:https://math.reshuolymp.ru/problem?id=2318

66. Сластенин В. А. Педагогика: учеб. пособие для студ. высш. учеб. заведений: Сластенин В. А., Исаев И. Ф., Шиянов Е. Н. Под ред.

В.А.Сластенина. 5-е издание, стереотипное, М.: Издательский центр «Академия», 2006. 576 с.

67. Соловьева И.О. Практикум по решению олимпиадных задач по математике: учебное пособие. Псков: ПГПУ, 2010. 96 с.

68. Тоболкина И. Н. Педагогические условия деятельности общеобразовательного учреждения по развитию одаренности детей: дис. ... канд. пед. наук: 13.00.01: Томск, 2003. 241 с.

69. Тугузбаева А. Р. Обучение решению олимпиадных задач школьников 5-6 классов: учебное пособие // Аллея науки. 2018. Т. 2. № 3 (19). С. 708-710.

70. Фарков А. В. Математические олимпиады: методика подготовки: 5–8 классы: методическое пособие, М.: ВАКО, 2012. 176 с.

71. Фарков А. В. Математические олимпиады для школьников муниципальный этап. 5–11 классы: методическое пособие. 4-е изд., перераб. и доп. М.: Илекса, 2022. 208 с.

72. Фарков А. В. Типология олимпиадных задач по математике // Задачи в обучении математике, физике и информатике: теория, опыт, инновации: Материалы II Международной научно-практической конференции, посвященной 125-летию П.А. Ларичева. 2017. С. 277-279.

73. Федеральный проект «Успех каждого ребенка» [Электронный ресурс]. URL:https://edu.gov.ru/national-project/projects/success/

74. Фридман Л. М. Как научиться решать задачи книга для учащихся 9-11 кл. М.: Просвещение, 2009. 255 с.

75. Шабунин М. И. Алгебра. Начала математического анализа. Профильный уровень: учебник для 10 класса: учебник для общеобразовательных учреждений / М. И. Шабунин, А. А. Прокофьев. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2007. 424 с.

76. Шабунин М. И. Алгебра. Начала математического анализа. Профильный уровень: задачник для 10-11 классов: учебник для

общеобразовательных учреждений / М.И. Шабунин, А.А. Прокофьев, Т.А. Олейник, Т.В. Соколова. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2009. 477 с.

77. Шамайло О. Н. Методическая система подготовки к математическим олимпиадам в техническом вузе: дис. … канд. пед. наук: 13.00.02. Астрахань, 2009. 205 с.

78. Шафаревич И. Р. О решении уравнений высших степеней (метод Штурма) // Популярные лекции по математике, вып. 15. М.: Гостехиздат, 1954. 24 с.

79. Эвристическое обучение математике: V Международная научно-методическая конференция, Донецк, 23–25 декабря 2021 года. Донецк: Донецкий национальный университет, 2021. 364 с.

80. Эпштейн Ю. Д. Олимпиады по физике как средство интеллектуального развития учащихся: дис... канд. пед. наук: 13.00.02: СПб., 1999. 159 с.

81. Engel A. Problem Solving Strategies [Электронный ресурс]. URL:https://mathematicalolympiads.wordpress.com/wp-content/uploads/2012/08/75427434-problem-books-in-mathematics-problem-solving-strategies.pdf

82. Keldibekova A.O.Effectiveness of the System of Preparation for Mathematical Olympiads in the Schools of Kyrgyzstan. Revista Espacios, 2019, no. 40 (29), p. 7.

83. Klamkin M. USA Mathematical Olympiads 1972-1986. Problems and Solutions. Mathematical Association of America, 1989. 180 p.

84. Martynovsky M. A Thesis in the Field of Mathematics for Teaching for the Degree of Master of Liberal Arts in Extension Studies, 2021. 141 p.

85. Shinariko L.J. Analysis of students’ mistakes in solving mathematics olympiad problems, 2020. 9 p.