МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Тольяттинский государственный университет»

Институт математики, физики и информационных технологий
(наименование института полностью)

Кафедра «Высшая математика и математическое образование»
(наименование)

44.04.01 Педагогическое образование
(код и наименование направления подготовки)

Математическое образование
(направленность (профиль))

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА (МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ)

на тему «Систематизация и обобщение предметных результатов при обучении иррациональным уравнениям в курсе математики общеобразовательной школы»

Обучающийся Е.В. Ухабова
(Инициалы Фамилия) (личная подпись)

Научный руководитель канд. пед. наук, доцент, И.В. Антонова
(ученая степень (при наличии), ученое звание (при наличии), Инициалы Фамилия)

Тольятти 2023

Оглавление

Введение

Актуальность и научная значимость настоящего исследования. В настоящее время деятельность любого государственного образовательного учреждения регламентируется федеральными стандартами. Важное место среди них занимают Федеральные Государственные Образовательные стандарты, которые представляют собой совокупность требований к образованию определенного уровня и (или) к профессии, специальности и направлению подготовки, утвержденных федеральным органом исполнительной власти, осуществляющим функции по выработке государственной политики и нормативно-правовому регулированию в сфере образования. Требования ФГОС выражены в личностных, предметных и метапредметных результатах освоения обучающимися программы. Достижение этих результатов осуществляется путем формирования универсальных учебных действий [66].

В современном образовании важное место занимает проблема развития личности учащегося, при этом особая роль отводится развитию мыслительной деятельности. В мыслительном процессе обобщение и систематизация знаний занимают особое место. Обобщение и систематизация имеют большое значение в психологии и педагогике. Они позволяют развивать у обучающихся логическое мышление, творческие способности, научное мировоззрение.

На протяжении долгого времени обобщение являлось лишь элементом повторения на отдельных уроках. В настоящее время в рамках реализации ФГОС выделяют отдельные уроки систематизации и обобщения знаний.

Применение систематизации и обобщения математических знаний необходимо для правильного использования их школьниками в последующей учебной и практической деятельности.

В работах многих отечественных педагогов М.А. Данилова, М.Н. Скаткина [20], Л.Я. Зориной [26], И.П. Подласого [43] и других рассмотрены дидактические основы обобщения и систематизации знаний у школьников.

В исследованиях психологов Л.С. Выготского [11], Д.П. Горского [14], В.В. Давыдова [18], Т.А. Ратановой [48], Д.Б. Эльконина [72] и других под обобщением понимают мыслительную операцию.

В работах исследователей по теории и методике обучения математике Б.С. Каплана, Н.Х. Рузина, А.А. Столяра [28]; М.А. Родионова [70], Г.И. Саранцева [52], [53]; М.П. Эрдниева [73] и других описаны определенные подходы к осуществлению систематизации и обобщению знаний у обучающихся, методы и приемы их осуществления в учебной деятельности.

На основе анализа научных работ по данной теме можно говорить о возрастающем интересе к данной теме. Так, имеются диссертационные исследованиях, в которых:

- «определены условия и разработан механизм систематизации знаний при изучении аналитической геометрии, построены на их основе системы задач и заданий с учетом уровневой дифференциации» (Т.Л. Овсянникова [40], 1998 г.);
- «описана классификация приёмов, способствующих систематизации знаний; выявлены приёмы и формы организации учебных занятий, способствующие систематизации знаний учащихся; разработана методика систематизации знаний по предметам естественнонаучного цикла в общеобразовательной школе» (С.К. Золотарева [25], 2000 г.);
- «разработаны принципы отбора теоретического материала для классов с углублённым изучением математики или факультативов с целью систематизации основных математических понятий; обоснована необходимость использования понятия группы для обобщения свойств движения, подобий и аффинных преобразований на занятиях по выбору; доказано, что теоретические знания при развитии навыков обобщения, классификации и систематизации должны обладать, по возможности, признаками целостной теории» (В.Н. Сукманюк [60], 2001 г.);

– «разработана методика проведения обобщающего повторения темы «Числовые множества» в контексте понятия алгебраической структуры» (И.В. Васильева [9], 2002 г.);

– «определены структурные компоненты обобщения и систематизации знаний учащихся в процессе обучения; выявлены уровни систематизации знаний; построена методическая система обобщения и систематизации знаний, включающая в себя полный цикл учебно-познавательной деятельности, учитывающая закономерности учебной деятельности и технологический подход в обучении; описаны содержательные линии обобщения; выделены методы, приемы и формы организации уроков обобщения и систематизации; индивидуальные и групповые виды деятельности по обобщению знаний» (Е.И. Санина [51], 2002 г.);

– «выявлены виды и методы осуществления обобщений в процессе обучения математике; разработана методика использования обобщений в обучении математике учащихся полной средней школы» (Е.В. Малых [32], 2005 г.). В данных исследованиях раскрыты методические основы систематизации и обобщения знаний обучающихся; приводятся примеры уроков систематизации и обобщения; приемов, направленных на развитие у обучающихся способности обобщать и систематизировать.

Кроме того, в методической литературе рассматриваются цели и задачи систематизации и обобщения знаний; применение обобщения как метода решения задач; приемы учебной деятельности при систематизации и обобщения знаний; примеры обобщающих уроков, направленных на формирование обобщенных навыков.

Таким образом, **актуальность** темы исследования обусловлена сложившимися к настоящему времени противоречиями между: необходимостью применения обобщения и систематизации предметных результатов при обучении математике учащихся общеобразовательной школы в соответствии с требованиями требований ФГОС среднего общего образования и недостаточным использованием их на уроках, направленном на формирование у школьников умения создавать обобщения и устанавливать причинно-следственные связи между изучаемыми понятиями.

Указанные противоречия позволили сформулировать **проблему диссертационного исследования:** каковы методические особенности обобщения и систематизации предметных результатов учащихся при обучении математике в общеобразовательной школе?

Объект исследования: процесс обучения математике в общеобразовательной школе.

Предмет исследования: методика систематизации и обобщения предметных результатов учащихся при обучении иррациональным уравнениям в курсе математики общеобразовательной школы.

Цель исследования заключается в выявлении методических особенностей систематизации и обобщения предметных результатов учащихся при обучении иррациональным уравнениям в курсе математики общеобразовательной школы.

Гипотеза исследования основана на предположении о том, что если при обучении иррациональным уравнениям в курсе математики общеобразовательной школы использовать определенные приемы и способы осуществления обобщения и систематизации знаний школьников, а также систему задач, составленную на основе технологии укрупненных дидактических единиц, то это будет способствовать повышению качества их предметных результатов, а также обучения математике в целом.

Задачи исследования:

1. Определить основные подходы к понятиям систематизации и обобщения в обучении математике.
2. Выявить основные функции систематизации и обобщения при обучении математике.

3. Представить методические особенности применения систематизации и обобщения предметных результатов обучающихся на уроках математики.

4. Описать цели и задачи обучения иррациональным уравнениям.

5. Провести методический анализ темы «Иррациональные уравнения» и разработать систему задач, содержание которой ориентированно на систематизацию и обобщение предметных результатов обучающихся образовательной школы и составлено в рамках технологии укрупнения дидактических единиц для обучающихся старших классов.

6. Разработать программу элективного курса «Иррациональные уравнения», направленного на повышение качества предметных результатов школьников по теме.

7. Провести педагогический эксперимент и представить его результаты.

Для решения поставленных задач будут применяться следующие **методы исследования:** анализ психолого-педагогической, научной и учебно-методической литературы; изучение, наблюдение и обобщение школьной практики; анализ собственного опыта работы в школе; проведение констатирующего и поискового этапов педагогического эксперимента; систематизация и обобщение.

Теоретико-методологическую основу данного исследования составляют работы таких авторов, как В.А. Далингер [19], Т.А. Иванова [27], Ю.М. Колягин [29], М.А. Родионов [70], Г.И. Саранцев [52], З.И. Слепкань [58], Л.М. Фридман [68].

Базовыми для настоящего исследования явились также работы Е.В Малых [32], Е.И. Саниной [51], Н.Л. Стефановой, Н.С. Подходовой, В.В. Орлова [35], А.А. Столяра [28], М.П. Эрдниева [73].

Основные этапы исследования:

− 1 семестр (2021/22 уч.г.): анализ ранее выполненных исследований по теме диссертации, анализ школьных учебников, нормативных документов (стандартов, программ), анализ опыта работы школы на предмет методическим аспектов систематизации и обобщения знаний обучающихся в общеобразовательной школе;

− 2 семестр (2021/22 уч.г уч.г.): определение теоретических основ систематизации и обобщения предметных результатов при обучении математике в общеобразовательной школе;

− 3 семестр (2022/23 уч.г.): определение методических основ систематизации и обобщения при обучении иррациональным уравнениям в курсе математики общеобразовательной школы; разработка системы задач и элективного курса по теме «Иррациональные уравнения», содержание которых ориентированно на систематизацию и обобщение предметных результатов обучающихся старших классов образовательной школы;

− 4 семестр (2022/23 уч.г.): оформление диссертации, корректировка ранее представленного материала и аппарата исследования, описание результатов педагогического эксперимента, формулировка выводов.

Опытно-экспериментальная база исследования*:* ГБОУ «Школа № 1527» г. Москва.

Научная новизна исследования состоит в том, что в нем обоснованы методические рекомендации по систематизации и обобщению предметных результатов учащихся при обучении иррациональным уравнениям в курсе математики общеобразовательной школы.

Теоретическая значимость исследования заключается в раскрытии понятия обобщения и систематизации в обучении математике; рассмотрении функций систематизации и обобщения при обучении математике; описании методических особенностей применения систематизации и обобщения предметных результатов обучающихся на уроках математики.

Практическая значимость заключается в разработке системы задач и элективного курса по теме «Иррациональные уравнения», содержание которых ориентированно на систематизацию и обобщение предметных результатов обучающихся образовательной школы.

Достоверность и обоснованность результатов исследования обеспечивались сочетанием теоретических и практических методов исследования, анализом педагогической практики.

Личное участие автора в организации и проведении исследования состоит в раскрытии понятия обобщения и систематизации в обучении математике; рассмотрении функций систематизации и обобщения при обучении математике; описании методических особенностей применения систематизации и обобщения предметных результатов обучающихся на уроках математики; разработке системы задач и элективного курса по теме «Иррациональные уравнения», содержание которых ориентированно на систематизацию и обобщение предметных результатов обучающихся образовательной школы.

Апробация результатов исследования велась в течение исследования. Результаты докладывались на конференциях:

- Всероссийская студенческая научно-практическая междисциплинарная конференция «Молодежь. Наука. Общество-2021» (Тольятти, 20-24 декабря 2021 года, диплом за 1 место; секция «Математика. Физика»);
- научно-практическая конференции «Студенческие Дни науки в ТГУ» (диплом за 1 место, 1 этап, секция «Теория и методика обучения математике»; диплома за 3 место, 2 этап, секция «Математика, физика, IT»; апрель 2022);
- X Международная научная конференция «Математика. Образование. Культура» (к 160-летию со дня рождения Давида Гильберта), 27-29 апреля 2022 года, Россия, г. Тольятти (диплом за 3 место в международном конкурсе НИР аспирантов, PhD докторантов и магистрантов «Моя магистерская диссертация»).

По теме исследования имеется две публикации [64], [65].

На защиту выносятся:

1. Методические рекомендации по систематизации и обобщению предметных результатов учащихся при обучении иррациональным уравнениям в курсе математики общеобразовательной школы.
2. Система задач по теме «Иррациональные уравнениям», содержание которой ориентированно на систематизацию и обобщение предметных результатов обучающихся образовательной школы и составлено в рамках технологии укрупнения дидактических единиц для обучающихся старших классов.
3. Элективный курс «Иррациональные уравнения», направленный на повышение качества предметных результатов школьников по теме.

Структура магистерской диссертации. Работа состоит из введения, двух глав, заключения, содержит 7 таблиц, 9 рисунков, список используемой литературы и используемых источников (80 источников). Основной текст работы изложен на 75 страницах.

Глава 1 Теоретические основы систематизации и обобщения предметных результатов при обучении математике

1.1 Понятие обобщения и систематизации в обучении математике

В психолого-педагогической литературе под обобщением понимают продукт мыслительной деятельности человека, отражающий общие признаки и качества явлений действительности [30]; под систематизацией - мыслительную деятельность, в результате которой рассматриваемые объекты организуются в систему, модель или схему на основе выбранного принципа [42]. Систематизация и обобщение тесно связаны между собой.

Т.А. Ратанова в своей работе выделяет три уровня обобщений [48]:

- первый уровень - обобщение носит глобально-недифференцированный характер или опирается на несущественный признак, отсутствует умение разграничивать признаки, они подменяются несущественными;
- второй уровень - обобщение дифференцировано, но осуществляется не сразу, а в результате упражнений, легче выделяются существенные признаки, но с трудом отграничиваются несущественные;
- третий уровень - обобщение основывается на всестороннем анализе и синтезе, на ясном разграничении существенных и несущественных признаков.

Можно заметить, что важным условием успешного обучения обобщениям учащихся является последовательное усвоение операций мышления и организация практических упражнений.

Д.П. Горский в своей работе [14] рассматривает понятие обобщения, его виды и процесс осуществления обобщения с позиции современной логики. Автор выделяет абстрагирование как операцию, позволяющую осуществить переход от менее общего к более общему; предлагает рассматривать абстракцию как этап процесса обобщения.

Вместе с этим, обобщения могут проводиться и при обучении математике школьников, так как основной целью обучения математике в общеобразовательной школе является формирование у них системы знаний.

В теории и методике обучения математике теоретические аспекты применения систематизации и обобщения предметных результатов школьников при обучении математике описывались в работах В.А. Далингера [19], Т.А. Ивановой [27], Ю.М. Колягина [29], Г.И. Саранцева [52], Л.М. Фридмана [68] и др. Остановимся на результатах некоторых исследований.

По мнению Ю.М. Колягина, при обобщении мысленно выявляют какое-нибудь свойство, принадлежащее множеству объектов и объединяющее эти объекты воедино [29, с. 86].

В.А. Далингер под обобщением понимает «сложный прием умственной деятельности, который предполагает умение анализировать, выделять главное, сравнивать, абстрагировать, синтезировать» [19, с. 6].

Г.И. Саранцев описывает обобщение как: «форму перехода от частного к общему, имеющую целью выделение общих существенных свойств, принадлежащих только данному классу объектов»; «один из эффективных приемом открытия фактов, поиска доказательства теоремы, способа решения задачи». Раскрывает методические аспекты применения обобщения при решении задач, основанного преимущественно: в алгебре - на расширении области изменения параметра; в геометрии – на переходе от данного множества к более широкому множеству, содержащему данное [52, с. 119]. Кроме того, автором выделены пути выяснения места формируемого понятия в системе других понятий, которое связано с этапом систематизации учебного материала, на котором устанавливаются связей между определенными понятиями, теоремами; систематизируется материал по разным основаниям; обобщаются понятия; происходит конкретизация понятий. Систематизацию понятий рекомендуется реализовывать «в процессе решения задач на установление связей между понятиями, построение схем, устанавливающих связи, на составление «родословных» понятий и т. д.» [52, с. 138].

Вместе с этим, в исследовании Е.В. Малых рассматриваются вопросы осуществления систематизации математических понятий и способов решения задач на основе обобщения. Так, автор подчеркивает, что «сравнение и анализ конкретных сходных объектов позволяют обобщить их до нового понятия, сравнение и анализ сходных задач и их решений - до методов решения классов задач» [32, с. 8].

Л.М. Фридман указывает, что в математике обобщение используется в двух формах: форме эмпирического обобщения, которому соответствует движение хода мысли от общего к частному; форме научно-теоретического обобщения, которому соответствует движение хода мысли от общего к частному, от внутреннего к внешнему. В обучении математике предпочтительнее пользоваться теоретическим обобщением, то есть, когда при обучении математическим понятиям следует сначала дать школьникам общее представление об рассматриваемом понятии, затем его обобщать, углублять, конкретизировать [68, с. 180].

З.И. Слепкань выделяет две формы обобщения в зависимости от уровня познания: генерализации и понятийного обобщения. Если же рассматривать только понятийное обобщение, то оно может быть представлено в двух формах: элементарное эмпирическое обобщение и обобщение на уровне теоретического мышления [78, с. 24]. З.И. Слепкань подчеркивает, что «учить приемам правильного обобщения — одна из главных задач обучения математике».

Понятия обобщения и систематизации рассматривается и в зарубежной методической литературе. Приведем анализ некоторых из них.

В статье М.Д. Торрес [79] обобщение рассматривается как основной элемент индуктивного рассуждения. Отдельно автор выделяет алгебраическое обобщение закономерностей как обобщение, включающее:

- осознание общего свойства, обнаруженного при работе с рядом конкретных случаев;
- применение этого свойства к следующим в серии случаям;
- способность использовать общее свойства для вывода выражения, с помощью которого можно вычислить значение любого члена ряда.

И.М. Фитриях, И. Аррифадах [74] в своей работе определяют обобщение как процесс поиска закономерностей и общей связи и установления связей на различных уровнях математического мышления. Обобщения подразделяют на четыре части:

- восприятие обобщения,
- выражение обобщения,
- символическое выражение обобщения,
- манипулирование обобщением.

В работе С. Харгривз и М. Морган [75] подробно рассматривается понятие систематизации опыта. Под систематизацией авторы понимают процесс, целью которого является производство знаний о действии или практике посредством аналитического осмысления и интерпретации того, что произошло. По мнению авторов, систематизация может способствовать:

- обсуждению и обновлению концепций и подходов, которые поддерживают практическую деятельность;
- созданию знаний, которые могут быть применены к общим ситуациям.

Отметим, что многие зарубежные авторы подчеркивают важность обобщения и систематизации знаний в учебном процессе [76-78], [80]. Систематизацию и обобщение рассматривают как важные этапы в процессе математического мышления.

Таким образом, обобщение можно рассматривать как прием мыслительной деятельности, так и как метод обучения. Систематизацию понимают как метод, мыслительный процесс, направленный на упорядочивание предметов в систему на основе определённого признака.

Систематизация и обобщение тесно связанные между собой понятия, способствующие углублению и расширению знаний по изучаемой теме, развитию математического мышления.

1.2 Функции систематизации и обобщения при обучении математике

Как было отмечено выше, для реализации одного из требований ФГОС среднего общего образования к предметным результатам изучения учебного предмета «Математика» о сформированности у школьников «представлений о понятиях как о важнейших моделях, позволяющих описывать и изучать различные процессы и явления действительности; владение основными понятиями; владение методами доказательств и алгоритмов решения задач, умение их применять, проводить доказательные рассуждения в ходе решения задач» [66] у школьников необходимо формировать умения создавать обобщения и устанавливать причинно-следственные связи между изучаемыми понятиями. В мыслительном процессе обучающихся обобщение и систематизация знаний занимают особое место. Они позволяют развивать у них логическое мышление, творческие способности, научное мировоззрение.

Т.А. Иванова в работе [27] пишет о необходимости организации деятельности учеников для обобщения и систематизации приобретенных ими знаний. При этом функция систематизации заключается в установлении структурно-логических связей между отдельными элементами знаний данной темы, а также с пройденными темами, разделами курса или учебными предметами. Обобщение выполняет функцию выделения ведущих понятий, методов, идей.

В исследовании Е.И. Саниной [51] выделены методические особенности обобщения и систематизации знаний учащихся, рассматриваются технологические процедуры, позволяющие внедрить теоретические положения в практику работы общеобразовательных школ. Нами установлено, что автором также выделяются функции обобщения и систематизации знаний:

– «функция фундаментализации знаний, которая заключается в преодолении фрагментарности, отрывочности знаний, установлении внутрипредметных и межпредметных связей;

– развивающая функция, состоящая в индивидуальном развитии личности посредством обобщения и систематизации знаний;

– функция трансформации знаний, заключающаяся в преобразовании знаний, умении применять их в нестандартных учебных ситуациях;

– мировоззренческая функция, которая сводится к интеграции научных знаний и формированию мировоззрения в процессе обучения математике;

– аналитическая функция, отражающаяся в анализе, планировании и управлении процессом обучения математике» [65].

В пособии М.А. Родионова и Н.Н. Храмовой выделяют четыре основных функции систематизации знаний на уроках математики:

– «выстраивание изученного материала в сжатую с логической точки зрения структурную систему;

– демонстрацию взаимосвязей между отдельными вопросами или целыми разделами курса;

– установление межпредметных связей;

– овладение учащимися методологическими знаниями, процессом получения знаний, средствами познания (процесс, законы, способы и приёмы получения новых знаний, история развития науки и т.д.)» [70, с. 10].

В своей работе И.В. Акимова, Е.И. Титова, А.Н. Круглова, Е.И. Куимова [41, с. 39-43] называют шесть механизмов систематизации знаний, выполняющих различные функции в реализации учебного процесса:

– прогнозирующий, состоит в планировании учебной деятельности;

– анализирующий, заключается в управлении аналитической функцией мышления;

– выделяющий, основанный на выделении важных для изучения элементов знаний, их функций и их систематизации;

– интегрирующий, заключающийся в структурировании знаний и построении схем;

– поисковый, состоящий в углублении знаний, часто на основе решения дополнительных задач;

– контролирующий, который сводится к контролю усвоения математических знаний.

По мнению учителя математики Т.С. Поповой, каждая из описанных функций реализуется в определенных сочетаниях и проявлениях на всех этапах обобщения учебного материала при углубленном изучении математики в школе, способствуя достижению образовательного результата, направленного на личностный рост обучающегося. В процессе обобщения должны использоваться «дидактические и методические ресурсы предмета математики, такие как:

– актуализация прикладных математических теорий, как составляющая углубленного образования. Например, можно выделить значение алгоритма Евклида нахождения наибольшего общего делителя чисел, как основу теории компьютерной алгебры;

– конструирование математических моделей, как способ познания общей картины мира. Например, через исследование математического моделирования музыкального произведения можно осмыслить знаменитый тезис Пифагора «Все есть число»;

– активные и интерактивные методы обучения, как средства устойчивого восприятия теоретических знаний. Например, это могут быть квест-технологии, кейс-метод, метод открытых задач, метод проектов и другие» [45, с. 105].

Таким образом, систематизация и обобщение выполняют важную роль в выявлении уровня знаний и умений обучающихся; в установлении места и причины затруднений, пробелов, с целью дальнейшей коррекции;

в совершенствовании знаний, умений и навыков; в управлении процессом обучения; в развитии творческих способностей и познавательной активности.

1.3 Применение систематизации и обобщения предметных результатов, обучающихся на уроках математики

Обобщение как метод решения задач, по мнению Е.В. Малых, выполняется по следующему алгоритму:

«1. Выделить частный случай задачи, для которого задача решается легко и решить задачу для этого частного случая.

2. Рассмотреть более общий, но все же частный случай, содержащий первый.

3. Рассмотреть общий случай» [32].

В исследовании автора приведен следующий пример на обобщение как метода решения задач.

Теорема: «Доказать, что сумма расстояний от любой точки M правильного треугольника до его сторон равна длине высоты треугольника».

1. Рассмотрим частный случай задачи (рисунок 1): M – вершина треугольника. Ясно, что сумма расстояний от точки M до сторон треугольника равна длине высоты.

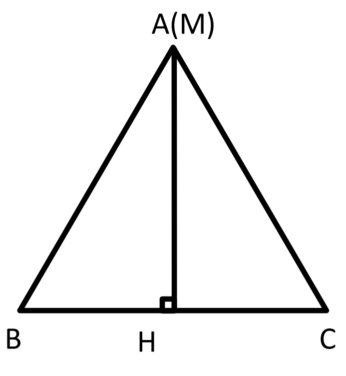

Рисунок 1 – Первый этап решения задачи

2. Рассмотрим более общий случай (рисунок 2): точка M лежит на стороне треугольника. Проведем ME || BC. Треугольник MAE правильный, высоты AK и MN равны. Легко установить, что AH = MN + MF.

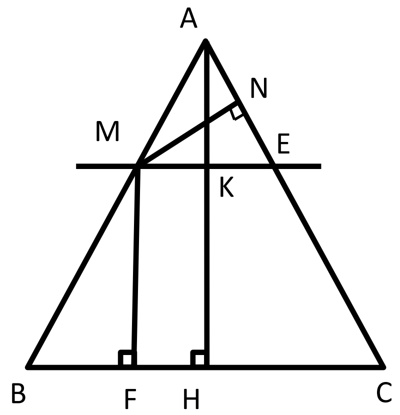

Рисунок 2 – Второй этап решения задачи

3. Рассмотрим общий случай (рисунок 3): точка M – произвольная внутренняя точка треугольника ABC. «Проведем через точку M прямую DE || BC. Получим, что треугольник ADE правильный и AK = PM + MN, поэтому AH = PM + MN + KN = PM + MZ + MF. Следовательно, сумма расстояний от любой точки M правильного треугольника до его сторон равна длине высоты треугольника» [32].

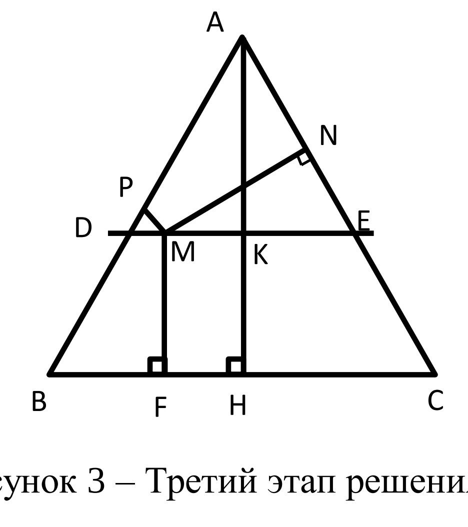

Рисунок 3 – Третий этап решения задачи

Если осуществлять обобщение понятий, то данную задачу можно обобщить до теоремы стереометрии: сумма расстояний от любой точки M правильного тетраэдра до его граней равна длине высоты тетраэдра. Доказательства этих теорем аналогичны.

Рассмотрим еще один пример, где к появлению новых задач так же приводит обобщение понятий, данных в задаче.

Задача. «Найти диагональ куба, если даны три его измерения (длина, ширина и высота)». Обобщив понятие куба до понятия прямоугольного параллелепипеда, получим новую задачу: «Найти диагональ прямоугольного параллелепипеда (рисунок 4), если даны три его измерения (длина, ширина и высота)» [29].

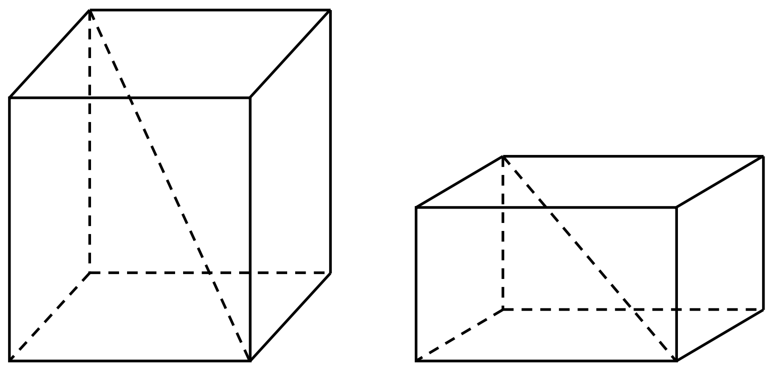

Рисунок 4 – Диагональ куба и диагональ прямоугольного параллелепипеда

Обобщение понятий осуществляется при изучении формулы n-го арифметической прогрессии. Сначала происходит рассмотрение конкретных примеров на вычисление различных членов арифметической прогрессии по заданным первому ее члену и разности. Используют равенства: $a_2 = a_1 + d$, $a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d$ и т. д.

Возникает обобщение данных равенств в одной формуле $a_n = a_1 + + d(n - 1)$, с помощью которой устанавливается более короткий способ для вычисления любого члена арифметической прогрессии.

Данная формула получает новое обобщение, когда устанавливается, что любая арифметическая прогрессия является линейной функцией натурального аргумента: $y = kx + b$, где $x \in N$.

Замена одних отношений между объектами задачи другими тоже может привести к появлению новых задач.

«От теоремы «Середины сторон выпуклого четырехугольника являются вершинами параллелограмма» можно перейти к теореме «Точки, делящие стороны четырехугольника в одном и том же отношении (соединенные определенным образом) являются вершинами параллелограмма», а можно перейти к теореме стереометрии»: «Середины сторон пространственного четырехугольника являются вершинами параллелограмма» [71].

Одним из способов осуществления систематизации на уроках математики являются блок-схемы.

Б.С. Каплан, Н.К. Рузин, А.А. Столяр отмечают, что их применение позволяет перейти от механического зазубривания к полному осмысленному, структурированному пониманию основ школьной программы. Блок-схемы (рисунок 5) могут быть использованы для «построения определений некоторых понятий; организации самостоятельного изучения вопросов; выяснения совокупности сведений, получаемых в результате изучения теории; выяснения связи материала темы с другими темами, как предшествующими, так и последующими» [28].

В своей книге авторы выделяют два основных аспекта систематизации:

- умение учителем систематизировать учебный материал;
- обучение учащихся структурированию знаний и включению новых знаний в систему.

Кроме того, для систематизации знаний у школьников в теории и методике обучения математике рекомендуется решать задачи на построение родословных понятий.

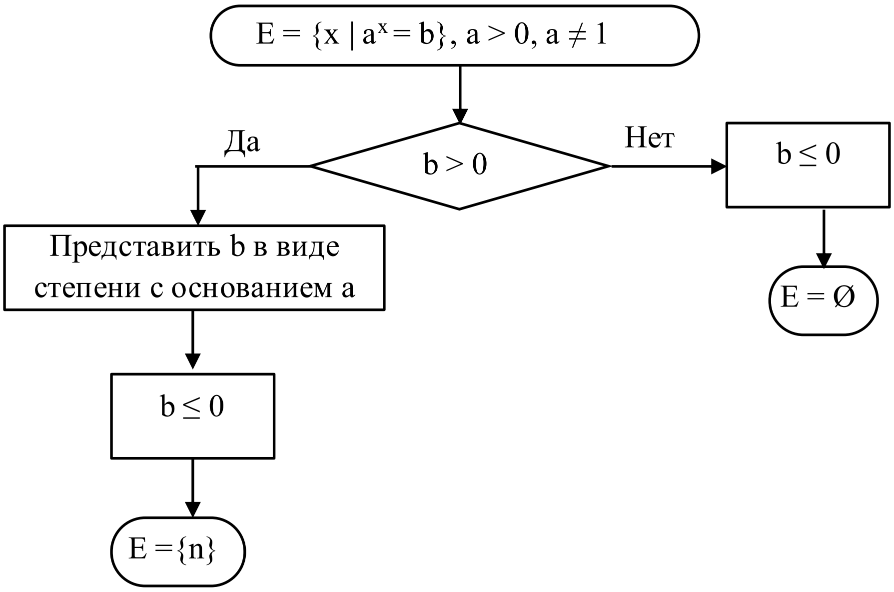

Рисунок 5 – Блок-схема решения простейших показательных уравнений [28]

Родословная понятия – это построение логического «дерева» возникновения данного понятия.

Как утверждают Н.Л. Стефанова, Н.С. Подходова, В.В. Орлов, «чтобы построить родословную какого-либо понятия, необходимо знать основные неопределяемые понятия, которые приведены в конкретном учебнике, основные отношения между ними и определения тех понятий, на которых базируется данное понятие» [35]. Например, приведенная авторами родословная понятия «ромб» (рисунок 6) отражает этапы формирования этого понятия, начиная от первичных понятий.

Отметим, что одним из приемов осуществления систематизации знаний на уроках является составление памяток. Памятки представляют собой описание того, зачем, почему или как следует выполнять и проверять какое-либо учебное задание (упражнение). Для успешного осуществления систематизации знаний полезно, чтобы составление памяток осуществлялось в совместной деятельности педагога и ученика.

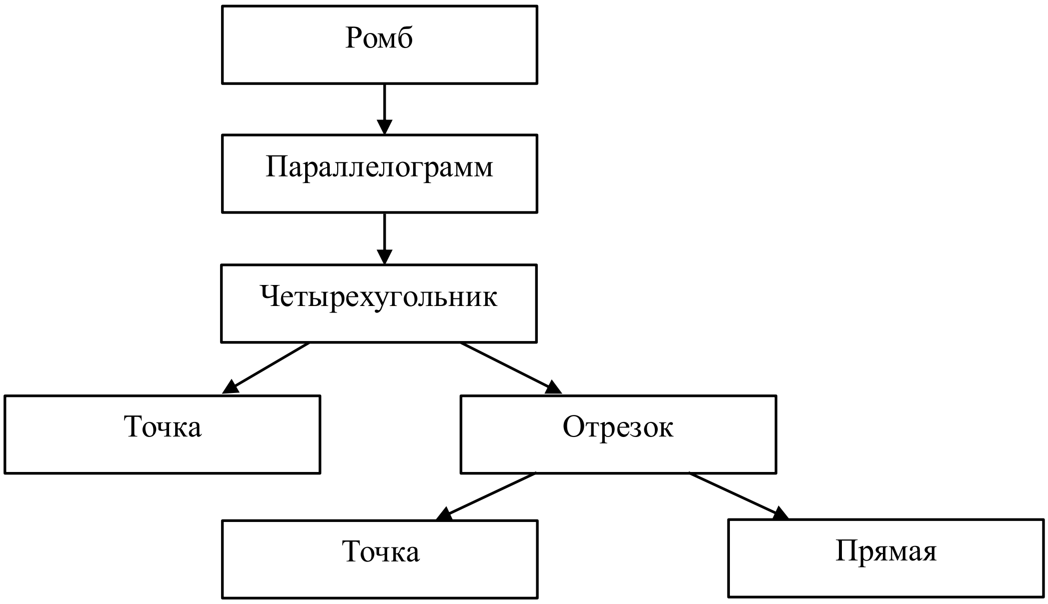

Рисунок 6 – Родословная понятия «ромб» [35]

Еще одним приемом, позволяющим осуществлять систематизацию и обобщение, является использование интеллект-карт (ментальных карт). Интеллект-карты представляют собой информацию, которая отражает связи между понятиями, элементами изучаемых областей. В основе составления карт лежит теория радиантного мышления. Основная тема создаваемой ментальной карты располагается в центре. От центрального образа проводят линии, на которых записывают ключевые слова, слова-ассоциации. Каждая линия может делиться на разное количество новых линий, отображающие подтемы. Важно не только знакомить обучающихся с готовыми интеллект-картами. Очень важно использовать «самостоятельное составление ментальных карт обучающимися, которое позволит им глубоко осознать, систематизировать и обобщить материал» [31].

Для развития умения систематизировать и обобщать полезным может быть составление сводных таблиц. Важной особенностью таблиц является способность их обновления с течением изучения учебного материала. Работа с таблицами может быть организована различным образом:

- совместно с учителем, постепенно заполняется на нескольких занятиях;
- совместно с учителем, заполняется на обобщающем занятии;
- самостоятельно учащимися после изучения темы.

В своей статье В.Г. Вальян приводит ряд требований, которые необходимо соблюдать при составлении систематизирующих и обобщающих таблиц:

- «таблица должна отражать генетически исходную, всеобщую связь, определяющую содержание и структуру всей темы;
- графическая наглядность таблицы должна быть легко читаема, то есть не должна содержать лишних визуальных раздражителей, мешающих восприятию главного;
- графическая наглядность таблицы должна быть упорядочена;
- в графической наглядности должны быть сделаны акценты на основных смысловых элементах путем выделения цветом, размером, формой;
- сложная графическая наглядность должна расчленяться на ее составные элементы;
- графическая наглядность должна учитывать привычные ассоциации и стереотипы и позволять студентам опираться на них при воссоздании образов» [8].

В работе Л.Н. Золотаревой представлена классификация приемов, способствующих осуществлению систематизации знаний школьников. К ним относятся:

- «приемы работы с литературой, состоящие в отборе учебного материала, планировании хода изучения отдельных статей, различных видах конспектирования;
- приемы структурирования изучаемой информации, заключающиеся в определении места изучаемой темы в структуре раздела, планировании изучаемой информации;

- приемы, способствующие установлению связей между элементами знаний, которые состоят в установлении преемственной связи между старым и новым материалом, сопоставлении, установлении сходств и различий одного материала с другим;
- приемы наглядного выражения систематизирующей деятельности, включающие в себя составление таблиц, графов, матриц, классификационных схем;
- приемы обобщения, состоящие в проведении регулярных обобщений, построении обобщающих ответов на основе планов обобщенного характера, составлении обобщенного плана изучения подсистемы научных знаний, использовании усложняющихся схематичных рисунков;
- приемы по выработке практических умений и навыков, которые включают в себя привлечение теоретического материала для решения практических задач, решение задач в общем виде, самостоятельное составление задач обучающимися;
- приемы установления межпредметных связей, которые заключаются в установлении межпредметных связей, причинном объяснении явлений, использовании стимулирующих звеньев» [25].

Таким образом, выбор приемов и методов должен определяться спецификой учебного материала, этапа, на котором проводится систематизация и обобщение. Для использования систематизации и обобщения на уроках математики важно разделять материал на логически завершенные части, применять методы и приемы, облегчающие понимание материала. Применение наглядных методов способствует прочности знаний учащихся, создает визуальные образы, активизирующие наглядно-образную память. Важно, чтобы систематизация и обобщение происходили не только в ходе совместной деятельности учителя и ученика, но и в результате самостоятельной деятельности школьника. Самостоятельное выполнение учащимися различных приемов позволит научиться эффективно обобщать и систематизировать материал, развивать логическое мышление, повышать качество их знаний и умений. Учитель в это время выполняет направляющую роль.

Выводы по первой главе

Определены основные подходы к систематизации и обобщению предметных результатов при обучении математике. Было выявлено, что обобщение и систематизация являются необходимым условием усвоения знаний. В методике обучения математике вопросы осуществления систематизации и обобщения рассматривают Б.С. Каплан, Т.А. Иванова, Г.И. Саранцев, А.А. Столяр, М.П. Эрдниев и другие.

Выделены функции обобщения и систематизации предметных результатов в учебной деятельности. Важность систематизации и обобщения заключается в закреплении, углублении, расширении знаний у обучающихся, формировании научной картины мира.

Были рассмотрены различные методы, приемы осуществления систематизации и обобщения предметных результатов. Среди них были выделены обобщение как метод решения задач и как метод формирования понятий, составление памяток, родословных понятий, интеллект-карт, сводных таблиц, блок-схем.

Глава 2 Методические основы систематизации и обобщения при обучении иррациональным уравнениям в курсе математики общеобразовательной школы.

2.1 Основные цели и задачи обучения иррациональным уравнениям

Изучение уравнений составляет значительную часть школьного курса математики.

Содержательно-методическая линия уравнений в курсах алгебры, алгебры и начал математического анализа богата по содержанию, способам решения уравнений, по возможностям их применения при изучении различных тем.

В книге А.Я. Блоха, В.А. Гусева, Г.В. Дорофеева [36] можно выделить три основные направления линии уравнений в курсе математики:

- прикладная направленность. проявляется при использовании уравнений как части средств, используемых в математическом моделировании;
- теоретико-математическая направленность. заключается в двух аспектах: при изучении обобщенных понятий, и методов, относящихся к линии, а также при изучении наиболее важных классов уравнений и их систем;
- направленность на установление связей с остальным курсом математики.

Укажем, что наиболее тесно связано изучение уравнений с числовой и функциональной линиями.

В своей статье А.П. Тарасова выделяет следующие цели изучения уравнений в куре математики:

- «сформировать представление об уравнении как об истинном равенстве, содержащем неизвестное число;

− сформировать умение использовать терминологию (уравнение, решение уравнения;

− сформировать умения решать уравнения» [61].

И.А. Гладышева и Т.С. Толкачева сформулировали в своей работе три уровня усвоения школьного курса изучения линии «Уравнения»:

«1 уровень. Умения решать простейшие уравнения и по формулам, алгоритмам, частным приемам, по образцу или на основе помощи извне, проверять решение подстановкой.

2 уровень. Умение решать типовые задачи в стандартных ситуациях, самостоятельно выбирать и использовать формулы, алгоритмы и приемы решения и проверки, составлять простейшие задачи.

3 уровень. Умения решать уравнения с параметрами, типовые и прикладные задачи методом уравнений и неравенств в нестандартных ситуациях, самостоятельно использовать обобщенные и искусственные приемы решения, проверки и переноса» [13].

В примерной рабочей программе среднего общего образования учебного предмета «Математика» отмечено, что при изучении данной темы выпускник на базовом уровне должен уметь:

− «оперировать понятиями: тождество, уравнение, неравенство; целое, рациональное, иррациональное уравнение, неравенство;

− выполнять преобразования целых, рациональных и иррациональных выражений и решать основные типы целых, рациональных и иррациональных уравнений и неравенств;

− находить решения простейших систем и совокупностей рациональных уравнений и неравенств.

− моделировать реальные ситуации на языке алгебры, составлять выражения, уравнения, неравенства и системы по условию задачи, исследовать построенные модели с использованием аппарата алгебры» [47].

В примерной рабочей программе среднего общего образования по учебному предмету «Математика» [46] сказано, что в ходе изучения темы «Иррациональные уравнения» выпускник научится на углубленном уровне:

- «свободно оперировать понятиями: тождество, уравнение, неравенство, равносильные уравнения и уравнения-следствия; равносильные неравенства;
- использовать свойства действий с корнями для преобразования выражений;
- свободно оперировать понятиями: иррациональные, показательные и логарифмические уравнения; находить их решения с помощью равносильных переходов или осуществляя проверку корней;
- свободно оперировать понятиями: система и совокупность уравнений и неравенств; равносильные системы и системы-следствия; находить решения системы и совокупностей рациональных, иррациональных, показательных и логарифмических уравнений и неравенств;
- решать рациональные, иррациональные, логарифмические и тригонометрические уравнения и неравенства, содержащие модули и параметры;
- применять графические методы для решения уравнений и неравенств, а также задач с параметрами;
- моделировать реальные ситуации на языке алгебры, составлять выражения, уравнения, неравенства и их системы по условию задачи, исследовать построенные модели с использованием аппарата алгебры, интерпретировать полученный результат».

В книге Н.Е. Федоровой можно выделить следующие цели изучения иррациональных уравнений в курсе алгебры: «цель изучения параграфа - обучение решению иррациональных уравнений возведением обеих его частей в одну и ту же натуральную степень; формирование навыков познавательной рефлексии» [67, с.24].

По итогу изучения учащиеся должны «знать, что при возведении в натуральную степень обеих частей уравнения получается уравнение-следствие; уметь решать иррациональные уравнения» [68, с. 26].

В методических рекомендациях к учебнику А.Г. Мерзляка 10 класса говорится, что в результате изучения темы «Иррациональные уравнения» обучающийся на базовом уровне должен уметь «решать иррациональные уравнения методом следствий; решать иррациональные уравнения методом равносильных преобразований», а на углубленном уровне должен уметь «решать иррациональные уравнения методом следствий и методом равносильных переходов; решать иррациональные уравнения методом замены переменной и с использованием свойств функций, которые задают левая и правая части уравнений» [6]-[7].

В сборнике поурочных разработок по алгебре и началам анализа к УМК А.Н. Колмогорова сформулирована следующая цель изучения темы «Иррациональные уравнения»: «рассмотреть основные типы иррациональных уравнений и способы их решения» [50].

При этом автором предложены различные типы иррациональных уравнений, которые должен научиться решать каждый обучающийся: уравнения с одним знаком радикала, с двумя знаками радикала, однородные иррациональные уравнения, уравнения с радикалами больших степеней, уравнения, в которых важна группировка членов.

Таким образом, к основным целям и задачам изучения данной темы можно отнести:

- формирование понятия иррациональные уравнения;
- формирование представлений о различных типах иррациональных уравнений;
- формирование представлений о методах решения иррациональных уравнений и их применение;
- формирование умения выбирать наиболее удобный метод решения уравнения и обосновывать свой выбор.

2.2 Система задач по теме «Иррациональные уравнения»

В школьном курсе алгебры рассматриваются различные виды уравнений и неравенств. В КИМах единого государственного экзамена по математике задачи по теме: «Решение рациональных и иррациональных уравнений, неравенств и систем» встречаются как в заданиях базового, так и профильного уровней. Решение этих заданий часто вызывают у учащихся трудности, которые обычно связаны со следующими их особенностями - обилие формул и методов, используемых при решении уравнений и неравенств данного вида.

Актуальность темы «Иррациональные уравнения и неравенства» состоит в том, что навыки решения подобных заданий позволяют повысить уровень математической подготовки и подготовиться к государственной итоговой аттестации школьников.

Основная цель изучения темы «Иррациональные уравнения» обусловлена следующими причинами:

– основное понятие «иррациональные уравнения» и методы их решения входят в содержание базового и углубленного уровней изучения алгебры 10-11 классов;

– содержание темы позволяет охватить большое количество типов уравнений, а значит и различные методы их решения;

– задачи по теме способствуют интеллектуальному развитию учащихся, повышению уровня математической грамотности.

Перед разработкой системы задач по теме нами был выполнен ее методический анализ приведем его результаты.

Методический анализ темы.

Базовые знания: понятие корня, свойства арифметических корней, понятие степени, свойства степени с рациональным показателем, понятие уравнения, равносильность уравнений, свойства функций.

Вводимые понятия: иррациональное уравнение.

Вводимые утверждения: теоремы о равносильных переходах.

Теоретический материал.

Рассмотрим определение иррациональных уравнений, представленных в учебной литературе.

В учебнике Ш.А. Алимова [2] иррациональными называют уравнения, в которых «неизвестное х находится под знаком корня», а иррациональные неравенства как неравенства, «содержащие неизвестную под знаком корня». Тема «Иррациональные неравенства» предлагается для изучения в качестве дополнительного более сложного материала.

В учебнике А.Н. Колмогорова [3] под иррациональными понимают «уравнения, в которых под знаком корня содержится переменная». Определение иррационального неравенства в учебнике не рассматривается.

В учебнике А.Г. Мерзляка «уравнения, которые содержат под знаком корня переменную», называют иррациональными [34].

В учебнике А.Г. Мордковича дается следующее определение иррационального уравнения: «иррациональными называют уравнения, в которых переменная содержится под знаком радикала или под знаком возведения в дробную степень» [39].

Авторы рассматривают следующие теоремы:

Теорема 1. Если обе части уравнения возвести в нечетную степень, то получим уравнение, равносильное данному.

Теорема 2. При возведении обеих частей уравнения в четную степень получаем уравнение, являющееся следствием данному.

Теорема 3. Уравнение вида $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$ равносильно системе $\begin{cases} f(x) = g(x) \\ g(x) \ge 0 \end{cases}$.

Теорема 4. Уравнение вида $\sqrt{f(x)} = g(x)$ равносильно системе $\begin{cases} f(x) = (g(x))^2 \\ g(x) \ge 0 \end{cases}$.

Теорема 5. Если для любого $x \in M$ выполняются неравенства $f(x) \geq 0$ и $g(x) \geq 0$, то уравнения $f(x) = g(x)$ и $(f(x))^{2k} = (g(x))^{2k}$, $k \in N$, равносильны на множестве М.

В учебнике А.Г. Мерзляка на изучение темы отводится 6 часов, в учебнике Ю.М. Колягина - 3 часа, в учебнике Ш.А. Алимова – 4 часа, в учебнике А.Н. Колмогорова на изучение иррациональных уравнений отведено 2 часа.

Основным учебником по алгебре и началам математического анализа при разработке системы задач был выбран учебник А.Г. Мерзляка.

В УМК Алгебра и начала математического анализа А.Г. Мерзляка собран большой задачный материал разных уровней сложности. Это позволяет реализовать дифференцированный подход при изучении данной темы, формировать интерес к изучению алгебры и начал математического анализа.

Учебник содержит исторические справки, информацию для интересующихся математикой, вопросы для самоконтроля. Таким образом реализуется формирование универсальных учебных действий: поиск и выделение необходимой информации, структурирование полученной информации.

В конце учебника даются задания на повторение всех изученных тем в течение курса алгебры и начал математического анализа старшей школы. Это позволяет систематизировать и обобщить полученные знания, закрепить полученные навыки при выполнении математических заданий.

Завершается учебник разделами «Проектная работа» и «Дружим с компьютером». В рубрике «Проектная работа» собран материал, дающий представление обучающимся о проектах, представлен список тем с подобранной к ним рекомендуемой литературой. В рубрике «Дружим с компьютером» к каждой изучаемой главе предложены задания, которые можно выполнять с помощью компьютера, в том числе задания, содержащие элементы программирования. Использование заданий из данных рубрик также позволяет формировать различные универсальные учебные действия.

Тема «Иррациональные уравнения» изучается во 2 главе «Степенная функция» в параграфах 14-15, задания на повторение содержатся в разделе «Упражнения для повторения курса алгебры и начал анализа 10 класса».

В авторской программе на изучение данной темы отводится 9 часов. В результате изучения данной темы учащиеся должны:

– научится решать иррациональные уравнения методом следствий;

– научится решать иррациональные уравнения методом равносильных переходов;

– научится решать иррациональные уравнения методом замены переменной;

– научится решать иррациональные уравнения с использованием свойств функций, которые задают левая и правая части уравнений.

Также при разработке системы задач был выполнен анализ практического опыта учителей по теме «Иррациональные уравнения».

В статье А.Н. Марасанова «О методике обучения школьников решению иррациональных уравнений» систематизирован учебный материал по разделу «Иррациональные уравнения», выделены специфические особенности иррациональных уравнений, подробно рассмотрены методы их решения [33].

В статье М.К. Базарбаевой «Проблемные места при решении иррациональных уравнений в школе» [4] подробно разобраны случаи затруднений, с которыми могут столкнуться школьники при решении уравнений. В ходе решения уравнений даются способы разрешения этих затруднений.

В элективном курсе «Методы решения иррациональных уравнений и неравенств» А.Б. Хомушку рассматривается:

– решение иррациональных уравнений, содержащее двойную иррациональность.

– решение иррациональных логарифмических уравнений

– решение иррациональных показательных уравнений

– решение иррациональных тригонометрических уравнений

– решение иррациональных уравнений, содержащих модуль

– решение иррациональных уравнений с параметром [69].

В статье Е.К. Селезневой «Иррациональные уравнения, неравенства и их системы» рассмотрены методы решения иррациональных уравнений, методы иррациональных неравенств и их систем. Также обобщён алгоритм решения уравнений и неравенств [55].

В статье А.М. Григорьева в журнале «Квант» описаны различные приемы решения иррациональных уравнений [17].

В журнале «Математика в школе» также представлены различные типы задач по теме, решаемые различными методами – в статьях: Г.З. Генкина «Геометрические решения задач, содержащих иррациональные выражения» [12], П.Ф. Севрюкова «Об ошибках при решении иррациональных уравнений» [54]; А.Н. Смоляное «Нетрадиционные способы решения иррациональных уравнений» [59] и других авторов [21], [38], [44], [49], [56], [57].

Так, анализ научно-методической литературы свидетельствует о значимости темы «Иррациональные уравнения» в курсе алгебры и начал математического анализа; о необходимости углубления и расширения знаний по теме в элективных курсах.

В основу построения системы задач была выбрана технология укрупненных дидактических единиц (УДЕ) П.М. Эрдниева при обучении решению уравнений. Автор обосновал эффективность укрупненного введения новых знаний, позволяющего:

– «применять обобщения в учебной работе на каждом уроке;

– устанавливать больше логических связей в материале;

– выделять главное и существенное в большом объеме материала;

– понимать значение учебного материала в общей системе знаний;

– выявить больше межпредметных связей» [73].

В своей работе П.М. Эрдниев пишет, что под дидактической единицей стоит понимать «систему родственных единиц учебного материала, в которой симметрия, противопоставления, упорядоченные изменения компонентов учебной информации в совокупности благоприятствуют возникновению единой логико-пространственной структуры знания. Это определение в известной мере примыкает к определению понятия функциональной системы... По П.К. Анохину, система - совокупность не только взаимодействующих, но и взаимоСОдействующих компонентов, ориентированных на получение фокусированного полезного результата» [73].

Ключевой элемент технологии УДЕ — это упражнение-триада, элементы которой рассматриваются на одном занятии:

а) исходная задача;

б) ее обращение;

в) обобщение.

В качестве укрупнения дидактических единиц могут быть использованы следующие приемы:

- одновременное изучение взаимно обратных действий и операций;
- сравнение противоположных понятий при одновременном их рассмотрении;
- сопоставление родственных и аналогичных понятий;
- сопоставление этапов работы над заданием или способов его решения [62].

Еще одним приемом, позволяющим применять технологию УДЕ на уроках, является изменение требования к решению уравнения. Укрупнение происходит благодаря использованию новых действий с сохранением прежней последовательности. Также, часто используется прием укрупнения уравнений, основанный на изменении условия уравнения при сохранении требований [63].

В технологии УДЕ систематизация знаний как средство их самоорганизации осуществляется через использование блочно-модульного подхода к изучению учебного материала. Систематизация учебного материала осуществляется через такое его структурирование, когда учебная информация свертывается в компактные и обзорные формы. Результатом свертывания учебной информации являются блоки содержания, которые представляют логико-графическое структурирование учебного материала в виде знаково-символьных структур: фреймов, опорных схем, таблично-матричных опор, кластеров. Учащимся не дают структурированный учебный материал в готовом виде, а лишь логическую основу учебного материала, которая обозначает основные связи в учебном материале, определяет направление его изучения. Построение блоков содержания на учебном занятии слушатели осуществляют в совместной деятельности.

При укрупнении дидактического материала на уроках можно использовать следующую последовательность деятельности:

«а) организация усвоения учащимися вопросов теории;

б) целенаправленное обучение приемам решения задач;

в) организация самостоятельной работы учащихся при отработке изученного материала;

г) организация контроля знаний» [5].

Представим проектирование системы задач «Иррациональные уравнения и неравенства» с использованием технологии укрупненных дидактических единиц П.М. Эрдниева на практике.

Первый этап. Изучение теории, предшествующей изучению иррациональных уравнений и неравенств: понятие корня, свойств арифметических корней.

Второй этап. Изучение понятия «иррациональные уравнения».

Задание 1. Какое из приведенных уравнений является иррациональным?

а) $\sqrt{x} = 3$;

б) $x\sqrt{7} = 1 + x$;

в) $x + \sqrt{x} = 2$;

г) $x^2 - 5x\sqrt{2} = 4$.

Ответ: а) да; б) нет; в) да; г) нет.

Задание 2. Приведите три примера иррационального уравнения.

Третий этап. Решение иррациональных уравнений различными методами.

Задание 3. Решите уравнение $\sqrt{1-3x}=1-x$.

Решение: возведем обе части уравнения в квадрат, получим

$$1+3x=1-2x+x^2$$

$x^2-5x=0;\ x_1=0, x_2=5.$

Проверка:

$\sqrt{1+3*0}=1-0$, подходит

$\sqrt{1+3*5}=1-5$, не подходит

Ответ: x = 0.

Задание 4. Решите уравнение, используя переход к равносильной системе $\sqrt[6]{x^2-2}=\sqrt[6]{x}$.

Решение:

$$\begin{cases} x^2-2=x \\ x\geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=2 \end{array}\right. \\ x\geq 0 \end{cases}$$

$$x=2$$

Ответ: x = 2.

Задание 5. Решите уравнение, используя переход к равносильной системе $\sqrt{2x^2+28x+53}=3\sqrt{x^2+6x+8}$.

Решение: Запишем систему, равносильную уравнению

$$\begin{cases} x^2+6x+8\geq 0 \\ 9x^2+54x+72=2x^2+28x+53 \end{cases}$$

Решим неравенство $x^2+6x+8\geq 0$

$(x+4)(x+2)\geq 0$

Значит $x\,\epsilon\,(-\infty;-4]\cup[-2;\ +\infty)$.

Решим уравнение $9x^2+54x+72=2x^2+28x+53$

$7x^2+26x+19=0$

$x_1 = -1, x_2 = -\frac{19}{7}$

Корень $x_2 = -\frac{19}{7}$ не удовлетворяет неравенству системы.

Ответ: x = - 1.

Задание 6. Решите уравнение, используя переход к равносильной системе и метод замены переменной $\sqrt{\frac{3-x}{x-1}} + 3\sqrt{\frac{x-1}{3-x}} = 4.$

Решение: Пусть $u = \sqrt{\frac{3-x}{x-1}}$, тогда $\frac{1}{u} = \sqrt{\frac{x-1}{3-x}}$

$$\begin{cases} u + \frac{3}{u} = 4 \\ u > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} u = 1 \\ u = 3 \end{array}\right. \\ u > 0 \end{cases}$$

Обратная замена:

$$\left[\begin{array}{l} \sqrt{\frac{x-1}{3-x}} = 1 \\ \sqrt{\frac{x-1}{3-x}} = 3 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 1{,}5 \end{array}\right.$$

Ответ: x = 2; x = 1,5.

Четвертый этап. Укрупнение действий.

Задание 7. Найти сумму корней уравнения: $\sqrt{2x^2 - 8x + 12} = x^2 - 4x - -6$.

Решение: Пусть $\sqrt{2x^2 - 8x + 12} = t$, где $t \geq 0$.

Тогда $2x^2 - 8x + 12 = t^2$

$x^2 - 4x = \frac{t^2-12}{2}$

$t = \frac{t^2-12}{2} - 6$

$t^2 - 2t - 24 = 0$

$t_1 = 6, t_2 = -4$.

Корень $t_2 = -4$ не удовлетворяет условию.

Обратная замена:

$\sqrt{2x^2 - 8x + 12} = 6$

$2x^2 - 8x + 12 = 36$

$x^2 - 4x - 12 = 0$

$x_1 = -2, x_2 = 6$

$S = x_1 + x_2 = 4$

Ответ: x = 4.

Задание 8. Найти значение выражения 2S + x_0, где S – сумма корней уравнения, а x_0 – наименьший корень уравнения $2x^2 + 3x - 5\sqrt{2x^2 + 3x + 9} + +3 = 0$.

Решение: Преобразуем уравнение в вид $2x^2 + 3x + 9 - - 5\sqrt{2x^2 + 3x + 9} - 6 = 0$.

Пусть $\sqrt{2x^2 + 3x + 9} = t$, где $t \geq 0$

Тогда $t^2 - 5t - 6 = 0$; $t_1 = -1, t_2 = 6$.

Корень $t_1 = -1$ не удовлетворяет условию.

Обратная замена $\sqrt{2x^2 + 3x + 9} = 6$

$2x^2 + 3x + 9 = 36$; $2x^2 + 3x - 27 = 0$.

$x_1 = -4{,}5, x_2 = 3$

$S = x_1 + x_2 = -1{,}5$

$2 * (-1{,}5) - 4{,}5 = -7{,}5$

Ответ: x = - 7,5.

Пятый этап. Изменение условий уравнения с сохранением требований.

Задание 9. Найти корни уравнения $6\sqrt{(x-3)^2} + \sqrt{(x-2)^2} - - 5\sqrt{(x-2)\cdot(x-3)} = 0$, принадлежащие промежутку (3;5).

Решение: $6 * |x - 3| + |x - 2| - 5\sqrt{x^2 - 5x + 6} = 0$

$5\sqrt{x^2 - 5x + 6} = 6 * |x - 3| + |x - 2|$

$25 * (x^2 - 5x + 6) = 36 * (x - 3)^2 + 12 * |x - 3| * |x - 2| + (x - 2)^2$

$25x^2 - 125x + 150 = 36 * (x^2 - 6x + 9) + 12 * |x - 3| * |x - 2| +$
$+x^2 - 4x + 4$

$25x^2 - 125x + 150 = 36x^2 - 216x + 324 + 12 * |x - 3| * |x - 2| +$
$+x^2 - 4x + 4$

$-12x^2 + 95x - 12 * |x - 3| * |x - 2| - 178 = 0$

Приравняем выражения, стоящие под знаком модуля, к нулю, получим x = 2 и x = 3. Эти точки разбивают числовую прямую на три промежутка $(-\infty; 2), [2; 3], (3; +\infty)$. Найдем решение уравнения в каждом полученном промежутке:

1) $(-\infty; 2)$.

$-12x^2 + 95x - 12 * (-(x - 3)) * (-(x - 2)) - 178 = 0$

$-12x^2 + 95x - 12x^2 + 60x - 72 - 178 = 0$

$-24x^2 + 135x - 250 = 0$

$x_1 = \frac{25}{8}, x_2 = \frac{10}{3}$

Значения $x_1 = \frac{25}{8}, x_2 = \frac{10}{3}$ не принадлежат промежутку $(-\infty; 2)$.

2) $[2; 3]$.

$-12x^2 + 95x - 12 * (-(x - 3)) * (x - 2) - 178 = 0$

$35x - 106 = 0$

$35x = 106$

$x = \frac{106}{35}$

Значение $x = \frac{106}{35}$ не принадлежат промежутку $[2; 3]$.

3) $(3; +\infty)$.

$-12x^2 + 95x - 12 * (x - 3) * (x - 2) - 178 = 0$

$-12x^2 + 95x - 12x^2 + 60x - 72 - 178 = 0$

$-24x^2 + 135x - 250 = 0$

$x_1 = \frac{25}{8}, x_2 = \frac{10}{3}$

Значения $x_1 = \frac{25}{8}, x_2 = \frac{10}{3}$ принадлежат промежутку $(3; +\infty)$.

Проверка:

$$6\sqrt{\left(\frac{25}{8} - 3\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{25}{8} - 2\right)^2} - 5\sqrt{\left(\frac{25}{8} - 2\right) \cdot \left(\frac{25}{8} - 3\right)} = 0$$

0 = 0

$$6\sqrt{\left(\frac{10}{3} - 3\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{10}{3} - 2\right)^2} - 5\sqrt{\left(\frac{10}{3} - 2\right) \cdot \left(\frac{10}{3} - 3\right)} = 0$$

0 = 0.

Ответ: x $= \frac{10}{3}$; x $= \frac{25}{8}$.

Задание 10. Найти корни уравнения $6\sqrt{(x-3)^2} + \sqrt{(x-2)^2} - 5\sqrt{x^2 - 5x + 6} = 0$, принадлежащие промежутку (3;5).

Задание 11. Найти корни уравнения $6\sqrt{(x-3)^2} + \sqrt{(x-2)^2} = 5\sqrt{x^2 - 5x + 6}$, принадлежащие промежутку (3;5).

2.3 Элективный курс «Иррациональные уравнения»

Программа элективного курса «Иррациональные уравнения: основные типы и методы их решения» предназначена для учащихся 10-11 математических классов. Данная программа направлена на обобщение знаний и умений учащихся по алгебре, а также на углубление и расширение знаний по учащихся по предмету.

Актуальность предлагаемой программы определяется следующим:

- задание по решению иррациональных уравнений часто встречается в вариантах ЕГЭ базового и профильного уровня;
- количество часов, выделяемое на изучение данной темы часто недостаточно для качественной подготовки к экзамену.

Педагогическая целесообразность предлагаемой программы элективного курса объясняется следующими мотивами:

- задания исследовательского характера, включенные в содержание программы, помогут развивать навыки рационального мышления, планирования собственной деятельности;
- решение заданий повышенного уровня сложности, предложенные для решения на практических занятиях, позволят учащимся оценить свой потенциал и развить свои способности.

Цель и задачи программы элективного курса:

- формирование у учащихся навыков применения различных методов решения к разным типам иррациональных уравнений;
- развитие мыслительных, творческих способностей учащихся;
- повышение уровня математической подготовки учащихся.

Новизна программы состоит в том, что она знакомит учащихся с большим количеством различных методов решения иррациональных уравнений. Часть тем, предложенная для изучения в данной программе, не рассматривается подробно учащимися в курсе алгебры и начал математического анализа.

Программа элективного курса рассчитана на 34 часа (1 час в неделю).

Форма занятия: лекции, практикумы по решению задач, индивидуальная и групповая исследовательская работа.

Опишем ожидаемые результаты и способы определения их результативности.

В результате изучения программы данного элективного курса учащиеся должны:

- знать основные свойства арифметических корней;
- знать методы решения иррациональных уравнений;
- уметь определять метод решения уравнения по его типу;
- уметь исследовать функцию на монотонность, на ограниченность;

– уметь исследовать область определений и множества значений функции;

– уметь строить графики элементарных функций;

– уметь решать уравнения смешанного типа.

Основными формами проведения итогов реализации данной образовательной программы являются следующие:

– контрольные работы;

– учебно-исследовательская конференция.

Данная программа может быть использована в классах с углубленным или профильным изучением математики. Приведем тематическое планирование элективного курса (таблица 1).

Таблица 1 – Учебно-тематическое планирование элективного курса

Содержание темы	Кол-во часов	Виды занятий
Тема 1. Свойства арифметических корней	2	Уроки-практикумы
Тема 2. Метод возведения частей уравнения в одинаковую степень	3	Урок-лекция Уроки практикумы
Тема 3. Сведение иррационального уравнения к равносильной системе	3	Урок-лекция Уроки практикумы
Тема 4. Метод умножения на сопряженное	4	Урок-лекция Уроки практикумы
Тема 5. Метод замены (введения новой переменной)	4	Урок-лекция Уроки практикумы
Тема 6. Применение различных методов к решению задач	1	Урок обобщения
Тема 7. Контрольная работа №1	1	Урок самостоятельного решения задач
Тема 8. Графический метод	3	Урок-лекция Уроки практикумы
Тема 9. Использование свойств функции	4	Урок-лекция Уроки практикумы
Тема 10. Решение иррациональных уравнений смешанного типа	4	Уроки-практикумы. Урок обобщения
Тема 11. Контрольная работа №2	1	Урок самостоятельного решения задач
Подготовка к защите проектов	1	Урок-консультация
Защита проектов	3	Учебно-исследовательская конференция
Итого	**34**	

Представим ниже содержание элективного курса.

Тема 1. Свойства арифметических корней (2 часа).

Основная цель – повторение известных свойств арифметических корней, необходимых для преобразования иррациональных выражений и решения иррациональных уравнений.

Тема 2. Метод возведения частей уравнения в одинаковую степень (3 часа).

Основная цель – рассмотреть метод решения иррациональных уравнений с помощью возведения обеих частей уравнения в одну и ту же степень.

Важно отметить на занятиях, что при возведении частей уравнения в степень, мы получаем уравнение-следствие. Решение этого уравнения может приводить к появлению посторонних корней. Поэтому важно выполнять проверку корней или находить область определения уравнения.

Тема 3. Сведение иррационального уравнения к равносильной системе (3 часа).

Основная цель – изучить метод, при котором выполняется переход от иррационального уравнения к равносильным системам, не содержащих радикалов.

Тема 4. Метод умножения на сопряженное (4 часа).

Основная цель – изучить понятие сопряженного выражения и применение умножения на сопряженное выражение для решения уравнений.

Тема 5. Метод замены (введения новой переменной) (4 часа).

Основная цель – изучение метода введения новой переменной, при котором переменная будет заменять выражение, стоящее под знаком радикала или содержащее радикал. В результате такой замены необходимо будет решить уже более простое уравнение.

В некоторых случаях удобно заменять несколько иррациональных выражений разными переменными, в результате чего будет необходимо решить систему из нескольких уравнений.

Тема 6. Применение различных методов к решению задач (1 часа).

Основная цель – закрепить навыки использования изученных методов при решении различных типов уравнений.

Тема 7. Графический метод (3 часа).

Основная цель – изучить применение построенных графиков для решения иррациональных уравнений.

Важно отметить, что в некоторых случаях графический способ будет неподходящим методом решения, так как не всегда на графике можно найти точное значение абсциссы точек пересечения.

Тема 8. Использование свойств функции (4 часа).

Основная цель – изучить применение ограниченности, монотонности функций для решения различных типов иррациональных уравнений.

Тема 9. Решение иррациональных уравнений смешанного типа (4 часа).

Основная цель – закрепить навыки использования различных методов решения иррациональных уравнений, применяемых к уравнениям смешанного типа (иррациональное и показательное, иррациональное и тригонометрическое и пр.).

Тема 10. Подготовка и защита проекта (4 часа).

Основная цель – проведение исследования по выбранной теме и выступление с результатами исследования.

Представим тематику исследовательских работ учащихся для учебно-исследовательской конференции.

Предлагаемые ниже темы исследовательских работ могут быть использованы учащимися при выполнении индивидуальных или групповых проектов или в качестве индивидуальных научно-исследовательских работ.

Темы выдаются в начале изучения программы. Защита проектов или работ проходит в рамках учебно-исследовательской конференции. Лучшие работы отбираются на школьную или городскую научную конференцию учащихся.

Тема «Применение неравенства Коши для решения иррациональных уравнений».

Рекомендуемая литература:

1. Берколайко С. Использование неравенства Коши при решении задач. // Квант. 1995. №4. С. 37-40.

2. Исакова М.М., Тлупова Р.Г., Эржибова Ф.А., Ибрагим А.С. Нетрадиционные методы решений иррациональных уравнений [Электронный ресурс] // Вестник ЮУрГГПУ. 2018. №3. URL: https://cyberleninka.ru/article/n/netraditsionnye-metody-resheniy-irratsionalnyh-uravneniy (дата обращения 03.04.2023).

Тема «Решение иррациональных уравнений с помощью тригонометрической подстановки».

Рекомендуемая литература:

1. Олехник С.Н., Потапов М.К., Пасиченко П.И. Нестандартные методы решения уравнений и неравенств: Справочник. М.: Изд-во МГУ, 1991. С. 89-91.

2. Паркевич Е.В. Иррациональные уравнения и неравенства. Методическое пособие по подготовке к олимпиадам. М., 2014. 10 с.

Тема «Векторный метод решения иррациональных уравнений».

Рекомендуемая литература:

1. Аскарова М. А. Методы решения некоторых уравнений и неравенств с помощью вектора [Электронный ресурс] // Проблемы Науки. 2016. №11 (53). URL: https://cyberleninka.ru/article/n/metody-resheniya-nekotoryh-uravneniy-i-neravenstv-s-pomoschyu-vektora (дата обращения 04.04.2023).

2. Методы решения иррациональных уравнений [Электронный ресурс] // Фестиваль педагогических идей «Открытый урок». URL: https://urok.1sept.ru/articles/517610 (дата обращения 06.04.2023).

Опишем методические рекомендации по проведению элективного курса.

Тема 1. Свойства арифметических корней (2 часа).

План изучения темы.

1. Определение арифметического корня.

«Арифметическим квадратным корнем из числа a (записывается $\sqrt{a}$) называется неотрицательное число, квадрат которого равен a.

Арифметическим корнем натуральной степени n > 2 из неотрицательного числа a называется неотрицательное число, n -я степень которого равна a» [1].

2. Свойства арифметических корней.

Арифметический корень n-й степени обладает следующими свойствами: если a ≥ 0, b > 0 и n, k, m – натуральные числа, причем n ≥ 2, m ≥ 2, то:

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

$$\sqrt[kn]{a^{km}} = \sqrt[n]{a^m}$$

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$$

3. Примеры задач по теме с решением.

Задача 1 [24]. $\sqrt[3]{\sqrt{8}} - \sqrt[4]{4} = \sqrt{2} - \sqrt{2} = 0.$

Задача 2 [24]. $\sqrt[3]{0{,}75 - \frac{5}{8} \cdot \left(\frac{2}{\sqrt[3]{2}}\right)^6} = \sqrt[3]{\frac{3}{4} - \frac{5}{8} \cdot \frac{64}{4}} = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} \cdot 16 = 8.$

Задача 3 [24]. $\frac{\sqrt[4]{0{,}16} \cdot \sqrt{0{,}4^2 - 0.3^2}}{\sqrt{\frac{2}{5} + 0.3}} = \frac{\sqrt[4]{0.16} \cdot \sqrt{0.07}}{\sqrt{\frac{7}{10}}} = \sqrt[4]{0.16} \cdot \sqrt{0.1} = 0.2.$

Задача 4 [24]. $\frac{\sqrt[3]{\sqrt{8}+\sqrt{2}}}{\sqrt[3]{\sqrt{8}-\sqrt{2}}} \cdot \sqrt[3]{72} = \frac{\sqrt[3]{\sqrt{8}+\sqrt{2}}}{\sqrt[3]{\sqrt{8}-\sqrt{2}}} \cdot 2\sqrt[3]{9} = 2 \cdot \sqrt[3]{\frac{(2\sqrt{2}+\sqrt{2}) \cdot 9}{(2\sqrt{2}-\sqrt{2})}} = 2 \times$ $\times \sqrt[3]{\frac{3\sqrt{2} \cdot 9}{\sqrt{2}}} = \ 2 \cdot \sqrt[3]{27} = 6.$

Задача 5. Упростите выражения:

а) $\sqrt{x^2 \sqrt[5]{x\sqrt{x^3}}} = \sqrt{x^2 \sqrt[10]{x^5}} = \sqrt{x^2\sqrt{x}} = \sqrt[4]{x^5} = x\sqrt[4]{x};$

б) $\sqrt{x\sqrt[5]{4a^3b^2x}} = \sqrt[10]{4a^3b^2x^6}.$

Тема 2. Метод возведения частей уравнения в одинаковую степень (3 часа).

План изучения темы.

1. Определение иррационального уравнения.

«Уравнение $A(x) = B(x)$, в котором хотя бы одно из выражений $A(x), B(x)$ иррационально, называется иррациональным» [10].

Например, уравнения $\sqrt{x-3} + \sqrt{x+4} = 7$, $\sqrt{x^2-9} + \sqrt{x^2+9} - 10 = 0$ будут являться иррациональными. Уравнение же $\sqrt{2}x^4 + \sqrt[5]{3}x^2 + \sqrt{\frac{3-\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}} = 0$ рационально, так как в нем x не находится под знаком корня.

2. Метод возведения частей уравнения в одинаковую степень.

Теорема. «Если $n > 0$ – нечетное число, $n = 2k + 1$, то уравнение $A^n(x) = B^n(x)$ и $A(x) = B(x)$ равносильны. Если же $n > 0$ – четное число, $n = 2k$, то любой корень уравнения $A^n(x) = B^n(x)$ удовлетворяет хотя бы одному из уравнений $A(x) = B(x)$ и $A(x) = -B(x)$»[10].

Доказательство. Пусть α – корень уравнения $A(x) = B(x)$. Тогда $A(\alpha) = B(\alpha)$, и потому $A^n(\alpha) = B^n(\alpha)$, то есть α – корень уравнения $A^n(x) = B^n(x)$. Таким образом, всякий корень уравнения $A(x) = B(x)$ является корнем уравнения $A^n(x) = B^n(x)$.

Обратно, пусть α – корень уравнения $A^n(x) = B^n(x)$, то есть $A^n(\alpha) = B^n(\alpha)$. Если n нечетно, то отсюда вытекает, что $A(\alpha) = B(\alpha)$, и потому α – корень уравнения $A(x) = B(x)$. Значит, при нечетном n уравнения $A(x) = B(x)$ и $A^n(x) = B^n(x)$ равносильны.

Если же n четно, то равенство $A^n(\alpha) = B^n(\alpha)$ может иметь место либо при $A(\alpha) = B(\alpha)$, либо при $A(\alpha) = -B(\alpha)$, а потому α является корнем по крайней мере одного из уравнений: $A(x) = B(x)$, $A(x) = -B(x)$.

3. Примеры задач по теме с решением.

При возведении частей уравнения в степень мы получаем уравнение-следствие. Решение этого уравнения может приводить к появлению посторонних корней. Поэтому важно выполнять проверку корней или находить область определения уравнения.

Задача 1. $\sqrt[4]{x^2+12}=x.$

$\left(\sqrt[4]{x^2+12}\right)^4=x^4$

$x^2+12=x^4$

$x^4-x^2-12=0$

$x^2=\dfrac{1\pm\sqrt{1+48}}{2}=\dfrac{1\pm 7}{2}$

$x^2=4$ или $x^2=-3$ (не имеет действительных корней)

$x=\pm 2$

Проверка:

$\sqrt[4]{2^2+12}=2$

$\sqrt[4]{(-2)^2+12}=-2$

x = - 2 не является корнем уравнения.

Ответ: x = 2.

Задача 2. $\sqrt{3-2x}=6+x.$

$3-2x=(6+x)^2$

$x^2+14x+33=0$

$x=-11$ или $x=-3$

Проверка:

$\sqrt{3-2\cdot(-11)}=6-11$

$\sqrt{3-2\cdot(-3)}=6-3$

x = -11 не является корнем уравнения.

Ответ: x = - 3.

Задача 3. $\sqrt{3x+7}=x-7.$

$3x+7=(x-7)^2$

$x^2-17x+42=0$

$x=14$ или $x=3$

Проверка:

$\sqrt{3 \cdot 14 + 7} = 14 - 7$

$\sqrt{3 \cdot 3 + 7} = 3 - 7$

x = 3 не является корнем уравнения.

Ответ: x = 14.

Тема 3. Сведение иррационального уравнения к равносильной системе (3 часа).

План изучения темы.

1. Метод сведения иррационального уравнения к равносильной системе.

Теорема. «Уравнение вида $\sqrt[2k]{A(x)} = B(x)$ равносильно системе, состоящей из уравнения $A(x) = B^{2k}(x)$ и неравенства $B(x) \geq 0$:

$$\sqrt[2k]{A(x)} = B(x) \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[2k]{A(x)} = B(x) \\ B(x) \geq 0 \end{cases}$$ » [7].

2. Примеры задач по теме с решением.

Задача 1. $\sqrt{x^2 + x + 1} = x - 4$.

$\begin{cases} x^2 + x + 1 = (x-4)^2 \\ x - 4 \geq 0 \end{cases}$

$x^2 + x + 1 = (x-4)^2$

$x = \frac{5}{3}$

Корень не удовлетворяет неравенству $x - 4 \geq 0$

Ответ: корней нет.

Задача 2. $\sqrt{-9x^2 + 3x - 6} = \sqrt{-6x - 24}$.

$\begin{cases} -9x^2 + 3x - 6 = -6x - 24 \\ -6x - 24 \geq 0 \end{cases}$

$-9x^2 + 3x - 6 = -6x - 24$

$x = -1, x = 2$

Корни не удовлетворяют неравенству $-6x - 24 \geq 0$

Ответ: корней нет.

Задача 3. $\sqrt{x^4 - 5x^2 - \frac{5}{2}x} = 5 - x^2$.

$$\begin{cases} x^4 - 5x^2 - \frac{5}{2}x = (5 - x^2)^2 \\ 5 - x^2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x^2 - x - 10 = 0 \\ -\sqrt{5} \leq x \leq \sqrt{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=\frac{5}{2} \end{array}\right. \\ -\sqrt{5} \leq x \leq \sqrt{5} \end{cases}$$

x = - 2.

Ответ: x = - 2.

Тема 4. Метод умножения на сопряженное (4 часа).

План изучения темы.

1. Метод умножения на сопряженное.

В основе рассматриваемого способа решения лежит формула $(\sqrt{a} - -\sqrt{b}) \cdot (\sqrt{a} + \sqrt{b}) = a - b.$ «Выражения $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ и $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ называют сопряженными» [23].

Пусть мы имеем дело с разностью двух выражений. Умножив их на сумму этих же выражений, мы получим формулу разность квадратов, которая поможет освободиться от иррациональности. Большая опасность заключается в том, что избавившись таким образом от корня, расширяется ОДЗ примера (теряется информация о подкоренном выражении). Поэтому нужно учитывать ОДЗ старого корня.

2. Примеры задач по теме с решением.

Задача 1. $\sqrt{x+3} + \sqrt{x+8} = 5$

$$\left(\sqrt{x+3}\right)^2 - \left(\sqrt{x+8}\right)^2 = 5(\sqrt{x+3} - \sqrt{x+8})$$

$$x + 3 - x - 8 = 5(\sqrt{x+3} - \sqrt{x+8})$$

$$-1 = \sqrt{x+3} - \sqrt{x+8}$$

$$\begin{cases} \sqrt{x+3} + \sqrt{x+8} = 5 \\ \sqrt{x+3} - \sqrt{x+8} = -1 \end{cases}$$

$$2\sqrt{x+3} = 4$$

$$\sqrt{x+3} = 2$$

$x + 3 = 4$

$x = 1.$

Проверка:

$\sqrt{1+3} + \sqrt{1+8} = 5$

Ответ: $x = 1$.

Задача 2. $\sqrt{3x^2-1} + \sqrt{x^2-x+1} = \sqrt{3x^2+2x+1} + \sqrt{x^2+2x+4}$

$\left(\sqrt{3x^2+2x+1} - \sqrt{3x^2-1}\right) + \left(\sqrt{x^2+2x+4} - \sqrt{x^2-x+1}\right) = 0.$

Выражение в каждой скобке умножим и разделим на сопряженные (которые не обращаются в 0 ни при каких значениях x).

$$\frac{\left(\sqrt{3x^2+2x+1}-\sqrt{3x^2-1}\right)\cdot\left(\sqrt{3x^2+2x+1}+\sqrt{3x^2-1}\right)}{\sqrt{3x^2+2x+1}+\sqrt{3x^2-1}} +$$

$$+\frac{\left(\sqrt{x^2+2x+4}-\sqrt{x^2-x+1}\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+2x+4}+\sqrt{x^2-x+1}\right)}{\sqrt{x^2+2x+4}+\sqrt{x^2-x+1}} = 0$$

$$\frac{3x^2+2x+1-(3x^2-1)}{\sqrt{3x^2+2x+1}+\sqrt{3x^2-1}} + \frac{x^2+2x+4-(x^2-x+1)}{\sqrt{x^2+2x+4}+\sqrt{x^2-x+1}} = 0$$

$$\frac{2x+2}{\sqrt{3x^2+2x+1}+\sqrt{3x^2-1}} + \frac{3x+3}{\sqrt{x^2+2x+4}+\sqrt{x^2-x+1}} = 0$$

$$(x+1)\cdot\left(\frac{2}{\sqrt{3x^2+2x+1}+\sqrt{3x^2-1}} + \frac{3}{\sqrt{x^2+2x+4}+\sqrt{x^2-x+1}}\right) = 0.$$

Допустимыми являются те значения x, которые удовлетворяют неравенству $3x^2 - 1 \geq 0$, выражение в скобках положительно при всех допустимых значениях x.

$$\begin{cases} x+1=0 \\ 3x^2-1 \geq 0 \end{cases}$$

x = - 1.

Ответ: x = - 1.

Тема 5. Метод замены (введения новой переменной) (4 часа).

План изучения темы.

1. Метод замены.

В некоторых случаях удобно заменять несколько иррациональных выражений разными переменными, в результате чего будет необходимо решить систему из нескольких уравнений.

2. Примеры задач по теме с решением.

Задача 1. $\sqrt{x+2}-\sqrt{x-a+2}=1.$

Пусть $\begin{cases} u=\sqrt{x+2}\geq 0 \\ v=\sqrt{x-a+2}\geq 0 \end{cases}$, $u^2-v^2=a$, $u-v=1.$

Тогда $\begin{cases} u-v=1 \\ u^2-v^2=a \end{cases}$

$\begin{cases} u-v=1 \\ u+v=a \end{cases}$

$\begin{cases} u=\frac{a+1}{2} \\ v=\frac{a-1}{2} \end{cases}$

$\begin{cases} \sqrt{x+2}=\frac{a+1}{2} \geq 0 \\ \sqrt{x-a+2}=\frac{a-1}{2} \geq 0 \end{cases}$

Ответ: x = $\frac{(a+1)^2}{4}-2$ при $a \geq 1$, при $a < 1$ решений нет.

Задача 2 [37]. $\sqrt[3]{2-x}+\sqrt{x-1}-1=0$

Пусть $u=\sqrt[3]{2-x}$, $v=\sqrt{x-1}$, $\begin{cases} u+v=1 \\ u^3-v^2=1 \end{cases}$.

Тогда $u^3+u^2+2u=0.$

$u\in\{0,1,-2\}.$

Система имеет три решения (0;1), (1;0), (-2; 3). Тогда x =2, x = 1, x = 10

Ответ: x = 2; x = 1; x = 10.

Задача 2. $\sqrt{2x^2-8x+25}=\sqrt{x^2-4x+13}=2.$

Пусть $x^2-4x+13=t$, $t\geq 0$, тогда $2x^2-8x+25=2(x^2-4x+$ $+13)-1=2t-1.$

Получим $\sqrt{2t-1}-\sqrt{t}=2.$

$\sqrt{2t-1}=2+\sqrt{t}$

$2t-1=4+4\sqrt{t}+t$

$t-5=4\sqrt{t}$

$\begin{cases} t-5\geq 0 \\ (t-5)^2=16t \end{cases}$

$\begin{cases} t\geq 5 \\ t^2-26t+25=0 \end{cases}$

$$\begin{cases} t \geq 5 \\ \left[\begin{array}{l} t_1=1 \\ t_2=25 \end{array}\right. \end{cases}$$

t = 25.

Обратная замена $x^2 - 4x + 13 = 25.$

$x^2 - 4x - 12 = 0$

$x_1 = 6, x_2 = -2$

Ответ: x = - 2; x = 6.

Тема 6. Применение различных методов к решению задач (1 час).

Задания, предлагаемые для решения.

Решите уравнения наиболее удобным способом:

Задача 1. $\sqrt{3x-1} = \sqrt{x-2}.$

Задача 2. $\sqrt{x^2-x+1} = \sqrt{2x^2-1}$.

Задача 3. $\sqrt{x^2-5x-14} = \sqrt{3x-2}$.

Задача 4. $8\sqrt{12+16x-16x^2} + 4x - 4x^2 = 3.$

Задача 5. $\sqrt{x+4} - \sqrt{x-1} = 1.$

Задача 6. $\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2+x+5} = \sqrt{2x^2+2x+17}$.

Задача 7. $\sqrt{9-\frac{9}{x}} = x - \sqrt{x-\frac{9}{x}}$.

Тема 7. Графический метод (3 часа).

План изучения темы.

1. Степенная функция и ее свойства.

Степенной функцией называют функцию $y = x^p$, где p – любое действительное число, отличное от нуля.

Если показатель p — положительное действительное нецелое число, то в этом случае функция $y = x^p$ обладает следующими свойствами:

«1) область определения — множество неотрицательных чисел x > 0;

2) множество значений — множество неотрицательных чисел y > 0;

3) функция является возрастающей на промежутке x > 0;

4) функция не является ни четной, ни нечётной;

5) функция ограничена снизу: p > 0;

6) функция принимает наименьшее значение y = 0 при x = 0» [1].

Если показатель p - отрицательное действительное нецелое число, то в этом случае функция $y = x^p$ обладает следующими свойствами:

«1) область определения — множество положительных чисел x > 0;

2) множество значений — множество положительных чисел y > 0;

3) функция является убывающей на промежутке x > 0;

4) функция не является ни четной, ни нечётной;

5) функция ограничена снизу: y > 0» [1].

Приведем примеры графиков функций (рисунок 7):

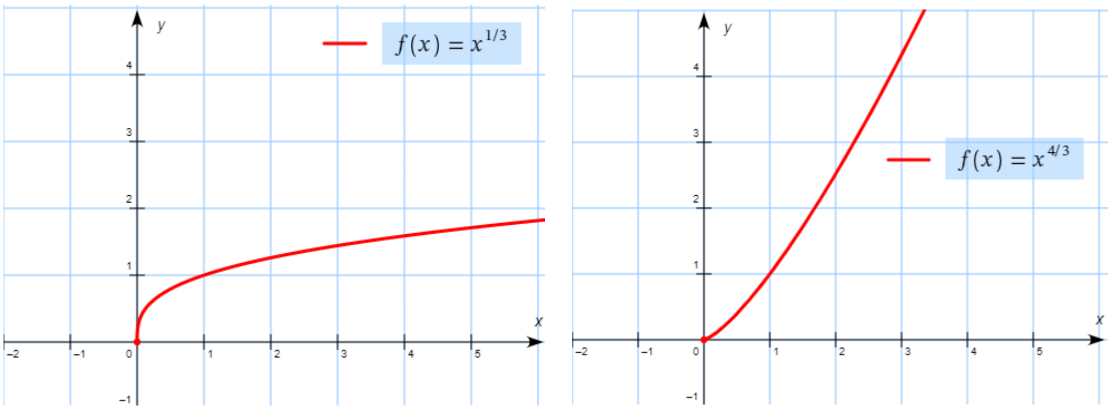

Рисунок 7 – Графики функций $y = x^{\frac{1}{3}}$ и $y = x^{\frac{4}{3}}$.

2. Графический метод решения иррациональных уравнений.

Графический метод решения уравнений предполагает использование графиков функций, отвечающих частям уравнения, для нахождения решения уравнения. Корнями уравнения являются абсциссы точек пересечения графиков функций [16].

Важно отметить, что в некоторых случаях графический способ будет неподходящим методом решения, так как не всегда на графике можно найти точное значение абсциссы точек пересечения.

2. Примеры задач по теме с решением.

Задача 1 [15]. $2\sqrt{x+4} - 1 = \sqrt[3]{2x}$.

Рассмотрим функции $y = 2\sqrt{x+4}$ и $y = \sqrt[3]{2x}$. Составим таблицы для построения их графиков (таблицы 2-3)

Таблица 2 – Таблица для построения их графика функции $\mathrm{y} = 2\sqrt{\mathrm{x}+4}$.

x	- 4	- 3	0	5
Y	- 1	1	3	5

Таблица 3 – Таблица для построения их графика функции$\mathrm{y} = \sqrt[3]{2\mathrm{x}}$.

x	- 4	- 0,5	0	0,5	4
y	- 2	-1	0	1	2

Построим графики данных функций (рисунок 8).

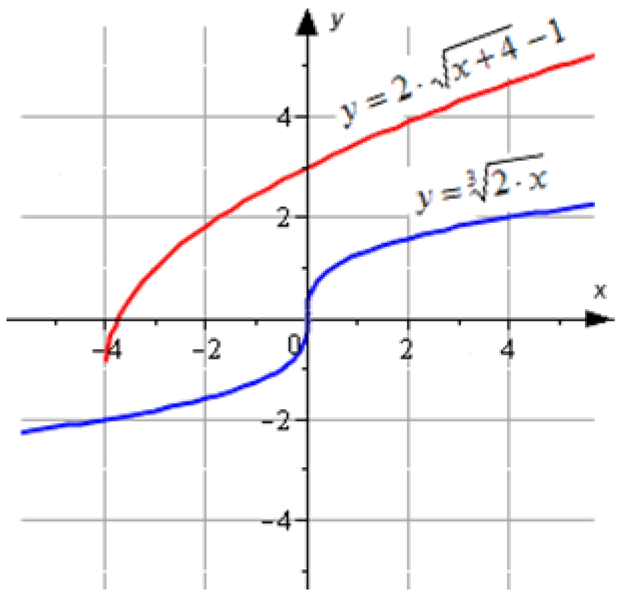

Рисунок 8 – Графики функций к задаче 1

Отметим, что график функции $\mathrm{y} = 2\sqrt{x+4} - 1$ строится с помощью сдвига графика функции $\mathrm{y} = 2\sqrt{\mathrm{x}+4}$ на 1 единицу вниз. Графики функций не пересекаются, решений уравнение не имеет.

Ответ: корней нет.

Задача 2. $\sqrt{x+1} = \frac{6}{x}$.

Рассмотрим функции $y = \sqrt{x+1}$ и $y = \frac{6}{x}$. Составим таблицы для построения их графиков (таблицы 4-5)

Таблица 4 – Таблица для построения их графика функции $y = \sqrt{x}$.

x	0	4	9	16
y	0	2	3	4

Таблица 5 – Таблица для построения их графика функции $y = \frac{6}{x}$.

x	1	2	3	6
y	6	3	2	1

Построим графики данных функций (рисунок 9).

Рисунок 9 – Графики функций к задаче 2.

Отметим, что график функции $y = \sqrt{x+1}$ строится с помощью сдвига графика функции $y = \sqrt{x}$ на 1 единицу влево. Графики функций (рисунок 9) пересекаются в точке (3; 2), уравнение имеет один корень.

Ответ: x = 3.

Тема 8. Использование свойств функции (4 часа).

План изучения темы.

1. Использование свойств функции.

В случаях, если уравнение имеет вид $f(x) = 0$, где $f(x)$ возрастает (убывает), или $f(x) = g(x)$, где функции $f(x)$ и $g(x)$ «встречно монотонны», т. е. $f(x)$ возрастает, а $g(x)$ убывает, то такое уравнение имеет не более одного корня [6].

2. Примеры задач по теме с решением.

Задача 1 [22]. $\sqrt{7x+9} + \sqrt{15x+1} = 9 - \sqrt{2x-1}$.

Левая часть уравнения – возрастающая функция, правая часть – убывающая функция.

Уравнение имеет единственный корень x = 1.

Ответ: x = 1.

Задача 2. $2x^5 + x^3 + 5x - 80 = \sqrt[3]{14-3x}$.

Исследуем функцию $y = 2x^5 + x^3 + 5x - 80$ на монотонность.

$y` = 10x^4 + 3x^2 + 5$. Так как два слагаемых неотрицательны, а одно положительно, то y > 0, а значит функция y возрастает на области своего определения.

Исследуем функцию $y = 9 - \sqrt{2x-1}$ на монотонность.

$y` = -\frac{1}{\sqrt[3]{(14-3x)^2}}$, y` < 0 при всех значениях аргумента, кроме $x = \frac{14}{3}$. Значит, функция убывает на области своего определения.

Левая часть уравнения – возрастающая функция, правая часть – убывающая функция.

Уравнение имеет единственный корень x = 2.

Ответ: x = 2.

Задача 3. $\sqrt{4-x^2} + \sqrt{x-2} = \sqrt{x+7} - \sqrt{4x+1}$.

В области определения уравнения должны выполняться неравенства $4 - x^2 \geq 0$ и $x \geq 2$, что возможно только при x = 2.

Проверка:

$\sqrt{4-2^2} + \sqrt{2-2} = \sqrt{2+7} - \sqrt{4 \cdot 2 + 1}$

Ответ: x = 2.

Тема 9. Решение иррациональных уравнений смешанного типа (4 часа).

Примеры задач по теме с решением.

Задача 1. $\sin\sqrt{3-x^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sqrt{3-x^2}=(-1)^k\cdot\frac{\pi}{3}+\pi k, k\in Z.$ Однако среди решений $(-1)^k\cdot\frac{\pi}{3}+\pi k$ неравенству удовлетворяет лишь $\frac{\pi}{3}$ ($k=0$). Если $k<0$, то $(-1)^k\cdot\frac{\pi}{3}+\pi k<0$, а если $k>0$, то $(-1)^k\cdot\frac{\pi}{3}+\pi k>\frac{2\pi}{3}$, ($\frac{2\pi}{3}>\sqrt{3}$).

$\sqrt{3-x^2}=\frac{\pi}{3}$

$3-x^2=\frac{\pi^2}{9}$

$x=\pm\sqrt{\frac{27-\pi^2}{9}}$

Ответ: $x=\pm\frac{\sqrt{27-\pi^2}}{3}$.

Задача 2. $\left(\mathrm{Cos}\,x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\sqrt{4x^2-7x+3}=0.$

Имеем:

$$\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{c}4x^2-7x+3\geq 0\\ \cos x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right.\\ 4x^2-7x+3=0.\end{array}\right.$$

Тогда:

$$\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{c}\left[\begin{array}{l}x\leq\frac{3}{4}\\ x\geq 1\end{array}\right.\\ x=\pm\dfrac{\pi}{4}+2\pi k, k\in Z\end{array}\right.\\ x=1\\ x=\frac{3}{4}\end{array}\right.$$

Из чисел $\pm\frac{\pi}{4}+2\pi k, k\in Z$ только $\frac{\pi}{4}$ не удовлетворяет условию системы, входящей в совокупность.

Ответ: $\frac{3}{4}$; 1; $-\frac{\pi}{4}+2\pi n, n\in Z$; $\frac{\pi}{4}+2\pi k, k\in Z, k\neq 0$.

2.4 Педагогический эксперимент и его результаты

В 2022-2023 учебном году был проведен педагогический эксперимент на базе ГБОУ Школы №1527 г. Москвы. В нем принимала участие группа, состоящая из 13 обучающихся 10 «А» и 10 «Б» классов.

В рамках производственной (научно-исследовательской) практики был проведен констатирующий эксперимент. Его целью являлось выявление уровня сформированности знаний и умений школьников по теме «Иррациональные уравнения».

Для проведения данного этапа эксперимента осенью 2022 года была проведена проверочная работа, состоящая из пяти заданий. Приведем ниже задания проверочной работы с решением.

1. Решите уравнение $x + 1 = \sqrt{8 - 4x}$.

Решение: $\begin{cases} 8 - 4x = (x + 1)^2 \\ x + 1 \geq 0 \end{cases}$

$\begin{cases} 8 - 4x = x^2 + 2x + 1 \\ x \geq 1. \end{cases}$

Решим уравнение $8 - 4x = x^2 + 2x + 1$

$x^2 + 6x - 7 = 0$

$x_1 = -7, x_2 = 1$

Корень $x_1 = -7$ не удовлетворяет неравенству системы.

Ответ: x = 1.

2. Решите уравнение $\sqrt{7x + 1} = 2\sqrt{x + 4}$.

Решение: $\begin{cases} 7x + 1 = 4(x + 4) \\ 7x + 1 \geq 0 \\ x + 4 \geq 0 \end{cases}$

Решим уравнение $7x + 1 = 4(x + 4)$

$7x + 1 = 4x + 16$

$3x = 15$

$x = 5$

Ответ: x = 5.

3. Решите уравнение $\sqrt{x+17}-\sqrt{x+1}=2$.

Решение: $\sqrt{x+17}=\sqrt{x+1}+2$

$x+17=x+1+4\sqrt{x+1}+4$

$4\sqrt{x+1}=17-1-4$

$4\sqrt{x+1}=12$

$\sqrt{x+1}=3$

$x+1=9$

$x=8$

Проверка: $\sqrt{8+17}-\sqrt{8+1}=2$

2 = 2

Ответ: $x=8$.

4. Решите уравнение $\sqrt{3-x}\cdot\sqrt{x+4}=\sqrt{6}$.

Решение: Преобразуем уравнение $\sqrt{(3-x)\cdot(x+4)}=\sqrt{6}$

$\sqrt{-x^2-x+12}=\sqrt{6}$

$-x^2-x+12=6$

$-x^2-x+6=0$

$x_1=-3, x_2=2$

Проверка: $\sqrt{3-(-3)}\cdot\sqrt{-3+4}=\sqrt{6}$

$\sqrt{6}=\sqrt{6}$

$\sqrt{3-2}\cdot\sqrt{2+4}=\sqrt{6}$

$\sqrt{6}=\sqrt{6}$

Ответ: x = - 3; x = 2.

5. Решите уравнение $x^2-4x=3\sqrt{x^2-4x+20}-10$.

Решение: Преобразуем уравнение $x^2-4x+20-10=3\sqrt{x^2-4x+20}$

Пусть $\sqrt{x^2-4x+20}=t$, где $t\geq 0$

Тогда $t^2-10=3t$

$t^2-3t-10=0$

$t_1=5, t_2=-2$

Корень $t_2 = -2$ не удовлетворяет условию.

Обратная замена $\sqrt{x^2 - 4x + 20} = 5$

$x^2 - 4x + 20 = 25; \quad x^2 - 4x - 5 = 0; \quad x_1 = 5, x_2 = -1.$

Проверка: $5^2 - 4 \cdot 5 = 3\sqrt{5^2 - 4 \cdot 5 + 20} - 10.$

5 = 5.

$(-1)^2 - 4 \cdot (-1) = 3\sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot (-1) + 20} - 10$

5 = 5.

Ответ: x = - 1; x = 5.

По результатам выполнения проверочной работы были получены следующие оценки (таблица 6).

Таблица 6 – Количественный анализ контрольной работы (количество учащихся, выполнивших задания)

Отметка	5	4	3	2
Количество учащихся, получивших отметки	1	3	6	3
% от общего числа выполнивших работу	8	23	46	23
Количество отсутствующих	0			
Общее количество учащихся	13			

В таблице 7 приведен количественный анализ результатов выполнения заданий проверочной работы.

Анализ результатов работы показал, что наибольшие затруднения вызывало решение задания 5, в котором нужно было применить метод замены. Многие учащиеся не приступили к решению данного задания. Наиболее успешно было выполнено задание 2, с ним справилось 100% обучающихся. Задания 1 и 3 верно выполнили более половины учащихся, выполняющих работу

Весной 2023 года проводился поисковый эксперимент в рамках прохождения производственной практики (педагогической практики). Осуществлялась апробация системы задач по теме «Иррациональные уравнения», основанная на технологии укрупнения дидактических единиц.

Таблица 7 – Количественный анализ контрольной работы (качество выполнения заданий)

Номер задания	Решили верно (%)	Решили неверно (%)	Не приступили (%)
1.	87	13	0
2.	100	0	0
3.	54	38	8
4.	46	46	8
5.	16	38	46

Результаты педагогического эксперимента были сформулированы на основе наблюдений, анализа результатов проведенной проверочной работы, а также в ходе поискового этапа эксперимента.

Выводы по второй главе

Рассмотрены основные цели и задачи обучения иррациональным уравнениям в курсе математики общеобразовательной школы.

Представлена система задач по теме «Иррациональные уравнения» с использованием технологии укрупнения дидактических единиц П.М. Эрдниева. Технология укрупнения дидактических единиц, представленная в работе, реализуется на основе изменения требований уравнения, а также на основе изменения условий уравнения при сохранении требований.

Разработан элективный курс «Иррациональные уравнения», предназначенный для учащихся 10-11 классов математических классов, который содержит различные методы решения иррациональных уравнений. Были представлены метод возведения частей уравнения в одинаковую степень, метод сведения к равносильной системе, метод умножения на сопряженное, метод замены, графический метод, использование свойств функций при решении уравнений.

Проведен педагогический эксперимент и представлены его результаты.

Заключение

Рассмотрены основные подходы к систематизации и обобщению предметных результатов при обучении математики. Установлено, что систематизация и обобщение являются важными, необходимыми условиями качественного усвоения знаний. Анализ психолого-педагогической, дидактической, методической литературы позволяет сделать вывод, что обобщение и систематизация могут рассматриваться как мыслительная деятельность, так и ее результат.

Выявлены основные функции систематизации и обобщения предметных результатов. Среди них можно выделить контролирующую функцию, позволяющую выявлять уровень знаний и степень усвоения навыков. Обучающая функция состоит в совершенствовании полученных знаний и умений, а развивающая функция позволяет развивать творческие способности учащихся, воображение, внимание, мышление. Применение систематизации и обобщения предметных результатов на уроках математики позволяет сделать процесс обучения эффективнее.

Проведен анализ задачного и теоретического материалов по данной теме. Тема «Иррациональные уравнения» содержится во всех УМК по алгебре и началам математического анализа старшей школы, в заданиях единого государственного экзамена базового и профильного уровня. Вместе с тем на изучение данной темы выделяется малое количество часов, что может делать затруднительным качественное усвоение материала. Изучению данной темы посвящено большое количество статей, исследований, разработанных элективных курсов, что демонстрирует интерес исследователей и учителей к теме «Иррациональные уравнения».

Представлена система задач по теме «Иррациональные уравнения» в рамках технологии укрупнения дидактических единиц. Данная технология позволяет систематизировать полученные знания, сформировать навыки самостоятельного выполнения учебных заданий. Система задач, основанная на принципе укрупнения, помогает овладеть навыками выделения основных понятий, формировать и совершенствовать навыки систематизации и обобщения материала.

Разработана программа элективного курса «Иррациональные уравнения», целью которого является повышение уровня знаний и умений обучающихся по теме. Особенность программы состоит в том, что она знакомит учащихся с большим количеством различных методов решения иррациональных уравнений. Часть тем, предложенная для изучения в данной программе, не рассматривается подробно учащимися в курсе алгебры и начал математического анализа. Одной из форм контроля является проведение учебно-исследовательской конференции. Участие в исследовательской деятельности позволяет развивать познавательную активность, инициативу, творческие способности.

Проведен педагогический эксперимент и представлены его результаты. В ходе констатирующего этапа эксперимента среди старшеклассников был отмечен слабый уровень умения решать иррациональные уравнения. На поисковом этапе эксперимента проводилась апробация разработанной системы задач, основанной на технологии укрупнения дидактических единиц.

Отметим, что задачи данного исследования полностью решены, его цель достигнута.

Список используемой литературы и используемых источников

1. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс : учеб. Для общеобразоват. учреждений : базовый и профил. уровни / [Ю.М. Колягин, М.В. Ткачева, Н.Е. Федорова, М.И. Шабунин]; под ред. А.Б. Жижченко. 4-е изд. М.: Просвещение, 2011. 368 с.
2. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы : учебник для общеобразовательных организаций : базовый и углублённый уровни / [Ш. А. Алимов и др. ; ред.: Л. Н. Белоновская, Н. Н. Сорокина, Т. Ю. Акимова]. 3-е изд. М.: Просвещение, 2016. 463 с.
3. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы : учебное пособие для общеобразовательных организаций : / [А.Н. Колмогоров, А.М. Абрамов, Ю.П. Дудницын и др.] ; под редакцией А.Н. Колмогорова. 26-е изд. М.: Просвещение, 2018. 383, [1] с.
4. Базарбаева М.К. Проблемные места при решении иррациональных уравнений в школе [Электронный ресурс] // Вопросы науки и образования. 2017. №4 (5). URL: https://cyberleninka.ru/article/n/problemnye-mesta-pri-reshenii-irratsionalnyh-uravneniy-v-shkole (дата обращения: 02.06.2023).
5. Бояркина Ю.А. Технология укрупнения дидактических единиц при изучении физики или как эффективно освоить программный материал после карантина [Электронный ресурс]. URL: https://togirro.ru/assets/files/2020/emd/fizika/fizilka_tehnologiya_ukrupneniya.pdf (дата обращения: 12.05.2023).
6. Буцко Е.В. Математика: алгебра и начала математического анализа. Углублённый уровень : 10 класс : методическое пособие / Е. В. Буцко, А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонский, М. С. Якир. М. : Вентана-Граф, 2020. 143 с.
7. Буцко Е.В. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. Базовый уровень : 10 класс : методическое пособие / Е.В. Буцко, А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонский, М. С. Якир. М. : Вентана-Граф, 2020. 113 с.

8. Вальян В.Г. Таблицы как средство обобщения и систематизации знаний студентов / В.Г. Вальян // Современные научные исследования: теория, методология, практика. 2011. Том 1. №1. С. 111-116.

9. Васильева И.В. Обобщение знаний о числовых множествах на основе понятия «алгебраическая структура» в классах с углубленным изучением математики: автореф. дис. ... канд. пед. наук: 13.00.02 / Рос. гос. пед. ун-т им. А. И. Герцена. Санкт-Петербург, 2002. 20 с.

10. Виленкин Н.Я. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс. Учебник для учащихся общеобразовательных организаций (углубленный уровень) / Н.Я. Виленкин, О.С. Ивашев-Мусатов, С.И. Шварцбурд. 18-е изд., стер. М.: Мнемозина, 2014. 312 с.

11. Выготский Л.С. Мышление и речь: сборник / Л.С. Выготский; [предисл., сост.: Е. Красная]. М.: АСТ: Хранитель, 2008. 668, [1] с.

12. Генкин Г.З. Геометрические решения задач, содержащих иррациональные выражения // Математика в школе. 2003. № 6. С. 31-33.

13. Гладышева И. А. Сквозная линия содержания школьного курса по теме «Уравнения» / И.А. Гладышева, Т.С. Толкачева // Научный потенциал. 2021. № 3(34). С. 59-63.

14. Горский Д.П. Обобщение и познание / Д. П. Горский. М.: Мысль, 1985. 208 с.

15. Графики степенных, показательных и логарифмических функций [Электронный ресурс] // Учебные материалы «Резольвента». URL: https://www.resolventa.ru/demo/fiz/dgia.htm#step1 (дата обращения: 07.02.2023).

16. Графический метод при решении иррациональных уравнений [Электронный ресурс] // Cleverstudents.ru - доступная математика. URL: http://www.cleverstudents.ru/equations/solving_irrational_equations_graphic_method.html (дата обращения: 07.02.2023).

17. Григорьев А. Иррациональные уравнения // Квант. 1972. №1. С. 46-49.

18. Давыдов В.В. Виды обобщений в обучении (логико-психологические проблемы построения учебных предметов). М.: Педагогика, 1972. 424 с.

19. Далингер В.А. Методика обобщающих повторения при обучении математике: Пособие для учителей и студентов. Омск; Изд-во ОГПИ, 1992. 88 с.

20. Данилов М.А. Дидактика средней школы: Некоторые проблемы современной дидактики: учеб. пособие для студентов пед. ин-тов / М.А. Данилов, М.Н. Скаткин, И.Я. Лернер, А.А. Бударный, Н.М. Шахмаев, В.В. Краевский; под. ред. М.А. Данилова и М Н. Скаткина. М.: Просвещение, 1975. 301 с.

21. Дроздов В.Б. Откуда взялась формула сложного радикала? // Математика в школе. 2002. № 8. С. 77.

22. Егоров А., Раббот Ж. Иррациональные уравнения // Квант. 2001. №5. С. 42-45.

23. Звавич Л.И. Алгебра и начала анализа. Решение задач письменного экзамена. 11 кл. / Л.И. Звавич, Л.Я. Шляпочник, И.И. Кулагина. М.: Дрофа, 2000. 352 с.

24. Зив Б.Г., Алтынов П.И. Алгебра и начала анализа. Геометрия. 10-11 кл.: Учебн.-метод. пособие. М.: Дрофа, 1999. 224 с.

25. Золотарева С.К. Систематизация знаний учащихся как условие их готовности к обучению в вузе (на примере предметов естественнонаучного цикла): дис. … канд. пед. наук: 13.00.01 / Сургутский государственный педагогический институт. Сургут, 2000. 176 с.

26. Зорина Л.Я. Дидактические основы формирования системности знаний старшеклассников [Текст]. М.: Педагогика, 1978. 128 с.

27. Иванова Т.А. Теоретические основы обучения математике в средней школе: учебное пособие / Т.А. Иванова, Е.Н. Перевощикова,

Т.П. Григорьева, Л.И. Кузнецова; под ред. профессора Т.А. Ивановой. Нижний Новгород: НГПУ, 2003. 320 с.

28. Каплан Б.С. Методы обучения математике [Текст]: (некоторые вопросы теории и практики) / Б.С. Каплан, Н.К. Рузин, А.А. Столяр; под ред. А. А. Столяра. Минск: Народная асвета, 1981. 191 с.

29. Колягин Ю.М. Методика преподавания математики в средней школе. Общая методика: учебное пособие / [Ю.М. Колягин и др.; отв. редакторы: Ю.М. Колягин, Н.И. Мерлина]. Чебоксары: Изд-во Чувашского ун-та, 2009. 731 с.

30. Краткий психологический словарь / [авт. - сост.: С.Я. Подопригора, А.С. Подопригора]. Ростов-на-Дону: Феникс, 2010 (Ростов-на-Дону: Книга). 317 с.

31. Майер Е.И. Возможности и преимущества использования ментальных карт в образовательном процессе / Е.И. Майер, Л.М. Бронникова // Наука и образование: новое время. 2017. № 3(20). С. 418-421.

32. Малых Е.В. Обобщения в обучении математике учащихся полной средней школы: автореф. дисс. ... канд. пед. наук: 13.00.02 / Вятский государственный гуманитарный университет. Киров, 2005. 20 с.

33. Марасанов А.Н. О методике обучения школьников решению иррациональных уравнений [Электронный ресурс] // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. 2010. №3-2. URL: https://cyberleninka.ru/article/n/o-metodike-obucheniya-shkolnikov-resheniyu-irratsionalnyh-uravneniy (дата обращения: 02.06.2023).

34. Мерзляк А.Г. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс. Углублённый уровень: учебное пособие / А.Г. Мерзляк, Д.А. Номировский, В.М. Поляков. 2-е изд., стер. М.: Вентана-Граф, 2019. 476, [1] с.

35. Методика и технология обучения математике. Лабораторный практикум: учеб. пособие для студентов матем. факультетов пед. университетов / под научн. ред. В.В. Орлова. М.: Дрофа, 2007. 320 с.

36. Методика преподавания математики в средней школе: Частная методика: Учебное пособие для студентов педагогических институтов по физ.-мат. спец. / А.Я. Блох, В.А. Гусев, Г.В. Дорофеев и др.; Сост. В.И. Мишин. М.: Просвещение, 1987. 416 с.

37. Методы решения иррациональных уравнений [Электронный ресурс] // Фоксворд. URL: https://foxford.ru/wiki/matematika/metody-reshenya-yrrac-uravneny (дата обращения 23.05.2023).

38. Мирошин В.В., Климентьева М.Г. Когда же появляются посторонние корни? // Математика в школе. 2003. № 9. С. 21-22.

39. Мордкович А.Г. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс. В 2 ч. Ч. 1. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений (профильный уровень) / А.Г. Мордкович, П.В. Семенов. 6-е изд., стер. М.: Мнемозина, 2009. 424 с.

40. Овсянникова Т.Л. Дифференцированные учебные задания как средство систематизации знаний студентов при изучении аналитической геометрии: автореф. дис. ... канд. пед. наук: 13.00.02 / Орловский гос. университет. Орел, 1998. 18 с.

41. Организация модульного обучения у студентов строительных специальностей с использованием информационно-коммуникационных технологий: моногр. / И.В. Акимова, Е.И. Титова, А.Н. Круглова, Е.И. Куимова. Пенза: ПГУАС, 2015. 120 с.

42. Педагогический энциклопедический словарь / гл. ред. Б.М. Бим-Бад. 3-е изд., стер. М.: Большая российская энциклопедия, 2009. 527 с.

43. Подласый И.П. Педагогика. Новый курс: Учебник для студ. пед. вузов: В 2 кн. М.: Гуманит. изд. центр ВЛАДОС, 1999. Кн. 1: Общие основы. Процесс обучения. 576 с.

44. Попов В.А. Иррациональные уравнения, неравенства и теорема косинусов. // Математика в школе. 1998. № 6. С. 52-55.

45. Попова Т.С. Функции обобщения и систематизации знаний в процессе формирования универсальных учебных действий учащихся при

углубленном изучении математики / Т.С. Попова // Современные тенденции развития науки и технологий. 2016. № 7-6. С. 103-106.

46. Примерная рабочая программа среднего общего образования учебного предмета «Математика» (углубленный уровень) для 10-11 классов образовательных организаций [Электронный ресурс] // Реестр примерных основных общеобразовательных программ. URL: https://fgosreestr.ru/oop/primernaia-rabochaia-programma-srednego-obshchego-obrazovaniia-uchebnogo-predmeta-matematika-uglublennyi-uroven-dlia-10-11-klassov-obrazovatelnykh-organizatsii (дата обращения: 21.04.2023).

47. Примерная рабочая программа среднего общего образования учебного предмета «Математика» (базовый уровень) для 10-11 классов образовательных организаций [Электронный ресурс] // Реестр примерных основных общеобразовательных программ. URL: https://fgosreestr.ru/oop/primernaia-rabochaia-programma-srednego-obshchego-obrazovaniia-uchebnogo-predmeta-matematika-bazovyi-uroven-dlia-10-11-klassov-obrazovatelnykh-organizatsii (дата обращения: 21.04.2023).

48. Ратанова Т.А. Общая психология: диагностика умственных способностей детей. М.: Флинта, 1998. 88 с.

49. Рубинштейн А.И. Об одном случае появления посторонних решений уравнения // Математика в школе. 2001. № 4. С. 62-63.

50. Рурукин А.Н. Поурочные разработки по алгебре и началам анализа: 10 класс. М.: ВАКО, 2011. 352 с.

51. Санина Е.И. Методические основы обобщения и систематизации знаний учащихся в процессе обучения математике в средней школе: автореф. дис. ... докт. пед. наук: 13.00.02 / Моск. пед. гос. университет. М., 2002. 32 с.

52. Саранцев Г.И. Методика обучения математике в средней школе: учебное пособие для студентов мат. специальностей пед. вузов и ун-тов. М.: Просвещение, 2002. 224 с.

53. Саранцев Г.И. Обучение математическим доказательствам в школе: Кн. для учителя. М.: Просвещение, 2000. 173 с.

54. Севрюков П.Ф. Об ошибках при решении иррациональных уравнений // Математика в школе. 2002. № 7. С. 37-38.

55. Селезнева К.О. Иррациональные уравнения, неравенства и их системы / К.О. Селезнева // Энергия науки: электронный сборник материалов VII Международной студенческой научно-практической Интернет-конференции, Ханты-Мансийск, 24–28 мая 2017 года. Ханты-Мансийск: Югорский государственный университет, 2017. С. 794-798.

56. Семенов П.В. Как составлять уравнения $\sqrt{ax+b} + \sqrt{cx+d} = L$ // Математика в школе. 2001. № 4. С. 49-52.

57. Семенов П.В. Как составлять уравнения $\sqrt{ax+b} = cx + d$ // Математика в школе. 2000. № 10. С. 18-19.

58. Слепкань З.И. Психолого-педагогические основы обучения математике: Метод. пособие / З. И. Слепкань. Киев: Рад. шк., 1983. 192 с.

59. Смоляное А.Н. Нетрадиционные способы решения иррациональных уравнений // Математика в школе. 2002. № 7. С. 35-36.

60. Сукманюк В.Н. Методика обучения обобщению и систематизации математических знаний школьников (на примере темы «Геометрические преобразования плоскости»): дис. ... канд. пед. наук: 13.00.02. Краснодар, 2001. 173 с.

61. Тарасова А.П. Современные подходы к изучению уравнений в курсе математики начальной школы / А.П. Тарасова // Актуальные вопросы психологии и педагогики: сборник статей Международной научно-практической конференции, Пенза, 29 июня 2016 года. Пенза: «Наука и Просвещение» (ИП Гуляев Г.Ю.), 2016. С. 41-47.

62. Укрупнение дидактических единиц как технология обучения [Электронный ресурс] // MOODLE - Виртуальная среда обучения КНИТУ. URL: https://moodle.kstu.ru/mod/book/view.php?id=94094&chapterid=17894 (дата обращения: 09.04.2023).

63. Устименко В.В. Обучение школьников методам решения тригонометрических уравнений в контексте укрупнения дидактических

единиц / В.В. Устименко, О.А. Попп // Веснік Віцебскага дзяржаўнага універсітэта. 2019. № 1(102). С. 107-114.

64. Ухабова Е.В. Систематизация и обобщение знаний учащихся при обучении математике в общеобразовательной школе // Математика и математическое образование: сборник трудов X Международной научной конференции «Математика. Образование. Культура» (к 160-летию со дня рождения Давида Гильберта), 27-29 апреля 2022 года, Россия, г. Тольятти / под общ. ред. Р.А. Утеевой. Тольятти: Изд-во ТГУ, 2023. С. 245-249.

65. Ухабова Е.В. Систематизация и обобщение предметных результатов при обучении математике в общеобразовательной школе // «Молодежь. Наука. Общество-2021»: Всероссийская студенческая научно-практическая междисциплинарная конференция (Тольятти, 20-24 декабря 2021 года): электронный сборник студенческих работ/ отв. за вып. С.Х. Петерайтис. Тольятти: Изд-во ТГУ, 2022.

66. Федеральный государственный образовательный стандарт среднего общего образования: Приказ Мин. образования и науки РФ от 17.05.2012 г. № 413 (с изменениями на 11 декабря 2020 г.) [Электронный ресурс]. URL: https://docs.cntd.ru/document/902350579 (дата обращения: 14.02.2022).

67. Федорова Н.Е. Алгебра и начала математического анализа. Методические рекомендации. 10-11 классы: учеб. пособие для общеобразоват. организаций / Н.Е. Федорова, М.В. Ткачева. М.: Просвещение, 2017. 172 с.

68. Фридман Л.М. Теоретические основы методики обучения математике: [учеб. пособие] / Л.М. Фридман. 3-е изд. М.: Книжный дом «Либроком», 2009. 248 с.

69. Хомушку А.Б. Педагогическое проектирование элективного курса «Методы решения иррациональных уравнений и неравенств» / А.Б. Хомушку // Энигма. 2021. № 29-2. С. 54-61.

70. Храмова Н.Н., Родионов М.А. Организация повторения и домашней работы при обучении математике в основной школе: учебное

пособие для студентов и учителей математики. Пенза: Изд-во ПГПУ им. В.Г. Белинского, 2004. 90 с.

71. Чотчаева Ф.М. Обобщения математических задач, ведущие к формированию понятий и теорем / Ф.М. Чотчаева // Совершенствование методологии познания в целях развития науки: сборник статей международной научно-практической конференции: в 3 частях. Пермь, 25 марта 2017 года. Том Часть 2. Уфа: Общество с ограниченной ответственностью «Аэтерна», 2017. С. 165-169.

72. Эльконин Д.Б. Детская психология: учеб. пособие для студ. высш. учеб. заведений / Д.Б. Эльконин; ред.-сост. Б.Д. Эльконин. 4-е изд., стер. М.: Издательский центр «Академия», 2007. 384 с.

73. Эрдниев П.М. Теория и методика обучения математике в начальной школе / П.М. Эрдниев, Б.П. Эрдниев. М.: Педагогика, 1988. 206 с.

74. Fitriyah I.M., Arrifadah Y., & Lailiyah S. (2021). Semiotics of mathematics problem-solving in Mason's generalization. Jurnal Riset Pendidikan Matematika, 8(1), P. 1-21.

75. Hargreaves S., Morgan M. What is Systematization of Experiences and What are Its Purposes? // Resource pack on systematization of experiences. 2009.

76. Hashemi N. Generalization in the Learning of Mathematics // The 2nd International Seminar on Quality and Affordable Education (ISQAE 2013). 2013. P. 208-215.

77. Kaabar M. The Role of Generalization in Advanced Mathematical Thinking. American Mathematical Society, 2016.

78. Klenk M.E., Friedman S.E., & Forbus K.D. Learning Modeling Abstractions via Generalization. 2008.

79. Torres M.D., Moreno A., Cañadas M.C. Generalization Process by Second Grade Students // Mathematics 2021. № 9. 19 p.

80. Veatch R. Generalization of Expertise / R. Veatch. - Studies - Hastings Center. Vol.1. 1973. № 2. P. 29-40.