Министерство образования и науки Российской Федерации
Тольяттинский государственный университет
Институт машиностроения
Кафедра «Нанотехнологии, материаловедение и механика»

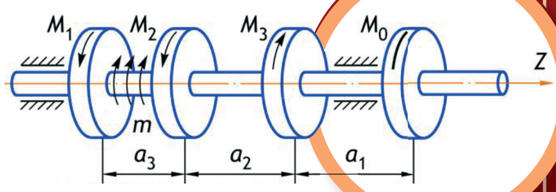
Т.Ф. Гаврилова, Е.П. Гордиенко, А.А. Разуваев

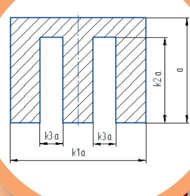
СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

Практикум для студентов заочной формы обучения

Часть 1

В двух частях





ISBN 978-5-8259-0944-8

УДК 539.3/6
ББК 30.121

Рецензенты:
проректор по научной и учебной работе Института менеджмента, маркетинга и права, канд. пед. наук, доцент *П.Э. Шендерей*;
канд. техн. наук, доцент Тольяттинского государственного университета *С.Г. Прасолов*.

Под общей редакцией доктора физико-математических наук, профессора *Д.Л. Мерсона*

Гаврилова, Т.Ф. Сопротивление материалов : практикум для студентов заочной формы обучения : в 2 ч. / Т.Ф. Гаврилова, Е.П. Гордиенко, А.А. Разуваев ; под общ. ред. Д.Л. Мерсона. – Тольятти : Изд-во ТГУ, 2016. – Ч.1. – 1 оптический диск.

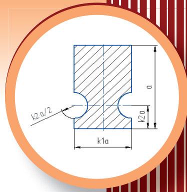
Первая часть практикума содержит практические занятия по основным темам первого семестра обучения дисциплины «Сопротивление материалов»: построение эпюр ВСФ, геометрические характеристики плоских сечений, расчеты на прочность и жесткость стержневых конструкций при простейших видах нагружения. В каждой теме изложен необходимый теоретический материал, выделены алгоритмы основных методов и расчетов, показано подробное решение типовой задачи, даны рекомендации по тренингу. В приложениях практикума приведены тестовый материал, ответы к тестам, задания для выполнения контрольных работ.

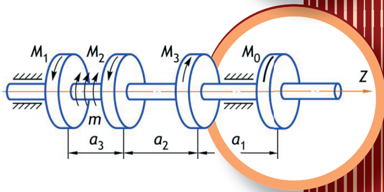
Практикум предназначен для студентов заочной формы обучения по направлениям подготовки: 13.03.03 «Энергетическое машиностроение», 15.03.01 «Машиностроение», 08.03.01 «Строительство», 20.03.01 «Техносферная безопасность» и др. в помощь при решении контрольных работ по изучаемым темам дисциплины «Сопротивление материалов».

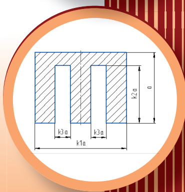
Деривативное текстовое электронное издание; в основе использовано печатное издание: Гаврилова Т.Ф., Гордиенко Е.П., Разуваев А.А. Сопротивление материалов : практикум : в 2 ч. Тольятти, Изд-во ТГУ, 2012. Ч. 1. 120 с.

Рекомендовано к изданию научно-методическим советом Тольяттинского государственного университета.

Минимальные системные требования: IBM PC-совместимый компьютер: Windows XP/Vista/7/8; PIII 500 МГц или эквивалент; 128 Мб ОЗУ; SVGA; Adobe Acrobat Reader.







Редактор *Т.Д. Савенкова*
Технический редактор *Н.П. Крюкова*
Компьютерная верстка: *Л.В. Сызганцева*
Художественное оформление,
компьютерное проектирование: *Г.В. Карасева*

Дата подписания к использованию 09.03.2016.
Объем издания 5 Мб.
Комплектация издания: компакт-диск, первичная упаковка.
Заказ № 1-01-16.

Издательство Тольяттинского государственного университета
445020, г. Тольятти, ул. Белорусская, 14,
тел. 8 (8482) 53-91-47, www.tltsu.ru

Содержание

Тема 1. ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР ВНУТРЕННИХ СИЛОВЫХ ФАКТОРОВ

Цель занятия – научиться строить эпюры внутренних силовых факторов при простых видах деформации: растяжении-сжатии, кручении и прямом изгибе.

Необходимые знания для достижения цели

1. Алгоритм метода сечений – метода построения эпюр внутренних силовых факторов.
2. Правило знаков для продольной силы N, крутящего момента M_z, поперечной силы Q_y и изгибающего момента M_x.
3. Основные закономерности при построении эпюр N, M_z, Q_y и M_x.

1.1. Построение эпюры продольной силы N

Технология построения эпюры внутренней продольной силы

Что такое внутренняя продольная сила?

Это внутренний силовой фактор, возникающий в сечениях элемента конструкции, нагруженного внешними силами, производящими деформацию растяжения или сжатия.

Зачем нужно уметь строить эпюру внутренней продольной силы?

Это необходимо для определения положения опасного сечения элемента конструкции, т. е. для определения величины максимального напряжения и получения условия прочности, выполнение которого позволит обеспечить прочностную надежность конструкции при ее эксплуатации.

Чтобы научиться строить эпюру внутренней продольной силы, надо знать!

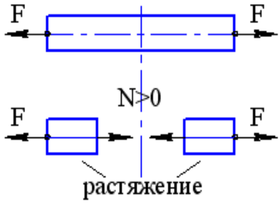
1. Метод сечений и вытекающие из него закономерности для построения эпюры N.

- Внешняя сосредоточенная сила на эпюре N дает скачок на величину силы в сторону знака её воздействия.
- Если участок ничем не загружен (отсутствует распределенная по длине нагрузка), то на соответствующем участке эпюры должна быть прямая, параллельная базе.

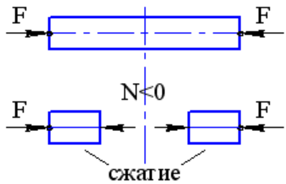
- Если участок загружен равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью q, то на соответствующем участке эпюры должна быть наклонная прямая с угловым коэффициентом, равным q.

2. Правило знаков для продольной силы N.

• Продольная сила считается положительной, если вызывающая её внешняя сила относительно рассматриваемого сечения растягивает стержень:



• Продольная сила считается отрицательной, если вызывающая её внешняя сила относительно рассматриваемого сечения сжимает стержень:



• Знак продольной силы имеет физическое значение в связи с тем, что некоторые материалы по-разному сопротивляются деформации растяжения и деформации сжатия.

Алгоритм построения эпюры продольной силы

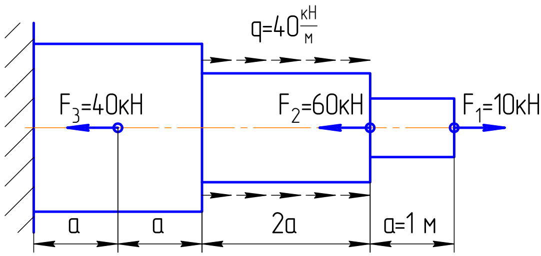
1. Для построения эпюры провести базу – линию, параллельную продольной оси стержня, равную длине стержня.
2. Разделить базу эпюры на участки соответственно участкам стержня.
3. Участком является часть длины стержня между точками приложения сосредоточенных сил или началом и концом действия распределенной нагрузки.
4. Для консольного типа стержней (один конец свободный, другой в жесткой заделке) выбрать направление построения эпюры от свободного конца к заделке, т. е. от участка со свободным концом.

5. Определить состояние в начале участка: если есть сосредоточенная сила, производящая деформацию растяжения, отложить ординату на эпюре, равную величине силы со знаком «+»; со знаком «–», если сила производит деформацию сжатия. При отсутствии силы построение эпюры начинается с нуля.
6. Определить состояние внутри участка: если участок пустой, провести прямую, параллельную базе, высотой, равной отложенной ординате в начале участка; если участок загружен равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью q, проводим наклонную прямую с угловым коэффициентом, равным q. Для определения величины продольной силы в конце участка прибавляем к значению ординаты в начале участка с учетом её знака произведение $q \cdot l$ в случае растягивающей распределенной нагрузки. И наоборот, вычитаем от значения ординаты в начале участка произведение $q \cdot l$ в случае сжимающей распределенной нагрузки. Здесь l – длина участка.
7. И так далее по каждому участку.

Пример построения эпюры N

Задача

Для данного стержня построить эпюру продольной силы.



Решение

Стержень имеет четыре участка:

первый – между точками приложения F_1 и F_2;

второй – между точкой приложения F_2 и концом действия равномерно распределенной нагрузки;

третий – между концом действия равномерно распределенной нагрузки и точкой приложения F_3;

четвертый – между точкой приложения F_3 и заделкой.

Проведем параллельно продольной оси стержня базу эпюры (ось, относительно которой будем откладывать ординаты (значения) внутренней продольной силы). Разделим базу на участки соответственно участкам стержня, проводя из граничных точек участков стержня прямые, $\perp$ базе, до пересечения с базой. Направление построения эпюры примем от свободного конца к заделке, не определяя реактивных сил в заделке.

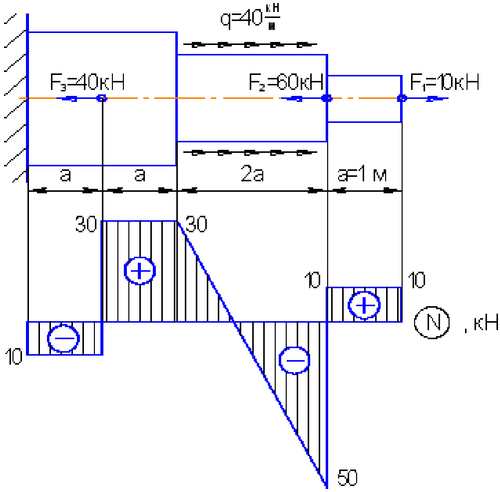
Построение эпюры начинаем с крайнего правого участка, делая скачок от базы на величину 10 кН, равный силе F_1, в положительную сторону, так как F_1 растягивает. В связи с тем что первый участок ничем не загружен по длине, проводим прямую линию, параллельную базе, со значением 10 кН до конца первого участка.

В начале второго участка делаем скачок на величину силы $F_2 = 60$ кН вниз, так как сила F_2 сжимающая. Получаем на эпюре значение –50 кН, которое откладываем ниже базы эпюры. В связи с загрузкой второго участка по длине растягивающей равномерно распределенной нагрузкой $q = 40$ кН/м вычисляем значение продольной силы в конце второго участка следующим образом: к значению ординаты в начале участка –50 кН прибавляем произведение $q = 40$ кН/м на длину участка $2a = 2$ м. Получаем следующее значение продольной силы: $N = -50 + 40 \cdot 2 = 30$ кН, которое откладываем выше базы в конце второго участка и наклонной прямой соединяем ординаты –50 и +30.

В начале третьего участка отсутствует сосредоточенная сила, поэтому ордината 30 кН не изменяется. А так как третий участок ничем не загружен, то по всей его длине проводим прямую, параллельную базе, до конца участка.

В начале четвертого участка на эпюре откладываем скачок вниз величиной 40 кН от действия сжимающей сосредоточенной силы F_3 и получаем ординату –10 кН. Затем величиной полученной ординаты проводим до конца участка прямую, параллельную базе.

Внутри эпюры ставим знаки и делаем штриховку, перпендикулярную базе эпюры. Почему перпендикулярно базе? Потому, что каждая штриховая линия определяет значение внутренней силы в соответствующем сечении.



Эпюра построена. 

 **Потренируемся?**

- Пройти тестовый тренинг (прил. 2, тесты к теме 1, п. 1.1).
- Решить задачу 1.1 из контрольной работы № 1 (прил. 4).

1.2. Построение эпюры внутреннего крутящего момента Mz

Технология построения эпюры внутреннего крутящего момента

 *Что такое внутренний крутящий момент?*

Это внутренний силовой фактор, возникающий в сечениях элемента конструкции, нагруженного внешними парами сил, воздействующими относительно продольной оси и производящими деформацию кручения.

 *Зачем нужно уметь строить эпюру внутреннего крутящего момента?*

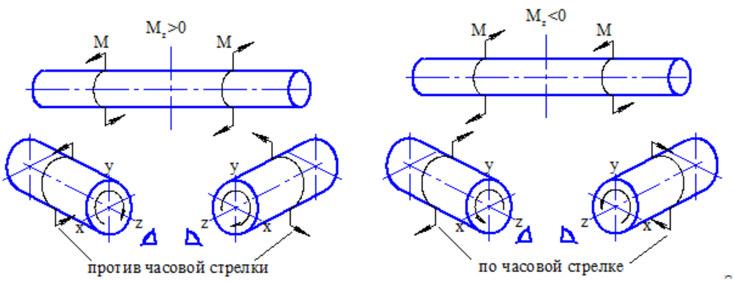
Это необходимо для определения положения опасного сечения элемента конструкции, т. е. для определения величины максимального напряжения и получения условия прочности, выполнение которого позволит обеспечить прочностную надежность конструкции при ее эксплуатации.

Чтобы научиться строить эпюру внутреннего крутящего момента, надо знать!

1. Метод сечений и вытекающие из него закономерности для построения эпюры M_z.

- Внешняя сосредоточенная пара сил на эпюре M_z дает скачок на величину пары сил в сторону знака её воздействия.
- Если участок ничем не загружен (отсутствует распределенный по длине момент), то на соответствующем участке эпюры M_z должна быть прямая, параллельная базе.
- Если участок загружен равномерно распределенным моментом интенсивностью m, то на соответствующем участке эпюры должна быть наклонная прямая с угловым коэффициентом, равным m.

2. Правило знаков для внутреннего крутящего момента:



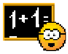
Что мы видим на графической иллюстрации правила знаков?

- Прежде чем определять направление вращения внешнего момента, от которого назначается знак внутреннего, необходимо мысленно сделать сечение в пределах участка, на котором нужно определить M_z, оставить любую из полученных частей вала и посмотреть в торец сделанному сечению.
- Поворачивая внешний момент, определите его направление и назначьте знак внутреннему моменту. Например, как это сделано на иллюстрации. Если внешний момент поворачивается против часовой стрелки, то внутренний момент принимается положительным. И наоборот.

Так как знак внутреннего момента не имеет физического значения, можно правило знаков назначать произвольно. То есть не будет ошибки, если назначить знак плюс внутреннему моменту, возникающему от внешнего момента, вращающегося по часовой стрелке. Важным в правиле знаков является лишь то, что при определении направления вращения внешнего момента обязательно нужно смотреть со стороны сделанного сечения! Знак внутри эпюры крутящего момента не ставится.

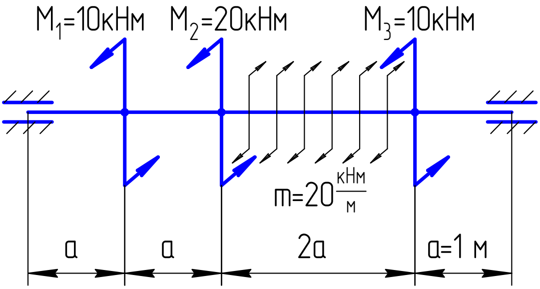
Алгоритм построения эпюры M_z

1. Для построения эпюры провести базу – линию, параллельную продольной оси стержня, равную длине вала.
2. Разделить базу на участки соответственно участкам вала.
3. Участок – часть длины вала между точками приложения сосредоточенных пар сил или между началом и концом действия распределенного момента.
4. Для консольного типа валов (один конец свободный, другой в жесткой заделке) выбрать направление построения эпюры от свободного конца к заделке, т. е. с участка со свободным концом.
5. Определить состояние в начале участка: если есть сосредоточенная пара сил, отложить ординату на эпюре, равную величине пары сил выше или ниже базы эпюры, согласно правилу знаков. При отсутствии пары сил построение эпюры начинаем с нуля.
6. Определить состояние внутри участка: если участок пустой, провести прямую, параллельную базе, высотой, равной отложенной ординате в начале участка. Если участок загружен равномерно распределенным моментом интенсивностью m, проводим наклонную прямую с угловым коэффициентом, равным m. Для определения величины внутреннего крутящего момента в конце участка увеличиваем ординату в начале участка с учетом ее знака на величину произведения $m \cdot l$ в случае, если направление распределенного момента совпадает с направлением сосредоточенного. И наоборот, уменьшаем значение ординаты в начале участка на величину произведения $m \cdot l$ в случае несовпадения направления распределенного момента с направлением сосредоточенного в начале участка.
7. И так далее по каждому участку.

 ***Пример решения задачи***

Задача

Для данного вала построить эпюру внутреннего крутящего момента.



Решение

Сначала проведем краткий анализ данной расчетной схемы и определим количество участков, на которые надо разделить вал.

1. Вал нагружен системой самоуравновешенных моментов. В этом можно убедиться, если алгебраически сложить все моменты, учитывая их разные направления. Одного направления на схеме моменты M_1, M_2 и M_3. Их сумма составляет 40 кН·м. Равномерно распределенный момент интенсивностью m = 20 кН·м/м занимает длину 2 метра и даст равнодействующий момент, равный произведению интенсивности на длину действия, т. е. $m \times 2a$ = 20 кНм/м × 2 м = 40 кНм и имеет противоположное направление. Таким образом, сумма всех моментов будет равна нулю. Это означает, что реактивные моменты в крайних опорах будут отсутствовать и крайние левый и правый участки от опор до моментов M_1 и M_3 соответственно не будут испытывать внешнего воздействия, а значит, в их поперечных сечениях не будет возникать внутренний крутящий момент.

2. В результате вал можно разделить на два участка:

- участок (1–2) между точками приложения сосредоточенных моментов M_1 и M_2;
- участок (2–3) между точками приложения моментов M_2 и M_3.

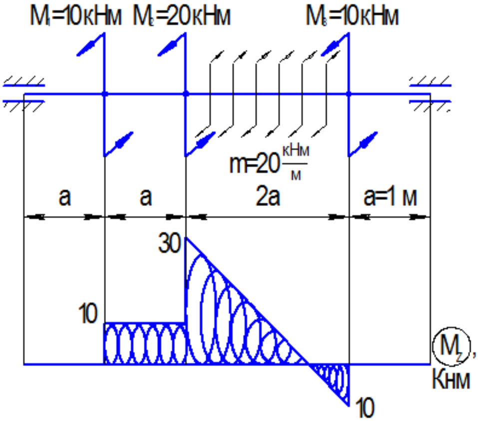
3. Под расчетной схемой параллельно продольной оси проведем базу эпюры в границах длины вала.

4. От точек приложения сосредоточенных моментов M_1, M_2 и M_3 проведем прямые, перпендикулярные продольной оси, до пересечения с базой, таким образом поделив базу эпюры на участки.

5. Эпюру крутящего момента будем строить только в пределах двух средних участков в силу указанных выше причин, применяя выявленные закономерности для эпюры крутящего момента.

6. Начнем с участка (1–2), приняв направление построения эпюры на участке слева направо. На левой границе находится сосредоточенный момент M_1 = 10 кН·м. На его величину откладываем скачок от базы вверх, выбрав предварительно масштаб. Так как участок пустой, проводим прямую линию, параллельную базе, от отложенной ординаты до правой границы участка.

7. На участке (2–3) выберем направление построения эпюры также слева направо. На левой границе участка находится сосредоточенный момент M_2 того же направления, что и момент M_1. Поэтому откладываем скачок от ординаты 10 кН·м по линии действия M_2 вверх на величину 20 кН·м. Получим значение внутреннего момента 30 кН·м от базы эпюры. Так как участок (2–3) загружен равномерно распределенным моментом, далее нужно провести наклонную прямую. Направление распределенного момента противоположно моментам M_1 и M_2, поэтому наклонная прямая пойдет вниз от ординаты 30 кН·м на величину равнодействующего момента, т. е. $m \times 2a$ = 20 кНм/м × 2 м = 40 кНм. На правой границе участка (2–3) мы получим значение 10 кН·м ниже базы. Сосредоточенный момент M_3, находящийся на правой границе участка (2–3), приведет к изменению внутреннего момента (скачку) на 10 кН·м вверх, поскольку его направление противоположно направлению распределенного момента. Таким образом, на крайнем правом участке вала внутренний крутящий момент, как говорилось выше, отсутствует.



Эпюра построена. 

 **Потренируемся?**

- Пройти тестовый тренинг (прил. 2, тесты к теме 1, п. 1.2).
- Решить задачу 1.2 из контрольной работы № 1 (прил. 4).

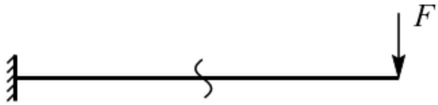
1.3. Построение эпюры внутренней поперечной силы и изгибающего момента при прямом изгибе балок

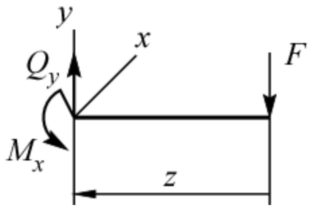
Технология построения эпюры поперечной силы и изгибающего момента

 *Что такое внутренняя поперечная сила и изгибающий момент?*

Поперечная сила – это внутренняя сила, возникающая в поперечном сечении элемента конструкции в ответ на действие внешних сил, дающих проекцию на одну из осей поперечного сечения.

Изгибающий момент – это внутренний момент, возникающий в поперечном сечении элемента конструкции в ответ на действие моментов от внешних сил относительно одной из осей поперечного сечения. Например:





$$Q_y = F, \quad M_x = -F \times z$$

В приведенном примере видно, что внешняя сила F дает проекцию на ось y поперечного сечения балки и в ответ возникает поперечная сила Q_y. Кроме того, сила F создает момент с плечом z относительно оси x, который должен быть уравновешен внутренним моментом M_x.

Зачем нужно уметь строить эпюры Q_y и M_x?

Это необходимо для определения положения опасного сечения и дальнейшей оценки прочности и жесткости конструкции.

Чтобы научиться строить эпюры внутренней поперечной силы и изгибающего момента, надо знать!

1. Метод сечений и следующие основные закономерности для построения эпюр Q_y и M_x, основанные на этом методе.

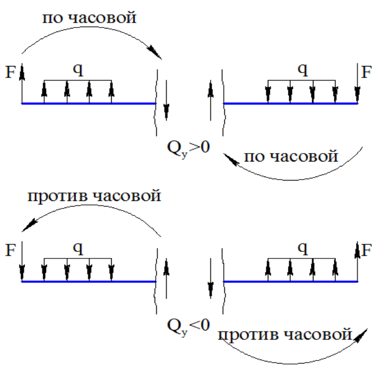
- От действия внешней сосредоточенной силы на эпюре Q_y должен быть скачок на величину силы в сторону знака её воздействия, на эпюре M_x – перелом, острие которого направлено навстречу действию силы.
- От действия сосредоточенного внешнего момента на эпюре Q_y не происходит изменений (она на него не реагирует), на эпюре M_x должен быть скачок на величину момента в сторону знака его воздействия.
- Если участок пустой, то на эпюре Q_y будет прямая, параллельная базе, на эпюре M_x – прямолинейная зависимость с угловым коэффициентом, равным Q_y этого участка.

- Если участок загружен равномерно распределенной нагрузкой, то на эпюре Q_y будет наклонная прямая с угловым коэффициентом, равным интенсивности нагрузки q, на эпюре M_x – квадратичная парабола с квадратичным слагаемым $\frac{q \cdot z^2}{2}$. Выпуклость параболы направлена навстречу действию нагрузки.
- Если наклонная прямая на эпюре Q_y пересекает базу, то в соответствующем сечении на эпюре M_x будет экстремум, определение которого обязательно!
- Правильность построенных эпюр можно проконтролировать, используя существующую дифференциальную зависимость между Q_y и M_x: $Q_y = \frac{dM_x}{dz}$. Анализ по участкам эпюр надо проводить в строгом направлении слева направо. Если поперечная сила Q_y на участке положительна, то функция момента M_x должна быть возрастающей, и наоборот, если Q_y отрицательна, то функция M_x должна быть убывающей.

2. Правило знаков для поперечной силы и изгибающего момента.

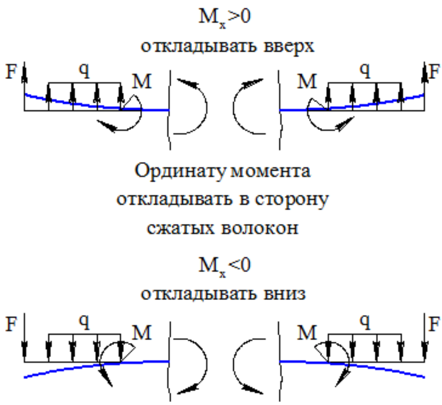
◊ *для поперечной силы* Q_y

Поперечная сила считается положительной, если вызывающая её внешняя сила поворачивается относительно рассматриваемого сечения по часовой стрелке. Если против часовой стрелки, то она считается отрицательной. Внутри эпюры Q_y ставится знак «+» или «–».

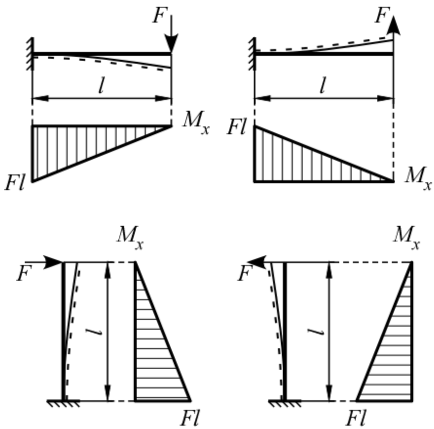


◊ *для изгибающего момента* M_x

Ординаты на эпюре изгибающего момента откладываются в сторону сжатых волокон, и знак внутри эпюры не ставится.



Например:



Алгоритм построения эпюр Q_y и M_x экспресс-методом по характерным сечениям

1. Обозначить характерные сечения на расчетной схеме.

Для этого надо знать: характерное сечение – это сечение на расчетной схеме, где находятся сосредоточенная сила, начало и конец действия равномерно распределенной нагрузки, сосредоточенный момент (только для эпюры изгибающего момента).

2. Определить количество образовавшихся участков.

Для этого надо знать: участок – это часть длины на расчетной схеме между характерными сечениями.

3. Начинать построение эпюр Q_y и M_x следует с любого крайнего участка, предварительно определив реактивные усилия в опорах. Сначала проанализировать состояние в начальной точке (делать скачок или нет в зависимости от наличия сосредоточенной силы для Q_y или сосредоточенного момента для M_x). А затем анализировать состояние на участке для определения типа функции Q_y и M_x в зависимости от загруженности участка по длине.

Для выполнения этого пункта необходимо использовать основные закономерности при построении эпюр Q_y и M_x.

4. Для определения значения Q_y в конце участка, загруженного равномерно распределенной нагрузкой, следует изменить значение Q_y в начале участка на величину, равную произведению интенсивности нагрузки q на длину участка. В случае незагруженного участка значение Q_y в конце будет таким же, как в начале участка.

5. Для определения значения M_x в конце участка следует рассмотреть часть балки до точки конца участка со стороны движения по участку. Определить величины моментов от всех нагрузок, находящихся на рассматриваемой части балки, относительно данной точки и сложить их алгебраически, применяя правило знаков.

6. При переходе от участка к участку необходимо четко соблюдать направление построения эпюр, т. е. движения по участку, и повторять действия п. 3.

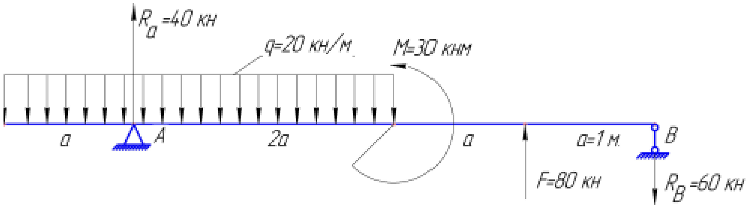
7. После завершения построения эпюр Q_y и M_x провести проверку правильности полученного решения.

- Убедиться в наличии скачков на эпюре Q_y в сечениях, где есть сосредоточенные силы; на эпюре M_x – в сечениях, где есть сосредоточенные моменты.
- Убедиться в правильности типов функций Q_y и M_x по участкам и соотношения выпуклости параболы с направлением равномерно распределенной нагрузки.
- Убедиться в правильной взаимосвязи функций Q_y и M_x по участкам согласно соотношению $\boxed{Q_y = \frac{dM_X}{dz}}$, т. е. слева направо в пределах каждого участка при $Q_y > 0$ $M_x\uparrow$, при $Q_y < 0$ $M_x\downarrow$. Если эпюра Q_y пересекает базу, в соответствующей точке на эпюре M_x должен быть экстремум, величину которого необходимо обязательно определить.

Пример решения задачи

Задача

Для данной балки построить эпюры поперечной силы и изгибающего момента.



Решение

Так как балка крепится на двух шарнирных опорах, то до начала построения эпюр необходимо определить реакции в опорах (практическое занятие по определению реакций опор на балках см. в прил. 1). Обозначим буквами опоры: шарнирно неподвижную – *A*, шарнирно подвижную – *B*. Для определения реакции в опоре *A* составим уравнение суммы моментов относительно точки опоры *B*: $\sum_i M_B(F_i) = 0$.

Используем правило знаков моментов, принятое в теоретической механике (раздел «Статика»): момент против часовой стрелки принимаем положительным, по часовой стрелке – отрицательным. В результате получим: $M - F \cdot a + q \cdot 3a \cdot 3{,}5a - R_A \cdot 4a = 0$.

Подставив численное значение всех входящих величин, выразим из уравнения

$$R_A = \frac{30 - 80 \times 1 + 20 \times 3 \times 3{,}5}{4} = 40\ \text{кН}.$$

Для определения реакции в опоре *B* составим уравнение суммы моментов относительно точки опоры *A*: $\sum_i M_A(F_i) = 0$. Расписывая левую часть уравнения, получим: $M + F \cdot 3a - q \cdot 3a \cdot 0{,}5a - R_B \cdot 4a = 0$, откуда

$$R_B = \frac{30 + 80 \times 3 - 20 \times 3 \times 0{,}5}{4} = 60\ \text{кН}.$$

Для проверки правильности определенных реакций составим уравнение суммы проекций сил на вертикальную ось: $\sum_i F_{iy} = 0$ или $F - q \cdot 3a + R_A - R_B = 0$. Подставив численное значение сил, получим: $80 - 20 \cdot 3 + 40 - 60 = 0$, т. е. реакции найдены верно и можно приступать к построению эпюр.

Разделим балку на участки слева направо:

- первый – от начала действия распределенной нагрузки до точки опоры A;
- второй – от точки опоры A до конца действия распределенной нагрузки;
- третий – от конца распределенной нагрузки до точки приложения силы F;
- четвертый – от точки приложения силы F до конца балки.

Построение эпюры Q_y

Проведем под расчетной схемой базу для эпюры Q_y и разделим ее на участки, соответствующие участкам балки.

1-й участок

<u>Левая граница участка</u>: отсутствует сосредоточенная сила, поэтому на эпюре Q_y будет ноль.

<u>Состояние по длине участка</u>: весь участок загружен распределенной нагрузкой, поэтому на эпюре будет наклонная прямая с угловым коэффициентом, равным $q = 20$ кН/м.

<u>Правая граница участка</u>: определим значение поперечной силы, умножив q на длину участка a, получим 20 кН. Отложим это значение вниз от базы, т. е. со знаком «–», так как поворот вектора q относительно правой границы первого участка происходит против часовой стрелки. Соединим ординаты на левой и правой границах участка наклонной прямой.

2-й участок

<u>Левая граница участка</u>: здесь находится сосредоточенная сила R_A, на величину которой надо сделать скачок в положительную сторону согласно правилу знаков. От ординаты, равной –20 кН, надо вверх отложить величину 40 кН. От базы эпюры сверху получится ордината, равная 20 кН.

<u>Состояние по длине участка</u>: весь второй участок также загружен распределенной нагрузкой, поэтому на эпюре должна быть наклонная прямая с угловым коэффициентом, равным $q = 20$ кН/м.

<u>Правая граница участка</u>: определим значение Q_y, алгебраически складывая величину Q_y на левой границе и величину равнодействующей распределенной нагрузки на 2-м участке:

$$Q_Y = 20 \text{ кН} - 20 \cdot 2 \text{ м} = -20 \text{ кН}.$$

Соединим ординаты на левой (20 кН) и правой (–20 кН) границах наклонной прямой.

3-й участок

Левая граница участка: на этой границе находится сосредоточенный момент, на который поперечная сила не реагирует, т. е. значение –20 кН не изменится.

Состояние по длине участка: участок пустой, поэтому на эпюре будет параллельная прямая с ординатой –20 кН.

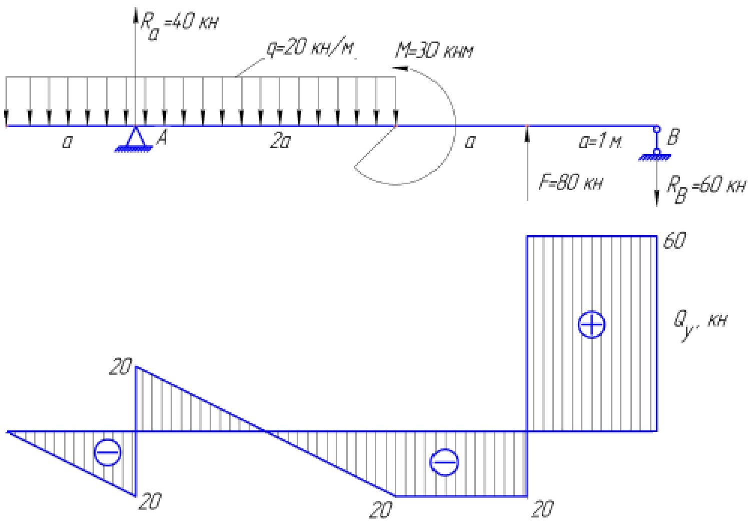
Правая граница участка: ордината, равная –20 кН, – конец прямой, параллельной базе.

4-й участок

Левая граница участка: здесь находится сосредоточенная сила $F = 80$ кН, которая вызовет на эпюре скачок на эту величину вверх. Почему вверх  ? Потому, что сила F по ходу построения эпюры (слева направо) поворачивается по часовой стрелке. В результате в начале четвертого участка ордината поперечной силы будет равна 60 кН.

Состояние по длине участка: участок ничем не загружен, поэтому на эпюре должна быть прямая, параллельная базе.

Правая граница участка: здесь находится сосредоточенная сила R_B, которая вызовет скачок на эпюре вниз на 60 кН.



Построение эпюры M_x

Эпюра M_x строится под эпюрой Q_y. База эпюры предварительно делится на участки, соответствующие участкам балки.

1-й участок

Левая граница участка: отсутствует сосредоточенный внешний момент, поэтому на эпюре M_x будет ноль.

Состояние по длине участка: наличие равномерно распределенной нагрузки на эпюре M_x дает параболу, выпуклость которой направлена вверх (навстречу нагрузке). Парабола будет без экстремума, поскольку наклонная прямая на соответствующем участке Q_y не пересекает базу. Строится по двум точкам – по значениям момента на левой и правой границах участка.

Правая граница участка: сделаем сечение по правой границе первого участка и оставим для определения момента в сечении «отрезанный» первый участок, загруженный только распределенной нагрузкой. Момент от нее и определит величину внутреннего момента. Заменим распределенную нагрузку ее равнодействующей, равной $qa = 20 \cdot 1 = 20$ кН, мысленно поместим ее в точку центра тяжести площади, которую она занимает (это точка пересечения диагоналей прямоугольника), поэтому вектор равнодействующей будет проходить через середину длины участка. Тогда плечо у равнодействующей будет равно 0,5 метра, а момент в конце первого участка определится величиной, равной

$$q \times a \times \frac{a}{2} = \frac{qa^2}{2} = \frac{20 \times 1^2}{2} = 10 \text{ кНм}.$$

Откладываем это значение в конце участка вниз, так как от действия распределенной нагрузки на отсеченную часть балки сжаты нижние волокна.

2-й участок

Левая граница участка: отсутствует сосредоточенный внешний момент, поэтому на эпюре M_x значение 10 кН·м не изменится.

Состояние по длине участка: наличие равномерно распределенной нагрузки даст на эпюре M_x снова параболу выпуклостью вверх с экстремумом посередине участка, поскольку на соответствующем участке эпюры поперечной силы наклонная прямая пересекает базу в этом месте. Для определения экстремума сделаем сечение ровно посередине второго участка. Оставляя левую часть балки относительно сделанного сечения, на которой есть распределенная нагрузка и реакция R_A, определим момент M_x:

$$M_X = -q \cdot 2a \cdot a + R_A \cdot a = -20 \cdot 2 + 40 \cdot 1 = 0.$$

Правая граница участка: так как парабола – симметричная кривая, то очевидно, что в конце участка значение на эпюре момента должно быть такое же, как в начале (10 кН·м на нижних волокнах). По трем точкам: –10 кН·м; 0; –10 кН·м строим параболу.

3-й участок

Левая граница участка есть сосредоточенный внешний момент, равный 30 кН·м, поэтому на эпюре M_x сделаем скачок вниз на величину момента. Почему вниз ? Потому что, воздействуя моментом на балку слева, изгибаем ее так, что будут сжаты нижние волокна. Величина ординаты стала –40 кН·м.

Состояние по длине участка: пустой, ничем не загружен. На эпюре M_x должна быть наклонная прямая с угловым коэффициентом, равным Q_y этого участка, т. е. –20 кН. Построим прямую по двум точкам. Для этого определим значение момента на правой границе.

Правая граница участка: сделаем сечение по правой границе участка, оставим для определения момента правую часть балки относительно сделанного сечения, на которой есть только сила R_B. Определим момент в сечении:

$$M_X = -R_B \cdot a = -60 \cdot 1 = -60 \text{ кН·м}.$$

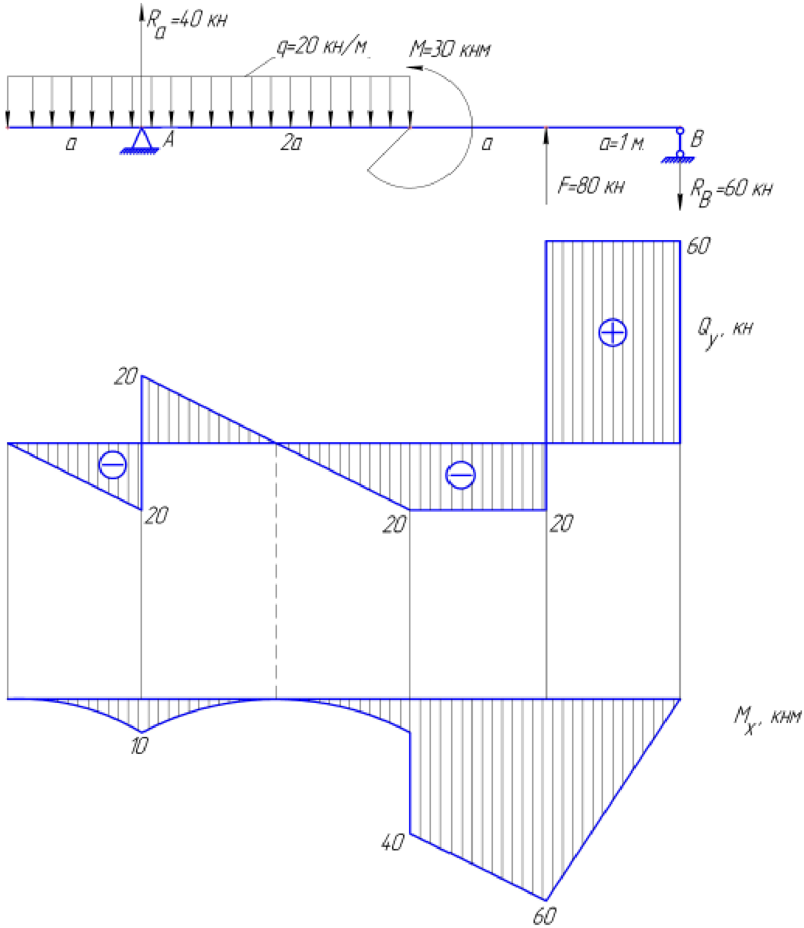
Почему –60 кН·м ? Потому что, воздействуя на балку справа силой R_B, изгибаем ее так, что будут сжаты нижние волокна. По полученным точкам на левой и правой границах участка – соответственно –40 кН·м и –60кН·м – строим наклонную прямую.

4-й участок

Левая граница участка: отсутствует сосредоточенный внешний момент, поэтому на эпюре M_x значение –60 кН·м не изменится.

Состояние по длине участка: пустой, ничем не загружен. На эпюре M_x должна быть наклонная прямая с угловым коэффициентом, равным Q_y этого участка, т. е. 60 кН. Построим прямую по двум точкам. Для этого определим значение момента на правой границе.

Правая граница участка находится в шарнирной опоре *B*, на которой отсутствует внешний момент. Такой шарнир называется свободным, и в соответствующем сечении на эпюре M_x должен быть 0. По двум значениям момента на левой и правой границах участка (–60 кН·м и 0) строим наклонную прямую.



Проверка правильности построенных эпюр по дифференциальной зависимости $\boxed{Q_y = \dfrac{dM_X}{dz}}$

Анализ эпюр проводим слева направо:

1-й участок: $Q_y < 0 \ \ M_X \downarrow$

2-й участок: на первой половине $Q_y > 0 \ \ M_X \uparrow$, в точке пересечения $Q_y = 0$ и $M_X = 0$, на второй половине $Q_y < 0 \ \ M_X \downarrow$

3-й участок: $Q_y < 0 \ \ M_X \downarrow$

4-й участок: $Q_y > 0 \ \ M_X \uparrow$.

Эпюры построены. 

 **Потренируемся?**

- Пройти тестовый тренинг (прил. 2, тесты к теме 1, п. 1.3).
- Решить задачу 1.3 (2 схемы) из контрольной работы № 1 (прил. 4).

Тема 2. РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ-СЖАТИИ

Цель занятия – научиться рассчитывать на прочность и жесткость стержневые конструкции, работающие в условиях растяжения-сжатия.

Необходимые знания для достижения цели

1. Условие прочности по допускаемому напряжению при растяжении-сжатии.
2. Алгоритм расчета на прочность.
3. Задачи, вытекающие из условия прочности.
4. Условие жесткости при растяжении-сжатии по величине допускаемого перемещения.
5. Алгоритм расчета на жесткость.

Что такое условие прочности по допускаемому напряжению?

В условиях растяжения-сжатия в поперечных сечениях стержневой конструкции возникают нормальные напряжения под действием внутренней продольной силы, которые вычисляются по следующей формуле: $\sigma = N/A$, где N – величина внутренней продольной силы в данном сечении; A – площадь поперечного сечения. Условием прочности по допускаемому напряжению считается выполнение следующего условия:

$$\sigma_{\max} = \left|\frac{N}{A}\right|_{\max} \le [\sigma],$$

где $[\sigma]$ – величина допускаемого напряжения, являющаяся справочной величиной или определяемая по характеристикам прочности для данной марки материала: $[\sigma] = \sigma_{\text{т}}/n_{\text{т}}$ для пластичного материала или $[\sigma] = \sigma_{\text{в}}/n_{\text{в}}$ для хрупкого материала, где $\sigma_{\text{т}}$ – предел текучести, $n_{\text{т}}$ – коэффициент запаса по текучести, $\sigma_{\text{в}}$ – предел прочности данной марки материала, $n_{\text{в}}$ – коэффициент запаса по прочности.

Алгоритм расчета на прочность

1. Определить положение опасного сечения:

- построить эпюру продольной силы N;
- определить величину максимального нормального напряжения

$$\sigma_{\max} = \left|\frac{N}{A}\right|_{\max}.$$

2. Записать условие прочности $\sigma_{max} = \left|\frac{N}{A}\right|_{max} \le [\sigma]$ и решить его соответственно поставленной задаче.

Какие задачи можно решить из условия прочности?

♦ Проверочная задача, когда известны геометрические размеры конструкции, условия нагружения, марка материала, из которого изготовлена конструкция, и необходимо проверить выполнение условия прочности.

♦ Проектировочная задача, когда известны условия нагружения, соотношения геометрических размеров и форма поперечного сечения стержня, марка материала и необходимо определить допускаемую величину характерного размера поперечного сечения, удовлетворяющего условию прочности.

♦ Задача об определении грузоподъемности конструкции, когда известны геометрические размеры, марка материала, закон нагружения конструкции и требуется определить величину допускаемой нагрузки, удовлетворяющей условию прочности.

♦ Задача о подборе марки материала для изготовления конструкции, когда известны геометрические размеры и условия нагружения конструкции и требуется подобрать из условия прочности марку материала.

Что такое условие жесткости при растяжении-сжатии?

Под условием жесткости понимается ограничение максимального перемещения сечений стержневой конструкции в результате деформации растяжения-сжатия величиной допускаемого перемещения:

$$\delta_{max} \le [\delta], \text{ или } \sum_i \Delta l_i \le [\delta],$$

где δ_{max} – величина максимального перемещения поперечных сечений стержня вследствие деформации; $[\delta]$ – допускаемое перемещение, обычно назначаемое из условий эксплуатации.

Величина δ_{max} может быть определена как накопленная алгебраическая сумма абсолютных деформаций участков стержня $\Delta l_i = \frac{N_i \cdot l_i}{EA_i}$, где N_i – внутренняя продольная сила i-го участка, взятая с эпюры; l_i – длина; A_i – площадь поперечного сечения i-го участка; E – модуль упругости 1-го рода (модуль Юнга).

Алгоритм расчета на жесткость

1. Выбрать начало координат для отсчета перемещений поперечных сечений (если стержень имеет жесткую заделку, то рекомендуется принять начало координат в заделке).

2. Разделить стержень на участки, в пределах каждого из которых неизменны функция продольной силы и площадь поперечного сечения.

3. Начиная от начала координат, определить абсолютную деформацию каждого участка с учетом знака продольной силы.

4. Определить перемещение каждого характерного сечения стержня как накопленную сумму абсолютных деформаций участков, предшествующих данному сечению: $\delta_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta l_i$.

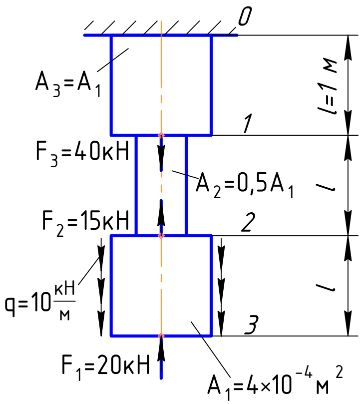
5. По значениям полученных перемещений рекомендуется построить эпюру, откладывая на базе, параллельной продольной оси стержня, величины перемещений в соответствующих сечениях стержня.

6. Записать условие жесткости в виде $\delta_{\max} \leq [\delta]$ и сделать вывод о его выполнении.

Пример решения задачи

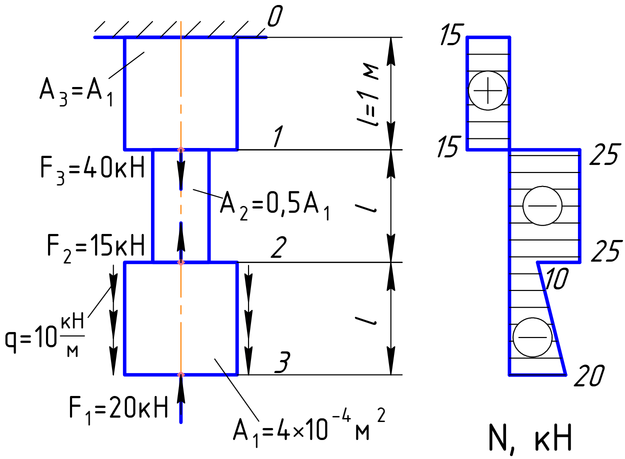
Задача

Стержень круглого поперечного сечения нагружен осевыми силами. Произвести проверку прочности и жесткости стержня, построив эпюры продольной силы N, нормальных напряжений σ и перемещений δ. Спроектировать стержень круглого поперечного сечения равного сопротивления растяжению-сжатию. Принять: $[\sigma] = 160$ МПа; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.



Решение

1. Построим эпюру продольных сил, используя метод сечений.



2. Определим нормальные напряжения в характерных сечениях на выделенных участках стержня.

Участок (*0–1*)

Во всех сечениях данного участка в силу постоянства значения продольной силы и площади поперечного сечения нормальное напряжение будет одинаковым.

$$\sigma_{(0-1)} = \frac{N_{(0-1)}}{A_{(0-1)}} = \frac{15\text{ кН}}{A_{(3)}} = \frac{15\text{ кН}}{4\cdot 10^{-4}\text{м}^2} = 3{,}75\cdot 10^4\text{ кПа} = 37{,}5\text{ МПа}.$$

Участок (*1–2*)

На этом участке, как и на предыдущем, в результате постоянства продольной силы и площади поперечного сечения напряжение будет постоянным по величине.

$$\sigma_{(1-2)} = \frac{N_{(1-2)}}{A_{(1-2)}} = \frac{-25\text{ кН}}{2\cdot 10^{-4}\text{м}^2} = -12{,}5\cdot 10^4\text{ кПа} = -125\text{ МПа}.$$

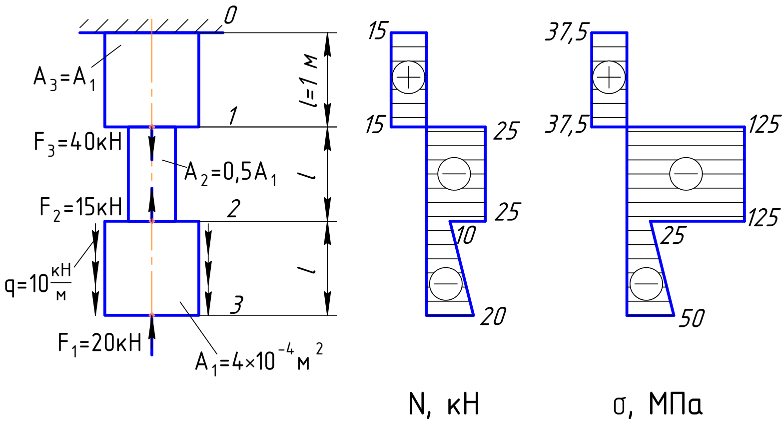
Участок (*2–3*)

$$\sigma_{(2)} = \frac{N_{(2)}}{A_{(2-3)}} = \frac{-10\text{ кН}}{4\cdot 10^{-4}\text{м}^2} = -2{,}5\cdot 10^4\text{ кПа} = -25\text{ МПа};$$

$$\sigma_{(3)} = \frac{N_{(3)}}{A_{(2-3)}} = \frac{-20\text{ кН}}{4\cdot 10^{-4}\text{м}^2} = -5\cdot 10^4\text{ кПа} = -50\text{ МПа}.$$

Во всех промежуточных сечениях участка (2–3) напряжение меняется по линейному закону соответственно закону изменения продольной силы.

3. По полученным значениям построим эпюру напряжений, соблюдая характер зависимости на участках соответственно эпюре продольной силы.



4. Проведем проверку прочности $\sigma_{max} = \left|\frac{N}{A}\right|_{max} \le [\sigma]$. Так как максимальное напряжение по модулю получилось равным 125 МПа, а $[\sigma]$ = 160 МПа, то можно сделать следующий вывод: брус прочен, но неэкономичен. Превышение нормативного коэффициента запаса по текучести в сечении «2» составляет 9,6/1,5 = 6,4, где 9,6 – коэффициент запаса по текучести в сечении «2», а 1,5 – нормативный коэффициент запаса.

5. Рассчитаем абсолютные линейные деформации участков стержня, приняв начало координат в жесткой заделке (сечение «0»). На участках с постоянным значением напряжения по длине можно использовать формулу $\Delta l = \frac{\sigma \cdot l}{E}$, т. е. на участках (0–1) и (1–2):

$$\Delta l_{(0-1)} = \frac{\sigma_{(0-1)} \cdot l_{(0-1)}}{E} = \frac{37{,}5\text{ МПа} \cdot 1\text{ м}}{2 \cdot 10^5\text{ МПа}} = 18{,}75 \cdot 10^{-5}\text{м};$$

$$\Delta l_{(1-2)} = \frac{\sigma_{(1-2)} \cdot l_{(1-2)}}{E} = \frac{-125\text{ МПа} \cdot 1\text{ м}}{2 \cdot 10^5\text{ МПа}} = -62{,}5 \cdot 10^{-5}\text{м}.$$

На участке (2–3) продольная сила и напряжение меняются по линейному закону и абсолютная линейная деформация определяется по интегральной формуле $\Delta l = \int\limits_{1} \frac{N(z)dz}{EA}$, то есть

$$\Delta l_{(2-3)} = \int\limits_{0}^{1\,\text{м}} \frac{(-10-10z)dz}{EA_{(2-3)}} = \frac{-10z-5z^2}{2\cdot 10^8\cdot 4\cdot 10^{-4}}\Big|_0^{1\text{м}} = -18{,}75\cdot 10^{-5}\ \text{м}.$$

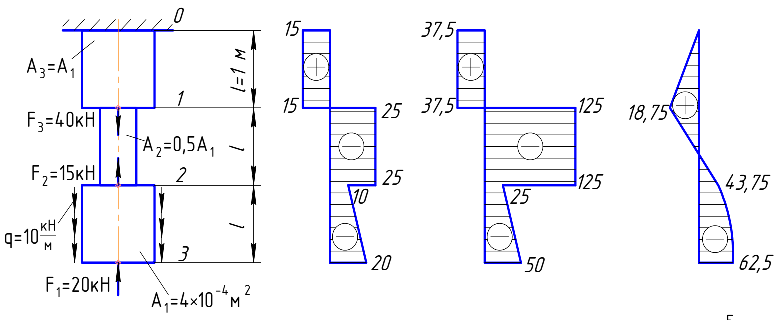
Характер изменения величины абсолютной деформации на участке (2–3), как видим, получился параболический.

6. Определим перемещения характерных сечений «1», «2», «3» относительно неподвижного сечения «0» и построим эпюру перемещений на базе, параллельной продольной оси стержня:

$$\delta_1 = \Delta l_{(0-1)} = 18{,}75\cdot 10^{-5}\ \text{м},$$

$$\delta_2 = \Delta l_{(0-1)} + \Delta l_{(1-2)} = 18{,}75\cdot 10^{-5}\ \text{м} - 62{,}5\cdot 10^{-5}\ \text{м} = -43{,}75\cdot 10^{-5}\ \text{м},$$

$$\delta_3 = \Delta l_{(0-1)} + \Delta l_{(1-2)} + \Delta l_{(2-3)} =$$
$$= 18{,}75\cdot 10^{-5} - 62{,}5\cdot 10^{-5} - 18{,}75\cdot 10^{-5} = -62{,}5\cdot 10^{-5}\ \text{м}.$$



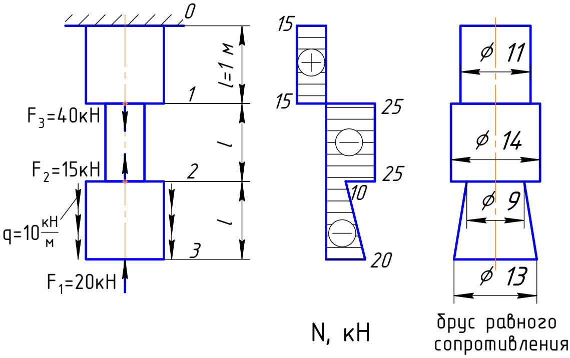
7. Проведем проверку жесткости: $\delta_{max} \le [\delta]$. Из расчетов $|\delta_{max}| = 62{,}5\cdot 10^{-5}$ м, $[\delta] = [\varepsilon]\cdot l = \frac{[\sigma]\cdot l}{E} = \frac{160\ \text{МПа}\cdot 3\ \text{м}}{2\cdot 10^5\ \text{МПа}} = 240\cdot 10^{-5}$ м (на основании закона Гука).

$$|\delta_{max}| = 62{,}5\cdot 10^{-5}\ \text{м} \ll [\delta] = 240\cdot 10^{-5}\ \text{м}.$$

Очевидно, что величина максимального перемещения значительно меньше допускаемого и стержень обладает избыточной жесткостью.

8. Спроектируем рациональную конструкцию с точки зрения экономии расхода материала. Такой конструкцией является стержень равного сопротивления, у которого на всех участках напряжение одинаково и равно допускаемому значению: $\sigma_i = [\sigma]$. Из этого условия выразим диаметр i-го участка стержня: $\frac{N_i}{A_i} = \frac{N_i \cdot 4}{\pi \cdot d^2} = [\sigma]$, откуда $[d_i] = 2 \cdot \sqrt{\frac{N_i}{\pi \cdot [\sigma]}}$. Подставляя с эпюры продольной силы ее значения по участкам (0–1), (1–2), получим соответственно значения диаметров цилиндрических участков: $[d_{(0\text{-}1)}] = 11$ мм, $[d_{(1\text{-}2)}] = 14$ мм. Цилиндрическая форма обусловлена постоянством продольной силы на соответствующих участках. На участке (2–3), в силу того что N носит переменный характер, изменяясь по линейному закону, для осуществления условия равной прочности форма участка должна быть конической. Определим два значения диаметра по величине продольной силы в начале ($N = -10$ кН) и в конце ($N = -20$ кН) участка. Получим соответственно диаметры: $[d_2] = 9$ мм, $[d_3] = 13$ мм.

9. Форма участка (2–3) представляет собой усеченный конус. По полученным значениям диаметров построим эскиз стержня равного сопротивления.



Задача решена. 

 **Потренируемся?**

- Пройти тестовый тренинг (прил. 2, тесты к теме 2).
- Решить задачу 2.1 из контрольной работы № 2 (прил. 4).

Тема 3. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ

Цель занятия – научиться определять координаты центра тяжести и главные центральные моменты инерции сложного сечения.

Необходимые знания для достижения цели

1. Определение и свойства главных центральных осей плоских сечений.
2. Определение статических моментов сечений.
3. Алгоритм нахождения центра тяжести сложного сечения
4. Формулы определения главных центральных моментов инерции простейших сечений.
5. Формулы преобразования осевых моментов инерции при параллельном переносе осей.

Что такое главные центральные моменты инерции?

Это осевые моменты инерции I_x и I_y, вычисленные относительно главных центральных осей.

Что такое главные центральные оси?

Это оси, проходящие через центр тяжести сечения (центральные), относительно которых центробежный момент инерции равен нулю (главные). Ось симметрии всегда является главной центральной осью.

Зачем нужно уметь определять главные центральные моменты инерции?

Эти величины характеризуют жесткость поперечного сечения конструкции, работающей в условиях изгиба, и используются при расчетах такой конструкции на прочность и жесткость.

Чтобы научиться определять главные центральные моменты инерции, надо знать !

1. Алгоритм определения центра тяжести сложного сечения

- Разделить сложную фигуру на *i* простых фигур, координаты точек центра тяжести которых известны.
- Выбрать вспомогательную систему координат, в которой будет определяться центр тяжести всей фигуры. *Рекомендации*: для рациональности решения целесообразно оси вспомогательной си-

стемы координат провести через точку центра тяжести одной из составляющих простых фигур.

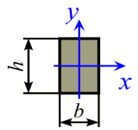
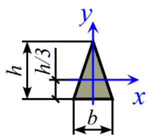
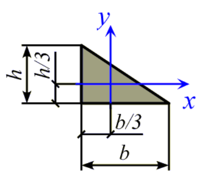
- Определить площади A_i и осевые статические моменты i простых фигур относительно вспомогательных осей: $S_{xi} = A_i \times y_{Ci}$; $S_{yi} = A_i \times x_{Ci}$, где x_{Ci} и y_{Ci} – координаты точек C_i центров тяжести простых фигур в системе вспомогательных осей.
- Вычислить координаты точки C центра тяжести всей фигуры по формулам:

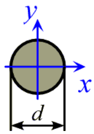
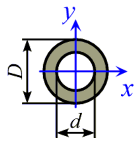
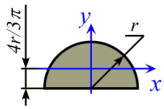
$$X_C = \frac{\sum_i S_{Yi}}{\sum_i A_i}; \quad Y_C = \frac{\sum_i S_{Xi}}{\sum_i A_i}.$$

2. Теорему о суммировании осевых моментов инерции.

Осевой момент инерции сложного сечения, состоящего из набора простейших, равен алгебраической сумме осевых моментов инерции простейших сечений, его составляющих, вычисленных относительно той же самой оси.

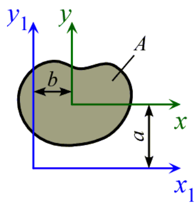
3. Формулы для определения главных центральных моментов инерции простейших сечений.

<table>
<tr><th>Формы простейших сечений</th><th>Главные центральные моменты инерции</th></tr>
<tr><td>
</td><td>$I_x = \frac{bh^3}{12}, \; I_y = \frac{hb^3}{12}$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>$I_x = \frac{bh^3}{36}, \; I_y = \frac{hb^3}{48}$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>$I_x = \frac{bh^3}{36}, \; I_y = \frac{hb^3}{36}$</td></tr>
</table>

Формы простейших сечений	Главные центральные моменты инерции
	$I_x = I_y = \dfrac{\pi d^4}{64}$
	$I_x = I_y = \dfrac{\pi D^4}{64}\left(1 - \alpha^4\right),$ $\alpha = \dfrac{d}{D}$
	$I_x = 0{,}11 r^4,\ I_y = \dfrac{\pi r^4}{8}$

4. Теорему о преобразовании осевых моментов инерции при параллельном переносе осей.

Осевой момент инерции сечения относительно произвольной оси равен моменту инерции относительно центральной оси, параллельной данной, плюс произведение квадрата расстояния между осями на площадь сечения:



$$I_{x_1} = I_x + a^2 A\ ,\ I_{y_1} = I_y + b^2 A.$$

Алгоритм определения главных центральных моментов инерции сложного сечения

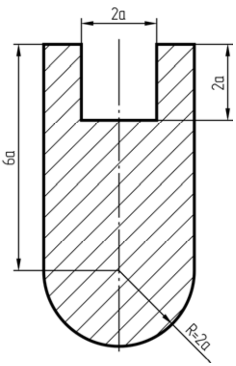
1. Определить положение центра тяжести сложного сечения согласно приведенному выше алгоритму.
2. Провести главные центральные оси сечения, одна из которых является осью симметрии, а другая, ей перпендикулярная, проходит через центр тяжести.

3. Провести главные центральные оси простейших сечений, составляющих сложное, и вычислить главные центральные моменты инерции этих сечений, воспользовавшись соответствующими формулами.
4. Найти расстояния между главной центральной осью всего сложного сечения и главной центральной осью каждого простейшего сечения, а затем определить моменты инерции каждого простейшего сечения относительно общей главной центральной оси, воспользовавшись теоремой о параллельном переносе осей.
5. Определить главные центральные моменты инерции сложного сечения по теореме о суммировании моментов инерции.

Пример определения положения центра тяжести и главных центральных моментов инерции сложного сечения

Задача

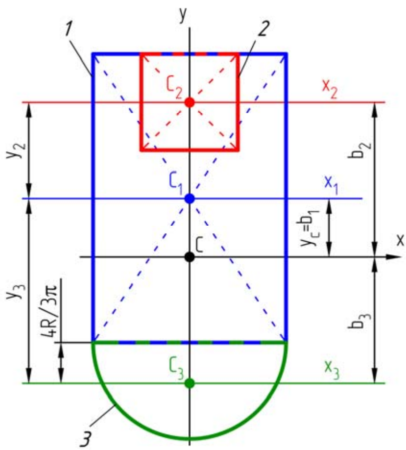
Для заданного сложного сечения определить положение центра тяжести и найти главные центральные моменты инерции.



Решение

Сечение имеет одну ось симметрии, следовательно, она является главной центральной осью (y) и центр тяжести сечения лежит на этой оси. Вторая главная центральная ось (x) перпендикулярна первой и проходит через центр тяжести сечения. Определим положение центра тяжести сложного сечения по оси y. Для этого:

- разобьем сложное сечение на простейшие, его составляющие: прямоугольник (1), квадрат (2) и полукруг (3);
- отметим центры тяжести простейших сечений точками C_1, C_2, и C_3 соответственно. Центры тяжести прямоугольника и квадрата лежат на пересечении их диагоналей, а у полукруга он смещен от его основания на расстояние, равное $4R/3\pi$. Проведем горизонтальные оси x_1, x_2, x_3 через точки C_1, C_2, и C_3 соответственно. Эти оси являются главными центральными осями простейших сечений;



- выберем вспомогательную систему координат, относительно которой будем находить положение центра тяжести всей фигуры. Свяжем её, например, с центром тяжести прямоугольника, т. е. x_1C_1y – вспомогательная система координат;
- определим ординаты точек C_1, C_2, и C_3 в выбранной системе координат:

$$y_1 = 0,\ y_2 = 2a,\ y_3 = -\left(3a + \frac{4\cdot 2a}{3\pi}\right) \approx -3{,}85a;$$

- найдем площади простейших фигур:

  для прямоугольника $A_1 = 6a \cdot 4a = 24a^2$,

  для квадрата $A_2 = (2a)^2 = 4a^2$,

  для полукруга $A_3 = \dfrac{\pi R^2}{2} = \dfrac{\pi(2a)^2}{2} \approx 6{,}28a^2$;

- найдем статические моменты простейших фигур относительно вспомогательной оси x_1:

$$S_{x_1}^{(1)} = y_1 \cdot A_1 = 0,$$

$$S_{x_1}^{(2)} = y_2 \cdot A_2 = 2a \cdot 4a^2 = 8a^3,$$

$$S_{x_1}^{(3)} = y_3 \cdot A_3 = -3{,}85a \cdot 6{,}28a^2 = -24{,}18a^3;$$

- подставим найденные значения в формулу для определения координаты общего центра тяжести:

$$y_C = \frac{S_{x_1}^{(1)} - S_{x_1}^{(2)} + S_{x_1}^{(3)}}{A_1 - A_2 + A_3} = \frac{0 - 8a^3 + \left(-24{,}18a^3\right)}{24\text{a}^2 - 4a^2 + 6{,}28a^2} = -1{,}22a.$$

Знак «–» у вторых слагаемых числителя и знаменателя формулы означает, что вторая фигура (квадрат) не входит в сложное сечение (является отверстием, «вынимается» из прямоугольника);

- отложим по оси y от вспомогательной оси x_1 вниз отрезок, равный $1{,}22a$, и нанесем точку C – общий центр тяжести сложного сечения. Проведем через точку C ось x – вторую главную центральную ось сложного сечения. Таким образом, оси x и y – главные центральные оси сложного сечения.

Найдем теперь относительно этих осей главные центральные моменты инерции I_x и I_y. Сначала определим момент I_x. Для этого:

- найдем расстояния между общей осью x и параллельной ей осью каждой простейшей фигуры x_1, x_2, x_3 соответственно, т. е. отрезки CC_1, CC_2 и CC_3:

$$b_1 = CC_1 = |y_C| = 1{,}22a$$

$$b_2 = CC_2 = |y_C| + |y_2| = 1{,}22a + 2a = 3{,}22a$$

$$b_3 = CC_3 = |y_3| - |y_C| = 3{,}85a - 1{,}22a = 2{,}62a;$$

- определим осевые моменты инерции простейших фигур относительно их главных центральных осей:

$$I_{x_1}^{(1)} = \frac{b_1 h_1^3}{12} = \frac{4a \cdot (6a)^3}{12} = 72a^4$$ – для прямоугольника,

$$I_{x_2}^{(2)} = \frac{b_2 h_2^3}{12} = \frac{2a \cdot (2a)^3}{12} = 1{,}33a^4$$ – для квадрата,

$$I_{x_3}^{(3)} = 0{,}11R^4 = 0{,}11(2a)^4 = 1{,}76a^4$$ – для полукруга;

- пересчитаем их относительно общей главной центральной оси x, воспользовавшись теоремой о параллельном переносе осей:

$$I_x^{(1)} = I_{x_1}^{(1)} + b_1^2 A_1 = 72a^4 + (1{,}22a)^2 \cdot 24a^2 = 107{,}72a^4,$$

$$I_x^{(2)} = I_{x_2}^{(2)} + b_2^2 A_2 = 1{,}33a^4 + (3{,}22a)^2 \cdot 4a^2 = 42{,}8a^4,$$

$$I_x^{(3)} = I_{x_3}^{(3)} + b_3^2 A_3 = 1{,}76a^4 + (2{,}62a)^2 \cdot 6{,}28a^2 = 44{,}87a^4;$$

- сложим найденные величины согласно теореме о сложении моментов инерции. Таким образом, главный центральный момент инерции сложного сечения относительно оси x равен:

$$I_x = I_x^{(1)} - I_x^{(2)} + I_x^{(3)} = 107{,}72a^4 - 42{,}8a^4 + 44{,}87a^4 = 109{,}79a^4 \approx 110a^4.$$

Найдем теперь главный центральный момент инерции относительно оси y. Здесь расчеты будут несколько проще, поскольку все центры тяжести лежат на этой оси и она является главной центральной осью как простых фигур, так и всей сложной, т. е. оси y_1, y_2, y_3 и y совпадают, следовательно, не нужно применять теорему о параллельном переносе осей, достаточно воспользоваться теоремой о сложении моментов инерции и соответствующими формулами для простейших фигур:

$$I_y = I_y^{(1)} - I_y^{(2)} + I_y^{(3)} = \frac{h_1 b_1^{\,3}}{12} - \frac{h_2 b_2^{\,3}}{12} + \frac{\pi D^4}{64}\Big/2 =$$

$$= \frac{6a \cdot (4a)^3}{12} - \frac{(2a)^4}{12} + \frac{\pi (4a)^4}{64 \cdot 2} = 36{,}95a^4 \approx 37a^4.$$

Здесь для полукруга мы воспользовались формулой момента инерции полного круга, поделив её на 2. Это возможно, поскольку ось y проходит через центр полного круга, а полукруг является его половиной.

Таким образом, мы нашли главные центральные моменты инерции заданного сложного сечения:

$$I_x = 110a^4, \quad I_y = 37a^4.$$

Задача решена. 

 **Потренируемся?**

- Пройти тестовый тренинг (прил. 2, тесты к теме 3).
- Решить пункт 3 задачи 2.2 из контрольной работы № 2 (прил. 4).

Тема 4. РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ БАЛОК ПРИ ПРЯМОМ ИЗГИБЕ

Цель занятия – научиться рассчитывать на прочность стержневые конструкции, работающие в условиях прямого изгиба.

Необходимые знания для достижения цели

1. Условие прочности по допускаемому напряжению при прямом изгибе.
2. Особенности расчета на прочность при изгибе балок, изготовленных из пластичного и хрупкого материала.
3. Алгоритм расчета на прочность балок из пластичного материала.
4. Алгоритм расчета на прочность балок из хрупкого материала.

Что такое условие прочности по допускаемому напряжению?

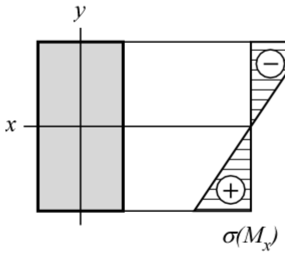
Известно, что в условиях прямого поперечного изгиба доминирующее значение в оценке прочности имеют нормальные напряжения, возникающие от внутреннего изгибающего момента, которые вычисляются по следующей формуле: $\sigma = \dfrac{M_x}{W_x}$, где M_x – величина внутреннего изгибающего момента в данном сечении; W_x – осевой момент сопротивления. Условием прочности по допускаемому напряжению при прямом изгибе считается выполнение следующего неравенства:

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_x|_{\max}}{W_x} \le [\sigma],$$

где $[\sigma]$ – величина допускаемого напряжения, являющаяся справочной величиной или определяемая по характеристикам прочности для данной марки материала.

Как распределяется нормальное напряжение по поперечному сечению балки?

Нормальное напряжение $\sigma(M_x)$ по ширине сечения не изменяется, а по высоте сечения изменяется по линейному закону, причем оно равно нулю в точках нейтральной линии (горизонтальной главной центральной оси x) и принимает максимальное значение в точках, наиболее удаленных от нейтральной линии (опасных точках). Нейтральная линия делит все сечение на две зоны – зону растянутых (+) и сжатых (–) волокон.



Что такое осевой момент сопротивления?

Это геометрическая характеристика, которая зависит от формы и размеров поперечного сечения, а также от положения опасных точек в нем:

$$W_x = \frac{I_x}{y_{\max}},$$

где I_x – осевой момент инерции сечения; $y_{\max}$ – расстояние от нейтральной линии до наиболее удаленных (опасных) точек сечения.

Чем с прочностной точки зрения отличаются пластичный и хрупкий материалы?

Пластичный материал одинаково сопротивляется напряжениям растяжения и сжатия, поэтому для конструкций из пластичных материалов допускаемое напряжение принимается единое:

$$[\sigma]_p = [\sigma]_c = [\sigma] = \frac{\sigma_{\text{Т}}}{n_{\text{Т}}},$$

где $\sigma_{\text{Т}}$ – предел текучести материала; $n_{\text{Т}}$ – коэффициент запаса по текучести.

Хрупкий материал лучше сопротивляется нагрузкам сжатия и хуже нагрузкам растяжения, поэтому допускаемые напряжения здесь в зонах растяжения и сжатия разные:

$$[\sigma]_c = \frac{\sigma_{\text{В}c}}{n_{\text{В}}},\ [\sigma]_p = \frac{\sigma_{\text{В}p}}{n_{\text{В}}},\ \text{причем}\ \ [\sigma]_c > [\sigma]_p$$

где $\sigma_{\text{В}c}$, $\sigma_{\text{В}p}$ – пределы прочности материала при сжатии и растяжении соответственно; $n_{\text{В}}$ – коэффициент запаса по прочности.

Алгоритм расчета на прочность балок из пластичного материала

1. Определить положение опасного сечения:

- построить эпюры поперечной силы Q_y и изгибающего момента M_x;
- по эпюре M_x определить максимальное значение изгибающего момента.

2. Определить положение опасных точек в опасном сечении:

- определить положение нейтральной линии;
- найти $y_{\max}$ – расстояние от нейтральной линии до наиболее удаленных (опасных) точек сечения.

3. Определить осевой момент сопротивления: $W_x = \dfrac{I_x}{y_{\max}}$.

4. Записать условие прочности: $\sigma_{\max} = \dfrac{|M_x|_{\max}}{W_x} \le [\sigma]$ и решить его соответственно поставленной задаче.

Алгоритм расчета на прочность балок из хрупкого материала

1. Определить положение опасного сечения, построив эпюры поперечной силы Q_y и изгибающего момента M_x.

2. Определить положение нейтральной линии в опасном сечении, определив положение его центра тяжести.

3. Решить вопрос о рациональности положения сечения, обеспечив соответствие: при $[\sigma]_c > [\sigma]_p$ расстояние $y_{\max c}$ должно быть больше $y_{\max p}$.

4. Определить момент инерции сечения I_x относительно нейтральной линии.

5. Определить положение опасного волокна в опасном сечении, проведя следующий анализ:

- если
$$\frac{y_{\max c}}{y_{\max p}} > \frac{[\sigma]_c}{[\sigma]_p}, \tag{1}$$
то опасным является наиболее сжатое волокно;
- если
$$\frac{y_{\max c}}{y_{\max p}} < \frac{[\sigma]_c}{[\sigma]_p}, \tag{2}$$
то опасным является наиболее растянутое волокно в опасном сечении.

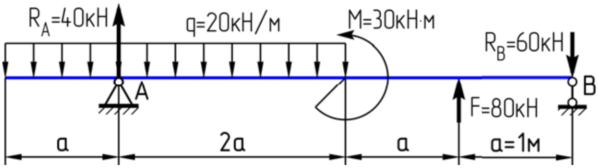
6. Записать условие прочности и решить его соответственно поставленной задаче:

- $\dfrac{M_{X\max} \cdot y_{\max c}}{I_x} \le [\sigma]_c$ в случае выполнения условия (1);
- $\dfrac{M_{X\max} \cdot y_{\max p}}{I_x} \le [\sigma]_p$ в случае выполнения условия (2).

Пример решения задачи

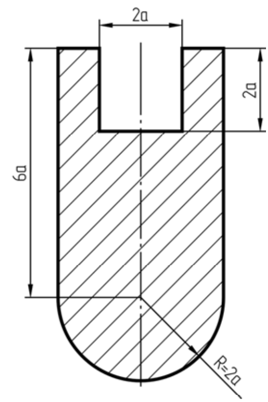
Задача

Двухопорная балка постоянного поперечного сечения нагружена заданной системой поперечных сил и изгибающих моментов.



1. Для данной балки, изготовленной из пластичного материала с допускаемым напряжением $[\sigma] = 160$ МПа, подобрать из условия прочности двутавровое, прямоугольное ($h/b = 2$) и круглое сечения. Дать заключение о рациональности формы сечения по расходу материала.

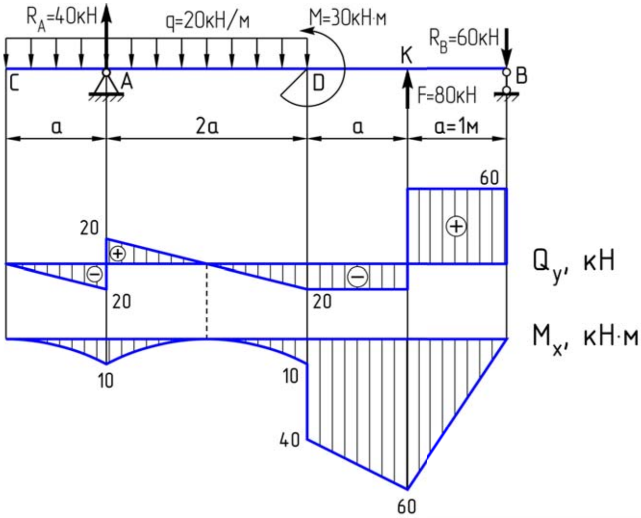
2. Для данной балки, изготовленной из хрупкого материала с допускаемыми напряжениями $[\sigma]_p = 100$ МПа, $[\sigma]_c = 150$ МПа, определить из условия прочности характерный размер $[a]$ сложного поперечного сечения, предварительно решив вопрос о его рациональном положении. Принять: $[\sigma]_p = 100$ МПа, $[\sigma]_c = 150$ МПа.



Решение

1. Рассмотрим первый случай, когда балка изготовлена из пластичного материала.

Построим эпюры поперечной силы Q_y и изгибающего момента M_x:



По эпюре M_x определяем положение опасного сечения – сечение K наиболее опасно, $M_{x\max} = 60$ кНм.

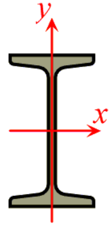
Подберем из условия прочности размеры трех форм сечений: двутаврового, прямоугольного и круглого. Для этого прежде всего найдем из условия прочности, каким минимальным моментом сопротивления должно обладать поперечное сечение балки:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{x\max}}{W_x} \le [\sigma] \rightarrow [W_x] = \frac{M_x}{[\sigma]} = \frac{60 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 375 \cdot 10^{-6}\ \text{м}^3 = 375\ \text{см}^3.$$

Далее для каждой из трех форм сечений выразим момент сопротивления с геометрической точки зрения через характерный размер сечения и, приравняв его к расчетному моменту сопротивления $[W_x] = 375$ см^3, определим характерный размер.

Двутавровое сечение

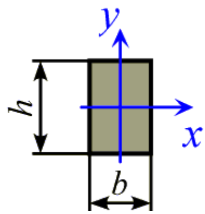
Тонкостенные профили – двутавры, швеллеры, уголки – выпускаются промышленностью определенных стандартных размеров. Номер профиля соответствует его высоте, выраженной в сантиметрах. Все характерные размеры таких профилей, а также их геометрические характеристики (в том числе и W_x) сведены в таблицы, которые называются «Сортамент прокатных профилей» (приводятся



в справочниках, учебниках и задачниках по сопротивлению материалов). Остается лишь по сортаменту указать номер двутавра, у которого момент сопротивления ближайший к расчетному: по сортаменту (ГОСТ 8239-89) подходит двутавр № 27а, у которого $W_x = 407$ см^3, а площадь сечения $A_{дв} = 43{,}2$ см^2.

Прямоугольное сечение ($h/b = 2$)

Нейтральная линия прямоугольника – главная центральная ось x. Расстояние от нейтральной линии до наиболее удаленных точек сечения $y_{\max} = \frac{h}{2}$. Тогда $W_x = \frac{I_x}{y_{\max}} = \frac{bh^3 \cdot 2}{12 \cdot h} = \frac{bh^2}{6}$. Учитывая, что $h = 2b$, выразим момент сопротивления прямоугольника через характерный размер b: $W_x = \frac{b(2b)^2}{6} = \frac{2b^3}{3}$. Приравняв его к расчетному значению, находим минимально допустимый размер прямоугольника:

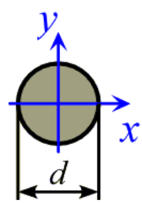


$$\frac{2b^3}{3} = 375 \text{ см}^3 \rightarrow [b] = \sqrt[3]{\frac{375 \cdot 3}{2}} \approx 8{,}3 \text{ см},$$

тогда площадь прямоугольника: $A_{пр} = bh = 2b^2 = 2 \cdot 8{,}3^2 = 137{,}8$ см^2.

Круглое сечение

Здесь все аналогично: нейтральная линия – ось x, $y_{\max} = \frac{d}{2}$. Тогда



$$W_x = \frac{I_x}{y_{\max}} = \frac{\pi d^4 \cdot 2}{64 \cdot d} = \frac{\pi d^3}{32} = 375 \text{ см}^3 \rightarrow$$

$$\rightarrow [d] = \sqrt[3]{\frac{375 \cdot 32}{\pi}} \approx 15{,}6 \text{ см}.$$

Площадь круглого сечения:

$$A_{кр} = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi \cdot 15{,}6^2}{4} = 191{,}1 \text{ см}^2.$$

Наиболее рациональной формой сечения по расходу материала является та, которая имеет наименьшую площадь:

$$A_{дв} = 43{,}2 \text{ см}^2 < A_{пр} = 137{,}8 \text{ см}^2 < A_{кр} = 191{,}1 \text{ см}^2.$$

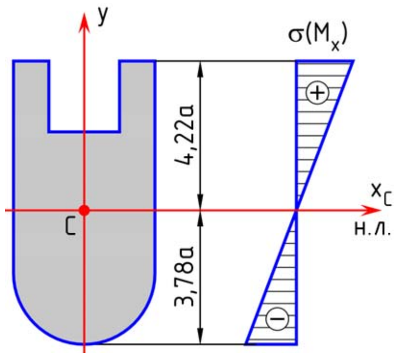
Следовательно, двутавровое сечение является наиболее рациональным.

2. Рассмотрим балку из хрупкого материала и подберем из условия прочности характерный размер $[a]$ заданного сложного сечения, геометрические характеристики которого были определены в теме 3.

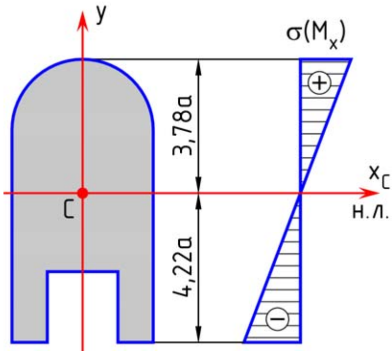
Нейтральная линия сечения – главная центральная ось x_C, проходящая через центр тяжести. Она делит сечение на две зоны – растянутых и сжатых волокон. Учитывая правило знаков для эпюры изгибающих моментов M_x (строится на сжатых волокнах), легко определить расположение соответствующих зон в опасном сечении. На эпюре M_x в опасном сечении K ордината $M_{xK} = M_{x\,\max} = 60$ кНм расположена ниже осевой линии, следовательно, в этом сечении снизу от нейтральной линии расположены сжатые волокна, а сверху – растянутые. Определим расстояния от нейтральной линии до наиболее удаленных точек сечения в зонах растяжения и сжатия – $y_{\max p}$ и $y_{\max c}$, учитывая положение центра тяжести сечения:

$$y_{\max p} = \frac{h_1}{2} + |y_C| = \frac{6a}{2} + |-1{,}22a| = 4{,}22a\,;$$

$$y_{\max c} = \frac{h_1}{2} - |y_C| + R = \frac{6a}{2} - |-1{,}22a| + 2a = 3{,}78a\,.$$



Решим вопрос о рациональности расположения сечения. Поскольку $[\sigma]_c = 150$ МПа $> [\sigma]_p = 100$ МПа, а $y_{\max c} = 3{,}78a < y_{\max p} = 4{,}22a$, значит, сечение расположено нерационально и его нужно перевернуть на 180°:



Теперь условие рациональности выполняется:

$$y_{\max c} = 4{,}22a > y_{\max p} = 3{,}78a.$$

Определим положение опасного волокна в опасном сечении:

$$\frac{y_{\max c}}{y_{\max p}} = \frac{4{,}22a}{3{,}78a} = 1{,}12 < \frac{[\sigma]_c}{[\sigma]_p} = \frac{150}{100} = 1{,}5\,,$$

следовательно, согласно условию (2) алгоритма опасным является наиболее растянутое волокно.

Запишем условие прочности для растянутого волокна и определим характерный размер сложного сечения $[a]$, учитывая ранее определенное значение момента инерции $I_x = 110a^4$.

$$\frac{M_{X\max} \cdot y_{\max p}}{I_x} \le [\sigma]_p \;\rightarrow\; \frac{60\ \text{кНм} \cdot 3{,}78a}{110a^4} \le 160 \cdot 10^3\ \text{кПа} \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; [a] = \sqrt[3]{\frac{60\ \text{кНм} \cdot 3{,}78}{110 \cdot 160 \cdot 10^3\ \text{кПа}}} = 0{,}0234\ \text{м} \approx 24\ \text{мм}\,.$$

Задача решена. 

 **Потренируемся?**

- Пройти тестовый тренинг (прил. 2, тесты к теме 4).
- Решить пункты 1, 2 и 4 задачи 2.2 из контрольной работы № 2 (прил. 4).

Тема 5. РАСЧЕТ НА ЖЕСТКОСТЬ БАЛОК ПРИ ПРЯМОМ ИЗГИБЕ

Цель занятия – научиться рассчитывать на жесткость стержневые конструкции, работающие в условиях прямого изгиба.

Необходимые знания для достижения цели

1. Метод Мора определения перемещений при изгибе.
2. Условие жесткости при изгибе балок по величине допускаемого перемещения.
3. Алгоритм расчета на жесткость балок при изгибе.

Какие перемещения испытывают поперечные сечения балки при прямом изгибе?

Согласно гипотезе Бернулли поперечные сечения балки при прямом изгибе не искривляются, а лишь вертикально смещаются, поворачиваясь при этом относительно нейтральной линии на некоторый угол. Таким образом, *перемещениями при изгибе являются вертикальное смещение (прогиб) сечений* δ *и угол поворота сечений* θ, причем функция углов поворота $\theta(z)$ связана с функцией прогибов $\delta(z)$ дифференциальной зависимостью:

$$\theta = \frac{d\delta}{dz},$$

поэтому из двух функций перемещений основной является функция прогибов.

Как рассчитать балку на жесткость при изгибе?

Для этого необходимо определить максимальный прогиб балки $\delta_{\max}$, который можно найти, получив аналитическое выражение для функции прогибов $\delta(z)$. Но это достаточно сложная с математической точки зрения задача. Поэтому, чтобы оценить деформацию балки при изгибе, рекомендуется следующее:

- определить прогибы в граничных незакрепленных сечениях балки;
- изобразить приближенный вид изогнутой оси балки, учитывая найденные значения перемещений, условия закрепления (закрепленные сечения не смещаются), а также согласуя направление выпуклости осевой линии с участками эпюры изгибающих моментов M_x, на которых момент не меняет знак (эпюра M_x располагается со стороны сжатых волокон относительно осевой линии);

- глядя на вид изогнутой оси балки, определить, в каком её сечении прогиб наибольший, найти δ_{max} методом Мора и проверить выполнение условия жесткости.

Что такое условие жесткости при изгибе?

Под условием жесткости понимается ограничение максимального вертикального смещения сечений балки величиной допускаемого перемещения:

$$\delta_{max} \le [\delta],$$

где δ_{max} – величина максимального прогиба балки; $[\delta]$ – допускаемое перемещение, обычно назначаемое из условий эксплуатации.

Как определить перемещение конкретного сечения балки при изгибе?

Перемещение δ конкретного сечения балки определяется методом Мора.

Алгоритм метода Мора

1. Для заданной балки построить эпюру изгибающих моментов M_x от действия внешней нагрузки (грузовую эпюру).

2. Разгрузить балку от внешних нагрузок.

3. К сечению балки, перемещение которого необходимо определить, приложить в направлении перемещения единичную безразмерную сосредоточенную силу $F = 1$ и построить от действия этой силы единичную эпюру изгибающих моментов M_1.

4. Искомое перемещение δ определить путем «перемножения» грузовой эпюры M_x на единичную эпюру M_1, используя:

- либо интеграл Мора:

$$\delta = \sum_{i=1}^{k} \int_{l_i} \frac{M_{xi}(z) \cdot M_{1i}(z)}{EI_x} dz_i, \tag{1}$$

где k – количество участков балки; l_i – длина i-го участка; $M_{xi}(z)$, $M_{1i}(z)$ – функции грузового и единичного изгибающих моментов на i-м участке балки соответственно; E – модуль Юнга материала балки; I_x – осевой момент инерции поперечного сечения. Таким образом, интегралы составляются и находятся для каждого участка балки, а результат суммируется;

• либо формулу Симпсона:

$$\delta = \sum_{i=1}^{k} \frac{l_i}{6EI_x}\left(M_{xi}^{\text{л}} \cdot M_{1i}^{\text{л}} + 4M_{xi}^{\text{ср}} \cdot M_{1i}^{\text{ср}} + M_{xi}^{\text{п}} \cdot M_{1i}^{\text{п}}\right), \tag{2}$$

где $M_{xi}^{\text{л}}$, $M_{xi}^{\text{ср}}$, $M_{xi}^{\text{п}}$ – ординаты грузовой эпюры изгибающего момента M_x, взятые на левой границе, в средней точке и на правой границе i-го участка балки соответственно; аналогично $M_{1i}^{\text{л}}$, $M_{1i}^{\text{ср}}$, $M_{1i}^{\text{п}}$ – ординаты единичной эпюры изгибающего момента M_1, взятые на левой границе, в средней точке и на правой границе i-го участка балки. Остальные обозначения те же;

• либо формулу Верещагина:

$$\delta = \sum_{i=1}^{k} \frac{\Omega_{Fi} \cdot M_{1Ci}}{EI_x}, \tag{3}$$

где Ω_{Fi} – площадь грузовой эпюры изгибающего момента M_x на i-м участке балки; M_{1Ci} – ордината единичной эпюры изгибающего момента M_1, расположенная под центром тяжести грузовой эпюры M_x i-го участка. Остальные обозначения те же.

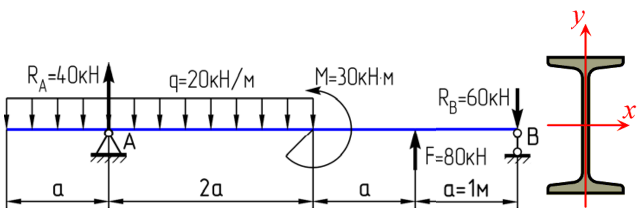
Алгоритм расчета на жесткость балок при изгибе

1. Построить эпюру изгибающего момента M_x.
2. Определить перемещения граничных незакрепленных сечений балки методом Мора.
3. Изобразить приближенный вид изогнутой оси балки и определить максимальный прогиб δ_{max}.
4. Записать условие жесткости: $\delta_{max} \le [\delta]$ и сделать вывод о его выполнении.

Пример решения задачи

Задача

Двухопорная балка двутаврового сечения нагружена системой поперечных сил и изгибающих моментов.



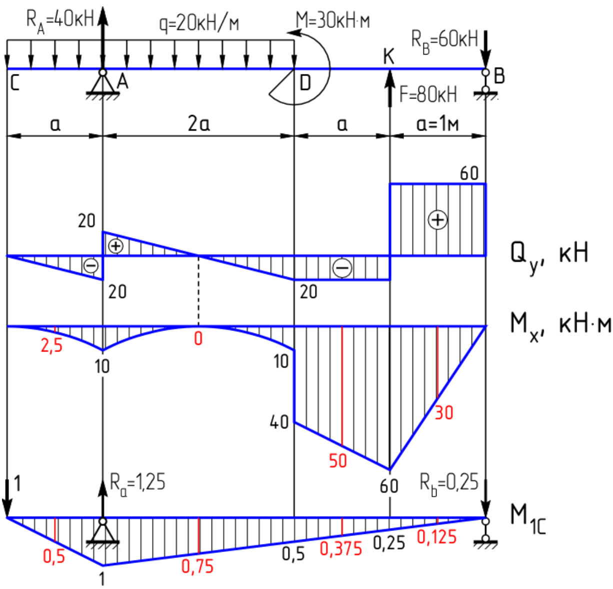
Провести проверку жесткости балки, если размер её поперечного сечения – двутавр № 27а, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $[\delta] = 0{,}001 \cdot L$ (где L – расстояние между опорами).

Решение

1. Построим эпюры поперечной силы Q_x и изгибающего момента M_x.

2. Определим перемещения незакрепленных сечений балки C, D, K методом Мора.

Для определения прогиба сечения C разгрузим балку от внешних нагрузок и приложим к этому сечению единичную безразмерную сосредоточенную силу в направлении перемещения (вертикально). Построим от её действия единичную эпюру изгибающих моментов M_{1C}, определив предварительно из уравнений равновесия реакции в опорах: $R_{1A} = 1{,}25$; $R_{1B} = 0{,}25$.



«Перемножим» грузовую эпюру моментов M_x на единичную M_{1C}, используя формулу Симпсона (2). Количество участков перемножения $k = 4$: CA, AD, DK и KB. Методом сечений найдем значения грузового и единичного моментов посередине длины каждого участка.

Тогда:

$$\delta_C = \sum_{i=1}^{4} \frac{l_i}{6EI_x}\left(M_{xi}^{\text{л}} \cdot M_{1i}^{\text{л}} + 4M_{xi}^{\text{ср}} \cdot M_{1i}^{\text{ср}} + M_{xi}^{\text{п}} \cdot M_{1i}^{\text{п}}\right) =$$

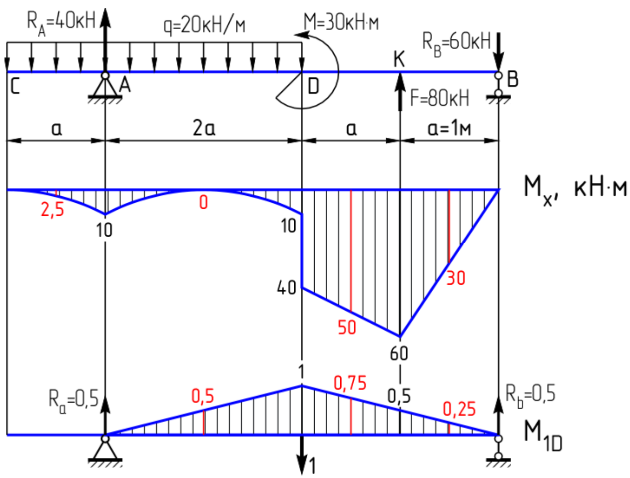
$$= \frac{10^3}{EI_x}\left[\frac{1}{6}(0 + 4 \cdot 2{,}5 \cdot 0{,}5 + 10 \cdot 1) + \frac{2}{6}(10 \cdot 1 + 4 \cdot 0 \cdot 0{,}75 + 10 \cdot 0{,}5) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{6}(40 \cdot 0{,}5 + 4 \cdot 50 \cdot 0{,}375 + 60 \cdot 0{,}25) + \frac{1}{6}(60 \cdot 0{,}25 + 4 \cdot 30 \cdot 0{,}125 + 0)\right] =$$

$$= \frac{30{,}83 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 5500 \cdot 10^{-8}} = 0{,}0028 \text{ м} = 2{,}8 \text{ мм},$$

где модуль Юнга $E = 2 \cdot 10^5$ МПа $= 2 \cdot 10^{11}$ Па, момент инерции для двутавра № 27а определяем по сортаменту: $I_x = 5500$ см$^4 = 55 \cdot 10^{-8}$ м^4. Значение перемещения $\delta_C = 2{,}8$ мм получили положительное, следовательно, приложенная в точке C единичная сила показывает истинное направление перемещения. Таким образом, при изгибе балки сечение C смещается вниз на 2,8 мм.

Аналогично определим прогиб балки в сечении D. Вновь разгрузим балку от внешних нагрузок и приложим к сечению D единичную силу. Построим единичную эпюру M_{1D} и найдем перемещение δ_D по формуле Симпсона. При этом количество участков перемножения $k = 3$: AD, DK, KB.



$$\delta_D = \sum_{i=1}^{3} \frac{l_i}{6EI_x}\left(M_{xi}^{\text{л}} \cdot M_{1i}^{\text{л}} + 4M_{xi}^{\text{ср}} \cdot M_{1i}^{\text{ср}} + M_{xi}^{\text{п}} \cdot M_{1i}^{\text{п}}\right) =$$

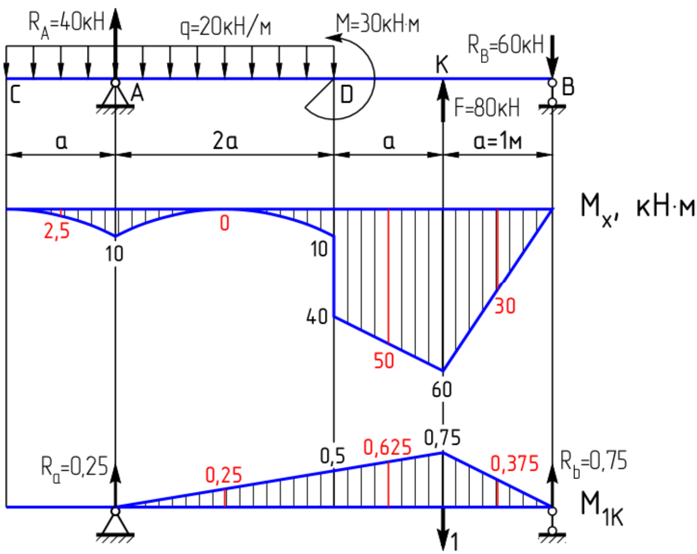
$$= \frac{10^3}{EI_x}\left[-\frac{2}{6}(10 \cdot 0 + 4 \cdot 0 \cdot 0{,}5 + 10 \cdot 1) - \frac{1}{6}(40 \cdot 1 + 4 \cdot 50 \cdot 0{,}75 + 60 \cdot 0{,}5) - \right.$$

$$\left. -\frac{1}{6}(60 \cdot 0{,}5 + 4 \cdot 30 \cdot 0{,}25 + 0) \right] = -\frac{50 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 5500 \cdot 10^{-8}} =$$

$$= -0{,}0045 \text{ м} = -4{,}5 \text{ мм}.$$

Знаки «–» в квадратных скобках означают, что на всех участках перемножения грузовая и единичная эпюры расположены с разных сторон от осевой линии, т. е. перемножаемые в формуле Симпсона моменты имеют противоположные знаки. Полученное отрицательное значение перемещения говорит о том, что сечение *D* смещается в сторону, противоположную направлению приложенной единичной силы. Таким образом, сечение *D* смещается вертикально вверх на 4,5 мм.

Определим прогиб сечения *K*. Разгрузим балку от внешних нагрузок и приложим к сечению *K* единичную силу. Построим единичную эпюру M_{1k} и найдем перемещение δ_K по формуле Симпсона. При этом количество участков перемножения $k = 3$: *AD*, *DK*, *KB*.



$$\delta_K = \sum_{i=1}^{3} \frac{l_i}{6EI_x}\left(M_{xi}^{\text{л}} \cdot M_{1i}^{\text{л}} + 4M_{xi}^{\text{ср}} \cdot M_{1i}^{\text{ср}} + M_{xi}^{\text{п}} \cdot M_{1i}^{\text{п}}\right) =$$

$$= \frac{10^3}{EI_x}\left[-\frac{2}{6}(10 \cdot 0 + 4 \cdot 0 \cdot 0{,}25 + 10 \cdot 0{,}5) -\right.$$

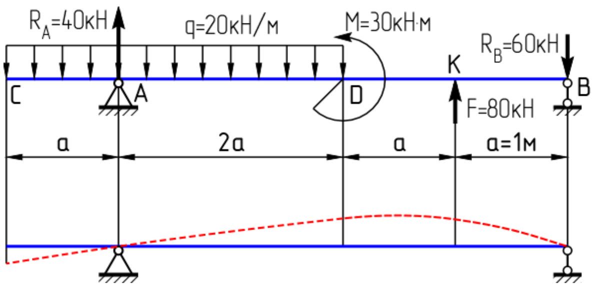
$$\left. -\frac{1}{6}(40 \cdot 0{,}5 + 4 \cdot 50 \cdot 0{,}625 + 60 \cdot 0{,}75) - \frac{1}{6}(60 \cdot 0{,}75 + 4 \cdot 30 \cdot 0{,}375 + 0)\right] =$$

$$= -\frac{48 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 5500 \cdot 10^{-8}} = -0{,}0044 \text{ м} = -4{,}4 \text{ мм}.$$

Таким образом, сечение K балки смещается вверх на 4,4 мм.

3. Изобразим приближенный вид изогнутой оси балки и определим максимальный прогиб $\delta_{\max}$.

Изобразим сначала прямолинейную ось балки, какой она была до приложения нагрузки. Отметим в граничных сечениях найденные значения перемещений, учитывая, что закрепленные сечения A и B сместиться не могут: δ_C = -2,8 мм (вниз), $\delta_A = 0$, δ_D = 4,5 мм (вверх), δ_K = 4,4 мм (вверх), $\delta_B = 0$. Соединим полученные точки плавной кривой выпуклостью вверх, так как эпюра изгибающих моментов M_x, построенная на сжатых волокнах, полностью лежит ниже осевой линии.



По виду изогнутой оси балки определяем, что максимальный прогиб получился в сечении D: $\delta_{\max} = |\delta_D| = 4{,}5$ мм.

4. Проверим выполнение условия жесткости.

Найдем численное значение допускаемого перемещения:

$$[\delta] = 0{,}001 \cdot L = 0{,}001 \cdot 4 \text{ м} = 4 \text{ мм}.$$

Тогда:

$$\delta_{max} = 4{,}5 \text{ мм} > [\delta] = 4 \text{ мм}.$$

Следовательно, условие жесткости не выполняется.

Задача решена. 

 **Потренируемся?**

- Пройти тестовый тренинг (прил. 2, тесты к теме 5).
- Решить пункт 5 задачи 2.2 из контрольной работы № 2 (прил. 4).

Тема 6. РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ ПРИ КРУЧЕНИИ ВАЛА КРУГЛОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

Цель занятия – научиться рассчитывать на прочность и жесткость стержневые конструкции круглого поперечного сечения, работающие в условиях кручения.

Необходимые знания для достижения цели

1. Условие прочности по допускаемому напряжению при кручении.
2. Алгоритм расчета на прочность.
3. Алгоритм построения эпюры углов закручивания поперечных сечений конструкции.
4. Условие жесткости при кручении по абсолютному углу закручивания.
5. Алгоритм расчета на жесткость.

Что такое условие прочности по допускаемому напряжению?

В условиях кручения в поперечных сечениях стержневой конструкции возникают касательные напряжения под действием внутреннего крутящего момента, которые в опасных точках сечения вычисляются по следующей формуле: $\tau = \frac{M_z}{W_\rho}$, где M_z – величина внутреннего крутящего момента в данном сечении; W_ρ – полярный момент сопротивления – геометрическая характеристика поперечного сечения. Для круглого сечения диаметром d полярный момент сопротивления $W_\rho = \frac{\pi d^3}{16}$. Условием прочности по допускаемому напряжению при кручении считается выполнение следующего неравенства:

$$\tau_{\max} = \left|\frac{M_z}{W_\rho}\right|_{\max} \le [\tau],$$

где $[\tau]$ – величина допускаемого напряжения, являющаяся справочной величиной или определяемая по характеристикам прочности для данной марки материала: $[\tau] = \frac{\tau_{\text{Т}}}{n_{\text{Т}}}$ для пластичного материала или $[\tau] = \frac{\tau_{\text{В}}}{n_{\text{В}}}$ для хрупкого материала, где $\tau_{\text{Т}}$ – предел текучести; $n_{\text{Т}}$ – коэффициент запаса по текучести; $\tau_{\text{В}}$ – предел прочности данной марки материала; $n_{\text{В}}$ – коэффициент запаса по прочности.

Алгоритм расчета на прочность

1. Определить положение опасного сечения:

- построить эпюру крутящего момента M_z;
- определить величину максимального касательного напряжения:

$$\tau_{\max} = \left|\frac{M_z}{W_\rho}\right|_{\max}.$$

2. Записать условие прочности:

$$\tau_{\max} = \left|\frac{M_z}{W_\rho}\right|_{\max} \le [\tau]$$

и решить его соответственно поставленной задаче.

Какие перемещения испытывают круглые поперечные сечения стержня при кручении?

Согласно гипотезе Бернулли круглые и плоские поперечные сечения стержня до приложения крутящего момента остаются круглыми и плоскими и после его воздействия, поворачиваясь при этом вокруг продольной оси на некоторый угол. Таким образом, *перемещением при кручении считается* φ *— угол закручивания поперечных сечений вокруг продольной оси стержня*.

Чтобы оценить деформацию стержня при кручении, рекомендуется построить эпюру распределения углов закручивания φ вдоль оси конструкции.

Алгоритм построения эпюры углов закручивания

1. Выбрать начало координат для отсчета перемещений поперечных сечений (если стержень имеет жесткую заделку, то рекомендуется принять начало координат в заделке).

2. Разделить стержень на участки, в пределах каждого из которых неизменны функция крутящего момента и размер поперечного сечения.

3. Начиная от начала координат, определить абсолютную деформацию каждого участка φ_i (угол закручивания граничных сечений данного участка относительно друг друга) с учетом знака крутящего момента:

• для участка без распределенного момента по формуле

$$\varphi_i = \left(\frac{M_z \cdot l}{GI_\rho} \right)_i,$$

где M_z – величина крутящего момента данного участка; l – длина участка; G – модуль сдвига (характеристика материала стержня); $I_\rho = \frac{\pi d^4}{32}$ – полярный момент инерции круглого сечения;

• для участка с распределенным моментом по формуле

$$\varphi_i = \left(\int\limits_{l_i} \frac{M_z(z)}{GI_\rho} dz \right)_i.$$

4. Определить перемещение (угол закручивания) каждого граничного сечения стержня относительно выбранного начала координат как накопленную сумму абсолютных деформаций участков, предшествующих данному сечению: $\varphi_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \varphi_i$.

5. По значениям полученных перемещений построить эпюру $\varphi(z)$, откладывая на базе, параллельной продольной оси стержня, величины углов закручивания в соответствующих сечениях стержня (учитывать, что на участках без распределенного момента функция $\varphi(z)$ изменяется по линейному закону, а на участках с распределенным моментом – по параболическому).

Что такое условие жесткости при кручении?

Условие жесткости при кручении принято записывать либо в абсолютных, либо в относительных (погонных) углах закручивания. Погонным углом закручивания i-го участка стержня называется величина $\Theta_i = \left(\frac{M_z}{GI_\rho} \right)_i$.

Под условием жесткости, записанным в абсолютных углах закручивания, понимается ограничение максимального угла закручивания сечений стержневой конструкции в результате деформации кручения величиной допускаемого перемещения:

$$\varphi_{\max} \le [\varphi],$$

где $\varphi_{\max}$ – величина максимального угла закручивания сечений вала; $[\varphi]$ – допускаемый угол закручивания, обычно назначаемый из условий эксплуатации или регламентирующими документами.

Под условием жесткости, записанным в относительных углах закручивания, понимается ограничение максимального относительного (погонного) угла закручивания участков стержневой конструкции в результате деформации кручения некоторой допускаемой величиной:

$$\Theta_{\max} \le [\Theta],$$

где $\Theta_{\max}$ – величина максимального погонного угла закручивания граничных сечений участков; $[\Theta]$ – допускаемый погонный угол закручивания.

Алгоритм расчета на жесткость по абсолютным углам закручивания

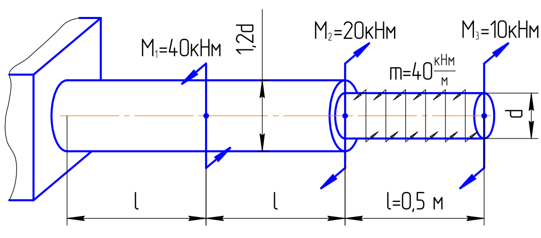
1. Построить эпюру углов закручивания $\varphi(z)$ согласно приведенному выше алгоритму.
2. По эпюре определить максимальный по абсолютной величине угол закручивания, подставить в условие жесткости: $\varphi_{\max} \le [\varphi]$ и сделать вывод о его выполнении.

Алгоритм расчета на жесткость по относительным углам закручивания

1. Найти погонные углы закручивания для каждого участка стержня по формуле: $\Theta_i = \left(\dfrac{M_z}{GI_\rho}\right)_i$.
2. Определить максимальный по абсолютной величине погонный угол закручивания: $\Theta_{\max} \le \max|\Theta_i|$, подставить в условие жесткости: $\Theta_{\max} \le [\Theta]$ и сделать вывод о его выполнении.

Пример решения задачи

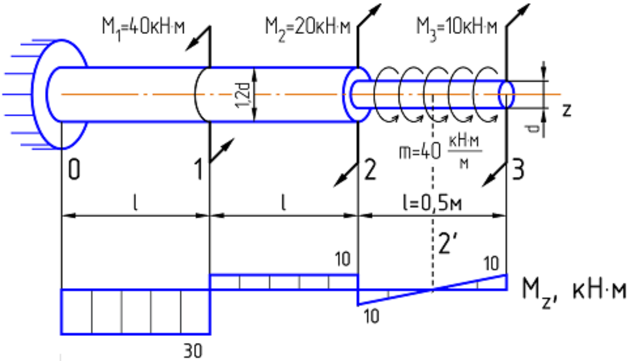
Задача



Ступенчатый вал круглого поперечного сечения нагружен системой внешних крутящих моментов. Определить из условия прочности величину допускаемого диаметра сечения [d], предварительно построив эпюры крутящего момента M_z и касательного напряжения τ. Проверить выполнение условия жесткости по абсолютным углам закручивания. Принять: [τ] = 100 МПа; $G = 8 \cdot 10^4$ МПа; [φ] = 1°.

Решение

1. Построим эпюру крутящих моментов, используя метод сечений.



2. Определим касательные напряжения на каждом участке вала в долях диаметра d:

- на участке (0–1) (без распределенного момента) касательное напряжение есть величина постоянная, равная

$$\tau_{(0-1)} = \frac{M_{z(0-1)}}{W_{\rho(0-1)}} = \frac{-30\ \text{кНм} \cdot 16}{\pi(1{,}2d)^3} = -\frac{277{,}8}{\pi d^3};$$

- на участке (1–2) – аналогично:

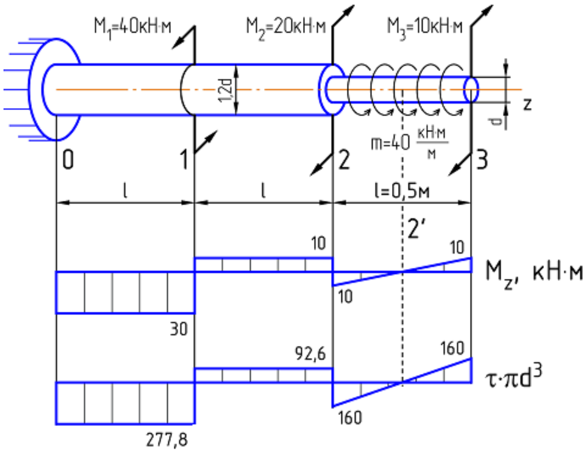
$$\tau_{(1-2)} = \frac{M_{z(1-2)}}{W_{\rho(1-2)}} = \frac{10\ \text{кНм} \cdot 16}{\pi(1{,}2d)^3} = \frac{92{,}6}{\pi d^3};$$

- на участке (2–3) (с распределенным моментом) напряжение изменяется по линейному закону. Найдем τ на границах участка:

$$\tau_{(2)} = \frac{M_{z(2)}}{W_{\rho(2)}} = \frac{-10\ \text{кНм} \cdot 16}{\pi d^3} = -\frac{160}{\pi d^3};$$

$$\tau_{(3)} = \frac{M_{z(3)}}{W_{\rho(3)}} = \frac{10\ \text{кНм} \cdot 16}{\pi d^3} = \frac{160}{\pi d^3}.$$

3. По полученным значениям построим эпюру напряжений в долях πd^3, соблюдая характер зависимости на участках соответственно эпюре крутящих моментов.



По эпюре напряжений видно, что опасным является участок (0–1):

$$\tau_{\max} = \left|\tau_{(0-1)}\right| = \frac{277{,}8}{\pi d^3}.$$

4. Подставим полученное значение максимального напряжения в условие прочности и найдем минимально допустимый параметр d:

$$\tau_{\max} = \frac{277{,}8}{\pi d^3} \leq [\tau] \rightarrow [d] = \sqrt[3]{\frac{277{,}8\text{ кНм}}{\pi \cdot 100 \cdot 10^3\text{ кПа}}} = 0{,}096\text{ м} = 9{,}6\text{ см}.$$

5. Рассчитаем абсолютные углы закручивания участков стержня, приняв начало координат в жесткой заделке (сечение «0»). На участках с постоянным значением крутящего момента по длине функция углов закручивания $\varphi(z)$ изменяется по линейному закону, и здесь для определения абсолютного угла закручивания можно использовать формулу: $\varphi = \dfrac{M_z \cdot l}{GI_\rho}$, т. е. на участках (0–1) и (1–2)

$$\varphi_{(0-1)} = \frac{M_{z(0=1)} \cdot l_{(0-1)}}{GI_{\rho(0-1)}} = \frac{-30\text{ кНм} \cdot 0{,}5\text{ м}}{8 \cdot 10^7\text{ кПа} \cdot \left(\dfrac{\pi(1{,}2 \cdot 0{,}096)^4}{32}\right)\text{м}^4} = -0{,}0108\text{ рад} =$$

$$= -\frac{0{,}0108 \cdot 180°}{\pi} = -0{,}62°;$$

$$\varphi_{(1-2)} = \frac{M_{z(1-2)} \cdot l_{(1-2)}}{GI_{\rho(1-2)}} = \frac{10\ \text{кНм} \cdot 0{,}5\ \text{м}}{8 \cdot 10^7\ \text{кПа} \cdot \left(\dfrac{\pi (1{,}2 \cdot 0{,}096)^4}{32} \right) \text{м}^4} = 0{,}0036\ \text{рад} =$$

$$= \frac{0{,}0036 \cdot 180°}{\pi} = 0{,}21°,$$

на участке (2–3) крутящий момент изменяется по линейному закону, а функция $\varphi(z)$ – по параболическому, и абсолютный угол закручивания определяется по интегральной формуле: $\varphi = \int\limits_l \frac{M_z(z)dz}{GI_\rho}$, т. е.

$$\varphi_{(2-3)} = \int\limits_0^{0{,}5\,\text{м}} \frac{(-10 + 40z)dz}{GI_{\rho(2-3)}} = \frac{-10z + 20z^2}{8 \cdot 10^7 \cdot \left(\dfrac{\pi \cdot 0{,}096^4}{32} \right)} \Bigg|_0^{0{,}5\,\text{м}} = 0\,.$$

Нулевое значение φ здесь означает, что парабола на этом участке симметричная с одинаковыми значениями углов закручивания в граничных сечениях, а в среднем сечении участка (где $M_z = 0$) парабола имеет экстремум. Чтобы определить экстремальное значение угла закручивания, необходимо выделить на участке (2–3) подучасток, границами которого являются ближайшая к жесткой заделке граница участка (2–3), т. е. сечение (2), и экстремальное сечение, обозначим его (2'). Таким образом, на выделенном подучастке (2–2') длиной 0,25 м абсолютный угол закручивания равен:

$$\varphi_{(2-2')} = \int\limits_0^{0{,}25\,\text{м}} \frac{(-10 + 40z)dz}{GI_{\rho(2-3)}} = \frac{-10z + 20z^2}{8 \cdot 10^7 \cdot \left(\dfrac{\pi \cdot 0{,}096^4}{32} \right)} \Bigg|_0^{0{,}25\,\text{м}} =$$

$$= -0{,}00187\ \text{рад} = -0{,}11°.$$

6. Определим углы закручивания характерных сечений (1), (2), (3) и экстремального сечения (2') относительно неподвижного сечения (0) и построим эпюру углов закручивания $\varphi(z)$ на базе, параллельной продольной оси стержня:

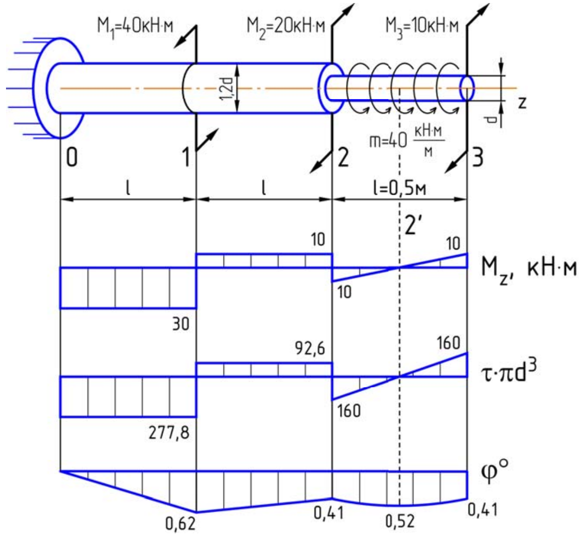
$\varphi_0 = 0$;

$\varphi_1 = \varphi_{(0-1)} = -0{,}62°$;

$\varphi_2 = \varphi_{(0-1)} + \varphi_{(1-2)} = -0{,}62° + 0{,}21° = -0{,}41°$;

$\varphi_{2'} = \varphi_{(0-1)} + \varphi_{(1-2)} + \varphi_{(2-2')} = -0{,}62° + 0{,}21° - 0{,}11° = -0{,}52°$;

$\varphi_3 = \varphi_{(0-1)} + \varphi_{(1-2)} + \varphi_{(2-3)} = -0{,}62° + 0{,}21° + 0 = -0{,}41°$.



По эпюре видно, что максимальный по абсолютной величине угол закручивания возникает в сечении (1): $\varphi_{max} = |\varphi_1| = 0,62^o$.

7. Проверим выполнение условия жесткости: $\varphi_{max} \le [\varphi]$.

$$\varphi_{max} = 0,62^o < [\varphi] = 1^o,$$

т. е. условие жесткости выполняется.

Задача решена. 

 **Потренируемся?**

- Пройти тестовый тренинг (прил. 2, тесты к теме 6).
- Решить задачу 2.3 из контрольной работы № 2 (прил. 4).

Приложение 1

Вспомогательное занятие

Определение реакций опор статически определимых балок

Цель занятия – научиться определять реактивные усилия, возникающие в опорных точках статически определимых нагруженных балок.

Необходимые знания для достижения цели

1. Основные виды опор на балках и возникающие в них реактивные усилия.
2. Понятие статической определимости.
3. Формы статических уравнений равновесия для плоской системы сил.
4. Правила определения момента относительно заданной точки от действия всех видов усилий, приложенных к балке.

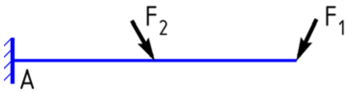
Какие основные виды опор используются для балок?

Чаще всего для балок используются следующие виды опор:

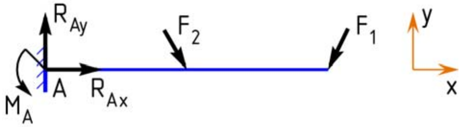
– жесткое защемление (жесткая заделка),
– шарнирно-неподвижная опора,
– шарнирно-подвижная опора.

Какие реактивные усилия возникают в опорах балки от действия плоской внешней нагрузки?

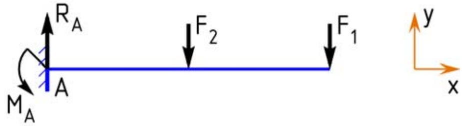
♦ Балка с жестким защемлением:



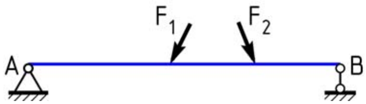
В жестком защемлении (*A*) балки под действием произвольно направленной внешней нагрузки (силы F_1 и F_2) в плоской системе координат возникают три реактивных усилия: две проекции реактивной силы R_{Ax} и R_{Ay} и реактивный момент M_A:



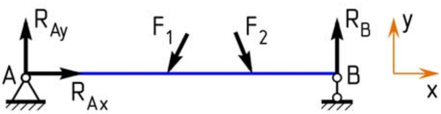
Но если внешние силы будут направлены строго вертикально (параллельно друг другу), то горизонтальная проекция реактивной силы R_{Ax} будет тождественно равна нулю. Таким образом, при вертикальной нагрузке в жестком защемлении балки возникает два реактивных усилия – вертикальная реактивная сила R_A и реактивный момент M_A:



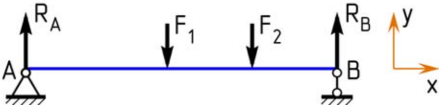
♦ Балка на двух шарнирных опорах:



Рассмотрим балку на двух шарнирных опорах, одна из которых шарнирно-неподвижная (опора A), а другая – шарнирно-подвижная (опора B). Внешняя нагрузка – плоская, произвольно направленная. Наличие шарнира в таких опорах снимает поворотное усилие, поэтому в них реактивных моментов не возникает. В шарнирно-неподвижной опоре (A) в силу её неподвижности возникает две проекции реактивной силы по направлению координатных осей R_{Ax} и R_{Ay}. В шарнирно-подвижной опоре (B) возможность её смещения в горизонтальном направлении компенсирует действие горизонтальных составляющих внешних сил, поэтому возникает единственная реактивная сила в вертикальном направлении R_B (перпендикулярно направлению смещения опоры):



Если же внешние силы будут направлены строго вертикально, то в шарнирно-неподвижной опоре (A) горизонтальная проекция реактивной силы R_{Ax} будет тождественно равна нулю. То есть при вертикальной нагрузке и в шарнирно-неподвижной и в шарнирно-подвижной опорах возникают только по одной вертикальной реактивной силе – R_A и R_B:



Какие конструкции называются статически определимыми?

Конструкции, у которых количество неизвестных реактивных усилий равно необходимому и достаточному количеству уравнений статического равновесия, называются статически определимыми. А раз количество неизвестных соответствует количеству уравнений, в которые эти неизвестные входят, то все реактивные усилия однозначно определяются из уравнений статического равновесия. Отсюда и название таких конструкций – статически определимые.

К статически определимым балкам относятся балки с жестким защемлением и балки на двух шарнирных опорах, одна из которых шарнирно-неподвижная, а другая – шарнирно-подвижная.

Что такое условие равновесия конструкции?

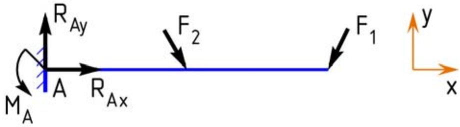
Все нагруженные конструкции должны находиться в равновесии. Условием равновесия статически нагруженных плоских конструкций является выполнение для них трех статических уравнений равновесия.

◊ Три статических уравнения равновесия для конструкции, находящейся под действием **произвольной плоской системы сил**, могут быть записаны в одной из трех форм.

Первая форма

$$\Sigma M_{iA} = 0;\ \Sigma X_i = 0;\ \Sigma Y_i = 0, \qquad (1)$$

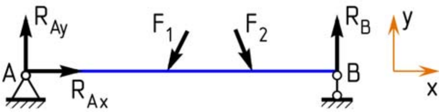
где $\Sigma M_{iA} = 0$ – моментное уравнение равновесия, записанное относительно произвольной точки A, означающее, что сумма моментов, возникающих относительно точки A от действия всех активных (внешних) и реактивных сил конструкции, должна равняться нулю; $\Sigma X_i = 0$ и $\Sigma Y_i = 0$ – силовые уравнения равновесия, означающие, что сумма проекций всех активных и реактивных сил конструкции на координатные оси X и Y соответственно должна равняться нулю. *Рекомендация:* эту форму уравнений равновесия следует выбирать для определения трех реакций опор балки с жестким защемлением, причем в качестве точки A рационально выбирать точку защемления балки:



Вторая форма

$$\Sigma M_{iA} = 0;\ \Sigma M_{iB} = 0;\ \Sigma U_i = 0, \qquad (2)$$

где $\Sigma M_{iA} = 0$ и $\Sigma M_{iB} = 0$ – моментные уравнения равновесия, записанные относительно двух произвольных точек A и B; $\Sigma U_i = 0$ – силовое уравнение равновесия в проекции на произвольную ось U, не перпендикулярную прямой, соединяющей точки A и B. *Рекомендация:* эту форму уравнений равновесия следует выбирать для определения реактивных усилий балки на двух шарнирных опорах, причем в качестве точек A и B рационально выбирать опорные точки балки, а силовое уравнение равновесия записывать в проекции на горизонтальную ось X:



Третья форма

$$\Sigma M_{iA} = 0;\ \Sigma M_{iB} = 0;\ \Sigma M_{iC} = 0, \qquad (3)$$

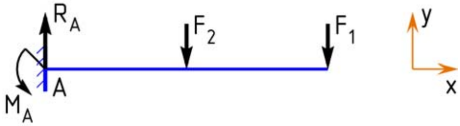
где $\Sigma M_{iA} = 0$, $\Sigma M_{iB} = 0$, $\Sigma M_{iC} = 0$ – моментные уравнения равновесия, записанные относительно трех произвольных точек A, B и C, не лежащих на одной прямой.

◊ Если же силы, действующие на конструкцию, образуют **параллельную систему сил** (например, все силы направлены строго вертикально), то количество уравнений равновесия сокращается до двух, и они могут быть записаны в одной из двух форм.

Первая форма

$$\Sigma M_{iA} = 0; \quad \Sigma Y_i = 0, \qquad (1')$$

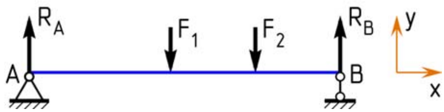
здесь смысл уравнений тот же, причем ось Y, на которую проектируются все силы, должна быть параллельна силам. *Рекомендация:* эту форму уравнений равновесия следует выбирать для определения двух реакций опор балки с жестким защемлением и вертикальной нагрузкой, причем в качестве точки A рационально выбирать точку защемления балки:



Вторая форма

$$\Sigma M_{iA} = 0; \;\; \Sigma M_{iB} = 0, \qquad (2')$$

здесь два моментных уравнения равновесия записываются относительно двух произвольных точек A и B, однако прямая AB не должна быть параллельна силам. *Рекомендация:* эту форму уравнений равновесия следует выбирать для определения двух реакций опор балки с шарнирными опорами и вертикальной нагрузкой, причем в качестве точек A и B рационально выбирать опорные точки балки:



 *Как составить моментное уравнение равновесия относительно данной точки?*

Наибольшее затруднение вызывает составление моментных уравнений равновесия. Для этого нужно уметь определять значения моментов, возникающих в данной точке (относительно которой записывается уравнение равновесия) от действия каждого усилия (активного и реактивного), приложенного к конструкции. Основные виды усилий, применяемых в расчетных схемах:

- сосредоточенный момент M;
- сосредоточенная сила F;
- распределенная сила интенсивностью q, приложенная на расстоянии a.

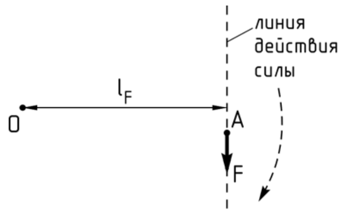
Повторим **правила определения момента в точке от действия *M*, *F* и *q***. Момент – это поворотное усилие, которое характеризуется значением и направлением вращения.

I. **Момент, возникающий в точке *O* плоской системы от действия сосредоточенного момента *M***, приложенного в точке A данной системы, равен значению данного момента M и сохраняет его направление вращения:

$$M_O(M) = M \text{ (по часовой стрелке).}$$

Таким образом, действие сосредоточенного момента передается в любую точку плоскости без изменения.

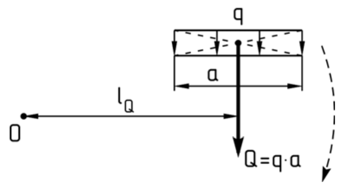
II. **Момент, возникающий в точке *O* плоской системы от действия сосредоточенной силы *F***, приложенной в точке *A* данной системы, равен произведению силы на её плечо (с учетом направления вращения):



$$M_O(F) = F \cdot l_F \text{ (по часовой стрелке).}$$

Плечом силы *F* относительно точки *O* (l_F) называется кратчайшее расстояние от точки *O* до линии действия силы.

III. **Момент, возникающий в точке *O* плоской системы от действия распределенной нагрузки интенсивностью *q*, приложенной на расстоянии *a***, равен произведению равнодействующей распределенной нагрузки на её плечо (с учетом направления вращения):



$$M_O(q) = Q \cdot l_Q = q \cdot a \cdot l_Q \text{ (по часовой стрелке).}$$

Равнодействующая распределенной нагрузки *Q* – это сосредоточенная сила, приложенная в центре тяжести распределенной нагрузки и равная произведению интенсивности *q* на расстояние действия *a*: $Q = q \cdot a$. Плечом равнодействующей *Q* относительно точки *O* (l_Q) называется кратчайшее расстояние от точки *O* до линии действия равнодействующей.

Таким образом, чтобы составить моментное уравнение равновесия для балки относительно выбранной точки, нужно определить моменты от всех действующих на балку усилий (активных и реактивных) относительно данной точки, суммировать их с учетом направления вращения и приравнять полученную сумму к нулю.

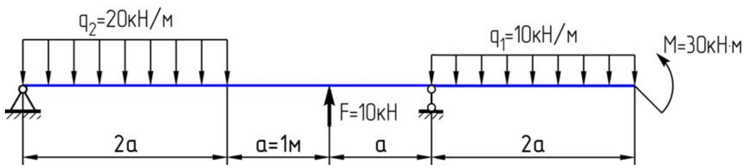
Алгоритм определения реакций опор статически определимых балок

1. Обозначить на схеме балки опорные точки буквами и изобразить в них реактивные усилия соответственно типам опор и виду внешней нагрузки.
2. Выбрать рациональную форму уравнений равновесия согласно приведенным выше рекомендациям.
3. По выбранной форме составить уравнения равновесия балки с учетом действия всех активных (заданных) и реактивных усилий. **Внимание!** Количество уравнений должно соответствовать количеству реактивных усилий !
4. Решить полученную систему уравнений равновесия относительно реактивных усилий. **Внимание!** Если знак найденного реактивного усилия получился отрицательным, то его направление нужно изменить на противоположное !

Пример определения реактивных усилий балки на двух шарнирных опорах с вертикальной нагрузкой

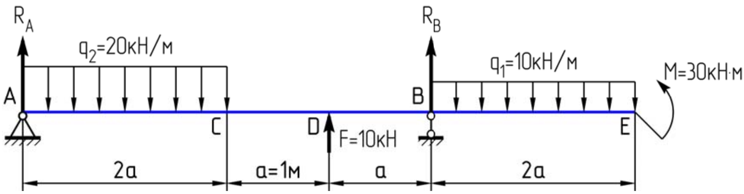
Задача

Определить реакции опор данной балки:



Решение

1. Обозначим опорные точки балки буквами A и B и изобразим в них реактивные усилия, возникающие от действия приложенной нагрузки:

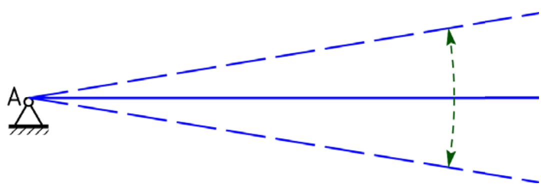


Так как все внешние силы, действующие на балку, вертикальные (образуют параллельную систему сил), то и в шарнирно-неподвижной опоре *A* и в шарнирно-подвижной опоре *B* возникают только вертикальные реактивные силы R_A и R_B.

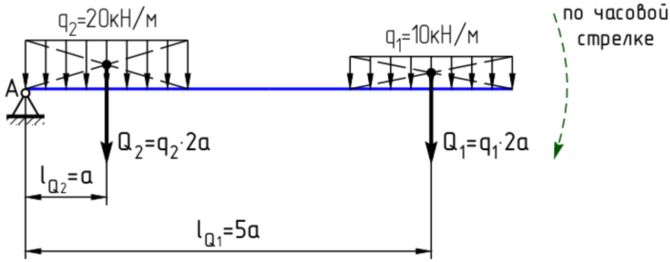
2. Наиболее рациональной формой двух уравнений равновесия для данной балки с вертикальной нагрузкой является вторая форма (2'):

$$\Sigma M_{iA} = 0;\ \Sigma M_{iB} = 0.$$

3. Составим первое моментное уравнение равновесия для нашей балки относительно опорной точки *A*: $\Sigma M_{iA} = 0$. Это уравнение означает, что алгебраическая сумма моментов, возникающих в точке *A* от действия всех активных (заданных) и реактивных усилий, должна равняться нулю. Это утверждение можно перефразировать: сумма моментов, поворачивающих балку относительно точки *A* по часовой стрелке, должна равняться сумме моментов, поворачивающих её относительно этой точки против часовой стрелки. Визуально это легко представить, если мысленно открепить балку от опоры *B*, тогда она будет представлять собой рычаг с центром в точке *A*, который поворачивается действующими усилиями либо по часовой стрелке, либо против.



По часовой стрелке относительно точки *A* поворачивают балку распределенные силы q_1 и q_2:

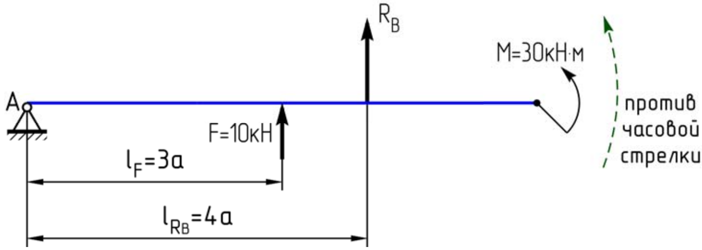


Найдем моменты этих сил относительно точки A, применяя правило III (см. выше):

$$M_A(q_1) = Q_1 \cdot l_{Q_1} = q_1 \cdot 2a \cdot l_{Q_1} = q_1 \cdot 2a \cdot 5a = 10q_1a^2;$$

$$M_A(q_2) = Q_2 \cdot l_{Q_2} = q_2 \cdot 2a \cdot l_{Q_2} = q_2 \cdot 2a \cdot a = 2q_2a^2.$$

Против часовой стрелки относительно точки A поворачивают балку следующие усилия: сосредоточенный момент M, реактивная сила R_B и сосредоточенная сила F.



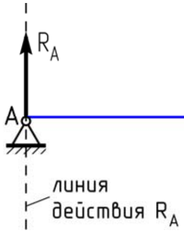
Найдем моменты этих усилий относительно точки A, применяя правила I и II (см. выше):

$$M_A(M) = M;$$

$$M_A(R_B) = R_B \cdot l_{R_B} = R_B \cdot 4a;$$

$$M_A(F) = F \cdot l_F = F \cdot 3a.$$

Реакция R_A относительно точки A момент не создает, потому что её линия действия проходит через эту точку и, соответственно, плечо её относительно точки A равно нулю:



Приравняем сумму моментов, поворачивающих балку относительно точки A по часовой стрелке, к сумме моментов, поворачивающих её относительно этой точки против часовой стрелки:

$$M_A(q_1) + M_A(q_2) = M_A(M) + M_A(R_B) + M_A(F).$$

Подставив сюда найденные значения данных моментов, приходим к уравнению относительно неизвестной реакции R_B:

$$10q_1a^2 + 2q_2a^2 = M + 4R_Ba + 3Fa.$$

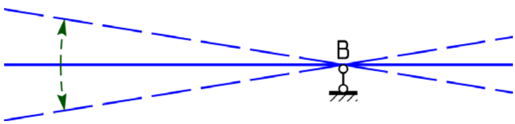
Выразим из этого уравнения реакцию R_B и найдем её численное значение, подставив известные значения внешних усилий и параметра a:

$$R_B = \frac{10q_1a^2 + 2q_2a^2 - M - 3Fa}{4a} = \frac{10 \cdot 10 \cdot 1^2 + 2 \cdot 20 \cdot 1^2 - 30 - 3 \cdot 10}{4 \cdot 1} = 20 \text{ кН}.$$

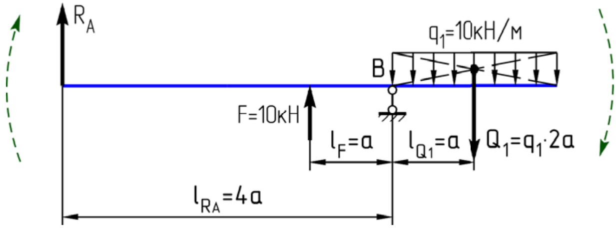
Значение реакции R_B получилось положительное, значит, мы угадали истинное её направление. Если знак реактивного усилия получается отрицательным, то его первоначально выбранное направление нужно изменить на противоположное.

4. Поступая аналогично, составим второе моментное уравнение равновесия: $\Sigma M_{i\text{B}} = 0$ и найдем из него вторую реактивную силу – R_A.

Мысленно открепив балку теперь от опоры A, получим рычаг с центром в точке B:



По часовой стрелке относительно точки B поворачивают балку следующие усилия: распределенная нагрузка q_1, сосредоточенная сила F и реактивная сила R_A.



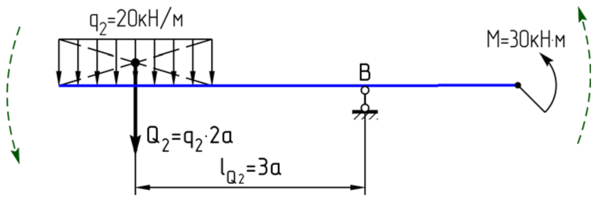
Найдем моменты этих сил относительно точки B, применяя правила II и III (см. выше):

$$M_B(q_1) = Q_1 \cdot l_{Q_1} = q_1 \cdot 2a \cdot a = 2q_1a^2;$$

$$M_B(F) = F \cdot l_F = F \cdot a;$$

$$M_B(R_A) = R_A \cdot l_{R_A} = R_A \cdot 4a = 4R_A a.$$

Против часовой стрелки относительно точки B поворачивают балку следующие усилия: распределенная нагрузка q_2 и сосредоточенный момент M.

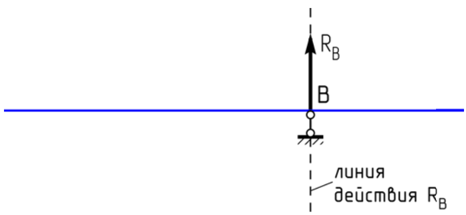


Найдем моменты этих усилий относительно точки B, применяя правила I и III (см. выше):

$$M_B(q_2) = Q_2 \cdot l_{Q_2} = q_2 \cdot 2a \cdot 3a = 6q_2a^2;$$

$$M_B(M) = M.$$

Реакция R_B относительно точки B момент не создает, потому что её линия действия проходит через точку B и, соответственно, плечо её относительно точки B равно нулю:



Приравняем сумму моментов, поворачивающих балку относительно точки B по часовой стрелке, к сумме моментов, поворачивающих её относительно этой точки против часовой стрелки:

$$M_B(q_1) + M_B(F) + M_B(R_A) = M_B(q_2) + M_B(M).$$

Подставив сюда найденные значения данных моментов, приходим к уравнению относительно неизвестной реакции R_A:

$$2q_1a^2 + Fa + 4R_Aa = 6q_2a^2 + M.$$

Выразим из этого уравнения реакцию R_A и найдем её численное значение, подставив известные значения внешних усилий и параметра a:

$$R_A = \frac{6q_2a^2 + M - 2q_1a^2 - Fa}{4a} = \frac{6 \cdot 20 \cdot 1^2 + 30 - 2 \cdot 10 \cdot 1^2 - 10 \cdot 1}{4 \cdot 1} = 30 \text{ кН}.$$

Значение реакции R_A также получилось положительное, значит, мы угадали и её истинное направление.

5. Проверим правильность найденных значений реактивных усилий силовым уравнением равновесия в проекции на вертикальную ось Y: $\Sigma Y_i = 0$. Если реакции найдены верно, то уравнение должно удовлетворяться тождественно. То есть алгебраическая сумма всех активных и реактивных сил, действующих на балку, должна равняться нулю. Распределенная нагрузка в силовом уравнении равновесия представляется своей равнодействующей. В нашем случае: $Q_1 = q_1 \cdot 2a = 10 \cdot 2 \cdot 1 = 20$ кН и $Q_2 = q_2 \cdot 2a = 20 \cdot 2 \cdot 1 = 40$ кН. Силы, направленные вверх: R_A, F и R_B. Силы, направленные вниз: Q_1 и Q_2. Момент в силовом уравнении не участвует. Тогда силовое уравнение равновесия для нашей балки имеет вид:

$$R_A - Q_2 + F + R_B - Q_1 = 0.$$

Подставим значения сил в уравнение:

$$30 - 40 + 10 + 20 - 20 = 0.$$

Уравнение тождественно выполняется, значит, реакции найдены верно.

Таким образом, реактивные силы нашей балки направлены вверх и равны соответственно: $R_A = 20$ кН, $R_B = 30$ кН.

Задача решена. 

Приложение 2

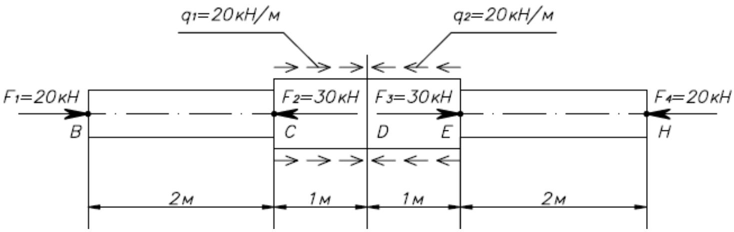
ТЕСТОВЫЙ МАТЕРИАЛ

Тема 1

1.1. Построение эпюры продольной силы N

Вариант 1

Задан стержень:



1. На какое количество участков надо поделить данный стержень для построения эпюры *N*?

1) на 3 участка
2) 4 участка
3) 5 участков
4) 6 участков

2. В каких сечениях данного стержня на эпюре *N* будут скачки?

1) в сечениях, где приложены сосредоточенные силы
2) в сечениях, где меняется их размер
3) в сечениях, где начинается и кончается распределенная нагрузка
4) в сечениях, где приложены сосредоточенные силы и где начинается и кончается распределенная нагрузка

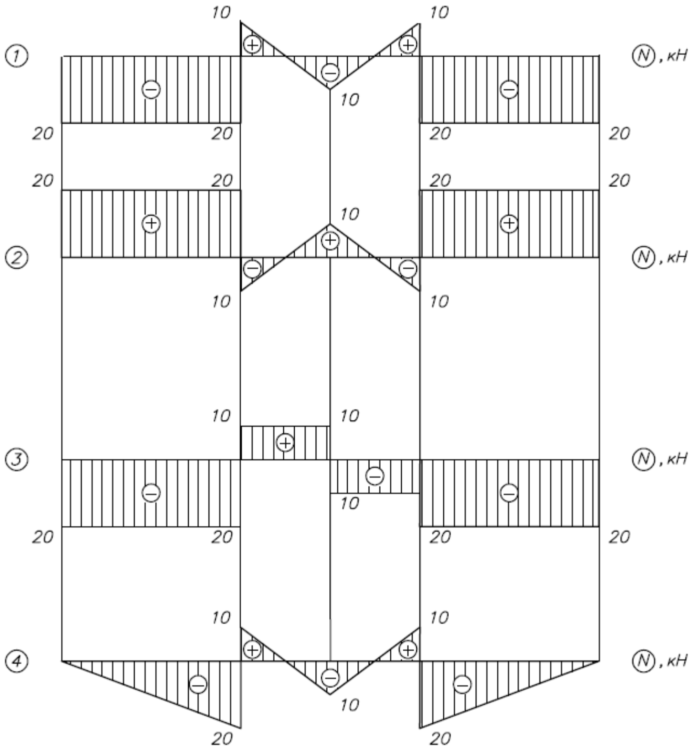
3. На каких участках эпюры *N* для данного стержня будут прямые, параллельные базе эпюры?

1) *BC* и *EH*
2) *CD* и *DE*
3) *BC* и *CD*
4) *DE* и *EH*
5) на всех участках

4. На каких участках эпюры *N* для данного стержня будут наклонные прямые?

1) на всех участках
2) таких участков нет
3) *CD* и *DE*
4) *BC* и *CB*
5) *DE* и *EH*

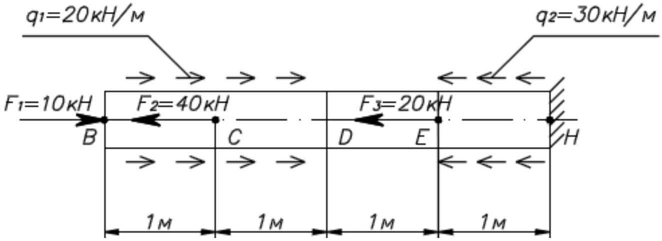
5. Выберите правильную эпюру *N* для данного стержня.



1) № 1
2) № 2
3) № 3
4) № 4

Вариант 2

Задан стержень:



1. На какое количество участков надо поделить данный стержень для построения эпюры *N*?

1) на 3 участка

2) 4 участка

3) 5 участков

4) 6 участков

2. В каких сечениях данного стержня на эпюре *N* будут скачки?

1) *B*, *C*, *E*, *H*

2) *C*, *D*, *E*

3) *D*, *E*, *H*

4) во всех сечениях

3. На каких участках эпюры *N* для данного стержня будут прямые, параллельные базе эпюры?

1) на всех участках

2) *BC* и *EH*

3) *CD* и *DE*

4) *BC*, *CD* и *EH*

5) *DE*

4. На каких участках эпюры *N* для данного стержня будут наклонные прямые?

1) на всех участках

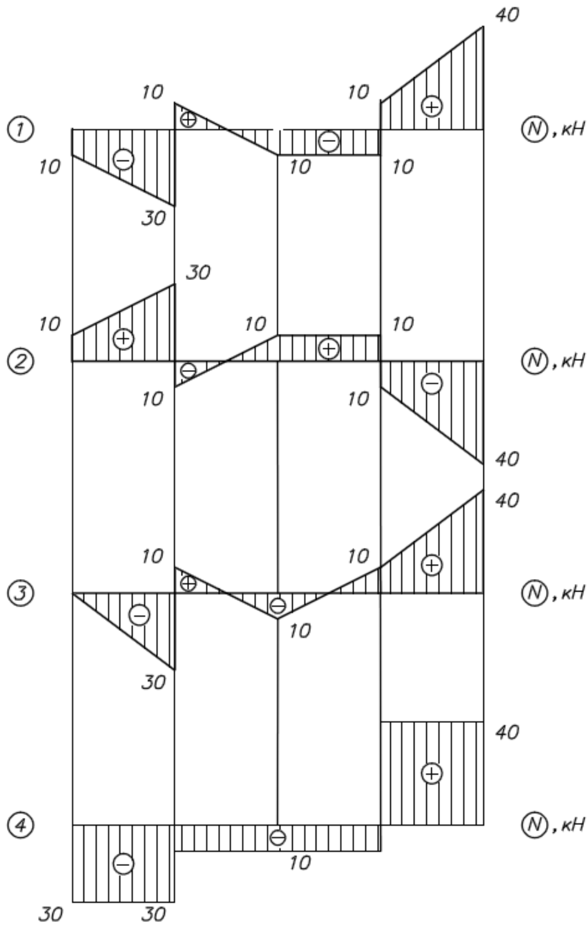
2) *BC* и *EH*

3) *CD* и *DE*

4) *BC*, *CD* и *EH*

5) *DE* и *EH*

5. Для данного стержня выберите правильную эпюру *N*.

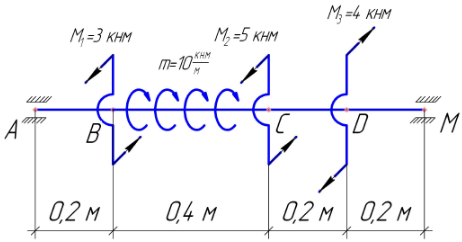


1) № 1
2) № 2
3) № 3
4) № 4

1.2. Построение эпюры внутреннего крутящего момента

Вариант 1

Задан вал:



1. На какое количество участков надо поделить данный вал для построения эпюры M_z?

1) на 3 участка

2) 2 участка

3) 5 участков

4) 4 участка

2. В каких сечениях данного вала на эпюре M_z будут скачки?

1) во всех сечениях

2) *A*, *M*

3) *B*, *C*, *D*

4) *B*, *D*

5) *C*, *D*

3. На каких участках эпюры M_z для данного вала будут прямые, параллельные базе?

1) на всех участках

2) *CD*

3) таких участков нет

4) *BC*

4. На каких участках эпюры M_z для данного вала будут наклонные прямые?

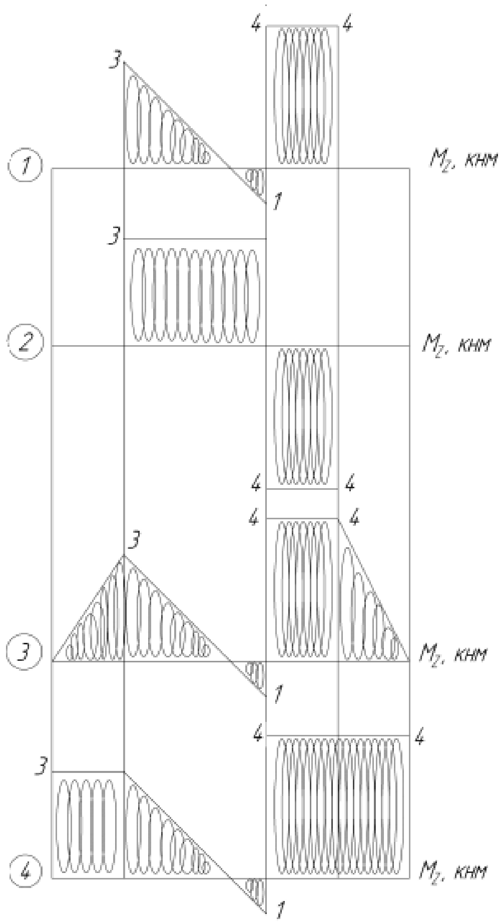
1) на всех участках

2) *CD*

3) таких участков нет

4) *BC*

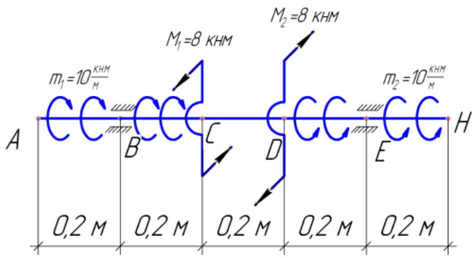
5. Для данного вала выберите верную эпюру M_z.



1) № 1
2) № 2
3) № 3
4) № 4

Вариант 2

Задан вал:



1. На какое количество участков надо поделить данный вал для построения эпюры M_z?

1) на 4 участка
2) 3 участка
3) 5 участков
4) 6 участков

2. В каких сечениях данного вала на эпюре M_z будут скачки?

1) во всех сечениях
2) *A*, *H*
3) *B*, *C*, *D*
4) *B*, *D*
5) *C*, *D*

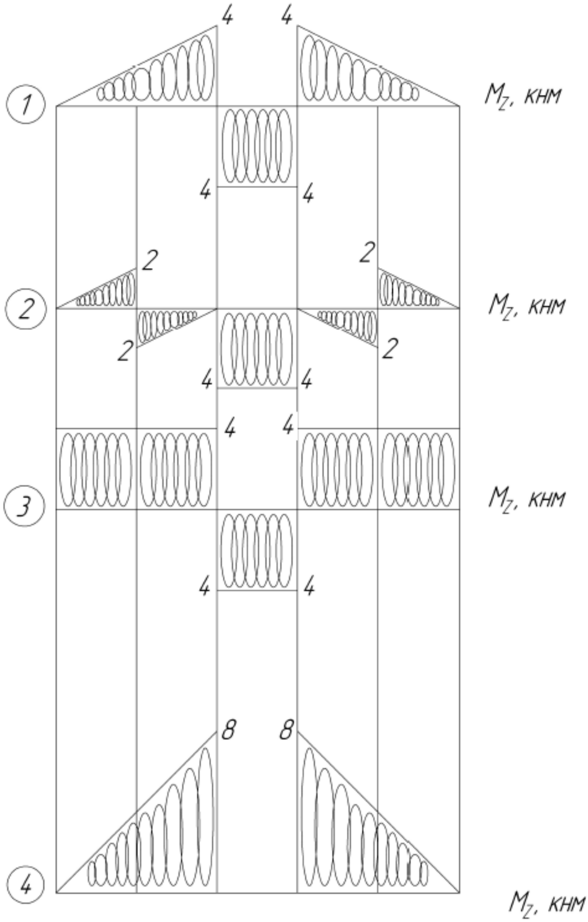
3. На каких участках эпюры M_z для данного вала будут прямые, параллельные базе?

1) на всех участках
2) *AB*, *CD*, *DE*
3) таких участков нет
4) *AB*, *DE*
5) *CD*

4. На каких участках эпюры M_z для данного вала будут наклонные прямые?

1) на всех участках
2) *AB*, *BC*, *DE*, *EH*
3) таких участков нет
4) *AB*, *EH*

5. Выберите верную эпюру M_z для данного вала.

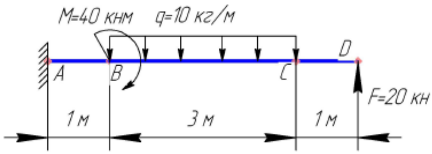


1) № 1
2) № 2
3) № 3
4) № 4

1.3. Построение эпюр внутренней поперечной силы и изгибающего момента при прямом изгибе балок

Вариант 1

Задана балка:



1. На какое количество участков надо поделить данную балку для построения эпюр Q_y и M_z?

1) на 4 участка

2) 3 участка

3) 2 участка

4) 5 участков

2. В каких сечениях данной балки будут скачки на эпюре Q_y?

1) *A* и *D*

2) *B* и *C*

3) *A*, *B*, *C* и *D*

4) скачков не будет ни в одном сечении

3. В каких сечениях данной балки будут скачки на эпюре M_x?

1) *A* и *B*

2) *B* и *C*

3) *B* и *D*

4) скачков не будет ни в одном сечении

4. На каких участках данной балки будут прямые, параллельные базе на эпюре Q_y?

1) *AB* и *CD*

2) *BC*

3) на всех участках

4) ни на одном участке

5. На каких участках данной балки будут наклонные прямые на эпюре Q_y?

1) *BC*

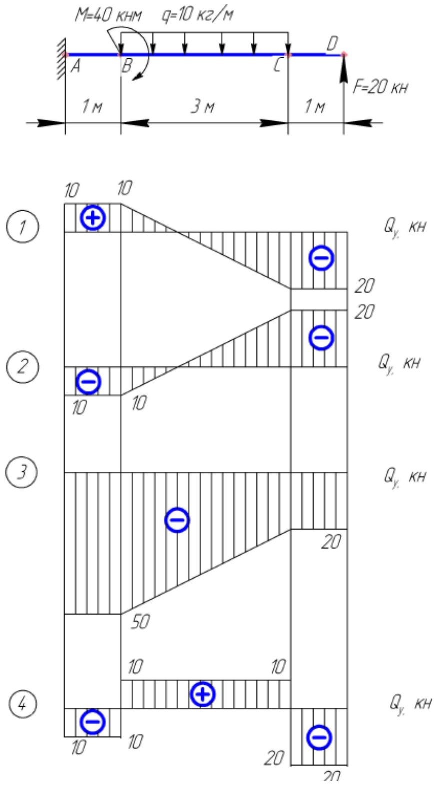
2) *AB* и *CD*

3) на всех участках
4) ни на одном участке

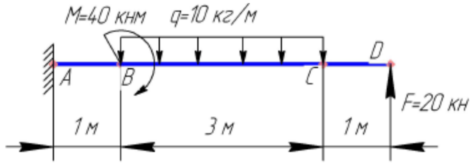
6. На каких участках данной балки будут прямолинейные зависимости на эпюре M_x?
1) *AB* и *CD*
2) *BC*
3) на всех участках
4) ни на одном участке

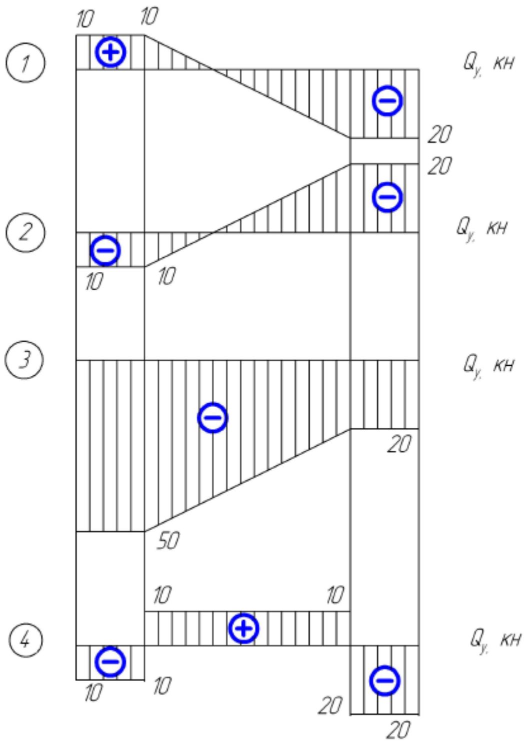
7. На каких участках данной балки будут параболические зависимости на эпюре M_x?
1) *BC*
2) *AB* и *CD*
3) на всех участках
4) ни на одном участке

8. Для данной балки выберите верную эпюру Q_y.
1) № 1
2) № 2
3) № 3
4) № 4



9. Для данной балки выберите верную эпюру M_x.

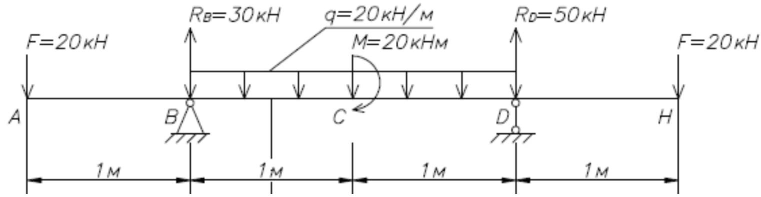




1) № 1
2) № 2
3) № 3
4) № 4

Вариант 2

Задана балка:



1. На какое количество участков надо поделить данную балку для построения эпюр Q_y и M_z?

1) на 3 участка

2) 2 участка

3) 4 участка

4) 5 участков

2. В каких сечениях данной балки будут скачки на эпюре Q_y?

1) B, C, и D

2) A, B, D и H

3) A, B, C, D и H

4) скачков не будет ни в одном сечении

3. В каких сечениях данной балки будут скачки на эпюре M_x?

1) скачков не будет ни в одном сечении

2) C и B

3) B и D

4) C

4. На каких участках данной балки будут прямые, параллельные базе на эпюре Q_y?

1) AB и DH

2) CB

3) на всех участках

4) ни на одном участке

5. На каких участках данной балки будут наклонные прямые на эпюре Q_y?

1) на всех участках

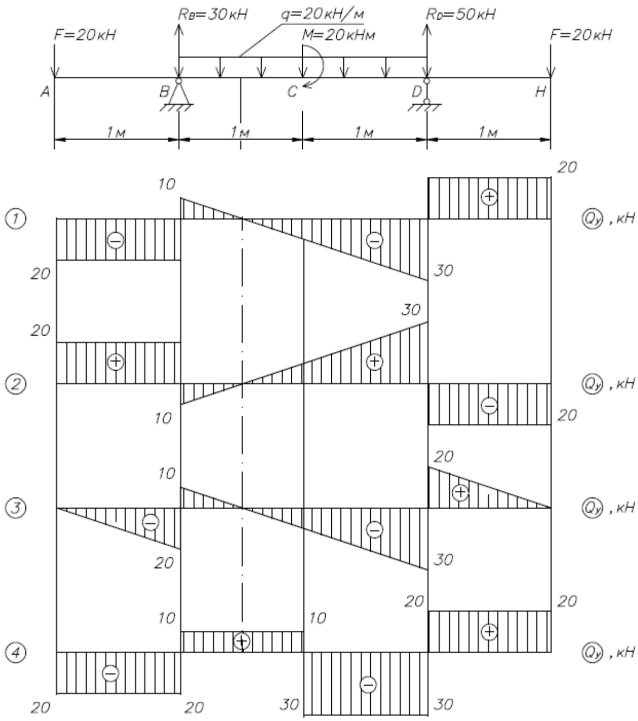
2) AB и DH

3) *BC* и *CD*
4) ни на одном участке

6. На каких участках балки будут прямолинейные зависимости на эпюре M_x?
1) ни на одном участке
2) *BC*
3) на всех участках
4) *AB* и *DH*

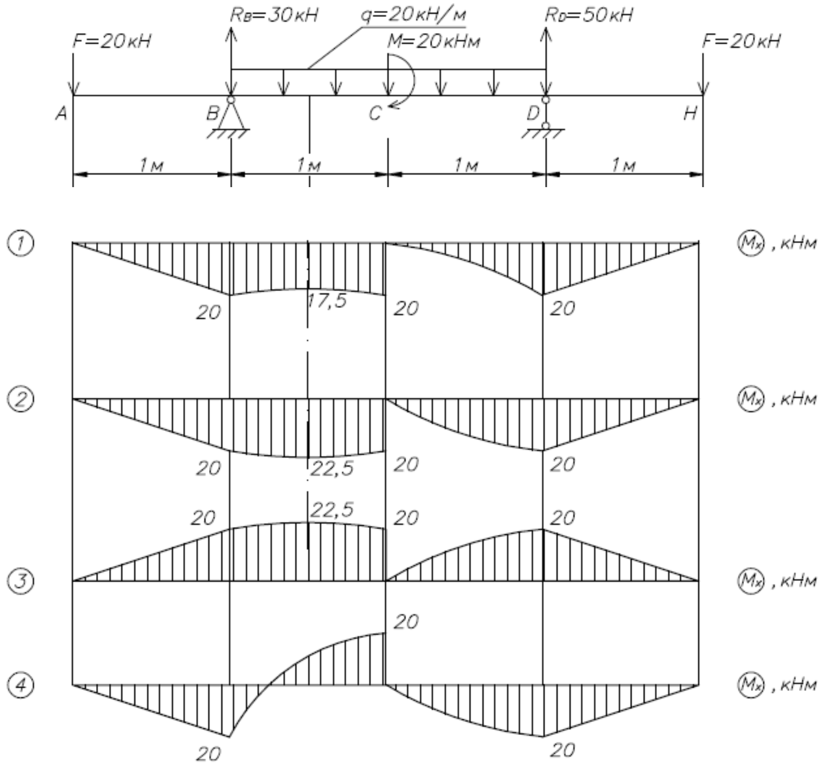
7. На каких участках балки будут параболические зависимости на эпюре M_x?
1) *AB* и *DH*
2) *BC* и *CD*
3) на всех участках
4) ни на одном участке

8. Для данной балки выберите верную эпюру Q_y.



1) № 1
2) № 2
3) № 3
4) № 4

9. Для данной балки выберите верную эпюру M_x.

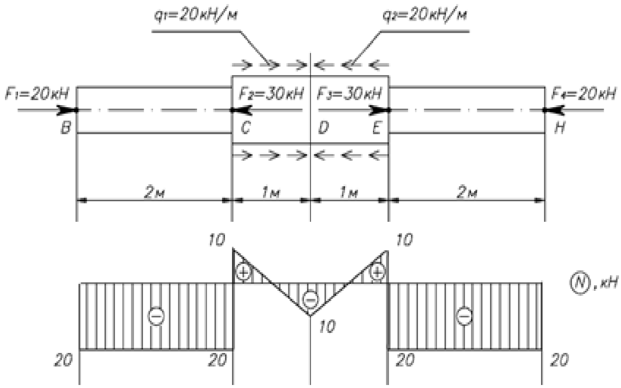


1) № 1
2) № 2
3) № 3
4) № 4

Тема 2

Вариант 1

Задан ступенчатый стержень круглого поперечного сечения с построенной эпюрой внутренней продольной силы N:



Площадь поперечного сечения участков BC и EH стержня равна 2 см², а участков CD и DE равна 4 см². Материал стержня – Ст3 с допускаемым напряжением $[\sigma] = 160$ МПа и модулем упругости первого рода $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

1. Определите, какое сечение данного стержня самое опасное.
1) все сечения участков BC и EH равноопасны
2) сечения C и E участков CD и DE
3) сечения C и E участков BC и EH
4) сечения C, D и E участков CD и DE

2. Чему равно максимальное по абсолютной величине напряжение, возникающее в сечениях данного стержня?
1) 25 МПа
2) 150 МПа
3) 50 МПа
4) 100 МПа

3. Чему равно минимальное напряжение в сечениях данного стержня?
1) 0
2) –25 МПа

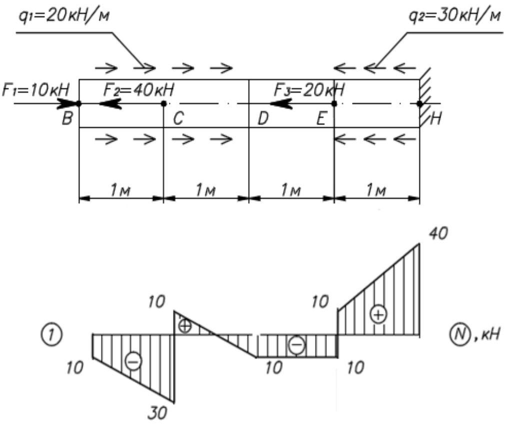
3) 2,5 МПа
4) 25 МПа

4. Определите величину и направление перемещения сечения *C* данного стержня, приняв за неподвижное сечение *B*.
1) 0,5 мм к сечению *B*
2) 0,5 мм от сечения *B*
3) 1 мм к сечению *B*
4) 1 мм от сечения *B*

5. Определите минимальный диаметр данного стержня из условия прочности.
1) 16 мм
2) 13 мм
3) 18 мм
4) 20 мм

Вариант 2

Задан стержень круглого поперечного сечения с построенной эпюрой внутренней продольной силы *N*:



Площадь поперечного сечения всех участков стержня одинакова и равна 2 см^2. Материал, из которого изготовлен стержень, Ст3 с допускаемым напряжением [σ] = 160 МПа и модулем упругости первого рода $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

1. Определите, какое сечение данного стержня самое опасное.
1) *E*
2) *C*
3) *H*
4) *B*

2. Чему равно максимальное по абсолютной величине напряжение, возникающее в сечениях данного стержня?
1) 200 МПа
2) 150 МПа
3) 50 МПа
4) 25 МПа

3. Чему равно минимальное напряжение, возникающее в сечениях данного стержня?
1) 50 МПа
2) –50 МПа
3) 0
4) –150 МПа

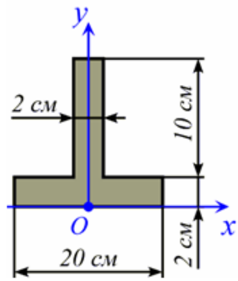
4. Определите величину и направление перемещения сечения *E* данного стержня, приняв за неподвижное сечение *H*.
1) 0,625 мм к сечению *H*
2) 0,625 мм от сечения *H*
3) 0,25 мм к сечению *H*
4) 0,25 мм от сечения *H*

5. Определите диаметр данного стержня из условия прочности.
1) 18 мм
2) 17 мм
3) 20 мм
4) 15 мм

Тема 3

Вариант 1

Задано сложное сечение, состоящее из двух прямоугольников:



Обозначим верхний прямоугольник № 1, а нижний № 2.

1. Чему равны координаты центров тяжести прямоугольников y_1 и y_2 в заданной системе координат xOy?

1) $y_1 = 2$ см, $y_2 = 6$ см
2) $y_1 = 1$ см, $y_2 = 7$ см
3) $y_1 = -6$ см, $y_2 = 0$ см
4) $y_1 = 7$ см, $y_2 = 1$ см

2. Чему равны статические моменты первого и второго прямоугольников относительно оси x?

1) $S_x^{(1)} = -50$ см^3, $S_x^{(2)} = 100$ см^3
2) $S_x^{(1)} = 40$ см^3, $S_x^{(2)} = 120$ см^3
3) $S_x^{(1)} = 140$ см^3, $S_x^{(2)} = 40$ см^3
4) $S_x^{(1)} = 70$ см^3, $S_x^{(2)} = 10$ см^3

3. Чему равна координата центра тяжести данного сложного сечения y_C в заданной системе координат xOy?

1) $y_C = 4$ см
2) $y_C = 3$ см
3) $y_C = 5$ см
4) $y_C = 2$ см

4. Чему равны моменты инерции прямоугольников относительно собственных главных центральных осей x_1 и x_2?

1) $I_{x_1}^{(1)} = 33{,}33$ см^3, $I_{x_2}^{(2)} = 13{,}33$ см^3
2) $I_{x_1}^{(1)} = 55{,}56$ см^3, $I_{x_2}^{(2)} = 4{,}44$ см^3

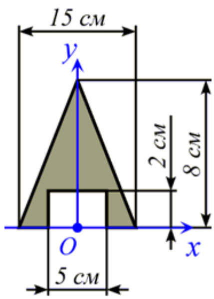
3) $I_{x_1}^{(1)} = 6{,}67$ см³, $I_{x_1}^{(2)} = 1333{,}33$ см³
4) $I_{x_1}^{(1)} = 166{,}67$ см³, $I_{x_1}^{(2)} = 13{,}33$ см³

5. Чему равны расстояния между центром тяжести всего сечения и центрами тяжести каждого прямоугольника b_1 и b_2 соответственно?
1) $b_1 = 4$ см³ $b_2 = 2$ см³
2) $b_1 = 3$ см³ $b_2 = 3$ см³
3) $b_1 = 2$ см³ $b_2 = 4$ см³
4) $b_1 = 5$ см³ $b_2 = 1$ см³

6. Чему равны главные центральные моменты инерции сложного сечения?
1) $I_x = 660$ см⁴ $I_y = 1340$ см⁴
2) $I_x = 840$ см⁴ $I_y = 1160$ см⁴
3) $I_x = 1280$ см⁴ $I_y = 960$ см⁴
4) $I_x = 1060$ см⁴ $I_y = 740$ см⁴

Вариант 2

Задано сложное сечение, состоящее из треугольника и прямоугольной выемки.



Обозначим треугольник простейшей фигурой № 1, а прямоугольник № 2.

1. Чему равны координаты центров тяжести треугольника y_1 и прямоугольника y_2 в заданной системе координат xOy?
1) $y_1 = 8/3$ см, $y_2 = 1$ см
2) $y_1 = 4$ см, $y_2 = 1$ см
3) $y_1 = -3$ см, $y_2 = 0$ см
4) $y_1 = 16/3$ см, $y_2 = 2$ см

2. Чему равны статические моменты треугольника и прямоугольника относительно оси x?

1) $S_x^{(1)} = -180$ см^3, $S_x^{(2)} = 0$ см^3
2) $S_x^{(1)} = 240$ см^3, $S_x^{(2)} = 10$ см^3
3) $S_x^{(1)} = 160$ см^3 , $S_x^{(2)} = 10$ см^3
4) $S_x^{(1)} = 320$ см^3, $S_x^{(2)} = 20$ см^3

3. Чему равна координата центра тяжести данного сложного сечения y_C в заданной системе координат xOy?

1) $y_C = 4$ см
2) $y_C = 3$ см
3) $y_C = 5$ см
4) $y_C = 2$ см

4. Чему равны моменты инерции треугольника и прямоугольника относительно собственных главных центральных осей x_1 и x_2?

1) $I_{x_1}^{(1)} = 213{,}33$ см^3, $I_{x_2}^{(2)} = 3{,}33$ см^3
2) $I_{x_1}^{(1)} = 55{,}56$ см^3, $I_{x_2}^{(2)} = 4{,}44$ см^3
3) $I_{x_1}^{(1)} = 6{,}67$ см^3, $I_{x_1}^{(2)} = 333{,}33$ см^3
4) $I_{x_1}^{(1)} = 166{,}67$ см^3, $I_{x_1}^{(2)} = 13{,}33$ см^3

5. Чему равны расстояния между центром тяжести всего сечения и центрами тяжести каждого прямоугольника b_1 и b_2 соответственно?

1) $b_1 = 7/3$ см^3 $b_2 = 4$ см^3
2) $b_1 = 4/3$ см^3 $b_2 = 3$ см^3
3) $b_1 = 1/3$ см^3 $b_2 = 2$ см^3
4) $b_1 = 5$ см^3 $b_2 = 1$ см^3

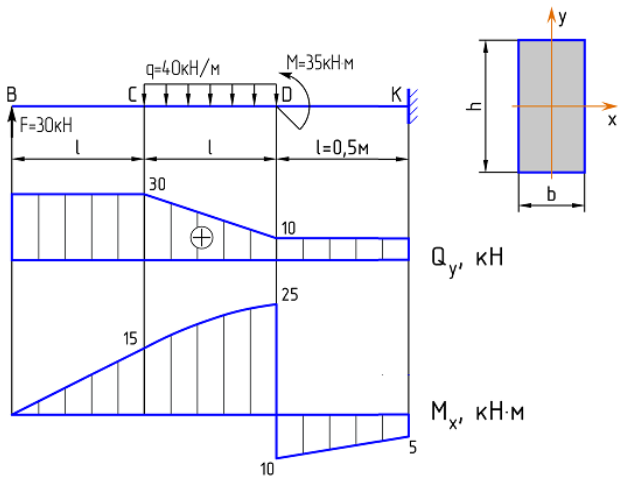
6. Чему равны главные центральные моменты инерции сложного сечения?

1) $I_x = 660$ см^4 $I_y = 1340$ см^4
2) $I_x = 263{,}33$ см^4 $I_y = 583{,}33$ см^4
3) $I_x = 1280$ см^4 $I_y = 960$ см^4
4) $I_x = 846{,}67$ см^4 $I_y = 537{,}33$ см^4

Тема 4

Вариант 1

Балка с жестким защемлением, изготовленная из пластичного материала с допускаемым напряжением [σ] = 160 МПа, нагружена известной системой внешних поперечных сил и изгибающих моментов. Поперечное сечение балки прямоугольное со сторонами b = 5 см и h = 15 см. Эпюры внутренних поперечных сил и изгибающих моментов построены.



1. Какое сечение балки является наиболее опасным?

1) *B*
2) *C*
3) *D*
4) *K*

2. Где в опасном сечении расположена зона сжатых волокон относительно нейтральной линии?

1) выше нейтральной линии
2) ниже нейтральной линии

3. Где расположены опасные точки в опасном сечении?

1) на верхней и нижней сторонах прямоугольника
2) на левой и правой сторонах прямоугольника

3) на нейтральной линии
4) на диагоналях прямоугольника

4. Чему равно расстояние от нейтральной линии до наиболее удаленных точек сечения?
1) $y_{max} = 2{,}5$ см
2) $y_{max} = 5$ см
3) $y_{max} = 7{,}5$ см
4) $y_{max} = 15$ см

5. Чему равен осевой момент сопротивления W_x прямоугольного сечения балки?
1) $W_x = 236{,}25$ см^3
2) $W_x = 62{,}5$ см^3
3) $W_x = 128{,}5$ см^3
4) $W_x = 187{,}5$ см^3

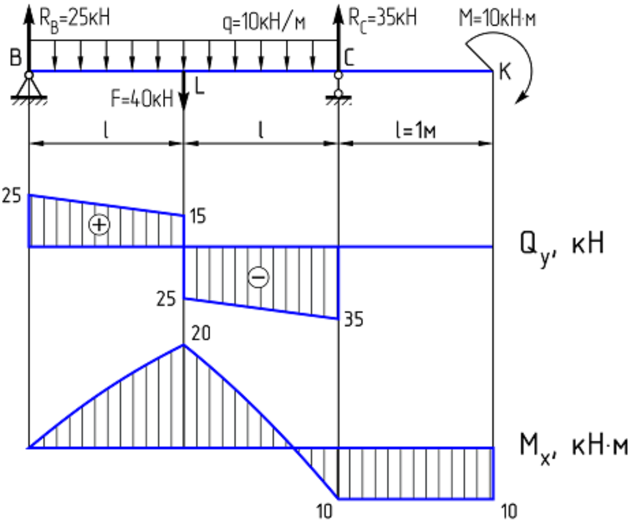
6. Чему равна величина максимального нормального напряжения в опасных точках опасного сечения?
1) $\sigma_{max} = 120$ МПа
2) $\sigma_{max} = 133$ МПа
3) $\sigma_{max} = 187$ МПа
4) $\sigma_{max} = 225$ МПа

7. Выполняется ли условие прочности для заданной балки?
1) выполняется
2) не выполняется

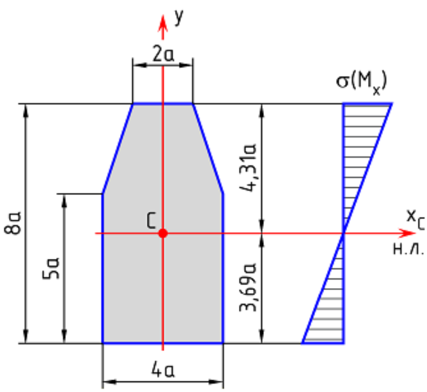
8. Чему равно минимально допустимое значение стороны прямоугольника $[b]$, при котором выполняется условие прочности, если $h/b = 3$?
1) $[b] = 6{,}5$ см
2) $[b] = 5{,}8$ см
3) $[b] = 4{,}7$ см
4) $[b] = 3{,}2$ см

Вариант 2

Балка на двух шарнирных опорах, изготовленная из хрупкого материала с допускаемыми напряжениями $[\sigma]_p$ = 100 МПа и $[\sigma]_C$ = 200 МПа, нагружена известной системой внешних поперечных сил и изгибающих моментов. Эпюры внутренних поперечных сил и изгибающих моментов построены.



Поперечное сечение балки сложное, размеры его заданы в долях параметра a. Положение центра тяжести C определено; x_C – нейтральная линия сечения. Момент инерции сечения $I_{x_C} = 139{,}4a^4$.



1. Какое сечение балки является наиболее опасным?
1) B
2) L
3) C
4) K

2. Где в опасном сечении расположена зона сжатых волокон относительно нейтральной линии?
1) выше нейтральной линии
2) ниже нейтральной линии

3. Рационально ли расположено сечение или его нужно повернуть на 180°?
1) расположено рационально
2) расположено нерационально, его нужно повернуть на 180°

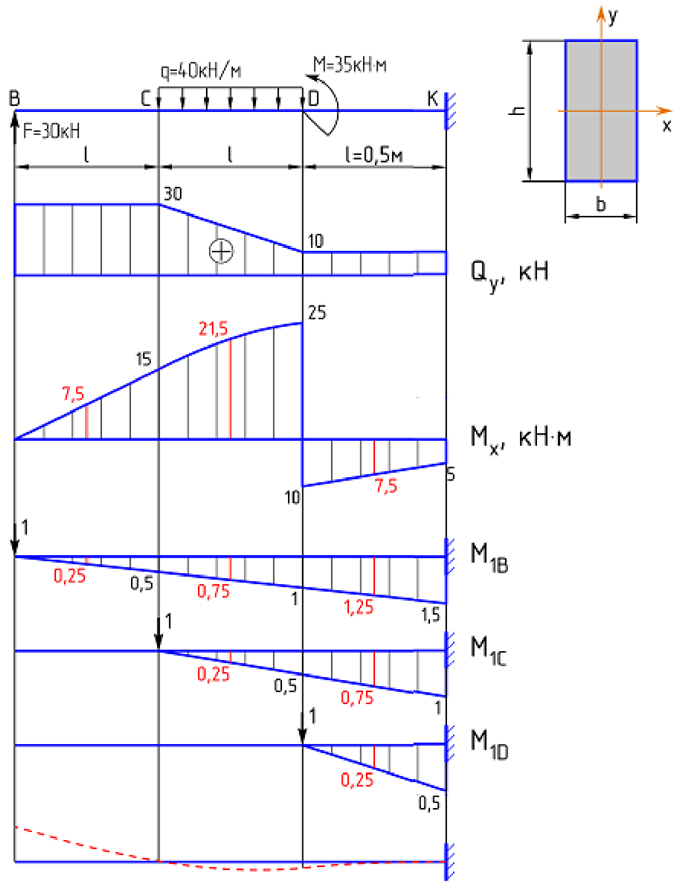
4. Какое волокно является наиболее опасным при рациональном расположении сечения?
1) растянутое
2) сжатое

5. Чему равен из условия прочности характерный размер сечения $[a]$?
1) $[a] = 1{,}2$ см
2) $[a] = 0{,}9$ см
3) $[a] = 1{,}7$ см
4) $[a] = 2{,}3$ см

Тема 5

Вариант 1

Балка с жестким защемлением нагружена известной системой внешних поперечных сил и изгибающих моментов. Поперечное сечение балки прямоугольное со сторонами $b = 5$ см и $h = 15$ см. Рассчитать балку на жесткость, используя предоставленный графический материал. Принять: $E = 2 \cdot 10^5$ МПа; $[\delta] = 0{,}001 \cdot L$ (где L – полная длина балки).



1. Чему равно количество участков перемножения k при определении перемещения в сечении B?

1) $k = 1$

2) $k = 2$

3) $k = 3$

4) $k = 4$

2. Чему равно перемещение сечения B?

1) $\delta_B = 0$

2) $\delta_B = 0{,}9$ мм (вниз)

3) $\delta_B = 1{,}7$ мм (вверх)

4) $\delta_B = 2{,}5$ мм (вниз)

3. Чему равно количество участков перемножения k при определении перемещения в сечении C?

1) $k = 1$
2) $k = 2$
3) $k = 3$
4) $k = 4$

4. Чему равно перемещение сечения C?

1) $\delta_C = 0$
2) $\delta_C = 0{,}6$ мм (вниз)
3) $\delta_C = 0{,}1$ мм (вниз)
4) $\delta_C = 1{,}2$ мм (вниз)

5. Чему равно количество участков перемножения k при определении перемещения в сечении D?

1) $k = 1$
2) $k = 2$
3) $k = 3$
4) $k = 4$

6. Чему равно перемещение сечения D?

1) $\delta_D = 0$
2) $\delta_D = 1{,}2$ мм (вверх)
3) $\delta_D = 0{,}3$ мм (вниз)
4) $\delta_D = 0{,}5$ мм (вниз)

7. Чему равно перемещение сечения K?

1) $\delta_K = 0$
2) $\delta_K = 0{,}4$ мм (вниз)
3) $\delta_K = 0{,}6$ мм (вверх)
4) $\delta_K = 0{,}1$ мм (вверх)

8. Какое сечение балки имеет наибольшее перемещение?

1) K
2) D
3) C
4) B

9. Чему равен наибольший прогиб балки?

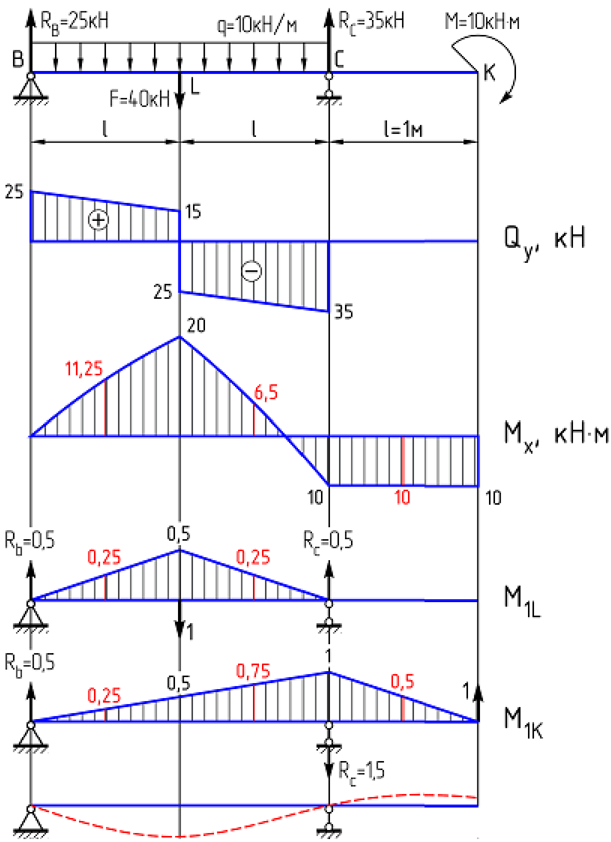
1) $\delta_{max} = 3{,}5$ мм
2) $\delta_{max} = 2{,}2$ мм
3) $\delta_{max} = 1{,}7$ мм
4) $\delta_{max} = 0{,}9$ мм

10. Выполняется ли условие жесткости?

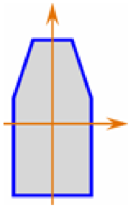
1) выполняется
2) не выполняется

Вариант 2

Балка на двух шарнирных опорах нагружена известной системой внешних поперечных сил и изгибающих моментов.



Поперечное сечение балки сложное, момент инерции сечения $I_{x_C} = 1165$ см^4.



Рассчитать балку на жесткость, используя предоставленный графический материал. Принять: $E = 2 \cdot 10^5$ МПа; $[\delta] = 0{,}001 \cdot BC$ (где BC – расстояние между опорами).

1. Чему равно количество участков перемножения k при определении перемещения в сечении L?
1) $k = 1$
2) $k = 2$
3) $k = 3$
4) $k = 4$

2. Чему равно перемещение сечения L?
1) $\delta_L = 0$
2) $\delta_L = 0{,}9$ мм (вниз)
3) $\delta_L = 1{,}7$ мм (вверх)
4) $\delta_L = 2{,}7$ мм (вниз)

3. Чему равно количество участков перемножения k при определении перемещения в сечении K?
1) $k = 1$
2) $k = 2$
3) $k = 3$
4) $k = 4$

4. Чему равно перемещение сечения K?
1) $\delta_K = 0$
2) $\delta_K = 0{,}6$ мм (вниз)
3) $\delta_K = 0{,}7$ мм (вверх)
4) $\delta_K = 1{,}2$ мм (вниз)

5. Чему равно перемещение сечения *B*?

1) $\delta_B = 0$

2) $\delta_B = 1{,}2$ мм (вверх)

3) $\delta_B = 0{,}3$ мм (вниз)

4) $\delta_B = 0{,}5$ мм (вниз)

6. Чему равно перемещение сечения *C*?

1) $\delta_C = 0{,}4$ мм (вниз)

2) $\delta_C = 0$

3) $\delta_C = 0{,}6$ мм (вверх)

4) $\delta_C = 0{,}1$ мм (вверх)

7. Какое сечение балки имеет наибольшее перемещение?

1) *K*

2) *L*

3) *C*

4) *B*

8. Чему равен наибольший прогиб балки?

1) $\delta_{max} = 3{,}5$ мм

2) $\delta_{max} = 2{,}7$ мм

3) $\delta_{max} = 1{,}7$ мм

4) $\delta_{max} = 0{,}9$ мм

9. Выполняется ли условие жесткости?

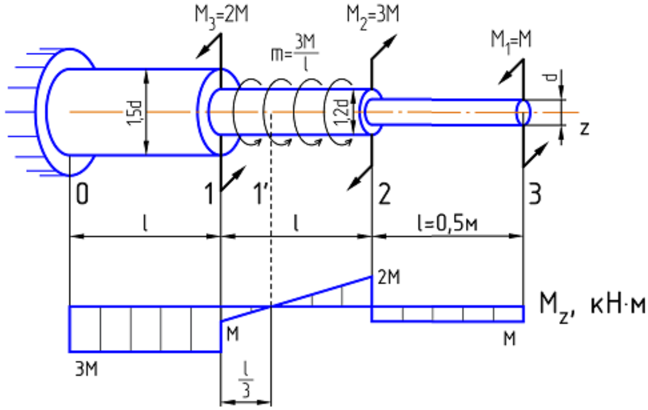
1) выполняется

2) не выполняется

Тема 6

Вариант 1

Ступенчатый вал круглого поперечного сечения, изготовленный из малоуглеродистой стали Ст3, нагружен системой внешних крутящих моментов, заданных в долях параметра *M*. Эпюра крутящих моментов для данного вала также построена в долях параметра *M*. Известно: $d = 20$ мм; $[\tau] = 100$ МПа; $G = 8 \cdot 10^4$ МПа; $[\varphi] = 1^o$.



1. Чему равно касательное напряжение на участке (2—3) в долях параметра M?

1) $\tau_{(2-3)} = 1{,}25M$ (МПа)
2) $\tau_{(2-3)} = 0{,}46M$ (МПа)
3) $\tau_{(2-3)} = 0{,}64M$ (МПа)
4) $\tau_{(2-3)} = 2{,}84M$ (МПа)

2. Чему равно максимальное по абсолютной величине напряжение вала в долях параметра M?

1) $|\tau_{max}| = 0{,}58M$ (МПа)
2) $|\tau_{max}| = 0{,}74M$ (МПа)
3) $|\tau_{max}| = 1{,}43M$ (МПа)
4) $|\tau_{max}| = 2{,}98M$ (МПа)

3. Какое сечение или участок вала является наиболее опасным?

1) участок (0—1)
2) сечение (1) участка (1—2)
3) сечение (2) участка (1—2)
4) участок (2—3)

4. Чему равна величина максимально допустимого параметра M, найденного из условия прочности?

1) $[M] = 136$ Нм
2) $[M] = 94$ Нм
3) $[M] = 182$ Нм
4) $[M] = 210$ Нм

5. Чему равен абсолютный угол закручивания участка (0–1), если $M = 100$ Нм?

1) $\varphi_{(0-1)} = -0{,}8^{o}$
2) $\varphi_{(0-1)} = 0{,}4^{o}$
3) $\varphi_{(0-1)} = -1{,}6^{o}$
4) $\varphi_{(0-1)} = 1{,}2^{o}$

6. Чему равен угол закручивания сечения (2) относительно жесткой заделки, если $M = 100$ Нм?

1) $\varphi_2 = -2{,}7^{o}$
2) $\varphi_2 = 6{,}4^{o}$
3) $\varphi_2 = 4{,}1^{o}$
4) $\varphi_2 = -1{,}3^{o}$

7. Чему равен максимальный по абсолютной величине угол закручивания вала относительно жесткой заделки (при $M = 100$ Нм)?

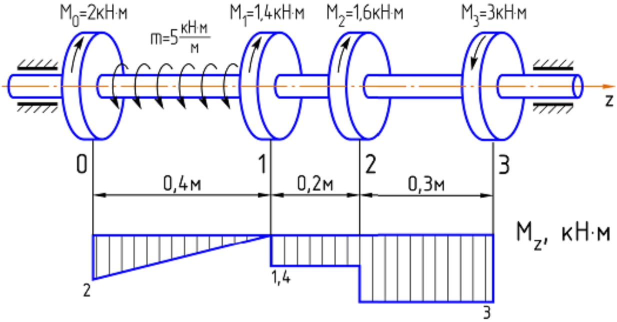
1) $|\varphi_{max}| = 9{,}9^{o}$
2) $|\varphi_{max}| = 12{,}6^{o}$
3) $|\varphi_{max}| = 6{,}8^{o}$
4) $|\varphi_{max}| = 4{,}3^{o}$

8. Выполняется ли условие жесткости по абсолютному углу закручивания?

1) выполняется
2) не выполняется

Вариант 2

Вал постоянного круглого поперечного сечения, изготовленный из малоуглеродистой стали Ст3, нагружен системой внешних самоуравновешенных крутящих моментов. Эпюра внутренних крутящих моментов M_z для данного вала построена. Известно: $d = 50$ мм; $[\tau] = 100$ МПа; $G = 8 \cdot 10^4$ МПа; $[\varphi] = 1^{o}$.



1. Чему равен полярный момент сопротивления круглого сечения вала?

1) $W_\rho = 85{,}7$ см^3
2) $W_\rho = 24{,}5$ см^3
3) $W_\rho = 56{,}9$ см^3
4) $W_\rho = 12{,}2$ см^3

2. Чему равно касательное напряжение в сечении (0)?

1) $\tau_0 = 119{,}7$ МПа
2) $\tau_0 = -57{,}1$ МПа
3) $\tau_0 = 34{,}2$ МПа
4) $\tau_0 = -81{,}5$ МПа

3. Чему равно касательное напряжение на участке (1–2)?

1) $\tau_{(1-2)} = -57$ МПа
2) $\tau_{(1-2)} = 82$ МПа
3) $\tau_{(1-2)} = -39$ МПа
4) $\tau_{(1-2)} = -69$ МПа

4. Чему равно максимальное по абсолютной величине напряжение вала?

1) $|\tau_{max}| = 76{,}5$ МПа
2) $|\tau_{max}| = 137{,}3$ МПа
3) $|\tau_{max}| = 95{,}8$ МПа
4) $|\tau_{max}| = 122{,}2$ МПа

5. Выполняется ли условие прочности?
1) выполняется
2) не выполняется

6. Чему равен абсолютный угол закручивания участка (0–1)?
1) $\varphi_{(0-1)} = -0{,}47^{o}$
2) $\varphi_{(0-1)} = -0{,}32^{o}$
3) $\varphi_{(0-1)} = 0{,}18^{o}$
4) $\varphi_{(0-1)} = -0{,}65^{o}$

7. Чему равен максимальный по абсолютной величине угол закручивания относительно сечения (0)?
1) $|\varphi_{max}| = 0{,}85^{o}$
2) $|\varphi_{max}| = 1{,}85^{o}$
3) $|\varphi_{max}| = 1{,}43^{o}$
4) $|\varphi_{max}| = 0{,}69^{o}$

8. Выполняется ли условие жесткости по абсолютному углу закручивания?
1) выполняется
2) не выполняется

Приложение 3

Ответы к тестам

№ вопроса		**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Тема 1 (1.1)	Вар. 1	2	1	1	3	1	–	–	–	–	–
	Вар. 2	2	1	5	4	1	–	–	–	–	–
Тема 1 (1.2)	Вар. 1	4	3	2	4	1	–	–	–	–	–
	Вар. 2	3	5	5	2	1	–	–	–	–	–
Тема 1 (1.3)	Вар. 1	2	1	1	1	1	1	1	1	2	–
	Вар. 2	3	2	4	1	3	4	2	1	1	–
Тема 2	Вар. 1	1	4	2	3	2	–	–	–	–	–
	Вар. 2	3	1	4	2	1	–	–	–	–	–
Тема 3	Вар. 1	4	3	2	4	1	1	–	–	–	–
	Вар. 2	1	3	2	1	3	2	–	–	–	–
Тема 4	Вар. 1	3	1	1	3	4	2	1	3	–	–
	Вар. 2	2	1	1	1	3	–	–	–	–	–
Тема 5	Вар. 1	3	3	2	3	1	3	1	4	3	2
	Вар. 2	2	4	3	3	1	2	2	2	2	–
Тема 6	Вар. 1	3	2	1	1	3	4	1	2	–	–
	Вар. 2	2	4	1	4	2	1	2	2	–	–

Приложение 4

Задания для выполнения контрольных работ

Правила выполнения и оформления контрольных работ

По дисциплине «Сопротивление материалов» для студентов заочной формы обучения учебным планом предусмотрено выполнение двух контрольных работ, содержание которых изложено в данном приложении. Каждая контрольная работа состоит из набора задач, план выполнения которых прилагается. Правила выполнения и оформления контрольных работ следующие.

Каждому студенту преподавателем назначается индивидуальный трехзначный номер варианта, согласно которому тот выбирает исходные данные для своих контрольных заданий.

Во всех задачах контрольной работы № 1 (КР № 1) первая цифра варианта в приведенных таблицах исходных данных означает номер схемы конструкции, вторая – номер строки значений линейных размеров, а третья – номер строки значений нагрузок. Таблица с пронумерованными расчетными схемами приводится отдельно. Для выбранных таким образом нагруженных расчетных схем необходимо построить эпюры внутренних силовых факторов.

Задачи контрольной работы № 2 по сути своей переходящие, т. е. являются как бы продолжением задач КР № 1. Поэтому студент использует в них свои же расчетные схемы с уже построенными эпюрами внутренних силовых факторов из КР № 1 и рассчитывает их на прочность и жесткость. Таким образом, первая цифра варианта в задачах КР № 2 означает номер схемы из соответствующей задачи КР № 1, вторая и третья цифры варианта используются для выбора материала конструкции, его прочностных данных и некоторых коэффициентов пропорциональности, используемых в этой задаче. Все эти параметры также выбираются из приведенной таблицы исходных данных.

Контрольная работа оформляется либо в электронном виде, либо на листах формата А4, скрепленных степлером, либо в школьной тетради в клетку. Титульный лист к каждой контрольной работе оформляется по образцу, приведенному в данном приложении. Для каждой задачи указывается её номер, название темы, изображается расчетная схема конструкции в масштабе исходных данных по своему варианту. Значения линейных размеров и приложенных нагрузок указываются на самой расчетной схеме. Остальные данные варианта (если они есть) приводятся правее схемы. Решение каждой задачи рекомендуется производить согласно приведенному плану по мере изучения соответствующего материала дисциплины (см. ссылки в конце каждой темы данного практикума).

Выполненные контрольные работы представляются на проверку в сроки, указанные в плане-графике учебного процесса, лично преподавателю, либо на его электронный адрес (в электронном виде), либо экспресс-почтой (в рукописном виде) на адрес кафедры: 445667, Россия, Самарская область, г. Тольятти, ул. Белорусская, 14, ТГУ, кафедра «Нанотехнологии, материаловедение и механика», Ф.И.О. преподавателя.

Министерство образования и науки Российской Федерации
Тольяттинский государственный университет
Институт машиностроения
Кафедра «Нанотехнологии, материаловедение и механика»

Контрольная работа № 1

по дисциплине «Сопротивление материалов»

«Построение эпюр внутренних силовых факторов»

Вариант №______

Студент ___________________________
Группа ________________
Преподаватель _____________________
Оценка ___________________________
«____» ________________20___г.

Тольятти 20___

Задача 1.1. Построение эпюр внутренних силовых факторов при растяжении-сжатии стержней

Для ступенчатого стержня, работающего в условиях растяжения -сжатия, построить эпюру внутренней продольной силы N. Исходные данные – в табл. 1.1.1 и 1.1.2.

План решения

1. Вычертить в масштабе расчетную схему ступенчатого стержня с указанием числовых значений нагрузок и линейных размеров.
   Указание. Рекомендуется следующий порядок составления расчетной схемы: сначала вычертить стержень по размерам ступеней l_1, l_2, l_3, а затем на полученной схеме расставить силы, ориентируясь на размеры a_1, a_2, a_3.
2. Разделить базу эпюры на участки соответственно условиям нагружения стержня.
3. Вычислить значения продольной силы N в характерных сечениях каждого участка стержня.
4. Используя основные закономерности при построении эпюры продольной силы и значения в характерных сечениях каждого участка, вычертить в масштабе эпюру продольной силы.
5. Определить по эпюре N наиболее нагруженные участок или сечение стержня.

Таблица 1.1.1

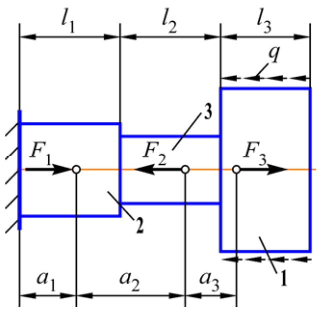
Исходные данные вариантов

Варианты схем	Варианты линейных размеров						Варианты нагрузок				
№ вар.	№ вар.	ℓ_1, м	ℓ_2, м	ℓ_3, м	a_1, м	$a_2 = 2a_3$ м	№ вар.	F_1, кН	F_2, кН	F_3, кН	q, кН/м
0	0	0,8	1,5	1,2	0,5	1,4	0	10	20	30	30
1	1	0,9	1,4	1,2	0,8	1,3	1	20	10	30	20
2	2	0,9	1,2	1,4	0,4	1,5	2	20	30	40	20
3	3	0,8	1,6	1,1	0,7	1,5	3	20	30	10	40
4	4	1,0	1,4	1,1	0,8	1,3	4	30	20	40	30
5	5	0,7	1,9	0,9	0,3	1,7	5	40	20	30	40
6	6	1,0	1,8	0,7	0,9	1,4	6	30	40	20	20
7	7	0,7	2,0	0,8	0,5	1,8	7	40	20	10	30
8	8	1,1	1,4	1,0	0,8	1,3	8	30	40	10	30
9	9	1,4	1,2	0,9	0,7	1,6	9	40	10	20	20

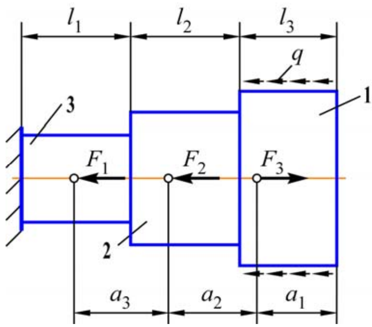
Таблица 1.1.2

Расчетные схемы стержней

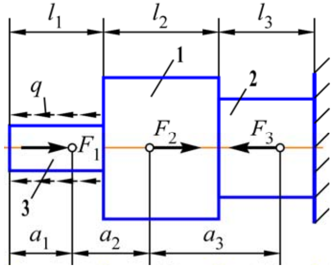
Вариант 0



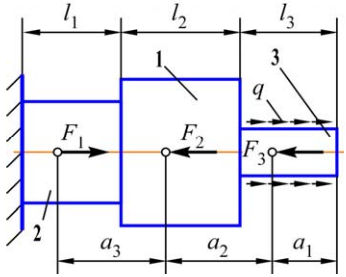
Вариант 1



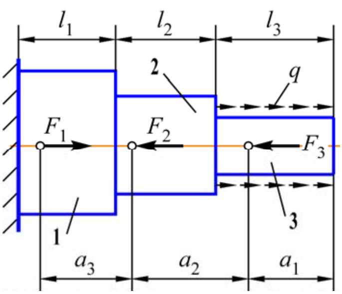
Вариант 2



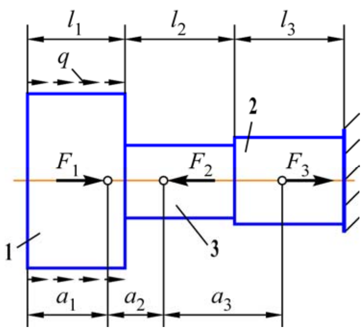
Вариант 3

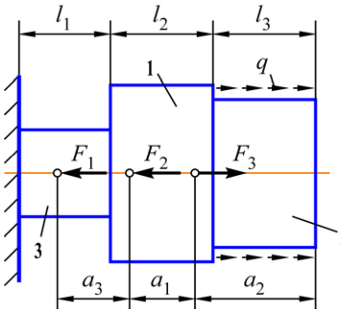
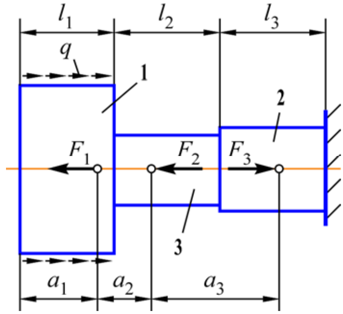
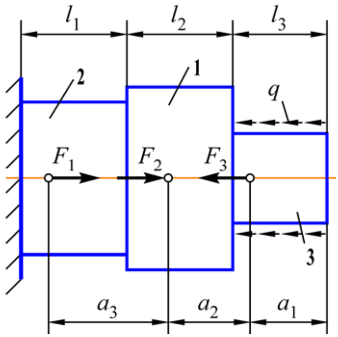
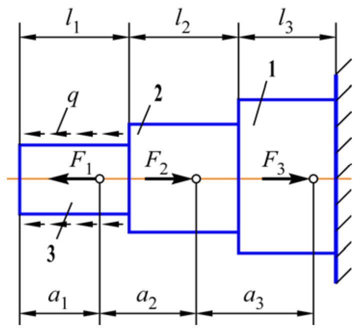


Вариант 4



Вариант 5



Вариант 6	***Вариант 7***
	
Вариант 8	***Вариант 9***
	

Задача 1.2. Построение эпюр внутренних силовых факторов при кручении валов

Для вала, заключенного в подшипники и работающего в условиях кручения, построить эпюру внутреннего крутящего момента M_z. Исходные данные – в табл. 1.2.1 и 1.2.2.

План решения

1. Вычертить в масштабе расчетную схему вала с указанием числовых значений нагрузок и линейных размеров.
2. Из условия равновесия вала определить неизвестный момент M_0.
3. Разделить базу эпюры крутящего момента на участки соответственно условиям нагружения.
4. Вычислить значения крутящего момента M_z в характерных сечениях каждого участка вала.

5. Используя основные закономерности при построении эпюры крутящего момента и значения в характерных сечениях, вычертить в масштабе эпюру крутящего момента M_z.
6. Определить по эпюре M_z наиболее нагруженные участок или сечение вала.

Таблица 1.2.1

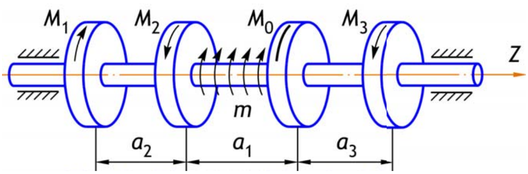
Исходные данные вариантов

Варианты схем	Варианты линейных размеров				Варианты нагрузок				
№ вар.	№ вар.	a_1, м	a_2, м	a_3, м	№ вар.	M_1, кН·м	M_2, кН·м	M_3, кН·м	m, кН·м/м
0	0	0,5	0,3	0,2	0	1,0	2,6	3,0	5,0
1	1	0,4	0,3	0,1	1	1,6	2,0	2,0	8,0
2	2	0,6	0,5	0,4	2	2,0	1,8	1,5	10,0
3	3	0,5	0,4	0,3	3	1,8	1,5	2,2	6,0
4	4	0,6	0,4	0,2	4	1,5	2,2	2,8	8,0
5	5	0,7	0,3	0,2	5	2,2	2,8	3,0	10,0
6	6	0,4	0,3	0,2	6	3,0	1,2	2,5	5,0
7	7	0,7	0,5	0,3	7	2,8	3,0	1,6	7,0
8	8	0,8	0,3	0,1	8	2,0	2,5	1,8	9,0
9	9	0,8	0,5	0,2	9	2,6	1,6	2,0	10,0

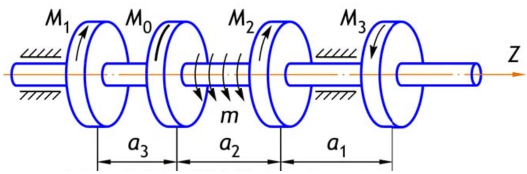
Таблица 1.2.2

Расчетные схемы валов

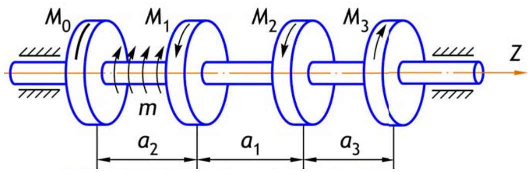
Вариант 0



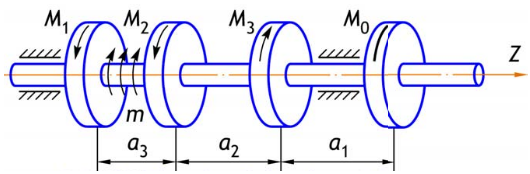
Вариант 1



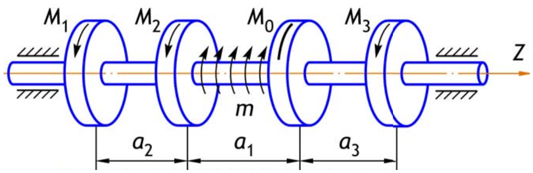
Вариант 2



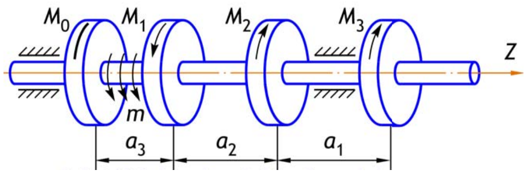
Вариант 3



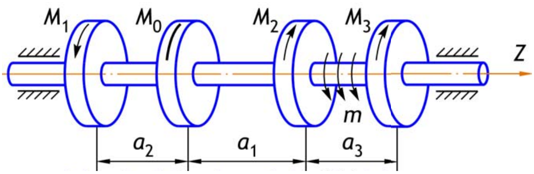
Вариант 4



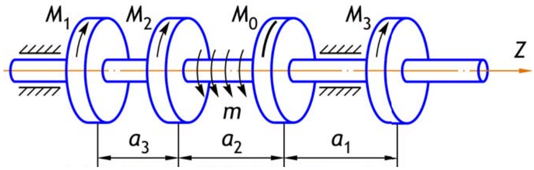
Вариант 5



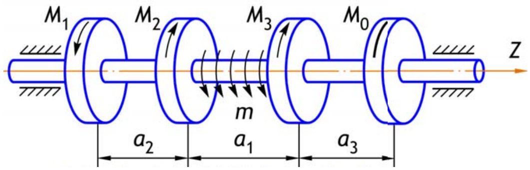
Вариант 6



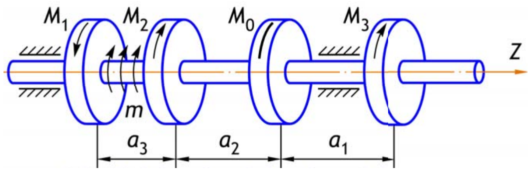
Вариант 7



Вариант 8



Вариант 9



Задача 1.3. Построение эпюр внутренних силовых факторов при изгибе балок

Для двух статически определимых балок, работающих в условиях плоского изгиба (схема № 1 – балка с жестким защемлением, схема № 2 – балка на двух опорах), построить эпюры внутренних силовых факторов.

Исходные данные – в таблицах 1.3.1 и 1.3.2.

План решения

Для каждой конструкции:

1. Вычертить в масштабе расчетную схему с указанием числовых значений нагрузок и линейных размеров.
2. Определить реакции всех опор (для двухопорной балки).
3. Разделить базу каждой эпюры на участки соответственно условиям нагружения.
4. Построить эпюры поперечной силы Q_y и изгибающего момента M_x, предварительно вычислив их значения в характерных сечениях каждого участка и используя основные закономерности при построении эпюр поперечной силы и изгибающего момента.

Таблица 1.3.1

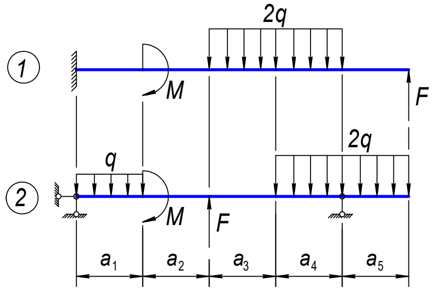
Исходные данные вариантов

Варианты схем	Варианты линейных размеров						Варианты нагрузок			
№ вар.	№ вар.	a_1, м	a_2, м	a_3, м	a_4, м	a_5, м	№ вар.	q, кН/м	F, кН	M, кН·м
0	0	1,5	2,0	0,6	2,0	1,9	0	15	20	30
1	1	2,0	1,8	0,7	2,2	1,6	1	10	30	40
2	2	1,2	1,6	1,0	2,4	2,6	2	10	40	35
3	3	1,8	1,4	0,8	2,5	2,0	3	20	50	25
4	4	1,4	1,2	0,5	2,3	2,4	4	15	25	30
5	5	1,7	1,9	0,7	2,1	1,6	5	20	20	35
6	6	1,6	1,7	0,9	2,0	1,8	6	10	35	40
7	7	1,9	1,5	0,6	1,8	1,8	7	15	45	50
8	8	1,3	1,3	0,8	2,0	2,6	8	15	40	45
9	9	2,0	1,2	0,6	1,8	2,4	9	10	60	30

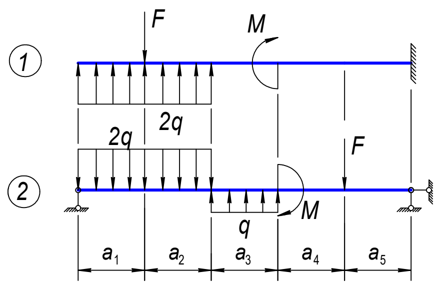
Таблица 1.3.2

Расчетные схемы балок

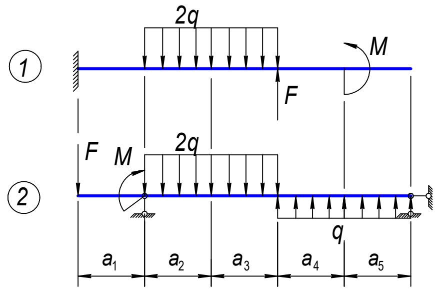
Вариант 0



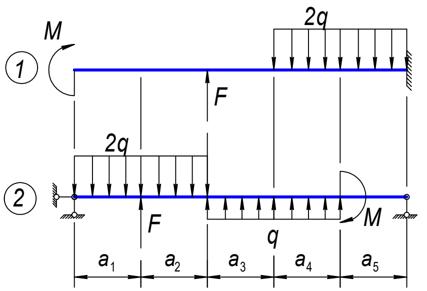
Вариант 1



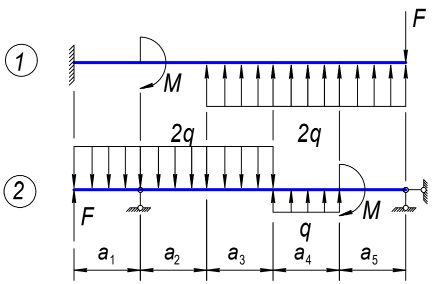
Вариант 2



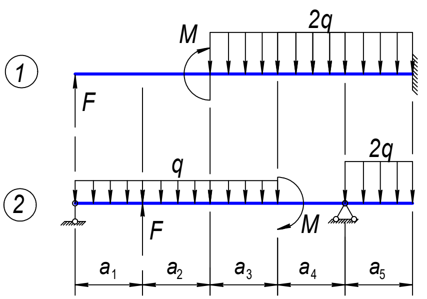
Вариант 3



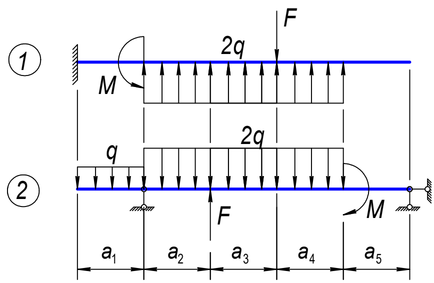
Вариант 4



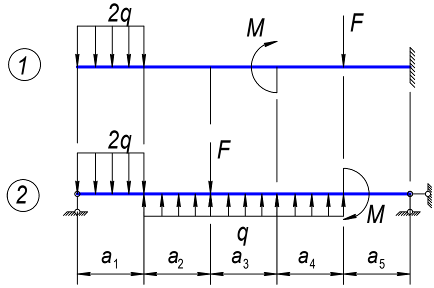
Вариант 5



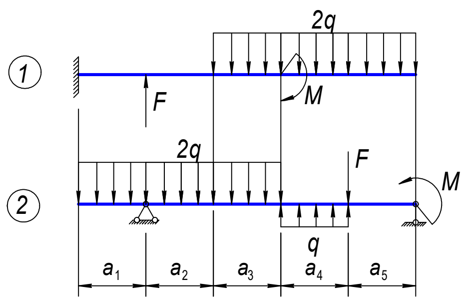
Вариант 6



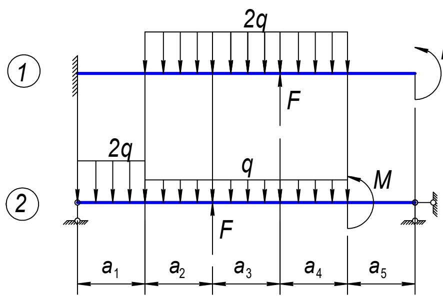
Вариант 7



Вариант 8



Вариант 9



Министерство образования и науки Российской Федерации
Тольяттинский государственный университет
Институт машиностроения
Кафедра «Нанотехнологии, материаловедение и механика»

Контрольная работа № 2

по дисциплине «Сопротивление материалов»

«Расчет на прочность и жесткость при растяжении-сжатии, кручении и изгибе»

Вариант №______

Студент ____________________________
Группа ________________
Преподаватель _____________________
Оценка ____________________________
«_____» _________________20___г.

Тольятти 20___

Задача 2.1. Расчет на прочность и жесткость ступенчатого бруса

Ступенчатый стальной брус круглого поперечного сечения нагружен силами, направленными вдоль его оси (схема – КР № 1, задача 1.1).

Приняв на исходной схеме соотношение площадей круглых поперечных сечений по пронумерованным участкам бруса: $A_1 = A$, $A_2 = A/2$, $A_3 = A/3$, подобрать из условия прочности [A] – допускаемую площадь поперечного сечения. Проверить выполнение условия жесткости. Спроектировать брус равного сопротивления и провести обоснование его экономичности. Исходные данные – в табл. 2.1.

План решения

1. Используя эпюру продольной силы N (КР № 1, задача 1.1), построить эпюру нормальных напряжений σ в долях 1/А, если $A_1 = A$, $A_2 = A/2$, $A_3 = A/3$.
2. Определить по эпюре напряжений опасное сечение или участок стержня и подобрать из условия прочности допускаемый параметр площади [A].
3. Построить эпюру перемещений и проверить выполнение условия жесткости ($[\Delta\ell] = \frac{\ell}{E} \cdot [\sigma]$, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа).
4. Спроектировать брус равного сопротивления и вычертить его в масштабе.
5. Сравнить по экономичности спроектированный равнопрочный брус и брус заданной формы.

Таблица 2.1

Исходные данные вариантов

Варианты схем	Варианты материалов			Варианты коэффициентов запаса	
№ вар.	№ вар.	Материал	$\sigma_т$, МПа	№ вар.	$n_т$
0	0	Сталь 40	340	0	1,8
1	1	Сталь 50Г	300	1	2,0
2	2	Сталь 5	320	2	1,5
3	3	Сталь 30ХМ	750	3	1,9
4	4	Сталь 45Х	850	4	2,0
5	5	Сталь 3	240	5	1,3
6	6	Сталь 12ХН3А	700	6	1,7
7	7	Сталь 40Х	800	7	1,4
8	8	Сталь 45	360	8	2,0
9	9	Сталь 20Х	650	9	1,6

Задача 2.2. Расчет на прочность и жесткость балок при плоском поперечном изгибе

Двухопорная балка (взять из задачи 1.3 (схема № 2) контрольной работы №1) изготовлена в двух вариантах: из пластичного и из хрупкого материала. Подобрать из условия прочности для пластичного материала допускаемые размеры трех форм поперечного сечения: двутавра, прямоугольника и круга. Из условия прочности для хрупкого материала провести подбор характерного размера [*a*] сечения сложной формы. Провести проверку жесткости балки двутаврового сечения и сделать выводы. Исходные данные – в табл. 2.2.1 и 2.2.2.

План решения

1. Вычертить в масштабе балку на двух опорах с построенными эпюрами поперечных сил и изгибающих моментов (взять из КР № 1, задача 1.3, схема № 2).
2. Подобрать из условия прочности двутавровое, прямоугольное ($h/b = 2$) и круглое сечения, приняв материал балки пластичный с $[\sigma] = 160$ МПа. Дать заключение о рациональности формы сечения по расходу материала.
3. Для балки с поперечным сечением сложной формы (табл. 2.2.2) определить координаты точки центра тяжести сечения и моменты инерции относительно главных центральных осей сечения в долях от характерного размера *a*.
4. Подобрать из условия прочности для хрупкого материала характерный размер [*a*] сложного поперечного сечения, предварительно решив вопрос о его рациональном положении.
5. Определив перемещения нескольких характерных сечений, изобразить приближенный вид оси изогнутой балки и провести проверку жесткости балки двутаврового сечения, приняв $[\delta] = (0{,}0005...0{,}001)\cdot l$ (где l – расстояние между опорами).

Общие данные: $E = 2 \cdot 10^5$ МПа – модуль упругости первого рода; $n_B = 2$ – коэффициент запаса по прочности.

Таблица 2.2.1

Исходные данные вариантов

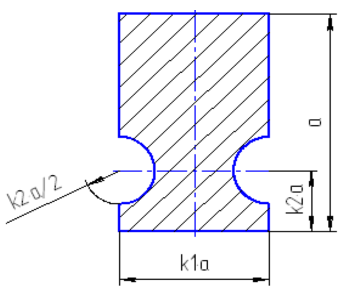
Первая цифра варианта		Вторая цифра варианта				Третья цифра варианта		
№ вар.	№ схемы сечения	№ вар.	k_1	k_2	k_3	№ вар.	$\sigma_{вр}$, МПа	$\sigma_{вс}$, МПа
0	Вариант 0	0	0,50	0,20	0,10	0	150	640
1	Вариант 1	1	0,55	0,25	0,12	1	210	600
2	Вариант 2	2	0,60	0,30	0,14	2	120	300

Первая цифра варианта		Вторая цифра варианта				Третья цифра варианта		
№ вар.	№ схемы сечения	№ вар.	k_1	k_2	k_3	№ вар.	$\sigma_{вр}$, МПа	$\sigma_{вс}$, МПа
3	Вариант 3	3	0,70	0,35	0,15	3	200	400
4	Вариант 4	4	0,80	0,40	0,16	4	100	360
5	Вариант 5	5	0,90	0,45	0,18	5	300	500
6	Вариант 6	6	1,0	0,55	0,20	6	210	460
7	Вариант 7	7	1,20	0,60	0,22	7	350	790
8	Вариант 8	8	0,45	0,20	0,08	8	320	620
9	Вариант 9	9	0,40	0,15	0,06	9	400	600

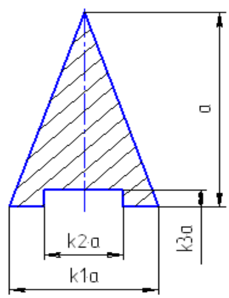
Таблица 2.2.2

Схемы сечений

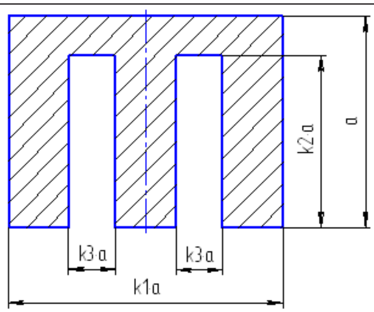
Вариант 0



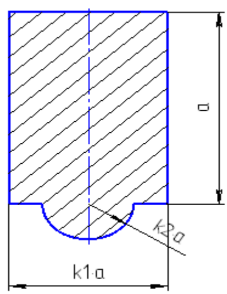
Вариант 1



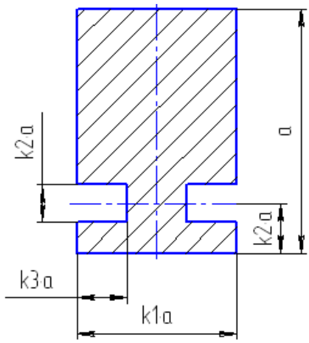
Вариант 2



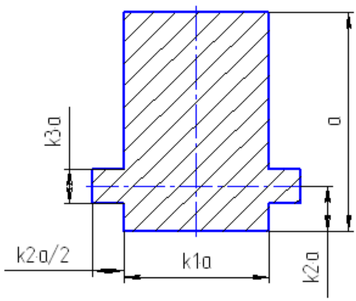
Вариант 3



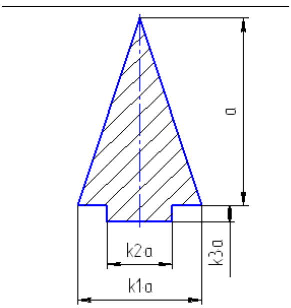
Вариант 4



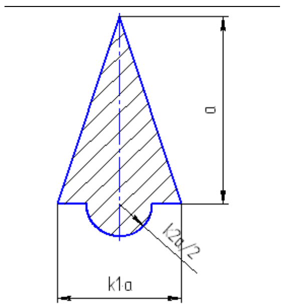
Вариант 5



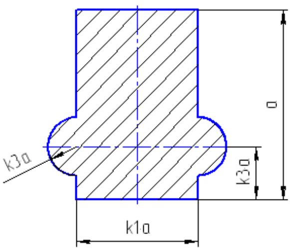
Вариант 6



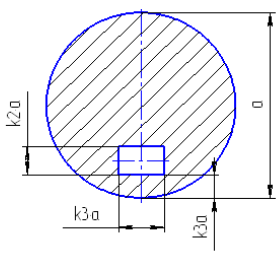
Вариант 7



Вариант 8



Вариант 9



Задача 2.3. Расчет на прочность и жесткость вала круглого поперечного сечения

Стальной вал круглого поперечного сечения нагружен системой крутящих моментов (схему вала и значения нагрузок взять из КР № 1, задача 1.2). Подобрать из условия прочности допускаемый диаметр вала [*d*]. Проверить выполнение условия жесткости. Исходные данные – в табл. 2.3.

План решения

1. Используя эпюру крутящего момента M_z (задача 1.2), подобрать из условия прочности допускаемый диаметр вала [*d*].
2. Построить эпюру абсолютных углов закручивания φ.
3. Проверить выполнение условия жесткости по абсолютным углам закручивания ($[\varphi] = 1^\circ$, $G = 8 \cdot 10^4$ МПа).

Таблица 2.3

Исходные данные вариантов

Варианты схем	Варианты материалов			Варианты коэффициентов запаса	
№ вар.	№ вар.	Материал	τ_T, МПа	№ вар.	n_T
0	0	Сталь 40	200	0	1,8
1	1	Сталь 50Г	180	1	2,0
2	2	Сталь 5	190	2	1,5
3	3	Сталь 30ХМ	450	3	1,9
4	4	Сталь 45Х	510	4	2,0
5	5	Сталь 3	140	5	1,3
6	6	Сталь 12ХН3А	420	6	1,7
7	7	Сталь 40Х	480	7	1,4
8	8	Сталь 45	210	8	2,0
9	9	Сталь 20Х	390	9	1,6