

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Тольяттинский государственный университет»

Институт математики, физики и информационных технологий
(наименование института полностью)

Кафедра «Высшая математика и математическое образование»
(наименование)

44.04.01 Педагогическое образование
(код и наименование направления подготовки)

Математическое образование
(направленность (профиль))

**ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
(МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ)**

на тему «Методика обучения теме «Пирамида и ее основные свойства»
с помощью компьютерных средств в старших классах общеобразовательной
школы»

Обучающийся

Н.Р. Венкова

(Инициалы Фамилия)

(личная подпись)

Научный
руководитель

канд. пед. наук, доцент, Н.Н. Кошелева

(ученая степень (при наличии), ученое звание (при наличии), Инициалы Фамилия)

Тольятти 2023

Оглавление

Введение.....	3
Глава 1 Методические основы обучения теме «Пирамида и ее свойства» с помощью компьютерных программ.....	12
1.1 Основные цели и задачи обучения теме «Пирамида и её основные свойства» в школьном курсе математики	12
1.2 Различные подходы к обучению теме «Пирамида и её основные свойства» в старших классах общеобразовательной школы.....	18
1.3 Анализ учебных пособий по геометрии для учащихся старших классов общеобразовательной школы	21
1.4 Особенности обучения решению задач по теме «Пирамида и ее основные свойства» с помощью компьютерных средств в старших классах общеобразовательной школы	31
Глава 2 Практическая реализация методики обучения теме «Пирамида и ее свойства» с помощью компьютерных программ.....	37
2.1 Система упражнений по теме «Пирамида и её основные свойства».....	37
2.2 Методические рекомендации по обучению теме «Пирамида и её основные свойства» с использованием компьютерных программ	54
2.3 Элективный курс «Пирамида её виды и свойства» с применением компьютерных технологий»	58
2.4 Педагогический эксперимент и его результаты	66
Заключение	77
Список используемой литературы	79

Введение

С ростом использования современных технологий в повседневной жизни, возрастает важность развития правильных представлений о пространственных объектах и формирования у старшеклассников способности к пространственному воображению. Это имеет непосредственное отношение к образованию и развитию учащихся, так как эти навыки помогают им лучше понимать теоретические материалы, связанные с математикой и смежными науками. Ученики, которые имеют развитое пространственное воображение, могут лучше воспринимать и анализировать графические изображения и конструкции, а также успешнее справляться с решением практических задач, связанных с машинной инженерией и архитектурой. Поэтому, рекомендуется включать компьютерные программы, позволяющие решать задачи и упражнения, направленные на развитие пространственной мысли, в образовательные программы для старшеклассников. Без этого сегодня вряд ли возможно формирование профессиональных знаний, умений и навыков во взрослой жизни, которые отвечают повышенным требованиям к высокой квалификации современного человека.

Тема о пирамиде и ее свойствах является одной из самых основных как в стереометрии, так и геометрии в целом. Она играет очень важную роль в формировании у старшеклассников представлений о пространственных формах окружающего мира и способностей увидеть реальные объекты в их геометрических образах.

Актуальность и научная значимость настоящего исследования. Актуальность темы обусловлена, в первую очередь, именно этим, поэтому в научно-педагогической практике тема применения компьютерных технологий при обучении старшеклассников решению задач по стереометрии и, в частности, по теме свойств пирамиды занимает важное место.

Хотя формирование пространственных представлений не является исключительной прерогативой математики, геометрии и стереометрии,

традиционно, именно при изучении этих курсов вырабатываются стройные основы пространственного мышления.

Актуальность темы в настоящее время обусловлена еще и тем, что при сдаче экзаменов в форме тестирования решение задач по стереометрии отошло на второй план, повышая, тем самым, значимость методики преподавания с использованием компьютерных программ и индивидуального подхода непосредственно в процессе обучения.

В настоящее время компьютерные технологии играют важную роль во многих областях жизни, включая и науку. Изучение темы «Пирамида, ее виды и свойства» с использованием компьютерных технологий значимо, так как пирамиды являются геометрическими фигурами и их свойства могут лучше изучаться и анализироваться с помощью компьютерных технологий. Это позволяет более точно определить характеристики пирамид, проводить исследования и использовать полученные знания не только в геометрии и математике, а также в различных областях, например, в архитектуре, строительстве, производстве. Кроме того, использование компьютерных технологий для изучения пирамид позволяет создавать визуализацию и моделирование пирамид, что способствует более наглядному обучению и лучшему пониманию материала.

Анализ учебной литературы также показывает, что изучение стереометрии стоит далеко не на первом плане. Предмет считается не имеющим самостоятельной ценности и рассматривается как нечто дополнительное к другим знаниям. Объем геометрических представлений у обучающихся весьма невелик и ограничивается достаточно узким объемом знаний [69].

Изучение темы «Пирамида, ее виды и свойства» с использованием компьютерных технологий актуально в наше время по нескольким причинам:

1. Развитие программного обеспечения позволяет ученикам быстро и точно создавать трехмерные модели пирамиды и исследовать ее свойства.

2. Ученики будут уметь использовать математические инструменты при решении задач, на тему «Пирамида, ее виды и свойства». Таким образом, ученики смогут понять, как математические знания, которые они получают в классе, могут использоваться в реальном мире и в различных отраслях науки и технологий.

3. Изучение технологий, связанных с пирамидами, даст основу будущим студентам ВУЗов, которые выбирают специализацию в области 3D-моделирования или CAD/CAM, а также ученикам, выбравшим для себя профессии, связанные с инженерией, производствами и многими другими техническими областями, где точные расчеты являются необходимыми.

4. Изучение пирамид может помочь студентам построить связь между математическими концепциями и их реальным применением.

Изучение темы «Пирамида, ее виды и свойства» с использованием компьютерных технологий актуально на сегодняшний день и может помочь ученикам развить новые навыки и увеличить свои будущие карьерные возможности.

Именно поэтому повышается актуальность полноценного и досконального изучения темы о пирамиде и ее свойствах, учитывая возможности, предоставляемые современными компьютерными технологиями [81].

В научно-педагогической литературе можно выделить несколько групп работ, посвященных проблематике рассматриваемой темы:

- изучение пирамид в довузовских учебных заведениях на основе фузионистской концепции;
- изучение геометрии и стереометрии в старших классах школы с использованием компьютерных программ;
- обучение старшеклассников рефлексивному исследованию задач и проектированию математического объекта.

Следует заметить, что вопросы применения современных технологий при изучении стереометрии не являются полноценно изученными, поэтому, актуальность и научная значимость исследования обусловлена:

- требованиями ФГОС ООО к предметным компетенциям обучающихся;
- требованиями современной действительности к уровню умений и навыков по работе с компьютерными технологиями;
- необходимостью в анализе и учете особенностей материала и методик преподавания стереометрии в отечественной школе;
- сложившимися к настоящему времени противоречиями между необходимостью формирования предметных навыков и умений на требуемом уровне, недостаточной разработанностью методических основ обучения теме «Пирамида, ее виды и свойства», а также недостаточной разработанностью системы задач по теме с использованием когнитивных графических учебных элементов.

Из данных противоречий вытекает проблема данного диссертационного исследования: выявление методических особенностей обучения теме «Пирамида и её основные свойства» в старших классах общеобразовательной школы с помощью компьютерных средств.

Объект исследования: процесс обучения геометрии в старших классах общеобразовательной школы.

Предмет исследования: методика обучения теме «Пирамида и ее свойства» с помощью компьютерных средств.

Цель исследования состоит в выявлении методических особенностей обучения теме «Пирамида и её основные свойства» с помощью компьютерных средств в старших классах общеобразовательной школы.

Гипотеза исследования основана на предположении о том, что выявленные методические рекомендации при использовании тематических компьютерных программ и технологий способствуют повышению качества

математической подготовки и уровня знаний по теме «Пирамида и её свойства», получаемых в общеобразовательных учебных заведениях.

Для достижения целей, поставленных в данной работе, решаются следующие **задачи**:

1. Определить основные цели и задачи обучения теме «Пирамида и её основные свойства» в школьном курсе математики.
2. Сравнить различные подходы к обучению теме «Пирамида и её основные свойства» в старших классах общеобразовательной школы.
3. Проанализировать особенности когнитивно-визуального подхода при обучении решению задач по теме «Пирамида и её основные свойства» с применением компьютерных средств.
4. Раскрыть особенности обучения решению задач по математике и, в частности, стереометрии в курсе общеобразовательной школы.
5. Определить систему задач от легких до упражнений повышенной сложности по теме «Пирамида и её основные свойства».
6. Структурировать методические рекомендации по применению компьютерных программ при изучении темы «Пирамида и её основные свойства».
7. Представить элективный курс «Решение задач по теме «Пирамида и её основные свойства» с применением компьютерных технологий» и результаты апробации этого курса.
8. Провести педагогический эксперимент на основе элективного курса и представить его результаты.

Теоретико-методологическую основу данного исследования составили работы таких авторов как: Ольбинский И.Б. [31], Саранцев Г.И. [52], Никифорова М.А. [34], [35].

Базовыми для настоящего исследования являются работы Бескина М.Н. [11], Позднякова С.Н. [42], Блох А.Я., Гусева В.А. [22], а также Федеральный закон от 29.12.2012 № 273-ФЗ (ред. от 30.12.2015 г.) «Об образовании в Российской Федерации» (с изменениями и дополнениями,

вступающими в силу с 01 июля 2016 г.) [1]; ФГОС СОО [2], материалы итоговых аттестаций в общеобразовательной школе Российской Федерации [73, 75], диссертационные работы [21], [36], [37], [55], [57], [60] - [62], а также компьютерные программы для преподавания геометрии в старших классах общеобразовательной школы [77]-[80].

Методы исследования, использованные для решения поставленных задач: анализ научно-педагогической, исследовательской и учебно-методической литературы; изучение и обобщение практики преподавания стереометрии с применением компьютерных технологий; анализ результатов опытно-экспериментальной работы и педагогического эксперимента по проверке основных положений исследования.

Основные этапы исследования:

- 1 этап (2021-2022 уч. г.): анализ существующих исследований по теме данной работы, анализ учебников, пособий, нормативных документов (стандартов, программ);
- 2 этап (2021-2022 уч. г.): определение теоретико-методологических особенностей когнитивно-визуального подхода при обучении решению задач по теме «Пирамида и её основные свойства» с применением компьютерных средств, систематизация различных технологий обучения математике, стереометрии в курсе общеобразовательной школы;
- 3 этап (2022-2023 уч. г.): определение системы задач повышенной сложности по теме «Пирамида и её основные свойства», выявление особенностей применения компьютерных программ при изучении темы «Пирамида и её основные свойства»;
- 4 этап (2022-2023 уч. г.): разработка элективного курса «Решение задач по теме «Пирамида и её основные свойства» с применением компьютерных технологий» и его апробация.

Опытно-экспериментальная база исследования: Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение «Лицей № 24 имени Героя Советского Союза А.В. Корявина» Московская область, Сергиево-Посадский городской округ, г. Сергиев Посад-6.

Научная новизна исследования заключается в том, что в нем определена и обоснована методика обучения теме «Пирамида и её основные свойства» с применением компьютерных технологий, а также определена система упражнений по теме.

Теоретическая значимость исследования состоит в том, что в нем:

- выявлены основные цели и задачи обучения теме «Пирамида и её основные свойства» в школьном курсе математики;
- выявлены методические особенности обучения теме «Пирамида и её основные свойства» с применением компьютерных технологий при обучении решению задач;
- рассмотрены различные подходы к обучению с применением когнитивных графических учебных элементов.

Практическая значимость исследования определяется тем, что в данной работе:

- представлены методические рекомендации обучения теме «Пирамида и её основные свойства»;
- рассмотрены различные подходы к обучению стереометрических задач различного уровня сложности и способы их решения с помощью компьютерных программ;
- разработана система упражнений по геометрии с применением компьютерных технологий для их решения для учащихся старших классов общеобразовательной школы;
- предложен элективный курс по теме данной работы.

Достоверность и обоснованность результатов исследования и выводов по данной работе, полученных в ходе исследования, обеспечивалась

сочетанием теоретических и практических методов, анализом педагогического эксперимента.

Личное участие автора состоит в выявлении методических особенностей и рекомендаций по обучению теме «Пирамида и её основные свойства», в разработке системы упражнений по теме исследования различного уровня сложности с применением компьютерных программ, в разработке программы элективного курса по теме исследования и в описании результатов педагогического эксперимента.

Апробация и внедрение результатов работы велись в течение всего периода проведения исследования. Проверка предлагаемого элективного курса была осуществлена в период производственной практики (научно-исследовательской работы) и преддипломной практики на базе кафедры «Высшей математики и математического образования» Тольяттинского государственного университета, а также в период проведения педагогического эксперимента в МБОУ «Лицей № 24 им. Героя Советского Союза А.В. Корявина».

Теоретические выводы и практические результаты исследования представлены:

- в статье, опубликованной на II Международной научно-практической конференции «Качество обучения как проблема контроля и оценки образовательной деятельности образовательных организаций (учреждений)» в г. Луганск (2022 г.) на тему: «Методика обучения теме «Пирамида и ее основные свойства» с помощью компьютерных средств в старших классах общеобразовательной школы» [15];
- в докладе, представленном на III Всероссийской научно-практической конференции «Инновационные подходы к обучению математике в школе и вузе» в г. Омск (2023 г.) на тему: «Элективный курс «Решение задач по теме «Пирамида и ее свойства» в школьном курсе математики с применением программы GEOGEBRA» [17];

– в статье журнала «Азимут научных исследований: педагогика и психология» (Том 12, № 1 2023 г.) по теме: «Некоторые аспекты технологии обучения решению задач с помощью компьютерных средств по теме: «Пирамида и ее основные свойства» [16];

– в статье, опубликованной на XIX Международной научно-практической конференции «Татищевские чтения: актуальные проблемы науки и практики» (Том 1, с. 207-210) на тему: «Использование компьютерных программ при изучении стереометрии» [14].

На защиту выносятся:

1. Методические рекомендации обучению теме «Пирамида и ее основные свойства» с помощью компьютерных технологий.
2. Система упражнений различного уровня сложности по теме «Пирамида и её основные свойства» с применением графических компьютерных программ для их решения.

Структура магистерской диссертации. Работа состоит из введения, двух глав, заключения, содержит 39 рисунков, 5 таблиц, список использованной литературы (85 источников). Основной текст работы изложен на 86 страницах.

Глава 1 Методические основы обучения теме «Пирамида и ее свойства» с помощью компьютерных программ

1.1 Основные цели и задачи обучения теме «Пирамида и ее основные свойства» в школьном курсе математики

Учащиеся используют знания о пирамиде и других пространственных фигурах, полученные из повседневной жизни, средней и начальной школы, для логической организации и систематизации темы «Пирамида и её основные свойства». При этом требования к знаниям и умениям учащихся при изучении темы «Пирамида и её основные свойства» на базовом и углубленном уровне по ФГОС различаются глубиной и объемом изучения материала (таблица 1).

Таблица 1 – Сравнение требований к знаниям и умениям учащихся при изучении темы «Пирамида и её основные свойства» по ФГОС на базовом и углубленном уровне [2]

Базовый уровень	Углубленный уровень
«формулировать определения пирамиды и других пространственных фигур и их элементов; распознавать пирамиду на моделях и чертежах, указывать их элементы, изображать различные виды пирамид; решать задачи на нахождение элементов пирамиды и других пространственных фигур; формулировать определения движения и равенства фигур в пространстве; приводить примеры равных пространственных фигур, формулировать определения центральной, осевой и зеркальной симметрий; указывать элементы симметрии пирамид, приводить примеры симметричных объектов в окружающем мире; понимать понятие объёма, формулировать его свойства» [3].	В дополнение к базовому уровню: «формулировать определения движений в пространстве; приводить примеры подобных пространственных фигур; иметь представление об ориентации плоскости и листе Мёбиуса; выполнять проекты, связанные с пирамидой, телами вращения и симметрией пространственных тел; выводить формулы объемов пирамиды, цилиндра, конуса, шара; выполнять проекты, связанные с нахождением объемов и площадей поверхности вписанных и описанных фигур» [4].

Методологической основой ФГОС СОО является «системно-деятельностный подход, который обеспечивает:

- формирование готовности обучающихся к саморазвитию и непрерывному образованию;
- проектирование и конструирование развивающей образовательной среды образовательных организаций;
- активную учебно-познавательную деятельность обучающихся;
- построение образовательной деятельности с учетом особенностей и здоровья обучающихся.

ФГОС СОО является основой для:

- разработки примерных основных образовательных программ среднего общего образования;
- разработки программ учебных предметов, курсов, учебной литературы, контрольно-измерительных материалов;
- организации образовательной деятельности в образовательных организациях, независимо от их организационно-правовых форм и подчиненности;
- проведения государственной итоговой и промежуточной аттестации обучающихся;
- построения системы внутреннего мониторинга качества образования в образовательных организациях;
- организации деятельности работы методических служб.

Один из главных этапов в разработке любых программ и образовательных технологий - это определение системы целей. Адаптация научных постулатов к процессу преподавания необходима для достижения целей обучения теме «Пирамида и её основные свойства». При изучении этой темы, цели обучения различаются в зависимости от требований к знаниям и умениям учащихся на базовом и углубленном уровнях. Рассмотрим их в таблице 2.

Таблица 2 – Сравнение целей обучения теме «Пирамида и её основные свойства» по ФГОС на базовом и углубленном уровне [2]- [4].

Базовый уровень	Углубленный уровень
<p>научить видеть примеры пирамиды и других пространственных фигур в окружающем мире;</p> <p>сформировать пространственное воображение, в том числе, умения к корректному изображению различных видов пирамид и других пространственных объектов;</p> <p>научить геометрически правильным построениям, систематизировать знания о свойствах пирамид;</p> <p>привить умения, навыки по применению вычислений объема пирамид при решении практических задач из реальной жизни</p>	<p>сформировать навыки по распознаванию в реальном мире пирамиды и других пространственных фигур и по применению их свойств для решения задач с практическим содержанием на вычисление объемов и площадей поверхности;</p> <p>сформировать понимание в необходимости проведения доказательств и логических обоснований при проведении математических преобразований при решении задач с пирамидой;</p> <p>сформировать осознание логики основных понятий, теорем, свойств и формул при изучении круглых тел и развивать навыки по их применению при решении задач на вычисление объемов и площади поверхности различных видов пирамид;</p> <p>выработать умения по проведению доказательств на каждом этапе решения задач и нахождению ответов для нестандартных задач</p>

В федеральном государственном образовательном стандарте основного общего образования [2] утверждается, что результаты изучения предметной области «Математика» должны отражать:

- «формирование представлений о математике как о методе познания действительности, позволяющем описывать и изучать реальные процессы и явления;
- развитие умений работать с учебным математическим текстом (анализировать, извлекать необходимую информацию), точно и грамотно выражать свои мысли с применением математической терминологии и символики, проводить классификации, логические обоснования, доказательства математических утверждений;
- овладение навыками устных, письменных, инструментальных вычислений;

– развитие умений применять изученные понятия, результаты, методы для решения задач практического характера и из смежных дисциплин с использованием при необходимости справочных материалов, компьютера, пользоваться оценкой и прикидкой при практических расчётах» [2].

Таким образом, основными задачами методики преподавания математики, в том числе темы «Пирамида и её основные свойства», являются [33], [41]:

- планирование конкретного содержания процесса обучения в соответствии с поставленными целями;
- выявление оптимальных методов, форм и приемов, которые в ходе обучения будут приводить к достижению поставленных целей;
- определение конкретных целей при изучении темы, в том числе, с учетом дифференцированного подхода;
- разработка рекомендаций по использованию визуально-прикладных средств в обучении, способствующих более эффективному усвоению материала и определение тех, которые необходимы в практике преподавания.

Цели и задачи обучения теме «Пирамида и её основные свойства» в школьном курсе математики определяются содержательно-методическим планированием, которое, исходя из требований ФГОС и тематического планирования по различным учебникам и пособиям для старшеклассников [7] можно изложить следующим образом:

Определение пирамиды и ее элементов:

- «основание и вершина пирамиды;
- боковые грани и ребра пирамиды;
- высота пирамиды;
- углы при вершине и двугранные углы в пирамиде;
- количество элементов в n – угольной пирамиде» [7].

Отдельные виды пирамид:

- «тетраэдр, правильный тетраэдр;
- правильная пирамида;
- пирамида с равными боковыми ребрами;
- пирамида с равными двугранными углами при основании;
- пирамида с боковыми гранями, перпендикулярными основанию» [7].

Сечения пирамиды:

- «сечения пирамиды плоскостью, параллельной основанию;
- усеченная пирамида и ее элементы;
- построение различных видов сечений;
- площадь сечения пирамиды» [7].

Площадь поверхности пирамиды:

- «площадь боковой поверхности пирамиды;
- площадь полной поверхности пирамиды;
- развертка и проекции пирамиды;
- площадь полной и боковой поверхности усеченной пирамиды» [7].

Объем пирамиды:

- «теорема и формула для объема пирамиды;
- объем тетраэдра;
- объем правильной пирамиды;
- объем усеченной пирамиды;
- отношение объемов различных пирамид» [7].

Вписанные и описанные фигуры:

- «вписанная в конус пирамида;
- описанная вокруг конуса пирамида;
- вписанная и описанная сфера;
- вписанная и описанная усеченная пирамида» [7].

Современные методы обучения требуют индивидуального подхода к ученикам. Поэтому методика обучения теме «Пирамида и ее основные

свойства» должна предоставлять возможность для наиболее подготовленных групп учеников получить глубокие знания, даже если обучение является базовым, в рамках дифференцированной системы обучения.

Приведем требования к знаниям обучающихся с учетом дифференцированного подхода в таблице 3.

Таблица 3 – Требования к знаниям обучающихся при обучении теме свойств пирамиды на базовом и углубленном уровне

Базовый уровень	Углубленный уровень
знать основные геометрические свойства, присущие пирамиде; уметь выражать и использовать взаимную зависимость геометрических параметров основных видов пирамиды; уметь вычислять объемы и площади поверхности в несложных задачах на свойства пирамиды.	уметь решать более сложные задачи на применение свойств пирамиды; иметь навыки по решению задач с усеченными, вписанными и описанными пирамидами; иметь представление о способах решения задач на комбинации пирамид и других пространственных фигур; уметь решать задачи на доказательство.

Отметим, что «в соответствии с современными концепциями дифференциация обучающихся предполагает достижение различных конечных целей, но в рамках единой программы и с использованием одних и тех же пособий. При этом, установленный минимальный объем знаний по конкретному предмету, согласно выбранного профиля обучения по государственному стандарту, должен быть достигнут» [54].

Применение дифференциации при обучении дает возможность учителю:

- оказывать необходимую поддержку ученикам в процессе изучения учебного материала;
- отслеживать уровень знаний, выявлять пробелы и помогать отстающим ученикам;
- организовывать процесс обучения, пересматривая подготовку к занятиям и их проведению;
- определять недостатки программ на разных уровнях;

- контролировать уровневые различия и своевременно корректировать знания, умения и навыки;
- в результате обучения повышать качество усвоения материала учениками и углублять его понимание.

1.2 Различные подходы к обучению теме «Пирамида и её основные свойства» в старших классах общеобразовательной школы

Обучение теме «Пирамида и её основные свойства» в старших классах общеобразовательной школы может предполагать различные подходы к изучению стереометрии [65, 68]. На начальном этапе изучения это:

- геометрический подход, когда обучающиеся изучают основные свойства пирамиды, такие как количество вершин, ребер, граней, а также ее объем и площадь основания. Происходит знакомство с различными типами пирамид (правильные, неправильные, усеченные), изучаются их особенности;
- аналитический подход, в рамках которого обучающиеся изучают пирамиду через математическое описание. Изучаются уравнения плоскостей, задающих грани пирамиды, а также уравнение плоскости, перпендикулярной основанию и проходящей через вершину пирамиды. Это позволит им вывести формулы для объема и площади поверхности пирамиды;
- исследовательский подход, когда обучающиеся самостоятельно изучают различные аспекты пирамиды, ее характеристики и математические свойства, экспериментируют с различными формами пирамиды и анализируются полученные результаты.

Для последующего этапа обучения можно изучить другие методы, изложенные в пособиях и статьях для учителей [29], [39], [48]. Вот некоторые из них:

- компьютерный подход или геометрические интерактивные моделирования, для которых используется соответствующее программное обеспечение, что облегчает обучающимся визуализировать свойства пирамиды. Здесь можно моделировать различные типы пирамид, изменяя их размеры, высоту и форму основания, а также наблюдать, как эти изменения влияют на её свойства, например, объём и площадь поверхности;
- задачи в игровой форме, когда обучающиеся работают группами, чтобы решать задачи на вычисление объёма, площади поверхности и других характерных размеров пирамиды. Игры, как, например, конкурс на самую высокую пирамиду из картона заданного фиксированного размера также помогают визуализировать концепцию пирамиды и её свойства;
- рассказы из истории об исследовании фигуры пирамида, когда обучающиеся получают информацию об использовании пирамиды в различных культурах и областях жизни, от Древнего Египта до современной архитектуры. Это поможет обучающимся понять, что пирамиды – это не только абстрактные геометрические формы, но и часть культурного наследия;
- сопоставление с другими геометрическими фигурами, когда обучающиеся изучают взаимное расположение полностью или частично вписанных/описанных фигур, многогранников, тел вращения, усеченных фигур. Происходит сопоставление с другими геометрическими фигурами, изучаются их сходства и различия;
- реализация практических проектов, когда обучающиеся создают пирамиду из различных материалов, таких как глина, пластилин, дерево или картон. Это помогает понять, какая форма лучше всего подходит для конкретных задач и какие свойства формы пирамиды могут быть использованы для практических целей.

Каждый из этих подходов может быть эффективен при обучении теме «Пирамида и её основные свойства». Важно выбрать подход, который наилучшим образом соответствует целям обучения в зависимости от уровня подготовки учеников, а также соответствии с выбранным общеобразовательной школой вектором учебно-методических комплексов.

Вместе с тем, представляется целесообразным комбинированное использование всех этих подходов при изучении пирамиды и ее свойств. Такой подход предлагается в ряде учебных материалов [10]. При этом визуальное моделирование задач на пирамиду и ее свойства с применением компьютерных программ представляется наиболее важным [45].

Приведем некоторые задачи по теме данной работы в систематизированном виде:

– на построение пирамиды:

Задача 1. «Постройте трехмерную пирамиду с прямоугольным основанием ABCD. Вершина пирамиды S находится выше точки O, которая является центром квадрата ABCD. Длина ребра пирамиды равна 4см, а стороны основания квадрата ABCD равны 3 см» [70].

– на подобие пирамид:

Задача 2. «Дана пирамида с высотой 6м. Если масштабировать все ее размеры в 3 раза, то какая будет новая высота пирамиды? Как изменятся объем и площадь поверхности пирамиды» [73].

– на нахождение высоты пирамиды:

Задача 3. «В правильной пирамиде с квадратным основанием длиной стороны 4см, боковое ребро равно 5см. Найдите высоту пирамиды» [73].

– на угол наклона грани пирамиды:

Задача 4. «В прямоугольной пирамиде угол между боковой гранью и основанием составляет 30° . Найдите угол между этой боковой гранью и высотой пирамиды» [73].

– о вычислении объема пирамиды:

Задача 5. «Найдите объем правильной пирамиды, у которой площадь основания равна 36 кв.см., а высота равна 12 см» [73].

– на площадь поверхности пирамиды:

Задача 6. «Найдите площадь поверхности пирамиды с основанием в виде правильного треугольника со стороной 8см и всеми боковыми ребрами равными 5 см» [73].

1.3 Анализ учебных пособий по геометрии для учащихся старших классов общеобразовательной школы

Проанализируем материал по теме «Пирамида и её основные свойства» на примере ряда учебных пособий, предназначенных для 10-11 классов общеобразовательной школы.

Учебник по геометрии для 10-11 классов (Погорелов А.В., [40]).

В п.47 параграфа 5 вводится понятие пирамиды, как «многогранника, который состоит из плоского многоугольника - основания пирамиды и точки, не лежащей в плоскости основания – вершины пирамиды и всех отрезков, соединяющих вершину пирамиды с точками основания» [40].

Здесь же даны определения основных элементов пирамиды.

Следующий п.48 посвящен «построению пирамиды и ее плоских сечений» [40]. Рассмотрены все основные виды сечений при различном их расположении.

В п.49 достаточно подробно рассмотрена усеченная пирамида, разобрана типовая задача.

Следующий п.50 полностью посвящен правильной пирамиде. Подробно изложена теорема о площади основной поверхности пирамиды. Разобрана задача на доказательство о площади боковой поверхности усеченной пирамиды.

В конце §5 данного учебника [40] даны задачи к п.п. 47-50, касающиеся пирамид. Приведем некоторые из них.

Задача 7 (к п.47). «Основание пирамиды – прямоугольник со сторонами 6 см и 8см. Каждое боковое ребро пирамиды равно 13 см. Вычислите высоту пирамиды» [40], рисунок 1.

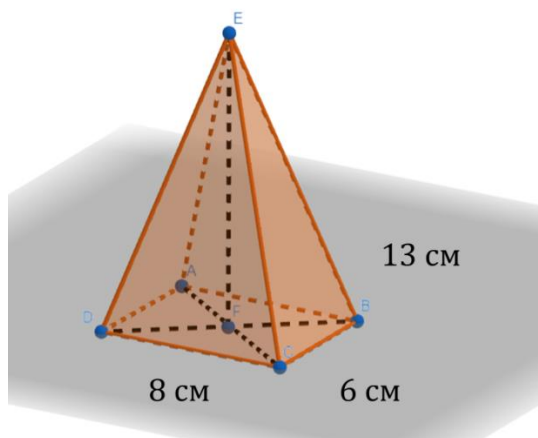


Рисунок 1 – Пирамида к задаче 7

Задача 8 (к п.48). «Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через вершину пирамиды и две данные точки на ее основании» [40], рисунок 2.

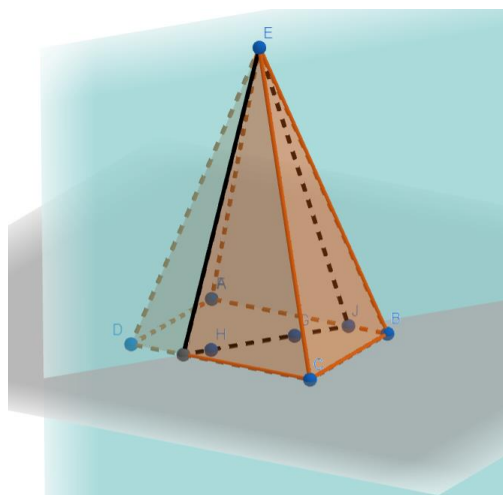


Рисунок 2 – Сечение пирамиды к задаче 8

Задача 9 (к п.49). «У четырехугольной усеченной пирамиды стороны одного основания равны 6см, 7см, 8см,9см, а меньшая сторона другого

основания равна 5 см. Найдите остальные стороны этого основания» [40], рисунок 3.

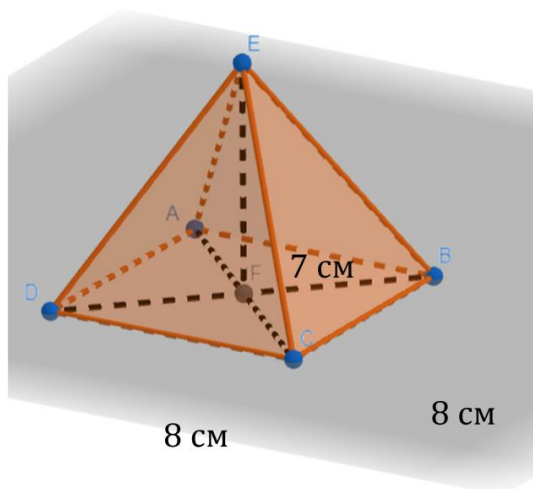


Рисунок 3 – Пирамида к задаче 9

Задача 10 (к п.50). «Высота правильной четырехугольной пирамиды равна 7 см, а сторона основания 8 см. Найти боковое ребро» [40], рисунок 4.

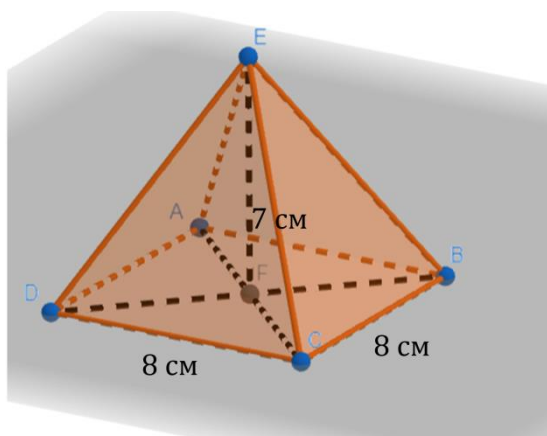


Рисунок 4 – Пирамиды к задаче 10

Можно подчеркнуть, что в данном учебнике материал излагается в четком и компактном стиле. Контрольные вопросы охватывают весь теоретический материал, причем, эти вопросы можно сгруппировать, учитывая различный уровень подготовки учащихся. В учебнике приведены разнообразные задачи как для базового, так и для углубленного уровня.

Учебник по геометрии для 10-11 классов (Александров А.Д., [8]).

В данном учебнике глава IV посвящена многогранникам и в ее §22 рассматривается пирамида. Изначально, определение пирамиды дано во введении учебника как «многогранника, у которого одна грань – какой-либо многоугольник, а остальные грани – треугольники с общей вершиной» [8]. Здесь же вводятся понятия тетраэдра и правильной пирамиды.

В п.22.1 вводится понятие пирамиды, как частного случая конуса с основанием в виде многоугольника. Здесь же даны определения поверхности пирамиды, усеченной пирамиды. В п.22.2 рассмотрена правильная пирамида и приводится доказательство теоремы о правильной пирамиде.

Приведем образцы задач на пирамиду и ее свойства, которые даны в конце §22.

Задача 11 (к §22). «Сколько вершин, ребер и граней имеет:

- а) n –угольная пирамида,
- б) n –угольная усеченная пирамида» [8].

Задача 12 (к §22). «Нарисуйте проекцию правильной треугольной пирамиды на плоскость:

- а) основания,
- б) проходящую через боковое ребро и высоту» [8], рисунок 5.

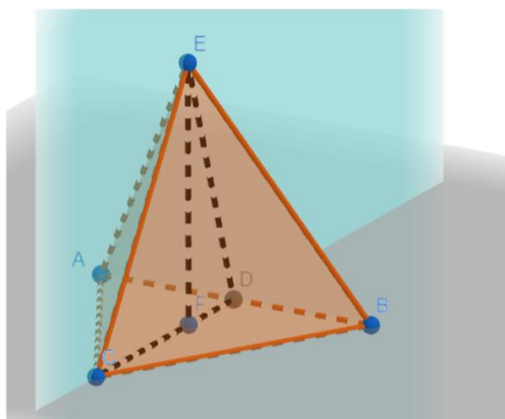


Рисунок 5 – Пирамида к задаче 12

В конце §27 приведены задачи на объем пирамиды.

Задача 13 (к §27). «Вычислите наибольшее значение объема тетраэдра, у которого:

- а) пять ребер раны 1,
 б) четыре ребра равны 1» [8], рисунок 6.

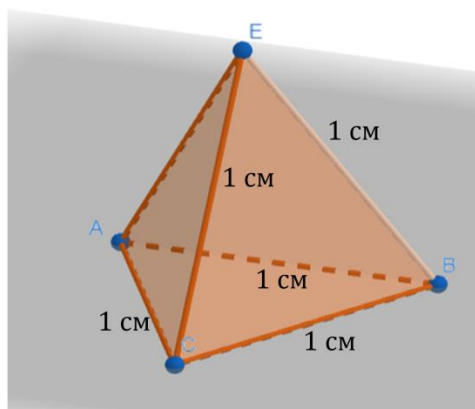


Рисунок 6 – Пирамида к п.1 задачи 13

Задача 14 (к § 27). «Боковое ребро правильной треугольной пирамиды равно 1. В каких границах лежит ее объем?» [8].

В конце §28 приведены задачи на площадь поверхности пирамиды.

Задача 15 (к §28). «Объем правильной треугольной пирамиды равен $4\sqrt{3}$. Какой угол φ составляет боковая грань с основанием, когда площадь боковой поверхности наименьшая» [8], рисунок 7.

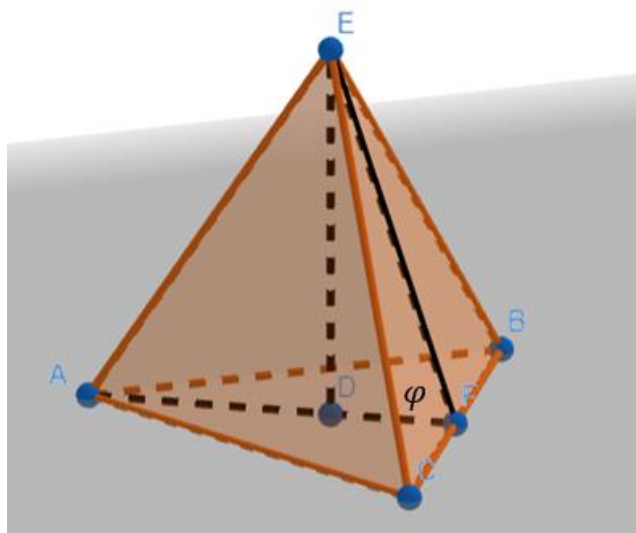


Рисунок 7 – Пирамида к задаче 15

В данном учебнике в программе 10 класса вводятся понятия пирамиды, правильной пирамиды и способы их построения. В программе 11 класса

пирамида рассматривается как частный случай конуса, доказывается теорема о правильной пирамиде. Полезная информация о правильных пирамидах содержится и в разделе о правильных многогранниках.

В учебнике в систематизированном виде приведены разнообразные задачи, рассчитанные как на базовый, так и на углубленный уровень обучения.

Учебник по геометрии для 10-11 классов (Смирнова И.М., Смирнов В.А. [53]).

В учебнике [53] понятие пирамиды вводится в §3 и определяется как «многогранник, поверхность которого состоит из многоугольника, называемого основанием пирамиды, и треугольников, имеющих общую вершину, называемых боковыми гранями пирамиды» [53]. Здесь же вводится понятие элементов пирамиды и правильной пирамиды.

В главе IV приводятся основные свойства выпуклых многогранников и даны соответствующие задачи.

Задача 16 (к §25). «Может ли выпуклая пирамида иметь:

- а) 2 боковые грани,
- б) 3 боковые грани, перпендикулярные ее основанию» [53], рисунок 8.

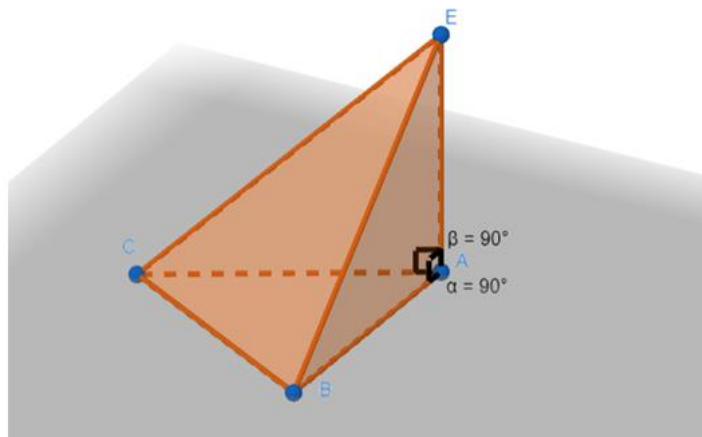


Рисунок 8 – Пирамида к п.1 задачи 16

Глава VI учебника [53] посвящена объему и площади поверхности многогранников, в том числе, пирамиды (§45 и §48). Приведены основные соотношения и доказана теорема об объеме пирамиды. Данный учебник

является двухуровневым, что позволяет для базового уровня ввести уровневую дифференциацию, частично используя материал для профильного уровня. Помимо стандартного материала, «в качестве дополнительного в учебник включен материал научно-популярного и прикладного характера, а также помещены нестандартные и исследовательские задачи, исторические сведения» [53]. Большое внимание уделено использованию средств наглядности.

Задача 17 (к §45). «Найдите объем правильной треугольной пирамиды, если длина каждого его бокового ребра равна b , а плоские углы при вершине равны 60° , 90° и 90° » [53], рисунок 9.

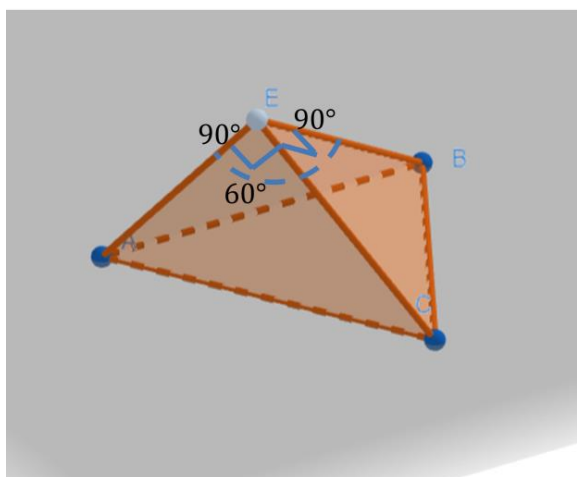


Рисунок 9. Пирамида к задаче 17

Задача 18 (к §45). «Чему равно ребро наибольшего тетраэдра, который можно поместить в куб с ребром 1 дм.» [53].

Учебное пособие для учащихся старших классов и абитуриентов: «Стереометрия. Геометрия в пространстве» [9].

Данное учебное пособие содержит теоретический материал по стереометрии и, частично, по планиметрии в рамках курса средней школы, в том числе, раздел, посвященный пирамидам и многогранникам. Основные определения и теоремы повторяют материал, изложенный в учебнике [8].

В задачах к §9 основное внимание уделено усложненным задачам и разобраны большое количество типовых задач.

Задача 19 (к §9). «Известны длины ребер тетраэдра. Как найти его высоту?» [8].

Задача 20 (к §9). «Найти радиус шара, вписанного в правильную n – угольную пирамиду, зная сторону a основания и плоский угол φ при вершине» [8].

Задачи для самостоятельного решения к §9 имеют подразделы:

– «дополняем теорию».

Задача 21.

«Докажите, что около правильной пирамиды можно описать сферу» [9].

– «рисуем».

Задача 22. «Нарисуйте правильную усеченную пирамиду: а) треугольную, б) четырехугольную» [9].

– «планируем».

Задача 23. «В правильной n – угольной усеченной пирамиде известны стороны оснований и боковое ребро. Как вычислить высоту пирамиды?» [9].

– «представляем».

Задача 24. «Какие элементы симметрии можно найти в правильной усеченной пирамиде?» [9].

– «оцениваем».

Задача 25. «В какой правильной пирамиде достигает граничных значений двугранный угол между соседними боковыми гранями? Обобщите полученный результат» [9].

– «сделаем».

Задача 26. «В тетраэдре проведены отрезки, соединяющие его вершины с точками пересечения медиан противоположных граней. Докажите, что эти отрезки имеют общую точку. В каком отношении они делятся этой точкой?» [9].

– «исследуем».

Задача 27. «В основании пирамиды – квадрат. Вершина пирамиды проектируется в центр основания, а два боковых ребра равны и . Можно ли найти два других ребра пирамиды?» [9].

– «поступаем в ВУЗ».

Задача 28. «Боковые ребра тетраэдра взаимно перпендикулярны. Высота тетраэдра равна h . Найдите радиус сферы, описанной около тетраэдра» [9].

– «переключаемся».

Задача 29. «В одном задачнике по геометрии было написано, что не существует четырехугольной пирамиды, у которой противоположные грани перпендикулярны основанию. Опровергните это утверждение» [9].

Практический материал по темам на вычисление объема и площади поверхности пирамиды (§11, §12, §16) также содержит большое количество подробно разобранных задач и задач для самостоятельного решения; предлагаются структурированные задачи, в том числе, которые предлагались на вступительных экзаменах разного уровня сложности.

В сборнике задач по математике для поступающих во ВТУЗы под редакцией М.И. Сканави [74] в компактном виде представлены как все основные формулы стереометрии, в том числе, дополнительные соотношения между элементами пирамиды. Разобраны практически все типы задач (главы 11, 12), иллюстрирующие основы стереометрии, задачи для пирамид, правильных и усеченных пирамид, многогранников, включая вписанные и описанные фигуры. Задачи разбиты на три уровня сложности, что делает их доступными для обучающихся с различным уровнем подготовки.

Отдельное место уделено дополнительным задачам по стереометрии с использованием начал анализа. Приведем задачи трех разных уровней:

Задача 30. (Группа А, гл.11, [74]) «Найти объем правильного тетраэдра с ребром равным 3» [74].

Задача 31. (Группа Б, гл.11, [74]) «Найти объем правильной четырехугольной пирамиды со стороной основания равной a и плоскими

углами при вершине, равными углам наклона боковых ребер к основанию» [74].

Задача 32. (Группа В, гл.11, [74]) «Через точку, делящую ребро правильного тетраэдра в отношении 1:4, проведена плоскость, перпендикулярная этому ребру. Найти отношение объемов полученных частей пирамиды» [74], рисунок 10.

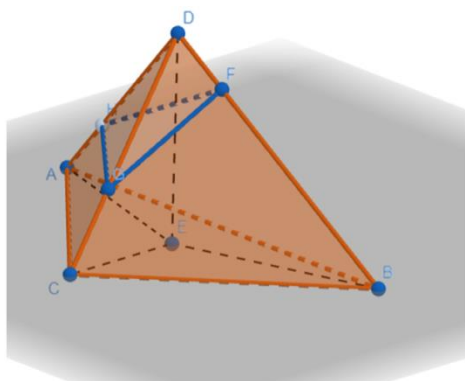


Рисунок 10 – Сечение пирамиды к задаче 32

Приведем задачу из главы 15, [74] на применение начал анализа.

Задача 33. (Группа В, гл.11, [74]) «Боковое ребро правильной треугольной пирамиды имеет постоянную заданную длину и составляет с плоскостью основания угол α . При каком значении α объем пирамиды является наибольшим» [74], рисунок 11.

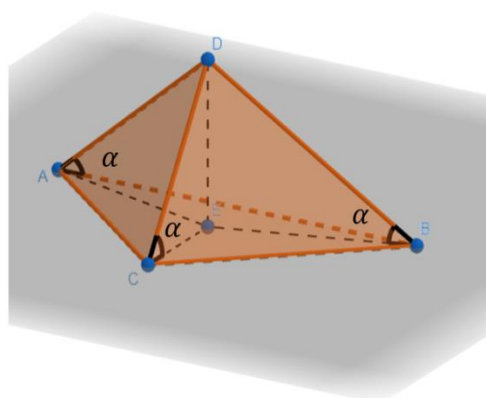


Рисунок 11 – Правильная треугольная пирамида к задаче 33

1.4 Особенности обучения решению задач по теме «Пирамида и ее основные свойства» с помощью компьютерных средств в старших классах общеобразовательной школы

Нами установлено, что «проблему повышения уровня преподавания по теме «Пирамида и ее основные свойства» с помощью компьютерных средств предлагается решать исходя из алгоритма исследования задач по стереометрии, сложность и громоздкость которых определяется в соответствии с уровневой и/или профильной дифференциацией обучающихся:

- изобразить с помощью компьютерных средств чертеж пирамиды, ее проекций, соответствующие поставленной задаче;
- переосмыслить содержание поставленной проблемы, изобразить то, что требуется найти или построить;
- показать исходные данные и определить схему решения, ключевые этапы, расписать соответствующий план и алгоритм;
- внести коррективы по итогам самостоятельного переосмысления задачи;
- увязать исходные данные задачи и конечную цель, определить их взаимосвязь;
- определить логическую цепочку, последовательно приводящую к требуемому результату;
- выделить элементы решения задачи, которые опираются на основные свойства пирамид, и те элементы, которые следует определить, вывести или доказать, опираясь на следствия из известных теорем и аксиом стереометрии;
- записать выявленные закономерности в форме уравнений, формул и других соотношений между параметрами задачи, либо произвести соответствующие вспомогательные компьютерные построения» [16];

- «соотнести количество неизвестных параметров с количеством уже вычисленных или найденных, построенных закономерностей, и, при их недостаточности, записать дополнительные соотношения, чтобы обеспечить количественное совпадение;
 - определить количество вспомогательных построений, найти необходимые точки и прямые соответствующих сечений (при решении задач на сечения пирамид);
 - решить полученные уравнения и вычислить требуемые неизвестные.
- В задачах на построение, сделать соответствующие компьютерные чертежи;
- проверить и проанализировать полученные результаты, с помощью логических рассуждений от конца задачи к исходным данным, когда это представляется возможным» [16].

Проиллюстрируем на конкретных примерах использование компьютерных средств при решении задач.

Задача 34. «Дана треугольная пирамида $DABC$, причем $DA \perp AB \perp AC$, $|DA| = |AB| = |AC| = 5$. Найти высоту пирамиды, проведенную к грани DBC » [6], рисунок 12.

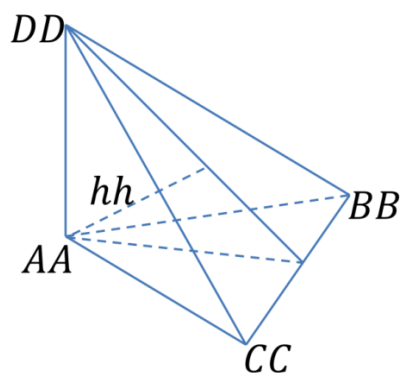


Рисунок 12 – Пирамида к задаче 34

Решение.

Объем данной пирамиды равен:

$$V = \frac{1}{3} |DA| \cdot S_{ABC} = \frac{1}{3} \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot 5^2 = \frac{125}{6}$$

Рассматривая треугольники DAB, DAC и ABC находим: $|DB| = |DC| =$
 $= |BC| = 5\sqrt{2}$

Соответственно: $\triangle DBC$ – равносторонний и

$$S_{DBC} = a^2 \frac{\sqrt{3}}{4} = (5\sqrt{2})^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{25}{2} \sqrt{3}$$

Учитывая, что $V = \frac{1}{3} \cdot h \cdot S_{DBC}$ искомая высота равна:

$$h = \frac{3V}{S_{DBC}} = \frac{3 \cdot \frac{125}{6}}{\frac{25}{2} \sqrt{3}} = \frac{5}{\sqrt{3}}$$

Приведем решение задачи с помощью компьютерной программы «Geogebra», находящейся в свободном доступе (рисунок 13).

Шаг 1. Совмещаем начало координат с точкой A и оси x, y с (AB) и (AC) .

Шаг 2. Изображаем плоскость боковой грани (BCD) («Plane»).

Шаг 3. Строим перпендикуляр l к (BCD) проходящей через A ("Perpendicular Line").

Шаг 4. Находим пересечение $E = l \cap (BCD)$ («Intersect»).

Шаг 5. Вычисляем расстояние AE :

$$|AE| = 5/\sqrt{3} \approx 2,89$$

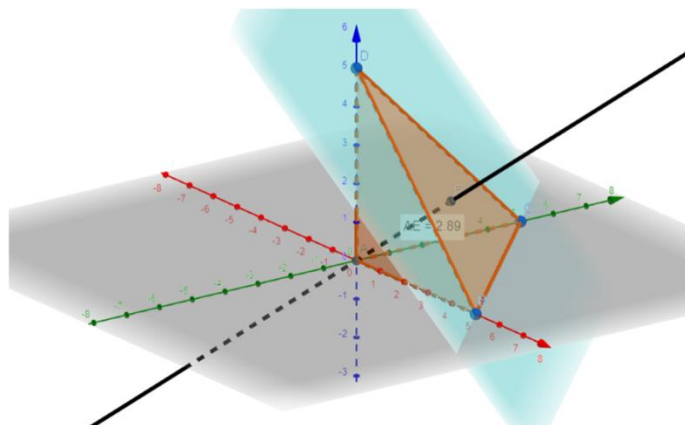


Рисунок 13 – Сечение пирамида к задаче 34

Задача 35. «Дана правильная четырехугольная пирамида $ABCDE$, сторона основания которого равна 4, а высота 6. Найти расстояние от вершины C до бокового ребра AE » [58].

Решение. Рассмотрим осевое сечение пирамиды – равнобедренный $\triangle AEC$.

По условию задачи: $|AC| = a\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$

Тогда, боковое ребро равно:

$$|AE| = \sqrt{|AO|^2 + h^2} = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + 6^2} = 2\sqrt{11}.$$

Площадь $\triangle AEC$ равна: $S = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{2} \cdot 6 = 12\sqrt{2}$.

С другой стороны: $S = \frac{1}{2} \cdot d \cdot AE = d\sqrt{11}$.

Получаем: $d\sqrt{11} = 12\sqrt{2}$, $d = 12\sqrt{2/11}$.

В программе «Geogebra» изображаем правильную четырехугольную пирамиду совместив оси x, y с AD и AB соответственно (рисунок 14). Затем:

Шаг 1. Проводим прямую l через C перпендикулярно (AE) ("Perpendicular Line").

Шаг 2. Строим пересечение: $F = l \cap (AE)$ ("Intersect")

Шаг 3. Находим расстояние $|CF| = 12\sqrt{2/11} \approx 5,12$.

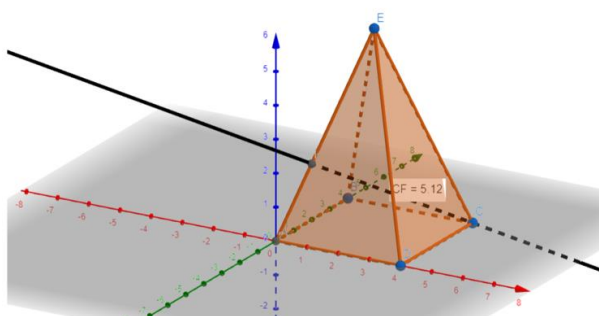


Рисунок 14 – Пирамида к задаче 35

Задачи, аналогичные рассмотренным по структуре и учитывающие основные позиции рассматриваемой темы, являются хорошим стимулом для

достижения целей формирования мотивации к учебно-познавательной деятельности [22], [24], [28].

Выводы по первой главе

Таким образом, в первой главе были рассмотрены основные цели и задачи обучения теме «Пирамида и её основные свойства» в школьном курсе математики, а также различные подходы к изучению этой темы в старших классах общеобразовательной школы.

Проанализирована нормативная база, которая регулирует организацию обучения математике (геометрии) в общеобразовательной школе. Проведен сравнительный анализ учебных пособий по геометрии для обучающихся в старшей школе и приведены предлагаемые в них задачи.

Изложены теоретико-методологические основы обучения решению задач по теме «Пирамида и её основные свойства» с помощью компьютерных средств в старших классах общеобразовательных учебных заведений.

Приведенный материал проиллюстрирован задачами и приведены некоторые решения с применением компьютерных программ. На основании изложенного предлагается алгоритм исследования и решения задач по стереометрии с наглядным использованием компьютерных программ.

В результате использования компьютерных программ при изучении стереометрии, ученики получают более глубокое понимание объемных фигур, развивают пространственное мышление и визуализацию, лучше запоминают свойства пирамиды и могут решать более сложные задачи. Кроме того, использование компьютерных программ способствует развитию компьютерной грамотности и геометрической зоркости. Также компьютерные программы могут быть полезны тем ученикам, которые пытаются найти более интересные и эффективные способы изучения стереометрии.

Таким образом, можно предположить, что методические основы обучения теме «Пирамида и её свойства» с использованием компьютерных

программ в старших классах общеобразовательной школы могут быть следующими:

- использование визуализации. Компьютерные программы могут помочь школьникам увидеть пирамиду в 3D-формате и легче понять ее свойства, чтобы рассмотреть пирамиду со всех сторон и в различных проекциях;
- интерактивные задания. Компьютерные программы могут предоставить ученикам возможность выполнять интерактивные задания, которые помогут им научиться применять свойства пирамиды на практике. Например, программа Geogebra может предоставить задания на построение пирамиды с заданными свойствами;
- программы для расчетов. Компьютерные программы могут помочь ученикам рассчитывать площадь поверхности и объем пирамиды, вычислить углы, высоты и многое другое;
- интерактивные лекции. Можно провести интерактивные лекции на тему свойств пирамиды с помощью презентации Power Point. Варианты заданий, вопросы и ответы и другие интерактивные визуальные элементы могут помочь школьникам лучше понять материал;
- групповые проекты. Можно разделить класс на группы и поставить каждой группе задачу на создание 3D-модели или презентации на тему свойств пирамиды. Это поможет ученикам развить навыки работы в команде и научиться более эффективно применять знания о пирамиде на практике.

Глава 2 Практическая реализация методики обучения теме «Пирамида и ее свойства» с помощью компьютерных программ

2.1 Система упражнений по теме «Пирамида и её основные свойства»

Задачи – «основное средство развития пространственного мышления, творческой деятельности школьников, в процессе решения задач формируется не только логическая, эвристическая, алгоритмическая составляющие мышления, но и многие нравственные качества учащихся» [52].

В настоящее время в учебных пособиях по методике обучения математике роль и место задач в обучении несколько занижены. Так, «задачи (упражнения) при формировании понятий призваны: способствовать мотивации введения понятия; выявлять существенные свойства понятия; способствовать усвоению терминологии, символики, пониманию смысла каждого слова в определении, запоминанию определения, овладению объемом понятия; раскрывать взаимосвязи понятия с другими понятиями; обучать применению понятия. Выполнение упражнений должно обеспечить овладение умениями распознавать объекты, принадлежащие понятию, выводить следствия из принадлежности объекта понятию, переходить от определения понятия к его признакам, переосмысливать объекты с точки зрения других понятий» [52].

Система задач по геометрии по теме «Пирамида, ее виды и свойства» предназначена для решения задач, связанных с геометрическим телом в форме пирамиды. Система должна включать в себя примеры задач на вычисление объема и площади поверхности пирамиды, нахождение высоты, боковых ребер, биссектрисы и площади основания, углов между ребрами, а также решение задач, связанных с различными геометрическими фигурами, вписанными в пирамиду.

Система задач, конструируемая для изучения свойств пирамиды на учебных занятиях с применением компьютерных средств, предполагает соответствие нескольким принципам:

- принцип связи практических задач с теоретическим материалом, когда решение задач с применением компьютерных программ является как логическим следствием теоретических знаний, так и средством для полноценного визуального восприятия нового материала;
- преемственность, когда новые задачи можно решать с помощью новых знаний и навыков, а также используя взаимосвязь компьютерных программ с основным курсом;
- принцип полноты системы задач, при котором в цепочках задач отражаются все возможности по применению компьютерных средств для изучения как основного материала, так и дополнительных сведений межпредметного характера;
- принцип контрастности, когда компьютерные средства визуализируют положительный ответ одних задач и отрицательный ответ других задач;
- система задач подразумевает применение компьютерных программ для обучения эвристическим приемам, когда методы познания усваиваются в процессе решения задач;
- принцип формирования исследовательских умений, под которыми понимают вид учебно-познавательной деятельности, предполагающий выполнение учебных заданий с помощью самостоятельного творческого поиска новых знаний.

Система задач Саранцева Г.И. является методикой решения математических задач с целью улучшения математической подготовки [49].
Подход к системе задач Саранцева Г.И. основан на следующих принципах [52]:

- разнообразие типов задач, позволяя обучающимся отработать навыки решения разнообразных математических проблем;

- постепенное усложнение задач в рамках каждого типа. Это позволяет развивать свои навыки постепенно, начиная с простых задач и постепенно переходя к более сложным;
- упор на логику и алгоритмическое мышление. Задачи формулируются таким образом, чтобы требовать от обучающихся анализа, построения логических цепочек и разработки алгоритмов решения;
- активное использование средств для визуализации математических проблем. Это помогает лучше понимать и анализировать задачу и находить решение;
- применение математических моделей для анализа сложных задач и построения оптимальных решений. Это развивает навыки моделирования и абстрактного мышления.

Упражнения, предложенные в системе задач по теме «Пирамида, ее виды и свойства» составлены с учетом дифференциации. Это позволяет учитывать уровень подготовки школьника и предоставлять ему задачи разной сложности, начиная от простых задач на вычисление объема пирамиды до более сложных задач на нахождение площади боковой поверхности, радиусов вписанной и описанной сфер и других параметров. Для начинающих учеников задачи могут быть сопровождены иллюстрациями или видео-уроками для лучшего понимания материала. Для продвинутых учеников могут быть предложены более сложные задачи на решение пирамиды с более сложными параметрами.

Кроме того, в систему задач по геометрии по теме «Пирамида» для обучающихся также могут быть включены задачи на построение пирамиды по заданным параметрам различного уровня сложности для каждого типа задачи, что позволяет ученикам выбрать наиболее подходящий уровень и перейти к более сложным задачам по мере освоения материала. Данный подход к обучению позволяет ученикам лучше понять принципы и основы построения пирамид и усвоить материал более полно.

Взаимодействие в системе может быть ориентировано на персональную работу каждого ученика, что позволит каждому работать в своем собственном темпе и сосредоточиться на тех задачах, которые он считает наиболее сложными. Кроме того, система может быть дополнена групповой работой, где ученики смогут задавать вопросы по решению задач и получать ответы от других учеников или учителя по математике.

Все это позволит ученикам легко и удобно изучать материал и получать ответы на свои вопросы, что в свою очередь поможет им глубже понимать тему и эффективно готовиться к экзаменам.

Кроме того, в систему задач могут быть включены методические материалы, которые помогают учителю лучше объяснить теорию, дать рекомендации по выбору задач для конкретных учеников и подготовиться к проведению урока.

Решение базовых задач по теме «Пирамида, ее виды и свойства» является необходимым этапом в учебном процессе, который способствует обучению учащихся основным знаниям, развитию навыков решения задач, а также повышению самоуважения и мотивации к учебе.

Решение базовых задач для учеников всех уровней подготовки по стереометрии имеет многочисленные положительные стороны:

- помогает ученику усвоить основные знания в конкретной области сформировать полноценное представление о теме;
- развивает у школьника логическое и аналитическое мышление, умение находить решения проблем;
- создает базу для решения сложных более сложных задач;
- помогает ученику повысить уровень самоуверенности и уверенности в своих знаниях;
- увеличивает мотивацию учеников к обучению;
- дает возможность ученику увидеть свои ошибки и научиться их исправлять.

Рассмотрим несколько задач базового уровня, решение которых поможет определить уровень подготовки ученика и спрогнозировать дальнейшую программу обучения по геометрии.

Задача 36. «Найдите площадь поверхности правильной четырехугольной пирамиды, стороны основания которой равны 6 и высота равна 4» [73], рисунок 15.

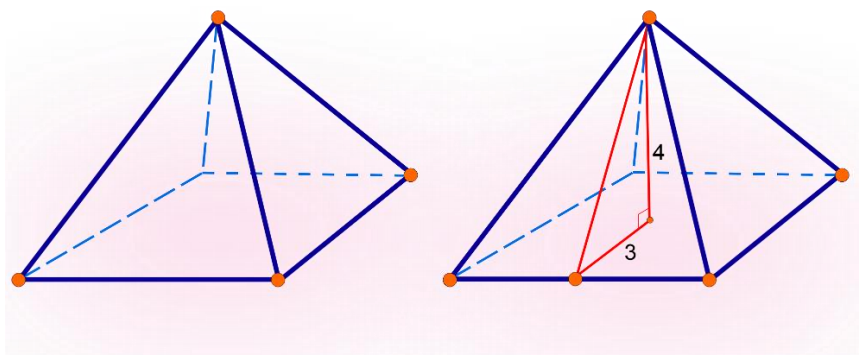


Рисунок 15 – Пирамида к задаче 36

Задача 37. «Стороны основания правильной шестиугольной пирамиды равны 10, боковые ребра равны 13. Найдите площадь боковой поверхности этой пирамиды» [73], рисунок 16.

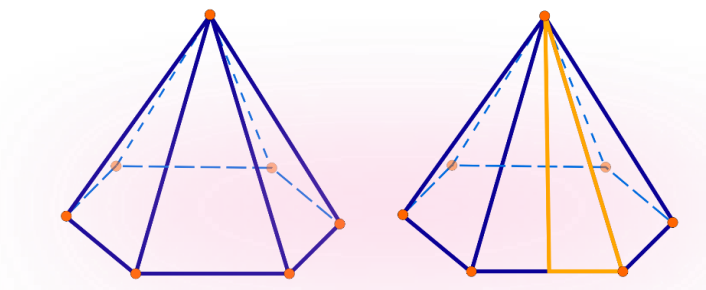


Рисунок 16 – Пирамида по условию задачи 37

Площадь боковой поверхности правильной пирамиды равна половине произведения периметр основания на апофему. Апофему найдем по теореме Пифагора как катет прямоугольного треугольника, гипотенуза которого –

боковое ребро, а другой катет – половина стороны основания:

$h = \sqrt{13^2 - 15^2} = 12$. Тогда площадь боковой поверхности:

$$S = \frac{1}{2}Ph = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 6 \cdot 12 = 360.$$

Задача 38. «Найти объем пирамиды $SABC$, если $SA=BC=8$, $AB=SB=SC=17$, $AC=15$ » [73], рисунок 17.

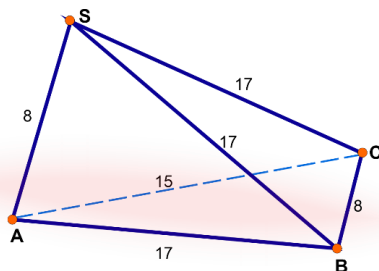


Рисунок 17 – Пирамида к задаче 38

Для решения отметим, что $17^2 = 15^2 + 8^2$, отсюда применяя теорему, обратную теореме Пифагора, к треугольникам ABC и ASC , можно заключить, что $\angle ACB = \angle SAC = 90^\circ$. Так как $AC \perp AS$, то основание O высоты пирамиды SO лежит на перпендикуляре, восстановленном (к плоскости треугольника ABC) в точку A к стороне AC (см. утверждение 5). Далее, так как $SB=SC$, то $t.O$ лежит на перпендикуляре, проведенном (в плоскости треугольника ABC) через середину K отрезка BC (см. утверждение 2).

Следовательно, $ACKO$ – прямоугольник. Теперь из прямоугольного треугольника SOA находим высоту пирамиды:

$$SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{SA^2 - \left(\frac{1}{2}BC\right)^2} = 4\sqrt{3}, \quad \text{после чего легко}$$

определяется объем пирамиды: $V_{SABC} = 80\sqrt{3}$.

Задачи среднего уровня подготовки по теме «Пирамида, ее виды и свойства» необходимы для того, чтобы ученики смогли закрепить свои знания и умения в данной теме, а также для того, чтобы применять их на практике. Подобные задачи помогают развивать логическое и абстрактное мышление, а также улучшают навыки решения задач. В том числе, задачи среднего уровня

помогают ученикам научиться правильному использованию формул для вычисления площади и объема пирамиды, а также ее построению. Таким образом, задачи среднего уровня сложности являются неотъемлемым элементом учебного процесса, который помогает ученикам лучше усвоить материал и подготовиться к последующим более сложным задачам и темам [5]. Рассмотрим несколько задач, предложенных для учеников среднего уровня подготовки. Все рисунки к данным задачам изображены с использованием компьютерных программ.

Задача 39. «В треугольной пирамиде $SABC$ боковые ребра SB и SC равны между собой, а углы наклона боковых граней ASB и ASC к плоскости основания равны. Определить объем пирамиды, если $AB=15$, $BC=14$, $AC=13$, $AS=18$ » [67], рисунок 18.

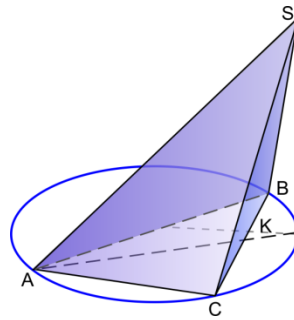


Рисунок 18 – Пирамида к задаче 39

Основание O высоты SO будет точкой пересечения перпендикуляра, восстановленного к стороне BC в ее середине, и биссектрисы AO угла BAC . Поскольку $AB \neq AC$, эти прямые пересекаются в единственной точке, являющейся серединой дуги BC окружности, описанной вокруг треугольника BAC . Далее находим $S_{\Delta ABC} = 84$ (по формуле Герона) и $R_{\Delta ABC} = \frac{abc}{4S} = \frac{65}{8}$.

$$\text{Отсюда } OK = r - \sqrt{R^2 - KC^2} = 4, OC^2 = OK^2 + KS^2 = 65,$$

$$\sin \angle OAC = \sin \angle OCK = \frac{OK}{OC} = \frac{4}{\sqrt{65}}, \cos \angle OAC = \frac{7}{\sqrt{65}}, \text{ и по теореме}$$

косинусов из ΔAOC находим AO : $AO = 2\sqrt{65}$.

$$\text{Теперь } OS = \sqrt{AS^2 - AO^2} = 8, V_{SABC} = \frac{1}{3} \cdot 84 \cdot 8 = 224.$$

Задача 40. «В основании пирамиды лежит равнобедренный треугольник с боковой стороной a и углом при вершине α . Боковое ребро, исходящее из вершины угла α , образует с плоскостью основания также угол α . Определить объем пирамиды, если ее скрещивающиеся ребра перпендикулярны» [73], рисунок 19.

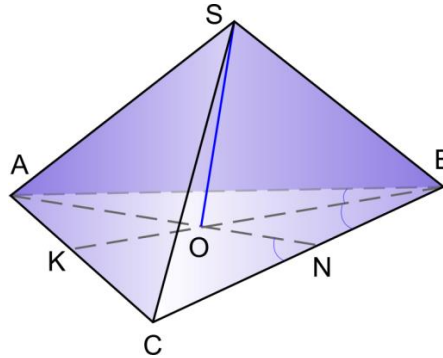


Рисунок 19 – Пирамида к задаче 40

Вершина S пирамиды проектируется на плоскость основания в точку пересечения высот треугольника ABC . Легко найти площадь треугольника

ABC : $S = \frac{1}{2} a^2 \sin \alpha$. Далее, из $\triangle ABK$ находим: $\frac{AK}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{a \cos \alpha}{\cos \frac{\alpha}{2}}$,

и из $\triangle AOK$: $OS = AO \cdot \operatorname{tg} \alpha = 2a \sin \frac{\alpha}{2}$, откуда $V_{SABC} = \frac{1}{3} a^3 \sin \alpha \cdot \sin \frac{\alpha}{2}$.

Задача 41. «В пирамиде $SABC$ ребра AS и BC взаимно перпендикулярны, а углы наклона боковых граней ASB и BSC к плоскости основания равны между собой. Определить объем пирамиды, если $AB=15$, $AC=13$, $BC=14$, $SB=10,5$ » [31], рисунок 20.

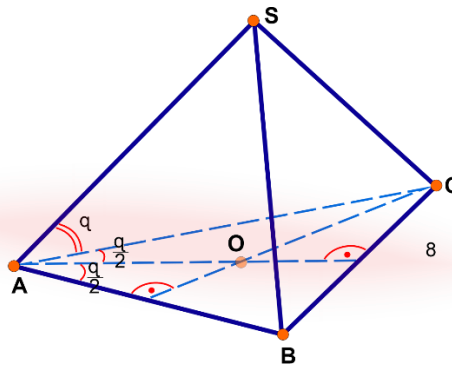


Рисунок 20 – Пирамида к задаче 41

Так как $AC \perp BC$, то основание O , высоты пирамиды SO лежит на высоте AN треугольника ABC . Поскольку грани ASB и BSC одинаково наклонены к плоскости ABC , то согласно утверждению «Если две смежные боковые грани пирамиды одинаково наклонены к плоскости основания, то основание высоты пирамиды лежит на биссектрисе угла, образованного теми сторонами основания, через которые проходят эти боковые грани», точка O одновременно лежит на биссектрисе BK угла ABC . Следовательно, основанием O высоты пирамиды является точка пересечения высоты AN и биссектрисы BK треугольника ABC .

Вычислив площадь треугольника ABC по формуле Герона: $S=84$, легко находим, что $AN=12$, $BN=9$. Используем, далее, свойство биссектрисы внутреннего угла треугольника ABN :

$$\frac{ON}{AO} = \frac{BN}{AB}, \frac{x}{12-x} = \frac{9}{15}, \quad \text{откуда} \quad ON = x = 4,5.$$

Из прямоугольного треугольника ONB теперь определяем OB , затем из прямоугольного треугольника SOB вычисляем высоту пирамиды: $OS = 3$. Следовательно, объем пирамиды $V_{SABC} = 84$.

Задача 42. «В треугольной пирамиде $ABCD$ ребро CD равно a , а перпендикуляр, опущенный из середины ребра AB на CD , равен b и образует равные углы α с гранями ACD и BDC . Найдите объем пирамиды» [67], рисунок 21.

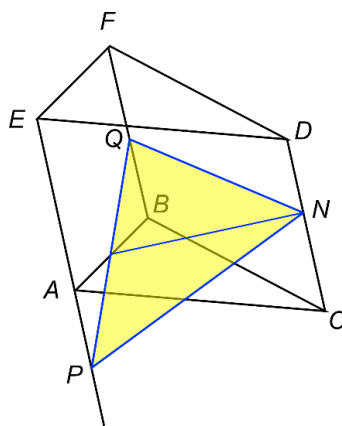


Рисунок 21 – Треугольная пирамида к задаче 42

Решение.

Пусть M – середина ребра AB , а точка N лежит на ребре CD , причем $MN \perp CD$, $MN = b$. Достроим тетраэдр $ABCD$ до треугольной призмы $ABCEFD$ ($AE \parallel BF \parallel CD$) и проведем через прямую MN плоскость, перпендикулярную ребру CD . Пусть эта плоскость пересекает прямые AE и BF соответственно в точках P и Q . Тогда треугольник NPQ – перпендикулярное сечение призматической поверхности, а $\angle MNQ = \angle MNP = \alpha$. Из равенства треугольников AMP и BMQ следует, что M – середина PQ , поэтому биссектриса NM треугольника NPQ является его медианой, значит, треугольник NPQ равнобедренный.

Поскольку $MP = MN \operatorname{tg} \alpha = b \operatorname{tg} \alpha$, то

$$S_{NPQ} = \frac{1}{2} PQ \cdot MN = MP \cdot MN = b^2 \operatorname{tg} \alpha.$$

Объем призмы равен произведению площади ее перпендикулярного сечения на боковое ребро, поэтому $V_{ABCD} = \frac{1}{3} V_{ABCEFD} = \frac{1}{3} ab^2 \operatorname{tg} \alpha$.

Ответ: $\frac{1}{3} ab^2 \operatorname{tg} \alpha$.

Задачи, имеющие повышенный уровень сложности, в основном, представлены в профильном уровне ЕГЭ по математике, а также в сборниках заданий для подготовки к поступлению в высшие учебные заведения. Рассмотрим некоторые из них [64], [73], рисунок 22.

Задача 43. «Сколько градусов содержит двугранный угол при основании правильной четырехугольной пирамиды, если плоскость, проведенная через сторону основания, делит этот угол и боковую поверхность пирамиды пополам?» [76].

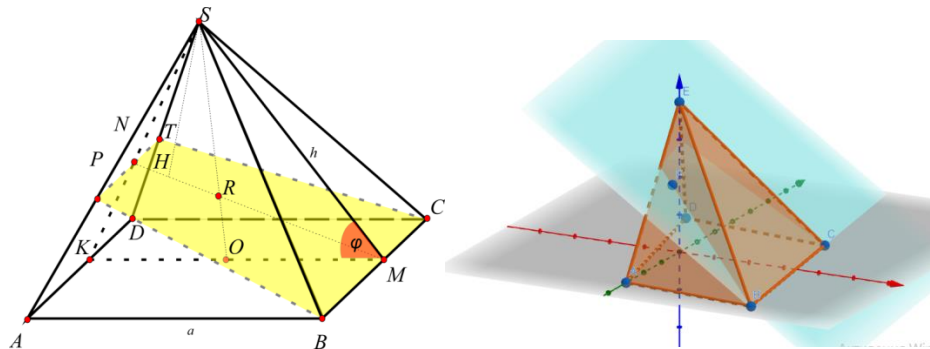


Рисунок 22 – Пирамида к задаче 43

Решение.

Равнобедренная трапеция $BCSTP$ – сечение пирамиды плоскостью α , $SM=h$ – апофема пирамиды, $AB = a$.

Пусть $S_{ASB} = S_1$, тогда $S_{бок.} = 4S_1$ для пирамиды $SABCD$.

MN – биссектриса $\angle SMK \Rightarrow \frac{SN}{KN} = \frac{h}{a} = \frac{SP}{AP}$. Тогда:

$$\frac{SP}{AS} = \frac{h}{h+a} \text{ и } S_{BSR} = \frac{h}{h+a} S_1 = S_{CST}; \frac{S_{PST}}{S_{ASD}} = \left(\frac{h}{h+a}\right)^2 \text{ и } S_{PST} = \left(\frac{h}{h+a}\right)^2 S_1.$$

Тогда для пирамиды $SBCTP$:

$$S_{бок.} = \left(\frac{h}{h+a}\right)^2 S_1 + \frac{2h}{h+a} S_1 + S_1 = S_1 \left(\frac{h}{h+a} + 1\right)^2 \text{ и по условию это –}$$

половина боковой поверхности пирамиды $SABCD$.

$$\text{Имеем: } S_1 \left(\frac{h}{h+a} + 1\right)^2 = 2S_1; \frac{h}{h+a} + 1 = \sqrt{2}, \text{ откуда } a = \sqrt{2}h.$$

В $\triangle KSM$ $SK = SM = h$, $KM = \sqrt{2}h$ и по теореме, обратной теореме Пифагора $\triangle KSM$ – прямоугольный. А так как $\triangle KSM$ – равнобедренный, то $\angle SMK = 45^\circ$.

Ответ: 45° .

Задача 44. «В правильной 2022-угольной пирамиде двугранный угол при ребре основания равен α , а угол наклона бокового ребра к плоскости основания равен γ . Какое наиболее значение может принимать разность: $\cos 2\gamma - \cos 2\alpha$?» [64].

Решение.

Обозначим исходную пирамиду $SA_1A_2\dots A_{2022}$, и рассмотрим треугольную пирамиду SOA_1A_2 , в которой SO – высота исходной пирамиды. Если B – середина стороны A_1A_2 , то $\angle SBO = \alpha$, $\angle SA_1O = \gamma$. Поскольку речь идет о соотношении углов, мы можем без ограничения общности считать, что $OA_1 = 1$. Обозначим для удобства $SO = h$, $A_1OB = \frac{\pi}{2022} = \varphi$, тогда $A_1B = \sin \varphi$, $OB = \cos \varphi$.

Выражение, значение которого необходимо оценить, представим в виде:

$$\cos 2\gamma - \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \gamma - 1 + 2\sin^2 \alpha = 2(\sin^2 \alpha - \sin^2 \gamma).$$

Из треугольника SOB :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{SO}{OB} = \frac{h}{\cos \varphi} = \sin^2 \alpha = \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{h^2}{h^2 + \cos^2 \varphi}$$

Аналогично, из треугольника SOA_1 :

$$\sin^2 \gamma = \frac{h^2}{h^2 + 1}$$

Тогда:

$$\sin^2 \alpha - \sin^2 \gamma = \frac{h^2}{h^2 + \cos^2 \varphi} - \frac{h^2}{h^2 + 1} = \frac{h^2 \sin^2 \varphi}{(h^2 + \cos^2 \varphi)(h^2 + 1)}$$

Введём функцию $f(t) = h^2$ и исследуем ее на экстремум:

$$f(t) = \frac{t \sin^2 \varphi}{(t + \cos^2 \varphi)(t + 1)},$$

$$f'(t) = \frac{\sin^2 \varphi (t^2 + (1 + \cos^2 \varphi)t + \cos^2 \varphi (2t + 1 + \cos^2 \varphi))}{(t + \cos^2 \varphi)^2 (t + 1)^2} =$$

$$\frac{\sin^2 \varphi (\cos^2 \varphi - t^2)}{(t + \cos^2 \varphi)^2 (t + 1)^2} = 0.$$

Поскольку $\sin \varphi$ и $\cos \varphi$ известные нам константы, это уравнение нетрудно решить относительно t и определить, что в точке $t = \cos \varphi$ функция достигает максимума. Найдём его:

$$f(\cos \varphi) = \frac{\cos \varphi \sin^2 \varphi}{(\cos \varphi + \cos^2 \varphi)(\cos \varphi + 1)} = \frac{\sin^2 \varphi}{(\cos \varphi + 1)^2} = \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}$$

Возвращаясь к исходному выражению, получаем:

$$\max(\sin^2 \alpha - \sin^2 \gamma) = \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}$$

$$\max(\cos 2\gamma - \cos 2\alpha) = 2\max(\sin^2 \alpha - \sin^2 \gamma) = 2\operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}$$

Ответ: $2\operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{4044}$.

Задача 45. «Сторона основания правильной описанной треугольной пирамиды равна α . Боковое ребро образует с плоскостью основания угол 60° . Найдите радиус сферы, описанной около пирамиды» [70], рисунок 23.

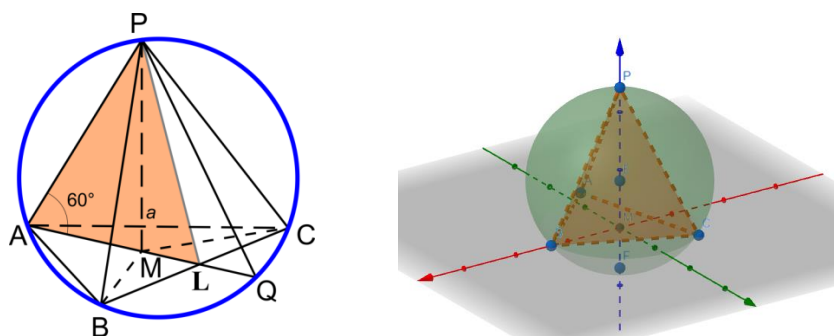


Рисунок 23 – Сфера, описанная около пирамиды в задаче 45

Решение. «Пусть $ABCP$ – данная правильная треугольная пирамида с вершиной P , $AB=BC=AC=a$, M – центр равностороннего треугольника ABC , $\angle PAM=\angle PBM=\angle PVM=\angle PCM=60^\circ$.

Поскольку пирамида правильная, PM – ее высота. Из прямоугольного треугольника PAM находим, что $AP = \frac{AM}{\cos 60^\circ} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$.

Поскольку центр описанной сферы равноудален от вершин основания ABC , он лежит на прямой PM . Рассмотрим сечение пирамиды $ABCP$ плоскостью, проходящей через точки A , P и середину L ребра BC . Получим треугольник APL , вершины A и P которого расположены на окружности с центром, лежащим на высоте PM , причем радиус R этой окружности равен радиусу сферы, описанной около пирамиды $ABCP$, и $AM=2ML$. Продолжим AL до пересечения с окружностью в точке Q . Поскольку $\angle PAQ=60^\circ$ и $PQ=AP$, треугольник APQ – равносторонний, поэтому:

$$R = AP \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{2a\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2a}{3} \gg [70].$$

Ответ: радиус $R = \frac{2a}{3}$.

Задачи, задействующие логическое мышление учеников чаще представлены в циклах олимпиад по математике. Для решения подобного типа задач необходимо использовать знания, которые ученик получил в школе, в том числе формулы и определения геометрических фигур. Решение олимпиадных задач может быть очень разнообразным и зависит от конкретной задачи.

Олимпиадные задачи имеют большую ценность, потому что помогают улучшить не только способности в математике, но и позволяют:

- развивать логическое и абстрактное мышление;
- обогащать знания учащихся в области математики;
- позволяют учителю оценить учеников и выделить тех, кто имеет лучший потенциал в геометрических вычислениях;
- улучшать способность принимать решения и решать сложные задачи;
- повышать мотивацию учеников к изучению математики и геометрии;
- прививать ученикам уверенность и умение работать в команде, решая проблемы и задачи.

Рассмотрим некоторые задачи олимпиадного типа, решение которых быстрее и удобнее найти с использованием интерактивных программ или компьютерной визуализации.

Задача 46. «Есть 20 шариков, склеенных так, что получилось две «цепочки» по 4 шарика в каждой и два «прямоугольника» из 6 шариков со сторонами 2 и 3 шарика (рис. 24). Как сложить эти 4 набора, чтобы получилась составленная из шариков треугольная пирамида?» [71], рисунок 24.

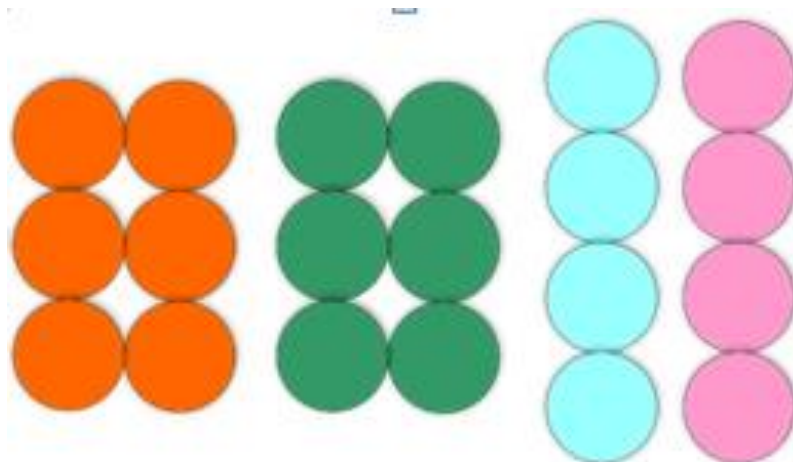


Рисунок 24 – Расположение шаров к задаче 46.

Решение задачи: возьмем нашу деталь 1×4 (голубого цвета) и деталь 2×3 (зеленого цвета) (рис. 24), поместим их друг над другом, таким образом, чтобы деталь 1×4 лежала в пазах детали 2×3 (рисунок 25). То же самое сделаем со вторым комплектом деталей. Соединим две детали частями 2×3 и перевернем каждую из них на 45° . У нас получится правильная треугольная пирамида.

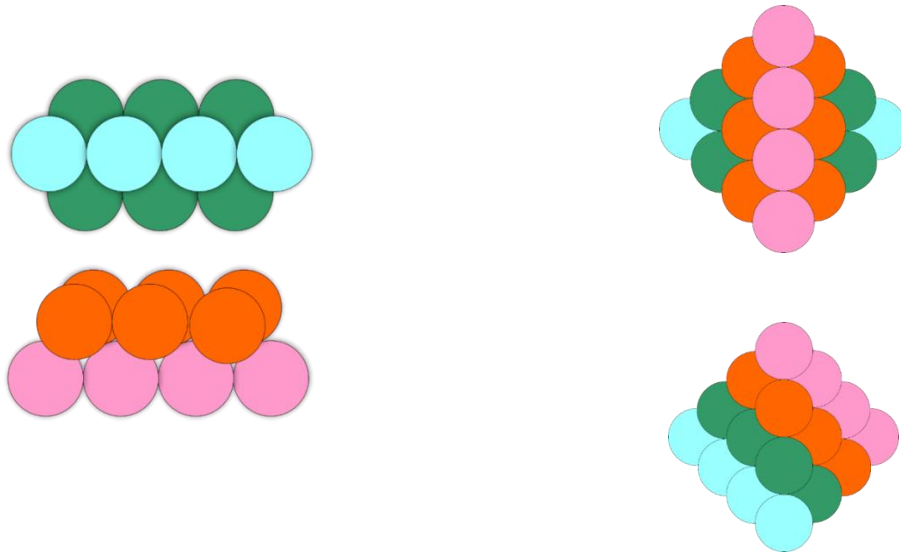


Рисунок 25 – Графическое решение задачи 46.

Задача 47 (рисунок 26). «У волшебника есть много одинаковых треугольных пирамидок с прямыми углами при вершине и рёбрами одинаковой длины, идущими из этой вершины» [64].

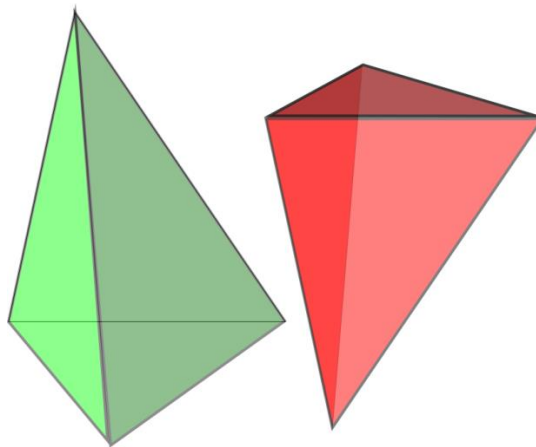


Рисунок 26 – Условие задачи 47

Пирамидки сделаны из чудесного материала и могут свободно проходить сквозь друга, не меняя своей формы. Волшебник сдвинул две пирамидки (рисунок 27) так, что вершина каждой пирамиды оказалась в центре основания другой пирамиды, а основания оказались повернуты относительно друга на 60° (если смотреть перпендикулярно основаниям, из вершины образуют правильный шестиугольник). Какую форму имеет общая часть этих пирамидок?

Решение.

Чтобы объяснить ответ возьмем сначала куб и поставим его одной вершиной в угол прямоугольной комнаты. Возьмем равносторонний треугольник такого размера, что, если совместить его центр с противоположной стороной куба, все стороны треугольника окажутся на стенах и полу комнаты. Тогда куб окажется внутри такой же пирамидки, как в условии задачи.

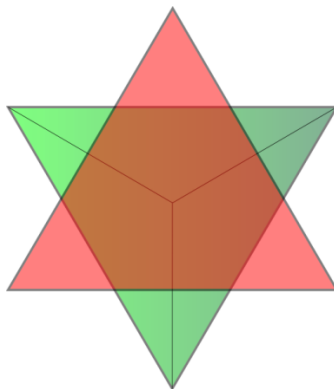


Рисунок 27 – Алгоритм решения задачи 47

Построим еще одну точно такую же пирамидку, содержащую наш куб, но симметричную первой относительно центра куба. Пересечение этих пирамидок есть наш куб (так как симметричная комната пересекает исходную ровно по этому кубу). Осталось показать, что эти пирамидки удовлетворяют условию задачи. Действительно, по построению вершина каждой пирамидки оказалась в центре основания другой пирамидки – в вершине куба. Основания оказались повернуты друг относительно друга на 60° , если смотреть

перпендикулярно основаниям, потому что по построению они суть правильные треугольники, симметричные друг другу относительно центра куба.

Ответ: куб (рисунок 28).

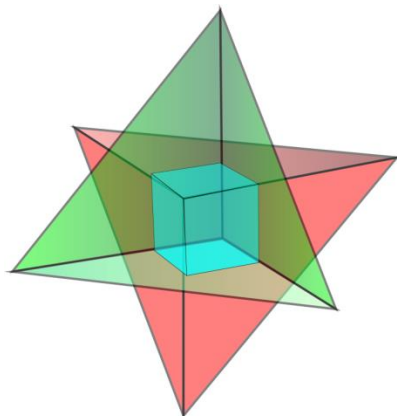


Рисунок 28 – Графическое решение задачи 47

В целом, система задач по геометрии по теме «Пирамида, ее виды и свойства» представляет собой пример эффективного использования компьютерных технологий в образовании и становится большой помощью для преподавателей и учеников в обучении геометрии. Использование системы задач по геометрии по теме «Пирамида, ее виды и свойства» для школьников является эффективным способом подготовки к экзаменам или для самостоятельного изучения материала.

В системе задач было уделено особое внимание дифференциации обучения, чтобы каждый школьник мог решать задачи на своем уровне и соответствующими способами. Это не только способствует более эффективному освоению материала, но и дает возможность каждому школьнику чувствовать свой прогресс и достижения в обучении. С помощью компьютерных технологий были созданы изображения, визуализирующие геометрические фигуры и различные ситуации, которые используются в задачах. Это помогает школьникам лучше понимать суть задач и создает более реалистичные условия для их решения.

Благодаря разнообразным задачам в системе, школьники могут осознаннее понимать геометрические фигуры, законы и правила их построения и освоить различные методы решения задач. Это помогает им развивать логическое мышление, творческий подход и умение работать в команде, что является важными навыками для жизни и карьеры.

Таким образом, система задач по геометрии по теме «Пирамида, ее виды и свойства» с использованием компьютерных технологий является инновационной и интерактивной, что помогает сделать учебный процесс более интересным, эффективным и подходящим для различных уровней подготовки учеников.

2.2 Методические рекомендации по внедрению темы «Пирамида и её основные свойства» с использованием компьютерных программ

Нами установлено, что «несмотря на то, что геометрическая фигура пирамида и ее свойства изучаются в школьном курсе математики практически на всех ступенях общеобразовательного процесса, начиная с начальной школы, тем не менее, обучающиеся испытывают существенные затруднения при решении стереометрических задач с пирамидой» [16]. Не в последнюю очередь это обусловлено тем, что в процессе обучения не в полной мере используется когнитивно-визуальный подход с использованием современных компьютерных технологий [16], [59], [63].

Определено, что «большое разнообразие стереометрических задач на применение свойств пирамиды способствует применению дифференцированного подхода в процессе преподавания и позволяет сконструировать элективный курс» [16], основанный на использовании компьютерных программ математической направленности [16], [30], [32], [50].

К числу наиболее известных программ для обучения математики и 3D геометрии относятся [62]:

- программа для решения геометрических задач «Живая геометрия» или «The Geometer's Sketchpad» в английской версии [78];
- компьютерное приложение «Wingeom» [79];
- свободно распространяемое компьютерное приложение «Geogebra» [77].

Основными характеристиками программы для решения геометрических задач «The Geometer's Sketchpad» являются [80] (рисунок 29):

- доступна на сайте <http://sketchpad.keycurriculum.com/>;
- использует язык программирования Java;
- доступна для использования на ПК с операционными системами: Windows, Linux, MacOS;
- ПО требует приобретения лицензии;
- относится к категории математического (геометрического) ПО.

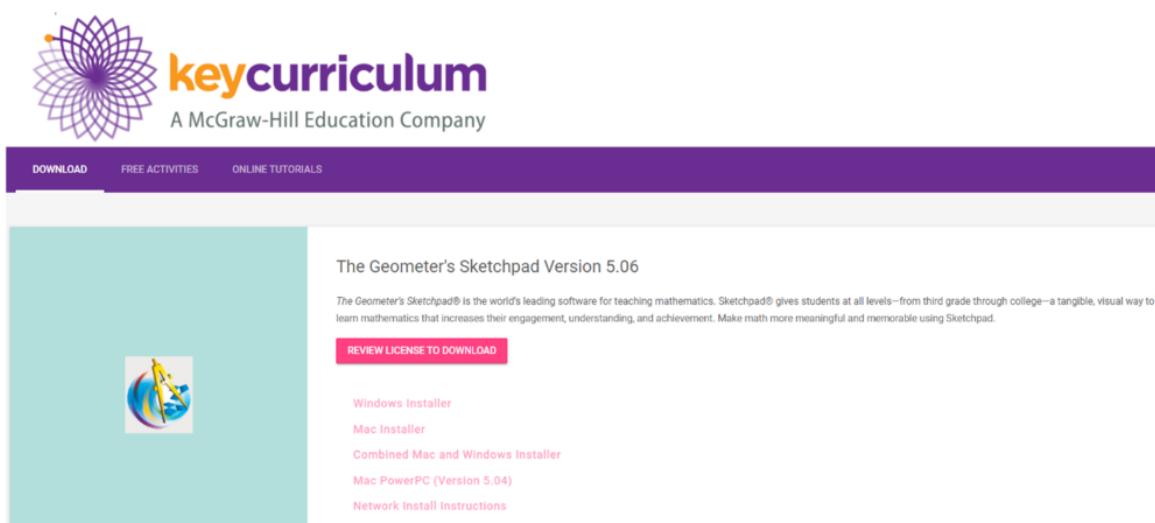


Рисунок 29 – Фрагмент страницы программы «The Geometer's ketchpad»

Программа «The Geometer's Sketchpad» (рисунок 29) предоставляет удобный инструмент для 3D геометрических построений. В программе большое количество примеров с решениями различных задач.

На рисунке 30 с помощью программы «The Geometer's Sketchpad» показано сечение $MNPQR$ пирамиды $SABCD$, проходящее через точки P и I , параллельно BD .

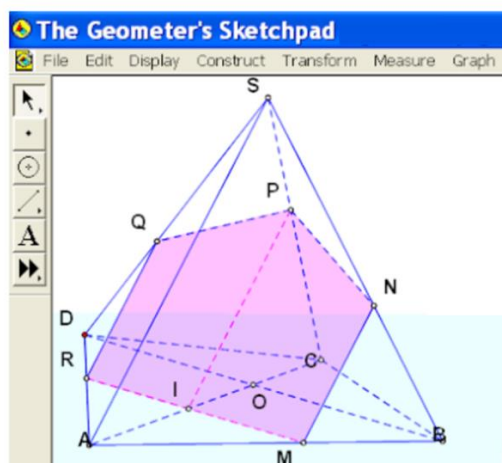


Рисунок 30 – Сечение пирамиды, «The Geometer's Sketchpad»

Другой известной программой для решения геометрических задач является «Winggeom» в английской версии [79]. Основные характеристики программы:

- доступность для скачивания на сайте:
<https://www.softpedia.com/get/Science-CAD/Winggeom.shtml>;
- использование языка программирования Java;
- доступность для использования на ПК с операционными системами: Windows, Linux, MacOS;
- свободный доступ к распространению ПО;
- категория математического (геометрического) ПО.

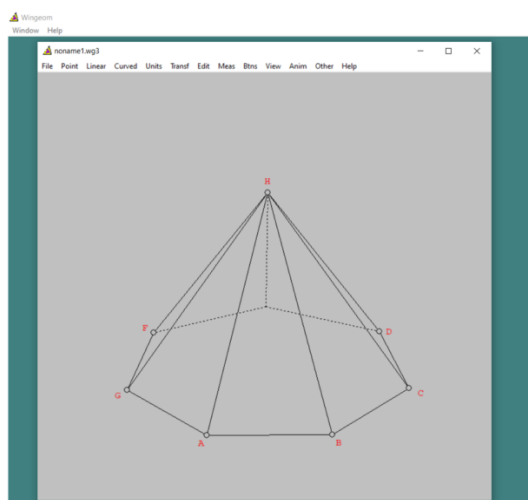


Рисунок 31 – Семиугольная пирамида в программе «Winggeom»

На рисунке 31 показан интерфейс программы «Winggeom», на котором изображена семиугольная правильная пирамида, Программа обладает инструментарием вращения, отображения, параллельного переноса, гомотетии. Предусмотрена работа с координатными осями и векторами.

Наиболее удобной для применения при решении задач по теме «Пирамида и ее свойства» представляется программа «Geogebra». Основные характеристики программы:

- доступна оффлайн русскоязычная версия, а также, онлайн на сайте <https://www.geogebra.org/geometry>;
- использует язык программирования Java;
- доступна для использования на ПК с операционными системами: Windows, Linux, MacOS;
- ПО не требует приобретения лицензии;
- относится к категории математического (геометрического) ПО.

Основная идея обучения решению задач по теме «Пирамида и ее свойства» с помощью компьютерных программ [34], [35] сводится к следующему алгоритму, который интуитивно будет понятен обучающимся:

- построение пирамиды (произвольной, правильной, усеченной) по условию задачи;
- определение и построение элементов пирамиды: высоты, апофемы, характерных углов;
- построение вписанных и описанных фигур по условию решаемой задачи;
- наглядная проверка и уточнение ключевых компонентов, необходимых для решения задачи;
- непосредственные вычисления и/или построения для решения задачи.

Из изложенного выше можно заключить, что при преподавании темы «Пирамида и ее свойства» важно объяснить учащимся особенности этой

геометрической фигуры и её «творческие элементы» в решении задач. Для достижения этой цели рекомендуется использовать конкретные примеры и прикладные элементы, которые направлены на решение узконаправленных задач.

2.3 Элективный курс «Пирамида её виды и свойства» с применением компьютерных технологий»

Использование компьютерных программ представляет интерес и с точки зрения нестандартных умений и навыков, приобретаемых обучающимися, а также опыта решения широкого круга задач. Многообразие видов задач с пирамидой позволяет полноценно учитывать дифференциацию обучающихся [11], [19], [56] и предложить им интересный элективный курс.

Подробное изучение данной темы представляется возможным в рамках элективного курса «Решение задач по теме «Пирамида и ее свойства» и применение программы Geogebra». Установлено, что «представляется целесообразным проведение занятий в первой половине 11-го года обучения после того, как в конце десятого года было завершено изучение основных положений стереометрии и геометрических тел разделов планиметрии» [16].

Таким образом, программа элективного курса «Решение задач по теме «Пирамида и ее свойства» и применение программы Geogebra» предназначена для изучения в 11 классе профильной школы с углубленным изучением математики и рассчитана на 14 часов. Дополнительно предполагается проведение контрольного занятия и подведение итогов на 3 часа. В целом, программа рассчитана на 17 часов (таблица 4).

Содержание элективного курса направлено на развитие практических навыков и умений по решению задач по геометрии [12], а также на развитие у учащихся алгоритмической культуры работы с компьютерными программами [13]. Каждую неделю учащимся будет предлагаться теоретический материал по теме текущей недели и подробно разобранные примеры. После

внимательного изучения этих материалов учащиеся выполняют домашние задания с применением компьютерных средств. Для должного освоения темы недели от учащегося потребуется 3-6 часов [20].

Таблица 4 – Учебно-тематическое планирование (на 17 ч.)

№ занятия	Тема	Всего часов	В том числе	
			теория	практика
1	«Повторение материала, изученного в 9-10 классах. Применение 2D программы Geogebra к построению фигур планиметрии и решению задач» [16].	2	1	1
2	«Основные свойства, формулы и определения пирамиды. Зависимости между углами и другими характерными параметрами пирамид. Применение 3D программы Geogebra к построению различных видов пирамид. Построение плоских и двугранных углов в пирамиде, характерных расстояний с помощью Geogebra 3D» [16].	2	1	1
3	«Задачи на вычисление объемов, площадей поверхности пирамид. Правильные и усеченные пирамиды. Применение программы Geogebra 3D для построения усеченных пирамид и решения задач на вычисление» [16].	2	1	1
4	«Задачи на вписанные и описанные фигуры и на комбинации пирамид, многогранников, тел вращения. Применение 3D программы Geogebra к построению различных видов вписанных и описанных фигур» [16].	2	1	1
5	«Применение декартовых координат и векторов при решении геометрических задач по теме «Пирамида». Построение векторов и применение координат в 3D программе Geogebra для решения задач на различные свойства пирамиды» [16].	2	1	1
6	«Сечения пирамиды. Метод вспомогательного объема при решении задач. Использование методов начал анализа. Построение сечений пирамиды в программе Geogebra 3D. Применение программы в различных нестандартных методах решения задач» [16].	2	1	1

Продолжение таблицы 4

№ занятия	Тема	Всего часов	В том числе	
			теория	практика
7	«Завершающее занятие, обобщение изученного материала» [16].	2	2	
8	«Зачетное занятие. Контрольная в письменной форме» [16].	2	2	
9	Подведение итогов.	1	1	

Для текущего контроля качества домашней работы будут регулярно предлагаться тестовые задания и задания на повторение. Предусмотрены повторные задания, для успешного прохождения контрольных вопросов. По результатам будут выставляться оценки и сформируется рейтинговая оценка учащихся.

Цель данного курса: способствовать формированию нестандартных умений и навыков для решения математических задач с использованием компьютерных средств.

Задачи курса:

- обучение решению задач по теме «Пирамида и ее свойства»;
- овладеть основными методами решения геометрических задач с применением компьютерных программ;
- повысить интерес к решению оригинальных и нестандартных задач.

Для элективного курса используются различные дидактические материалы, в том числе [18], [23], [46], [47]. Полезным является учет зарубежного опыта и уровня задач по стереометрии в рамках настоящей работы [82] - [85].

Предлагаемый план занятия.

Задачи на вписанные и описанные фигуры и на комбинации пирамид, многогранников, тел вращения [16] (таблица 4, занятие 4 элективного курса).

Теоретическое занятие:

Применительно к теме вписанных и описанных тел на уроке-лекции следует изложить все основные сведения об этих фигурах (телах вращения, многогранниках) и рассмотреть основные элементы, соотношения, взаимозависимости, позволяющие вычислять их объемы, площади поверхности и другие характерные величины.

В качестве вводных можно использовать несколько типовых задач для правильных пирамид на вычисление радиусов вписанных и описанных сфер, иллюстрирующих основные формулы и теоретические зависимости. Полезными являются задачи из нескольких подпунктов, особенно для усеченных пирамид.

Также, для учащихся с высоким уровнем мотивации можно рассмотреть задачи для усеченных правильных n – угольных пирамид, вписанных в конус.

В целом, использование задач, состоящих из нескольких подпунктов, а также на комбинации тел, позволяет реально учесть уровневую дифференциацию, мотивировать учащихся к преодолению соответствующих «рубежей» в образовательном процессе.

Домашние задания, построенные по такому же принципу, действительно подталкивают учащихся к индивидуальной работе и самостоятельному изучению сложного материала.

Практическое занятие.

Для примера, приведем решение одной из ключевых задач к четвертому занятию элективного курса [16].

Задача 48. «Дана правильная четырехугольная пирамида $SABCD$ со стороной основания 4 и высотой $2\sqrt{3}$. Сфера, центр которой совпадает с центром O основания $ABCD$, касается всех боковых граней данной пирамиды. Плоскость (α) пересекает пирамиду $SABCD$, касается сферы, параллельна стороне основания AB и перпендикулярна боковой грани SCD . Найти расстояние от вершины S до плоскости (α) » [16], [70].

Решение.

С помощью программы Geogebra 3D изображаем пирамиду $SABCD$ со стороной $a = 4$ и высотой $h = 2\sqrt{3}$. Далее, последовательно выполняем следующие действия, изображенные на рисунке 32 [16].

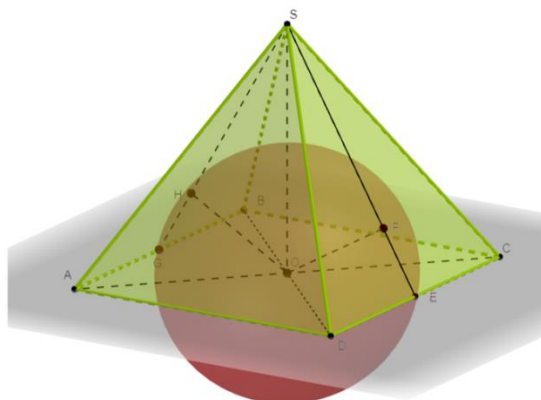


Рисунок 32 – Пирамида и сфера по условию задачи 48

Шаг 1. Находим центр основания:

$$O = \text{Пересечение } (AC, BD)$$

Шаг 2. Проводим апофемы SE и SG и строим перпендикуляры:

$$OF: \text{Перпендикуляр } (O, SE)$$

$$OH: \text{Перпендикуляр } (O, SG)$$

Шаг 3. Строим сферу (b) с радиусом $r = OF = OH$:

$$b: \text{Сфера } (O, r)$$

Программа имеет удобную функцию вращения рисунка, что позволяет наглядно рассмотреть полученные фигуры на рисунке 33.

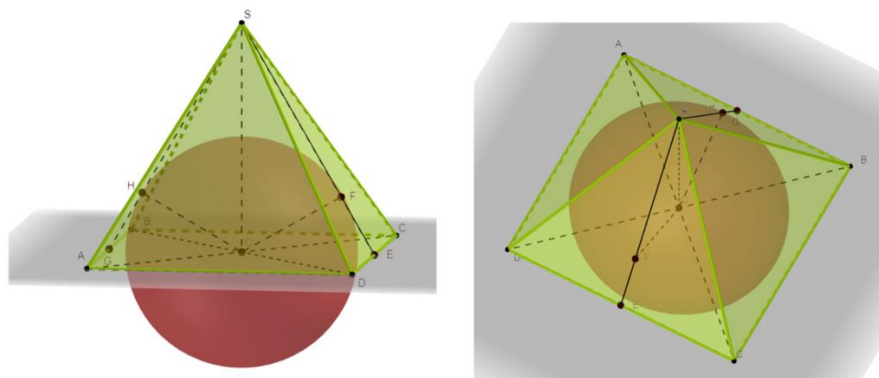


Рисунок 33 – Различные виды фигур по условию задачи

Для построения плоскости (α) по условию задачи, используя основные свойства прямых и плоскостей в пространстве, показываем обучающимся что (α) перпендикулярна апофеме SE . Делаем дальнейшие построения рисунке 34 [16].

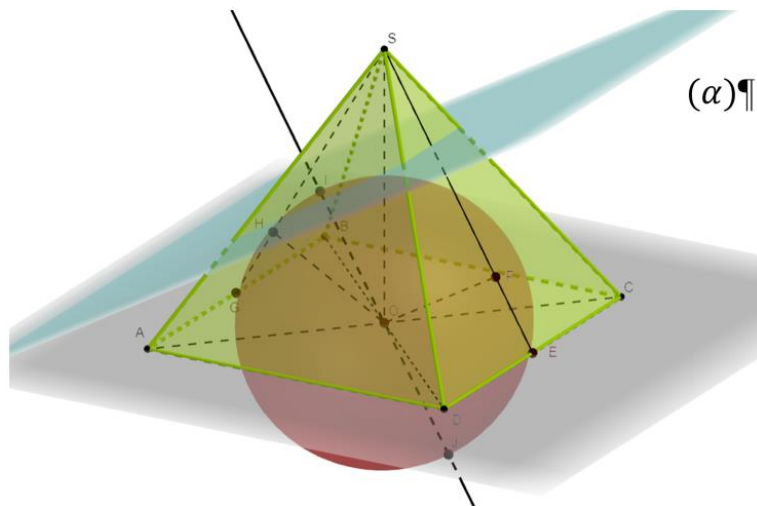


Рисунок 34 – Секущая плоскость (α) по условию задачи

Шаг 1. Проводим прямую OI параллельную SE :

OI : Прямая (O, SE)

Шаг 2. Находим пересечение этой прямой со сферой (b) :

$I =$ Пересечение (OI, b)

Шаг 3. Проведем плоскость через точку I перпендикулярно прямой OI :

α : Перпендикулярная Плоскость (I, OI)

Для определения искомого расстояния от S до (α) построим осевое сечение правильной пирамиды плоскостью (ESG) . Для этого воспользуемся двумерным видом 2G программы Geogebra рисунке 35 [16].

Шаг 1. Строим треугольник SEG , в котором угол при основании \hat{E} равен:

$$\operatorname{tg} \hat{E} = \frac{SO}{OE} = \frac{h}{a/2} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \Rightarrow \hat{E} = 60^\circ$$

Таким образом, ΔSEG –равносторонний:

$\Delta SEG =$ Многоугольник $(G, E, 3)$

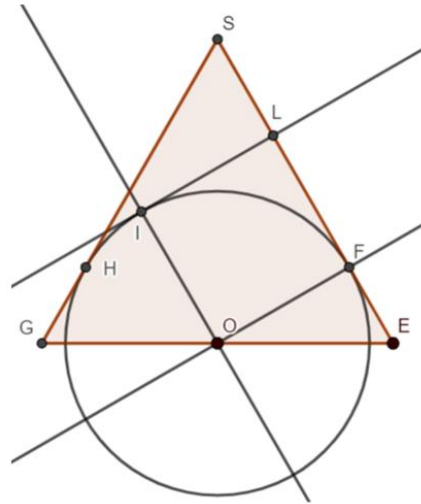


Рисунок 35 – Сечение пирамиды плоскость (ESG)

Шаг 2. Из точки O проводим перпендикуляр OF к стороне SE :

OF : Перпендикуляр (O, SE)

Шаг 3. Строим окружность (c) с радиусом r :

c : Окружность (O, OF)

Шаг 4. Проводим прямую OI параллельно SE и находим пересечение с окружностью (c) :

OI : Прямая (O, SE)

I = Пересечение (OI, c)

Шаг 5. Через точку I проведем прямую IL перпендикулярную OI :

IL : Перпендикуляр (I, SE)

Шаг 6. Находим точку L как пересечение IL с SE :

L = Пересечение (IL, SE)

Расстояние SL является искомым и находим его исходя из того, что четырехугольник $OILF$ является квадратом.

Учитывая, что:

$$SE = GE = 4, \quad FE = \frac{GE}{2} \cdot \cos 60^\circ = 2 \cdot 0,5 = 1$$

$$FO = \frac{GE}{2} \cdot \sin 60^\circ = \sqrt{3},$$

$$FL = OF = \sqrt{3};$$

находим искомое расстояние: $SL = SE - FE - FL = 4 - 1 - \sqrt{3} = 3 - \sqrt{3}$.

В качестве дополнительного задания можно предусмотреть следующую задачу:

Задача 49. «Найдите объем пирамиды, отсекаемой плоскостью (α) с вершиной в точке S и с основанием, образованным сечением пирамиды плоскостью (α) .»

Здесь удобно использовать рисунок 36, другой наглядный вид сечения плоскостью (α) , который иллюстрирует, что основанием отсекаемой пирамиды является правильная трапеция. Высота этой пирамиды SL уже известна, и, таким образом, это дополнительное задание сводится к вычислению площади указанной правильной трапеции.

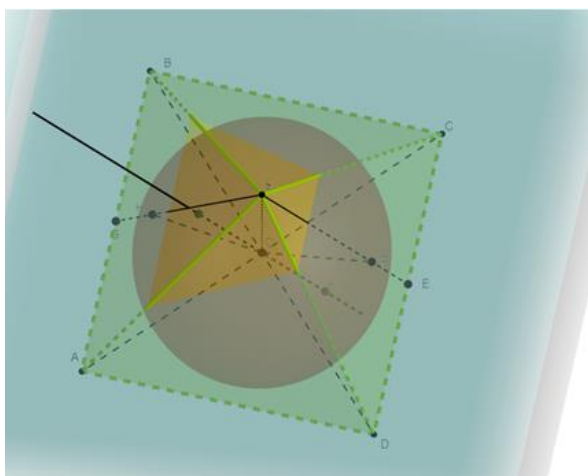


Рисунок 36 – Трапеция – основание отсеченной пирамиды

Приведенная задача показывает удобство и целесообразность использования программы Geogebra. Наглядность построений подталкивает обучающихся к поиску оптимального пути решения и мотивирует их к повышению собственных предметных компетенций [38], [43].

Примеры тем проектов для учащихся в рамках элективного курса «Решение задач по теме «Пирамида и ее свойства» и применение программы Geogebra»:

Тема 1. Построение пирамид и вычисление элементов вписанных и описанных фигур с помощью 3D программы Geogebra.

Тема 2. Применение векторов при решении задач на свойства пирамиды с использованием компьютерных программ.

Тема 3. Построение сечений и вычисление элементов пирамиды с помощью 3D программы Geogebra.

Тема 4. Декартовы координаты в 3D программе Geogebra при решении.

2.4 Педагогический эксперимент и его результаты

Представим далее результаты педагогического эксперимента по практической апробации элективного курса «Решение задач по теме «Пирамида и ее свойства» и применение программы Geogebra».

Для апробации программы элективного курса был предварительно проведен с помощью анкетирования констатирующий этап экспериментальной работы в целях выявления степени понимания школьниками теоретических основ стереометрии и знаний в области решения задач с пирамидами и вписанными/описанными фигурами.

Разработанная программа элективного курса была передана в учебное заведение по месту практики практикующим педагогам. Программа и соответствующая технология проведения занятий была рассчитана на 14 часов (2 часа в неделю) для учащихся старших классов (в данном случае, 11 класса).

Апробация предлагаемой программы элективного курса «Решение задач по теме «Пирамида и ее свойства» и применение программы Geogebra» осуществлялась на базе МБОУ «Лицей № 24 им. Героя Советского Союза А.В. Корявина» Московская область, Сергиево-Посадский городской округ, г. Сергиев Посад-6. Ответственной за апробацию была назначена Ильинская Наталья Михайловна, учитель алгебры и геометрии.

В апробации были задействованы учащиеся 11 «Б» класса, имеющие мотивацию к получению дополнительных и углубленных знаний в рамках

элективного курса «Решение задач по теме «Пирамида и ее свойства» и применение программы Geogebra». Занятия проходили в кабинете программирования и робототехники.

В основу курса были взяты учебники для 10 и 11 классов по геометрии для профильных общеобразовательных учреждений авторов Александров А.Д., Вернер А.Л., Рыжик В.И. [8], [9], авторов Калинин А.Ю. и Терешин Д.А. [25]- [27]. В этих учебниках рассмотрены все основные разделы стереометрии и достаточно большое количество задач повышенной трудности в рамках курса геометрии для учащихся как базовой, так и профильной школы.

Для компьютерного сопровождения курса занятий используется офлайн версия программы «Geogebra» и ее 3D и 2D компоненты [78].

Преподавателям, участвующим в апробации, были предложены дополнительные материалы, с помощью которых составлялся элективного курса, включающие теоретический материал, пособия, задачки [51], [66], [71].

В нижеследующей таблице 5 представлен фактический план занятий по элективному курсу «Решение задач по теме «Пирамида и ее свойства» и применение программы Geogebra».

В рамках курса было проведено семь занятий по 2 академических часа каждое. Первая часть в каждом занятии была посвящена теоретическому материалу и проводилась в лекционной форме. Вторая часть проводится в форме практического занятия и посвящена анализу предыдущего домашнего задания, а также решению задач в рамках нового материала текущего занятия.

На констатирующем этапе экспериментальной работы преподавателям по завершении курса занятий с помощью анкетирования были заданы следующие вопросы:

Вопрос 1. Какие темы элективного курса Вам представляются наиболее сложными для обучающихся?

Вопрос 2. Считаете ли Вы удачным тематическое планирование элективного курса с учетом уровневой дифференциации обучающихся?

Таблица 5 – Тематическое планирование

№ занятия	Тема	Дата
1	Повторение материала, изученного в 9-10 классах. Применение 2D программы Geogebra к построению фигур планиметрии и решению задач.	03.10.2022
2	Основные свойства, формулы и определения пирамиды. Зависимости между углами и другими характерными параметрами пирамид. Применение 3D программы Geogebra к построению различных видов пирамид. Построение плоских и двугранных углов в пирамиде, характерных расстояний с помощью Geogebra 3D.	06.10.2022
3	Задачи на вычисление объемов, площадей поверхности пирамид. Правильные и усеченные пирамиды. Применение программы Geogebra 3D для построения усеченных пирамид и решения задач на вычисление.	10.10.2022
4	Задачи на вписанные и описанные фигуры и на комбинации пирамид, многогранников, тел вращения. Применение 3D программы Geogebra к построению различных видов вписанных и описанных фигур.	17.10.2022
5	Применение декартовых координат и векторов при решении геометрических задач по теме «Пирамида». Построение векторов и применение координат в 3D программе Geogebra для решения задач на различные свойства пирамиды.	20.10.2022
6	Сечения пирамиды. Метод вспомогательного объема при решении задач. Использование методов начал анализа. Построение сечений пирамиды в программе Geogebra 3D. Применение программы в различных нестандартных методах решения задач.	24.10.2022
7	Завершающее занятие. Подведение итогов, обобщение материала.	27.10.2022

Вопрос 3. Как следует перераспределить темы между занятиями для лучшей усваиваемости?

Вопрос 4. Наблюдалось ли повышение навыков пользования компьютерной программой по ходу проведения занятий?

Вопрос 5. Наблюдается ли повышение интереса у обучающихся к решению задач в рамках элективного курса благодаря использованию компьютера?

Вопрос 6. Насколько правильно составлен комплекс задач для домашних заданий?

Вопрос 7. Какие общие рекомендации по улучшению элективного курса Вы можете дать?

Вопрос 8. Достигается ли в среднем цель повышения мотивации у учащихся к учебно-познавательной деятельности?

В целом, преподаватели отметили очень живой интерес учащихся (около 80%) к занятиям в рамках данного элективного курса. Наиболее сложными оказались темы № 5 и № 6, уровень правильного решения задач по эти темам оказался не очень высоким (примерно 55%). Преподаватели по итогам оценки домашних и самостоятельных работ посчитали целесообразным учет уровневой дифференциации при составлении заданий и изложении материала.

Учащимся по завершении обучения на констатирующем этапе экспериментальной работы были заданы следующие вопросы:

Вопрос 1. Были ли занятия в лекционной форме интересны для Вас?

Вопрос 2. Что на практических занятиях Вам давалось более легко?

Вопрос 3. Какой материал вызвал у Вас наибольшее затруднения?

Вопрос 4. Какой материал оказался наиболее интересным? Что было для Вас более «скучным»? По какой причине?

Вопрос 5. Насколько интересным стало применение компьютерной программы для решения задач?

Вопрос 6. При решении какого типа задач из других разделов математики можно применить полученные во время курса знания и навыки пользования компьютером?

Вопрос 7. Считаете ли Вы для себя полезными умения и навыки, полученные во время посещения занятий?

В целом, учащиеся посчитали курс интересным и познавательным для себя (около 80%). Учащиеся испытывали затруднения в изучении тем № 5 и № 6 (примерно 60%).

Приведем решение двух задач педагогического эксперимента.

Задача 50. «Основанием пирамиды FABC является правильный треугольник ABC со стороной 36. Все боковые рёбра пирамиды равны 30. На

ребрах FB и FC отмечены соответственно точки K и N так, что BK = CN = 20. Через точки K и N проведена плоскость α , перпендикулярная плоскости ABC;

- а) докажите, что плоскость α делит медиану AM в отношении 2:7;
 б) найдите расстояние от точки B до плоскости α » [70].

Решение.

$$FK = FB - KB = 30 - 20 = 10, FN = FC - NC = 30 - 20 = 10.$$

$$\frac{FK}{FB} = \frac{FN}{FC}; \angle F - \text{общий} \Rightarrow \triangle FKN \sim \triangle FBC, KN \parallel BC.$$

Опустим проекцию K_1 и N_1 на плоскость основания ABC. $K_1N_1 \parallel BC \Rightarrow K_1 \in OB; N_1 \in OC$, где O - центр $\triangle ABC$.

$$\begin{aligned} OM &= \frac{1}{3}AM; \triangle KBK_1 \sim \triangle FBO \Rightarrow \frac{BK_1}{K_1O} = \frac{BK}{FO} = \frac{2}{1}; \\ \triangle OK_1N_1 &\sim \triangle BOC; \frac{BK_1}{K_1O} = \frac{MM_1}{M_1O} \Rightarrow MM_1 = \frac{2}{3}MO = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}AM = \frac{2}{9}AM = AM_1 = \\ &= \frac{7}{9}AM \Rightarrow \frac{MM_1}{M_1A} = \frac{2}{7}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} MM_1 \perp FO &\Rightarrow MM_1 \perp KK_1; MM_1 \perp BC \Rightarrow MM_1 \perp K_1N_1 \Rightarrow MM_1 \perp \\ &\perp (K_1N_1NK) \Rightarrow MM_1 \text{ от } B \text{ до } \alpha. \end{aligned}$$

$$AM = AB \sin \beta = 36 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 18\sqrt{3} \Rightarrow MM_1 = \frac{2}{9} \cdot 18\sqrt{3} = 4\sqrt{3}.$$

Построим пирамиду, с помощью программы Geogebra 2D (рисунок 37).

Приведем решение аналогичной задачи с использованием компьютерной программы «Geogebra» (рисунок 38).

Задача 51. «Основанием пирамиды FABC является правильный треугольник ABC со стороной 48. Все боковые ребра пирамиды равны 40. На ребрах FB и FC отмечены соответственно через точки K и N так, что FK=FN=10. Через точки K и N проведена плоскость α , перпендикулярная плоскости ABC;

- а) докажите, что плоскость α делит медиану AM в отношении 1:3;
 б) найдите расстояние от точки C до плоскости α » [44].

С помощью программы Geogebra 3D изображаем пирамиду $FABC$ со стороной $AB = 40, AF = 40, FC = 30, AC = 30$. На ребрах FB и FC отметим точки K и N так, что $FK = FN = 10$.

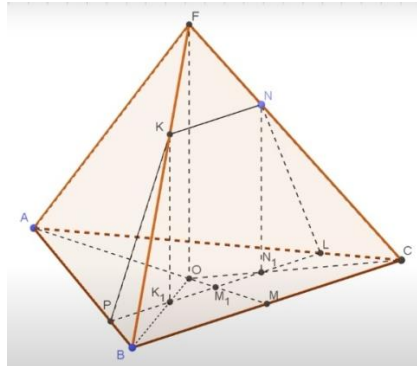


Рисунок 37- Пирамида к задаче 50

Через точки K и N проведена плоскость (α) . Далее, последовательно выполняем следующие действия, изображенные на рисунке 38.

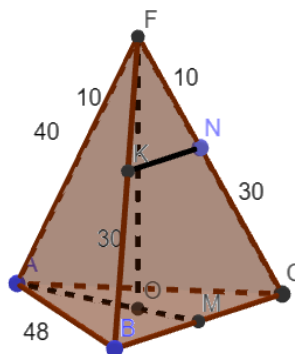


Рисунок 38 – Пирамида по условию задачи 51

Шаг 1. Находим высоту пирамиды: $FO \perp ABC$, O – центр описанной окружности. Так как в основании лежит правильный треугольник, то точка O совпадает с центром $\triangle ABC$.

Шаг 2. Проводим медиану FM и строим перпендикуляры:

FM : Перпендикуляр (BC)

FM : Перпендикуляр (KN)

Шаг 3. Строим плоскость (KNN_1K_1) опускаем перпендикуляры из точки L

LH : Перпендикуляр (ABC)

K_1N_1 : Перпендикуляр (ABC) .

Программа имеет удобную функцию вращения рисунка, что позволяет наглядно рассмотреть полученное сечение фигуры на рисунке 39.

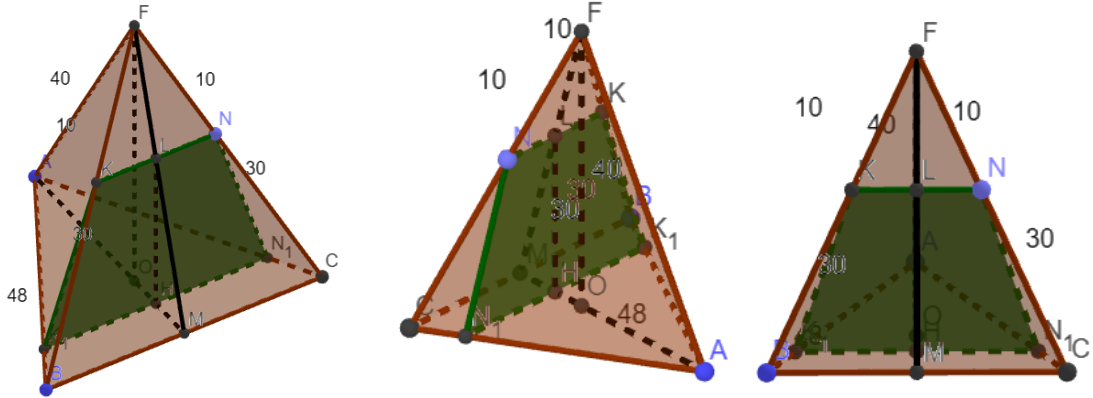


Рисунок 39 – Различные виды фигуры по условию задачи

Из данных программы видно, что NKK_1N_1 – равнобедренная трапеция.

Сечение – четырехугольник. Нам необходимо доказать, что $\frac{AH}{HM} = \frac{3}{1}$.

Шаг 4. Точка: O разделяет отрезок AM в отношении 2:1 считая от вершины

O : Прямая (A, M)

$$HM = \frac{3}{4}OM = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3}AM = \frac{1}{4}AM$$

Шаг 5. $\frac{FL}{LM} = \frac{FN}{NC} = \frac{1}{3}$ по теореме Фалеса, поскольку $KN \parallel BC$

FO, LH перпендикуляр $(ABC) \Rightarrow \frac{OH}{HM} = \frac{1}{3}$

Шаг 6. Отрезок $NM = \frac{3}{4}OM$; $OM = \frac{1}{3}AM$; $NM = \frac{1}{4}AM$.

Шаг 7. $AN = \frac{3}{4}AM$, $AN:NM = 3:1$.

Шаг 8. $C \in BC$, $BC \parallel \alpha$, то заменим C на любую точку из этой прямой. Возьмем точку M .

Шаг 9. Вычислим $AM = 24\sqrt{3}$, $NM = 6\sqrt{3}$.

Задачи, приведенные в ходе проведения педагогического эксперимента, демонстрируют удобство и полезность математической программы Geogebra.

Она способствует упрощению процесса решения математических задач и облегчает визуализацию графических примеров. Также благодаря ее возможностям, учителя смогут создавать инновационные материалы для более интерактивного и увлекательного обучения учеников.

Цель поискового этапа проведенного исследования состояла в апробации конкретного теоретического материала к решению задач повышенной трудности в рамках элективного курса, которая сопровождалась наглядными примерами с помощью компьютерного приложения. В результате данного этапа экспериментального исследования была разработана система задач и домашних заданий по программе курса «Решение задач по теме «Пирамида и ее свойства» и применение программы Geogebra» для учащихся 11 классов профильных общеобразовательных учреждений.

Таким образом, методика обучения теме: «Пирамида, ее виды и свойства» с использованием компьютерных технологий может включать в себя следующие шаги:

Шаг 1. Использование графических программ для создания и визуализации пирамид и других, различных геометрических фигур. Это позволит обучающимся более наглядно представлять геометрические объекты.

Шаг 2. Работа с интерактивными учебниками и заданиями, которые позволяют ученикам самостоятельно исследовать пирамиду и другие геометрические фигуры. Это поможет развить учебные навыки, такие как логическое мышление и решение задач.

Шаг 3. Апробация различных вариантов решения геометрических задач, с использованием компьютерных программ. Это способствует развитию навыков количественного анализа и решения математических задач по теме «Пирамида, ее виды и свойства».

Шаг 4. Использование визуальных средств, таких как динамические моделирование и графические демонстрации, для иллюстрации

структур и процессов в геометрии. Это поможет ученикам лучше понять физические свойства пирамиды и их связь с другими областями знания.

Выводы по второй главе

Вторая глава настоящей работы посвящена методическим практическим вопросам применения компьютерных средств при изучении темы «Пирамида и ее свойства».

Разобраны задачи различного уровня сложности по теме данной работы, в том числе, предлагавшиеся на итоговых аттестациях в рамках профильного ЕГЭ по математике и олимпиадных задачах. Все решения проиллюстрированы с применением тематической компьютерной программы «Geogebra». Отдельно подчеркнута важность и способы применения компьютерных программ при изучении стереометрии, включая решение задач с пирамидами и вписанными и описанными телами. Создание системы задач по геометрии по теме «Пирамида» с применением компьютерных технологий позволяет повысить эффективность обучения стереометрии и качество решения задач.

Предложен элективный курс «Решение задач по теме «Пирамида и ее свойства» и применение программы Geogebra». Приведен конспект урока по одной из тем элективного курса. По итогам занятий в МБОУ «Лицей № 24 им. Героя Советского Союза А.В. Корявина» Московская область, Сергиево-Посадский городской округ, г. Сергиев Посад.

Проведен педагогический эксперимент и представлены его результаты.

Апробация материала, предложенного в рамках элективного курса и составленного с учетом особенностей применения компьютерных программ, показала повышенный интерес со стороны обучающихся и способствовала повышению их предметных компетенций в преддверии выпускных экзаменов.

Для внедрения темы «Пирамида, её виды и свойства» с использованием компьютерных технологий в старших классах общеобразовательной школы, рекомендованы следующие методические подходы:

- подготовить план занятия, включая презентацию, демонстрацию и практические задания;
- выбрать подходящие программы для работы с геометрическими фигурами, в том числе пирамидами. Программы могут быть как бесплатными, так и платными, на выбор учителя и школьника;
- продемонстрировать ученикам как работать с программами, объяснять основные функции и возможности программного обеспечения;
- начать занятие с презентации теории по теме «Пирамида, ее виды и свойства», включающей графические изображения геометрических фигур и их свойств;
- объяснить, как программа может помочь в решении задач по геометрии и какие задания можно выполнить с использованием программного обеспечения;
- предложить ученикам практические задания, в которых они будут использовать программу для работы с пирамидами, например, базовые задачи по нахождению площади пирамиды, объема или высоты;
- организовать обсуждение результатов заданий с учениками и помочь им понимать, как использовать программу для решения различных задач по геометрии;
- дать ученикам возможность работать индивидуально, чтобы они могли сфокусироваться на своих личных целях и уровне понимания материала;
- подготовить задания на закрепление полученных знаний, включающие как теоретические, так и практические аспекты темы;
- использовать в процессе обучения разработанную дифференцированную систему упражнений по теме «Пирамида и ее свойства».

Заключение

В условиях существующего противоречия между необходимостью формирования предметных навыков и умений обучающихся на современном уровне, недостаточностью в их подготовке к использованию существующих тематических компьютерных программ и технологий, также недостаточной разработанностью системы задач по теме с использованием когнитивных графических учебных элементов предложены методические рекомендации по изучению стереометрии в старших классах общеобразовательной школы с помощью компьютерных средств на примере темы «Пирамида и её основные свойства».

Подтверждена гипотеза исследования о том, что использование тематических компьютерных программ и технологий способствует повышению качества математической подготовки и уровня знаний, получаемых в отечественных общеобразовательных учебных заведениях.

Решение геометрических задач с использованием предложенного в работе алгоритма – это процесс, подталкивающий учащегося к развитию пространственного мышления для поиска требуемого решения. Дифференцированный подход позволяет достичь максимального эффекта для разных групп учащихся и сформировать у них способность к критической оценке методики поиска решений. Подталкивание учащегося к выбору наиболее рационального способа решения является главным фактором для развития навыков пространственного мышления.

Реальный опыт показывает, что регулярное использование компьютерных средств в практике преподавания геометрических задач даёт значительный эффект при изучении стереометрии, геометрии и математики в целом, позволяет добиться наибольшей эффективности при усваивании материала максимально возможным количеством обучающихся.

Несмотря на то, что компьютерные технологии могут значительно улучшить качество обучения и сделать его более интерактивным, они не могут заменить учебник и учителя полностью.

Учебник и учитель могут обеспечить необходимый контекст для понимания материала, ответить на вопросы и объяснить сложные аспекты материала. Кроме того, учитель также может предоставить дополнительные материалы и задания, которые помогут учащимся закрепить свои знания и навыки. В школе возможно изменение преподавания среди всех учителей. Это является общей работой, учителя могут в короткие сроки достичь высоких результатов без значительных усилий [5].

Компьютерные технологии могут быть полезным дополнением к учебнику и учителю, предоставляя учащимся интерактивные уроки, графики и другие визуальные средства, которые могут сделать процесс обучения более интересным и запоминающимся. Однако, даже если компьютерные технологии предоставляют изучение определенных аспектов материала, они не могут заменить потребности и уникальности каждого ученика.

В некоторых случаях, например, при дистанционном обучении, компьютерные технологии могут стать основой обучения, но в общем случае они не могут заменить роль учебника и учителя.

Геометрия является мощным инструментом для познания реального мира, и развитие общего геометрического мышления у учащихся, само по себе, является очень важной задачей.

В условиях снижения уровня общей подготовки выпускников школ по естественнонаучным предметам именно использование современных компьютерных технологий может быть тем фактором, который поможет в повышении уровня знаний у учащихся до приемлемого уровня.

Разобранные в работе задачи наглядно иллюстрируют преимущества применения компьютерных программ при подготовке старшеклассников к итоговой аттестации в 11 классе.

Сформулированы ключевые темы для успешного изучения пирамиды и ее свойств, предложена система ключевых задач в рамках предложенной технологии обучения.

Проведен педагогический эксперимент и описаны его результаты. В качестве контрольного задания были даны задачи различной сложности, в том числе, предлагавшиеся на профильном ЕГЭ по математике. Полученный результат показал эффективность занятий в рамках элективного курса и продемонстрировал пользу использования компьютерных программ в процессе преподавания стереометрии в старших классах общеобразовательной школы.

Таким образом, поставленные задачи исследования разрешены, и цель данной работы достигнута.

Список используемой литературы

1. Федеральный закон «Об образовании в Российской Федерации». М.: Омега-Л, 2014. 134 с.
2. Федеральный государственный образовательный стандарт среднего (полного) общего образования [Электронный ресурс]: // Министерство образования и науки Российской Федерации. URL: <https://fgos.ru/fgos/fgos-soo>
3. Стандарт среднего полного (общего) образования по математике. Базовый уровень, <http://www.school.edu.ru/dokedu.asp?obno=19814>
4. Стандарт среднего полного (общего) образования по математике. Профильный уровень, <http://www.school.edu.ru/dokedu.asp?obn0=19812>
5. Агазадзе Ш.М. / Технология и геометрическое построение // Проблемы и перспективы развития образования: материалы VI Междунар. науч. конф. (г. Пермь, апрель 2015 г.). Пермь: Меркурий, 2015. vi, 164 с.
6. Александров А.Д., Вернер А.Л., Рыжик В.И. Геометрия: учеб. для 10 кл. школ с углубл. изучением математики. 4-е изд., дораб. М.: Рос. акад. наук, Рос. акад. образов., изд-во «Просвещение», 2006; 270 с.
7. Александров А.Д., Вернер А.Л., Рыжик В.И. Геометрия : учеб. для 10-11 кл. общеобразоват. учреждений. 4-е изд. М.: Рос. акад. наук, Рос. акад.-образования, изд-во «Просвещение», 2006. 240 с.
8. Александров А. Д., Вернер А. Л., Рыжик В. И. Геометрия. 10-11 классы: Учебник для общеобразовательных организаций. М.: Просвещение, 2014. 255с.
9. Александров А. Д., Вернер А. Л., Рыжик В. И. Стереометрия. Геометрия в пространстве: Учеб. пособие для уч. ст. кл. и абитуриентов. Висагинас, Alfa, 1998. 576 с.
10. Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф., С.Б. Кадомцев и др. Геометрия 10-11: учеб. для общеобразоват. учреждений: базовый и профильный уровни. М.: Просвещение, 2009. 255 с.

11. Бескин Н.М. Методика геометрии: учебник для пед. ин-тов. М.: Учпедгиз, 1947. 276 с.
12. Боровкова О.А. «Живая геометрия» в действии // Математика в школе. 2007. № 4. С. 37-43.
13. Булычев В. Проект ИСО и новые образовательные ресурсы в школьном курсе геометрии // Математика / Ежегод. учебно-метод. прилож. к газете «Первое сентября». 2008. № 15. С. 8-13.
14. Венкова, Н.Р. Использование компьютерных программ при изучении стереометрии/ Н.Н. Кошелева, Е.С.Павлова, Н.Р. Венкова // Актуальные проблемы юридической науки. Актуальные проблемы социально-экономического развития. В 2-х томах. Том 1. Тольятти: Волжский университет имени В.Н. Татищева, 2023. С. 207-210.
15. Венкова Н.Р. Методика обучения теме «Пирамида и её основные свойства» с помощью компьютерных средств в старших классах общеобразовательной школы / Н.Н. Кошелева, Н.Р. Венкова // Качество обучения как проблема контроля и оценки образовательной деятельности образовательных организаций (учреждений): сборник материалов II Международной научно-практической конференции, 27-28 января 2022 г., г. Луганск. Под общ. ред. Я.П. Кривко, Ю.В. Ефаниной, А.С. Сухотиновой; ГОУ ВО ЛНР «ЛГПУ». Луганск: Книта, 2022/ С. 36-42.
16. Венкова, Н.Р. Некоторые аспекты технологии обучения решению задач с помощью компьютерных средств по теме: «Пирамида и ее основные свойства» / Н.Н. Кошелева, Е.С. Павлова, Н.Р. Венкова // Азимут научных исследований: педагогика и психология. 2023. Том 12, №1(42). С. 91-95.
17. Венкова Н.Р. Элективный курс «Решение задач по теме «Пирамида и ее свойства» в школьном курсе математики с применением программы GEOGEBRA / Н.Н. Кошелева, Н.Р. Венкова // Материалы III Всероссийской научно-практической конференции «Инновационные подходы к обучению математике в школе и вузе», 1-3 марта 2023 г., г. Омск.

18. Веселовский С.Б., Рябчинская В.Д. Геометрия: дидактические материалы по геометрии для 10 класса. М.: Просвещение, 2008. 96 с.
19. Геометрия. 10-11 классы: программы общеобразовательных учреждений / Сост.: Т.А. Бурмистрова. М.: Просвещение, 2010. 38 с.
20. Глазков Ю.А., Юдина И.И., Бутузов В.Ф. Геометрия. Рабочая тетрадь 10 класс: пособие для учащихся общеобразовательных учреждений. М.: Просвещение, 2009. 100 с.
21. Гуревич С.В. Методика построения чертежа к геометрической задаче при изучении геометрии, основанном на идеях фузионизма: дис. . канд. пед. наук: 13.00.02. М., 1997. 174 с.
22. Гусев В.А. Психолого-педагогические основы обучения математике. М.: ООО «Изд-во «Вербум- М», «Издательский центр «Академия», 2003. 432 с.
23. Евстафьева Л.П. Геометрия: дидактические материалы для 10-11 кл. М.: Просвещение, 2004. 78 с.
24. Ермак Е.А. Развитие пространственного мышления при изучении геометрии: Учебное пособие. Псков: Псковский государственный университет, 2014. 48с.
25. Калинин А.Ю., Терешин Д.А. Стереометрия 10: экспериментальный учебник для школ с углублённым изучением математики М.: МФТИ, 2005. 256 с.
26. Калинин А.Ю., Терешин Д.А. Стереометрия 11: экспериментальный учебник для школ с углублённым изучением математики М.: МФТИ, 2005. 336 с.
27. Калинин А.Ю. Терешин Д.А. Геометрия, 10-11 классы. / Учебник для образовательных учреждений. Профильный уровень. М., Издательство МЦМНО, 2011. 624 с.
28. Каплунович И.Я. Развитие пространственного мышления школьников в процессе обучения математике. Н. Новгород: НРЦРО, 1996. 99 с.

29. Киселев А.П. Элементарная геометрия. Книга для учителя. М.: Просвещение: АО «Учеб. лит.», 1996. 287 с.
30. Костицын В.Н. Практические занятия стереометрии. -М.: Издательство «Экзамен», 2004. 160 с.
31. Крайзман М.Л. Высота пирамиды // Научно-популярный физико-математический журнал «Квант», 1973. № 10. С. 56-60. URL: http://kvant.mccme.ru/1973/10/vysota_piramidy.htm
32. Манвелов С.Г. Конструирование современного урока математики: Книга для учителя. М.: Просвещение, 2002. 175 с.
33. Методика преподавания математики в средней школе: частная методика / А.Я. Блох, В.А. Гусев и др.; Сост. В.И. Мишин. М.: Просвещение, 1987. 416 с.
34. Никифорова М.А. Новые компьютерные технологии// Математика/ Учебно-методическое приложение к газете «Первое сентября». 2004. № 2931.
35. Никифорова М.А. Преподавание математики и новые компьютерные технологии // Математика в школе. 2005. № 7. С. 72-80
36. Ольбинский И.Б. Методика обучения учащихся старших классов рефлексивному исследованию математических задач: дис. канд. пед. наук: 13.00.02. Москва, 2002. 222 с.
37. Орлов В.В. Организация самостоятельного поиска решения стереометрических задач с помощью опорных конструкций: дисс. . канд. пед. наук: 13.00.02. Л., 1990. 171 с.
38. Перельман Я.И. Как сделать изучение геометрии интересным и жизненным? // Математика в школе, 2016. № 1. С. 25–30.
39. Петрова М.А. Задачи стереометрии: сфера и многогранники комбинации фигур. // Математика в школе. 2000. № 2. С. 34-37.
40. Погорелов А.В. Геометрия. 10-11 класс. Учебник для общеобразоват. организаций. М.: Просвещение, 2014. 175с.

41. Подходова, Н.С. Методика обучения математике. В 2 ч. Часть 1: учебник для академического бакалавриата / Н.С. Подходова, В.И. Снегурова. М.: Издательство Юрайт, 2017. 274 с.
42. Поздняков С.Н. Информационная среда как новый фактор обучения математике / Всероссийская конференция «Математическое образование на рубеже веков». М.: МЦНМО, 2000. С. 208-211.
43. Потоскуев Е.В., Звавич Л.И. Геометрия. 10 кл.: задачник для общеобразовательных учебных заведений с углубл. и профильным изучением математики. М.: Дрофа, 2003. 256 с.
44. Потоскуев Е.В., Звавич Л.И. Геометрия. 11 кл.: задачник для общеобразовательных учебных заведений с углубл. и профильным изучением математики. М.: Дрофа, 2003. 240 с.
45. Потоскуев Е.В., Звавич Л.И. Геометрия. 11 класс: Учебник для общеобразовательных организаций. М.: Дрофа, 2004. 369 с.
46. Рыжик В.И. Геометрия: дидакт. материалы для 10 кл. общеобразовательных учреждений. 10-е изд. М.: Просвещение, 2008. 128 с.
47. Рыжик В.И. Геометрия: дидакт. материалы для 11 кл. общеобразовательных учреждений. 10-е изд. М.: Просвещение, 2008. 128 с.
48. Саакян С.М., Бутузов В.Ф. Изучение геометрии в 10-11 классах: кн. для учителя. 4-е изд., дораб. М.: Просвещение, 2010. 248 с.
49. Саранцев Г.И.. Обучение доказательству // «Математика в школе», 1996, №6, С.16-20.
50. Саранцев Г.И. Составление геометрических задач на заданных чертежах // Математика в школе. 1993. №6. С. 14-16.
51. Саранцев Г.И. Упражнения в обучении математике. 2-е изд., дораб. М.: Просвещение, 2005. 255 с.
52. Саранцев Г.И. Методика обучения математике в средней школе: Учеб. Пособие для студ. Мат. Спец. пед.вузов и ун-тов. М.: Просвещение, 2002. 224 с.

53. Смирнова И.М. Смирнов В.А. Геометрия. 10-11 класс. Учебник для общеобразоват. учреждений. М.: Мнемозина, 2008. 288 с.
54. Унт Э.И. Индивидуализация и дифференциация обучения. М.: Педагогика, 1990. 192с.
55. Смирнова И.М. Научно-методические основы преподавания геометрии в условиях профильной дифференциации обучения: дисс. докт. . пед. наук: 13.00.02. Москва, 1994. 364 с.
56. Смирнова И.М., Смирнов В.А. Изображение пространственных фигур. Элективный курс. 10-11 классы : учеб. пособие для общеобразоват. учреждений М.: Мнемозина, 2007. 64 с.
57. Страбыкина Л.А. Формирование геометрических понятий в средней школе с использованием компьютера: дис. канд. пед. наук: 13.00.02. Киров, 2002. 164 с.
58. Стратилатов П.В. Сборник задач по геометрии для 9-10 классов: пособие для учителя. М.: Просвещение, 1986. 48 с.
59. Фридман Л.М. Как научиться решать задачи. М.: Московский психолого-соц. ин-т; Воронеж: Изд-во НПО «МОДЭК», 1999. 240 с.
60. Хевсокова М.Ю. Методика обучения геометрическим преобразованиям пространства учащихся старшей школы в условиях профильной дифференциации: дис. канд. пед. наук: 13.00.02. Москва, 2011. 238 с.
61. Ходеева Т.В. Методика изучения многогранников в средней школе на основе фузионистской концепции: дис. канд. пед. наук: 13.00.02. Москва, 2001.220 с.
62. Черняева А.Р. Реализации деятельностного подхода в процессе формирования пространственного мышления учащихся при обучении построению сечений многогранников: дис. канд. пед. наук: 13.00.02. Москва, 2004. 155 с.
63. Цукарь А .Я. Развитие пространственного воображения: задания для учащихся. СПб.: Изд-во СОЮЗ, 2000. 144 с.

64. Шарыгин И.Ф. Задача «Две пирамидки» // Научно-популярный физико-математический журнал «Квантик», 2018. № 5. С. 36. URL: <https://kvantik.com/issue/pdf/2018-05.pdf>
65. Шереметьева О.В. Обучение решению стереометрических задач с учетом взаимосвязи образного и логического компонентов мышления: дис. . канд. пед. наук: 13.00.02. М., 1997. 126 с.
66. Шлыков В .В., Валаханович Т.В; Геометрия. Стереометрия: шк. учеб: пособие. Мн.: ООО «Асар», 2003. 240 с.
67. Штернбург Л. Задачи с нефиксированными фигурами // Научно-популярный физико-математический журнал «Квант», 1996. № 3. С. 52-53. URL: <http://kvant.mccme.ru/1996/03/p52.htm>
68. Щепин О.Н. Наглядно-конструктивный подход к изучению стереометрии в, старших классах средней школы: дис. . канд. пед. наук: 13.00.02. М., 1999. 126 с.
69. Якиманская И. С. Развитие пространственного мышления учащихся / И. С. Якиманская. Москва : Просвещение, 2014. 221с.
70. Задачи из сборника И.В. Яценко ЕГЭ 2023. URL: <https://2.shkolkovo.online/catalog/4186?SubjectId=1&ysclid=lim3sh7nq1788757905>
71. Калейдоскоп квант. Стереометрия для всех. Задача про шарики// Научно-популярный физико-математический журнал «Квант», 2010. № 6. С. 33. URL: <http://kvant.mccme.ru/pdf/2010/2010-06.pdf>
72. Научная электронная библиотека «Elibrary» [Электронный ресурс]. <http://elibrary.ru/defaultx.asp>
73. Официальный информационный портал Единого государственного экзамена [Электронный ресурс] <https://fipi.ru/>
74. Сборник задач по математике для поступающих во ВТУЗы / под ред. М.И.Сканави. 6-е изд. М.: Изд-во «ОНИКС – ЛИТ», 2013. 608 с.
75. Сайт «Математика. Школа. Будущее» А.В. Шевкина [Электронный ресурс]. <http://www.shevkin.ru>

76. Сайт учебно-методических комплексов по математике для 1-11 классов Г.К. Муравина и О.В. Муравиной [Электронный ресурс].
<http://muravin2007.narod.ru>
77. Программа GeoGebra. [Электронный ресурс].
<https://www.geogebra.org/>
78. Программа «Живая геометрия». [Электронный ресурс].
<http://sketchpad.keycurriculum.com/>
79. Программа Wingeom. [Электронный ресурс].
<https://www.softpedia.com/get/Science-CAD/Wingeom.shtml>
80. Программа The Geometer's Sketchpad»: [Электронный ресурс].
URL: <http://sketchpad.keycurriculum.com>.
81. https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_interactive_geometry_software
82. I.E. Leonard, J.E. Lewis, Classical Geometry: Euclidean, Transformational, Inversive, and Projective / L.: Wiley. 2014. 496 p.
83. I.E. Leonard, J.E. Lewis, Solutions Manual to Accompany Classical Geometry: Euclidean, Transformational, Inversive, and Projective/ L.: Wiley. 2014. 176 p.
84. Kay David C., College Geometry / N.Y.: Holt, Rinehart and Winston. 1969. 218 p.
85. Battista, M.T. The Development of Geometric and Spatial Thinking. In Lester, Jr., F.K. (ed.). Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. Charlotte, NC. 2007.