

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Тольяттинский государственный университет»

Институт математики, физики и информационных технологий
(наименование института полностью)

Кафедра «Высшая математика и математическое образование»
(наименование)

44.04.01 Педагогическое образование
(код и наименование направления подготовки)

Математическое образование
(направленность (профиль))

**ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
(МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ)**

на тему «Содержание и методика обучения математике в старших классах
социально-экономического профиля»

Обучающийся

О.А. Бирюкова

(Инициалы Фамилия)

(личная подпись)

Научный
руководитель

канд. пед. наук, доцент, Н.А. Демченкова

(ученая степень (при наличии), ученое звание (при наличии), Инициалы Фамилия)

Тольятти 2023

Оглавление

Введение.....	3
Глава 1 Теоретические основы содержания и методики обучения математике в старших классах социально-экономического профиля.....	11
1.1 Особенности процесса обучения математике в 10-11 классах социально-экономического профиля	11
1.2 Анализ содержания школьных учебников математики для учащихся старших классов социально-экономического профиля.....	18
1.3 Из опыта работы учителей математики в классах социально-экономического профиля	24
Глава 2 Методические основы содержания и методики обучения математике в старших классах социально-экономического профиля.....	33
2.1 Система задач для учащихся социально-экономического профиля при подготовке к ЕГЭ.....	33
2.2 Применение кейс-технологии при обучении математике учащихся социально-экономического профиля	43
2.3 Элективный курс «Случайные величины и математическая статистика» в старших классах социально-экономического профиля..	57
2.4 Описание проведенного педагогического эксперимента	72
Заключение	79
Список используемой литературы и используемых источников.....	80

Введение

Актуальность и научная значимость настоящего исследования.

Согласно требованиям Федерального государственного образовательного стандарта основного общего образования Российской Федерации (ФГОС РФ) «изучение предметной области «Математика и информатика» должно обеспечить формирование представлений о математике как о компоненте общечеловеческой культуры, универсальном языке науки, позволяющем описывать и изучать реальные процессы и явления» [66].

Концепция профильного обучения на старшей ступени общего образования определяет профильное обучения как «средство дифференциации и индивидуализации обучения, позволяющее за счет изменений в структуре, содержании и организации образовательного процесса более полно учитывать интересы, склонности и способности учащихся, создавать условия для обучения старшеклассников в соответствии с их профессиональными интересами и намерениями в отношении продолжения образования» [24, с. 6]. Оно направлено на реализацию личностно-ориентированного учебного процесса. Основная идея обновления старшей ступени общего образования состоит в том, что образование здесь должно стать более индивидуализированным, функциональным и эффективным.

Многолетняя практика убедительно показала, что, как минимум, начиная с позднего подросткового возраста, примерно с 15 лет, в системе образования должны быть созданы условия для реализации обучающимися своих интересов, способностей и дальнейших (послешкольных) жизненных планов. Социологические исследования доказывают, что большинство старшеклассников (более 70%) отдают предпочтение тому, чтобы знать основы главных предметов, а углубленно изучать только те, которые выбираются, чтобы в них специализироваться. Иначе говоря, профилизация обучения в старших классах соответствует структуре образовательных и жизненных установок большинства старшеклассников.

В настоящее время в высшей школе сформировалось устойчивое мнение о необходимости дополнительной специализированной подготовки старшеклассников для прохождения вступительных испытаний и дальнейшего образования в вузах.

Содержание курса математики при профильном обучении имеет ряд особенностей:

- для всех профилей в курсе математике можно выделить общее «ядро»: сведения о числе, функциях, вероятности, статистике, геометрических образах [18];
- в зависимости от профиля в курс по данному предмету включаются дополнительные главы, содержание которых отвечает задачам будущей профессиональной подготовки;
- включаются вопросы, связанные с применением математики в бытовых расчетах (страхование, налогообложение и т.д.);
- курс математики является интегрированным и включает в себя главы из курсов алгебры, математического анализа, геометрии, информатики.

В классах социально-экономического профиля изучение математики направлено на реализацию следующих целей:

- овладение конкретными математическими знаниями, позволяющими выработать представления о применении математики в профилирующей науке, должны быть достаточными для изучения в вузе соответствующего направления;
- формирование прикладного стиля мышления;
- общекультурное развитие школьников.

Мышление учащихся социально-экономического профиля характеризуется прикладным стилем, который заключается в следующем: использование взаимосвязей математики с другими науками, а также внутрипредметных связей, и применение их в практической направленности.

По теме работы представлены диссертации В.С. Абатуровой [1], Е.А. Галаниной [11], В.В. Жолудевой [19], Н.К. Нателаури [37], Н.А. Хоркиной [73].

Работа В.С. Абатуровой [1] посвящена исследованию педагогических факторов и разработке механизмов развития познавательной самостоятельности у учащихся профильных классов экономической направленности через использование математического моделирования в обучении математике. Автор успешно разработала и внедрила учебные материалы для элективного курса по математике, в котором используется математическое моделирование для изучения реальных экономических и производственных явлений с помощью линейных моделей.

Диссертационная работа В.В. Жолудевой [19] посвящена разработке концепции наглядного моделирования в области профессионально-ориентированного математического образования. Автор подчеркивает, что использование этой методики улучшает понимание фундаментальных математических концепций и их применение к реальным экономическим ситуациям, делая процесс обучения более эффективным.

В исследовании Н.К. Нателаури [37] автором предлагается метод решения экономических задач на факультативных занятиях по математике в старших классах средней школы с помощью вычислительных экспериментов. Этот подход усиливает практический аспект образования за счет использования математических инструментов.

В диссертации Е.А. Галаниной [11] представлена модель создания учебного материала по математике для 10-11 классов, специально адаптированная к конкретному учебному профилю. Реализация предложенной методики позволяет повысить качество образования за счет создания практических материалов, соответствующих профильно-ориентированному подходу к изучению математики. Данный подход не только охватывает фундаментальные понятия математики как научной дисциплины, но и

включает прикладной аспект, который направлен на изучение предметов из смежных профильных дисциплин.

В диссертации Н.А. Хоркиной [73] основное внимание уделено методическим особенностям обучения учащихся классов экономического профиля на основе реализации межпредметных связей. Автором разработан факультативный курс, который эффективно интегрирует междисциплинарные связи между алгеброй, началами анализа и экономикой.

Значимость представленного исследования обуславливает необходимость разработки содержания и методики обучения математике учащихся социально-экономического профиля общеобразовательной школы.

Противоречие заключается в необходимости формирования математических знаний и умений учащихся социально-экономического профиля не только для успешной сдачи итогового государственного экзамена, но и для последующего развития в профессиональной области, и недостаточной методической разработкой вопроса обучения математике учащиеся данного профиля.

Данное противоречие позволило сформулировать **проблему диссертационного исследования**: методика обучения математике учащихся социально-экономического профиля в 10-11 классах общеобразовательной школы.

Объектом исследования является процесс обучения математике учащихся 10-11 классов социально-экономического профиля общеобразовательной школы.

Предмет исследования – содержание и методика обучения математике учащихся старших классов социально-экономического профиля общеобразовательной школы.

Цель исследования – разработка методических рекомендаций обучения математике учащихся старших классов социально-экономического профиля общеобразовательной школы.

Гипотеза исследования состоит в том, что разработка и внедрение содержания и методики обучения математике в старших классах социально-экономического профиля повысит результаты обучения математике в общеобразовательной школе учащихся социально-экономического профиля.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие **задачи**:

1. Определить особенности процесса обучения математике в 10-11 классах социально-экономического профиля.
2. Провести анализ школьных учебников математики социально-экономического профиля обучения в общеобразовательной школе.
3. Рассмотреть опыт учителей по данной теме.
4. Разработать систему задач единого государственного экзамена по математике для учащихся социально-экономического профиля.
5. Показать применение кейс-технологии при обучении математике в классах социально-экономического профиля
6. Разработать программу элективного курса «Случайные величины и математическая статистика» для учащихся социально-экономического профиля.
7. Провести педагогический эксперимент и описать его результаты.

Теоретико-методологическую основу данного исследования составили работы В.М. Брадиса [6], Г.В. Дорофеева [18], Т.И. Ивановой [20], Ю.М. Колягина [22], [23], [36], В.В. Орлова [35], Г.И. Саранцева [57], [58], Л.М. Фридмана [70].

Базовыми для настоящего исследования явились работы В.С. Абатуровой [1], Л.С. Атанасяна [13], Е.А. Галаниной [14], В.В. Жолудевой [19], Н.Ш. Кремера [26], В.Г. Крупина [27], О.А. Лыжиной [29], В.С. Лютикас [30], А.Г. Мордковича [32], [33], [34], Н.К. Нателаури [37], Е.В. Потоскуева [47], [48], [49], [50], И.В. Ретюнских [53], [54], Н.А. Хоркиной [73], И.В. Ященко [75].

Методы исследования. Анализ психолого-педагогической, методической литературы по теме исследования; изучение и анализ состояния исследуемой проблемы в школьной практике; анализ собственного опыта работы в школе; педагогический эксперимент и обработка результатов эксперимента.

Основные этапы исследования:

- 1 этап (2021/22 уч.г.): анализ ранее выполненных исследований по теме диссертации; анализ школьных программ и учебников по математике для учащихся социально-экономического профиля; анализ федеральных образовательных стандартов, нормативных документов; анализ опыта работы учителей школы данного профиля обучения;
- 2 этап (2021/22 уч.г.): определение теоретических и методических основ исследования по теме диссертации;
- 3 этап (2022/23 уч.г.): разработка классификации системы задач ЕГЭ социально-экономической направленности; составление системы задач для учащихся социально-экономического профиля; разработка элективного курса «Случайные величины и математическая статистика» для обучающихся старших классов социально-экономического профиля.
- 4 этап (2022/23 уч.г.): оформление диссертации, корректировка ранее представленного материала, уточнение аппарата исследования, описание результатов экспериментальной работы, формулирование выводов по главам.

Опытно-экспериментальная база исследования: ГБОУ «СОШ с. Екатериновка муниципального района Приволжский Самарской области».

Научная новизна исследования заключается в предложенных методических рекомендациях обучения математике в старших классах социально-экономического профиля общеобразовательной школы.

Теоретическая значимость исследования заключается в предложенных содержании и методики обучения математике в старших классах социально-экономического профиля общеобразовательной школы.

Практическая значимость исследования состоит в том, что разработанные методические рекомендации и методические материалы обучения старшеклассников социально-экономического профиля могут быть использованы учителями математики в их практической деятельности.

Достоверность и обоснованность результатов исследования обеспечивались сочетанием теоретических и практических методов исследования, анализом педагогической практики и личным опытом работы в общеобразовательной школе.

Личное участие автора в организации и проведении исследования состоит в выявлении методических и содержательных особенностей обучения математике в старших классах социально-экономического профиля; разработке элективного курса «Случайные величины и математическая статистика» для учащихся социально-экономического профиля школы.

Апробация и внедрение результатов работы велись в течение всего исследования. Его результаты докладывались на следующих конференциях:

- всероссийской студенческой научно-практической междисциплинарной конференции «Молодежь. Наука. Общество» (Тольятти, декабрь 2021 г., декабрь 2022 г.);
- конкурсе докладов в XLVIII Самарской областной студенческой научной конференции, секции «Современные методы преподавания математики и информатики» (Самара, апрель 2022 г.);
- 1-ом этапе научно-практической конференции «Студенческие Дни науки в ТГУ» (Тольятти, апрель 2022 г., апрель 2023 г.);
- 2-ом этапе научно-практической конференции «Студенческие Дни науки в ТГУ» (Тольятти, апрель 2022 г., апрель 2023г.);
- международном конкурсе научно-исследовательских работ «Моя магистерская диссертация» в рамках X международной научной конференции «Математика. Образование. Культура» (к 160-летию со дня рождения Давида Гильберта) (Тольятти, апрель 2022).

По теме исследования имеются 3 публикации [5]; [71]; [72].

Экспериментальная проверка предлагаемых методических рекомендаций была осуществлена в период производственной практики (научно-исследовательской работы) и преддипломной практики на базе кафедры высшей математики и математического образования Тольяттинского государственного университета и ГБОУ «СОШ с. Екатериновка муниципального района Приволжский Самарской области».

На защиту выносятся:

- методические рекомендации содержания и методики обучения математике в старших классах социально-экономического профиля;
- элективный курс «Случайные величины и математическая статистика» для обучающихся старших классов социально-экономического профиля.

Структура магистерской диссертации. Работа состоит из введения, двух глав, заключения, содержит 9 рисунков, 31 таблицу, список используемой литературы и используемых источников (80 источников). Основной текст работы изложен на 89 страницах.

Глава 1 Теоретические основы содержания и методики обучения математике в старших классах социально-экономического профиля

1.1 Особенности процесса обучения математике в 10-11 классах социально-экономического профиля

Согласно Закону об образовании образование «должно способствовать формированию личности обучающегося, развитию интереса к познанию, формированию навыков самостоятельной учебной деятельности на основе индивидуализации и профессиональной ориентации содержания среднего общего образования» [67].

В «Концепции профильного обучения на старшей ступени общего образования» система профильного обучения в старших классах общеобразовательной школы является одним из приоритетных направлений образовательной политики. «Эта система ориентирована на индивидуализацию обучения и социализацию обучающихся, в том числе с учетом реальных интересов рынка труда» [24, с. 5].

В соответствии с принятой Концепцией развития математического образования в РФ математическое образование должно решать следующие ключевые задачи в направлении основного общего и среднего общего образования:

- «предоставлять каждому обучающемуся возможность достижения уровня математических знаний, необходимого для дальнейшей успешной жизни в обществе;
- обеспечивать необходимое стране число выпускников, математическая подготовка которых достаточна для продолжения образования в различных направлениях и для практической деятельности;

- предусматривает в основном общем и среднем общем образовании подготовку обучающихся в соответствии с их запросами к уровню подготовки в сфере математического образования» [25].

В примерной основной образовательной программе среднего общего образования соответственно выделяются три направления требований к результатам математического образования:

- «практико-ориентированное математическое образование (математика для жизни);
- математика для использования в профессии, не связанной с математикой;
- творческое направление, на которое нацелены обучающиеся, планирующие заниматься творческой и исследовательской работой в области математики, физики, экономики и других областях» [51].

Эти направления реализуются на базовом и углубленном уровнях в зависимости от профиля обучения.

В соответствии с Приказом Министерства образования и науки РФ от 17 мая 2012 г. № 413 «Об утверждении федерального государственного образовательного стандарта среднего общего образования» можно выделить следующие профили обучения: «естественно-научный, гуманитарный, социально-экономический, технологический, универсальный» [66].

При этом рабочие программы по математике в случае профильного обучения в своей основе содержат 3 модуля: инвариантный, вариативный и задачный модули. Инвариантный модуль соответствует государственной программе по математике базового или профильного уровня. Вариативный модуль включает в себя вопросы, которые учитывают применение математики в будущей профессиональной деятельности ученика в экономической или социальной сфере.

Данный модуль направлен на усиление мотивационного аспекта всего математического содержания курса и каждой темы в отдельности. Задачный модуль ориентирован на реализацию межпредметных связей математики и

современной экономики, а также на изучение основ экономико-математического моделирования [40].

Содержание курса математики при профильном обучении имеет ряд особенностей:

- для всех профилей в курсе математике можно выделить общее «ядро»: сведения о числе, функциях, вероятности, статистике, геометрических образах [18];
- в зависимости от профиля в курс по данному предмету включаются дополнительные главы, содержание которых отвечает задачам будущей профессиональной подготовки;
- включаются вопросы, связанные с применением математики в бытовых расчетах (страхование, налогообложение и т.д.);
- курс математики является интегрированным и включает в себя главы из курсов алгебры, математического анализа, геометрии, и информатики.

Как показывает практика, одним из самых востребованных профилей при выборе учащимися старшей школы является социально-экономический.

В социально-экономическом образовании, реализуемом в профильной школе, можно выделить три компонента, представленные в таблице 1 [56].

Мотивационный аспект обучения, направленный на привитие интереса к математике, заключается в том, что каждое новое понятие или положение появляется первоначально в задачах прикладного характера. Такие практико-ориентированные задачи позволяют учащимся сразу увидеть и оценить практическую полезность изучения нового теоретического материала, а также отметить связь математических абстракций данных задач с задачами реальной действительности. Важность мотивации при решении прикладных задач выделена также в статье С. Абрамовича, А. Гриншпана и Д. Миллигана [76]. Авторы подчеркивают, что это делает возможным осмысленное взаимодействие теоретических и прикладных идей.

Таблица 1 – Компоненты социально-экономического образования, реализуемые в профильной школе

Компонент	Содержание компонента
«информационно-познавательный»	усвоение учащимися содержания социально-экономических знаний; сформированность познавательных умений и навыков, включающих самостоятельную работу с социально-экономической информацией; выполнение учебного и исследовательского эксперимента социально-экономического характера
когнитивно-операционный	развитие социально-экономического мышления школьников с эмпирического до теоретического уровней; обеспечение увеличения темпа развития соответствующего стиля мыслительной деятельности; усвоение связей и отношений элементов социально-экономических знаний в процессе решения количественных межпредметных задач; обобщение содержания социально-экономических знаний посредством выполнения исследовательской работы по социально-экономической проблематике; развитие данных психических новообразований вследствие решения учащимися качественных межпредметных задач
мотивационно-деятельностный	формирование социально-экономической направленности личности» [52, с. 30].

Профили обучения можно разделить на три группы, основываясь на идее разделения профилей, предложенной Г.В. Дорофеевым, Л.В. Кузнецовой, С.Б. Суворовой и В.В. Фрисовым [18]. Данные группы выделяются в соответствии со значением математики для того или иного профиля, что обеспечивает профильную дифференциацию в математике.

Для профилей группы А математика является только элементом общего образования. Учащиеся данного профиля не рассматривают предмет в контексте применения в своей будущей профессиональной деятельности.

Профили группы В и С предполагают уже более расширенное изучение математики, поскольку рассматривают ее как один из основных элементов процесса своей профессиональной подготовки. При этом группа В представляет собой те профили, в которых математика играет роль аппарата и средства для изучения закономерностей окружающего мира. В группу С

включены те профили, для которых математика является одной из основных целей познания.

Социально-экономический профиль в данной классификации относится к группе В. Содержание курса математики для данной группы направлено не только на формирование математического аппарата, но и на его применение в качестве одного из элементов профессиональной подготовки, на обеспечение возможности успешной сдачи экзамена по математике при поступлении в вузы на те специальности, где математика не является профилирующим предметом.

Таким образом, несмотря на то, что математика является обязательным предметом для всех профилей, мотивация и подходы к ее изучению различаются в зависимости от профиля. Для гуманитарного профиля, не предполагающего практическое применение математики в будущей профессиональной деятельности, изучение этого предмета служит общеобразовательной цели. В то время как для учащихся технологического профиля математика имеет большое значение как ключевая область изучения. Для естественно-научного и социально-экономического профилей, математика служит инструментом, предоставляющим конкретные средства для изучения законов, описывающих факты и явления окружающего мира. В социально-экономическом профиле, в частности, методы, изучаемые в математике, непосредственно применимы к сферам экономики и общества.

Внимание обучающихся социально-экономического профиля направлено на использование логики для построения математических теорий, моделей и методов рассуждения на основе важных математических знаний: функциональные зависимости и их графическое изображение, понятие о расположении прямых и плоскостей в пространстве, сведения о простейших геометрических телах и поверхностях и т.д. посредством представления наглядных материалов. Кроме того, обучающимися могут быть рассмотрены определенные элементы статистики и теории вероятности.

Мышление учащихся данного профиля характеризуется прикладным стилем, который заключается в следующем: использование взаимосвязей

математики с другими науками, а также внутриматериальных связей и применение их практической направленности.

«Для прикладного стиля мышления можно условно выделить 4 типа заданий:

- на организацию вычислений, различные виды оценок значений;
- на составление моделей;
- на перенос действий в прикладную ситуацию;
- на узнавание математического содержания в тексте или другой знаковой информации» [21, с. 88].

Согласно федеральному базисному учебному плану для 10-11 классов данного профиля изучение математики предусмотрено на уровне профильного курса: 6 часов в неделю в 10 классе, 6 часов в неделю в 11 классе (общий объем 420 часов), из которых 4 часа в неделю отводится на изучение курса алгебры и начал математического анализа и 2 часа – на изучение геометрии [65]. Учебный план представлен в таблице 2.

Таблица 2 – Учебный план социально-экономического профиля

Учебные предметы	Число недельных учебных часов за 2 года обучения
I. Федеральный компонент	
Базовые учебные предметы	
Русский язык	2
Литература	6
Иностранный язык	6
Информатика и ИКТ	2
История	4
Естествознание	6
Физическая культура	4
Профильные учебные предметы	
Математика	12
Обществознание	6
Экономика	6
Право	2
География	6

Продолжение таблицы 2

Учебные предметы	Число недельных учебных часов за 2 года обучения
I. Региональный компонент	
По предусмотренную субъекта РФ	4
II. Компонент образовательного учреждения	
Элективные учебные предметы, учебные практики, проекты исследовательская деятельность	10

Математика для данного профиля обучения включена в федеральный компонент в качестве профильного учебного предмета, а также как компонент образовательного учреждения в формате элективных курсов.

Анализ литературных источников позволил выявить следующие элективные курсы по математике для учащихся социально-экономического профиля: элементы комбинаторики, теории вероятностей и статистики; задачи с экономическим содержанием; элементы математической логики.

Предметными результатами освоения программы по математике учащихся классов социально-экономического профиля являются результаты углубленного уровня (помимо традиционных групп результатов «Выпускник научится» и «Выпускник получит возможность научиться»), ориентированные на «получение компетентностей для последующей профессиональной деятельности как в рамках данной предметной области, так и в смежных с ней областях.

Эта группа результатов предполагает:

- значение математической науки для решения задач, возникающих в теории и практике; широту и ограниченность применения математических методов к анализу и исследованию процессов и явлений в природе и обществе;
- значение практики и вопросов, возникающих в самой математике, для формирования и развития математической науки;

- идеи расширения числовых множеств как способа построения нового математического аппарата для решения практических задач и внутренних задач математики;
- значение идей, методов и результатов алгебры и математического анализа для построения моделей реальных процессов и ситуаций;
- возможности геометрии для описания свойств реальных предметов и их взаимного расположения;
- универсальный характер законов логики математических рассуждений, их применимость в различных областях человеческой деятельности;
- различие требований, предъявляемых к доказательствам в математике, естественных, социально-экономических и гуманитарных науках, на практике;
- роль аксиоматики в математике; возможность построения математических теорий на аксиоматической основе; значение аксиоматики для других областей знания и для практики;
- вероятностный характер различных процессов и закономерностей окружающего мира» [66].

1.2 Анализ содержания школьных учебников математики для учащихся старших классов социально-экономического профиля

«Содержание курса алгебры и начал математического анализа формируется на основе Фундаментального ядра школьного математического образования. Оно представлено в виде совокупности содержательных линий, раскрывающих наполнение Фундаментального ядра школьного математического образования применительно к старшей школе» [8, с. 7].

Анализ рабочих программ курса алгебры и математического анализа Т.А. Бурмистровой показал, что содержание данного курса включает разделы:

- алгебра;
- математический анализ;
- вероятность и статистика;
- геометрия.

При этом «программа регламентирует объем материала, обязательного для изучения, но не задает распределения его по классам» [8, с.7]. Как говорилось выше, математика в классах социально-экономического профиля изучается на углубленном уровне. При этом содержание учебника не меняется для классов различных профилей, а расширение знаний учащихся происходит за счет включения дополнительных дидактических материалов.

Задачи, имеющие большую прикладную значимость для учащихся социально-экономического профиля, часто требуют знаний, выходящих за рамки школьной программы.

Стоит отметить, что многие математические модели, используемые для решения экономических задач, тесно связаны с такими как: «Уравнения», «Неравенства», «Функции», «Прогрессии», «Производная», «Интеграл», «Комбинаторика и теория вероятности».

«Проанализируем содержание учебников курса алгебры и начал математического анализа 10-11 классов данного профиля согласно Федеральному перечню учебников, допущенных Министерством просвещения Российской Федерации» [68, с. 286]. При анализе ориентируемся на указанные выше темы, как наиболее ценные и значимые для учащихся классов данного профиля.

Для анализа были выбраны 3 учебника углубленного уровня для 10-11 классов:

- УМК «Алгебра и начала математического анализа» под авторством А.Г. Мордковича, П.В. Семенова. Учебники и задачки для 10 и 11 классов;
- УМК «Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы» Ш.А. Алимова, Ю.М. Колягина, М.В. Ткачева и др.;

– УМК «Математика: алгебра и начала математического анализа» С.М. Никольского, М. К. Потапова, Н. Н. Решетникова и др. Учебники для 10 и 11 классов.

УМК Мордковича А.Г. [32], [33] для 10-11 представляет собой комплект из двух книг на каждый год изучения курса алгебры и начал математического анализа в классах с профильной подготовкой по математике: учебник и задачник (отдельно для 10 и 11 классов).

В таблице 3 представлено содержание учебника алгебры и математического анализа А.М. Мордковича по значимым для классов социально-экономического профиля темам.

Таблица 3 – Содержание учебника алгебры и математического анализа А.М. Мордковича

10 класс	11 класс
числовые функции (глава 2); тригонометрические функции (глава 3); тригонометрические уравнения (глава 4); производная (глава 7); комбинаторика и вероятность (глава 8) [32].	степенные функции (глава 2); показательная и логарифмическая функции (глава 3); первообразная и интеграл (глава 4); элементы теории вероятностей и математической статистики (глава 5); уравнения и неравенства. Системы уравнений и неравенств (глава 6) [33].

Содержание данного учебника соответствует требованиям государственного стандарта для углубленного уровня. Отличительной особенностью учебника является доступное изложение материала, большое число подробно решенных примеров, приоритет функционально-графической линии, появление ряда новых тем.

Содержание второго учебника, под авторством Ш.А. Алимова [2], представлено в таблице 4.

Данный учебник завершает развитие основных идей курса 7 – 9 классов авторов Ш.А. Алимова и др. Элементарные функции изучаются в 10 классе, начала математического анализа рассматриваются в 11 классе.

Система упражнений представлена в учебнике на трех уровнях

сложности. Задачи повышенной трудности содержат материал для подготовки в вузы.

Таблица 4 – Содержание учебника алгебры и математического анализа Ш.А. Алимова

10 класс	11 класс
степенная функции (глава 2); показательная функция (глава 3); логарифмическая функция (глава 4)	тригонометрические уравнения (глава 6); тригонометрические функции (глава 7); производная и её геометрический смысл (глава 8); применение производной к исследованию функций (глава 9); интеграл (глава 10); комбинаторика (глава 11); элементы теории вероятностей (глава 12); статистика (глава 13)

Следующий учебник - УМК «Алгебра и начала математического анализа» под авторством С.М. Никольского, М.К. Потапова, Н.Н. Решетникова и др. [38], [39]. В данном учебнике рассматриваются шесть основных тем: корни, степени, логарифмы; тригонометрические формулы, тригонометрические функции; элементы теории вероятности; функции, производные, интегралы; уравнения, неравенства, системы; комплексные числа.

В таблице 5 представлено содержание учебника алгебры и математического анализа С.М. Никольского.

Таблица 5 – Содержание учебников алгебры и математического анализа С.М. Никольского

10 класс	11 класс
рациональные уравнения и неравенства (§3); показательная функция (§4); логарифмическая функция (§5); показательные и логарифмические уравнения и неравенства (§6); тригонометрические функции числового аргумента (§10);	функции и их графики (§1); предел функции и непрерывность (§2); обратные функции (§3); производная (§4); применение производной (§5); первообразная и интеграл (§6); равносильность уравнений и неравенств (§7); уравнения-следствия (§8);

Продолжение таблицы 5

10 класс	11 класс
тригонометрические уравнения и неравенства (§11); вероятность события (§12); частота. Условная вероятность (§13); математическое ожидание. Закон больших чисел (§14) [38].	равносильность уравнений и неравенств системам (§9); равносильность неравенств на множествах (§11); использование свойств функций при решении уравнений и неравенств (§13); системы уравнений с несколькими неизвестными (§14); уравнения, неравенства и системы с параметрами (§15) [39].

В данных учебниках содержится большое количество образцов решения задач по всем темам. Каждый учебник завершается разделом «Задания для повторения», содержащим задачи как для текущего повторения, так и для подготовки к выпускным и конкурсным экзаменам, включая в себя задания, предлагавшиеся на ЕГЭ последних лет.

Из представленных таблиц видно, что большое внимание уделяется функционально-графическим линиям, решению показательных, логарифмических и тригонометрических уравнений и неравенств, а также применению полученных знаний, умений и навыков к решению практических задач.

Рассмотрим подробнее учебники по геометрии, используемые при реализации программы в классах социально-экономического профиля:

- УМК «Геометрия. 10-11 класс» под авторством Л.С. Атанасяна, В.Ф. Бутузова, С.Б. Кадомцева, Л.С. Киселевой, Э.Г. Поздняка;
- УМК «Геометрия. 10-11 класс» А.В. Погорелова;
- УМК «Геометрия» Е.В. Потоскуева, Л.И. Звавича. Учебник и задачник для 10 и 11 класса.

В учебнике Л.С. Атанасяна выделено 8 глав: «параллельность прямых и плоскостей; перпендикулярность прямых и плоскостей; многогранники;

векторы в пространстве; метод координат в пространстве; цилиндр, конус, шар; объемы тел; некоторые сведения из планиметрии» [13, с. 252].

Каждая глава завершается перечнем вопросов к ней, в конце главы приводятся дополнительные задачи. При этом каждый параграф главы завершается системой задач по теме параграфа.

В учебнике А.В. Погорелова выделено следующее разделение тем по классам:

- в 10 классе изучаются темы: «аксиомы стереометрии и их простейшие следствия; параллельность прямых и плоскостей; перпендикулярность прямых и плоскостей; декартовы координаты и векторы в пространстве» [46, с. 174];
- в 11 классе представлены темы: «многогранники; тела вращения; объемы многогранников; объемы и поверхности тел вращения; избранные вопросы планиметрии» [46, с. 174].

Каждая тема в данном учебнике завершается списком контрольных вопросов и системой задач. При изучении тем большое внимание уделяется решению задач.

Учебный комплект «Геометрия» для 10-11 классов Е.В. Потоскуева и Л.И. Звавича [47], [48], [49], [50] ориентирован на классы с углубленным и профильным изучением математики. Учебный комплекс представляет собой 2 книги на каждый год обучения: учебник и задачник.

Отличительной особенностью учебника данных авторов являются ясность и простота изложения материала, а также наличие большого количества рисунков, ярко иллюстрирующих теорию.

В рамках изучения геометрии представлены следующие темы:

- 10 класс: «введение в стереометрию; прямые в пространстве; прямая и плоскость в пространстве; плоскости в пространстве; расстояния в пространстве; векторный метод в пространстве; координатный метод в пространстве» [48, с. 221];

– 11 класс: «преобразования пространства; многогранники; фигуры вращения» [50, с. 365].

В задачниках приведены системы задач к каждому параграфу учебника, а также дополнительные задачи и важные материалы, в том числе, материалы по методам построения сечений многогранников: метод следов, метод внутреннего проектирования, комбинированный метод (в задачнике для 10 класса) [47]. В задачнике для 11 класса [49] в разделе «Дополнительно» приведены задачи для нахождения наибольшего и наименьшего значений и конкурсные задачи для поступающих в вузы.

1.3 Из опыта работы учителей математики в классах социально-экономического профиля

В статье Ворошиловой Л.П. «Оригинальная форма устного зачета» [10] автор демонстрирует особым образом организованные уроки-зачеты, которые называются математическими рингами.

За неделю до зачета учащимся предлагаются теоретические вопросы по определенной теме, которые учащиеся переписывают к зачету на свои карточки. Справа на карточке фиксируются вопросы, а слева - оставляется место для оценок за ответы на них.

До зачета на обратной стороне карточки учащиеся проводят цветные полосы в зависимости от уверенности в своих знаниях. Красная полоса означает, что учащийся уверен в своих знаниях и хочет выйти на ринг одним из первых. Желтая полоса свидетельствует, что он не слишком уверен в своих знаниях, а зеленая говорит о еще меньшей уверенности.

В заданиях ЕГЭ профильного уровня имеют место задания по планиметрии. Автор предлагает к рассмотрению материал зачета по теме 8 класса «Декартовы координаты на плоскости».

Данная методика может применена в классах социально-экономического профиля при отработке заданий первой части по теме

«Планиметрия».

Вопросы по теории:

- что такое координатная плоскость?;
- что такое уравнение фигуры в декартовых координатах?;
- как найти середину отрезка AB , если $A(a; b)$, $B(c; d)$?;
- выведите уравнение окружности;
- какими уравнениями может быть задана прямая на плоскости xy ?;
- опишите случаи взаимного расположения прямой и окружности на координатной плоскости;
- найдите геометрическое место точек плоскости, для которых: а) $|x|=5$, б) $|x-1|=3$, в) $(x-y)(x+y)=0$;
- дайте определение синуса, косинуса, тангенса для любого угла от 0° до 180° ;
- докажите, что для любого угла a , $0^\circ < a < 180^\circ$, $\cos(180^\circ - a) = -\cos a$, $\sin(180^\circ - a) = \sin a$, $\operatorname{tg}(180^\circ - a) = -\operatorname{tg} a$;
- существует ли такое значение a , $0 < a < 180^\circ$, при котором: а) $\sin a = 5$, б) $\cos a = 0.3333$, в) $\operatorname{tg} a = 12/5$.

Первые два вопроса сформулированы так, чтобы охватить идейную сторону темы и дать возможность учащимся задать дополнительные вопросы. Они могут быть заимствованы из вопросов для повторения, данных в учебнике.

Разбирая вопрос 4, необходимо подчеркнуть, что вывод уравнения окружности основывается на формуле расстояния между двумя точками и записать эту формулу на доске.

Отвечая на вопрос 5, учащийся должен упомянуть, что уравнение прямой $y=kx+q$ есть частный случай более общего уравнения $ax+by+c=0$. Дополнительные вопросы могут быть направлены на выяснение геометрического смысла коэффициентов a и b , k и q .

Задачи:

- отметьте точки $A(-5; 0)$, $B(5; 0)$ и $C(0; 6)$. Докажите, что треугольник ABC равнобедренный;
- даны точки $A(-8; 0)$ и $B(0; 6)$. Определите расстояние между ними;
- точка $C(1; -2)$ является серединой отрезка AB . Определите координаты точки A , если $B(0; -5)$;
- отрезок AB — диаметр окружности, C — ее центр. Определите координаты точки A , если $C(0; 3)$, $B(3; 0)$;
- докажите, что треугольник ABC равнобедренный, если $A(3; -1)$, $B(9; 5)$, $C(-3; 5)$;
- составьте уравнение окружности с центром в точке $C(-1; 0)$, если известно, что ей принадлежит точка $A(-5; 0)$;
- составьте уравнение окружности с центром в точке $C(5; 0)$, если известно, что ей принадлежит точка $A(5; 3)$;
- найдите точки пересечения с осями координат прямой, заданной уравнением $x+y-7=0$;
- найдите точки пересечения с осями координат прямой, заданной уравнением $x-y+4=0$;
- запишите уравнение прямой, пересекающей оси координат в точках $(0; 4)$ и $(8; 0)$.

Опишем педагогический опыт [69] учителя математики многопрофильного технического лицея №1501 г. Москва Е.М. Фоломеевой.

Автор демонстрирует педагогический опыт по организации исследовательской деятельности учащихся 11 класса в форме уроков-конференций, уроков-семинаров, уроков-мастерских, работой над экспресс-проектами.

Уроки-конференции несут в себе элементы исследования и позволяют задействовать всех учащихся класса. Уроки-семинары с элементами исследования выходят за рамки школьной программы и вводят учащихся в темы прикладной математики: учащиеся выводят новые формулы, моделируют примеры их применения. На уроках-мастерских формируются

исследовательские группы по 3-5 человек, на них ребята формулируют определения, конструируют частные виды фигуры, «открывают» признаки фигур, исследуют фигуры с точки зрения их свойств. Присутствует элемент соревнования между группами.

Учитель математики МБОУ СОШ №90 г. Нижний Тагил И.В. Железнякова в рамках элективного курса «Экономическая математика. Практикум», предназначенного для учащихся социально-экономического профиля, «акцентирует внимание на том, что профессии данной направленности требуют экономического мышления, основанного на специальных математических методах, а именно: объяснительно-иллюстративного (в начале изучения темы); поискового; частично-поискового; метода проблемного изложения учебного материала» [45].

В результате освоения предложенного курса учащиеся получают возможность: «изучить математические методы решения задач экономического содержания; овладеть умениями и навыками решения задач с помощью экономико-математических методов; овладеть техникой построения графических моделей при решении задач; освоить основные приемы решения задач на свойствах функций; освоить основные методы решения комбинаторных задач и задач теории вероятностей; повысить уровень математической культуры, творческого развития, познавательной активности» [45].

Приведем практическую реализацию программы элективного курса Ирины Владиславовны на примере задачи на составление математической модели.

Задача.

Фирма выпускает прогулочные и спортивные велосипеды. Ежемесячно сборочный цех способен собрать не более шестисот прогулочных и не более трехсот спортивных велосипедов.

Качество каждого велосипеда проверяется на двух стендах А и Б. Каждый прогулочный велосипед проверяется 0,3 ч на стенде А и 0,1 ч – на

стенде Б, а каждый спортивный велосипед проверяется 0,4 ч на стенде А и 0,3 ч – на стенде Б. По техническим причинам стенд А не может работать более 240 ч в месяц, а стенд Б – более 120 ч в месяц. Реализация каждого прогулочного велосипеда приносит фирме доход 50 руб., а каждого спортивного – 90 руб. Сколько прогулочных и сколько спортивных велосипедов должна ежемесячно выпускать фирма, чтобы ее прибыль была наибольшей? [45].

Решение.

Составим математическую модель этой задачи.

Пусть x – количество прогулочных велосипедов, y – количество спортивных велосипедов. Тогда по условию $0 \leq x \leq 600$, $0 \leq y \leq 300$.

Занятость стенда А составляет $0,3x + 0,4y$ (ч), что не должно превышать 240 ч. Поэтому $0,3x + 0,4y \leq 240$. Аналогично для стенда Б имеем $0,1x + 0,3y \leq 120$.

Прибыль фирмы составляет $S = 50x + 90y$ (руб.).

Итак, мы пришли к следующей математической задаче: найти целое значение x и y , удовлетворяющие системе неравенств и такие, чтобы прибыль $S = 50x + 90y$ была наибольшей [45].

$$\begin{cases} 0,3x + 0,4y \leq 240 \\ 0,1x + 0,3y \leq 120 \\ 0 \leq x \leq 600 \\ 0 \leq y \leq 300, \end{cases}$$

Изобразим на плоскости множество точек, удовлетворяющих системе. Всевозможные решения поставленной задачи лежат внутри или на границе многоугольника OABCDE.

Из рассмотрения рисунка 1 очевидно, что функция $S = 50x + 90y$ достигает своего наибольшего значения в одной из вершин O, A, B, C, D или E построенного многоугольника. Поэтому найдем координаты вершин и вычислим в них значения прибыли S . Имеем: O(0; 0), A(0; 300), B(300; 300), C(480; 240), D(600; 150) и E(600; 0) [45].

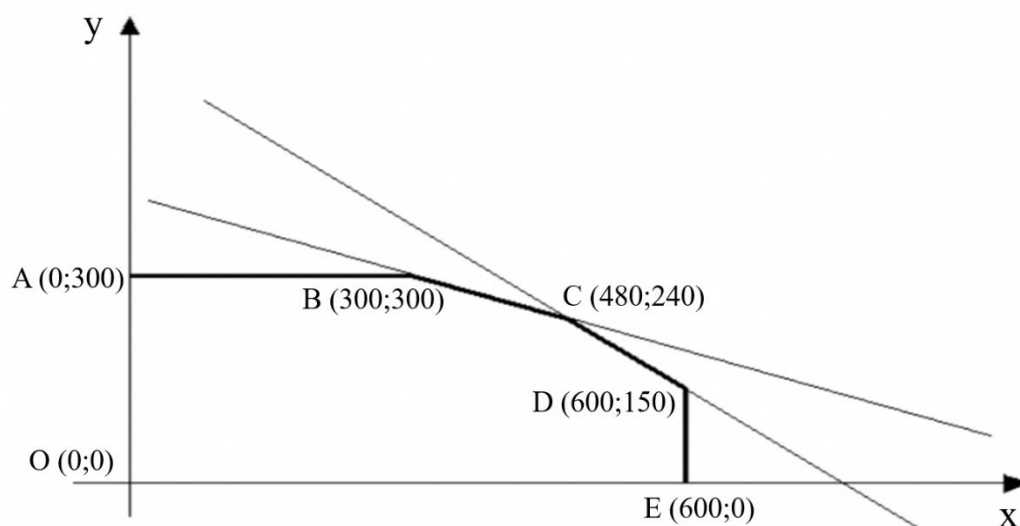


Рисунок 1 – Графическое решение задачи

Вычисляем значение прибыли S в каждой точке:

- в точке $O(0; 0)$, $S = 50 \cdot 0 + 90 \cdot 0 = 0$ (руб.);
- в точке $A(0; 300)$, $S = 50 \cdot 0 + 90 \cdot 300 = 27\,000$ (руб.);
- в точке $B(300; 300)$, $S = 50 \cdot 300 + 90 \cdot 300 = 42\,000$ (руб.);
- в точке $C(480; 240)$, $S = 50 \cdot 480 + 90 \cdot 240 = 45\,600$ (руб.);
- в точке $D(600; 150)$, $S = 50 \cdot 600 + 90 \cdot 150 = 43\,500$ (руб.);
- в точке $E(600; 0)$, $S = 50 \cdot 600 + 90 \cdot 0 = 30\,000$ (руб.) [45].

Анализируя полученные результаты, мы видим, что наибольшее значение прибыли равно 45600 руб. и достигается оно в точке C , т.е. при выпуске 480 прогулочных велосипедов и 240 – спортивных.

«Условия задачи диктуют построение математической модели. Мы видим, что в данном случае условия намеренно упрощены по сравнению с реальными производственными обстоятельствами: не учтены возможный брак и поломка оборудования, перебои в поставках смежников и т.д. Тем не менее, полученный результат показывает возможности фирмы при работе в «идеальных условиях». С помощью более точных моделей можно учесть возможный брак, отказ станков и т.д. Такая система моделей будет все более точно описывать деятельность фирмы. В заключение сделаем замечание о

точности дальнейших вычислений. Для решения большинства задач требуется калькулятор» [45].

В статье Т.А. Алмазовой, Н.И. Старикиной «Особенности содержания вероятностно-статистической линии в классах социально-экономического профиля» [3] подчеркивается важность наличия у учителя математики дополнительного учебного материала в виде теоретических положений, примеров, заданий, упражнений, иллюстрирующий учащимся данного профиля применение изучаемого материала в будущей профессиональной сфере. В статье представлены примеры задач по различным разделам вероятностно-статистической линии для учащихся классов социально-экономического профиля.

В элективном курсе О.М. Шараповой «Решение математических задач с экономическим содержанием» для профильных классов с социально-экономической направленностью представлена программа в объеме 35 часов.

В рамках данной программы внимание уделяется следующим темам: «основы математического моделирования при решении задач с экономическим содержанием (6 ч.), текстовые арифметические задачи на товарно-денежные отношения (2 ч.), на проценты (4 ч.), вклады и кредиты (10 ч.), оптимизация производства товаров и услуг (9 ч.), другие задачи (2 ч.)» [43]. Итоговой формой контроля является защита проектов по теме курса (2 ч.).

В элективном курсе Н.Н. Тимошенко «Задачи с экономическим содержанием» рассматриваются следующие темы: «математическое моделирование, применение прогрессий в экономике, транспортная задача линейного программирования, приложение производной и интеграла в экономике» [42]. Итоговой формой контроля служит творческая работа по решению задач, составленных учащимися или предложенных учителем.

Ценность элективного курса Л.А. Доброхотовой «Решение экономических задач средствами MS Excel» [44] в том, что он имеет большое значение в сфере практической экономики и при дальнейшем обучении в экономической сфере.

Данный курс ориентирован на учащихся 10-11 классов социально-экономического профиля. В рамках него предлагается качественно новый подход к решению профессионально-ориентированных задач.

Таким образом, анализ темы в статьях [3], [10] и опыт изучения темы посредством элективных курсов [42], [43], [44], [45], [64] показывает интерес учителей и исследователей к теме «Содержание и методика обучения математике в старших классах социально-экономического профиля».

Выводы по первой главе:

В первой главе рассмотрены особенности обучения математике учащихся 10-11 классов социально-экономического профиля:

- содержание курса математики для классов данного профиля направлено не только на формирование математического аппарата, но и на его применение в качестве одного из элементов профессиональной подготовки;
- мышление учащихся социально-экономического профиля характеризуется прикладным стилем, который заключается в следующем: использование взаимосвязей математики с другими науками, а также внутрипредметных связей и применение их практической направленности;
- внимание обучающихся данного профиля направлено на использование логики для построения математических теорий, моделей и методов рассуждений на основе важных математических знаний: функциональные зависимости и их графическое изображение, понятие о расположении прямых и плоскостей в пространстве, сведения о простейших геометрических телах и поверхностях и т.д. Кроме этого, обучающимися могут быть рассмотрены определенные элементы статистики и теории вероятности;

- изучение математики в социально-экономических классах предусмотрено на профильном уровне: 6 часов в неделю в 10 классе, 6 часов в неделю в 11 классе, из которых 4 часа в неделю отводится на изучение курса алгебры и начал математического анализа и 2 часа – на изучение геометрии;
- были проанализированы школьные учебники по алгебре (А.Г. Мордкович, П.В. Семенов; Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин, М.В. Ткачев и др.; С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников и др.) и геометрии (Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев, Л.С. Киселева, Э.Г. Поздняк; А.В. Погорелов; Е.В. Потоскуев, Л.И. Звавич), применяемые при реализации программ в классах данного профиля. Важными линиями являются: уравнения и неравенства, функции, производная, интеграл, теория вероятности, геометрия;
- проанализирован опыт работы учителей в классах социально-экономического профиля. Рассмотрены элективные курсы по теме исследования.

Глава 2 Методические основы содержания и методики обучения математике в старших классах социально-экономического профиля

2.1 Система задач для учащихся социально-экономического профиля при подготовке к ЕГЭ

Анализ сборников для подготовки к ЕГЭ по математике, а также задач, выпадавших на ЕГЭ в 2016-2022 г. позволяет провести классификацию экономических задач ЕГЭ, она представлена на рисунке 2.

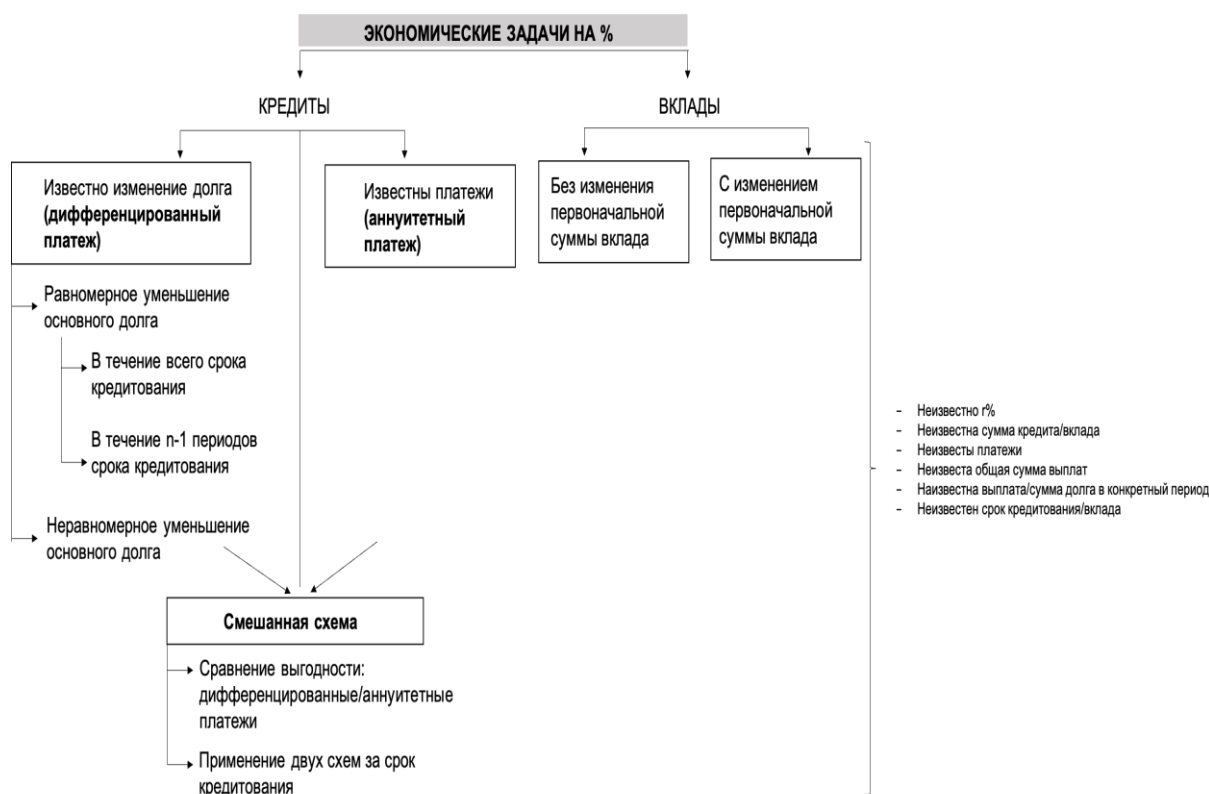


Рисунок 2 – Классификация экономических задач ЕГЭ

В экономических задачах ЕГЭ на проценты можно выделить 2 направления: задачи на кредиты и на вклады. Первое направление задач является наиболее представленным, здесь встречается достаточно большое

разнообразие задач. Задачи на кредиты можно разделить на 2 основные группы:

- с известным изменением долга (дифференцированные платежи);
- с известными или равными платежами (аннуитетные платежи).

Также встречаются задачи на сочетание этих схем, в частности, задачи, в которых необходимо определить, какая схема кредитования более выгодна, а также задачи, в которых в течение первых периодов происходит изменение долга по схеме с дифференцированными платежами, а далее работает схема аннуитетных платежей.

Приведем примеры задач, выделенных в схеме «Классификация экономических задач ЕГЭ».

Задача 1.

Дифференцированные платежи с равномерным уменьшением долга в течение всего срока кредитования.

«В июле планируется взять кредит в банке на сумму 8 млн рублей на 10 лет. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на 15% по сравнению с концом предыдущего периода;
- с февраля по июнь необходимо выплатить часть долга;
- в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года.

Сколько млн рублей составит общая сумма выплат после погашения кредита?» [31, с. 33].

Решение:

Пусть S млн руб. – сумма кредита. Каждый месяц долг возрастает на 15% (т.е. в 1,15 раз). Долг уменьшается равномерно в течение всего срока кредитования (10 лет) – на $\frac{1}{10}S$. Схему начислений и выплат представлена в таблице 6.

Таблица 6 – Схема начислений и выплат к задаче 1

Год	Долг	Выплаты		Общая выплата
		%	Основной долг	
1	S	$0,15 \cdot S$	$\frac{1}{10}S$	$0,15 \cdot S + \frac{1}{10}S$
2	$\frac{9}{10}S$	$0,15 \cdot \frac{9}{10}S$	$\frac{1}{10}S$	$0,15 \cdot \frac{9}{10}S + \frac{1}{10}S$
...				
9	$\frac{2}{10}S$	$0,15 \cdot \frac{2}{10}S$	$\frac{1}{10}S$	$0,15 \cdot \frac{2}{10}S + \frac{1}{10}S$
10	$\frac{1}{10}S$	$0,15 \cdot \frac{1}{10}S$	$\frac{1}{10}S$	$0,15 \cdot \frac{1}{10}S + \frac{1}{10}S$
ИТОГО		0,825S	S	1,825S

Т.к. $S=8$ млн, то $1,825S = 14,6$ млн руб.

Ответ: 14,6 млн руб.

Задача 2.

Дифференцированные платежи с равномерным уменьшением долга в течение $n-1$ периодов кредитования.

«15 декабря планируется взять кредит в банке на 21 месяц. Условия возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 3% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца с 1-го по 20-й долг должен быть на 30 тысяч рублей меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
- к 15-му числу 21-го месяца кредит должен быть полностью погашен.

Какую сумму планируется взять в кредит, если общая сумма выплат после полного его погашения составит 1604 тысячи рублей?» [55].

Решение:

Пусть S млн руб. – сумма кредита. Каждый месяц долг возрастает на 3% (т.е. в 1,03 раза). Долг уменьшается равномерно в течение 20 мес. (на 30 тыс. ежемесячно). Схему начислений и выплат представлена в таблице 7.

Таблица 7 – Схема начислений и выплат к задаче 2

Год	Долг	Выплаты		Общая выплата
		%	Основной долг	
1	S	$0,03 \cdot S$	30	$0,03 \cdot S + 30$
2	$S - 30$	$0,03 \cdot (S - 30)$	30	$0,03 \cdot (S - 30) + 30$
...				
20	$S - 30 \cdot 19$	$0,03 \cdot (S - 30 \cdot 19)$	30	$0,03 \cdot (S - 30 \cdot 19) + 30$
21	$S - 30 \cdot 20$	$0,03 \cdot (S - 30 \cdot 20)$	$S - 30 \cdot 20$	$0,03 \cdot (S - 30 \cdot 20) + 30$
ИТОГО		$0,63S - 189$	S	$1,63S - 189$

Т.к. Общая сумма выплат составит 1604 тыс.руб, то $1,63S - 189 = 1604$,
 $S = 1100$ тыс.руб.

Ответ: 1100 тыс.руб.

Задача 3.

Неравномерное изменение долга (часто такие задачи представлены в виде таблицы).

«В июле 2022 года планируется взять кредит в банке на 4 года в размере S млн рублей, где S – целое число. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг увеличивается на 15% по сравнению с концом предыдущего периода;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
- в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей 8.

Таблица 8 – Исходные данные к задаче 3

Месяц и год	Июль 2022	Июль 2023	Июль 2024	Июль 2025	Июль 2026
Долг (в млн рублей)	S	0,7S	0,4S	0,2S	0

Найдите наименьшее значение S, при котором каждая из выплат будет меньше 3 млн рублей» [31, с. 17].

Решение:

Пусть S млн руб. – сумма кредита. Каждый год долг возрастает на 15% (т.е. в 1,15 раз). Схему начислений и выплат представлена в таблице 9.

Таблица 9 – Схема начислений и выплат к задаче 3

Год	Долг	Выплаты		Общая выплата
		%	Основной долг	
1	S	$0,15 \cdot S$	0,3S	$0,15 \cdot S + 0,3S = 0,45S$
2	0,7S	$0,15 \cdot 0,7S$	0,3S	$0,15 \cdot 0,7S + 0,3S = 0,405 S$
3	0,4S	$0,15 \cdot 0,4S$	0,2S	$0,15 \cdot 0,4S + 0,2S = 0,26S$
4	0,2S	$0,15 \cdot 0,2S$	0,2S	$0,15 \cdot 0,2S + 0,2S = 0,23S$

По условию каждая выплата должна быть меньше 3 млн руб.

Если наибольшая выплата будет соответствовать условию, то остальные выплаты тоже: $0,45S < 3$, $S < 6\frac{2}{3}$. Т.к. $S \in \mathbb{Z}$, то $S = 6$.

Ответ: 6 млн руб.

Задача 4.

Равные платежи.

«В июле 2020 года планируется взять кредит в банке на сумму 200000 рублей. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего периода;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.

Найдите число r , если известно, что кредит был полностью погашен за два года, причем в первый год было переведено 130000 рублей, а второй год – 150000 рублей» [55].

Решение:

Пусть $S=200000$ рублей, $m=1+\frac{r}{100}$, $x_1=130000$, $x_2=150000$.

Сумма долга согласно условию задачи: 1 год: $Sm-x_1$; 2 год: $(Sm-x_1)m-x_2$.

Поскольку кредит погашен двумя платежами, то долг в конце второго года равен 0:

$$(Sm-x_1)m-x_2=0$$

$$Sm^2-x_1m-x_2=0$$

$$20m^2-13m-15=0$$

$$m=1,25$$

$$1+\frac{r}{100}=1,25$$

$$r=25\%$$

Ответ: 25%.

Задача 5.

Выбор наиболее оптимальной схемы кредитования: дифференцированные платежи или аннуитетные.

«Иван планирует 14 декабря взять в банке кредит на 2 года в размере 43 000 рублей. Сотрудник банка предложил Ивану два различных плана погашения кредита, описание которых приведено в таблице 10.

Таблица 10 – Исходные данные к задаче 5

План 1	каждый январь долг возрастает на 15% по сравнению с концом предыдущего периода; с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга; кредит должен быть погашен полностью за два года двумя равными платежами.
План 2	1-го числа каждого месяца долг возрастает на 3% по сравнению с концом предыдущего месяца; со 2-го по 13-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга; 14-го числа каждого месяца с 1-го по 24-й долг должен быть меньше долга на 14-е число предыдущего месяца на одну и ту же сумму; к 14-му числу 24-го месяца кредит должен быть полностью погашен.

На сколько рублей меньше окажется общая сумма выплат Ивана банку по более выгодному плану погашения кредита?» [75, с. 188].

Решение:

Пусть S млн руб. – сумма кредита

По плану 1: Каждый год долг возрастает на 15% (т.е. в 1,15 раз = m).

Кредит погашен за 2 равных платежа (x).

Составим схему начислений:

1 год: $Sm - x$

2 год: $(Sm - x)m - x$

$$Sm^2 - xm - x = 0$$

Отсюда $x = 26450$.

За два года выплаты составили $2x = 52900$ руб.

По плану 2: Каждый месяц долг возрастает на 3% (т.е. в 0,03 раза). Долг уменьшается равномерно в течение всего срока кредитования (24 мес) – на $\frac{1}{24}S$. Схему начислений и выплат представлена в таблице 11.

Таблица 11 – Схема начислений и выплат к задаче 5

Год	Долг	Выплаты		Общая выплата
		%	Основной долг	
1	S	$0,03 \cdot S$	$\frac{1}{24}S$	$0,03 \cdot S + \frac{1}{24}S$
2	$\frac{23}{24}S$	$0,03 \cdot \frac{23}{24}S$	$\frac{1}{24}S$	$0,03 \cdot \frac{23}{24}S + \frac{1}{24}S$
...				
24	$\frac{1}{24}S$	$0,03 \cdot \frac{1}{24}S$	$\frac{1}{24}S$	$0,03 \cdot \frac{1}{24}S + \frac{1}{24}S$
ИТОГО		$0,375S$	S	$1,375S$

Общая сумма выплат – 59125 руб. По более выгодному плану (№1) общая сумма выплат на 6225 руб. меньше.

Ответ: 6225 руб.

Задача 6.

Применение дифференцированной схемы в течение первых периодов кредитования, далее – аннуитетная схема.

«В июле 2016 года планируется взять кредит в размере 4,2 млн рублей.

Условия возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего периода;
- с февраля по июнь необходимо выплатить часть долга;
- в июле 2017, 2018 и 2019 годов долг остается равным 4,2 млн рублей;
- суммы выплат 2020 и 2021 годов равны.

Найдите r , если долг выплачен полностью и общая сумма выплат составила 6,1 млн рублей» [55].

Решение:

Пусть x – выплата в 2020 и 2021 годах, $m=1+\frac{r}{100}$. Поскольку первые три года долг оставался равен первоначальной сумме кредита, значит в эти годы выплачивались только проценты: $4,2 \cdot (m - 1) \cdot 3$

Следующие 2 года долг был следующим:

2020 год: $S-m-x$

2021 год: $(S-m-x)m-x$

Так как кредит был выплачен полностью, то: $(4,2m-x)m-x=0$, откуда

$$X=\frac{4,2m^2}{m+1}.$$

Общие выплаты по кредиту составили:

$$4,2 \cdot (m - 1) \cdot 3 + 2 \cdot \frac{4,2m^2}{m+1} = 6,3$$

$$21m^2-6,1m-18,7=0$$

$$m=1,1$$

Следовательно, $r=10\%$

Ответ: 10%.

Задача 7.

Вклады без пополнения

«По вкладу «А» банк в конце каждого года планирует увеличивать на 7% сумму, имеющуюся на вкладе в начале года, а по вкладу «Б» - увеличивать эту сумму на 6% в первый год и на целое число n процентов во второй год. Найдите наименьшее значение n , при котором за два года хранения вклад «Б» окажется выгоднее вклада «А» при одинаковых суммах первоначальных вкладов» [31, с. 41].

Решение:

Пусть S – сумма вклада. На вкладе «А» сумма возрастает ежегодно на 7%, т.е. увеличивается в 1,07 раза. Через 2 года на вкладе «А» сумма будет равна $1,07^2 S$.

На вкладе «Б» сумма вклада будет следующей:

$$1 \text{ год: } 1,06 \cdot S$$

$$2 \text{ год: } 1,06 \cdot \left(1 + \frac{n}{100}\right) \cdot S$$

Чтобы вклад «Б» оказался выгоднее вклада «А», должно выполняться следующее условие:

$$1,06 \cdot \left(1 + \frac{n}{100}\right) \cdot S > 1,07^2 S$$

$$n > \frac{849}{106}$$

т.к. n – целое число, то $n > 8$. Следовательно, $n = 9$.

Ответ: 9.

Задача 8.

Вклады с пополнением.

«Вклад планируется открыть на 4 года. Первоначальный вклад составляет целое число миллионов рублей. В конце каждого года вклад увеличивается на 10% по сравнению с его размером в начале года, а кроме этого, в начале третьего и четвертого годов вклад ежегодно пополняется на 1 млн рублей. Найдите наименьший размер первоначального вклада, при котором через четыре года вклад будет больше 10 млн рублей» [55].

Решение.

Пусть S – первоначальная сумма вклада. В конце каждого года вклад увеличивается на 10%, т.е. возрастает в 1,1 раз.

Согласно условиям задачи сумма вклада будет меняться следующим образом:

- 1 год: Sm ;
- 2 год: Sm^2 ;
- 3 год: $(Sm^2+1)m$;
- 4 год: $((Sm^2+1)m+1)m$;

Поскольку вклад должен быть больше 10 млн рублей, должно выполняться условие:

$$Sm^4 + m^2 + m > 10$$

$$S > \frac{10 - m^2 - m}{m^4}$$

$$S > 5 \frac{3695}{14641}$$

Т.к. S – целое число, то $S=6$.

Ответ: 6 млн рублей.

Таким образом, представленная классификация задач позволяет учащимся наиболее эффективно ориентироваться в видах экономических задач. Когда ученик понимает, к какому типу относится задача, он может быстрее и правильнее ее решить.

Помимо этого, все представленные задачи можно классифицировать по неизвестному задачи:

- неизвестен процент кредитования/вклада
- неизвестна сумма кредитования/вклада
- неизвестны платежи
- неизвестная общая сумма выплат
- неизвестна выплата долга/вклада в конкретный месяц/год
- неизвестен срок кредитования/вклада.

При этом схема решения этих задач является универсальной, в частности не зависит от того, что нужно найти в задаче.

2.2 Применение кейс-технологии при обучении математике учащихся социально-экономического профиля

Началом кейс-технологий в общепринятом виде принято считать Школу права Гарвардского университета (1870 г.). Решение кейсов считалось эффективным способом профессионального обучения в бизнес-школах и высших учебных заведениях. Если говорить о Европейском образовании, то самой известной школой, применяющей кейс-технологии, стала Манчестерская школа бизнеса. В СССР интерес к методу кейс-технологий возник в 70-80 годы двадцатого столетия.

Кейс дает возможность обучающимся выявить проблему, осуществить выбор путей и способов ее решения, актуализировать необходимый для ее решения опыт. Этим кейс отличается от традиционной задачи, проблемной ситуации, он не предлагает проблему для решения явно – ее необходимо увидеть, вычленить, сформулировать. Эта проблема, как правило, не имеет однозначного решения, предполагает множество альтернативных решений, из спектра которых учащимся предстоит выбрать наиболее подходящий, воспользовавшись самостоятельно разработанными критериями [12].

Несмотря на то, что кейс-технологии чаще всего применяют при обучении предметам общественно-научного направления, они могут быть использованы и при обучении математике. Стоит отметить, что при обучении математике кейс-технология на данный момент не так сильно распространена, что может быть связано с достаточно высокой сложностью разработки кейсовых задач для решения, а также с повышенной сложностью решения таких практических ситуаций учащимися, относительно традиционных задач.

Разработки по теме кейс-технологии в обучении О.Б. Даутовой [16], С.Б. Ступиной [60], И.В. Толстоуховой и Т.А. Фегуловой [61] являются достаточно сильной базой для их применения, в том числе при обучении математике.

С.Б. Ступина под кейс-технологией обучения понимает обучение с использованием описания реальных экономических и социальных ситуаций. Автор выделяет кейс-технологиям как «более сложную систему (по отношению к другим технологиям обучения), в которую интегрированы другие, более простые методы познания: моделирование, системный анализ, проблемный метод, мысленный эксперимент, методы описания, классификации, дискуссии, игровые методы и др.» [60, с. 38].

Непосредственная работа с кейсом в разрезе данной кейс-технологии происходит в последовательности, описанной в таблице 12.

Таблица 12 – Этапы работы с кейсом по С.Б. Ступиной

Этап	Краткая характеристика этапа
Этап введения в кейс	раздача кейсов и ознакомление с ними (5-7 мин); контроль учителя степени понимания содержания кейса учащимися; ответы на уточняющие вопросы учащихся по кейсу.
Анализ ситуации	каждый учащийся или группа учащихся устно представляет свой вариант решения; выявление проблемы, выработка, оценка и выбор оптимального решения, подготовка к презентации
Этап презентации	представление своего решения кейса, демонстрация его сильных сторон (10-15 мин); ответы на вопросы других учащихся
Этап общей дискуссии	четыре основных вопроса: – почему ситуация выглядит как дилемма?; – кто принимал решения?; – какие варианты решения он имел?; – что ему надо было сделать?
Этап подведения итогов	приведение учителем верного решения разбор альтернативных решений кейса

Автор подчеркивает, что «ситуативное обучение учит поиску и использованию знаний в условиях динамичной ситуации, развивая гибкость, диалектичность мышления» [60, с. 39].

О.Б. Даутова выделяет 4 этапа организации урока с использованием кейс-технологии: подготовительный, ознакомительный, аналитический и итоговый. «На заключительном этапе производится презентация результатов аналитической работы разными группами и дальнейшее сравнение нескольких вариантов оптимальных решений проблемы» [16, с. 146]. Ф. Хонгжи [78] видит ценность таких презентаций в том, что они обеспечивают возможность всем учащимся показать свои знания с творческой стороны. Интерес, возникший у учащегося при устном докладе, способствует повышению заинтересованности в дальнейшем изучении математики.

И.В. Толстоухова, Т.А. Фегулова подчеркивают важность роли учителя в кейс-технологии обучения. Ему рекомендуется принимать непосредственное участие в дискуссии и презентации. Педагог должен моделировать ход развития дискуссии и иметь возможность вносить изменение ее хода путем

правильной постановки вопросов и расставления акцентов на нужных элементах [61].

В теории и методике обучения математике известны кейс-технологии В.А. Далингера [15] и Н.В. Дударевой, Т.А. Унеговой [17].

В.А. Далингер определяет суть кейс-технологии обучения как «активную самостоятельную деятельность учащихся по разрешению противоречий в искусственно созданной профессиональной среде, которая позволяет группировать теоретические знания, практические навыки и накопленный жизненный опыт» [15, с. 427].

Автор выделяет 5 этапов процесса решения кейсов, представленных на рисунке 3.

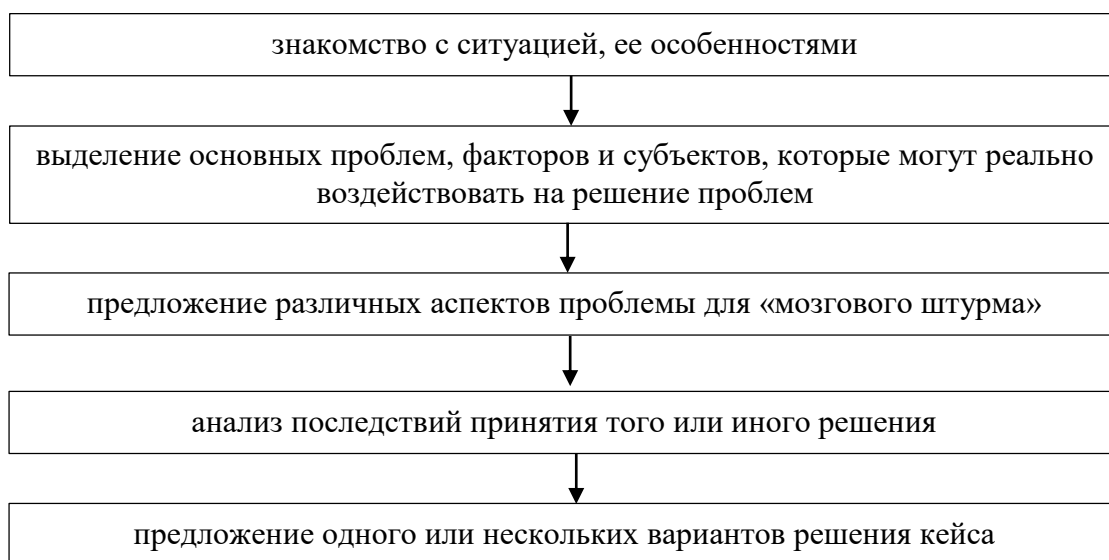


Рисунок 3 – Этапы решения кейса по В.А. Далингеру

Важную роль учителя автор выделяет при завершении занятия: «учитель подводит итоги дискуссии, обобщает проделанную работу, выделяет в ней сильные и слабые стороны, определяет степень достижения поставленных целей, выставляет конечные оценки учащимся и отвечает на вопросы» [15, с. 428].

Немаловажно отметить роль учебной атмосферы для успешности применения данной технологии обучения. Исследование, проведенное Рауно Коскиненем и Харри Питканиеми [79], посвященное изучению влияния учебной среды на мотивацию учащихся к обучению, показало, что учебная среда, в которой приоритет отдается личности ученика, его интересам и ценностям, оказывает значительное влияние на изучение математики. В частности, было установлено, что обучение, основанное на интересах, положительно влияет на мотивацию студентов к изучению математики. Авторы называют этот тип обучения осмысленным обучением, которое предполагает индивидуальный подход, поддерживаемый компетентным руководством учителя и благоприятной атмосферой обучения.

Н.В. Дударева и Т.А. Унегова выделяют три типа кейсов при обучении математике, представленные в таблице 13.

Таблица 13 – Характеристика типов кейсов по математике

Тип кейса	Характеристики математического кейса	
	Содержание кейса	Краткое описание кейс-задания
«Практический кейс»	Жизненные ситуации, в которых возможно применение математических знаний	Формулируется содержательная модель кейс-задания, приведенная в полном объеме, при этом может присутствовать избыточная информация. Возможно включение альтернативных ситуаций, из которых требуется выбрать оптимальный вариант
Обучающий кейс	Учебные (условные) ситуации	Формулируется содержательная модель кейс-задания. Приводится список взаимосвязанных подзадач, решение которых должно привести к решению поставленной задачи.
Исследовательский кейс	Исследовательские ситуации, для решения которых целесообразно создание математической модели, ее исследование и интерпретация	Формулируется содержательная модель кейс-задания, возможно, с избыточной или недостаточной информацией. Задание допускает построение нескольких математических моделей с использованием знаково-символических языков различных разделов математики» [17, с. 243]

Авторы проводят параллель применения кейс-технологии в обучении математике от других предметов: для построения математических моделей важно владение достаточно развернутым математическим аппаратом.

Проверка заданий может осуществляться путем фронтального обсуждения решения со всеми учащимися класса с выделением алгоритма действий и проверкой промежуточных ответов или в ходе обсуждения учащимися полученных индивидуальных решений в мини-группах по 2–4 человека с последующим итоговым выступлением представителя группы перед аудиторией [17].

В своем исследовании Мендерес Юнал [80] подчеркивает важность совместной работы учащихся в процессе изучения математики. Автор аргументирует, что такой подход способствует развитию навыков сотрудничества. Объединение учащихся с различными навыками вносит значительный вклад в достижения каждого ученика, поскольку коллективная работа над задачей стимулирует продуктивный диалог и дискуссию. Кроме того, выбор между разными подходами к решению задачи помогает развить в целом способности принятия решений в других жизненных и учебных ситуациях. Эти навыки особенно ценны для будущей профессиональной деятельности учащихся социально-экономического профиля.

Приведем разработку практической реализации кейс-технологии в обучении математике на примере темы «Элементы комбинаторики».

Урок 1.

Знакомство с кейс-технологией при изучении темы «Элементы комбинаторики»

Цель: Применение кейс-технологии при решении практических комбинаторных задач.

Задачи:

- вспомнить метод перебора, дерева решений, правило умножения, основные формулы комбинаторики: перестановки, размещения, сочетания;

- учиться применять кейс-технологии при решении комбинаторных задач.

Предполагаемые результаты: уметь применять кейс-технологии при решении комбинаторных задач.

Учитель разбивает учащихся на пары, каждой из которых выдаются карточки с кейсами и заданиями к ним.

Кейс 1.

«В школьной столовой на первое можно заказать борщ, солянку, грибной суп, на второе - мясо с макаронами, рыбу с картошкой, курицу с рисом, а на третье - чай и компот. Сколько различных обедов можно составить из указанных блюд?» [4, с. 8].

Задание к кейсу:

- ознакомьтесь с кейс-задачей;
- какие способы решения задачи вы видите? Решите кейс-задачу наиболее оптимальным способом. Обоснуйте свой выбор способа решения.

Приведем возможные варианты решения кейса.

1 способ. Перечислим возможные варианты в таблице 14.

Таблица 14 – Варианты обедов к кейсу 1

Чай (Ч) Компот (К)	Мясо (М)	Рыба (Р)	Курица с рисом (Кр)
Борщ (Б)	БМЧ/БМК	БРЧ/БРК	БКрЧ/БКрК
Солянка (С)	СМЧ/СМК	СРЧ/СРК	СКрЧ/СКрК
Грибной суп (Г)	ГМЧ/ГМК	ГРЧ/ГРК	ГКрЧ/ГКрК

2 способ. Дерево возможностей представлено на рисунке 4.

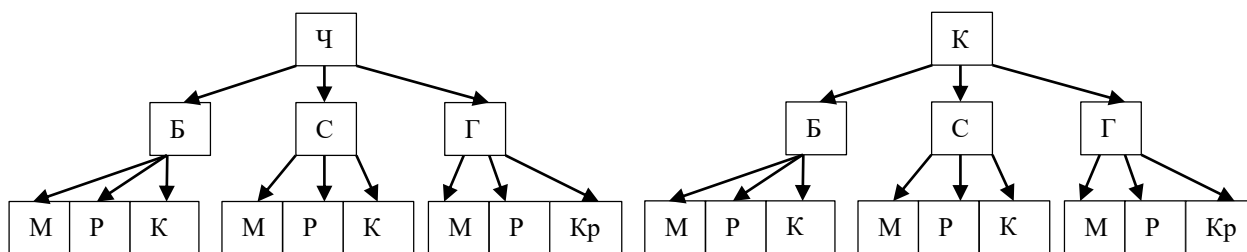


Рисунок 4 – Дерево возможностей к кейсу 1

3 способ. Используя правило умножения, получаем: $3 \cdot 3 \cdot 2 = 18$. Ответ: 18 вариантов.

Учащиеся устно презентуют свои решения кейса. Задача учителя – организовать ход презентаций, по итогу которых должны быть рассмотрены 2-3 варианта решения задачи. Далее происходит осуждение предложенных решений, в результате которого учитель подводит итоги по кейсу.

Кейс 2.

Вика, Катя и Лена собрались вместе, чтобы решить задачу по комбинаторике: «Сколько существует в n -буквенном алфавите m -буквенных слов, состоящих из различных букв?» [28, с. 5]

Поскольку задали много, а девочки только пришли из школы они принесли с собой конфеты и фрукты. Катя задумалась:

- «На столе лежат 5 яблок и 9 груш. Сколькими способами можно выбрать яблоко или грушу?
- Сколькими способами можно выбрать пару яблоко-груша?» [9, с. 15]
- Сколькими способами могут сесть девочки за длинный стол?

«Сколькими способами можно распределить три конфеты между тремя девочками? Можете ли вы перебрать все варианты? Какую формулу нужно использовать?» [28, с. 5].

Задание к кейсу:

- ознакомьтесь с кейс-задачей;
- ответьте на вопросы Кати к кейс-задаче;
- предложите решение основной задачи кейса, обоснуйте его;

– можете ли вы перебрать все варианты решения? Есть ли оптимальные варианты решения данной задачи?

При возникновении затруднений с данным кейсом работа в парах может быть трансформирована в работу в формате «мозговой штурм». Важность такого диалога, возможность участвовать в процессе исследования и в целом решать исследовательские кейс-задания отмечена в статье М. Чевикбаса [77]. Это способствует развитию математических способностей и дает возможность учащимся самим конструировать знания, находясь при этом в коммуникации с другими учащимися и учителем.

Учитель при этом моделирует ход развития дискуссии и вносит изменения в ее ход путем правильной постановки вопросов и расставления акцентов на нужных элементах.

На этапе подведения итогов учитель приводит верное решения и производится разбор альтернативных решений.

Приведем возможное решение кейса 2.

Выбрать можно 14 способами: выбрать либо одно из 5 яблок, либо одну из 9 груш.

Пару яблоко-груша можно выбрать $5 \cdot 9 = 45$ способами.

Девочки могут сесть 6 различными способами. Это можно определить простым перебором или по формуле числа перестановок без повторений: $P_n = n!$

Задачу про конфеты можно понимать несколькими способами. Можно ли сказать, «что конфеты распределены между тремя девочками, если все они отданы одной? Если же понимать распределение в широком смысле слова, по-прежнему считая конфеты тождественными, получаем 10 вариантов – 3 варианта типа (3,0,0) (когда все конфеты отдаются кому-либо из трех) + 6 вариантов типа (2,1,0) + 1 вариант типа (1,1,1). Если же вдобавок и все конфеты различны, получаем максимальное число $3^3 = 27$ вариантов»[28, с. 6].

Здесь происходит дискуссия учащихся, целью которой является важность смысла слов «различные варианты» в комбинаторных задачах.

«Основная задача кейса имеет смысл лишь при $m \leq n$ (иначе ответ - 0). Можно представить себе, что имеется n карточек с изображением всех букв алфавита (по одной карточке на букву) и мы формируем слова, размещая друг за другом те или иные m карточек в том или ином порядке»[28, с. 6]. Искомая величина - число размещений из n элементов по m :

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} [28].$$

Урок 2.

Решение комбинаторных задач при помощи кейс-технологии.

Групповая форма работы: работа над кейсом и презентация результатов работы.

Учитель выдает кейсы и задания к ним. Перед началом решения кейсов, учащиеся знакомятся с заданиями, задают необходимые вопросы учителю.

Задание к кейсам:

- ознакомьтесь с кейс-задачами;
- составьте план выполнения работы, убедившись, что каждый учащийся имеет свое задание;
- выберите наиболее приемлемое решение для каждой кейс-задачи и предоставьте соответствующие расчеты;
- подготовьте краткое устное изложение, описывающее ваше решение кейс-задачи. Укажите этапы, которые помогли вам принять это решение, и подтвердите его расчетами. Также не забудьте рассказать, какую роль каждый участник вашей группы сыграл в решении кейса.

Кейс 3.

«Учащиеся школы, в которой учится Егор, сдают зачет по плаванию. После зачета кого-то из учащихся пригласят на городские соревнования, 5 учащихся сдают зачет по плаванию. Зачет сдан, если учащийся проплывет 100 метров (время любое). Если же учащегося приходится вылавливать, то зачет не сдан. Сколькими способами может закончиться заплыв? Можете ли вы перебрать все варианты? Какую формулу нужно использовать? Двое лучших

по времени учеников поедут на соревнования. Сколько способов отбора учащихся на соревнования существует в этом случае?» [9, с. 15] N учащихся школы с 5 по 11 класс решили принять участие в отборе на соревнования. k из них пройдут в финал на участие в городских соревнованиях. Сколько k-подмножеств содержится в множестве N из n элементов?

Кейс 4.

«Перед вами три конверта и 4 различные марки. Сколько различных вариантов наклеить марку на конверт у вас есть? Попробуйте перебрать эти варианты. С использованием какой формулы можно вычислить число этих вариантов и почему?» [41, с. 103].

Кейс 5.

«У директора предприятия в подчинении 30 работников, ему нужно назначить в январе 5 управляющих в цех, в феврале 6 менеджеров на производство и в марте 3 прорабов на стройку. Сколько комбинаций выбора на каждые из должностей есть у директора?» [41, с. 103].

Кейс 6.

«В туристическую фирму пришел клиент с желанием купить тур. Он готов потратить 25500 рублей. В прайс-листе, представленном в таблице 15, имеются следующие предложения:

Таблица 15 – Прайс-лист к задаче

Стоимость отеля	Стоимость проезда	Стоимость питания	Экскурсии
10000	6900	4000	2000
9000	7000	5000	3300
8000			7400
			9800
			4500
			1500
			3900

Сколько вариантов туров можно предложить клиенту вообще и сколько, если учитывать имеющуюся у него сумму денег?» [41, с. 103].

Приведем возможные решения кейс-заданий.

Кейс 3.

Расположим всех учащихся в каком-то порядке, например по алфавиту: Андреев, Борисов, Володин, Григорьев, Дмитриев. Для каждого из них есть две возможности – либо сдаст зачет, либо нет. В первом случае поставим в соответствие этому учащемуся цифру 1, а во втором – 0. Тогда исход заплыва выразится последовательностью длины 5 из нулей и единиц. Например, 0, 1, 1, 0, 1 означает, что зачет сдадут Борисов, Володин и Дмитриев [9].

Таким образом, задача о числе всех исходов заплыва сводится к следующей: сколько последовательностей длины 5 можно составить из цифр 0 и 1? Ответ на эту задачу дается правило произведения: поскольку на каждом месте последовательности у нас выбор из двух возможностей, то общее число исходов $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$ [9].

Математически задача формулируется следующим образом: сколькими способами можно выбрать 2 элемента множества, содержащего 5 элементов? Это можно сделать 10 способами. При малом числе участников для ответа на этот вопрос достаточно использовать «способ перебора».

Далее учащиеся знакомятся с формулами комбинаторики, в частности с формулой числа сочетаний из n элементов по k . Обозначим число k -подмножеств в множестве n элементов через C_n^k . Это число называют биномиальным коэффициентом: $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ [9].

Кейс 4.

Занумеруем конверты числами 1, 2, 3, а марки числами 1, 2, 3, 4.

Построим дерево возможных вариантов, представленное на рисунке 5.

Можно выбрать любой из 3 конвертов, поэтому проведем 3 ветви дерева; на любой конверт можно наклеить любую из 4 марок, поэтому из каждой ветви первого уровня проведем по 4 ветви. Также решение можем найти с помощью правила умножения, сколько всего получилось вариантов: $3 \cdot 4 = 12$ вариантов.

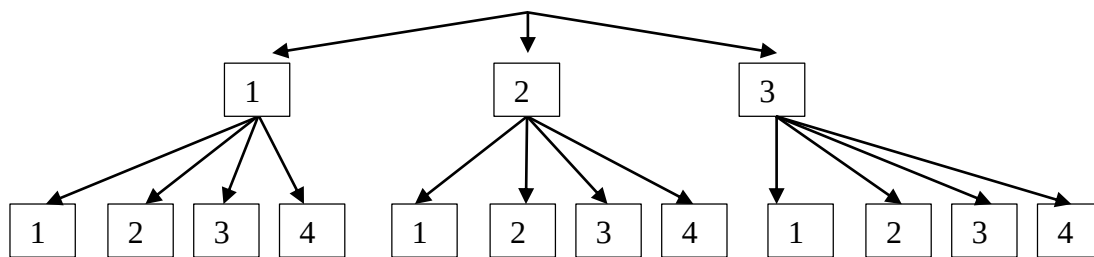


Рисунок 5 – Дерево вариантов к кейсу 5

Кейс 5.

У директора предприятия в подчинении 30 работников, ему нужно назначить в январе 5 управляющих в цех, в феврале 6 менеджеров на производство и в марте 3 прорабов на стройку. Сколько комбинаций выбора на каждые из должностей есть у директора? [41].

Для расчета количества комбинаций выбора на каждую из должностей учащимся предстоит принять решение о том, что один человек не может заниматься одновременно 2 должности. Тогда в январе директор выбирает 5 человек из 30 (порядок не имеет значения), у него

$$C_{30}^5 = \frac{30!}{(30-5)! \cdot 5!} = \frac{25! \cdot 26 \cdot 27 \cdot 28 \cdot 29 \cdot 30}{25! \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 142506 \text{ вариантов выбора.}$$

В феврале выбор осуществляется уже с учетом того, что управляющий уже назначен. Выбираем 6 человек из 29:

$$C_{29}^6 = \frac{29!}{(29-6)! \cdot 6!} = \frac{23! \cdot 24 \cdot 25 \cdot 26 \cdot 27 \cdot 28 \cdot 29}{23! \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 475020.$$

В марте – 3 человека из 28 работников:

$$C_{28}^3 = \frac{28!}{(28-3)! \cdot 3!} = \frac{25! \cdot 26 \cdot 27 \cdot 28}{25! \cdot 2 \cdot 3} = 3276.$$

Кейс 6.

Туристическая фирма может предложить 3 варианта стоимости отеля, 2 варианта стоимости проезда, 2 варианта стоимости питания и 7 вариантов стоимости экскурсии. Для подсчета количества возможных вариантов туров воспользуемся комбинаторным правилом умножения: $3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7 = 84$.

Учитывая имеющуюся у туриста сумму денег (25500 рублей) возможны варианты, представленные в таблице 16.

Таблица 16 – Варианты туров к задаче кейса

Стоимость отеля	Стоимость проезда	Стоимость питания	Экскурсии
10000	6900	4000	до 4600 р (5 вариантов)
		5000	до 3600 р (3 варианта)
	7000	4000	до 4500 р (5 вариантов)
		5000	до 3500 р (3 вариантов)
9000	6900	4000	до 5600 р (5 вариантов)
		5000	до 4600 р (5 вариантов)
	7000	4000	до 5500 р (5 вариантов)
		5000	до 4500 р (5 вариантов)
8000	6900	4000	до 6600 р (5 вариантов)
		5000	до 5600 р (5 вариантов)
	7000	4000	до 6500 р (5 вариантов)
		5000	до 5500 р (5 вариантов)

Получаем $5+3+5+3+5+5+5+5+5+5+5+5=5 \cdot 10+3 \cdot 2=56$ вариантов.

Учащиеся презентуют решения, делают выводы по работе группы над кейсом. Учитель принимает непосредственное участие в презентации, задает вопросы, подводит итоги.

Завершая занятие, учитель подводит итоги дискуссии, обобщает проделанную работу, выделяет в ней сильные и слабые стороны, определяет степень достижения поставленных целей, выставляет конечные оценки учащимся и отвечает на вопросы.

Таким образом, кейс-технологии в обучении математике имеют практическую применимость, помогают учащимся выйти за рамки предмета и развивают личностные и профессиональные качества учащихся.

2.3 Элективный курс «Случайные величины и математическая статистика» в старших классах социально-экономического профиля

Пояснительная записка

Программа элективного курса «Случайные величины и математическая статистика» предназначена для учащихся 10-11 классов социально-экономического профиля. Она направлена на формирование и углубление знаний и умений учащихся по математике, а также на расширение и знакомство с важными разделами теории вероятности и математической статистики.

Для успешного освоения программы курса ученикам необходимо иметь базовые знания по математике, включая алгебру и геометрию. Курс будет проводиться в форме лекций и практических занятий с использованием примеров из реальной жизни, таких как экономические данные и социологические исследования. Кроме того, в рамках курса будут проводиться контрольные работы, чтобы ученики могли проверить свои знания и навыки.

Новизна программы состоит в том, что она направлена на расширение и углубление знаний учащихся в области математической статистики и работы с числовыми характеристиками случайных величин.

Актуальность предлагаемой программы определяется следующим:

- учащиеся получают возможность расширения и углубления знаний в дополнительном разделе математики, важном для решения практических задач будущей профессиональной деятельности;
- элективный курс основан на практико-ориентированном подходе и включает в себя проектную деятельность учащихся.

Цель и задачи программы элективного курса:

- формирование у учащихся представлений о вероятностном характере ряда закономерностей окружающего мира;

- ознакомление учащихся с закономерностями, которым подчиняются массовые случайные события;
- формирование у учащихся новых знаний в области теории вероятности и статистики;
- развитие мыслительных, творческих способностей учащихся;
- знакомство учащихся с историей развития математической статистики, ее местом и ролью в современной науке и мире.

Реализация программы курса предполагает следующие формы занятий: лекционные, практические занятия, защита проектов.

Планируемые результаты изучения данного элективного курса:

- знать основные понятия математической статистики;
- знать основные (простейшие) свойства математического ожидания и дисперсии случайной величины;
- знать краткую историю и вклад ученых в создание математической статистики, ее места в изучении окружающего мира;
- уметь вычислять основные числовые характеристики случайной величины, а именно, математическое ожидание, дисперсию, среднее отклонение;
- уметь различать дискретные и непрерывные случайные величины;
- уметь строить законы распределения случайных величин;
- уметь исследовать явления окружающего мира, выявлять статистическую связь между ними [66].

Основными формами подведения итогов реализации данной образовательной программы являются проведение уроков-практикумов и защита проектов по выбранным учащимися темам.

Программа элективного курса рассчитана на 17 часов (1 час в неделю) в рамках профильной подготовки 10-11 классов социально-экономического профиля. Она представлена в таблице 17.

Таблица 17 – Тематическое планирование элективного курса

Содержание темы	Кол-во часов
случайные величины: определение и законы их распределения	2
числовые характеристики случайных величин	4
закон больших чисел	2
основные понятия математической статистики	3
статистическое изучение связи между явлениями	4
защита проектов»	2
Итого	17

Содержание элективного курса.

Тема 1.

Случайные величины и их природа. Закон распределения случайной величины (2 ч).

Цель – познакомить учащихся с понятием случайной величины, научить различать непрерывные и дискретные случайные величины, а также сформировать понимание основных законов распределения случайных величин.

«Случайной называют величину, которая в результате испытания примет одно и только одно возможное значение, наперед неизвестное и зависящее от случайных причин, которые заранее не могут быть учтены» [62, с. 42].

«Примеры случайных величин: X – оценка на экзамене: 2, 3, 4, 5; X – число очков при бросании кубика: 1, 2, 3, 4, 5, 6; X – число мальчиков из 100 детей, $0 \leq x \leq \infty$; X – курс доллара $(0; +\infty)$ » [62, с. 42] и т.д.

«Дискретной называют случайную величину, которая принимает набор отдельных изолированных значений (конечное или бесконечное число)» [62, с. 42].

«Непрерывной называют случайную величину, набор значений которой целиком заполняет некоторый интервал» [62, с. 42]. Примерами непрерывных

случайных величин могут быть спортивный результат в беге или прыжках, рост и масса тела человека, сила мышц и другие.

«О случайном событии мы не можем сказать заранее, произойдет оно или нет. Но мы можем говорить о шансах его наступления... Шансы, выраженные числом называют вероятностью случайного события» [63, с. 76].

Практическое применение изучения случайных величин и статистики можно продемонстрировать на примере сюжетных задач, сформулированных в виде профессиональных проблемных ситуаций.

Для описания случайной величины важно определить вероятность того, что она примет определенные значения. Такой закон распределения для дискретных случайных величин может быть представлен в виде таблиц, формул или же задан графически.

Для наглядности закон распределения дискретной случайной величины изображают графически. Для этого в прямоугольной системе координат строятся точки с координатами $(x_i; p_i)$, где x_i – значение случайной величины, p_i – вероятность того, что случайная величина принимает указанное значение. Построенные точки соединяются отрезками прямых, полученная при этом фигура называется многоугольником или полигоном распределения.

Задача 1.

В коробке 7 шаров, из которых 4 красные. Из этой коробки наудачу извлекают 3 шара. Найти закон распределения случайной величины X , равной числу красных шаров в выборке [59]. Постройте многоугольник распределения величины X .

Решение. В наборе из трех шаров существует вероятность отсутствия красных шаров, а также вероятность наличия одного, двух или трех красных шаров. Это означает, что случайная величина X может иметь только четыре значения: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $x_4 = 3$. Вычислим вероятности, связанные с этими значениями. Пусть событие A – появление красного шара, тогда $\bar{A}$ – появление не красного:

– вероятность, того, что в выборке не окажется красных шаров:

$$p(\overline{AAA}) = \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{35};$$

– окажется 1 красный шар: $p(\overline{AA}A + A\overline{AA} + \overline{AA}\overline{A}) = \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{5} + \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} + \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{12}{35};$

$$\frac{2}{5} + \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{12}{35};$$

– окажется 2 красных шара: $p(\overline{AA}A + A\overline{AA} + AA\overline{A}) = \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} + \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} + \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{18}{35};$

$$\frac{3}{5} + \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{18}{35};$$

– все 3 шара будут красными: $p(AAA) = \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{35}.$

Тогда закон распределения случайной величины X можно представить в виде таблицы 18.

Таблица 18 – Закон распределения случайной величины X к задаче 1

X	0	1	2	3
p	$\frac{1}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{4}{35}$

Сумма вероятностей второй строки таблицы равна единице: $\sum_{i=1}^n p_i = 1.$

Представим на рисунке 6 графическое решение задачи в виде многоугольника распределения случайной величины X .

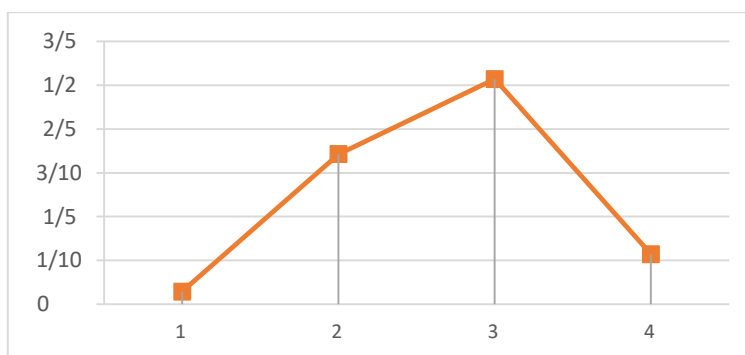


Рисунок 6 – Многоугольник распределения случайной величины к задаче 1

Тема 2.

Числовые характеристики случайных величин (4 ч).

Цель – сформировать у учащихся понимания каждой числовой характеристики и умение вычислять различные числовые характеристики случайных величин.

В данном разделе учащиеся знакомятся с числовыми характеристиками случайных величин: математическое ожидание, мода, медиана, размах, дисперсия, стандартное отклонение. Далее изучаются свойства математического ожидания и свойства дисперсии.

В ходе обучения решаются задачи. Для проверки знаний примется контрольная работа по теме «Числовые характеристики случайной величины».

Рассмотрим некоторую случайную величину X , которая может принимать числовые значения $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Пусть распределение вероятностей случайной величины X задано таблицей 19:

Таблица 19 – Распределение вероятностей случайной величины X

Значение величины X	x_1	x_2	x_3	...	x_n
Вероятность	p_1	p_2	p_3	...	p_n

Математическим ожиданием случайной величины X называют сумму произведений всех возможных значений величины X на вероятности этих значений: $M(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \dots + x_np_n = \sum_{i=1}^n x_ip_i$ [59].

Свойства математического ожидания [59]:

- $M(C) = C$, C – произвольная постоянная величина;
- $M(CX) = CM(X)$;
- $M(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = M(X_1) + M(X_2) + \dots + M(X_n)$;
- для взаимно независимых случайных величин: $M(X_1 \cdot X_2 \cdot \dots \cdot X_n) = M(X_1) \cdot M(X_2) \cdot \dots \cdot M(X_n)$.

Дисперсией случайной величины X называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания $D(X) = M(X^2) - (M(X))^2$.

Свойства дисперсии [14]:

- $D(C) = 0$, C – произвольная постоянная;
- $D(CX) = C^2 D(X)$;
- $D(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = D(X_1) + D(X_2) + \dots + D(X_n)$.

Дисперсия характеризует разбросанность значений случайной величины X относительно ее математического ожидания. Средним квадратическим отклонением случайной величины называют квадратный корень из дисперсии: $\sigma = \sqrt{D(X)}$ [14].

Задача 2.

Закон распределения случайной величины X задан таблицей 20.

Таблица 20 - Закон распределения случайной величины X к задаче 2 элективного курса

X	1	2	3	4	5
P	0,01	0,06	0,27	0,48	0,18

Вычислить ее числовые характеристики.

Решение:

Сначала находим математическое ожидание:

$$M(X) = 1 \cdot 0,01 + 2 \cdot 0,06 + 3 \cdot 0,27 + 4 \cdot 0,48 + 5 \cdot 0,18 = 3,76$$

В таблице 21 запишем закон распределения X^2 :

Таблица 21 - Закон распределения X^2 к задаче 2 элективного курса

X^2	1	4	9	16	25
P	0,01	0,06	0,27	0,48	0,18

Находим математическое ожидание X^2 :

$$M(X^2)=1\cdot0,01+4\cdot0,06+9\cdot0,27+16\cdot0,48+25\cdot0,18=14,86$$

Находим дисперсию:

$$B(X)=14,86-(3,76)^2=0,7224$$

Среднее квадратическое отклонение:

$$\sigma=\sqrt{0,7224} \approx 0,85.$$

Задача 3.

Пусть ежедневные расходы на обслуживание и рекламу автомобилей в автосалоне составляют в среднем 120 тыс. ден. ед., а число продаж X автомашин в течение дня подчиняется закону распределения. Найти математическое ожидание ежедневной прибыли при цене машины 150 тыс. ден. ед (таблица 22) [62].

Таблица 22 – Исходные данные к задаче 3 элективного курса

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
P	0,25	0,2	0,1	0,1	0,1	0,1	0,05	0,05	0,025	0,025

Для решения данной задачи учащиеся составляют математическую модель для нахождения прибыли при заданных условия. Если X – количество проданных автомобилей в день, то прибыль вычисляется по формуле:
 $\Pi=(150X-120)$

Найдем математическое ожидание, используя его свойства:

$$M(150X-120) = 150M(X)-120=150\cdot2,275-120=281,25$$

$$M(X)=0\cdot0,25+1\cdot0,2+2\cdot0,1+3\cdot0,1+4\cdot0,1+5\cdot0,1+6\cdot0,05+7\cdot0,05+8\cdot0,025+9\cdot0,025=2,675.$$

Далее учащимся предлагается вычислить среднеквадратичное отклонение и дисперсию, а также подумать о практической значимости характеристик случайной величины на примере данной задачи:

- как связаны понятия математического ожидания и доходности? (оно отражает среднюю доходность актива);

- что отражают дисперсия и среднее квадратичное отклонение? (меру отклонения, колебания доходности относительно от ожидаемого значения).

Тема 3.

Закон больших чисел. Теорема Чебышева (2 ч).

Цель – сформировать понимание закона больших чисел и его сущности в применении к решению задач.

Данный раздел является связующим звеном между теорией вероятностей как математической наукой и закономерностями случайных явлений при массовых наблюдениях над ними. Так осуществляет планомерный и логичный переход к разделу математической статистики.

«Под законом больших чисел в широком смысле понимается общий принцип, согласно которому, по Колмогорову, совокупное действие случайных факторов приводит к результату, почти не зависящему от случая» [64].

«Суть закона больших чисел состоит в том, что при возрастании числа слагаемых их среднее арифметическое мало отличается от математического ожидания. Это говорит о том, что при достаточно большом количестве испытаний отклонение среднего арифметического от математического ожидания становится достаточно маловероятным» [64, с 156].

«Пусть мы бросаем монету тысячу раз. Какова вероятность того, что частота орлов отклоняется от $\frac{1}{2}$ более чем на $\frac{1}{10}$, то есть больше 0,6 или меньше 0,4? Это значит, что число орлов больше 600 или меньше 400» [74, с.44].

Рассматриваем случайную величину «число орлов». Пусть для нее:

- « n – число проведенных испытаний (1000 раз бросаем монету);
- p – вероятность появления орла в каждом испытании ($p=\frac{1}{2}$);
- q – вероятность появления решки ($q=\frac{1}{2}$)» [74, с. 44].

«Закон больших чисел утверждает про случайную величину следующее: математическое ожидание этой величины равно np ; дисперсия этой величины

равна npq ; вероятность того, что число орлов отличается от математического ожидания np более чем на k в ту или другую сторону, не больше $\frac{npq}{k^2}$ » [74, с.44].

«В нашем примере математическое ожидание числа орлов равно $np = 500$, дисперсия равна $npq = 250$. Если $k = 100$, получаем, что вероятность этого события не больше $\frac{1000 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}{100^2} = 2,5\%$ » [74, с.44].

Закон играет очень важную роль в практических применениях теории вероятностей к явлениям природы и техническим процессам, связанным с массовым производством.

Для самостоятельной работы учащимся предлагается подготовить сообщения на следующие темы:

- неравенство Маркова;
- неравенство Чебышева;
- теорема Чебышева;
- теорема Бернулли.

Структура доклада:

- теоретические и исторические сведения;
- теорема и ее доказательство;
- возможности применения на практике.

Учащиеся готовят сообщения в группах по 2-3 человека, представляют их на занятии с помощью презентации. Это способствует развитию самостоятельности и активности в познавательном процессе.

Тема 4.

Основные понятия математической статистики (3 ч).

Цель – сформировать у учащихся представление о месте статистики в современной науке и мире, научить обнаруживать закономерности в окружающем и мире и уметь описывать их на языке статистики.

На основе полученных ранее знаний переходим к следующему этапу – изучение основ математической статистики. Знакомясь с элементами математической статистики, учащиеся определяют новые понятия (выборка,

генеральная совокупность, вариационный ряд и т.д.), также особое внимание следует уделить способам их графического представления.

В ходе изучения темы решаются практические задачи по математической статистике. Проверка знаний осуществляется с помощью практической работы.

«Генеральная совокупность – это все мыслимые значения (измерения, наблюдения), описывающие поведение исследуемого объекта или явления. Выборка – ограниченный набор реально наблюдаемых выборочных из генеральной совокупности значений, описывающих исследуемый объект или явление» [62, с. 102].

«Количество этих значений называют объемом выборки. Выборка называется репрезентативной (представительной), если она достаточно хорошо воспроизводит генеральную совокупность» [62, с. 103].

Основные характеристики генеральной совокупности и выборки аналогичны характеристикам случайной величины: математическое ожидание (генеральной совокупности и выборки), дисперсия.

Задача выборочного метода состоит в оценке характеристик генеральной совокупности по ее выборке. Основу применимости данному методу составляет закон больших чисел.

Работа со статистической информацией проводится обычно в следующей последовательности:

- упорядочивание и группировка данных;
- представление данных в табличной форме;
- построение графиков распределения данных;
- описание данных с помощью основных числовых характеристик полученной информации.

Покажем эту работу на практическом примере, вводя понятие вариационного ряда.

Пример.

По итогам ЕГЭ профильного уровня 2023 года получены следующие результаты выпускников социально-экономических классов школ: 64, 70, 46, 46, 72, 72, 46, 52, 58, 70, 68, 64, 70, 72, 52, 64, 64, 72, 68, 70, 66, 58, 64, 72, 52, 58, 64, 46, 68, 58, 72, 70, 82, 46, 68, 64, 68, 58, 64, 92, 68, 46, 64, 52, 58, 64, 68, 70, 82, 82.

Для изучения результатов проранжируем и сгруппируем полученные данные: 46, 46, 46, 46, 46, 46, 52, 52, 52, 52, 58, 58, 58, 58, 58, 58, 64, 64, 64, 64, 64, 64, 64, 64, 64, 64, 66, 68, 68, 68, 68, 68, 68, 68, 68, 70, 70, 70, 70, 70, 70, 72, 72, 72, 72, 72, 82, 82, 82, 92.

Представим данные в форме таблицы 23, где каждому значению (варианте) укажем кратность (количество раз, когда встречается это значение). Также укажем частоты варианты как отношение ее кратности к объему измерения и относительную частоту, выраженную в процентах [7].

Таблица 23 – Группировка исходных данных

Варианты	46	52	58	64	66	68	70	72	82	92	Всего: 10
Кратности	6	4	6	10	1	7	6	6	3	1	Сумма: 50
Частота	0,12	0,08	0,12	0,2	0,02	0,14	0,12	0,12	0,06	0,02	Сумма: 1
Относительная частота (%)	12	8	12	20	2	14	12	12	6	2	Сумма: 100

Графическое представление полученных данных может быть выполнено в виде многоугольника распределения кратностей, частот или процентных частот. На рисунке 7 представлен многоугольник распределения относительных частот.

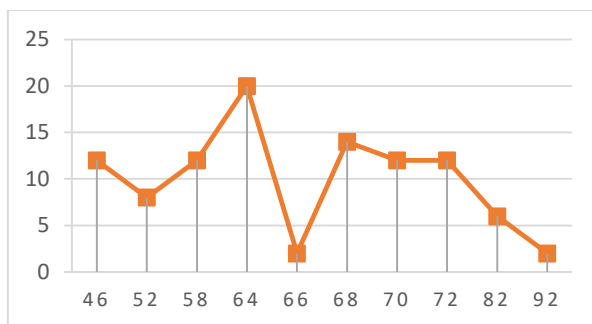


Рисунок 7 – Полигон распределения относительных частот

Также вариантом графического представления данных служат гистограммы распределения относительных частот (рисунок 8).

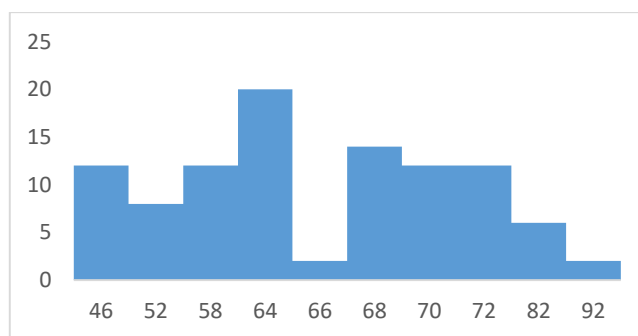


Рисунок 8 – Гистограмма распределения относительных частот

Тема 5.

Статистическое изучение связи между явлениями (4 ч.).

Цель – сформировать умение учащихся проводить корреляционных анализ связи, умение применять схему расчета корреляционно-регрессионного анализа данных, а также показать практическое применение полученных знаний в различных сферах жизни.

Данный раздел посвящен изучению связей между социально-экономическими явлениями. Вводятся понятия статистической связи, корреляции, корреляционной таблицы, регрессии, уравнения и линии

регрессии, уравнения прямых регрессии, а также формируется понимание схемы расчета.

Статистические исследования являются завершающим этапом изучения элективного курса. Они включают в себя примеры статистических исследований в области математики и повседневной жизни. Также в качестве дополнительного задания для учащихся можно предложить самостоятельно провести несложное статистическое исследование.

Корреляционный анализ является важной темой для формирования профессионально значимых навыков.

Для изучения взаимосвязи между экономическими показателями применяют метод корреляционного анализа. Если (X, Y) – случайные величины с нормальным распределением, то зависимость этих случайных величин характеризуется коэффициентом корреляции ρ . Он принимает значения от -1 до $+1$. Коэффициент корреляции позволяет ответить на вопрос о существовании линейной зависимости между двумя случайными величинами. Если $\rho < 0$, говорят об отрицательной корреляционной зависимости, если $\rho > 0$ – о положительной. Чем ближе $|\rho|$ к 1 , тем сильнее эта линейная зависимость. Если же $\rho = 0$, то линейной корреляционной зависимости для данных величин не наблюдается [64].

В таблице 24 указана цена на некоторый товар от разных производителей, а также объем продаж товаров данного производителя одним из магазинов.

Таблица 24 – Данные по продажам товара

Производители	1	2	3	4	5
Цена, тыс.руб.	1,2	1,5	2	2,3	4
Объем продаж, тыс.шт.	6,2	5	5,1	1	1,2

Вычислим коэффициент корреляции по формуле:

$$\rho = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{\sqrt{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \cdot \sqrt{n \sum y_i^2 - (\sum y_i)^2}} [64].$$

Для удобства произведем вычисления в таблице 25.

Таблица 25 – Данные для вычисления коэффициента корреляции

Производители	1	2	3	4	5	Сумма
X	1,2	1,5	2	2,3	4	11
Y	6,2	5	5,1	1	1,2	18,5
XU	7,44	7,5	10,2	2,3	4,8	32,24
X ²	1,44	2,25	4	5,29	16	28,98
Y ²	38,44	25	26,01	1	1,44	91,89

Тогда коэффициент корреляции равен:

$$\rho = \frac{5 \cdot 32,24 - 11 \cdot 18,5}{\sqrt{5 \cdot 28,98 - 11^2} \cdot \sqrt{5 \cdot 91,89 - 18,5^2}} = -0,799.$$

Отрицательный коэффициент корреляции, достаточно близкий по модулю к единице, говорит о наличии сильной обратной зависимости между случайными величинами: чем больше цена на товар, тем меньшее количество таких товаров продано.

Тема 6.

Подведение итогов. Защита проектов (2 ч).

Цель - подведение итогов изучения элективного курса. Защита проектов учащихся как вид самостоятельной исследовательской деятельности.

Заключительным этапом элективного курса является подготовка исследовательских проектов и их защита на учебно-исследовательской конференции.

В ходе изучения тем учащиеся готовят сообщения, выполняют упражнения, решают задачи. К заключительным занятиям учащиеся готовят проекты и защищают их.

2.4 Описание проведенного педагогического эксперимента

В рамках педагогической практики на базе ГБОУ «СОШ с. Екатериновка муниципального района Приволжский Самарской области» был проведен педагогический эксперимент. Участниками эксперимента стали обучающиеся 11 класса социально-экономического профиля в количестве 8 человек.

Цель данного эксперимента – определение уровня владения основами математической статистики у учащихся 11 классов социально-экономического профиля.

Для учащихся социально-экономического профиля большую ценность представляют задачи прикладного характера, поскольку они могут быть непосредственно применены в их будущей профессиональной деятельности. При анализе учебников было выявлено, что на раздел математической статистики отведено 9 часов в рамках изучения темы «Теория вероятности и математическая статистика». Учитывая важность этой темы для учащихся данного профиля, был разработан и внедрен элективный курс «Случайные величины и математическая статистика», рассчитанный на 17 часов. Данный курс позволил учащимся актуализировать свои знания по теме, вернуться к концепции случайных величин и приобрести навыки вычисления их основных числовых характеристик. Кроме того, он углубил знания основ математической статистики и позволил приобрести навыки решения практических задач математической статистики.

После внедрения элективного курса была проведена контрольная работа, в которой были представлены следующие типы задач:

- вычисление математического ожидания, дисперсии, среднего отклонения дискретной случайной величины;
- экономическая задача на применение знаний математической статистики в реальной жизни;
- вычисление моды, медианы, размаха выборки;

– построение закона распределения случайной величины и его графическое представление в виде полигона частот.

Приведём задания контрольной работы.

Задание 1.

Дан ряд распределения дискретной случайной величины A , представленный в таблице 26.

Таблица 26 – Исходные данные к задаче 1 контрольной работы

A	2	5	6	7	8	12	19
p	0,21	x	0,03	0,15	0,08	0,17	0,24

Вычислите ее математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение.

Задание 2.

«Для проведения лотереи изготовили 100 билетов. Из них 1 билет с выигрышем в 500 р., 10 билетов с выигрышами по 100 р. и остальные 89 билетов без выигрышей. Наудачу выбирают один билет. Найдите математическое ожидание выигрыша. Какой доход получают организаторы лотереи при стоимости билета в 20 р.?» [63, с. 190].

Задание 3.

Дана выборка по росту учащихся 10 класса: 165, 165, 167, 170, 171, 171, 171, 175, 177, 180. Найдите моду, медиану, среднее арифметическое и размах выборки.

Задание 4.

Один из трех магазинов в настоящее время предлагает акцию, в рамках которой покупатели могут приобрести две черные гелиевые ручки по цене одной. Вероятность того, что эта акция будет доступна в магазине равна 0,2. Ученик 11 класса решил воспользоваться этим предложением. Составьте закон распределения количества магазинов, которые посетил ученик. Постройте полигон частот по данному закону распределения.

Решение заданий контрольной работы.

Задание 1.

Поскольку $\sum_{i=1}^n p_i = 1$, то $0,21 + x + 0,03 + 0,15 + 0,08 + 0,17 + 0,24 = 1$.

Отсюда $x = 0,12$.

Математическое ожидание: $M(A) = \sum_{i=1}^n A_i p_i = 2 \cdot 0,21 + 5 \cdot 0,12 + 6 \cdot 0,03 + 7 \cdot 0,15 + 8 \cdot 0,08 + 12 \cdot 0,17 + 19 \cdot 0,24 = 9,49$.

Запишем закон распределения A^2 (таблица 27).

Таблица 27 – Закон распределения A^2 к задаче 1 контрольной работы

A	2	5	6	7	8	12	19
A^2	4	25	36	49	64	144	361
p	0,21	0,12	0,03	0,15	0,08	0,17	0,24

$M(A^2) = 4 \cdot 0,21 + 25 \cdot 0,12 + 36 \cdot 0,03 + 49 \cdot 0,15 + 64 \cdot 0,08 + 144 \cdot 0,17 + 361 \cdot 0,24 = 128,51$.

Находим дисперсию:

$$D(A) = M(A^2) - ((A(X))^2 = 128,51 - (9,49)^2 = 38,4499.$$

$$\sigma(X) = \sqrt{38,4499} \approx 6,2.$$

Задание 2.

Эта случайная величина может принимать три значения: 500 р., 100 р. и 0 р. (означающее отсутствие выигрыша). Вероятности, связанные с каждым значением, следующие: 0,01, 0,10 и 0,89, соответственно. Вычислив математическое ожидание выигрыша ($500 \cdot 0,01 + 100 \cdot 0,10 + 0 \cdot 0,89 = 15$), мы получаем общее значение 15 р. Из этого следует, что средний выигрыш на билет составляет 15 р.

Для того чтобы лотерея приносила прибыль ее организаторам, цена билета должна превышать средний выигрыш. Если цена билета установлена на уровне 20 рублей, то выручка составит 2000 рублей. Впоследствии 1500 рублей будет направлено на выплату выигрышей, в результате чего доход от лотереи составит 500 рублей.

Задание 3.

Размах выборки равен $180 - 165 = 15$; мода выборки равна 171, медиана – 171. Среднее арифметическое: $(165 + 165 + 167 + 170 + 171 + 171 + 171 + 175 + 177 + 180) / 10 = 171,2$.

Задание 4.

В качестве случайной величины X выступает количество магазинов, которые посетит 11-классник. Возможные значения, которые примет случайная величина X : 1, 2, 3. Пусть событие A_1 – акция доступна в первом магазине, A_2 – акция доступна во втором магазине, A_3 – акция действует в третьем магазине. Тогда $p(A_1) = p(A_2) = p(A_3) = 0,2$.

$$p(A) = 0,2; \quad p(\bar{A}A) = 0,8 \cdot 0,2 = 0,16;$$

$$p(\bar{A}\bar{A}A + \bar{A}A\bar{A}) = 0,8 \cdot 0,8 \cdot 0,2 + 0,8 \cdot 0,8 \cdot 0,2 = 0,64.$$

Запишем закон распределения в виде таблицы 28.

Таблица 28 – Закон распределения к задаче

X	1	2	3
p	0,2	0,16	0,64

Возьмем на плоскости xOy точки с соответствующими координатами и последовательно соединим их прямолинейными отрезками. Полученный полигон распределения случайной величины представлен на рисунке 9.

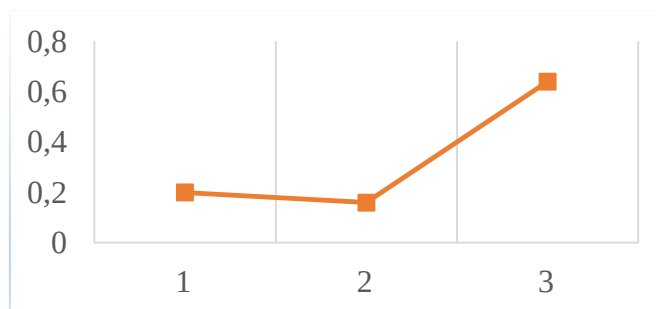


Рисунок 9 – Полигон распределения к задаче 4 контрольной работы

Приведем критерии оценивания заданий контрольной работы:

- задание 1 – 1 балл;
- задание 2 – 1-2 балла;
- задание 3 – 1 балл;
- задание 4 – 1-2 балла.

Отметка «5» выставляется учащемуся за 6 баллов, «4» – за 4-5 баллов, «3» – 3 балла, «2» – 0-2 балла.

Результаты контрольной работы представлены в таблице 29.

Таблица 29 – Результаты контрольной работы

Задание	Не приступили к заданию	Выполнили неверно	Выполнили верно
Задача 1	0 (0%)	2 (25%)	6 (75%)
Задача 2	0 (0%)	2 (25%)	6 (75%)
Задача 3	0 (0%)	1 (13%)	7 (87%)
Задача 4	1 (13%)	2 (25%)	5 (62%)

Анализ результатов показал, что практически все учащиеся (87%) справились с заданием на нахождение числовых характеристик выборки: моды, медианы, размаха, среднего арифметического (задание 3). Также учащиеся показали достаточно высокий уровень знаний в задачах 1 и 2 (75% учащихся справились с данными заданиями), показав высокий уровень навыков вычисления основных числовых характеристик случайной величины. Самой сложной для учащихся оказалась задача 4, в которой помимо знаний основ математической статистики применяются факты теории вероятности и комбинаторики. Также следует отметить, что учащиеся практически не пропускали задания, только 1 учащийся не приступил к задаче 4.

На основании вышеизложенного, можно сделать вывод о том, что не все учащиеся в совершенстве владеют навыками решения задач математической статистики. Встречаются ошибки при применении формул расчета числовых характеристик случайной величины, а также при составлении закона распределения и построении функции распределения случайно величины.

Кроме того встречаются ошибки логического характера, а также вычислительные ошибки.

Целью данного эксперимента являлось определение уровня владения основами математической статистики у учащихся 11 классов социально-экономического профиля. После проведения всестороннего анализа можно сделать вывод о том, что большинство учащихся приобрели способность решать подобные задачи, формулировать правильный алгоритм решения и эффективно выражать свои мысли, используя язык математической статистики. Этот вывод свидетельствует о том, что студенты развили навык решения задач математической статистики.

Выводы по второй главе:

- во второй главе данной работы проведен анализ экономических задач на проценты в задания единого государственного экзамена, на основе которого разработана классификация задач на кредиты и вклады с описанием каждой классификации и примерами задач: на кредиты с известным изменением долга и равномерным его уменьшением в течение всего срока кредитования; на кредиты с известным изменением долга и равномерным его уменьшением в течение $n-1$ периодов срока кредитования; на кредиты с известным изменением долга и неравномерным его уменьшением; на кредиты с известными платежами по кредиту; на сравнение выгодности одной из схем кредитования; на применение двух схем кредитования; на вклады без изменения первоначальной суммы вложения; на вклады с изменением первоначальной суммы вложения;
- разработанная классификация экономических задач позволяет научиться быстрее и проще решать задания данных типов на экзамене и при подготовке к нему;

- проанализирована методическая литература, посвященная применению кейс-технологии в обучении математике;
- приведена разработка практической реализации кейс-технологии в рамках изучения темы «Элементы комбинаторики» в классах социально-экономического профиля;
- разработан элективный курс «Случайные величины и математическая статистика» в курсе математики и начал математического анализа в 10-11 классах;
- проведен педагогический эксперимент с обучающимися 11 класса социально-экономического профиля ГБОУ «СОШ с. Екатериновка муниципального района Приволжский Самарской области»;
- в процессе эксперимента рассмотрены основные трудности при изучении случайных величин и основ математической статистики; целью педагогического эксперимента являлось определение уровня владения основами математической статистики у учащихся 11 классов социально-экономического профиля.

Заключение

Основные выводы и полученные результаты проведенного исследования:

- в исследовании определены содержательные и методические особенности обучения математике учащихся 10-11 классов социально-экономического профиля; выполнен анализ содержания школьных учебников алгебры и начал математического анализа 10-11 классов следующих авторов: А.Г. Мордковича; Ш.А. Алимова; С.М. Никольского, а также учебников геометрии: Л.С. Атанасяна; А.В. Погорелова; Е.В. Потоскуева;
- проанализирован опыт работы учителей в классах социально-экономического профиля: Л.А. Доброхотовой, И.В. Железняковой, Е.М. Фоломеевой, О.М. Шараповой, Н.Н. Тимошенко. Рассмотрены статьи по теме исследования следующих авторов: Т.А. Алмазовой и Н.И. Старикиной, Ворошиловой Л.П.;
- разработана классификация задач с экономическим содержанием в рамках профильного обучения, выделены восемь типов задач, приведено их описание и решение;
- разработана практическая реализация кейс-технологии обучения математике на примере темы «Элементы комбинаторики», представлена система кейс-задач социально-экономической направленности в рамках данной технологии; разработан элективный курс «Случайные величины и математическая статистика» для классов социально-экономического профиля;
- проведен педагогический эксперимент в 11 классе ГБОУ «СОШ с. Екатериновка муниципального района Приволжский Самарской области» и описаны его результаты.

Список используемой литературы и используемых источников

1. Абатурова В.С. Математическое моделирование в обучении математике как средство формирования познавательной самостоятельности учащихся профильных классов экономической направленности: автореф. ... дис. канд. пед. наук. Ярославль. 2010. 24 с.
2. Алимов Ш.А., Колягин Ю.М., Ткачёва М.В. и др. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа (базовый и углубленный уровни). 10-11 классы: учебник для общеобразовательных учреждений М: АО «Издательство «Просвещение», 2020. 385 с.
3. Алмазова Т.А., Старикина Н.И. Особенности содержания вероятностно-статистической линии в классах социально-экономического профиля // Научные труды калужского государственного университета имени к.э. Циолковского. 2019. №. С. 343 – 347.
4. Анашкина И.В. Комбинаторика: учебно-методическое пособие. Тамбов: Изд-во ООО Орион, 2016. 27 с.
5. Бирюкова О.А. Кейс-технологии в обучении математике (на примере темы «элементы комбинаторики») // Молодежь. Наука. Общество: всероссийская студенческая научно-практическая междисциплинарная конференция (Тольятти, декабрь 2022 года): сборник студенческих работ / отв. за вып. С.Х. Петерайтис. Тольятти: Изд-во ТГУ, 2023. 1 оптический диск.
6. Брадис В.М., Методика преподавания математики в средней школе/ под ред. Макушевича А.И. М.: Государственное учебно-педагогическое издательство Министерства просвещения РСФСР, 1954. 504 с.
7. Бродский И.Л. Вероятность и статистика. 10-11 классы. Планирование и практикум: пособие для учителя / И.Л. Бродский, О.С. Мешавкина. М.: Аркти, 2009. 104 с.

8. Бурмистрова Т.А. Алгебра и начала математического анализа. Сборник рабочих программ. 10-11 классы: учеб. пособие для общеобразоват. организаций: базовый и углубл. уровни. М.: Просвещение, 2018. 145 с.
9. Виленкин Н.Я. Комбинаторика // Квант. 1971. №1. С.13-19.
10. Ворошилова Л.П. Оригинальная форма устного зачета // Математика в школе. 1991. №6. С.34 -37.
11. Галанина Е.А. Методика разработки учебного материала по математике для обучения на профильном уровне в 10-11-х классах общеобразовательных учреждений: автореф. дис. ... канд. пед. наук: 13.00.02 / Орловский государственный университет. Орел. 2009. 20 с.
12. Галиуллина Г.А, Паранина Е.Н. Применение кейс-метода на уроках математики // Kazan Federal University Digital Repository. 2016. №1. С.219-223.
13. Геометрия. 10-11 классы: учебник для общеобразовательных учреждений: базовый и профильный уровни / Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев и др. М.: Просвещение, 2013. 255 с.
14. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. 9-е изд. М.: Высшая математика, 2003. 479 с.
15. Далингер В.А. Кейс-метод в подготовке учителя математики // International journal of experimental education. 2015. № 3. С. 427-430.
16. Даутова О.Б. Современные педагогические технологии в профильном обучении : учебно-методическое пособие для учителей / О.Б. Даутова, О.Н. Крылова ; под ред. А. П. Тряпицыной. Санкт-Петербург : КАРО, 2006. 167 с.
17. Дударева Н.В., Унегова Т.А. Методические аспекты использования метода «case study» при обучении математике в средней школе // Педагогическое образование в России. 2014. № 8. С. 242-246.
18. Дорофеев Г.В., Кузнецова Л.В., Суворова С.Б., Фрисов В.В. Дифференциация обучения в математике // Математика в школе. 1990. № 4. С. 15–21.

19. Жолудева В.В. Наглядное моделирование в обучении математике учащихся профильных экономических классов: дис. канд. пед. наук. Ярославль. 2002. 222 с.
20. Иванова Т.А. Технология обучения школьников решению математических задач // Задачи в обучении математике: теория, опыт, инновации. Материалы Всероссийской научно-практической конференции, посвященной 115-летию член.-корр. АПН СССР П.А. Ларичева. Вологда: Изд-во «Русь», 2007. С. 246-250.
21. Капитонова Т.А. Методика и технология профильного обучения математике: учебно-методическое пособие для студентов, обучающихся по направлению подготовки педагогическое образование (профиль математическое образование). Саратов, 2012. 115 с.
22. Колягин Ю.М. Задачи в обучении математике. Обучение математике через задачи и обучение решению задач. М.: Просвещение, 1977. 144 с.
23. Колягин Ю.М., Оганесян В.А. Методика преподавания математики в средней школе. Общая методика. Учеб. пособ. для студ. физико-матем. фак.пед. инст. М: Просвещение, 1975. 464 с.
24. Концепция профильного обучения на старшей ступени общего образования. Утверждена приказом Министерства образования Российской Федерации от 18.07.2002 № 2783 // Бюллетень «Официальные документы в образовании». Сентябрь 2002 г. № 27. 33 с.
25. Концепция развития математического образования в Российской Федерации. Утверждена распоряжением Правительства Российской Федерации от 24 декабря 2013 г. № 2506-р (с учетом редакции, внесенной распоряжением Правительства Российской Федерации от 08.10.2020 № 2604-р) // Собрание законодательства Российской Федерации. 2014. № 2 (часть I). ст. 148.
26. Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник для вузов. М.: ЮНИТА-ДАНА, 2010. 551 с.

27. Крупин В.Г. Высшая математика. Теория вероятностей, математическая статистика, случайные процессы. Сборник задач с решениями: учебное пособие / В.Г. Крупин, А.Л. Павлов, Л.Г. Попов. М.; Издательский дом МЭИ, 2013. 368 с.

28. Левин А. Что такое комбинаторика // Квант. 1999. №5. С.2-9.

29. Лыжина О.А. Варианты элективного курса социально-экономического профиля на старшей ступени общеобразовательной школы // Историческая наука и историческое образование в условиях глобальных трансформаций. 2021. №. С. 463 – 457.

30. Лютикас В.С. Факультативный курс по математике: теория вероятностей. Учебное пособие для 9-11 классов. М.: Просвещение, 1990. 161с.

31. Математика. Подготовка к ЕГЭ в 2022 году. Профильный уровень. Тренировочные работы по демоверсии ЕГЭ 2022. М.: МЦНМО, 2022. 163 с.

32. Мордкович А.Г., Семенов П.В. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс. В 2 ч. Ч. 1. Учебник для учащихся общеобразовательных организаций (базовый и углубленный уровни). М.: Мнемозина, 2020. 457 с.

33. Мордкович А. Г., Семенов П. В. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс. В 2 ч. Ч. 1. Учебник для учащихся общеобразовательных организаций (базовый и углубленный уровни). М.: Мнемозина, 2014. 311 с.

34. Мордкович А.Г. Алгебра. 11 класс: методическое пособие для учителя /А.Г. Мордкович, П.В. Семенов. М: Мнемозина, 2010. 72 с.

35. Методика и технология обучения математике. Лабораторный практикум: учеб. пособие для студентов математ. факультетов пед. университетов / под науч. ред. В.В. Орлова. М: Дрофа, 2007. 320 с.

36. Методика преподавания математики в средней школе. Частные методики. Учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. ин-тов / Ю.М.

Колягин, Г.Л. Луканкин, Е.Л. Мокрушин, В.А. Оганесян, Л.Ф. Пичурин, В.Я. Саннинский. М: Просвещение, 1977. 480 с.

37. Нателаури Н.К. Методика решения задач с экономическим содержанием на факультативных занятиях по математике в старших классах средней школы с использованием вычислительного эксперимента: автореф. ... дис. канд. пед. наук. Москва. 2006. 20 с.

38. Никольский С.М., Потапов М.К., Решетников Н.Н., Шевкин А.В., Алгебра и начала математического анализа: учебник для 10 класса образовательных учреждений: базовый и профильный уровни. ФГОС М.: Изд. «Просвещение», 2016. 430 с.

39. Никольский С.М., Потапов М.К., Решетников Н.Н., Шевкин А.В., Алгебра и начала математического анализа: учебник для 11 класса образовательных учреждений: базовый и профильный уровни. ФГОС М.: Изд. «Просвещение», 2020. 452 с.

40. Павлов С.С. Методология совершенствования курса математики для учащихся классов социально-экономического профиля // Педагогические исследования. 2010. №1. С. 69 – 70.

41. Павлова Л.В. Карачун А.В. Интерактивные формы обучения на занятиях по математике при изучении темы «Комбинаторика» студентами направления «География» // Вестник Псковского государственного университета. 2015. №7. С. 100-105.

42. Педагогический опыт по решению задач с экономическим содержанием // Фестиваль педагогических идей «Открытый урок» [Электронный ресурс]. URL: <https://urok.1sept.ru/articles/654339> (дата обращения – 22.05.2023).

43. Педагогический опыт по решению математических задач с экономическим содержанием // Учительский портал «Учителя.com» [Электронный ресурс]. URL: <https://uchitelya.com/matematika/170085-programma-elektivnogo-kursa-reshenie-matematicheskikh-zadach.html> (дата обращения – 22.05.2023).

44. Педагогический опыт по решению экономических задач средствами MS Excel // Информационный ресурсный центр «Школьник-2» г. Новороссийска [Электронный ресурс]. URL: <https://irc-novoros.ru/images/814-b656dc8ca3bd4c782484115a86755aa8.pdf> (дата обращения – 22.05.2023).

45. Педагогический опыт по экономической математике // Официальный сайт МБОУ СОШ №90 г. Нижний Тагил [Электронный ресурс]. URL: https://nt-school90.narod.ru/RPFKGOS1011/ehkonomicheskaja_matematika_10_kl.pdf (дата обращения – 22.05.2023).

46. Погорелов А.В. Геометрия. 10-11 классы: учебник для общеобразовательных организаций: базовый и профильный уровни. М.: Просвещение, 2014. 175 с.

47. Потоскуев Е.В. Геометрия. 10 кл.: задачник для общеобразовательных учреждений с углубл. и профильным изучением математики / Е.В. Потоскуев, Л.И. Звавич. М.: Дрофа, 2004. 256 с.

48. Потоскуев Е.В. Геометрия. 10 кл.: учеб. для общеобразоват. учреждений с углубл. и профильным изучением математики / Е.В. Потоскуев, Л.И. Звавич. М.: Дрофа, 2008. 223 с.

49. Потоскуев Е.В. Геометрия. 11 кл.: задачник для общеобразовательных учреждений с углубл. и профильным изучением математики / Е.В. Потоскуев, Л.И. Звавич. М.: Дрофа, 2004. 240 с.

50. Потоскуев Е.В. Геометрия. 11 кл.: учеб. для общеобразоват. учреждений с углубл. и профильным изучением математики / Е.В. Потоскуев, Л.И. Звавич. М.: Дрофа, 2004. 368 с.

51. Примерная основная образовательная программа среднего общего образования. Одобрена решением федерального учебно-методического объединения по общему образованию (протокол от 28 июня 2016 г. № 2/16-з).

52. Ремеева А.Н. Особенности обучения в классах социально-экономического профиля // Мир науки, культуры и образования. 2014. № 6 (49). С. 27-31.

53. Ретюнских И.В. Методические особенности элективного курса по математике в классе с социально-экономическим профилем // Педагогика, психология и образование: от теории к практике. 2016. №3. С. 65 – 68.
54. Ретюнских И.В. Элективные курсы по решению задач практического содержания (по математике) в классах социально-экономического профиля // Психолого-педагогические аспекты воспитания и развития личности в системах дошкольного, начального, среднего и высшего образования. 2016. С. 36 – 41.
55. Решу ЕГЭ [Электронный ресурс]. URL: <https://ege.sdamgia.ru/> (дата обращения 21.02.2023).
56. Саламатов А.А. Эколого-экономическая направленность образования в профильной школе // Профильная школа. 2005. № 6. С. 11 – 14.
57. Саранцев Г.И. Методика преподавания геометрии в девятилетней школе: Учеб. пособие для студентов физ.-мат. факультетов педагогических институтов. Саранск: Мордовский педагогический институт, 1992. 130 с.
58. Саранцев Г.И. Упражнения в обучении математике. М.: Просвещение, 1995. 240 с.
59. Сборник задач по теории вероятностей и математической статистике: пособие / А. В. Гуревич и др. Минск: БГУИР, 2017. 68 с.
60. Ступина С.Б. Технологии интерактивного обучения в высшей школе: учебно-методическое пособие. Саратов: Издательский центр «Наука», 2009. 52 с.
61. Толстоухова И. В., Фегулова Т.А. Использование кейс-метода в формировании профессиональных компетенций обучающихся // Современные наукоемкие технологии. 2016. № 7-1. С. 200-203.
62. Трофимова Е.А. Теория вероятностей и математическая статистика: учеб. пособие / Е.А. Трофимова, Н.В. Кисляк, Д.В. Гилёв. Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2018. 160 с.

63. Тюрин Ю.Н. Теория вероятностей и статистика / Ю.Н. Тюрин, А.А. Макаров, И.Р. Высоцкий, И.В. Яценко. М.: МЦНМО: АО «Московские учебники», 2004. 256 с.

64. Фадеева Л.Н. Теория вероятностей и математическая статистика: учеб. пособие / Л.Н. Фадеева, А.В. Лебедев; под ред. Л.Н. Фадеевой. М.: Эксмо, 2010. 496 с.

65. Федеральный базисный учебный план и примерные учебные планы для образовательных учреждений Российской Федерации, реализующих программы общего образования [Электронный ресурс]. URL: <https://base.garant.ru/6149681/53f89421bbdaf741eb2d1ecc4ddb4c33/> (дата обращения: 20.03.2022).

66. Федеральный государственный образовательный стандарт среднего общего образования [Электронный ресурс] : Утвержден приказом Минобрнауки России от 17.05.2012 № 413 (ред. от 8.11.2022). URL: <https://base.garant.ru/55170507/53f89421bbdaf741eb2d1ecc4ddb4c33/> (дата обращения: 25.06.2023).

67. Федеральный закон от 29.12.2012 № 273-ФЗ «Об образовании в Российской Федерации» (с учетом редакции, внесенной Федеральным законом от 17.02.2021 № 10-ФЗ) // Собрание законодательства Российской Федерации. 2012. № 53 (часть I). ст. 7598

68. Федеральный перечень учебников, рекомендованных к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ начального общего, основного общего, среднего общего образования: Приказ Мин. просвещения РФ от 20 мая 2020. 356 с.

69. Фоломеева Е.М. Формы исследовательской деятельности учащихся: из опыта учителя математики // Исследовательская деятельность учащихся: от детского сада до вуза: научно-практическая конференция с международным участием (Москва, 15-17 ноября 2009 года): сборник трудов конференции. Москва: Изд-во Межрегиональное общественное движение творческих педагогов «Исследователь», 2010. С. 334-336.

70. Фридман Л.М., Турецкий, Е.Н. Как научиться решать задачи: Книга для учащихся старших классов. М.: Просвещение, 2019. 192 с.
71. Харлаева О.А. Классификация экономических задач ЕГЭ // Студенческие дни науки в ТГУ 2023 (Тольятти, апрель 2022 года): сборник студенческих работ / отв. за вып. С. Х. Петерайтис. Тольятти: Изд-во ТГУ, 2023. 1 оптический диск.
72. Харлаева О.А. Содержание и методика обучения математике учащихся старших классов социально-экономического профиля // Молодежь. Наука. Общество: всероссийская студенческая научно-практическая междисциплинарная конференция (Тольятти, декабрь 2021 года): сборник студенческих работ / отв. за вып. С.Х. Петерайтис. Тольятти: Изд-во ТГУ, 2022. 1 оптический диск. С. 371-375.
73. Хоркина Н.А. Методические особенности обучения учащихся классов экономического профиля на факультативных занятиях по математике на основе реализации межпредметных связей: дис. канд. пед. наук. Москва. 2002. 202 с.
74. Шень А. Вероятность: примеры и задачи: учеб. пособие. М.: МЦНМО, 2016. 72 с.
75. Ященко И.В. ЕГЭ 2022. Математика. Профильный уровень. 50 вариантов. Типовые варианты экзаменационных заданий от разработчиков ЕГЭ / И.В. Ященко, М.А. Волчкевич, О.А. Ворончагина, И.Р. Высоцкий. Р.К. Гордин, П.В. Семенов, О.Н. Косухин, Д.А. Федоровых, А.И. Суздальцев, А.Р. Рязановский, В.А. Смирнов, А.С. Трепалин, А.В. Хачатурян, С.А. Шестаков, Д.Э. Шноль; под ред. И.В. Ященко. М.: Экзамен, 2022. 231 с.
76. Abramovich S., Grinshpan A., Milligan D. Teaching Mathematics through Concept Motivation and Action Learning // Teaching Mathematics through Concept Motivation and Action Learning. V. 2019. USA. 2019. P. 1-13. URL: <https://doi.org/10.1155/2019/3745406>
77. Cevikbas M. Flipped classroom as a reform-oriented approach to teaching mathematics // ZDM. Germany. 2020. P. 1291-1305.

78. Khongji P., Nongbsap W. Some Innovations in Teaching of Mathematics // International Journal of Science and Research. India. 2015. P. 1345-1349.
79. Koskinen R., Pitkääniemi H. Meaningful Learning in Mathematics: A Research Synthesis of Teaching Approaches // International Electronic Journal of Mathematics Education. FINLAND. 2022. 15 p.
80. Menderes Ü. Preferences of Teaching Methods and Techniques in Mathematics with Reasons // Universal Journal of Educational Research. Turkey. 2017. P. 194-202.