МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Тольяттинский государственный университет»

Институт математики, физики и информационных технологий
(наименование института полностью)

Кафедра «Высшая математика и математическое образование»
(наименование)

44.04.01 Педагогическое образование
(код и наименование направления подготовки)

Математическое образование
(направленность (профиль))

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА (МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ)

на тему «Учебник математики как средство формирования самостоятельной деятельности старшеклассников»

Обучающийся Е.В. Ескендирова
(Инициалы Фамилия) (личная подпись)

Научный руководитель д-р пед. наук, профессор, Р.А. Утеева
(ученая степень (при наличии), ученое звание (при наличии), Инициалы Фамилия)

Тольятти 2023

Оглавление

Введение 3
Глава 1 Теоретические основы использования учебника математики как средства формирования самостоятельной деятельности старшеклассников . 11
1.1 Понятие самостоятельной деятельности старшеклассников при обучении математике 11
1.2 Основные цели и задачи формирования самостоятельной деятельности старшеклассников при обучении математике 15
1.3 Анализ педагогических возможностей учебника математики как средства формирования самостоятельной деятельности старшеклассников и их реализация в учебниках разных авторов 18
Глава 2 Методические основы использования учебника математики как средства самостоятельной деятельности старшеклассников 25
2.1 Методические особенности организации работы старшеклассников с учебником математики, способствующие формированию навыков самостоятельной деятельности 25
2.2 Упражнения и задания, стимулирующие к самостоятельной деятельности по теме «Функции. Свойства и графики функций» 28
2.3 Система заданий по теме «Параллельность прямых в пространстве» в рамках технологии развивающего обучения теоремам 51
2.4 Педагогический эксперимент и его результаты 88
Заключение 96
Список используемой литературы и используемых источников 97
Приложение А Анализа темы «Уравнение касательной к графику функции» в учебниках разных авторов 106
Приложение Б Анкета 114
Приложение В Проверочные работы по теме «Применение производной при решении задач» 116

Введение

Актуальность и научная значимость настоящего исследования. В соответствии с ФГОС [65] основного общего образования современное образование нацелено на развитие выпускника, умеющего учиться, осознающего важность образования и самообразования для жизни и деятельности, способного применять полученные знания на практике. Также стандартом установлены требования, такие как освоение обучающимися в ходе изучения учебного предмета видов деятельности по получению нового знания в рамках учебного предмета, а также развитие умений работать с учебным математическим текстом (анализировать, извлекать необходимую информацию и др.).

Бесспорным является тот факт, что уровень подготовки учащихся непосредственно связан с учебным процессом, который осуществляется благодаря учебным планам, образовательным программам, учебному материалу, учебникам; через процесс обучения, например, методы обучения, виды познавательной деятельности учащихся на уроке; и его участников – учителей и учеников.

В свою очередь в монографии «Образование. Деятельность. Личность.» автора В.А. Беликова говорится, что «познавательная деятельность рассматривается, в первую очередь, как самостоятельный вид человеческой деятельности» [6].

Проблемами формирования самостоятельной деятельности школьников в обучении, интересовались исследователи, начиная с 90-х годов прошлого столетия, и как никогда этот вопрос остается актуальным в наше время в контексте самообразования на протяжении всей жизни и в изменениях, происходящих в обществе и в мире. Мы живем в постоянно ускоряющемся и расширяющемся потоке информации. Поэтому умение самостоятельно осуществлять деятельность с источником информации, усваивать ее в процессе соотнесения с собственным опытом и знаниями является необходимым условием успешности субъекта на любом профессиональном поприще. По этой причине учебник математики, являясь первоисточником информации, служит мощным инструментом формирования самостоятельной деятельности учащихся, учителю же отводится роль наставника по учебно-развивающей деятельности класса в целом и каждого ученика в отдельности.

Однако, в концепции развития математического образования в Российской Федерации отмечены проблемы развития математического образования: «содержание математического образования на всех уровнях продолжает устаревать и остаётся формальным, оторванным от жизни, нарушена его преемственность между уровнями образования» [29].

Действительно, опыт использования учебника по математике в школьной практике выявил ряд проблем, среди которых намечена такая тенденция – для самостоятельного усвоения учениками нового материала учебник используется крайне редко, в основном его роль отводится на закрепление материала. Можно назвать несколько явных причин такому положению дел: во-первых, устаревшее содержание учебника приводит к поиску дополнительного источника информации; во-вторых, учитель, с целью экономии времени на уроке, сам перерабатывает информацию и предоставляет ее учащимся в готовом виде; в третьих, отсутствует методическая поддержка педагогов при организации работы с учебником математики на уроке, направленной на формирование самостоятельной деятельности старшеклассников. На самом деле, необходимость использования учебника математики как основного источника информации при изучении теоретического материала, объясняется тем, что он разработан соответственно компонентам государственного образовательного стандарта, а его содержание, согласно учебным программам. Учебник математики имеет свою структуру и логику, и, несмотря на научный язык изложения теоретического материала, адаптирован под возрастные особенности учащихся, а задачный материал – дифференцирован. При этом учебник должен рассматриваться как основной, но не единственный источник информации: допускается использование учебно-методических пособий, рабочих тетрадей, сборника задач, книги для учителя, материалов сети интернет.

Как отмечают авторы большинства современных учебников математики –они пригодны и для самостоятельного изучения курса математики. С авторскими позициями по возможностям использования учебника чаще всего можно ознакомиться в книгах для учителя или в методических пособиях. Так в книге Н. Е. Федоровой и М.В. Ткачевой [66] содержатся подробные рекомендации учителям, преподающим, алгебру и начала математического анализа в 11 классе, по работе с учебником авторов Ю.М. Колягина, М.В. Ткачевой и других, среди которых предлагается: дать учащимся возможность самостоятельно продумать план построения некоторого графика функции или самостоятельно сформулировать свойства функции, по аналогии с уже изученной, совместно с учителем. Например, авторы учебника геометрии для 11 класса Потоскуев Е.В., Звавич Л.И. в методическом пособии [48] отмечают, что изучение учеником решения задач, опубликованные в учебнике или задачнике, помогает в умении работать с текстом задачи, анализировать ход ее решения, и в итоге, овладевая методами решения геометрических задач, учащийся приобретает навык к самостоятельному их решению.

Анализ имеющихся диссертационных работ, посвященных формированию самостоятельной деятельности учащихся с помощью учебника математики, показал, что они были рассмотрены в аспекте:

– «самостоятельной работы по решению математических задач как средства развития творческой активности»[39] (Митрохина С.В., 2000);
– методического аппарата школьного учебника геометрии как средства систематизации знаний учащихся [16] (Григорьева Т.П., 1982);
– организации самостоятельной познавательной деятельности учащихся 5-6 классов по предмету алгебра [51] (Репникова Г.Г., 1975);

– «конструирования учебных текстов по математике» [13] (Гельфман Э. Г., 2004).

Итак, можно констатировать, что проблема формирования самостоятельной деятельности учащихся с помощью учебника математики нашла отражение в теории и методике обучения математике; рассмотрены различные аспекты развития самостоятельной деятельности учащихся с помощью учебника математики.

Таким образом, актуальность темы исследования обусловлена сложившимися к настоящему времени **противоречиями** между:

– необходимостью совершенствования содержания образования и отсутствием методических рекомендаций по созданию учебников математики, соответствующих индивидуальным способностям, реальным возможностям учащихся, способствующих формированию самостоятельной деятельности старшеклассников;

– необходимостью развивать познавательную самостоятельность школьников, используя возможности учебника математики и недостаточной методической поддержкой педагогов при организации работы с учебником математики на уроке, направленной на формирование самостоятельной деятельности старшеклассников.

Указанные противоречия обусловили **проблему исследования**: каковы возможности использования учебника математики как средства формирования самостоятельной деятельности старшеклассников?

Объект исследования: процесс обучения математике в общеобразовательной школе.

Предмет исследования: методика организации работы учителя по использованию старшеклассниками учебника математики, как средства формирования самостоятельной деятельности с применением учебных текстов и специально разработанных на их основе упражнений и заданий.

Цель исследования заключается в выявлении возможностей использования учебника математики как средства формирования самостоятельной деятельности старшеклассников и разработке методики организации работы с учебником.

Гипотеза исследования состоит в том, что формирование самостоятельной деятельности старшеклассников с помощью специально разработанных упражнений и заданий на основе соответствующего учебника математики будет способствовать повышению качества их математической подготовки.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие **задачи:**

1. Выявить теоретические основы использования учебника математики как средства формирования самостоятельной деятельности старшеклассников, а именно: определить понятия самостоятельной деятельности старшеклассников при обучении математике; описать основные цели и задачи формирования самостоятельной деятельности старшеклассников при обучении математике; рассмотреть педагогические возможности учебника математики как средства формирования самостоятельной деятельности старшеклассников и их реализацию в учебниках математики разных авторов.
2. Выполнить анализ научно-педагогической и учебно-методической отечественной и зарубежной литературы, проведенных исследований, опыта работы учителей математики по проблеме использования учебника математики как средства формирования самостоятельной деятельности старшеклассников.
3. Определить методические особенности организации работы старшеклассников с учебником математики, способствующие формированию навыков самостоятельной деятельности.

4. Разработать тексты упражнений, стимулирующие к самостоятельной деятельности старшеклассников на примере темы «Функции. Свойства. Графики».

5. Разработать специальную подборку задач, ориентированную на категорию диагностируемых учебных целей на уровне: знание, понимание и применение согласно технологии развивающего обучения теоремам и их доказательствам Т.А. Ивановой по теме «Параллельность прямых в пространстве».

6. Экспериментально проверить эффективность разработанных упражнений и заданий.

Теоретико-методологическую основу данного исследования составили работы В.В. Репьева [52], А.А. Темербековой [60], И.С. Якиманской [70], Ю.К. Бабанского [4], В.П. Беспалько [7], В.Г. Бейлинсона [5].

Базовыми для настоящего исследования явились также работы Э.Г. Гельфман [14], М.А. Холодной [67], Т.А. Ивановой [27].

Для решения поставленных задач применялись следующие **методы исследования:** анализ психолого-педагогической, научной и учебно-методической литературы; изучение, наблюдение и обобщение школьной практики; анализ собственного опыта работы в школе; анкетирование учащихся и учителей; педагогический эксперимент.

Основные этапы исследования:

- 1 семестр (2021/22 уч. г.): анализ ранее выполненных исследований по теме диссертации, анализ школьных и вузовских учебников по математике, нормативных документов, анализ опыта работы школы по данной теме;
- 2 семестр (2021/22 уч. г.): определение теоретических и методических основ исследования по теме диссертации;
- 3 семестр (2022/23 уч. г.): разработка системы упражнений, стимулирующих самостоятельную деятельность, подборка приемов

организации самостоятельной деятельности с учебной литературой; разработка специальной подборки задач, ориентированных на категорию диагностируемых учебных целей на уровне знание, понимание и применение согласно технологии развивающего обучения теоремам и их доказательствам Т.А. Ивановой по теме «Параллельность прямых в пространстве».

− 4 семестр (2022/23 уч. г.): оформление диссертации, корректировка ранее представленного материала, уточнение аппарата исследования, описание результатов экспериментальной работы, формулирование выводов.

Опытно-экспериментальная база исследования: Назарбаев Интеллектуальная школа ФМН г. Талдыкорган, Республика Казахстан.

Научная новизна результатов исследования заключается в предложенной системе разработанных упражнений и заданий на основе соответствующего учебника математики, ориентированной на формирование самостоятельной деятельности старшеклассников.

Теоретическая значимость исследования определяется тем, что в нем предложена методика формирования самостоятельной деятельности старшеклассников с помощью учебника математики в общеобразовательной школе, основанная на специально разработанных упражнениях и заданиях.

Практическая значимость исследования заключается в разработанных упражнениях, стимулирующих самостоятельную деятельность по теме «Функции» и специальной подборке задач, ориентированной на категорию диагностируемых учебных целей на уровне: знание, понимание и применение согласно технологии развивающего обучения теоремам и их доказательствам Т.А. Ивановой по теме «Параллельность прямых в пространстве».

Достоверность и обоснованность результатов исследования обеспечивались сочетанием теоретических и практических методов исследования, анализом педагогической практики и личным опытом работы в общеобразовательной школе.

Личное участие автора в организации и проведении исследования состоит в выявлении методических особенностей и формулировании методических рекомендаций по формированию самостоятельной деятельности старшеклассников с использованием учебника математики.

Апробация и внедрение результатов работы велись в течение всего исследования. Его результаты докладывались и обсуждались на методическом объединении учителей математики.

На защиту выносятся:

1. Специально разработанные упражнения по теме «Функция», способствующие самостоятельной деятельности.
2. Система задач по теме «Параллельность прямых в пространстве» на основе технологии развивающего обучения теоремам и их доказательствам Т.А. Ивановой, которая:

– требует разработки специальной подборки задач, ориентированной на категорию диагностируемых учебных целей на уровне: знание, понимание и применение.

– способствует формированию у обучающихся мотивационно-ориентировочной, операционно-познавательной и рефлексивно-оценочной самостоятельной деятельности.

Структура магистерской диссертации. Работа состоит из введения, двух глав, заключения, содержит 29 рисунков, 22 таблицы, список используемой литературы (76 источников). Основной текст работы изложен на 105 страницах.

Глава 1 Теоретические основы использования учебника математики как средства формирования самостоятельной деятельности старшеклассников

1.1 Понятие самостоятельной деятельности старшеклассников при обучении математике

Выполняя анализ научно-педагогической литературы, а также текстов статей можно заметить, что понятие «самостоятельная деятельность» не определено в явном виде методистами, педагогами, психологами, специалистами по дидактике. Понятие «самостоятельная деятельность» тесно связано с другими понятиями, такими как самостоятельность, самостоятельная работа, познавательная самостоятельность. Однако, чаще других отождествляются понятия «самостоятельная деятельность» и «самостоятельная работа».

Говоря о деятельности, мы понимаем любую активность, которая необходима для сознательного достижения цели. Самостоятельная работа носит деятельностный характер, так как структура самостоятельной работы состоит из компонентов: мотивация, постановка задачи, поиск способа ее решения, выполнение решения, контроль и самоконтроль.

Одни авторы Е.А. Лодатко [33, с.186] пытаются раскрыть понятие самостоятельная работа как одну из форм текущего контроля за процессом формирования у учащихся определенных умений и навыков, как средство диагностики усвоения программного материала и уровня математического развития; другие через описание путей, с помощью которых можно руководить самостоятельной работой , сводя его к методу обучения, к приему обучения, к форме организации учебных занятий или организации деятельности ученика.

П.И. Пидкасистый отмечает, что «под самостоятельной учебной работой обычно понимают любую организованную учителем активную деятельность учащихся, направленную на выполнение поставленной дидактической цели в специально отведенное для этого время: поиск знаний, их осмысление, закрепление, формирование и развитие умений и навыков, обобщение и систематизацию знаний» [45]. Самостоятельная работа рассматривается им как средство обучения, которое « в каждой конкретной ситуации усвоения соответствует конкретной дидактической цели и задаче; формирует у обучающегося на каждом этапе его движения от незнания к знанию необходимый объем и уровень знаний, умений и навыков для решения определенного класса познавательных задач и соответственного продвижения от низших к высшим уровням мыслительной деятельности; вырабатывает у учащихся психологическую установку на самостоятельное систематическое пополнение своих знаний и выработку умений ориентироваться в потоке научной информации при решении новых познавательных задач; является важнейшим орудием педагогического руководства и управления самостоятельной познавательной деятельностью обучающегося в процессе обучения» [45].

Л.В. Жарова самостоятельную работу рассматривает как «метод обучения, когда по заданию учителя и под его руководством учащиеся самостоятельно решают учебную задачу, при этом приложенные усилия и активность имеют решающую роль. Самостоятельная работа – активный метод, стимулирующий положительные мотивы, самоуправление, инициативу школьников» [21, с.103–104].

Самостоятельная работа, по мнению Л.В. Жаровой, приобретает личностный характер (с точки зрения мотива), характеризуется через деятельностный аспект и проявляется в том, что ученик сам ставит цель, стремится к ее достижению без помощи учителя (или посторонней помощи), при этом самостоятельно определяет эффективные пути.

Б.П. Есипов заключает, что «самостоятельная работа учащихся, включаемая в процесс обучения, – это такая работа, которая выполняется без непосредственного участия учителя, но по его заданию в специально предоставленное для этого время; при этом учащиеся сознательно стремятся достигнуть поставленной в задании цели, проявляя свои усилия и выражая в той или иной форме результаты своих умственных или физических (или тех и других вместе) действий»[20, с.20].

А.О. Бурдин в статье пишет: «Под самостоятельной работой обычно понимают работу, выполненную без активной помощи «извне», когда выполняющий работу для достижения поставленной цели сам определяет последовательность своих действий, причины возникающих при этом затруднений и способы их устранения»[9, с.123].

И.А. Зимняя отмечает: «Говоря об учебной деятельности, исследователи традиционно имеют в виду работу ученика в классе. Однако организация учебной деятельности школьника включает наряду с классной его домашнюю, внеклассную и самостоятельную работу по учебному предмету. Наименее изученной и в то же время представляющей наибольший интерес в плане психологического анализа учебной деятельности является самостоятельная работа школьника, студента. Именно в ней более всего могут проявляться его мотивация, целенаправленность, а также самоорганизованность, самостоятельность, самоконтроль и другие личностные качества. Самостоятельная работа обучающегося может служить основой перестройки его позиций в учебном процессе» [25, с.149].

С точки зрения психологии А.Н. Леонтьев отмечает, что «самостоятельная работа должна быть осознана самими учениками как свободная по выбору, внутренне мотивированная деятельность. Данная деятельность предполагает выполнение учениками целого ряда входящих в нее действий: понимание цели своей деятельности, принятие учебной задачи, придание ей личностного, подчинению выполнению данной задачи других интересов и форм занятости ученика, самоорганизации в распределении учебных действий во времени, самоконтроле в их выполнении» [30, С. 329].

Ю.А. Смирнова в статье пишет: «Как дидактическое явление, самостоятельная работа представляет собой, с одной стороны, учебное задание, то есть то, что должен выполнить ученик, объект его деятельности, с другой – форму проявления соответствующей деятельности памяти, мышления, творческого воображения при выполнении учеником учебного задания, которое, в конечном счете, приводит школьника либо к получению совершенно нового, ранее неизвестного ему знания, либо к углублению и расширению сферы действия уже полученных знаний» [58, с.173] .

А.Г. Молибог считает самостоятельную работу «основой всякого образования. При подготовке творческого специалиста все остальные формы учебной работы являются лишь вспомогательными той или иной степени эффективности» [41, с.164].

Ш.И. Ганелин пишет: «Самостоятельная работа – это набор заданий, составленных педагогом, которые рассчитаны на выполнение в определенное время и требующие со стороны учеников определенного умственного напряжения, самостоятельной мыслительной активности. Данные задания даются для лучшего восприятия и осмысления новых знаний, для выработки и совершенствования умений и навыков самостоятельной работы школьников, для закрепления знаний, тренировки в умениях и навыках творческого применения знаний» [12, с.169].

А.М. Лушников считает, «что назначение самостоятельной работы в том, чтобы с помощью индивидуального поиска углубить и конкретизировать свои знания, проявить творческий подход к изучаемой проблеме, навыки работы с книгой, умение анализировать прочитанное, систематизировать материал, вести записи, предлагать и отстаивать в дискуссии свою точку зрения. Самостоятельная работа – хороший способ подготовить себя к научным исследованиям, творческому решению задач учебно-воспитательного процесса и, в конечном счете, профессиональному становлению» [34, с.8].

Определение, данное Л.Г. Вяткиным, который под самостоятельной работой понимает «такой вид деятельности, при котором в условиях систематического уменьшения прямой помощи преподавателя выполняются учебные задания, способствующие сознательному и прочному усвоению знаний, умений и навыков формирования познавательной самостоятельности как черты личности студента» [10, с.35].

По мнению Г.И. Саранцева, «в контексте методики обучения математике самостоятельная работа есть многогранное явление обучения, обладающее следующими признаками: 1) быть одной из форм проявления методов обучения; 2) являться одним из видов деятельности; 3) быть средством обучения; 4) являться одной из форм организации познавательной деятельности; 5) быть самостоятельной деятельностью учения. Такое представление самостоятельной работы позволяет рассмотреть различные аспекты ее функционирования в учебном процессе» [55, с.201].

Таким образом, самостоятельная деятельность – это деятельность, которая планируется учеником при выполнении учебного задания без непосредственного участия учителя, но под его методическим руководством, и реализуется обучающимся через умственные действия, волевые усилия и ответственность за свое обучение.

1.2 Основные цели и задачи формирования самостоятельной деятельности старшеклассников при обучении математике

Результат процесса обучения математике заключается в усвоении (приобретении) знаний, формирование умений и навыков, развитии гибкого и креативного мышления и раскрытии творческого потенциала учащихся, а также в воспитании успешной личности с цельным мировоззрением, умеющей думать, рассуждать, сопоставлять факты друг с другом и делать логические выводы, имеющие практическую пользу в современном мире. Важная роль в достижении цели учебного процесса отводится учителю, который не только является носителем знаний, а еще и фасилитатором, организующим деятельность учеников, которая напрямую зависит и от собственных (приложенных) умственных усилий обучающихся (самим обучающимся) и проявленной им воли.

По мнению Г.И. Саранцева, «в контексте методики обучения математики самостоятельная работа является многогранным явлением обучения и обладает одним из признаков, таким как средство обучения» [55, с. 201].

Эффективно организованная самостоятельная деятельность как средство обучения способствует осознанному усвоению предметных знаний, овладению приемами и способами самообразования, формированию потребности в самостоятельном получении знаний.

В работе автора Жаровой Л.В. отмечено, что «в практике обучения каждый тип самостоятельной работы представлен большим разнообразием видов работ, используемых учителями в системе урочных и внеурочных занятий, среди которых можно выделить:

1. Работа с книгой – с текстом и графическим материалом учебника.
2. Упражнения: тренировочные, воспроизводящие упражнения по образцу; реконструктивные упражнения; составление различных задач и вопросов и их решение; рецензирование ответов других учеников, оценка их деятельности на уроке; различные упражнения, направленные на выработку практических умений и навыков.
3. Решение разнообразных задач (в том числе самостоятельная работа с учебником по решению задач) и выполнение практических и лабораторных работ.

4. Различные проверочные самостоятельные работы, контрольные работы, диктанты, сочинения» [22].

По мнению Горбуновой Г.В., «для формирования навыков самостоятельной деятельности есть место на любом этапе урока математики, например, на этапе актуализации имеющихся знаний, на этапе изучения нового материала при работе с учебником (источником: учебник, математический текст, справочник, таблицы и др.), при первичной проверке понимания изученного материала, на этапе закрепления и проверки знаний, на этапе рефлексии и на различных учебных уровнях» [15, с.167].

Теплов С.М. в своей работе определяет «цели организации самостоятельной работы как: простое усвоение знаний, приобретение навыков и умений; получение опыта творческой и научно-информационной работы; формирование способности выстраивать индивидуальное направление самообучения.

Общая цель самостоятельной работы школьников при изучении математики – развитие математического мышления» [61, с. 18].

Автором предложены задачи самостоятельной работы, которые заключаются в следующем: «усвоение новых знаний, углубление и повторение ранее приобретенных знаний с целью их обобщения и систематизации; формирование практических умений и навыков по изучаемым темам; применение полученных знаний, приобретенных умений, навыков на практике» [61, с. 18].

Таким образом, основными задачами формирования самостоятельной деятельности старшеклассников при обучении математике являются:

– научить учеников самостоятельно овладевать знаниями и

– самостоятельно применять полученные знания при изучении нового и в практической деятельности.

1.3 Анализ педагогических возможностей учебника математики как средства формирования самостоятельной деятельности старшеклассников и их реализация в учебниках разных авторов

В законе «Об образовании в РФ» говорится, «что школа как учреждение, осуществляющее образовательную подготовку, должна обеспечить качественный уровень освоения учащимися общего образования» [23].

Согласно ФГОС основного общего образования от учащегося требуется умение самостоятельно определять цели своего обучения, ставить и формулировать для себя новые задачи в процессе обучения и познавательной деятельности, развивать мотивы и интересы своей познавательной деятельности, умение самостоятельно планировать пути достижения целей, владение основами самоконтроля, самооценки, принятия решений и осуществления осознанного выбора в учебной и познавательной деятельности.

По результатам исследований PISA, TIMSS можно сделать вывод, что российские и казахстанские ученики затрудняются в самостоятельном поиске решения задачи; «в обработке информации, планировании и организации познавательной деятельности, самооценке и рефлексии результатов деятельности, в процессе работы с различными текстами. Преодоление этих затруднений возможно осуществить при условии систематического формирования самостоятельной деятельности учащихся в процессе обучения подходящими, наиболее эффективными средствами» [32].

Одним из средств, с помощью которого формируется самостоятельная деятельность школьников, является учебник. Согласно закону «Об образовании в РФ», учебник является обязательным компонентом учебного процесса и без учебника (учебник на печатной основе либо электронный учебник) обучение проводиться не может.

Современный учебник математики является источником проверенной информации, средством для учителя, когда он организует работу учащихся по теме урока, средством формирования у учащихся самостоятельной деятельности. Учебник математики, обладает рядом возможностей – помогает учащимся в организации и планировании самостоятельного изучения материала. Однако важно учесть, что это возможно в том случае, если учащийся использует учебник осознанно, целенаправленно, при этом владеет разнообразными способами, методами и приемами работы с математическим текстом.

Согласно ГОСТ (Система стандартов по информации, библиотечному и издательскому делу) даются термины с соответствующими определениями. К «учебным изданиям относятся: учебник – учебное издание, излагающее систематизированное содержание учебной дисциплины, ее раздела, части, соответствующее учебной программе; учебное пособие – учебное издание, дополняющее или заменяющее частично или полностью учебник; рабочая тетрадь – учебное пособие, имеющее особый дидактический аппарат, способствующий самостоятельной работе учащегося над освоением учебного предмета» [56]; практикум – учебное издание, содержащее практические задания и упражнения, способствующие усвоению пройденного; примечание –практикум, содержащий учебные задачи, называют задачником; учебный комплект–набор учебных изданий, предназначенный для определенной ступени обучения и включающий учебник, учебный словарь, учебное пособие, рабочую тетрадь.

В педагогическом терминологическом словаре указано, что «учебник – это книга, в которой систематически излагаются основы знаний в определённой области на уровне современных достижений науки и культуры; основной и ведущий вид учебной литературы».

Анализ определения выявил единство авторских позиций в содержательном и деятельностном аспектах. Таким образом, учебник рассматривается не только как носитель содержания образования, но и средство обучения, способствующее освоению учебного материала и развивающее базовые умения и навыки самостоятельной творческой деятельности учащихся.

На основании того, что термин «возможность» определен как условие и способ, понятие «педагогическая возможность» рассмотрим, как единство условий, способов и функций, через которые рассматривается роль учебника при формировании самостоятельной деятельности старшеклассников.

С помощью школьного учебника математики реализуется возможность: активизации самостоятельной познавательной деятельности обучающихся через «усиление познавательного интереса учащихся не только особенностью структуры и содержания, но и общей системой методического аппарата: вопросы, задания, тесты, практические работы, предназначенные для самостоятельного выполнения» [40]; самостоятельного формирования предметных компетенций через поиск информации не только в учебнике, но и в других источниках; в решении методических задач повышения мотивации к изучению математики; организации и руководства учителем самостоятельной познавательной деятельности школьников; в развитии школьниками регулятивных универсальных учебных действий; самостоятельно осмыслить новый учебный материал, организовать и спланировать свою деятельность при решении задач, доказательстве теорем; проведения учеником самоконтроля и самооценки; развития творческого потенциала, через решение задач творческого характера; получить учащимися разноуровневое, дифференцированное обучение за счет текста и использования разноуровневых заданий (возможность изучать материал от простого к сложному) для осознанного построения своей собственной образовательной траектории; самостоятельной систематизации знаний учащихся; развитие самостоятельной познавательной деятельности в процессе организации проектной и исследовательской деятельности школьников с помощью учебника; самостоятельной подготовки к экзаменам.

Проведем анализ исследований и статей посвященных вопросам педагогических возможностей учебника математики как средства формирования самостоятельной деятельности старшеклассников.

Кирьянова А. А. проводит исследование [28], которое заключается в необходимости выявления приемов и способов организации работы с учебником математики с целью последующего самообразования учеников. Автор выделяет три этапа, по которым следует проводить учителю работу учащихся с учебником на уроках математики: работа до чтения, работа с текстом учебника непосредственно, работа после чтения. В каждом этапе автор показывает наиболее подходящие приемы работы с книгой для выработки у учащихся умений самостоятельного чтения учебника такие как составление плана прочитанного, тезиса, например конспектирование и цитирование целесообразно применять для старшеклассников. Автор отмечает, что обобщение прочитанного текста можно осуществить в виде схем, таблиц и рисунков. Для обучения учеников самостоятельному чтению учебника математики автор предлагает памятки, которые следует применять при работе с учебником, как на уроках, так и при выполнении домашнего задания.

Оглуздина А.В. в статье [43] рассматривает приёмы работы с текстом учебника и возможность их применения на уроках математики. Автор делится опытом работы в этом направлении.

В статье Денищевой Л.О. [33, с.68] рассматривается задача формирования общеучебных умений, «которые являются необходимым условием как самостоятельного приобретения знаний, так и овладения системой знаний, получаемых учащимися в процессе обучения». Автор определяет перечень общеучебных умений, а также предлагает разработанные рекомендации по их формированию. При обучении учащихся работе с книгой, а именно учебным математическим текстом автор предлагает учителям придерживаться требованиям, например, использовать дифференцированное чтение текста учебника: учить самостоятельно выделять материал для заучивания, а также тот текст, который имеет своей целью разъяснение основных фактов. Другое требование состоит в нахождении в тексте учебника ответов на контрольные вопросы, имеющиеся в учебнике. При самостоятельном изучении дома текста учебного пособия в обязательном порядке отвечать на контрольные вопросы, выделять ответы в тексте. Необходимо понимать, что самостоятельному выделению различного рода учебного материала предшествует систематическая работа по указанию учителя, под частичным руководством учителя, без помощи учителя.

Лян Р.Б., Елисеева Т.В. в статье [35, с.97] описывают опыт работы по развитию навыков самостоятельной работы учащихся при работе с учебной литературой. По мнению авторов работа с математическим текстом – один из видов деятельности учащихся, который формирует навыки самостоятельной работы. Авторы статьи выделяют основные этапы работы с текстом, а также предлагают различные формы и приемы работы с текстом на различных этапах урока; приводят примеры, дают рекомендации учителям.

Иванова А.В., Скрябина А.Г. в статье [26, с.536] выделяют недостатки школьных учебников по математике в старших классах гуманитарного направления, среди которых влияющие, в той или иной степени, на «развитие самостоятельной деятельности учащихся однотипные упражнения, не развивающие творчество; нет практических задач, которые могли бы помочь в повседневной жизни; нет должного внимания заданиям, стимулирующие учащихся к приведению несложных обоснований, к поиску тех или иных закономерностей; задания в учебниках недостаточно учитывают факторы, способствующие формированию познавательной активности».

В.В. Малиновский в статье [37, с.101] считает, что « для того, чтобы ученик мог самостоятельно изучить некоторый материал при этом быть уверенным в правильности применения освоенных при этом методов выполнения заданий, этап прохождения через возможные ошибки, который настоящее время возложен на учителя, необходимо ввести в учебники». Автор разработал серию заданий и упражнений, направленных «на выработку навыков самоконтроля».

Результаты анализа учебников по математике на наличие в них возможностей для формирования самостоятельной деятельности, на примере темы «Уравнение касательной к графику функции», представленной в разных учебниках алгебры и начал математического анализа приведены в Приложении А (таблица А.1).

Выводы по первой главе

В первой главе рассматриваются теоретические основы использования учебника математики как средства формирования самостоятельной деятельности старшеклассников.

На основании анализа психолого-педагогической и педагогической литературы, сделаны выводы о том, что:

– самостоятельная деятельность – это деятельность, которая планируется учеником при выполнении учебного задания без непосредственного участия учителя, но под его методическим руководством, и реализуется обучающимся через умственные действия, волевые усилия и ответственность за свое обучение;

– современный учебник математики является источником проверенной информации, средством для учителя, с помощью которого он организует работу учащихся по теме урока, средством формирования у учащихся самостоятельной деятельности;

– учебник математики, обладая рядом возможностей, может помочь учащимся самостоятельно осмыслить учебный материал, организовать и спланировать свою деятельность.

Анализ диссертационных исследований, научной и учебно-методической литературы и практического опыта учителей математики позволили выявить противоречия между: необходимостью совершенствования содержания образования и отсутствием методических рекомендаций по созданию учебников, соответствующих индивидуальным способностям, реальным возможностям учащихся, способствующих формированию самостоятельной деятельности старшеклассников; необходимостью развивать познавательную самостоятельность школьников в школе и недостаточной методической поддержкой педагогов при организации работы с современным учебником на уроке.

Глава 2 Методические основы использования учебника математики как средства самостоятельной деятельности старшеклассников

2.1 Методические особенности организации работы старшеклассников с учебником математики, способствующие формированию навыков самостоятельной деятельности

Репьев В.В. отмечал, что «одна из задач школы – развивать познавательные склонности у подрастающего поколения и научить самостоятельно учиться. А это прежде всего значит – научить пользоваться книгой, умело читать ее, самостоятельно работать над ней. Одна из целей математического образования заключается в том, чтобы научить самостоятельно читать доступную математическую книгу. Нужны кадры, умеющие читать и пользоваться технической книгой. Техническая книга пишется языком, близким к языку математических книг. Значит обучение чтению математической книги в некоторой мере подготавливает к работе над технической литературой. Другими словами, умения и навыки читать математические книги имеют значение для политехнического обучения» [52].

Проблемам учебника и учебных текстов посвящены исследования Ю.К. Бабанского [4], В.Г. Бейлинсона[5], В.П. Беспалько [7] и других. На современном этапе актуальными являются, например, такие качества учебного текста, как: «мера доступности учебного текста» (И.Я. Лернер), «баланс свернутости и развернутости учебного текста» (В.С. Цетлин), «ориентация учебного текста на понимание учебного материала» (М.А. Холодная [67]), «создание условий для самостоятельной деятельности» (Ю.К. Бабанский [4]), «возможность индивидуализации и дифференциации учебной деятельности средствами учебного текста» (Р.А. Утеева [62]– [64], [73]).

Гельфман Э.Г. [13] выделяет основные функции современного школьного учебника как полифункциональной дидактической системы, реализующейся в комплексе требований к учебному тексту, среди которых управляющая: организация повторения; создание условий для исследовательской деятельности учащихся; стимулирование к самостоятельной работе; наличие средств учебной диагностики.

Холодная М.А. отмечает, что «Учебный текст должен ориентировать учащихся на самостоятельное изучение отдельных вопросов без объяснения учителя на уроках. Подчеркивается важность включения в учебные тексты информации, помогающей самообразованию (в виде пояснений, указаний, комментариев, смысловых таблиц и других приемов организации текста, облегчающих самостоятельную работу над текстом)» [67].

Вопросы конструирования учебных текстов отражены в работах Гельфман Э.Г. По ее мнению, например, «учебный текст, посвященный введению понятия должен «отпускать» ученика вперед, что позволяет ему самостоятельно выделить признаки понятия, выбрать основание для классификации, установить связи между понятиями. А результаты своей работы учащиеся могут проконтролировать с помощью объяснительного и справочного материала» [14].

Мотеюнене С.В. в работе [42] описывает прием структурирования информации (составление схемы определения), такой вид деятельности, по его мнению, происходит с неразрывной связью с ее усвоением.

Мы живем в постоянно ускоряющемся и расширяющемся потоке информации. Поэтому умение самостоятельно работать с источниками информации, усваивать ее в процессе соотнесения с собственным опытом и знаниями является необходимым условием успешности субъекта на любом профессиональном поприще. По этой причине важно, чтобы учебник был создан в расчете на самостоятельную работу учащегося. Учебник всегда, по замыслу автора, в той или иной степени становится первоисточником информации. Учителю отводится роль наставника, менеджера по учебно-развивающей деятельности класса в целом и каждого ученика в отдельности.

Одной из основных проблем школьного математического образования является следующая ситуация: ученики знают, как решаются задачи того или иного типа, но не понимают, в чем состоит результат их деятельности. Опыт показывает, например, что более 80% учащихся старших классов общеобразовательных школ умеют решать квадратные уравнения, однако менее 20% способны справиться с задачей: «При каких значениях параметра a число 3 является корнем уравнения $2x^2 - 5ax + 40 = 0$?». То есть большинство учащихся находят корни квадратного уравнения, но не понимают, что это такое. Некоторые, понимая не могут выразить – не позволяет слабо развитые коммуникативные компетенции, или, попросту говоря, неразвитая речь. Такое положение вещей является, на наш взгляд, следствием недостаточного внимания, которое уделяется учителями теоретической подготовке учащихся. Положительной динамикой является тот факт, что некоторые современные учебники имеют достаточно расширенные теоретические блоки. Поэтому рекомендуется перед началом новой темы самостоятельное изучение соответствующего параграфа или пункта учебника рассматривать как часть домашнего задания или домашнего задания в полном объеме. При этом учебник должен рассматриваться как основной, но не единственный источник информации: допускается использование материалов интернета, учебных методических пособий.

В своей работе Большова Е.А. [8] описывает «методические особенности конструирования домашних заданий по математике, а также использование приёмов работы с текстом учебника при организации домашней работы».

Репьев В.В. в работе [52] отмечает, что «чтобы научить школьников работать с книгой, организуются и проводятся соответственные занятия на уроках. Виды занятий разнообразны. Выбор приема работы с книгой зависит от класса, возрастных особенностей учащихся, от имеющихся умений работать с книгой. Этот выбор зависит от книги, материала, особенностей его изложения в учебнике». Кроме того, организуется самостоятельная домашняя работа учащихся с книгой. Ее виды также разнообразны и усложняются по мере перехода школьников в старшие классы. Результаты самостоятельной домашней работы над книгой, если в задание включалось изучение нового материала, контролируются на очередном уроке» [52]. Автор приводит пример «На уроке изложена прямая теорема о трех перпендикулярах и сформулирована обратная теорема. В домашнюю работу включается повторение прямой теоремы и изучение по учебнику доказательства обратной теоремы. Следующий урок геометрии начинается с проверки выполнения домашней работы, при этом обратная теорема о трех перпендикулярах обязательно излагается на доске».

2.2 Упражнения и задания, стимулирующие к самостоятельной деятельности по теме «Функции. Свойства и графики функций»

Упражнения, стимулирующие самостоятельную деятельность приведены из авторского учебника, написанного в соавторстве с коллегами [44].

Тема: Функция и способы ее задания.

Упражнение 1. «Температура воздуха окружающей среды зависит от времени суток, сила гравитационного притяжения между двумя телами зависит от расстояния между ними и так далее. Приведите еще несколько примеров (из области физики, химии или других наук, из жизненных ситуаций) зависимости одних числовых величин от других. Попытайтесь объяснить причины зависимости величин одних от других. Попытайтесь также спрогнозировать ситуацию» [44]. Например, если расстояние между двумя точечными массами увеличили в 2 раза, то во сколько раз уменьшится сила гравитационного притяжения между ними?

Упражнение 2. «В верхней строчке таблицы 1 указаны номера учеников 10 «А» класса в списке по классному журналу, в нижней – соответствующие оценки за контрольную работу по теме «Функция»:

– почему данная таблица задает функцию (обозначим ее f),

– найдите $D(f)$и $E(f)$,

– найдите $f(5), f(16), f(23)$,

– решите уравнение $f(x) = 2$,

– решите неравенство $f(x) > 4$» [44].

Таблица 1 – Список по классному журналу

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
4	3	5	2	5	4	3	4	3	5	4	5	4	5	2	5	4	5	4	2	5	4	3

Упражнение 3 [44]. Ознакомьтесь со следующими правилами:

– каждому действительному числу x поставлено в соответствие ближайшее к нему на числовой оси целое число;

– каждому действительному числу x поставлена в соответствие вторая цифра после запятой в ее десятичной записи;

– каждому действительному числу x поставлено в соответствие наибольшее целое число, не превосходящее x.

Почему первое правило не задает функцию? Задает ли функцию второе правило? Почему третье правило задает функцию? Обозначим ее $h(x)$. Найдите $h(3), h(-3), h(\sqrt{2}), h(-4{,}7), h(-\sqrt{2})$.

Упражнение 4. «На координатной плоскости в виде линии изображено некоторое множество точек. Каждому числу x из отрезка $[-4; 13]$ ставим в соответствие ординату y той точки изображенного множества, которое имеет абсциссу x (рисунок 1). Ответьте на вопросы:

– почему определенное таким образом правило задает функцию (обозначим ее f);

– чему равно $f(-4), f(9), f(13)$;

– решите уравнение $f(x) = 6$;

– решите неравенство $f(x) < 6$;

– найдите множество значений функции f» [44].

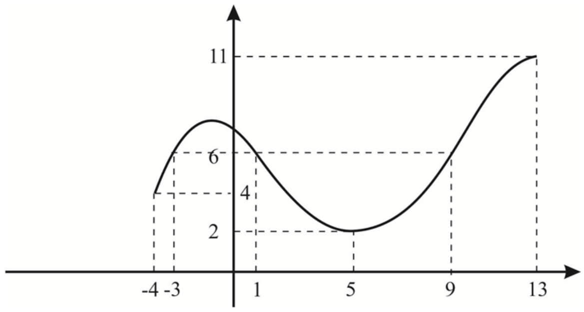


Рисунок 1 – Множество точек, задающее функцию

Упражнение 5 [44]. Каждому числу x из отрезка $[-1; 1]$ поставим в соответствие значение y, удовлетворяющее уравнению $x^2 + y^2 = 1$. Задает ли такое правило функцию?

Упражнение 6 [44]. Каждому числу x из отрезка $[-1; 2]$ поставим в соответствие число $y = \sqrt{1 - x^2}$. Задает ли такое правило функцию?

Упражнение 7 [44]. Каждому числу x из отрезка $[-1; 1]$ поставим в соответствие число $y = \sqrt{1 - x^2}$. Задает ли такое правило функцию?

Пример 1. Выполним упражнение 2. В нем задана функция, так как каждому номеру ученика по журналу ставится в соответствие ровно одно число – оценка за контрольную работу. В упражнении 2 функция задана табличным способом, или, как еще говорят, методом задания упорядоченных пар(x, y). Понятно, что $f(5) = f(16) = 5, f(23) = 3$. Решением уравнения $f(x) = 2$ являются числа $\{4,15,20\}$. Решением неравенства $f(x) > 4$ являются те числа первой строки, напротив которых во второй строке стоят числа большие, чем четыре. Поэтому решением неравенства $f(x) > 4$ является множество чисел $\{3,5,10,12,14,16,18,21\}$. Областью определения данной функции является множество целых чисел от 1 до 23 включительно, область значений $E(f)$ состоит из чисел $\{2,3,4,5\}$.

Пример 2. В упражнениях 3 (первое и второе правила), 5 и 6 правила функцию не задают. Функция каждому значению x ставит в соответствие ровно одно число y. Но по первому правилу из упражнения 2 числу 3,5 ставятся в соответствие числа 4 и 3. По второму правилу число 2 можно задать двумя способами: 2,000 и 1,9999…. По правилу упражнения 5 числу x=0 ставится в соответствие числа y=1 и y=-1. По правилу упражнения 6, например, числу x=1,5 мы не можем поставить в соответствие вообще ни одно число. В упражнении 3 третье правило задает функцию, так как если действительное число x является целым, то $h(x) = x$. Если же x не целое, то ближайшее к нему слева на числовой оси целое число и будет $h(x)$. Поэтому $h(3) = 3, h(-3) = -3, h(\sqrt{2}) = 1, h(-4{,}7) = -5, \quad h(-\sqrt{2}) = -2.$ Функция $h(x)$ задана в словесной форме.

Правила, описанные в остальных упражнениях, задают функцию, потому что для каждого числа x можно найти соответствующее по правилу число y и такое число будет единственным.

Пример 3. Выполним упражнение 4. Множество точек, изображенное в нем задает функцию, так как каждому значению $x \in [-4; 13]$ ставится в соответствие ровно одно значение y. Таким свойством не обладает множество точек, изображенное на рисунке 2.

Например, числу $x = 2$ на рисунке 2 соответствуют три значения y. Множество точек упражнения 4 называется графиком функции f; соответственно способ задания функции называется графическим. Ясно, что

$f(-4) = 4$, так как точка на графике, имеющая абсциссу x, равную -4, имеет ординату y, равную четырем.

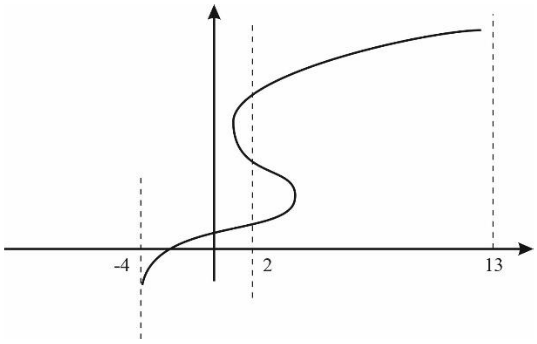


Рисунок 2 – Множество точек, не задающее функцию

Аналогично, $f(9) = 6, f(13) = 11$. Решениями уравнения $f(x) = 6$ являются те значения x, для которых соответствующие значения y равны шести. По графику видно, что это числа $x = -3, x = 1, x = 9$. Задание «решите неравенство $f(x) < 6$» переформулируем так: «Найти абсциссы x тех точек на графике, ординаты y которых меньше чем 6». Нетрудно видеть, что сформулированному условию удовлетворяют значения x, лежащие в интервале $[-4; -3)$ или $(1; 9)$. Значениями функции f, заданной графически, являются ординаты точек графика. Поэтому объединение всех ординат графика и есть множество значений функции f; $E(f) = [2; 11]$.

Пример 4. Рассмотрим упражнение 5. Соответствие, описанное в нем, не является функцией. Действительно, функция каждому своему аргументу ставит в соответствие единственное число. Однако, если, например, $x = 0$, то согласно правилу $0^2 + y^2 = 1$, то есть $y = \pm 1$. Это значит, что такое правило числу $x = 0$ ставит в соответствие два значения y. Правило упражнения 5 не задает функцию.

Пример 5. Соответствие, описанное в упражнении 7, удовлетворяет всем условиям определения функции. Значение функции вычисляется по формуле $y = \sqrt{1 - x^2}$.

Тема: Монотонность, экстремумы и нули функции.

Упражнение 1. «На рисунке 3 изображена зависимость температуры T по Цельсию окружающей среды от времени суток 3 марта 2010 года в городе А» [44].

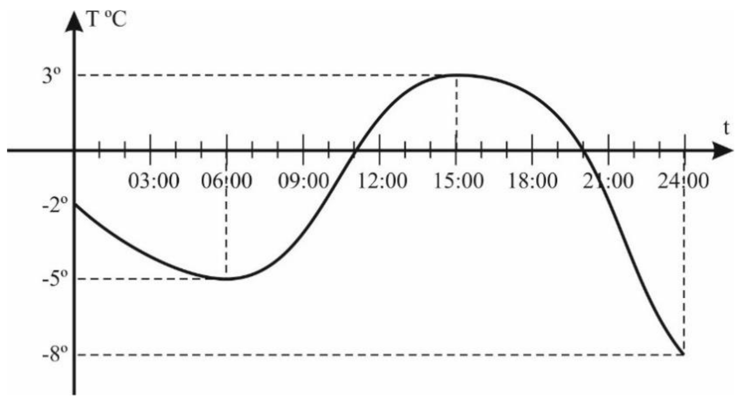


Рисунок 3 –Зависимость температуры T по Цельсию окружающей среды от времени суток

Укажите, с какого момента и до какого, температура повышалась. Указать временные интервалы, в течение которых температура понижалась.

Укажите время, когда температура T достигла своего наименьшего значения; наибольшего значения.

Укажите, когда T достигла своего наименьшего значения в период с 00.00 до 08.00; наибольшее значение в период с 00.00 до 03.00.

В какой момент времени температура была равной 0^0 по Цельсию? Когда температура была отрицательной? Положительной?

Рассуждение. Если абстрагироваться от природы величины t и T (считать неважным, что они обозначают), то фактически мы имеем график некоторой функции $T = f(t)$.

Глядя на график, мы можем сказать, что на множестве $t \in [0; 6]$ функция $f(t)$ убывает; $(0; 6)$ интервал убывания.

На множестве $t \in [6;15]$ функция $f(t)$ возрастает; $(6;15)$ интервал возрастания.На множестве $t \in [15;24]$ функция $f(t)$ убывает; $(15;24)$ интервал убывания.

В точке $t = 24$ $f(t)$ достигает своего наименьшего значения, которое равно -8; соответствующая запись $\min\limits_{t\in[0;24]} f(t) = f(24) = -8$. Наибольшее значение достигается функцией f в точке $t = 15$ и равно это значение числу 3: $\max\limits_{t\in[0;24]} f(t) = f(15) = 3$.

В точке $t = 6$ значение функции равно -5. Это значение не является наименьшим на всем множестве $t \in [0;24]$, но если брать любые точки t, достаточно близкие к 6, то $f(t) > 6$. Говорят, что в точке $t = 6$ функция $f(t)$ достигает своего локального минимума ($local$ (англ.) – местный), $t = 6$ – точка локального минимума, $f(6) = -5$ – значение локального минимума. В точке $t = 0$ $f(t)$, равно -2, но точки слева от $t = 0$ не лежат в области определения, $t = 0$ не является точкой локального максимума.

Заметим, что $f(11) = 0$ и $f(20) = 0$, точки $t = 11$ и $t = 20$ называются «нулями» функции $f(t)$. На промежутках $[0;11)$ и $(20;24]$ функция принимает отрицательные значения. На промежутке $(11;20)$ функция принимает положительные значения. Множества $[0;11), (20;24]$ и $(11;20)$ называются промежутками знакопостоянства функции.

Упражнение 2. Перечитайте еще раз описания графика $f(t)$ и проследите, как названия математических терминов согласуются с результатами вашей работы над соответствующими примерами упражнения 1.

Упражнение 3. Может ли какой-нибудь локальный минимум функции оказаться больше какого-нибудь локального максимума? Обязательно ли локальный максимум функции является наибольшим значением функции?

Тема: Четные и нечетные функции.

Упражнение 1. Точки $(4;\ -3)$ и $(-4;\ -3)$ имеют одинаковые ординаты и противоположные абсциссы. Отметьте их на координатной плоскости. Отметьте еще несколько таких же пар. Что можно сказать о взаимном расположении точек в одной паре?

Упражнение 2. Точки $(-5; 2)$ и $(5; -2)$ имеют противоположные абсциссы и противоположные ординаты. Отметьте их на координатной плоскости. Отметьте еще несколько таких же пар. Что можно сказать о взаимном расположении точек в одной паре?

Упражнение 3. Рассмотрим функции $f(x) = \cos x$, $g(x) = x^2 + 4x^6$, $h(x) = |x|$ на их естественной области определения. Сравните между собой значения $f(x)$ и $f(-x)$, $g(x)$ и $g(-x)$, $h(x)$ и $h(-x)$. Что можно сказать о значениях этих функций в противоположных точках? Какие выводы можно сделать о структуре графиков этих функций?

Упражнение 4. Рассмотрим функции $f(x) = \sin x$, $g(x) = x^3 - 5x^7$, $h(x) = x(|x| - \cos x)$ на их естественной области определения. Сравните между собой значения $f(x)$ и $f(-x)$, $g(x)$ и $g(-x)$, $h(x)$ и $h(-x)$. Что можно сказать о значениях этих функций в противоположных точках? Какие выводы можно сделать о структуре графиков этих функций?

Если вы все правильно сделали, то поняли, что значения функций из упражнения 3 в противоположных точках совпадают. Например, $g(-x) = (-x)^2 + 4(-x)^6 = x^2 + 4x^6 = g(x)$. Это значит, что любая пара точек графиков этих функций с противоположными абсциссами имеет одинаковые ординаты. (Упражнение 1). Следовательно, для любой точки (x_0, y_0) на графике симметричная ей относительно прямой Oy точка $(-x_0, y_0)$ тоже лежит на графике. Но это значит, что весь график симметричен сам себе относительно оси Oy (упражнение 1). Такие функции называются четными.

В упражнении 4 имеем $g(-x) = (-x)^3 - 5(-x)^7 = -x^3 + 5x^7 = -(x^3 - 5x^7) = -g(x)$, т.е. любая пара точек с противоположными абсциссами имеют противоположные ординаты (упражнение 2). Следовательно, для любой точки (x_0, y_0) симметричная ей относительно $(0{,}0)$ точка с координатами $(-x_0, -y_0)$ также лежит на графике. Но это значит, что весь график симметричен сам себе относительно точки O$(0, 0)$. Такие функции называются нечетными.

Определение. Функция $f(x)$ называется четной, если выполняются два условия:

– для любого числа x из области определения $D(f)$ число $-x$ также лежит в $D(f)$;

– для любого числа x выполняется равенство $f(-x) = f(x)$.

Первое условие в данном определении означает симметричность множества $D(f)$ относительно начала координат на оси Ox. Иными словами, в любой паре точек с противоположными координатами на оси Ox либо обе не лежат в области $D(f)$, либо обе принадлежат $D(f)$. Во втором случае значения функции в этих точках равны между собой. Это значит, что если какая-то точка$(x_0,\ y_0)$ координатной плоскости лежит на графике четной функции, то $(-x_0,\ y_0)$ также лежит на графике той же функции. Но такие пары точек симметричны друг другу относительно оси Oy (см. упражнение 1). Следовательно, прямая Oy является осью симметрии графика любой четной функции.

Далее будет сформулировано определение нечетной функции и соответствующее свойство ее графика.

Упражнение 5. Попробуйте самостоятельно сформулировать корректное (правильное) определение нечетной функции и объяснить, почему график любой нечетной функции является центрально-симметричной фигурой с центром симметрии в точке $O(0; 0)$.

Упражнение 6. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ - две нечетные функции, имеющие одинаковую область определения, $h(x) = f(x) - g(x), u(x) = f(x) \cdot g(x)$. Какими функциями являются $h(x)$ и $u(x)$?

Упражнение 7. Существует ли функция, которая является и четной, и нечетной одновременно?

Тема: Периодические функции

Упражнение 1. «Жизнь батарейки». «Батарейку объемом 2500 мАч (миллиампер/часов) один раз в сутки ставят на подзарядку, где она заряжается в течение 4 часов. Затем ее мгновенно устанавливают на некий гаджет, где ее заряд расходуют до нулевого уровня в течение 20 часов. После этого ее опять ставят на подзарядку на 4 часа, затем устанавливают в тот же гаджет и т. д. изо дня в день. Новую батарейку с нулевым уровнем заряда поставили на подзарядку 27 февраля 2012 года в 20.00. Считая скорость зарядки и расхода электрического заряда батарейки равномерными:

- изобразить график зависимости уровня заряда батарейки от времени в течение ближайших 5 суток;
- установить объем заряда, содержащегося в батарейке 2 марта 2012 года в 10.00 утра» [44, с.41].

Упражнение 2. «Приведите примеры периодических процессов в природе или в жизни, т.е. процессов, характеристики которых повторяются через равные промежутки времени» [44].

Рассуждения по упражнению 1. Мы надеемся, что Вы увидите, как получается следующий график (рисунок 4).

Заметим лишь, что если продолжить график влево и вправо таким же образом до бесконечности, то мы как раз и получим периодическую функцию с главным периодом $T = 24$ часа.

Приведем пример еще одного графика периодической функции $y = tgx$.

Упражнение 3. «Постарайтесь разобраться, как данный график отражает определение и свойства периодических функций, которые вы рассмотрели в параграфе вашего учебника» [44].

Упражнение 4. «Начиная с точки 0 на положительной полуоси Ox, Жайна отмечает точки через каждые 3 ед., а Бахытжан – через каждые 5 ед. Найти расстояние между соседними дважды отмеченными точками» [44].

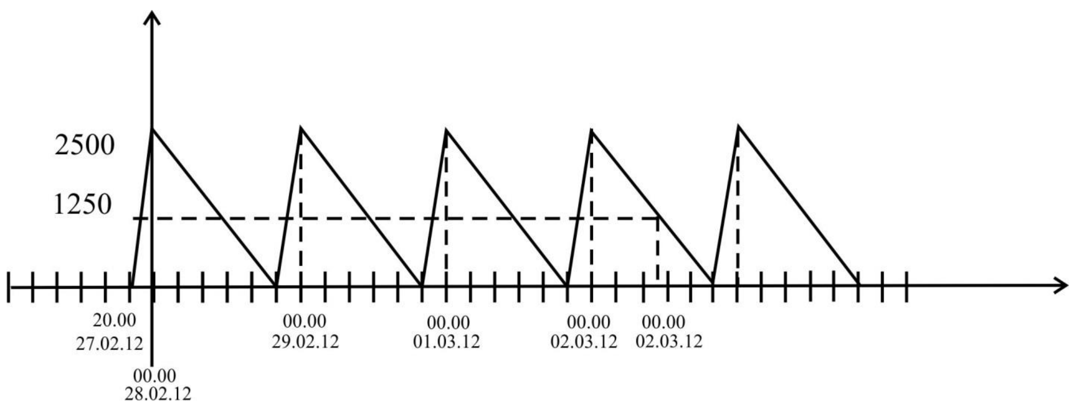


Рисунок 4 – График «Жизнь батарейки»

Тема: Сложные функции.

Упражнение 1. Предположим, в некотором учебном заведении стипендия назначается согласно следующей таблице 2:

Таблица 2 – Назначение стипендии

(0;3,5]	(3,5;4]	(4;4,5]	(4,5;5]
0	10000	20000	40000

В верхней строчке – средний бал студента по итогам сдачи экзаменов последнего семестра, в нижней –размер соответствующей стипендии в тенге. В верхней строчке следующей таблицы 3 – номера студентов по списку одной из учебных групп этого учебного заведения, в нижней – средний балл по итогам последней сессии.

Таблица 3 – Средний балл по итогам последней сессии

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
3.5	4	3.7	3.2	4.1	5	4.9	3	3.3	4.75	4.5	3.6	4.5	4.9	3.1	5

Сколько студентов будут получать стипендию в размере 40000 тенге? Сколько студентов будут получать стипендию от 10000 до 20000 тенге?

Упражнение 2. График отображает зависимость себестоимости p (по оси OY) единицы продукции А, выпущенной заводом Б, от цены q (по оси OX) сырья С на мировом рынке (рисунок 5). График отображает цены на сырье С в течение 2010 года (по оси OX - номера месяцев (рисунок 6)). Найти приблизительную себестоимость продукции А в конце каждого из месяцев.

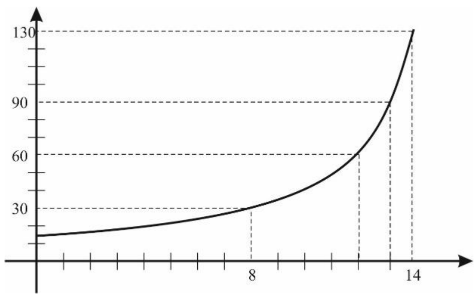


Рисунок 5 – Зависимость себестоимости p (по оси OY) единицы продукции А, выпущенной заводом Б, от цены q (по оси OX)

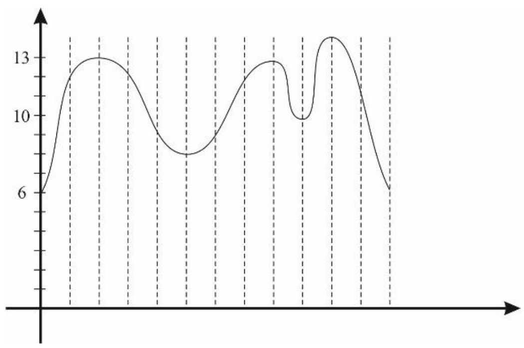


Рисунок 6 – Цены на сырье С в течение 2010 года

Тема: Взаимно-обратные функции.

Упражнение 1. На координатной плоскости постройте прямую $y = x$. Отметьте пары точек

$(4; 3)$и $(3; 4)$, $(-2; 5)$и $(5; -2)$, $(-3; -6)$и $(-6; -3)$, $(5; 0)$и $(0; 5)$.

Что можете сказать о таких точках и прямой$y = x$?

Упражнение 2. Любитель резьбы по дереву N вырастил 10000 попарно различных по весу арбузов и на каждом вырезал номер от 1 до10000 по правилу: чем больше весит арбуз, тем больше вырезанный на нем номер. N ни разу не ошибся. Сможете ли вы указать два номера m и n такие, что m больше n, но арбуз с номером m оказался бы меньше по весу, чем арбуз с номером n?

Упражнение 3. На следующий год N опять вырастил 10000 попарно различных по весу арбузов и на каждом вырезал номер от 1 до10000, но правило изменил: чем больше весит арбуз, тем меньше вырезанный на нем номер. Как и в прошлом году, Nдействовал безошибочно. Сможете ли вы указать два номера m и n такие, что mбольше n и арбуз с номером m оказался бы больше по весу, чем арбуз с номеромn?

Упражнение 4. Каждому гражданину Республики Казахстан не младше семнадцати лет поставим в соответствие номер его удостоверения личности. Зная номер удостоверения, можно ли однозначно установить личность его владельца? Два различных человека не могут иметь один и тот же номер удостоверения. Поэтому, зная номер удостоверения, можно однозначно установить личность его владельца.

Упражнение 5. Каждому гражданину Республики Казахстан поставим в соответствие последовательность букв, обозначающую его имя и фамилию. Зная имя и фамилию, можем ли мы однозначно установить личность владельца? Два различных человека могут иметь одинаковые имена и фамилии. Поэтому, зная имя и фамилию, мы не можем однозначно установить личность их владельца.

Фактически, и в первом и во втором случаях описаны функции. Но в первом случае функция задает взаимно однозначное соответствие, а во втором случае соответствие не является взаимно-однозначным.

Упражнение 4. Являются ли функции, графики которых изображены ниже, взаимно-однозначными (рисунок 7)?

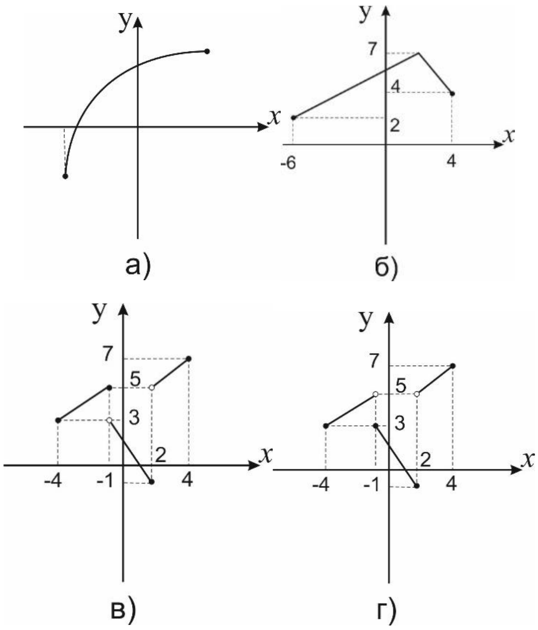


Рисунок 7 – Графики взаимно однозначных функций

Функция $y = f(x)$ взаимно-однозначна, если для любого $y_0 \in E(f)$ существует ровно одно $x_0 \in D(f)$ такое, что $y_0 = f(x_0)$. На рисунке б) для любого $y_0 \in [4; 7)$ существует два значения x_0, для которых $f(x_0) = y_0$ (рисунок 8).

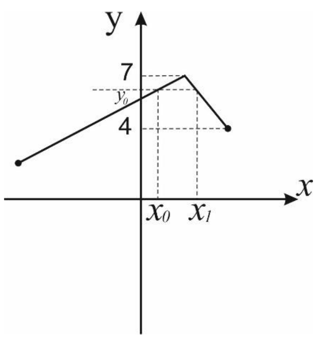


Рисунок 8 – Функция не являющаяся взаимно однозначной

Следовательно, функция, изображенная под пунктом б) не является взаимно однозначной и, как следствие, не имеет обратной (рисунок 8). Аналогично, на рисунке г) функция принимает значение 3 в двух точках $(x = -4$ и $x = -1)$и по этой причине не является взаимно однозначной.

Становится понятным, что если хотя бы одна горизонтальная прямая имеет с графиком две или более общих точек, то функция не является взаимно однозначной. Обратно, если каждая горизонтальная прямая имеет с графиком $y = f(x)$не более одной точки, то $f(x)$ – взаимно однозначная функция (рисунки а), в)). Очевидно, что такое свойство графика имеет место для любых монотонных функций.

Сформулируем и докажем еще два свойства взаимно обратных функций.

Свойство 1. Графики двух взаимно обратных функций симметричны друг другу относительно прямой $y = x$.

Свойство 2. Если одна из двух взаимно обратных функций возрастающая, то и другая является возрастающей. Если одна из двух взаимно обратных функций убывающая, то и другая является убывающей.

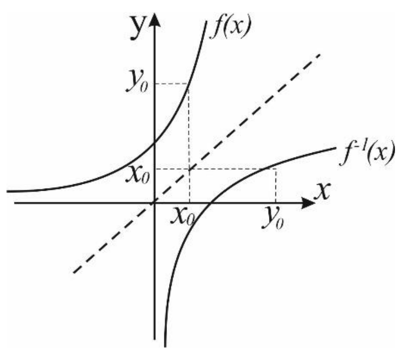


Рисунок 9 – График возрастающей функции

Доказательство. Свойство 1. Если точка $(x_0; y_0)$ лежит на графике $y = f(x)$, то это значит $y_0 = f(x_0)$ (рисунок 9). По определению обратной функции $x_0 = f^{-1}(y_0)$, т.е. точка $(y_0; x_0)$ лежит на графике $y = f^{-1}(x)$.

Остается заметить, что любые точки $(x_0; y_0)$ и $(y_0; x_0)$ симметричные друг другу относительно прямой $y = x$ (упражнение 1). Свойство 2. Пусть $y = f(x)$ – возрастающая функция и $f^{-1}(x)$ обратная к ней. Для возрастающей функции условие $x_1 > x_2$ и $y_1 > y_2$ равносильны, где $y_1 = f(x_1)$ и $y_2 = f(x_2)$. Но $x_1 = f^{-1}(y_1)$и $x_2 = f^{-1}(y_2)$. Получается равносильность условий $y_1 > y_2$ и $f^{-1}(y_1) > f^{-1}(y_2)$ т.е. большему аргументу функции $f^{-1}(x)$ соответствует большее ее значение. Следовательно, $f^{-1}(x)$ – возрастающая.

Упражнение 3. Доказать свойство 2 для случая убывающих функций.

Тема: Преобразование графиков.

Упражнение 1. Найдите в интернете определение и примеры геометрических преобразований: параллельный перенос, осевая симметрия, центральная симметрия.

Упражнение 2. Постройте на одной координатной плоскости график функции $y = x^2, y = x^2 + 2, y = (x + 3)^2, y = -x^2$. С помощью каких геометрических преобразований три последние параболы получаются из первой?

Упражнение 3. Найти точки пересечения графиков функций

$y = x^2 + 44x + 100$ и $y = 40x + 105$.

Упражнение 4а. Изобразите на координатной плоскости несколько пар точек. В каждой паре абсциссы должны быть равны, ординаты противоположны. Каким геометрическим преобразованием связаны друг с другом точки в каждой паре?

Упражнение 4б. Изобразите на координатной плоскости несколько пар точек. В каждой паре абсциссы должны быть противоположны, а ординаты равны. Каким геометрическим преобразованием связаны друг с другом точки в каждой паре?

Упражнение 5. Изобразите на координатной плоскости точку $A(4, 6)$. Передвинуть точку A на наименьшее расстояние так, чтобы она стала в 2 раза ближе к оси Oy, чем была. Как изменились ее координаты? Повторить все действия с точками $B(-4,6), C(-1,-3), D(5,-8), E(0,4)$

Упражнение 6. Изобразите на координатной плоскости точку $A(4,2)$. Передвинуть точку A на наименьшее расстояние так, чтобы она стала в 3 раза дальше от оси $0x$, чем была. Как изменились ее координаты? Повторить все действия с точками $B(-4,2), C(-1,3), D(5,-1{,}5), E(-3,0)$.

Преобразование, описанное в упражнении 5, будем называть сжатием в 2 раза вдоль оси Ox относительно оси Oy. Преобразование, описанное в упражнении 6, будем называть растяжением в 3 раза вдоль оси Oy относительно оси Ox.

Основной вопрос, который мы будем рассматривать: как простейшие алгебраические преобразования аналитической формулы, которой задается функция, отражаются на преобразованиях графика? При этом мы будем считать, что график функции $y = f(x)$ уже построен.

Упражнение 3 приведено для того, чтобы еще раз повторить: точка с координатами (x_0, y_0) лежит на графике функции $y = f(x)$ только тогда, когда при подстановке y_0 в левую и x_0 в правую части уравнения $y = f(x)$ мы получаем верное равенство: $y_0 = f(x_0)$. Иными словами, точка принадлежит графику функции только тогда, когда ее координаты удовлетворяют равенству $y = f(x)$.

Точка пересечения графиков лежит и на первом графике и на втором. Это значит, что ее координаты удовлетворяют и первому равенству $y = x^2 + 44x + 100$ и второму $y = 40x + 105$. Но пара чисел (x_0, y_0) удовлетворяющая двум равенствам по определению является решением системы уравнений:

$$\begin{cases} y = x^2 + 44x + 100, \\ y = 40x + 105. \end{cases}$$

Тема: Построение графиков и исследование функций.

Упражнение 1. Сколько корней имеет уравнение

$|x^2 - 2|x| - 3| = 2\sqrt{3}$?

Упражнение 2. Сколько корней в зависимости от значения параметра a имеет уравнение $\left|3-2\sqrt{4-|x|}\right|=a$?

Изученные методы построения графиков дают нам в руки мощный инструмент для исследования свойств функций. Вопрос упражнения 1, например, сводится к вопросу о количестве точек x, в которых значение функции $f(x)=|x^2-2|x|-3|$ равно $2\sqrt{3}$. После построения графика функции $f(x)=|x^2-2|x|-3|$ мы можем об этой функции сказать очень многое из того, чего до построения сказать не могли (рисунок 10).

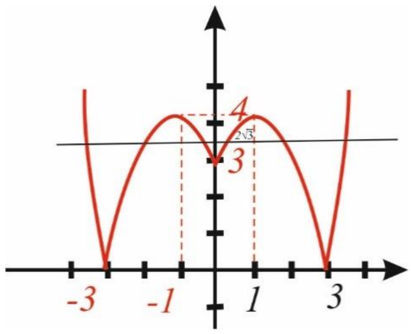


Рисунок 10 – График функции $f(x)=|x^2-2|x|-3|$

– $D(f)=(-\infty;\ +\infty)$

– $E(f)=[0;\ +\infty)$

– $f(x)$ – четная функция

– $(-3;\ -1),(0;1),(3;\infty)$ – интервалы возрастания; $(-\infty;\ -3),(-1;0),(1;3)$ – интервалы убывания.

– $x=-1$ и $x=1$ – точки локального максимума, $f(-1)=f(1)=4$; $x=-3, x=3, x=0$ – точки локального минимума, $f(0)=3, f(-3)=f(3)=0$.

Аналогичное исследование свойств функции можно провести по графику $y=\left|3-2\sqrt{4-|x|}\right|$. Проведите это исследование самостоятельно. Мы подробнее остановимся на упражнении 2, так как оно содержит очень важные идеи. Итак, нам дано уравнение $\left|3-2\sqrt{4-|x|}\right|=a$. Если левую часть рассмотреть как функцию $g(x)$, то вопрос переформулируется следующим образом: «Сколько раз на своей области определения функция g принимает значение a». Ответом на этот вопрос, очевидно, является количество точек пересечения горизонтальной прямой $y=a$ с графиком функции $y=g(x)$ (рисунок 11).

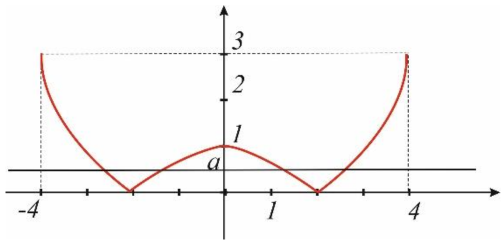


Рисунок 11 – График функции $y=g(x)$

Например, прямая $y=3$ имеет с графиком $y=g(x)$ ровно две общие точки. Это значит, что уравнение $\left|3-2\sqrt{4-|x|}\right|=3$ имеет ровно два корня (причем мы даже знаем, каких). Если $a\in(0,1)$, то прямая $y=a$ пересекает график в четырех точках. Перемещая a от $-\infty$ до $+\infty$, мы получаем полный ответ на вопрос упражнения 2:

– $\mathrm{a}<0\Rightarrow 0$ корней,

– $\mathrm{a}=0$ или $\mathrm{a}\in(1;3]\Rightarrow 2$ корня,

– $\mathrm{a}\in(0;1)\Rightarrow 4$ корня,

– $\mathrm{a}=1\Rightarrow 3$ корня.

Тема: Предел функции на бесконечности.

Упражнение 1 [75]. Рассмотрим функцию $f(x)=\dfrac{3x^2}{x^2+1}$. Заполните таблицу 4, используйте калькуляторы.

Таблица 4 – Предел функции на бесконечности

x	$-\infty\leftarrow$	-100	-10	-1	0	1	10	100	$\rightarrow\infty$
$f(x)$	$?\leftarrow$								$\rightarrow ?$

К какому числу приближается $f(x)$? Рассмотрите график данной функции. Сравните с результатами таблицы 5. Сделайте вывод.

Решение.

Таблица 5 – Предел функции на бесконечности, сравнение

x	$-\infty\leftarrow$	-100	-10	-1	0	1	10	100	$\rightarrow\infty$
$f(x)$	$3\leftarrow$	2,9997	2,97	1,5	0	1,5	2,97	2,9997	$\rightarrow 3$

График данной функции (рисунок 12).

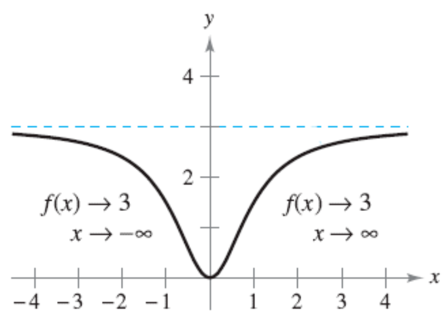


Рисунок 12 – График функции $f(x)=\dfrac{3x^2}{x^2+1}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=3,\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=3$ или $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=3$

Говорят так: «Предел функции $f(x)$ при $x\to\infty$ равен L, то есть $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\mathrm{L}$».

Тема: Предел функции в точке.

Упражнение 1 [74]. Рассмотрите функцию$f(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$.

Заполните таблицу 6, используйте калькуляторы. Функция $\frac{x^2-9}{x-3}$ не имеет значения при $x=3$. В нижеследующей таблице найдите значения этой функции при значениях x, мало отличающихся от 3.

Таблица 6 – Нахождение значения функции $f(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$ при значениях x, мало отличающихся от 3

x	1	2	2,9	2,99	2,999	4	3,1	3,01	3,001
$\frac{x^2-9}{x-3}$									

Рассмотрите таблицу 7. Сделайте предположение к какому числу приближается $f(x)$?

Попробуйте сформулировать (не строгое) определение, что называется пределом функции $f(x)$ в точке a.

Решение.

Таблица 7 – Нахождение значения функции $f(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$при значениях x, мало отличающихся от 3

x	1	2	2,9	2,99	2,999	4	3,1	3,01	3,001
$\frac{x^2-9}{x-3}$	4	5	5,9	5,99	5,999	7	6,1	6,01	6,001

Вывод: Мы видим, что по мере приближения x к числу 3 значения функции $\frac{x^2-9}{x-3}$ приближаются к числу 6. Число A называется пределом функции

$f(x)$ в точке а, если для значений х, достаточно близких к a, значения функции $f(x)$ сколь угодно мало отличаются от числа А.

Тема: Физический смысл производной.

Упражнение 1. Рассмотрите задачу. «Пусть тело падает с большой высоты, причем расстояние, пройденное телом за время t, выражается формулой $g(t)=\frac{gt^2}{2}$, где $g=9{,}8 м/с^2$ - ускорение свободного падения. Найдите скорость тела в момент времени $t_0=10$ с. Для этого ответьте на вопросы. Как определяется скорость тела в момент времени $t_0=10$ с? Найдите среднюю скорость тела на промежутке от 10 с до 20 с потом от 10 с до 15 с, от 10 с до 12 с, от 10 с до 11 с, на промежутке длиной 0,5 с, 0,25 и так далее. Запишите полученные средние скорости в таблицу 8. Понаблюдайте за полученной последовательностью скоростей. Найдите число, к которому все ближе и ближе члены последовательности скоростей. Запишите среднюю скорость на промежутке времени $[10;t]$. Сделайте вывод» [49].

Таблица 8 – Средняя скорость

Время от 10 до t, с								
Средняя скорость за это время, в м/с								

Рассуждение.

Для того чтобы решить задачу, вспомните, как определяется скорость тела в момент времени $t_0=10$ с.

Найдем среднюю скорость тела на промежутке от 10 с до 20 с (напомним, что средней скоростью тела за время от 10 до t секунд называется величина $v_{cp}(t)=\dfrac{s(\mathrm{t})-s(t_0)}{t-t_0}=\dfrac{s(\mathrm{t})-s(10)}{t-10}$, равная отношению пройденного телом пути к времени.

За которое этот путь пройден), потом от 10 с до 15 с, от 10 с до 12 с, от 10 с до 11 с, на промежутке длиной 0,5 с, 0,25 и так далее.

Полученные средние скорости записаны в таблице 9.

Вы получили последовательность скоростей, члены которой (как это видно из таблицы) с уменьшением интервала времени, на котором мы подсчитываем среднюю скорость, все ближе и ближе к некоторому числу.

Это число и называется мгновенной скоростью тела в момент времени $t_0=10$ с. Найдем это число.

Запишем среднюю скорость на промежутке времени $\left[10;t\right]$:

$$v_{cp}(t)=\frac{s(\mathrm{t})-s(t_0)}{t-t_0}=\frac{\dfrac{gt^2}{2}-\dfrac{g\cdot 10^2}{2}}{t-10}=\frac{g}{2}\cdot\frac{t^2-10}{t-10}=\frac{g}{2}\cdot\left(t+10\right).$$

Таблица 9 – Полученные средние скорости

Время от 10 до t, с	10	5	2	1	0,5	0,25	0,1	0,01
Средняя скорость за это время, в м/с	15g	12,5g	11g	10,5g	10,25g	10,125g	10,05g	10,005g

Из этой формулы видно, что при приближении t к 10 значение v_{cp} будет стремиться к числу $10g$.

Таким образом скорость тела в момент времени $t_0=10$ с равна $10g$.

Аналогично можно определить мгновенную скорость для тела, движущегося по другому закону.

2.3 Система заданий по теме «Параллельность прямых в пространстве» в рамках технологии развивающего обучения теоремам

В данном параграфе раскроем, каким образом может быть организована самостоятельная работа с учащимися в рамках выбранной нами технологии развивающего обучения теоремам и их доказательствам Т.А. Ивановой.

Основные положения технологии Т.А. Ивановой:

– технология развивающего обучения теоремам и их доказательствам требует разработки специальной подборки задач, ориентированной на категорию диагностируемых учебных целей на уровне: знание, понимание и применение;

– реализация технологии способствует формированию у обучающихся мотивационно-ориентировочной, операционно-познавательной и рефлексивно-оценочной деятельности.

В структуре курса стереометрии выделяются три основных содержательно-методических линий: первая линия – линия геометрии построений изучаемых фигур, вторая линия – линия геометрии вычислений величин построенных фигур, а третья линия – линия идей и методов современной геометрии.

Ведущей в 10 - ом классе является линия геометрии построений, к ней относятся «Параллельность и перпендикулярность прямых и плоскостей».

Актуальность темы «Параллельность прямых в пространстве» состоит в том, что на основании признака параллельности прямых можно доказывать другие теоремы, а также решения задач по теме будут способствовать выработке у обучающихся навыков осуществлять необходимые в будущем построения на изображениях многогранников.

Основная цель изучения темы «Параллельность прямых в пространстве» обусловлена следующими причинами:

– основные понятия «параллельные», «перпендикулярные» и «скрещивающиеся» прямые в пространстве входят в содержание базового курса планиметрии 10 класса;

– теоремы и задачи по теме способствуют развитию пространственных представлений и логического мышления учащихся;

– умение доказывать теоремы развивает навыки самостоятельной деятельности;

– содержание темы позволяет охватить такие типы и виды геометрических задач: на доказательства; на исследования; вычислительного характера; развивающего характера; на построения; с практическим содержанием.

Методический анализ теоретического и практического содержания по теме «Параллельность прямых в пространстве».

Методический анализ темы.

Базовые знания:

– аксиомы планиметрии и их следствия;

– аксиомы стереометрии и их следствия;

– теоремы планиметрии и их свойства;

– взаимное расположение прямых на плоскости;

– свойства многоугольников;

– признаки равенства треугольников;

– признаки подобия треугольников;

– пространственные фигуры: куб, параллелепипед, пирамида;

– сечения куба, пирамиды.

Вводимые понятия:

– понятие параллельных прямых.

Основные теоремы:

– теорема о параллельности прямых;

– теорема о пересечении плоскости параллельными прямыми;
– признак параллельности прямых.

Теоретический материал.

Рассмотрим определение параллельных прямых сформулированных в учебниках разных авторов.

В учебнике авторов Л.С. Атанасяна, В.Ф. Бутузова, С.К. Кадомцева понятие парраллельных прямых в 10 классе вводится следующим образом: «Две прямые в пространстве называются параллельными, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются» [3]. Аналогичное определение дается в учебнике авторов Е.В. Потоскуева, Л.И. Звавича [47] и в *у*чебнике авторов И.М. Смирновой и В.А. Смирнова [57].

В учебнике авторов А.Д. Александрова, А.Л. Вернера, В.И. Рыжика рассматривается случай взаимного расположения двух прямых: «Прямые лежат в одной плоскости и не имеют общих точек – параллельные прямые» [1].

В учебнике под редакцией И.Ф. Шарыгина вводится такое определение «Две прямые в пространстве называются параллельными, если они лежат в одной плоскости и не имеют общих точек» [68, с. 16].

Как мы видим все определения уточняют определение, которое относится к прямым на плоскости, так как в пространстве две прямые могут и не принадлежать одной плоскости. Авторы рассматривают теоремы, сгруппируем их по смыслу (таблица 10).

Основным учебником геометрии для базового и профильного уровня выбран учебник Л.С. Атанасяна, В.Ф. Бутузова, С.К. Кадомцева [3], а для классов с углубленным и профильным изучением математики − учебник авторов Е.В. Потоскуева, Л.И. Звавича [47].

Таблица 10 – Свойства и признак параллельности прямых

Теорема о параллельности прямых	
Л.С. Атанасян	«Через любую точку, не лежащую на данной прямой, проходит прямая, параллельная данной, и притом только одна» [3, с.9].
А.Д. Александров	«Через каждую точку, не лежащую на данной прямой, проходит прямая, параллельная данной, и притом только одна» [1, с. 33].
Е.В. Потоскуев	«Через точку пространства, не лежащую на прямой, можно провести прямую, параллельную данной, и притом только одну» [47, с. 36].
Теорема о пересечении плоскости параллельными прямыми	
Л.С. Атанасян	«Если одна из двух параллельных прямых пересекает данную плоскость, то и другая прямая пересекает эту плоскость» [3, с.10]
А.Д. Александров	«Если плоскость пересекает одну из двух параллельных прямых, то она пересекает и другую из них» [1, с. 34].
Е.В. Потоскуев	«Если одна из двух параллельных прямых пересекает данную плоскость, то и другая прямая пересекает эту плоскость» [47, с. 35].
Теорема о параллельности трех прямых (признак параллельности прямых)	
Л.С. Атанасян	«Если две прямые параллельны третьей прямой, то они параллельны» [3, с.11].
А.Д. Александров	«Две прямые параллельные третье прямой параллельны» [1, с.34].
Е.В. Потоскуев	«Если две прямые параллельны третьей прямой, то они параллельны» [47, с. 37].

Изучение курса по учебнику стереометрии Л.С. Атанасяна базируется на сочетании наглядности и логической строгости. К учебнику предлагаются учебное пособие «Поурочные разработки» под редакцией С.М. Саакян [54], которое написано с методической концепцией этого учебника и содержит контрольные и самостоятельные работы, карточки для устного опроса, комментарии и решения к наиболее сложным задачам. В пособии отмечается «Теоретический материал в учебнике изложен доступно для большинства учащихся, что способствует решению важной педагогической задачи – научить работать с книгой. Поэтому некоторые разделы учебника в зависимости от уровня подготовленности класса учитель может предложить учащимся для самостоятельного изучения. Учебник содержит большое количество разнообразных по трудности задач, что даёт возможность осуществить индивидуальный подход к обучающимся» [54].

Учебник под редакцией Е.В. Потоскуева [47] основан на идеи дальнейшего формирования и развития конструктивно-пространственного воображения, развивает способность у обучающихся к усвоению новой информации, гибкость и независимость логического мышления. Особенностью учебника является то, что в нем создана стройная логически обоснованная и последовательная система доказательств приведенных теорем, что позволяет доказывать на уроках большинство рассматриваемых теорем. К учебнику имеется задачник тех же авторов и методическое пособие, которое содержит общие рекомендации к изучению теоретического материала, даны пояснения к решению наиболее сложных задач из задачника, имеются контрольные работы. Задачи в задачнике по темам систематизированы по принципу: от простого к сложному.

В методических рекомендациях автора А.Н. Землякова [24] рассмотрены общие методические замечания по теме «Параллельные прямые в пространстве». Автор приводит пример двух уроков на эту тему, рассматривает доказательства теорем, разбирает решения некоторых задач к урокам.

В учебном пособии авторов С.М. Саакаян, В.Ф. Бутузова [54] представлен примерный план проведения урока по теме «Параллельные прямые», даны рекомендации по доказательству наиболее сложных случаев, когда три прямые расположены в пространстве.

В работе А.Н. Давыдова [18] даны методические рекомендации по формированию умений решать геометрические задачи на доказательство в старших классах. Автором разработаны учебные цели и задачи обучения, рекомендации для методики обучения решению геометрических задач на доказательство на основе «технологии наводящих вопросов».

Таким образом, анализ научно-методической литературы свидетельствует о значимости темы «Параллельность прямых в пространстве» при обучении теоремам и их доказательствам в курсе геометрии общеобразовательной школы; о необходимости углубления и расширения знаний по теме в элективных курсах по геометрии.

Основные цели и задачи изучения темы «Параллельность прямых в пространстве».

Цель: сформировать у учащихся понятие параллельных прямых в пространстве; умения формулировать и доказывать теоремы о параллельности прямых, опираясь на ранее изученные теоремы и аксиомы, используя подходящий метод доказательства.

Задачи:

- ввести понятие параллельных прямых в пространстве;
- сформулировать и доказать теоремы о параллельности прямых в пространстве;
- раскрыть применение теорем на примере задач.

Теоретический и практический материал по теме «Параллельность прямых в пространстве» способствует:

- формированию интеллектуального развития, самостоятельности в приобретении новых знаний, способности использовать в учебной и практической деятельности полученные знания, формированию качеств личности, необходимых человеку для полноценной жизни в современном обществе;
- ясности и точности мысли, критичности мышления, интуиции, логического мышления, элементов алгоритмической культуры, пространственных представлений, способности к преодолению трудностей;
- развивает навыки работы с учебной литературой;

– способствует подготовке к государственной итоговой аттестации по геометрии в 11 классах.

В Федеральном государственном образовательном стандарте основного общего образования (ФГОС ООО) [65] выделены следующие результаты, которые относятся к изучению геометрии, а именно доказательству теорем:

– развитие умений работать с учебным математическим текстом (анализировать, извлекать необходимую информацию), точно и грамотно выражать свои мысли с применением математической терминологии и символики, проводить классификации, логические обоснования, доказательства математических утверждений;

– овладение геометрическим языком; развитие умения использовать его для описания предметов окружающего мира; развитие пространственных представлений, изобразительных умений, навыков геометрических построений;

– формирование систематических знаний о плоских фигурах и их свойствах, представлений о простейших пространственных телах; развитие умений моделирования реальных ситуаций на языке геометрии, исследования построенной модели с использованием геометрических понятий и теорем, аппарата алгебры, решения геометрических и практических задач; развитие умений применять изученные понятия, результаты, методы для решения задач практического характера и задач из смежных дисциплин.

В результате изучения темы «Параллельность прямых в пространстве» ученик должен:

знать/понимать:

– определение понятия параллельные прямые;

– теорему о параллельности прямых;

– теорему о пересечении плоскости параллельными прямыми;

– теорему о параллельности трех прямых (признак параллельности прямых).

уметь:

– формулировать и доказывать теоремы о параллельных прямых;

– применять теоремы о параллельных прямых при решении задач;

– выполнять построения чертежей по условию теоремы;

– формировать и развивать геометрическую интуицию;

– развивать умения проводить доказательство задачи, аргументировать ответ, подкрепляя его теоретической базой.

В теории и методике обучения математике представлены различные концепции, методики и технологии обучения школьников доказательству теорем, в частности Г.И. Саранцева [55], Я.И. Груденова [17], Н.Л. Стефановой, Н.С. Подходовой и др.[59], В. В. Репьева [52], В.А. Далингера [19], Е.И. Лященко [36].

В учебном пособии Т.А. Ивановой [27, с. 125] автором обозначены познавательные средства, которые должны усваиваться школьником в процессе изучения теорем, представлены диагностируемые учебные цели и критерии их достижения на уровне знания, понимания и применения при изучении теорем (таблица 11).

Для каждого этапа автор описывает, как можно организовать деятельность обучающихся, чтобы они усваивали информационный компонент и овладевали познавательными средствами.

Технология направлена на то, чтобы ученики включались в деятельность по:

– «открытию» закономерностей, заложенной в изучаемой теореме;

– выдвижению гипотез;

– поиску доказательств их истинности или опровержения;

– осознанию способов, методов и приемов, с помощью которых реализуется эта деятельность.

Таблица 11 – Диагностируемые учебные цели при изучении теорем Т.А. Ивановой

Категория учебных целей	Критерии достижения Цель считается достигнутой, если ученик
1.Знание	– формулирует теорему; – вставляет пропущенные слова в формулировке; – воспроизводит доказательство; – заполняет пропуски в доказательстве.
2.Понимание	– создает модель (графическую, символическую) к теореме, выделяет в ней условие и заключение; – проводит доказательство при новой конфигурации и новых обозначениях; – описывает основную идею (прием, способ, метод) доказательства; – указывает теоремы, которые доказывались этим же приемом; – составляет план доказательства; – выделяет базис доказательства; – указывает, для решения каких задач можно использовать данную теорему; – описывает способы рассуждений на этапах открытия закономерности, поиска доказательства.
3.Применение (в стандартных ситуациях)	– применяет теорему в новых, стандартных ситуациях; – составляет дидактические задачи на применение теоремы; – применяет метод, прием доказательства в решении задач на доказательстве других теорем.

Главная цель мотивационно-ориентировочной части заключается в формировании у школьников смысла предстоящей деятельности, потребности у него в изучении нового учебного материала.

Эта часть состоит из четырех связанных между собой этапов:

– актуализация,

– мотивация,

– постановка учебной задачи,

– планирование решения учебной задачи.

Цель этапа мотивации состоит в том, чтобы у ученика появилась потребность в дальнейшей учебной математической деятельности, которая связана с открытием нового лично для него знания.

Характерные приемы создания мотивации:

– показывать необходимость изучения нового исходя из запросов практики; из логики развития математического содержания;

– системность;

– создание, вызов неожиданных ситуаций, удивления;

– создание проблемной ситуации, для рационализации решения;

– анализ выполненных работ учащимися;

– решение нестандартных, старинных задач.

Технологию работы с теоремой автор представляет в виде схемы (рисунок 13).

Постановка учебной задачи подразумевает не только непосредственное и посильное участие ученика в формулировании учебной задачи в виде обобщенной цели или обобщенного задания, но и в процессе осознания и принятия им того, что он уже знает и чего не знает, и что нужно узнать, чтобы решить последующую задачу.

Цель этапа планирования состоит в проектировании программы дальнейшей деятельности.

Функции мотивационно-ориентировочной деятельности: побуждающая, смыслообразующая, направленная.

На операционно-познавательном этапе (содержательная часть) технологии обучения происходит организация деятельности учащихся, направленная на решение учебной задачи.

Эта часть технологии проектируется в соответствии со спецификой математической деятельности. Ее можно адаптировать при проектировании технологии обучения конкретным видам дидактических единиц – определений, теорем, правил, ключевых задач.

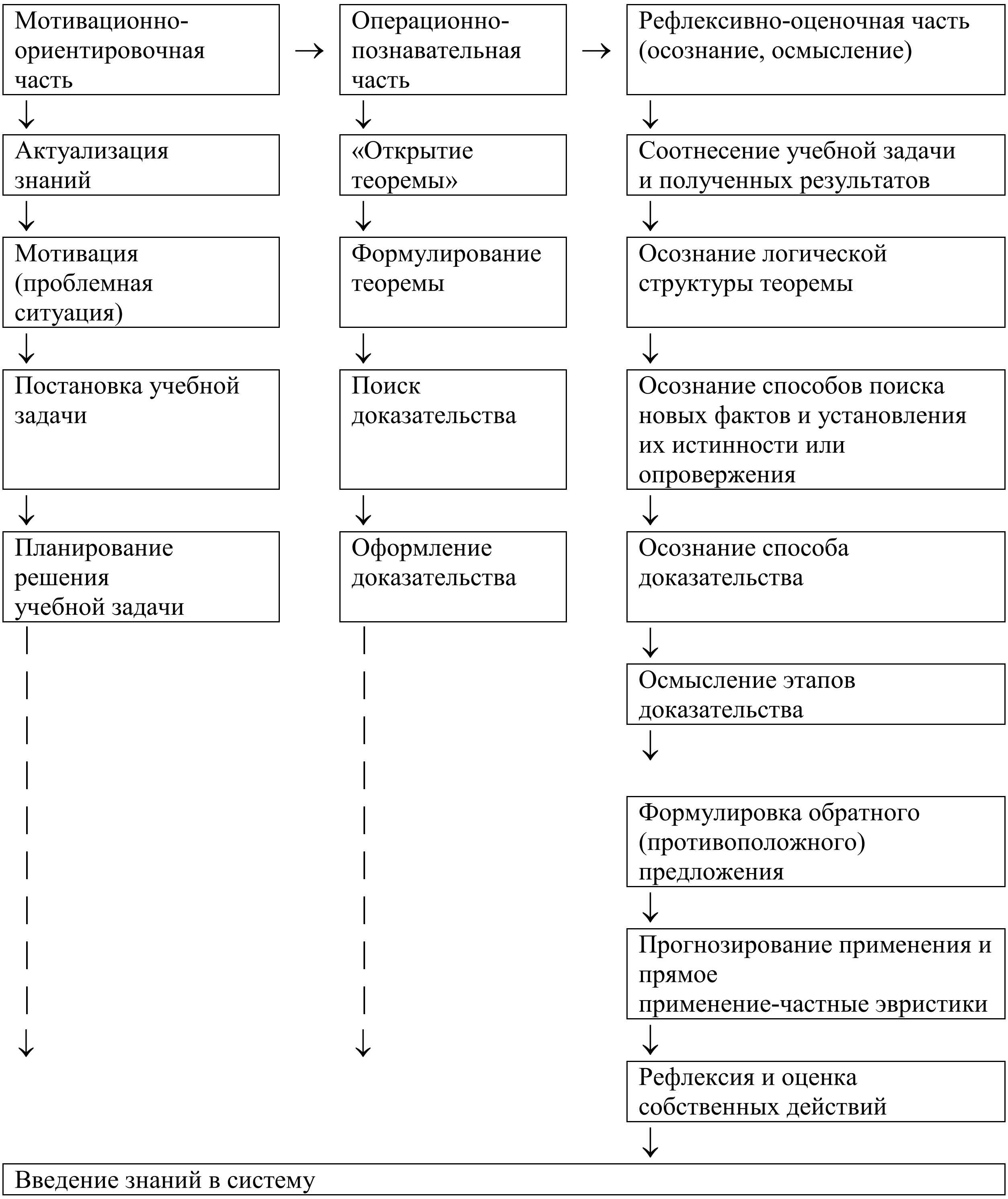


Рисунок 13 – Технологический процесс организации усвоения теорем по Т.А. Ивановой

Операционно-познавательная часть состоит из четырех связанных между собой этапов:

– «открытие теоремы»,

– формулирование теоремы,

– поиск доказательства,

– оформление доказательства.

К числу рассуждений, которые приводят к «открытию теоремы» относятся, например:

– неполная индукция;

– дедуктивное умозаключение (идет впереди формулировки теорем, цель применения такого рассуждения может состоять в том, чтобы показать учащимся как они должны рассуждать, чтобы прийти к самостоятельному получению новых фактов);

– аналогия (может помочь как «открыть» теорему, так и найти способ доказательства);

– предложения обратные, изученным теоремам.

Одним из важных этапов является поиск доказательства. Здесь используются следующие методы и приемы:

– аналогия,

– неполная индукция,

– аналитический метод,

– синтетический метод,

– аналитико-синтетический метод,

– метод исчерпывающих проб,

– метод полной индукции,

– метод от противного.

На этом же этапе на конкретных доказательствах разъясняется сущность как общих методов, перечисленных выше, так и частных, специфических: метод геометрических преобразований, векторный метод в доказательстве теорем, приемы дополнительных построений.

На рефлексивно-оценочном этапе происходит осознание (понимание) и запоминание, как формулировки теоремы, так и ее доказательства. Управление этим этапом со стороны учителя осуществляется посредством специально сконструированной системы упражнений, заданий. Они должны носить как репродуктивный, так и развивающий характер.

Приводятся типы заданий на этапе осознания, отраженные на рисунке 13.

Автор технологии отмечает, что указанный выше на схеме «технологический процесс организации усвоения теорем и типы заданий на этапе осознания не может применяться при изучении каждой теоремы. Но она может служить основой для конструирования системы уроков с позиции развивающего обучения. В то же время ее реализация закладывает у учеников базу для самостоятельного решения как познавательных, так и развивающих задач» [27].

Также Т.А. Иванова указывает на роль упражнений в реализации каждого этапа технологии.

Методические требования к системе задач, направленной на усвоение теоремы учащимися, предложенные автором В.А. Далингером [19, с. 208] перекликаются с требованиями, разработанные автором Т.А. Ивановой.

Мотивационно-ориентировочная часть.

Этап 1. Актуализация знаний. Повторение. Фронтальный опрос.

В работе В.А. Яровенко предлагается провести актуализацию знаний через серию вопросов:

– Сформулируйте «определение параллельных прямых на плоскости.

– Каким может быть взаимное расположение двух прямых на плоскости (либо совпадают, либо пересекаются, либо параллельны).

– Как через точку A, заданную вне данной прямой a, провести прямую, параллельную a? (Например, с помощью угольника, или построением двух перпендикуляров).

– Сколько таких параллельных (к а через А) можно провести? Почему? (только одну, по аксиоме параллельных).

– Сформулируйте аксиому параллельных (обратить внимание, что через точку А вне прямой а можно провести единственную прямую, параллельную а)» [71].

– В чем заключается суть метода от противного? (Метод от противного, заключается в том, что предложение о ложности заключения теоремы приводит к противоречию с аксиомой или с уже известной теоремой [55, с. 84]. Из утверждения выводится следствие, противоречащее заведомо истинному предложению).

Этап 2. Мотивация (проблемная ситуация).

Учитель: Рассмотрим взаимное расположение двух прямых на плоскости: совпадают, пересекаются, параллельны (рисунок 14).

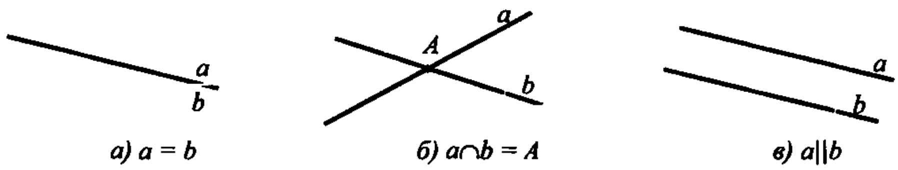


Рисунок 14 – Взаимное расположение двух прямых на плоскости

Учитель: Как вы думаете, каково может быть взаимное расположение двух прямых в пространстве?

Рассмотрите куб на рисунке 15.

Учитель: Как вы считаете, каково взаимное расположение следующих пар отрезков (пересекаются в одной точке или не пересекаются (не имеют общих точек)): BD_1 и DB_1, BA_1 и CD_1, AA_1 и CC_1, A_1D и D_1C, A_1D и BC_1?

Какие варианты имеются в каждом случае (ответ: прямые лежат в одной плоскости или прямые не лежат в одной плоскости; прямые параллельны, прямые не параллельны)?

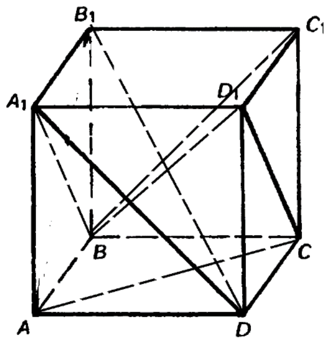


Рисунок 15 – Взаимное расположение двух прямых в пространстве

На основании предыдущего задания заполните пробелы в следующей схеме (рисунок 16).

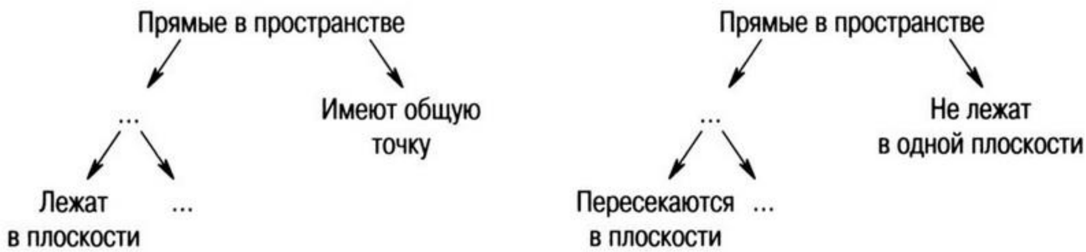


Рисунок 16 – Схема концепт карты

Учитель: Какие же прямые в пространстве мы можем назвать параллельными?

Определение. «Две прямые в пространстве называются параллельными, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются» [47, с. 22].

Это определение уточняет старое определение, ведь в пространстве две прямые могут и не принадлежать одной плоскости.

Обсуждение с учащимися алгоритма распознавания взаимного расположения двух прямых в пространстве.

Воспользуйтесь схемой на рисунке 17.

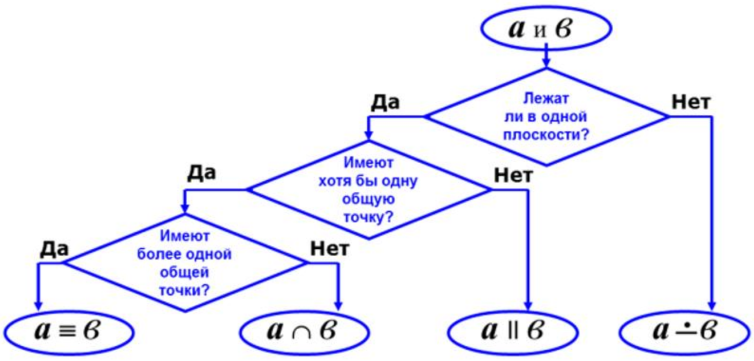


Рисунок 17 – Схема алгоритма распознавания взаимного расположения двух прямых в пространстве

Исходя из рассмотренной схемы, предложите учащимся сформулировать другое определение.

«Определение: Две прямые в пространстве называются параллельными, если они лежат в одной плоскости и не имеют общих точек» [68, с. 16].

Этап 3. Постановка учебной задачи.

Выяснить какими свойствами обладают параллельные прямые в пространстве, используя аналогию со свойствами параллельных прямых на плоскости.

Этап 4. Планирование решения учебной задачи:

– сформулировать свойства параллельных прямых в пространстве в виде теорем;

– доказать теоремы о параллельности прямых;

– проверить понимание (осознание), запоминание как формулировок теорем, так и ее доказательства;

– закрепить навык применения изученных теорем при решении задач.

Операционно-познавательная часть.

Этап 1. Открытие теоремы. Используем метод Аналогия.

Исходя из определения параллельных прямых в пространстве выясните «Для параллельных прямых в пространстве выполняются ли, как и на плоскости следующие утверждения?».

Например. Вспомните свойство (следствие из аксиомы) трех параллельных прямых на плоскости?

Из курса планиметрии известно, что если три прямые лежат в одной плоскости и две из них параллельны третьей, то эти прямые параллельны.

Имеет ли место аналогичное утверждение для трех прямых в пространстве?

Сформулируйте и докажите это утверждение.

Например, для того чтобы ученики открыли теорему Т7 можно организовать предварительное обсуждение как показано автором А.Н. Земляковым в пособии:

– «Как установить параллельность двух прямых в пространстве?

– Можно исходить из определения: доказать, что прямые лежат в одной плоскости и не пересекаются.

– А как доказать параллельность (непересечение) двух прямых на плоскости?

– Можно воспользоваться признаками параллельности, то есть теоремами, дающими достаточные условия параллельности»

[24, с.38].

«В учебнике [46] выделяются три признака параллельности прямых на плоскости – по равенству между собой внутренних накрест лежащих углов между прямыми и секущей; по равенству суммы внутренних односторонних углов 180^0, а также теорема: две прямые, параллельные третьей, параллельны, которая в планиметрии доказывается рассуждением от противного» [24, с.38].

Первые два признака параллельности прямых не имеют аналогов для прямых в пространстве, «даже если как-либо определить внутренние накрест лежащие или односторонние углы между прямыми и секущей в пространстве:

из соответствующих условий (равенств) отнюдь не следует, что прямые будут лежать в одной плоскости – это можно показать на моделях». Последний признак оказывается справедливым и в стереометрии.

Например, для того чтобы ученики открыли теорему Т6 можно поступить так [24, с.33].

Учащимся нужно напомнить, что в стереометрии аксиома параллельных считается выполненной в каждой плоскости.

Вопрос: Что можно сказать о существовании, о единственности прямой, параллельной данной, проходящей через данную точку в пространстве?

Далее попросите сформулировать пространственную теорему о параллельных – аналог планиметрической теоремы.

Этап 2. Формулирование теоремы.

Учащиеся по аналогии из (аксиомы и следствий из аксиомы из учебника под редакцией Л.С. Атанасяна) планиметрии формулируют теоремы параллельности прямых в пространстве. По необходимости учитель уточняет их ответы (таблица 12).

Этап 3. Поиск доказательства.

Используем методы: синтетический метод и метод от противного.

Таблица 12 – Метод аналогии при изучении темы

На плоскости, по учебнику Л.С. Атанасян	В пространстве, по учебнику Е.В. Потоскуев
Аксиома параллельных прямых: «Через точку, не лежащую на данной прямой, проходит только одна прямая, параллельная данной» [2, с.62]	Т6«Через точку пространства, не лежащую на прямой, можно провести прямую, параллельную данной, и притом только одну» [47, с.36]
Следствие из аксиомы параллельных прямых: «Если одна из двух параллельных прямых пересекает данную прямую, то и другая прямая пересекает данную прямую» [2, с.62]	Т5«Если одна из двух параллельных прямых пересекает данную плоскость, то и другая прямая пересекает эту плоскость» [47, с.35]
Следствие из аксиомы параллельных прямых: «Если две прямые параллельны третьей прямой, то они параллельны» [2, с.62]	Т7 Признак параллельности прямых: «Если две прямые параллельны третьей прямой, то они параллельны» [47, с. 37]

Прием коллективного поиска способа доказательства с последующей самостоятельной работой. Учитель ведет примерно следующую беседу с учащимися.

Рассмотрим теорему Т5. «Если одна из двух параллельных прямых пересекает данную плоскость, то и другая прямая пересекает эту плоскость» [47, с.35].

Вопрос: Можем ли мы провести плоскость через две параллельные прямые a и b? Будет ли она единственной или найдутся другие плоскости? Если ваш ответ утвердительный, то какой теоремой при этом мы воспользуемся?

Ответ: Да, это возможно так как $a\|b$. Воспользуемся теоремой Т3: Через две параллельные прямые можно провести единственную плоскость (β).

Вопрос: Имеют ли плоскости, по условию задачи, общую точку? Будут ли пересекаться две плоскости (α, β) по прямой, какой аксиомой мы можем воспользоваться?

Ответ: По условию задачи плоскости α и β имеют общую точку М. Поэтому воспользуемся аксиомой R_5 (аксиома пересечения плоскостей): Если две плоскости имеют общую точку, то пересечение этих плоскостей есть их общая прямая.

Вопрос: Каким свойством из планиметрии воспользуемся, чтобы доказать, что прямая b, параллельная a, также пересекает прямую c в некоторой точке К?

Ответ: Воспользуемся следствием из аксиомы параллельных прямых:

Если прямая пересекает одну из двух параллельных прямых, то она пересекает и другую.

(Или если одна из двух параллельных прямых пересекает данную прямую, то и другая прямая пересекает данную прямую).

Вопрос: Что из этого следует?

Ответ: Так как прямая, по которой пересекаются плоскости лежит в плоскости α, то точка К также принадлежит этой же плоскости α. Следовательно, прямая b, пересекает плоскость α в точке К.

Затем осуществляется самостоятельная работа с учебником. Учитель акцентирует внимание учащихся на основных положениях доказательства.

Прием коллективного поиска способа доказательства с последующим использованием карточек.

Рассмотрим теорему Т6. «Через точку пространства, не лежащую на прямой, можно провести прямую, параллельную данной, и притом только одну» [47, с.36].

В первой части приема учитель ведет примерно следующую беседу с учащимися.

Теорема имеет сложную форму - в нашем случае она имеет сложное заключение (можно провести прямую, параллельную данной, и притом только одну), связанное союзом «и». Поэтому доказательство проводят в два этапа, сначала доказывают, что можно провести прямую, параллельную данной, а затем что такая прямая в пространстве единственная.

Вопрос: Почему в теореме требуется доказать единственность такой прямой?

Ответ: Утверждение единственности в теореме не является простым следствием аксиомы параллельных, так как этой аксиомой утверждается единственность прямой, параллельной данной в данной плоскости.

Вопрос: Какой теоремой мы воспользуемся, чтобы доказать, что существует единственная плоскость, проходящая через прямую и точку, не лежащую на прямой?

Ответ: Воспользуемся теоремой Т1: Через прямую (a) и не лежащую на ней точку (М) можно провести плоскость (α) и притом только одну.

Вопрос: В этой плоскости через точку М можно провести единственную прямую, параллельную прямой a? Какой аксиомой из планиметрии можно воспользоваться для доказательства?

Ответ: Воспользуемся аксиомой планиметрии: Через точку (М), не лежащую на данной прямой (a), проходит только одна прямая (b), параллельная данной.

Вопрос: Как показать, что в пространстве не существует другой прямой, проходящей через точку М и параллельной прямой a?

Применим для доказательства второй части теоремы метод от противного, который заключается в том, что предложение о ложности заключения теоремы приводит к противоречию с аксиомой или с уже известной теоремой [55, с.84].

Вопрос: Сформулируйте предложение о ложности второй части заключения теоремы.

Ответ: Предположим, что через точку М можно провести некоторую прямую c, параллельную прямой a.

Вопрос: Сделайте вывод о том лежит ли прямая c в плоскости α.

Ответ: Прямая c не лежит в плоскости α (так как в плоскости α уже проведена через точку М прямая $b \| a$), а пересекает ее в точке М.

Вопрос: Какое противоречие тому, что $a \subset \alpha$ отсюда следует и на основании какой теоремы?

Ответ: Тогда прямая a, будучи параллельной прямой c, по доказанной теореме 5 также должна пересекать плоскость α. Это противоречит тому, что $a \subset \alpha$.

Вопрос: Сделайте вывод о сформулированном ранее предложении о ложности второй части заключения.

Ответ: Значит, наше предположение (что через точку М можно провести некоторую прямую c, параллельную прямой a) было неверным, то есть прямая b - единственная.

Вторая часть приема реализуется с помощью карточек. Например, ученикам предлагается оформить доказательство в виде данной таблицы 13.

Одни ученики могут разобраться в доказательстве без карточки, другие нуждаются в более тщательном пояснении (карточки для таких учеников будут содержать небольшое число пропусков).

Таблица 13 – Карточка для самостоятельной работы

Утверждения	Обоснования
1. $a, M \notin a$, тогда $\alpha : a \subset \alpha, M \in \alpha$ 2. $a \subset \alpha, M \in \alpha, M \notin a$, тогда b- единственная в плоскости такая, что $b \parallel a$, $M \in b$	По теореме 1 По аксиоме _____________ из планиметрии
Первое заключение доказано	
1.Пусть c-другая прямая такая, что ___ , $M \in c$, тогда c ___ , так как b ___, $M \in b$ значит $c \cap \alpha = M$	Предположим от противного Из доказанного
Тогда, так как $c \parallel a$, то $a \cap \alpha$ Но a ______ Значит b-_______	______ Получили противоречие
Второе заключение доказано. Теорема доказана	

Самостоятельная работа с учебником. Учитель предлагает учащимся прочитать абзац доказательства и ответить на вопросы.

Рассмотрим теорему Т7 «Признак параллельности прямых». «Если две прямые параллельны третьей прямой, то они параллельны» [47, с. 37].

Вопрос: В каком случае теорему можно считать уже доказанной?

Ответ: Если прямые a, b и c лежат в одной плоскости. Этот случай уже был рассмотрен в планиметрии.

Вопрос: Рассмотрите случай, когда a, b и c не лежат в одной плоскости.

Что вам известно и что нужно доказать?

Ответ: Известно, что $a \parallel b$, $c \parallel b$. Доказать, что $a \parallel c$.

Вопрос: Что же нужно доказать?

Ответ: Что прямые a и c лежат в одной плоскости и не пересекаются.

Вопрос: Могут ли прямые a и c задавать плоскость? Другими словами: можем ли мы провести плоскость через прямые a и c?

Ответ: Нет. Так как в условии не сказано, что $a \| c$.

Вопрос: Выберите подходящий способ задания плоскости. Объясните свой выбор.

Ответ: Выберем любую точку М на прямой c. Проведем плоскость α через прямую a и любую точку М прямой c. Мы можем при этом опираться на теорему Т1: Через прямую (a) и не лежащую на ней точку (М) можно провести плоскость (α) и притом только одну.

Вопрос: Возникает вопрос: лежит или не лежит в плоскости α прямая c?

Ответ: Так как прямая a лежит в плоскости α и параллельна прямой b, то прямая b не может пересекать плоскость α. Следовательно плоскость α не может пересекать и прямая c, параллельная прямой b. Получили: прямая c имеет с плоскостью α общую точку М и не пересекает эту плоскость.

Вопрос: Что это означает? Могут ли прямые a и c пересекаться?

Ответ: Это означает, что прямая c лежит в плоскости α. Таким образом, прямые a и c лежат в одной плоскости α. По теореме 6 они не могут пересекаться. Следовательно, прямые a и c параллельны.

Вопрос: Объясните почему a и c не могут пересекаться.

Ответ: Так как если бы $a \cap c$, то ($a \cap c = K$) через К проходили бы две прямые (a и c) параллельные b, что по теореме 6 это невозможно.

Вопрос: Почему теорема носит названия признак параллельности прямых?

Ответ: Наличие в плоскости α двух прямых a и c, которые попарно параллельны прямой b, не лежащей в этой плоскости, является признаком, по которому можно сделать вывод о параллельности прямых a и c.

Этап 4. Оформление доказательства.

Запись доказательства теорем оформляется с помощью таблиц 14 – 16.

Рассмотрим теорему Т5. «Если одна из двух параллельных прямых пересекает данную плоскость, то и другая прямая пересекает эту плоскость»[47, с.35].

Дано: $a \| b, a \cap \alpha = M$.

Доказать: b пересекает α.

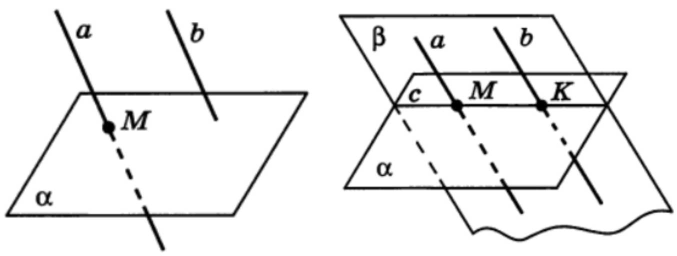


Рисунок 18 – Доказательство теоремы

Доказательство (рисунок 18):

Таблица 14 – Запись доказательства теоремы

Утверждения	Обоснования
1. $a \| b$, тогда $\beta : a \subset \beta, b \subset \beta$	По теореме 3
2. $a \cap \alpha = M$, М-общая для α и β, тогда $\alpha \cap \beta = c$, $M \in c$	По аксиоме R_5 (аксиома пересечения плоскостей)
3. $a, b, c \in \beta$, $\left. \begin{matrix} a \| b \\ a \cap c \end{matrix} \right\} \Rightarrow b \cap c = K$ Так как $c \subset \alpha$, то $K \in \alpha$ Следовательно, $b \cap \alpha = K$	По следствию из аксиомы параллельных прямых из планиметрии

Рассмотрим теорему Т6. «Через точку пространства, не лежащую на прямой, можно провести прямую, параллельную данной, и притом только одну» [47, с.36].

Дано: a - прямая. Точка $M \notin a$. Доказать: Через точку М можно провести $b \| a$, b - единственная.

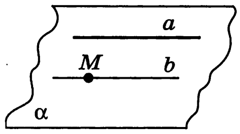


Рисунок 19 – Доказательство теоремы

Доказательство (рисунок 19):

Таблица 15 – Запись доказательства теоремы

Утверждения	Обоснования
1. $a, M \notin a$, тогда $\alpha : a \subset \alpha, M \in \alpha$	По теореме 1
2. $a \subset \alpha, M \in \alpha, M \notin a$, тогда b-единственная в плоскости такая, что $b \| a$, $M \in b$	По аксиоме параллельных прямых из планиметрии
Первое заключение доказано	
1.Пусть c-другая прямая такая, что $c \| a$, $M \in c$, тогда $c \not\subset \alpha$, так как $b \| a$, $M \in b$. Значит $c \cap \alpha = M$ Тогда, так как $c \| a$, то $a \cap \alpha$ Но $a \subset \alpha$. Значит b - единственная	Предположим от противного Из доказанного По теореме 5 Получили противоречие
Второе заключение доказано. Теорема Доказана	

Рассмотрим теорему Т7 «Признак параллельности прямых. Если две прямые параллельны третьей прямой, то они параллельны»[47, с. 37].

Дано: $a \| b$, $c \| b$

Доказать: $a \| c$

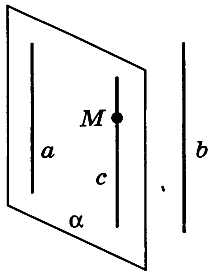


Рисунок 20 – Доказательство теоремы

Доказательство (рисунок 20): Случай $a,b,c \not\subset \alpha$

Таблица 16 – Запись доказательства теоремы

Утверждения	Обоснования
1.Пусть т. М: $M \in c$ 2. $a, M \notin a$, тогда $\alpha : a \subset \alpha, M \in \alpha$	По теореме 1
3.Т.к. $a \subset \alpha$ и $a \| b$, то b не перес. α След-но c не перес. α, так как $c \| b$ 4. Значит $c \subset \alpha$ 5. $a \subset \alpha, c \subset \alpha$. a и c не перес. 6. Следовательно, $a \| c$	По условию По теореме 6
Теорема доказана	

Рефлексивно-оценочная часть.

Этап 1. Соотнесение учебной задачи и полученных результатов.

Задание 1. Сопоставьте учебную задачу (цель), которую нам предстояло решить, с полученным результатом. Сделайте вывод.

Учебная задача: Выяснить, какими свойствами обладают параллельные прямые в пространстве, используя аналогию со свойствами параллельных прямых на плоскости.

Были решены следующие задачи:

– сформулированы теоремы параллельных прямых в пространстве, опираясь на аналогию параллельных прямых на плоскости;

– доказаны теоремы о параллельности прямых, применяли методы: синтетический и метод от противного.

Задание 2. Сформулируйте доказанные теоремы. Выделите условие и заключение.

Пример работы ученика по выделению условия и заключения в теореме показан в таблице 17.

Таблица 17 – Пример работы ученика по выделению условия и заключения в теореме

Условие	Заключение
Т5. «Если одна из двух параллельных прямых пересекает данную плоскость, то и другая прямая пересекает эту плоскость» [47, с.35]	
Одна из двух параллельных прямых пересекает данную плоскость	И другая прямая пересекает эту плоскость
Т6. «Через точку пространства, не лежащую на прямой, можно провести прямую, параллельную данной, и притом только одну» [47, с.36]	
Через точку пространства, не лежащую на прямой	Можно провести прямую, параллельную данной, и притом только одну
Т7 Признак параллельности прямых. «Если две прямые параллельны третьей прямой, то они параллельны» [47, с. 37]	
Если две прямые параллельны третьей прямой	То они параллельны

Задание 3. Верно ли предложение: (учитель модифицирует формулировку, добавляя или опуская некоторые слова, которые: а) изменяют смысл доказанной теоремы; б) не изменяют).

Верны ли следующие утверждения:

Утверждение 1.«Если одна их двух параллельных прямых лежит в данной плоскости, то другая, параллельная ей прямая, не может эту плоскость пересекать» [47, с.36].

Утверждение 2.«Из двух пересекающихся прямых только одна может быть параллельна некоторой данной прямой» [47, с.36].

Утверждение 3.«Из двух скрещивающихся прямых только одна может быть параллельна некоторой данной прямой» [47, с.37].

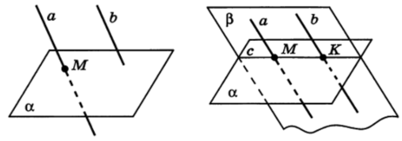
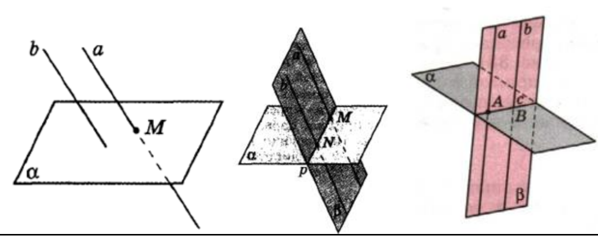
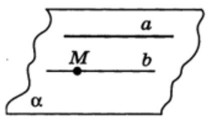
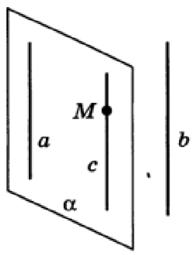
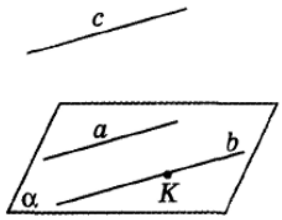
Утверждение 4.«Отношение параллельных прямых в пространстве обладает свойством транзитивности, то есть $a \| b, b \| c \Rightarrow a \| c$» [47, с.37].

Утверждение 5. Если каждая из двух различных прямых параллельна третьей, то и сами эти прямые параллельны.

Задание 4. Создайте другой рисунок и обозначения к доказанной теореме (моделирование теоремы).

Примеры возможных рисунков моделирования теоремы показаны в таблице 18.

Таблица 18– Примеры возможных рисунков моделирования теоремы

Номер теоремы	Исходный рисунок	Альтернативный рисунок
Теорема5		
Теорема6		
Теорема7		

Задание 5. Проведите доказательство теоремы:

– с теми же обозначениями, но при новом расположении чертежа;

– при том же расположении чертежа, но в новых обозначениях.

Задание 6. Сформулируйте обратное утверждение (таблица 19).

Таблица 19 – Пример работы ученика по формулированию обратного утверждения

Первоначальное утверждение	Обратное утверждение
Т5. «Если одна из двух параллельных прямых пересекает данную плоскость, то и другая прямая пересекает эту плоскость» [47, с.35]	Лемма: «Если плоскость пересекает одну из двух параллельных прямых, то она пересекает и другую из них» [1, с. 34]

Задание 7. Выделите основную идею (прием) доказательства.

«Если плоскость пересекает одну из двух параллельных прямых, то она пересекает и другую из них» [1, с. 34].

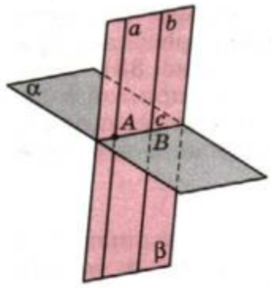


Рисунок 21 – Доказательство теоремы

Основная идея доказательства (рисунок 21) основана на приеме восходящего анализа.

Доказательство:

«Пусть прямые a и b параллельны и плоскость α пересекает прямую a в точке А. Проведем плоскость β через параллельные прямые a и b. Плоскости α и β имеют общую точку А, а потому пересекаются по прямой c, проходящей через точку А. Прямая a пересекает прямую c в точке А. Поэтому в плоскости β и параллельная ей прямая b пересекает прямую c в некоторой точке В. В точке В прямая b пересекает и плоскость α» [1, с. 34].

Задание 8. Приведите примеры доказательства теорем или решенных задач, где бы использовался этот прием.

Из курса планиметрии таким приемом доказывали теоерему о пересечении хорд окружности. [55, с. 79]

Задание 9. Составьте план доказательства теоремы (выделите основные этапы доказательства).

План:

– выделить в теореме условие и заключение;

– записать краткое условие теоремы и заключения;

– по условию теоремы построить чертеж;

– выбрать метод доказательства;

– выделить базис доказательства (опорные теоремы, аксиомы, определения);

– записать цепочку рассуждений доказательства, используя символику.

Задание 10. Выделите базис доказательства (опорные теоремы, аксиомы, определения).

Теорема (способ задания плоскости). Через две параллельные прямые можно провести единственную плоскость.

Аксиома пересечения плоскостей. Если две плоскости имеют общую точку, то пересечение этих плоскостей есть их общая прямая.

Следствие из аксиомы параллельных прямых из планиметрии. Если одна из двух параллельных прямых пересекает данную прямую, то и другая прямая пересекает данную прямую.

Задание 11. Найдите другой способ доказательства (возможны указания со стороны учителя).

Задача. «Докажите, что если плоскость пересекает одну из двух параллельных прямых, то она пересекает и другую» [46, с. 249].

Доказательство (рисунок 22).

«Пусть a и b - две параллельные прямые и α - плоскость, пересекающая прямую a в точке А.

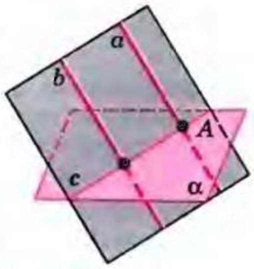


Рисунок 22 – Доказательство теоремы

Проведем через прямые a и b плоскость.

Она пересекает плоскость α по некоторой прямой c. Прямая c пересекает прямую a (в точке А), а значит, пересекает параллельную ей прямую b. Так как прямая c лежит в плоскости α, то плоскость α пересекает прямую b» [46, с. 249].

Задание 12. Для решения каких задач можно использовать доказанную теорему (прогнозирование, составление частных эвристик)?

На основании данной теоремы доказывается признак параллельности прямых:

Теорема. «Две прямые, параллельные третьей прямой параллельны» [1, с.35].

Доказательство (рисунок 23).

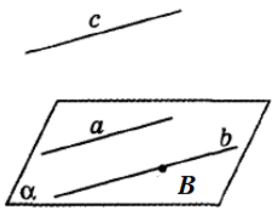


Рисунок 23 – Доказательство теоремы

«Пусть две прямые a и b параллельны прямой c. Докажем, что $a \| b$. Возьмем на прямой b некоторую точку В и проведем плоскость α через точку В и прямую a. Тогда прямая b также лежит в плоскости α. Если бы прямая пересекала плоскость α (в точке В), то по лемме эту прямую плоскость пересекала бы и параллельная ей прямая c. Если же снова применить лемму к параллельным прямым a и c, то получим, что прямая a пересекает плоскость α, что противоречит построению плоскости α (она содержит прямую a). Значит, прямая b лежит в одной плоскости с прямой a. Пересекаться прямые a и b не могут (по теореме 5). Поэтому прямые a и b параллельны. Теорема доказана» [1, с.35].

А также теорема используется при решении задач на доказательство принадлежности трех точек одной прямой. Например.

Задача. «Отрезок АВ не пересекает плоскость α. Через середину отрезка С и концы отрезка А и В проведены прямые, параллельные между собой и пересекающие плоскость α в точках A_1, B_1, C_1. Вычислить длину отрезка CC_1, если $AA_1 = 5, BB_1 = 7$» [68, с. 28].

Дано: АВ - отрезок.

АВ не пересекает α, АС=СВ;

$AA_1 \| CC_1 \| BB_1$; $AA_1 = 5см, BB_1 = 7см$.

Найти: CC_1.

Решение (рисунок 24):

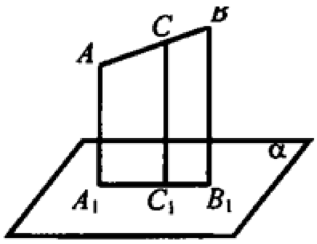


Рисунок 24 – Чертеж к решению задачи

Докажем, что A_1, C_1 и B_1 лежат на одной прямой.

Параллельные прямые AA_1 и BB_1 определяют плоскость β, которая содержит отрезок АВ и пересекает плоскость α по прямой A_1B_1 (по теореме: Через две параллельные прямые можно провести единственную плоскость), т

$A_1 \in \alpha, A_1 \in \beta,$ значит $\beta \cap \alpha = A_1B_1$ - прямая пересечения (по теореме: Если две плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой).

Докажем, что $C_1 \in A_1B_1$.Пусть $C_1 \notin A_1B_1$, тогда $CC_1 \cap \beta = C$;

$\left.\begin{matrix} CC_1 \cap \beta \\ CC_1 \| AA_1 \end{matrix}\right| \Rightarrow AA_1 \cap \beta$ (по лемме: Если плоскость пересекает одну из двух параллельных прямых, то она пересекает и другую из них), но $AA_1 \subset \beta$. Получили противоречие, значит, $C_1 \in A_1B_1$.

Так как $AA_1 \| BB_1$ (по условию), значит A_1ABB_1 - трапеция (по определению), CC_1 - средняя линия трапеции A_1ABB_1, значит $CC_1 = \dfrac{AA_1 + BB_1}{2}; CC_1 = \dfrac{5+7}{2} = 6$. Ответ: 6 см.

Задание 13. С помощью каких еще теорем можно решать указанные типы задач? (Перечисляются в этом случае все известные ранее способы и добавляется новый).

Указанные типы задач, на доказательство принадлежности трех точек прямой на плоскости в 9 классе, решались ранее, например, координатным, векторным методом. Однако, эти методы еще не изучены в 10 классе.

Задание 14. Составьте сами задачи на применение теоремы (на первых порах можно по готовому рисунку).

В частности, на основании признака параллельности прямых доказывается, что середины сторон пространственного четырехугольника являются вершинами параллелограмма.

Задача [50, с. 11]. Предлагается составить и решить задачу по готовому чертежу (рисунок 25).

Возможный вариант составленного условия задачи и ее решения.

Дано: BACD - пространственный четырехугольник. AC=16, BD=10.

Найти: $P_{A_1B_1C_1D_1}$.

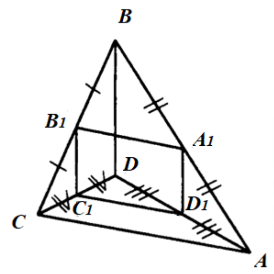


Рисунок 25 – Готовый чертеж к задаче 6

Решение: A_1, B_1, C_1, D_1 – середины сторон пространственного четырехугольника. Тогда A_1B_1 – средняя линия треугольника ABC, параллельная стороне AC, C_1D_1 – средняя линия треугольника ACD, параллельная стороне AC. По теореме (признак параллельности прямых) прямые A_1B_1 и C_1D_1 параллельны, а значит, лежат в одной плоскости. Аналогично доказывается параллельность прямых A_1D_1 и B_1C_1. Таким образом, четырехугольник A_1, B_1, C_1, D_1 лежит в одной плоскости и его противолежащие стороны параллельны. Следовательно, он параллелограмм.

$C_1D_1 = \frac{1}{2}AC, C_1D_1 = \frac{16}{2} = 8$; $B_1C_1 = \frac{1}{2}BD, B_1C_1 = \frac{10}{2} = 5$;

$P_{A_1B_1C_1D_1} = 2(8+5) = 26$.

Ответ: 26

Задание 15. Опишите, как вы рассуждали, когда отыскивали: закономерность, отраженную в формулировке; когда отыскивали доказательство.

Задание 16. Оцените свою деятельность. Ответьте на вопросы.

Какие знания нам помогли «открыть» теорему?

Какой познавательный опыт помог вам перейти к формулированию определения, теоремы?

Можно ли утверждать, что теоремы параллельности прямых в пространстве мы усвоили? Умеем их применять при решении любых задачах?

Какие случаи для вас оказались более сложными?

Каковы цели следующих уроков?

В целях организации контроля разработана контрольная работа (Формативное оценивание) для обучающихся 10 (11) классов. Задания представлены от простого к сложному.

Задача 1 [50] Решите задачу по готовому чертежу (рисунок 26).

Дано: $a \| b$. Доказать: a, b и c лежат в одной плоскости. (3 балла)

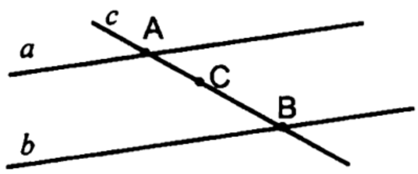


Рисунок 26 – Готовый чертеж к задаче 1 контрольной работы

Задача 2 [24]. Через точки А, В и середину М отрезка АВ проведены параллельные прямые, пересекающие некоторую плоскость α в точках A_1, B_1, M_1 соответственно. Найдите длину отрезка MM_1, если $AA_1 = 13м, BB_1 = 7м$, причем отрезок АВ не пересекает плоскость α. (7 баллов)

Задача 3 [24]. Точка Р не лежит в плоскости трапеции ABCD с основанием AD и BC. Докажите, что прямая, проходящая через середины отрезков PB и PC, параллельна средней линии трапеции. (5 баллов)

Решение контрольной работы

Задача 1 [50]. Решите задачу по готовому чертежу (рисунок 44).

Дано: $a \| b$.

Доказать: a, b и c лежат в одной плоскости.

Решение [50]: Так как данные прямые a и b параллельны, то через них можно провести плоскость. Обозначим ее α. Прямая c, пересекающая данные параллельные прямые, имеет с плоскостью α две общие точки А и В – точки пересечения с данными прямыми. По теореме (если две точки прямой лежат в плоскости, то вся прямая принадлежит этой плоскости) эта прямая лежит в плоскости α. Итак, все прямые, пересекающие две данные параллельные прямые, лежат в плоскости – плоскости α.

Задача 2 [24] .Через точки А, В и середину М отрезка АВ проведены параллельные прямые, пересекающие некоторую плоскость α в точках A_1, B_1, M_1 соответственно. Найдите длину отрезка MM_1, если $AA_1 = 13м, BB_1 = 7м$, причем отрезок АВ не пересекает плоскость α.

Критерии оценивания работы: Шкала перевода % в оценку (Таблица 20) 0%-39% - «2»; 40%-64% - «3»; 65%-84% - «4»; 85% - 100% - «5».

Решение (рисунок 27) [50]:

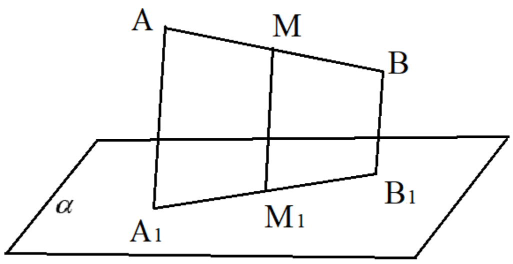


Рисунок 27 – Чертеж к задаче 2 контрольной работы

Проходящие через лежащие на одной прямой точки А, В, М параллельные прямые лежат в одной плоскости β.

Поэтому четырехугольник ABB_1A_1, лежащий в плоскости β, – трапеция. $M_1 \in A_1B_1$ по лемме (если плоскость пересекает одну из двух параллельных прямых, то она пересекает и другую из них). Или через точку М проходит единственная прямая параллельная BB_1.

Таблица 20 – Схема выставления баллов

Критерий оценивания	Номер задания	Дескриптор Учащийся	Балл
Применяет аксиому о способе задания плоскости двумя параллельными прямыми	1	Указывает способ задания плоскости через две параллельные прямые	1
		Делает промежуточные выводы о принадлежности прямой плоскости $A \in \alpha, B \in \alpha$	1
		Использует аксиому A_2 (если две точки прямой лежат в некоторой плоскости, то и вся прямая лежит в этой плоскости)	1
Применяет теорему Т5	2	Записывает что дано по условию задачи, строит чертеж	1
		Указывает способ проведения плоскости β через две параллельные прямые AB и A_1B_1	1
		Определяет вид четырехугольника ABB_1A_1 - трапеция	1
		Доказывает, что $M_1 \in A_1B_1$ используя лемму /или через точку М проходит единственная прямая параллельная BB_1/ или через параллельные прямые AA_1, MM_1, BB_1 проходит единственная плоскость	1
		Доказывает, что MM_1 - средняя линия трапеции, используя теорему Фалеса (M_1 середина отрезка A_1B_1)	1
		Применяет теорему о средней линии трапеции $MM_1 = \dfrac{AA_1 + BB_1}{2}$	1
		Подставляет данные в формулу, вычисляет и получает ответ 10	1
Применяет признак параллельности прямых Т7	3	Записывает что дано по условию задачи, строит чертеж	1
		Объясняет, что $B_1C_1 \| BC$ так как B_1C_1 средняя линия треугольника PBC	1
		Объясняет, что $A_1D_1 \| BC$ так как A_1D_1 средняя линия трапеции ABCD	1
		Применяет признак параллельности прямых Т7	1
		Делает вывод, что $B_1C_1 \| A_1D_1$	1
Всего баллов	–	–	15

Отсюда следует, что точки A_1, M_1 и B_1 лежат на одной прямой). По теореме Фалеса M_1 – середина отрезка A_1B_1, MM_1 – средняя линия трапеции. По теореме о средней линии трапеции имеем: $MM_1 = \dfrac{AA_1 + BB_1}{2} = \dfrac{13+7}{2} = 10$ (м).

Ответ: $MM_1 = 10$ (м).

Задача 3 [24]. Точка P не лежит в плоскости трапеции ABCD с основанием AD и BC. Докажите, что прямая, проходящая через середины отрезков PB и PC, параллельна средней линии трапеции.

Доказательство (рисунок 28)[50]:

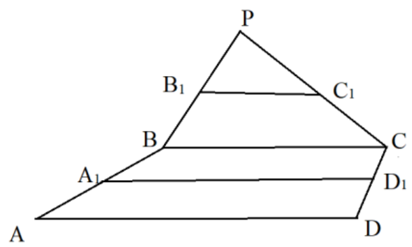


Рисунок 28 – Чертеж к задаче 3 контрольной работы

Пусть B_1, C_1, A_1, D_1 – середины отрезков PB, PC, AB и DC соответственно. По теоремам о средних линиях треугольника PBC и трапеции ABCD прямые B_1C_1 и A_1D_1 параллельны прямой BC. Согласно признаку параллельности прямых в пространстве B_1C_1 и A_1D_1 параллельны между собой. Что и требовалось доказать.

2.4 Педагогический эксперимент и его результаты

Экспериментальная проверка полученных результатов, диссертационных материалов проводилась на базе Назарбаев Интеллектуальной школы ФМН г. Талдыкорган с 2021 года по 2023 год.

В ходе констатирующего этапа экспериментального исследования проводилось изучение вопросов использования в обучении математике учебника как средства формирования самостоятельной деятельности.

Основными задачами данного этапа эксперимента являлись рассмотрение основных приёмов работы с учебником, в практике учителей математики и методики их реализации; наблюдение за деятельностью учителей и обучающихся; изучение возможностей использования учебника в учебном процессе; выявление методических особенностей конструирования текста заданий в современных условиях обучения математике.

Основные методы исследования: изучение опыта учителей математики по организации учебной работы с текстом учебника, изучение учебно-методической документации школы, анкетирование учеников и учителей (Приложение Б).

Анкетирование обучающихся и учителей, целью которого было изучение вопроса применения ими учебника на уроках выявило следующее:

- большинство опрошенных обучающихся (75%) испытывают трудности в чтении доказательств теорем из учебника, и тем более в самостоятельном доказательстве теорем; в самостоятельном формулировании создании определений понятий; в чтении и понимании текста математической задачи, переноса ее на чертеж, трудности возникают и с чтением и пониманием графической и табличной информации;
- учебник на уроках чаще всего используется учениками при решении задач и примеров, реже для самостоятельного изучения нового материала и то без определенных указаний и инструкций со стороны учителя (65%);
- учащиеся отрицательно относятся к самостоятельному изучению нового материала (42%), много непонятных терминов, и чаще всего это сводится к переписыванию, после чего остается много вопросов;

– учителя отметили нехватку времени на предоставление работы с учебником.

Учителя (53%) хотели бы в учебниках изменить в первую очередь задания, на интересные, с контекстным содержанием, близким к жизненным ситуациям.

Целью констатирующего этапа эксперимента стало выявление уровня развития умения анализировать условие задачи на примере темы «Применение производной при решении задач» – проверочная работа.

В проведении эксперимента приняли участие ученики старших классов, изучающие математику по 7 часовой и 10 часовой Образовательной программам АОО «Назарбаев Интеллектуальные школы» – NIS-Program (Интегрированной образовательной программе), это классы: 11A, 11B, 11C, 11D (всего 72 учащихся) из них 2 группы (с углубленным изучением математики –10 часов в неделю 16 учащихся) и 5 групп (7 часов в неделю всего 56 учащихся).

На основе выбора учащимися будущей профессии (по направлениям: физико-математическое (также инженерия, программирование), химия-биологическое, экономическое) из всех представленных классов были сформированы три группы: 11ФМ (сюда вошли учащиеся с углубленным изучением математики 10 часов в неделю 16 учащихся), 11ХБ (сюда вошли учащиеся с 7 часовым изучением математики 28 учащихся), 11Э (сюда также вошли учащиеся с 7 часовым изучением математики 28 учащихся).

На этапе констатирующего эксперимента учащимся предлагалось за 120 минут дать развернутый ответ на 10 вопросов, среди которых чтение графической информации (рисунки В.1-В.11).

Учащиеся должны были продемонстрировать способность не только применять знание и понимание основных математических понятий, формул и приемов, но и приводить математические аргументы, синтезировать знания из разных разделов учебной программы и интерпретировать решения с учетом условия задачи, а также умение применять методы, приемы, требующие интеграции знаний по математике, физике и экономике при решении прикладных задач. Также в работе оценивалось умение учащихся моделировать ситуации из реальной жизни.

Результаты проверочной работы подтверждают наши предположения – уровни установления связей развиты не у всех учащихся одинаково. Учащиеся продемонстрировали низкие результаты при решении задач, требующих применения знаний из нескольких разделов одновременно.

Задания (№2-6), которые были ориентированы на проверку базовых знаний и навыков решения задач, у многих учащихся не вызвали затруднения. Эти задания связанны с распознаванием математических объектов, с применением знакомых алгоритмов, направлены на проверку умения учащихся воспроизводить, выбирать и использовать знание математических данных, понятий и приемов. С такими заданиями учащиеся справились достаточно успешно.

Однако у всех обучающихся вызвали затруднения задания (№1, №7-10). Эти задания направлены на проверку умения читать графическую информацию, учащихся моделировать ситуации из реальной жизни, применять комбинации соответствующих математических приемов, и интерпретировать результаты решений в контексте задач. А также направлены на проверку умения учащихся делать логические выводы по математическим данным, анализировать условие задачи, выбирать и применять подходящие методы решения, определять закономерности в различных задачах и делать соответствующие выводы о стратегиях их решения. Следующая таблица 21 демонстрирует анализ проведенной практической работы.

Основные причины низких результатов учащихся:

- неумение интегрировать знания по физике, экономике при решении прикладных задач по математике;
- недостаточный уровень грамотности чтения условия задачи;

− отсутствие промежуточных вычислений, обоснования всех действий, а также логической последовательности всех этапов решения;

− неумение использовать результаты предыдущих пунктов для решения задач, связанных между собой по контексту;

− невысокий уровень владения математическими приемами и методами

− решения задач;

− использование нерациональных методов решения задач, вследствие чего затрачено много времени и допущены ошибки;

− недостаточно развиты навыки чтения и анализа данных по графику.

Таблица 21– Результаты проверочной работы– средний процент выполнения заданий

№ задания	Группа			Всего
	11ФМ(16)	11Э(28)	11ХБ(28)	72 ученика
1	45%	33%	25%	34%
2	100%	80%	60%	80%
3	89%	48%	47%	61%
4	90%	40%	57%	62%
5	89%	48%	40%	59%
6	90%	45%	50%	62%
7	45%	25%	11%	27%
8	25%	6%	7%	13%
9	13%	6%	5%	8%
10	10%	0%	0%	3%
Всего	60%	35%	30%	41%

Таким образом, можно сделать вывод, согласно результатам проведенного констатирующего этапа эксперимента, у большинства учащихся вызвали трудности задания, навыки чтения и анализа текста зада, данных по графику, задания в которых требуются интеграция знаний из разных подразделов учебной программы и самостоятельная разработка алгоритма действий.

Цель поискового этапа экспериментального исследования состояла в апробации определенных видов заданий (в том числе структурированных) по математике и методики их реализации в современных условиях обучения.

В результате данного этапа экспериментального исследования:

- была разработана и апробирована система упражнений, стимулирующая к самостоятельной деятельности;
- обобщены и апробированы приемы работы с текстом учебника;
- была разработана система структурированных заданий по теме «Применение производных при решении задач на оптимизацию»,
- была разработана и апробирована программа элективного курса: «Применения производной», система задач подобрана как из работ отечественных авторов [11], [31], [53], [69] так и зарубежных [72], [76].

В итоге, на этапе экспериментального исследования учащимся предлагалось за 120 минут дать развернутый ответ на 10 вопросов, содержащих подвопросы, связанные между собой.

Следующая таблица демонстрирует анализ проведенной практической работы после поискового эксперимента.

Результаты практической работы–средний процент выполнения заданий представлены в таблице 22.

Таблица 22 – Результаты проверочной работы – средний процент выполнения заданий

№ задания	Группа			Всего
	12ФМ(16)	12Э(28)	12ХБ(28)	72 ученика
1	100%	51%	45%	65%
2	100%	84%	80%	88%
3	98%	50%	47%	65%
4	97%	40%	57%	65%
5	96%	48%	40%	61%
6	95%	50%	50%	65%
7	67%	30%	20%	39%
8	50%	25%	27%	34%
9	45%	15%	10%	23%
10	45%	13%	9%	22%
Всего	79%	41%	39%	53%

В результате апробации системы упражнений и структурированных заданий, отдельных приемов работы с текстом учебника, было выявлено повышение уровня усвоения математических знаний, умений и навыков. Произошла динамика степени овладения материалами учебной программы.

В качестве основного показателя были взяты результаты проверочных работ №1 и №2 по теме «Применение производной при решении задач» (Приложение В), результаты пробных экзаменационных работ и текущей успеваемости по соответствующим разделам учебной программы.

Таким образом, гипотеза исследования подтвердилась.

На рисунке 29 представлена сводная диаграмма результатов проверочных работ №1 и №2.

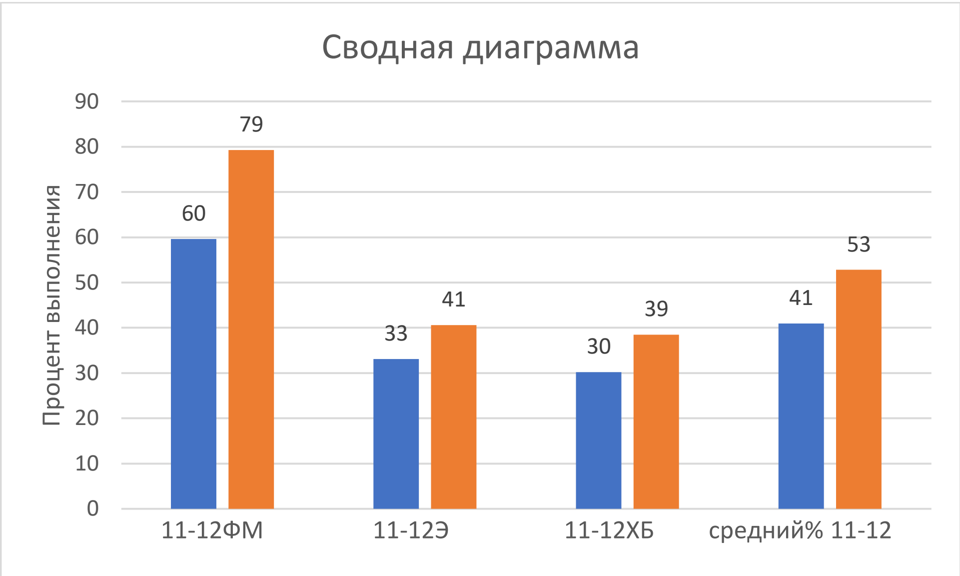


Рисунок 29 – Сводная диаграмма результатов практических работ №1 и №2

Выводы по второй главе

При изучении методических основ использования учебника математики как средства самостоятельной деятельности старшеклассников были сделаны следующие выводы:

– на основе анализа существующих методик и технологий по организации использования учебника математики как средства самостоятельной деятельности старшеклассников были выявлены методические особенности составления учебных текстов, формулирования учениками определений, теорем и их доказательства;
– в соответствии с выявленными методическими особенностями организации самостоятельной деятельности с учебником математики была разработана система упражнений, стимулирующих самостоятельную деятельность и разработана специальная подборки задач, ориентированная на категорию диагностируемых учебных целей на уровне: знание, понимание и применение согласно технологии развивающего обучения теоремам и их доказательствам Т.А. Ивановой по теме «Параллельность прямых в пространстве»;
– в результате апробации отдельных видов упражнений и специальной подборки задач было выявлено, что реализация технологии Т.А. Ивановой способствует формированию у обучающихся мотивационно-ориентировочной, операционно-познавательной и рефлексивно-оценочной самостоятельной деятельности.

Заключение

В ходе теоретического и экспериментального исследования были получены следующие основные результаты.

Выявлены теоретические основы использования учебника математики как средства формирования самостоятельной деятельности старшеклассников, а именно:

- проанализированы различные подходы к понятию самостоятельной деятельности старшеклассников при обучении математике;
- выделены основные цели и задачи формирования самостоятельной деятельности старшеклассников при обучении математике;
- раскрыты педагогические возможности учебника математики как средства формирования самостоятельной деятельности старшеклассников и представлена их реализация в учебниках математики разных авторов.

Определены методические особенности организации работы старшеклассников с учебником математики, способствующие формированию умений и навыков самостоятельной деятельности.

Разработаны тексты упражнений, стимулирующие к самостоятельной деятельности на примере темы «Функции. Свойства и графики функций».

Разработана система заданий по теме «Параллельность прямых в пространстве» в рамках технологии развивающего обучения теоремам и их доказательствам Т.А. Ивановой.

Таким образом, все поставленные задачи решены, цель исследования достигнута.

Список используемой литературы и используемых источников

1. Александров А.Д., Вернер А.Л., Рыжик В.И. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Реометрия. 10-11 классы: учеб. для общеобразоват. Организаций: базовый и углубл. уровни. М.: Просвещение, 2014. 255 с.

2. Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф., Кадомцев С.Б. Геометрия. 7– 9 классы: учеб. для общеобразоват. учреждений. М.: Просвещение, 2009. 384 с.

3. Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф., Кадомцев С.К. Геометрия. 10-11 классы: учебник для общеобразоват. учр.: базовый и профильный уровни. 18-е изд. М.: Просвещение, 2009. 255 с.

4. Бабанский Ю.К. Оптимизация учебно-воспитательного процесса: методические основы. М.: Просвещение, 1997. 245 с.

5. Бейлинсон В.Г. Арсенал образования. Учебные книги. Проектирование и конструирование. М.: Мнемозина, 2005. 299 с.

6. Беликов В.А. Образование. Деятельность. Личность: Монография. Издательство: Академия Естествознания. Москва, 2010. 360 с.

7. Беспалько В.П. Теория учебника: Дидактический аспект. Монография. М.: Педагогика, 1988. 160 с.

8. Большова Е.А. Дифференциация домашних заданий по математике как средство повышения качества обучения обучающихся общеобразовательной школы. [Электронный ресурс]: выпуск. квалиф. раб. Тольятти: 2017. 128 с. http://hdl.handle.net/123456789/4003 (дата обращения: 20.06.2023)

9. Бурдин А.О. Формирование у учащихся навыков самостоятельной работы и некоторые вопросы ее организации в школе/ С.И. Демидова, Л.О. Денищева // Самостоятельная деятельность учащихся при обучении математике (формирование умений самостоятельной работы): Сб. статей. М.: Просвещение, 1985. 191 с.

10. Вяткин Л.Г. Уровни познавательной самостоятельности студентов педагогических вузов/Л.Г. Вяткин, А.Б. Ольнева, Г.Д. Турчин // Актуальные вопросы региональной педагогики: сб. науч. тр. Саратов, 2002. С.35–38

11. Галицкий М.Л. Углубленное изучение курса алгебры и математического анализа: Методические рекомендации и дидактические материалы: пособие для учителя/ М.Л. Галицкий, М.М. Мошкович, С.И. Шварцбурд. 2-е издание доработанное. М.: Просвещение, 1990. 352с.

12. Ганелин Ш.И. Принципы обучения /Ш.И. Ганелин. М.: Педагогика, 1966. С.151-176.

13. Гельфман Э.Г. Конструирование учебных текстов по математике, направленных на интеллектуальное воспитание учащихся основной школы: дисс. д-ра. пед. наук: 13.00.02/ Гельфман Эмануила Григорьевна. М.: 2004. 167 с.

14. Гельфман Э.Г. Об учебных текстах, создающих условия для формирования универсальных учебных действий. //Проблемы совершенствования математической подготовки в школе и вузе: материалы конференции. 2012г. С.80–84.

15. Горбунова Г.В. Организация самостоятельной деятельностиучащихся в процессе изучения курса планиметрии [Электронный ресурс]: выпуск. квалиф. раб. / Г.В. Горбунова. Екатеринбург, 2017. 72 с.http://elar.uspu.ru/handle/uspu/8265 (дата обращения: 20.06.2023)

16. Григорьева Т.П. Методический аппарат школьного учебника геометрии как средство систематизации знаний учащихся: дисс…канд. пед. наук: 13.00.02/ Григорьева Татьяна Петровна. Москва: 1982. 170 с.

17. Груденов Я.И. Психолого-дидактические основы методики обучения математике. М.: Педагогика, 1987. 160 с.

18. Давыдов А.Н. Методические основы обучения старшеклассников решению геометрических задач на доказательство. [Электронный

ресурс]:выпуск. квалиф. раб. Тольятти, 2019. 92 с. http://hdl.handle.net/123456789/14169 (дата обращения: 20.06.2023)

19. Далингер В.А. Методика обучения учащихся доказательству математических предложений. Учебное пособие. М.: Просвещение, 1998. 417 с.

20. Есипов Б.П. Самостоятельная работа учащихся на уроках. Государственная учебно-педагогическое издание министерства просвещения РСФСР [Текст] / Есипов, Б.П. М.: Просвещение, 1961. 239 с.

21. Жарова Е.В. Учить самостоятельности: Книга для учителя. М.: Просвещение, 1993. 205 с.

22. Жарова Л.В. Управление самостоятельной деятельностью учащихся. Л., 1982. 200 с.

23. Закон 273-ФЗ "Об образовании в РФ" 2016.

24. Земляков А.Н. Геометрия в 10 классе: Метод. рекомендации к учебнику А.В. Погорелова: Пособие для учителя. 3-е издание, доработанное. М.: Просвещение, 2002. 222 с.

25. Зимняя И. А. Педагогическая психология: учебник для вузов / И.А. Зимняя. 3-е издание, пересмотренное. Москва: Московский психолого-социальный институт; Воронеж: НПО МОДЭК, 2010. 448 с.

26. Иванова А.В., Скрябина А.Г. Возможности учебника по математике для учащихся гуманитарных 10-11 классов в условиях введения федерального государственного образовательного стандарта // Фундаментальные исследования. 2013. № 11–3. С.535–539.

27. Иванова Т.А., Перевощикова Е.Н., Кузнецова Л.И., Григорьева Т.П. Теория и технология обучения математике в средней школе: Учебное пособие для студентов математических специальностей педагогических вузов /Под редакцией Т.А. Ивановой. 2-ое издание, испр. и доп. Н. Новгород: НГПУ, 2009. 355 с.

28. Кирьянова А. А. Этапы работы с учебником – путь к самостоятельному изучению математики. [Электронный ресурс]. Режим доступа: https://urok.1sept.ru/articles/211777

29. Концепция развития математического образования в Российской Федерации. Распоряжение правительства России от 24 декабря 2013 года №2506-Р. [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://минобрнауки.рф/документы/3894

30. Леонтьев А.Н. Овладение учащимися научными понятиями как проблема педагогической психологии // А.Н. Леонтьев. Избр. психол. произведения: В 2 т. Т.1. М.: Педагогика, 1983. С. 324–347.

31. Лисичкин В.Т. Соловейчик И.Л. Математика: Учебное пособие для техникумов. М.: Высшая школа, 1991. 480 с.

32. Литовченко О. В. Современный учебник как средство организации самостоятельной познавательной деятельности школьников (на материале естественнонаучных предметов): дисс…канд. пед. наук: 13.00.01/ Литовченко Ольга Валентиновна. СПб: 2021. 293с.

33. Лодатко Е.А. Об использовании калькуляторов при организации самостоятельной деятельности учащихся на уроках математики/ С.И. Демидова, Л.О. Денищева // Самостоятельная деятельность учащихся при обучении математике (формирование умений самостоятельной работы): Сб. статей. М.: Просвещение, 1985. 191 с.

34. Лушников А.М. История педагогики. Учебное пособие для учащихся педагогических высших учебных заведений: 2-е изд., перераб., доп. Екатеринбург, 1994. 35 с.

35. Лян Р.Б., Елисеева Т.В. Развитие навыков самостоятельной работы учащихся при работе с учебной литературой. Материалы IV Международной научно-практической конференции «Современное образование: Методика, технологии, качество». Талдыкорган, 2019. С.96–98.

36. Лященко Е.И., Зобкова К.В, Кириченко Т.Ф. и др. Лабораторные и практические работы по методике преподавания математики. Учебное пособие для студентов педагогических институтов. М.: Просвещение, 1988. 223 с.

37. Малиновский В.В. О некоторых особенностях системы математических упражнений для самостоятельной работы школьников/ В.В. Малиновский // Вестник Витебского государственного университета. 2003. №4(30). С.100–104.

38. Математика. Алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс. В 2 ч. Ч. 1. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений (профильный уровень) / А. Г. Мордкович, П. В. Семенов. 6-е изд., стер. М.: Мнемозина, 2009. 424 с.

39. Митрохина В.Н. Самостоятельная работа по решению математических задач как средство развития творческой активности учащихся 5-6 классов: дис канд. пед. наук: 13.00.02/ Митрохина Светлана Васильевна. М.: 2000. 67 с.

40. Михайлов В. Т. Формирование теории учебника в современной отечественной педагогической науке. Евразийский Союз Ученых. Педагогические науки. 2014. С.101–105.

41. Молибог А.Г. Педагогика высшей школы. Учебно-методическое пособие. Изд-во Казанского университета, 1985. 192 с.

42. Мотеюнене С.В. О формировании умений структурировать учебную информацию школьного курса геометрии. //Проблемы совершенствования математической подготовки в школе и вузе: материалы конференции. 2012. С.148–153.

43. Оглуздина А.В. Приёмы работы с текстом учебника на уроках математики // Современная образовательная практика и духовные ценности

общества: материалы II Международной научно-методической конференции. Череповец, 2015. С.251–257.

44. Пак О.В., Ардақұлы Д., Ескендирова Е.В. Алгебра и начала анализа: Учебник для 10 класса общеобразовательной школы общественно-гуманитарного направления. Ч1. Алматы: Алматыкітапбаспасы, 2019. 240с.

45. Пидкасистый П.И. Педагогика. Учебник для студентов педагогических учебных заведений [Текст] /П.И. Пидкасистый. Педагогика. 2006. 240с.

46. Погорелов А.В. Геометрия. 10-11 классы: учеб. для общеобразовательных учр.: базовый и проф. уровни. М.: Просвещение, 2009. 175 с.

47. Потоскуев Е.В., Звавич Л.И. Геометрия. 10 кл.: учеб. для общеобразовательных учреждений с углубленным и профильным изучением математики. 6-е издание, стереотипное. М.: Дрофа, 2008. 223 с.

48. Потоскуев Е.В. Геометрия. 11 класс.: методическое пособие к учебнику Е.В. Потоскуева, Л.И. Звавича «Геометрия. 11 класс» / Е.В. Потоскуев, Л.И. Звавич. М.: Дрофа, 2005. 220 с.

49. Пратусевич М.Я., Столбов К.М., Головин А.Н. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений: профил. уровень. М.: Просвещение, 2010. 463 с.

50. Рабинович Е.М. Задачи и упражнения на готовых чертежах. 10–11 классы. Геометрия. Москва-Харьков: Илекса. Гимназия, 2006. 80 с.

51. Репникова Г.Г. Учебник как средство организации самостоятельной познавательной деятельности учащихся: исследование на материале курса Алгебры 6 класса дисс…канд. пед. наук: 13.00.02/ Репникова Галина Григорьевна. Ленинград: 1975. 225 с.

52. Репьев В.В. Общая методика преподавания математики. Пособие для педагогических институтов. М.: Просвещение, 1958. 224 с.

53. Рустюмова И.П., Рустюмова С.Т. Пособие для подготовки к единому национальному тестированию по математике. Учебно-методическое пособие. Издание четвертое, испр., доработ. Алматы, 2010, 716с.

54. Саакян С.М. Бутузов В.Ф. Геометрия. Поурочные разработки. 10-11 классы: учебное пособие для общеобразовательных организаций. М.: Просвещение, 2017. 232 с.

55. Саранцев Г.И. Методика обучения математике в средней школе: Учебное пособие для студентов мат. спец. пед. вузов и университетов. М.: Просвещение, 2002. 224 с.

56. Система стандартов по информации, библиотечному и издательскому делу. Общие требования и правила составления. М.: Стандартинформ. 2018. 124с.

57. Смирнова И.М. , Смирнов В.А. Геометрия. 10-11 класс: учеб. для учащихся общеобразовательных учреждений (базовый и профильный уровни) / И.М. Смирнова. 5-е издание, испр. и доп. М.: Мнемозина, 2008. 288 с.

58. Смирнова Ю. А. Отличие самостоятельной деятельности учащихся от самостоятельной работы учащихся /Ю. А. Смирнова. Текст: непосредственный // Проблемы и перспективы развития образования: материалы I Междунар. науч. конф. Т. 1. Пермь: Меркурий, 2011. С. 173–176.

59. Стефанова Н.Л., Подходова Н.С. и др. Методика и технология обучения математике. Курс лекций: пособие для вузов. 2-е изд, испр. М.: Дрофа, 2008. 415 с.

60. Темербекова А.А. Методика обучения математике [Электронный ресурс]: учеб. пособие / А.А. Темербекова, И.В. Чугунова, Г.А. Байгонакова. Санкт-Петербург : Лань, 2015. С. 47–74.

61. Теплов С.М. Методика организации самостоятельной работы обучающихся при обучении действительным числам в курсе математики общеобразовательной школы. [Электронный ресурс]: выпуск. квалиф. раб.

Тольятти, 2018. 84 с. http://hdl.handle.net/123456789/7537 (дата обращения: 20.06.2023)

62. Утеева Р.А. Оценка качества математического образования российских школьников в свете международных исследований / Р.А. Утеева, Е.А. Курьянова. Научное отражение. 2017. № 5-6 (9-10). С. 171-173

63. Утеева Р.А. Теоретические основы организации учебной деятельности учащихся при дифференцированном обучении математике в средней школе: Монография. М.: Прометей, 1997. 230 с.

64. Дифференцированные домашние задания по математике в условиях дистанционного обучения школьников/ Утеева Р.А., Большова Е.А. Письма в Эмиссия. Оффлайн. 2018. № 11. С. 26-67.

65. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования [Электронный ресурс]. – Режим доступа: /http://fgos.ru/ (дата обращения: 05.06.2023).

66. Федорова Н.Е. Изучение алгебры и начал математического анализа в 11 классе: кн. для учителя/ Н.Е. Федорова, М.В. Ткачева. М.: Просвещение, 2009. 159 с.

67. Холодная М.А. Развивающие учебные тексты как средство интеллектуального воспитания учащихся. М.: Изд-во «Институт психологии РАН», 2016. 200 с.

68. Шарыгин И.Ф. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия. Базовый уровень. 10-11 классы: учебник. М.: Дрофа, 20134. 236 с.

69. Эрентраут Е.Н. Прикладные задачи математического анализа для школьников: Учебное пособие. Челябинск: Изд-во ЧГПУ, 2004. 119 с.

70. Якиманская И.С. Развивающее обучение. М.: Просвещение, 1979. 144 с.

71. Яровенко В.А. Поурочные разработки по геометрии: 10 класс. Учебное пособие к учебнику Л. С. Атанасяна. М.: Просвещение, 2010. 303 с.

72. Cirrito F., Buckle N., Dunbar L. Mathematics higher level (core). Mathematics. International Baccalaureate. Series Title: International Baccalaureate in Detail. Published by IBID Press, Victoria. Printed by SHANNON Books, Australia, 2007. 1001 p.

73. MATHEMATICAL EDUCATION IN TERMS OF INNOVATIVE DEVELOPMENT Pardała A., Uteeva R.A., Ashirbayev N.K. Mathematics Teaching-Research Journal. 2015. T. 7. № 4.

74. Muhammer Taşkıran. Zambak. Limit of Function. Turkey. 2008. 136 p.

75. Ron Larson, Bruce H. Edwards. Calculus of a Single Variable. Ninth Edition. Printed in the USA. Woodstock Graphics Studio, 2010. 1142 p.

76. Urban P., Martin D., Haese R. Mathematics for the international student. Mathematics HL (Core) second edition. For use with IB Diploma Programmed. AUSTRALIA, 2010. 932 p.

Приложение А

Анализа темы «Уравнение касательной к графику функции» в учебниках разных авторов

Таблица А.1 – Результаты анализа темы «Уравнение касательной к графику функции», данные в разных учебниках алгебры и начал математического анализа.

Компоненты анализа/авторы учебника, название учебника	Муравин Г. К. Математика. Алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс. Базовый уровень: учеб. для общеобразоват. учеб. заведений/ Г. К. Муравин, О. В. Муравина. – М.: Дрофа, 2013. – 288 с.	Алимов Ш.А. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы: учебник для общеобразовательных организаций: базовый и углубленный уровни/ Ш.А. Алимов, Э.М. Колягин, М.В. Ткачева и др. – 3-е изд. – М.: Просвещение, 2016. – 463с.	Мордкович А.Г. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс. В 2 ч. Ч. 1. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений (профильный уровень)/ А.Г. Мордкович, П.В. Семенов. – 6-е изд., стер. –М.: Мнемозина,2009. – 424с. [38]
Аппарат организации усвоения			
Научность текста.	Содержания учебника соответствует современному уровню науки.	Тема «Уравнение касательной к графику функции» представлена в учебнике в главе 8 «Производная и ее геометрический смысл». Материал изложен таким образом, что изложение материала сочетает в себе доступность наряду с наличием более сложных вопросов.	Изложение материала в учебнике дается подробно и обстоятельно. При изложении учебного материала авторы используют научную терминологию, однозначную трактовку терминов и их определений.

Продолжение Приложения А

Продолжение таблицы А.1

		Числовая линия и линия преобразований развиваются параллельно с функциональной.	
Аппарат организации усвоения			
Научность текста.	Содержания учебника соответствует современному уровню науки.	Тема «Уравнение касательной к графику функции» представлена в учебнике в главе 8 «Производная и ее геометрический смысл». Материал изложен таким образом, что изложение материала сочетает в себе доступность наряду с наличием более сложных вопросов. Числовая линия и линия преобразований развиваются параллельно с функциональной.	Изложение материала в учебнике дается подробно и обстоятельно. При изложении учебного материала авторы используют научную терминологию, однозначную трактовку терминов и их определений.
Доступность текста.	Выполняется доступность и понятность стиля изложения материала обучающимся данной возрастной группы.	Теоретический материал авторами излагается доступным языком, что способствует самостоятельному изучению его старшеклассниками.	Изложение темы авторами учебника соответствует возрастным и психологическим особенностям обучающихся (соблюдено оптимальное соотношение между научностью и доступностью).
Дифференцируемость текста (текст изложен от простого к сложному).	Теоретический материал разделен на обязательный и дополнительный.	Авторами данного учебника, в отличие от учебника под редакцией А.Г	Сначала авторы дают определение касательной к

Продолжение Приложения А

Продолжение таблицы А.1

	Авторами рассматривается получение уравнения касательной к графику функции, начиная с простого (за счет отсутствия таких понятий как «приращение функции», «приращение аргумента») объяснения нахождения углового коэффициента, как тангенса угла наклона касательной. Исходя из определения касательной к кривой как предельное положение секущей авторы показывают, что к этому углу стремится и угол наклона секущей. Для этого авторы используют предел. Авторы приводят пример, решение которого демонстрируют двумя способами: простым (повторяющим шаги алгоритма) и нестандартным (квадратное уравнение с параметром). Авторы постепенно усложняют материал, так в следующем параграфе «Производная и дифференциал функции» вводятся понятия «приращение функции», «приращение аргумента», «дифференциал», вводится определение «производной функции» и ее обозначения.	Мордковича, определение касательной к произвольной кривой не представлено, а формулируется определение касательной к графику функции. Уравнение касательной выводится после того, как авторы привели простой пример на нахождение уравнения касательной, проведенной к параболе в заданной точке.	кривой. Но используют его на интуитивном уровне. Далее авторы вводят определение производной, и только после этого выводят уравнение касательной к кривой. У авторов прослеживается связь вывода уравнения касательной с подходом к определению касательной к кривой. Авторами соблюдены принципы дидактики, такие как «от простого к сложному», «от близкого к далекому», «от легкого к трудному», «от известного к неизвестному».

Продолжение Приложения А

Продолжение таблицы А.1

	И только после этого, используя обозначение производной, записывают уравнение касательной.		
Наличие дополнительной учебной информации (в том числе исторического материала). Наличие вопросов для проверки усвоения или изучения нового материала. (Контрольные вопросы).	Авторы учебника при введении определения касательной к произвольной кривой делают отсылку к курсу геометрии (касательная к окружности). Авторами рассматривается на более простом уровне вопрос о существовании касательной в точках ее разрыва, что мотивирует ученика на поиск более углубленной информации в других источниках. При изучении темы «Касательная к графику функции» авторы используют исторический материал. Каждый пункт главы содержит контрольные вопросы и задания.	Дополнительная информация представлена в учебнике в отдельном разделе «Приложение»: Множества; Элементы математической логики; Предел последовательности; Дробно-линейная функция и ее график; Уравнения и неравенства с двумя неизвестными. При изложении темы, авторы обращают внимание на связь с физикой: Построив касательную к параболе, можно построить ее фокус F. Для построения фокуса F нужно построить прямую AB, параллельную оси Oy, и прямую AF, образующую с касательной такой же угол, как и прямая AB.	Дана дополнительная информация о нахождении приближенного значения функции в точке x. В качестве приближенного значения функции в точке x берут значение ординаты касательной в той же точке. Рассмотрен пример о нахождении приближенного значения числового выражения $1{,}02^7$.
Аппарат ориентировки			
Примеры решения заданий (подробным, частичным). Готовые (разбор) образцы с алгоритмом	В тексте имеются два примера с подробным решением. В книге имеется раздел «Ответы. Советы. Решения», в котором автор	В тексте приведены четыре примера с подробным решением. Пример номер четыре отмечен звездочкой. В дидактическом материале имеются	В тексте приведено много примеров с подробными решениями. К большинству задач второго и

Продолжение Приложения А

Продолжение таблицы А.1

решения некоторых задач. Указания. Ответы к заданиям.	рассматривает решение наиболее трудных задач. Авторы советуют, 1)если задача не получается – ее решение или полезный совет учащиеся могут найти в разделах «Советы» и «Решения». 2)решив задачу, сравните свой ответ с ответом в учебнике. 3)в разделе «Основные формулы» в конце учебника вы можете найти нужную формулу.	образцы решения некоторых задач. Имеются ответы и указания. Имеется разъяснение понятия «угол между кривыми в точке их пересечения» в упражнении № 864.	третьего уровней приведены ответы.
Иллюстративные материалы			
Графики Рисунки Схемы Таблицы (в том числе для заполнения)	При объяснении материала авторы используют пояснительные рисунки в достаточном количестве. В процессе объяснения сути понятия касательной к кривой. В процессе получения уравнения касательной. Для решения трех упражнений №51, №52, №53 приведены рисунки с графиками: найти по графику приближенно тангенс угла наклона касательной	При введение определения касательной к графику функции авторы ориентируют читателя на графики. Графиком сопровождается вывод уравнения касательной к графику дифференцируемой функции. Графиками сопровождаются решения примеров. В упражнении к параграфу имеется одно задание №861, в котором по предложенному графику нужно выбрать те из точек, в которых производная принимает:	При введение определения касательной к кривой для наглядности авторы предлагают рассмотреть рисунок. При рассмотрении задачи о касательной к графику функции предлагается рассмотреть график. В задачнике предлагаются задачи 43.1, 43.2, в которых по имеющемуся графику нужно

Продолжение Приложения А

Продолжение таблицы А.1

	к графику функции, в отмеченных точках; в каких точках касательные к графику функции параллельны оси абсцисс, прямой у=х, прямой у=-х;по графику определите, в каких точках не существует касательной к графику функции.	положительные значения, отрицательные значения, значения, равные нулю. В упражнении №882 к главе предложены рисунки, с изображениями графиков функций, из которых требуется выбрать те, которые являются производными заданных функций.	определить знак углового коэффициента или указать точки, в которых производная равна нулю или не существует.
Методический аппарат			
Задачи: дифференцированные (например, по уровню сложности).	Каждый пункт главы содержит упражнения, контрольные вопросы и задания. Упражнения и домашние контрольные работы дифференцированы.	Система упражнений представлена на трех уровнях сложности: 1) обязательный базовый; 2) продвинутый базовый; 3) углубленный.	В каждом параграфе задачника представлена разнообразная система упражнений, включающая три уровня - по степени нарастания трудности: простые, средние и повышенной сложности.
Задания, дополняющие систему упражнений учебника, и позволяют организовать дифференцированную работу учащихся	Задания каждой из домашних контрольных работ разбиты на 3 уровня, которые можно трактовать как удовлетворительный, хороший и отличный. Это дает возможность учащимся самим оценить свои математические достижения.	Задания повышенной трудности в конце учебника содержат богатый материал для подготовки в вузы с повышенными требованиями по математике. По количеству упражнений система избыточна: заданий примерно в	Заданий по объему избыточное количество, по сравнению с тем, что можно реально успеть выполнить с учениками при предусмотренным учебным планом четырех часов в неделю на изучение всего курса

Продолжение Приложения А

Продолжение таблицы А.1

		два раза больше, чем в традиционных учебниках для общеобразовательных классов.	математики. Авторы сознательно пошли на это, чтобы у учителя отсутствовала необходимость обращаться к другим источникам, и для достаточной подготовки учащимися, которые выбрали поступление в вузы негуманитарного профиля.
Упражнения для работы: в классе дома самостоятельной работы контрольные работы домашние контрольные работы самопроверочные работы	К каждой главе учебника предлагается домашняя контрольная работа с указанием примерного времени, на которое рассчитано ее выполнение.	Упражнения приведены в конце каждого параграфа, в конце каждой главы (упражнения для тематического повторения) и в конце учебника (для итогового повторения курса). По каждой теме (главе) имеются практические задания для самоконтроля ("Проверь себя!"). В упражнениях к главе 8 имеются четыре задания под названием «Проверь себя», из которых два задания на рассматриваемую тему.	В каждом номере одно, два или четыре задания. Все они в пределах конкретного номера однотипные, поэтому авторы советуют учителю разбирать в классе пункт а) (или пункт а) и б)), а на дом задавать пункт б) (или соответственно пункты в) и г)).
Тесты: открытые закрытые	_	В пособии «Дидактические материалы», под редакцией М.И. Шабунина предложены задания на двух уровнях сложности с указанием времени их выполнения. Учитель	_

Продолжение Приложения А

Продолжение таблицы А. 1

Задачи для повторения пройденного материала.	–	может использовать их перед контрольными работами для определения уровня сформированности знаний и умений учащихся по теме. В пособии «Тематические тесты» под редакцией М.В. Ткачевой авторы предлагают использовать тесты открытого типа. В конце учебника имеются упражнения для итогового повторения курса алгебры и начала анализа.	По мнению авторов наличие отдельного задачника в учебнике позволило выстроить в нем полноценную как по объему, так и по содержанию систему упражнений, достаточную для работы в классе, для домашних заданий, для повторения (без привлечения других источников).
Задачи для внеклассной работы	–	Имеются задачи для внеклассной работы.	–
Анализ задачного материала по уровню учебной деятельности			
Задачи: репродуктивные,	51-53, 55-58, 74-75, 160, 164	858, 859, 860, 861, 862, 863, 877, 889	43.1, 43.2, 43.3, 43.4-43.6, 43.7-43.8, 43.9-43.11, 43.12-43.13, 43.14-43.20
Частично-поисковые,	54, 59-61, 76-77, 159, 165, 166, 167, 175, 177, 178	864, 865, 866, 867, 868, 890, 893, 894, 895, 896, 897	43.29-43.40, 43.41, 43.42, 43.43, 43.44-43.48, 43.49-43.54, 43.57
творческие	62, 173, 174	891, 892, 898	43.55, 43.56, 43.58, 43.66, 43.67, 43.68, 43.69, 43.70
практико-ориентированные	–	Имеются практико-ориентированные задачи по теме №1589. Межпредметные задачи №1592	–

Приложение Б

Анкета

Вопросы анкеты ученикам.

Вопрос 1. Используется ли вами учебник на уроке математики. Да Нет

Вопрос 2. На каком этапе урока учитель предлагает использовать учебник чаще всего, когда:

а) повторяете пройденный материал,

б) изучаете новый материал,

в) когда практикуетесь решению задач и примеров.

г) для выполнения задания дома?

Вопрос 3. Предоставляет ли вам учитель самостоятельность при работе с учебником?

Вопрос 4. Ответьте на вопрос: Чаще всего мне трудно

а) читать графическую и табличную информацию,

б) доказывать теорему (применять теорему при решении задач),

в) делать конспект или изучать материал по тексту учебника без инструкций,

г) самостоятельно формулировать определение,

д) понять текст задачи, так как…?

Вопрос 5. Проверяется ли учителем, то, что вы изучили по учебнику и как?

Вопрос 6. Дает ли учитель изучить новые вопросы по учебнику в качестве домашнего задания?

Вопрос 7. Используется ли учебник при

а) индивидуальной работе,

б) групповой работе,

в) парной работе.

г) фронтальной работе

8. Дает ли вам учитель рекомендации как использовать учебник на уроке при написании конспекта? Да__ Нет___

9.Нравится ли вам

а) самостоятельно работать с учебником на уроке

б) под руководством учителя работать с учебником?

Вопросы анкеты учителям.

Вопрос 1. Какими методиками, технологиями или концепциями вы пользуетесь для того, чтобы ученики работали с учебником самостоятельно на уроке математики?

Вопрос 2. Предоставляете ли вы ученикам возможность изучить новый материал по учебнику, и предоставляете ли им инструкцию для этого? Чаще в классе или как домашнее задание?

Вопрос 3. На каком этапе урока вы предлагаете использовать учебник чаще всего:

а) повторение пройденного материала,

б) изучение нового материала,

в) практикум по решению задач и примеров,

г) задание на дом?

Вопрос 4. Какие приемы, способы обучения чтению учеником текста учебника вам знакомы?

Вопрос 5. Какие приемы работы ученика с учебником на уроке и при выполнении домашнего задания вы используете в своей практике?

Вопрос 6. Систематически ли вы используете приемы работы ученика с учебником на уроке и при выполнении домашнего задания? Если нет, то почему?

Вопрос 7. Какие трудности, по-вашему мнению, испытывают школьники при работе с учебниками?

Приложение В

Проверочные работы по теме «Применение производной при решении задач»

Проверочная работа №1

Задание 1.

Задача 1. На рисунке В.1 изображен график функции *y = f (x)*, и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции *y = f (x)* в точке x_0.

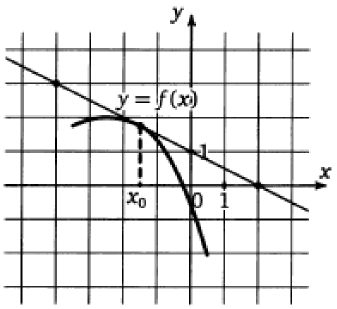


Рисунок В.1– График функции *y = f (x)*

Ответ: ________________________

Задача 2. На рисунке В.2 изображен график функции *y = f (x)*, определенной на интервале (-8; 3). Определите количество целых точек, в которых производная функции отрицательна.

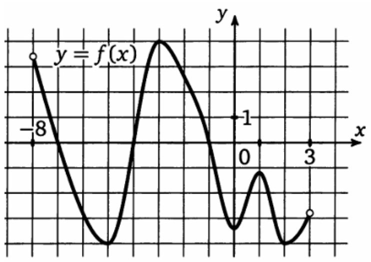


Рисунок В.2 – График функции y = f (x)

Ответ: ________________________

Задача 3.На рисунке В.3 изображен график производной функции *f*(*x*), определенной на интервале (x_1; x_2). Найдите промежутки убывания функции). В ответе укажите длину наибольшего из них.

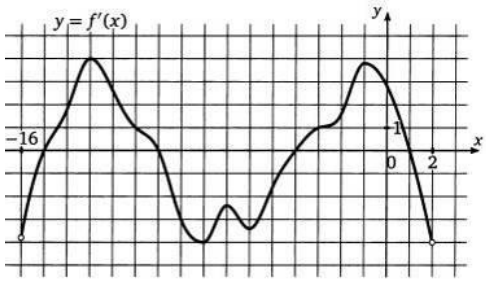


Рисунок В.3– График функции $y = f^{/}(x)$

Ответ: ______________________

Задача 4. На рисунке В.4 изображен график производной функции *y = f* , определенной на интервале (x_1; x_2). Найдите количество точек максимума функции *y = f (x)* на отрезке [*a; b*].

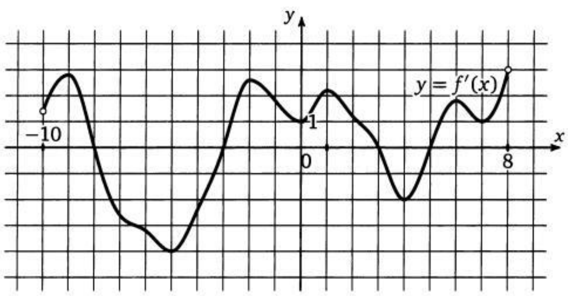


Рисунок В.4– График функции $y = f^{/}(x)$

Ответ: ______________________

Задача 5. На рисунке В.5 изображен график производной функции $y = f(x)$, определенной на интервале (x_1; x_2). Найдите количество точек экстремума функции $y = f(x)$ на отрезке [-3; 10].

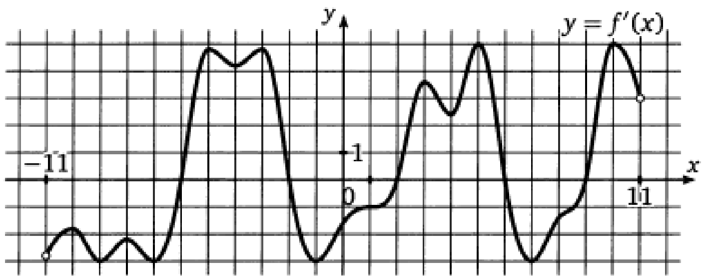


Рисунок В.5– График функции $y = f^{/}(x)$

Ответ: ______________________

Задание 2. Найдите критические точки функции:

а) $f(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2$; б) $f(x) = \sqrt{x^2 - 6x}$.[5]

Задание 3. Найдите экстремумы функции $f(x) = (x+1)^2 (x-2)^2$. 4 балла

Задание 4. Найдите интервалы возрастания и убывания функции $f(x) = \frac{x^2 + x + 4}{x-1}$. 5 баллов

Задание 5. Дана функция $y = x^5 - x + 5$. Найдите промежутки выпуклости и вогнутости функции, точки перегиба функции.8 баллов

Задание 6. Найдите уравнение касательной к кривой $y = 3x + ln(2x + 1)$ в точке $(0;\ 0)$. 5 баллов

Задание 7. Суточные расходы при плавании судна состоят из двух частей: постоянной, равной a рублей и переменной, возрастающей пропорционально кубу скорости. При какой скорости v плавание судна окажется наиболее экономичным? 7 баллов

Задание 8. Материальная точка движется по прямой. Уравнение ее движения $s = t^4 + 2t^2 + 5$. Определить мгновенною скорость и ускорение точки в конце второй секунды от начала движения, среднюю скорость и путь, пройденный за это время. 8 баллов

Задание 9. С помощью производной найдите наибольший объем правильной треугольной пирамиды, боковое ребро которой имеет длину 6 м.10 баллов

Задание 10. Уравнение движения точки дано в виде $x = \sin\frac{\pi}{6}t$. Найти моменты времени t, в которые достигаются максимальная скорость и максимальное ускорение. 8 баллов

Проверочная работа №2

Задание 1.

а) На рисунке В.6 изображен график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найти значение производной функции в точке x_0.

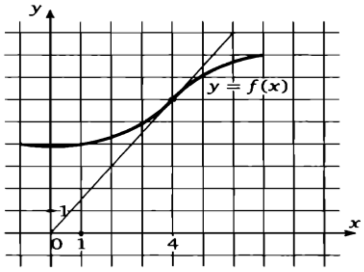


Рисунок В.6– График функции $y = f(x)$

Ответ: ______________________

б) На рисунке В.7изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-8;3)$. Определить количество целых точек, в которых производная равна нулю.

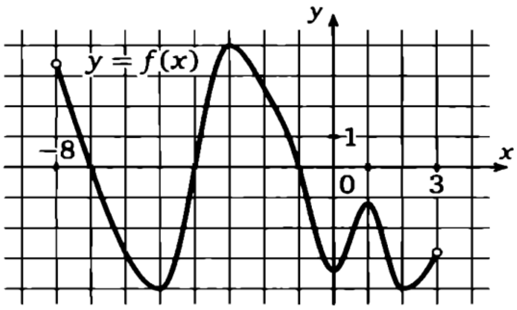


Рисунок В.7– График функции $y = f(x)$

Ответ: ______________________

в) На рисунке В.8изображен график производной функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-11;\ 3)$. Найти промежутки возрастания функции. В ответе указать длину наибольшего из них.

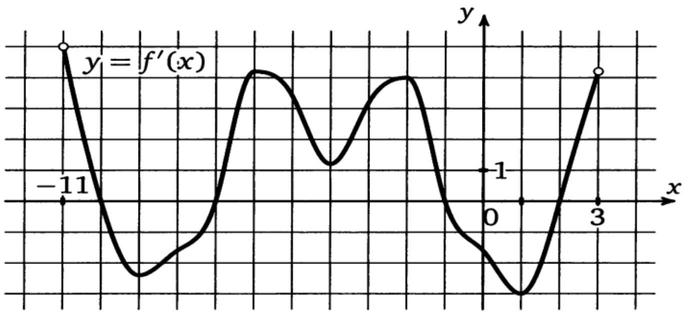


Рисунок В.8– График функции $y = f^{/}(x)$

г) На рисунке В.9изображен график производной функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-3;8)$. Найдите количество точек максимума функции $y = f(x)$ на отрезке $[-2;7]$

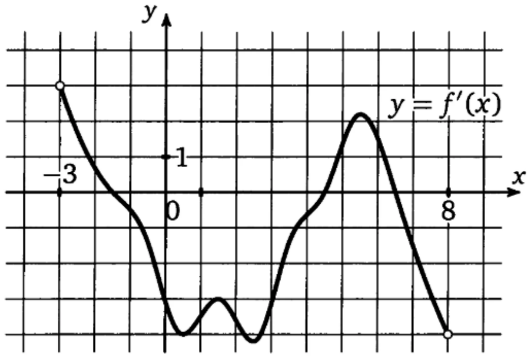


Рисунок В.9– График функции $y = f'(x)$

Ответ: ______________________

д) На рисунке В.10 изображен график производной функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-7;5)$. Найдите точку экстремума функции $y = f(x)$ на отрезке $[-6;4]$

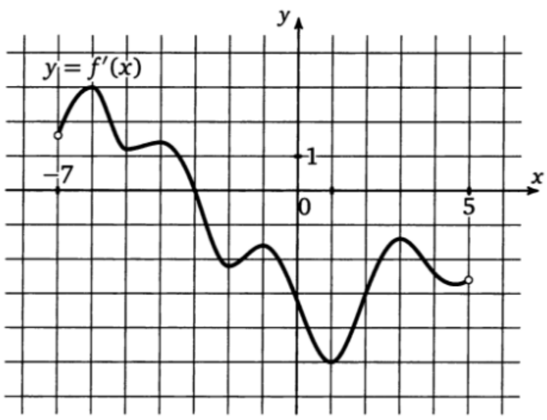


Рисунок В.10 – График функции $y = f'(x)$

Ответ: ______________________

Задание 2.

Кривая определяется уравнением $y = \dfrac{e^{-x}}{1+x}$. В точке Р кривая имеет критическую точку. Найдите точные координаты точки Р. 5 баллов

Задание 3. Производная уравнения кривой $y = f(x)$ имеет вид $(x+6)(x-1)$.

Покажите, что критическая точка x = 1 является точкой минимума.1 балл

Задание 4. Дана кривая $y = \dfrac{x^2+5x+2}{x-2}$.

а) Найдите $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$. 3 балла

б) Определите все значения x, при которых y возрастает, если возрастает x. 2 балла

Задание 5. Дана функция $y = (2x+1)e^{2x}$

а) Найдите промежутки выпуклости и вогнутости функции. 6 баллов.

б) Найдите координаты точек перегиба функции. 2 балла.

Задание 6. Напишите уравнение касательной к графику функции $y = x^2 - 3x + \ln x$ в точке ее минимума. 7 баллов

Задача 7. Фирма продает x компьютеров в неделю. Доход от продажи x компьютеров задается функцией

$$I(x) = 1200x - 2x^2.$$

Стоимость создания x компьютеров задается функцией

$$C(x) = x^3 - 72{,}5x^2 + 1470x + 2000.$$

(I(x) и C (x) измеряются в некоторых условных единицах).

а) Составьте функцию прибыли, найдите критические точки, учитывая, что. функция прибыли непрерывна.4 балла

б) Используйте вторую производную или другой способ, покажите, что максимальная прибыль для государства, будет если фирма продает 45 компьютеров в неделю. Ответ обоснуйте.3 балла

Задние 8. На экране светящаяся точка движется вдоль оси Ox. Путь, пройденный светящейся точкой задается уравнением

$$x = 2\sin 3t + 4\cos 3t, \text{ где } t \geq 0.$$

а) Найти скорость светящейся точки как функцию, зависящую от t. 2 балла.

б) Найти ускорение светящейся точки как функцию, зависящую от t. 2 балла.

в) Найти два значения времени в интервале $0 < t < \frac{2\pi}{3}$, где ускорение равно нулю. 4 балла.

Задание 9.

а) На рисунке В.11 изображен открытый прямоугольный бак с высотой h метров. Основание бака со сторонами 2x метра и 3x метра расположено горизонтально. Бак может вмещать воду объемом 900 м3, а площадь внутренней поверхности бака S м^2.

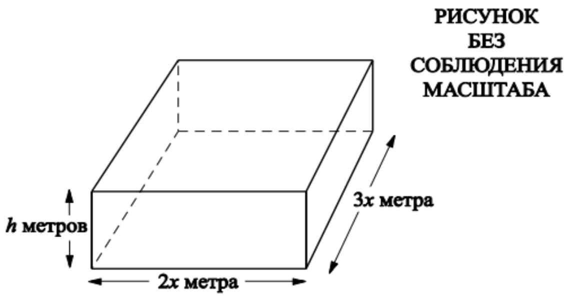


Рисунок В.11– Открытый прямоугольный бак

Покажите, что $S = \dfrac{1500}{x} + 6x^2$ 3 балла

б) Найдите размеры бака, когда $\dfrac{ds}{dx} = 0$. Используя вторую производную или другим способом, определите, является ли S минимумом или максимумом в данном случае. 7 баллов

Задание 10. Высота воды в пристани задается функцией

$$h(t) = 5,4 + 4,6sin\left(\frac{\pi}{6}(t+3)\right), 0 \le t < 12,$$

где h(t) - высота воды в метрах, а t - время в часах с последнего прилива.

а) Найдите максимальную высоту воды в пристани.1 балл.

б) Найдите минимальную высоту воды в пристани и значение t при достижении этой минимальной высоты. 3 балла.

в) При t = 7 высота воды возрастает. Найдите скорость возрастания высоты воды в метрах/час. Округлите свой ответ с точностью до тысячных.3 балла.

г) Оценивая $\frac{\mathrm{dh}}{\mathrm{dt}}$, найдите значение t, при котором высота воды возрастает быстрее всего. 2 балла.