МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Тольяттинский государственный университет»

Институт математики, физики и информационных технологий
(наименование института полностью)

Кафедра «Высшая математика и математическое образование»
(наименование)

44.04.01 Педагогическое образование
(код и наименование направления подготовки)

Математическое образование
(направленность (профиль))

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
(МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ)

на тему «Методика обучения решению текстовых задач на работу и производительность в старших классах общеобразовательной школы»

Обучающийся А.А. Середа
(И.О. Фамилия) (личная подпись)

Научный руководитель канд. пед. наук, доцент, И.В. Антонова
(ученая степень (при наличии), ученое звание (при наличии), Инициалы Фамилия)

Тольятти 2023

Оглавление

Введение

Актуальность и научная значимость настоящего исследования. Математика, традиционно сохраняющая за собой многовековой статус «царисы наук», является на современном этапе развития школьного образования важным систематизирующим школьным предметом, который развивает логические способности школьников, способствует активизации их познавательной деятельности в процессе обучения, влияет на эффективность изучения и освоения других школьных учебных дисциплин. Кроме этого, в Концепции развития математического образования в Российской Федерации 2013 года, отмечено, что «....успех нашей страны в XXI веке; эффективность использования природных ресурсов, развития экономики; обороноспособность, создание современных технологий зависят от уровня математической науки, математического образования и математической грамотности всего населения, от эффективного использования математических методов» [33].

Решение текстовых задач, в том числе и задач на работку и производительность при обучении математике в общеобразовательной школе способствует развитию логического мышления школьников, активизирует их познавательную деятельность, позволяет закрепить полученные знания и умения; расширяет математический кругозор школьников, а также углубляет прикладное значение школьного курса математики. Вместе с этим, в Федеральном государственном образовательном стандарте среднего общего образования указано, что одним из результатов освоения школьного курса математики должна быть «сформированность умений моделировать реальные ситуации, исследовать построенные модели, интерпретировать полученный результат» [82]. Данные умения относятся к понятию «математическая грамотность», уровень сформированности которой проверяется у современных школьников в ходе проведения международного исследования PISA. Результаты этого исследования, проведенного в 2018 году в России показали, что только 8,1% российских учащихся обладают высоким уровнем математической грамотности (5-6-й уровень), могут осмыслить, обобщить и использовать информацию, полученную ими на основе исследования и моделирования сложных проблемных ситуаций, а также использовать информацию из разных источников, представленную в различной форме. Вместе с этим, в странах ОЭСР 11% учащихся продемонстрировали самый высокий уровень математической грамотности, в лидирующих странах – от 44,3% в четырех провинциях Китая до 37% в Сингапуре [61].

Теоретическим основам обучения школьников решению текстовых задач в школьном курсе математики посвящены работы В.А. Далингера [16], В.П. Добрицы [19], Г.И. Саранцева [69], Т.А. Ивановой [21], Л.С. Капкаевой [25], Ю.М. Колягина [29], В.И. Крупича [35], Д Пойа [58], Н.С. Подходовой, Н.Л.Стефановой [46], Л.М. Фридмана [86], [90], А.В. Шевкина [99] и других.

Анализ ранее выполненных диссертационных работ по теме исследования показал, что в них представлены различные аспекты обучения школьников решению текстовых задач на работу и производительность:

– интеграция алгебраического и геометрического методов в среднем математическом образовании (Л.С. Капкаева [24], 2004 г.);

– применение графового моделирования как средства оптимизации межпредметных связей в процессе обучения учащихся 8-10 классов решению алгебраических и физических текстовых задач (Н.П. Быкова [6], 2006 г.);

– использование цепочек взаимосвязанных задач при обучении математике (Н.В. Вахрушева [7], 2006 г.);

– метод варьирования текстовых задач по математике как средство повышения качества знаний учащихся (А.А. Смирнова [76], 2007 г.);

– формирование содержательно-методической линии задач с параметрами в курсе математики общеобразовательной школы, включающей сюжетные задачи с параметрами (В.В. Мирошин [48], 2008 г.);

– формирование эвристических приемов у учащихся в процессе обучения решению задач (С.Р. Мугаллимова [49], 2008 г.).

Психолого-педагогические особенности обучения старшеклассников представлены в трудах таких исследователей, как М.А. Виниченко [8]; М.Р. Гинзбург [12]; И.С. Кон [32]; Д.А. Леонтьев [39]; Г.М. Потанин, В.Г. Косенко [60], Д.И. Фельдштейн [84], Э. Эриксон [104] и других. Так, имеются диссертационные исследования, в которых приведен анализ психолого-педагогических особенностей развития личности старших школьников (М.А. Виниченко, 2003 г.); описана совместная учебная деятельность как основа формирования умения учиться (Г.А. Цукерман [94], 1992 г.).

Помимо вышесказанного, отметим, что в настоящее время существующие методики обучения старшеклассников решению текстовых задач на работу и производительность, практически не учитывают особенности их возрастного развития, которые предусматривают активное развитие абстрактного мышления, формирование креативного и независимого взгляда на жизнь, совершенствование интеллектуальных особенностей старшеклассников и усложнение их умственных операций (анализ, обобщение, синтез и т.д.). Это требует адаптации существующих методик обучения решению текстовых задач на работу и производительность к особенностям возрастного умственно-эмоционального, а также личностного развития старшеклассников.

Таким образом, актуальность исследования обусловлены сложившимися к настоящему времени **противоречиями между** необходимостью: обучения решению текстовых задач на работу и производительностью в старших классах общеобразовательной школы и фактическим состоянием методики их обучения на практике; повышения уровня математической грамотности выпускников российских школ и низким уровнем сформированности у них умений и навыков решения практико-ориентированных текстовых задач.

Указанное противоречие позволили сформулировать **проблему диссертационного исследования:** каковы методические особенности обучения решению текстовых задач на работу и производительность в старших классах общеобразовательной школы?

Объект исследования: процесс обучения математике в старших классах общеобразовательной школы.

Предметом исследования является методика обучения решению текстовых задач на работу и производительность в старших классах общеобразовательной школы.

Цель исследования заключается в выявлении методических особенностей обучения решению текстовых задач на работу и производительность в старших классах общеобразовательной школы.

Гипотеза исследования основана на предположении о том, что методика обучения решению текстовых задач на работу и производительность в старших классах общеобразовательной школы будет более эффективной, если: будет спроектирована и внедрена в образовательный процесс соответсвующая система задач в рамках технологии развивающего обучения решению задач согласно концепции Л.М. Фридмана; применять разработанные методические рекомендации по обучению их решению.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие **задачи исследования:**

1. Раскрыть сущность понятия текстовой задачи и ее роли в обучении математике.
2. Выявить виды текстовых задач на работу и производительность и определить их место в структуре школьного курса математики старших классов.
3. Рассмотреть психолого-педагогические особенности обучающихся старших классов.
4. Изучить проведенные исследования и опыт работы учителей математики по обучению старшеклассников решению текстовых задач на работу и производительность в общеобразовательной школе.

5. Обосновать методические рекомендации по обучению старшеклассников решению нестандартных текстовых задач на работу и производительность.

6. Разработать систему текстовых задач на работу и производительность в рамках технологии развивающего обучения решению задач.

7. Провести педагогический эксперимент и представить его результаты.

Теоретико-методологическую основу исследования составили работы В.А. Далингера [16], В.П. Добрицы [19], Т.А. Ивановой [21], Ю.М. Колягина [29], З.П. Матушкиной [43], Д Пойа [58], Н.Л. Стефановой, Н.С. Подходовой [46], И.М. Шапиро [96].

Базовыми для настоящего исследования явились также: Л.С. Капкаевой [25], Г.И Саранцева [69], Л.М. Фридмана [88], [90], А.В. Шевкина [99].

Методы исследования, использованные для решения поставленных задач: анализ психолого-педагогической, научной и учебно-методической литературы; изучение, наблюдение и обобщение педагогической практики; анализ собственного опыта работы в образовании; анализ результатов эксперимента по проверке основных положений исследования.

Основные этапы исследования:

- первый этап (2020/21 уч.г.): анализ ранее выполненных диссертационных исследований, школьных учебников и нормативных документов, опыта работы учителей математики;
- второй этап (2021/22 уч.г.): определение теоретических основ обучения решению текстовых задач на работу и производительность в старших классах общеобразовательной школы;
- третий этап (2021/22 уч.г.): определение методических основ обучения решению текстовых задач на работу и производительность в старших классах общеобразовательной школы; разработка методических рекомендаций по обучению старшеклассников решению данных

текстовых задач и соответствующей системы текстовых задач в рамках технологии развивающего обучения решению задач;

- четвертый этап (2022/23 уч.г.): оформление диссертации, корректировка содержания глав диссертации и аппарата исследования, описание результатов экспериментальной работы, формулирование выводов.

Опытно-экспериментальная база исследования: русскоязычный класс британской образовательной сети «Explore Leaning», г. Лондон.

Научная новизна исследования: заключается в том, что в нем обоснованы методические рекомендации по обучению старшеклассников решению текстовых задач на работу и производительность с учетом их психолого-педагогических особенностей.

Теоретическая значимость исследования состоит в том, что в нем: раскрыта сущность понятия текстовой задачи и ее роль в обучении математике; рассмотрены виды текстовых задач на работу и производительность и их место в структуре школьного курса математики старших классов; исследованы психолого-педагогические особенности старшеклассников современной российской общеобразовательной школы; проведен анализ исследований и опыта работы учителей математики по обучению решению текстовых задач на работу и производительность в старших классах общеобразовательной школы.

Практическая значимость исследования определяется тем, что в нем разработаны: методические рекомендации по обучению старшеклассников решению текстовых задач на работу и производительность; система текстовых задач на работу и производительность в рамках технологии развивающего обучения решению задач.

Достоверность и обоснованность результатов исследования обеспечивались: комбинированием теоретических и практических методов исследования, анализом педагогической практики российских педагогов и личным опытом работы в образовании.

Личное участие автора в организации и проведении исследования состоит в обосновании методических рекомендаций по обучению старшеклассников решению текстовых задач на работу и производительность; разработке для них системы задач на работу и производительность в рамках технологии развивающего обучения решению задач, а также их апробации в рамках подготовленного и проведенного педагогического эксперимента.

Апробация и внедрение результатов работы велись в течение всего исследования. Результаты исследования была апробированы в период производственной практики (научно-исследовательской работы) и производственной практики (преддипломной практики) на базе кафедры «Высшая математика и математическое образование» Тольяттинского государственного университета, а также при проведении педагогического эксперимента в русскоязычном классе британской образовательной сети «Explore Leaning», г. Лондон.

По теме исследования имеется две публикации [73]; [74].

На защиту выносятся:

1. Методические рекомендации по обучению старшеклассников решению текстовых задач на работу и производительность.
2. Система текстовых задач на работу и производительность в рамках технологии развивающего обучения решению задач для школьников 10-11 классов.

Структура магистерской диссертации. Работа состоит из введения, двух глав, заключения, содержит 5 рисунков, 7 таблиц, списка используемой литературы (112 источников). Основной текст работы изложен на 122 страницах.

Глава 1 Теоретические основы обучения старшеклассников решению текстовых задач на работу и производительность в старших классах общеобразовательной школы

1.1 Сущность понятия текстовой задачи и ее роли в обучении математике

На современном этапе развития российского школьного образования обучение математике является одним из ключевых элементов общеобразовательного, воспитательного и развивающего, компонентов формирования личности подрастающего поколения нашей страны, что требует использования широкого спектра педагогических инструментов, позволяющих достичь целей и получить ожидаемые результаты, предусмотренные Федеральными образовательными стандартами среднего образования. В структуре данных педагогических инструментов особое место занимают текстовые математические задачи, которые позволяют не только достичь узконаправленные цели обучения математике школьников определенных возрастных групп, но и, что особенно важно, способствуют комплексному развитию мышления школьников.

В этой связи, считаем необходимым перед изучением сущности текстовых математических задач и их роли в обучении старшеклассников математике рассмотреть процесс мышления как в непосредственной взаимосвязи с решением задач, так и с точки зрения независимой мыслительной деятельности, направленной на многогранное развитие личности школьника.

В частности, в психологии О.К. Тихомировым указано, что «мышление психологически выступает как деятельность по решению задачи» [81, с. 293]. Однако, мы считаем, что вышеприведенную точку зрения, которая отождествляет процесс мышления с процессом решения задач, слишком узконаправленной, поскольку мышление школьника более многогранный процесс. С нашей точкой зрения «солидарен» А.В. Брушлинский, который полагал, что «решение задачи осуществляется только с помощью мышления и никак иначе не осуществимо. Но мышление совершается не только в связи с решением задачи. Оно имеет место и при усвоении знаний, понимании текста, в процессе составления задач, их выявления или осознания» [5, с. 57].

Главный недостаток процесса мышления школьников при решении текстовых математических задач в целом, и задач на работу и производительность, в частности, заключается в том, что школьными учителями ставится цель сформировать у учеников конкретные приемы мышления, которые позволят им вычленять и использовать конкретные операции, эффективные при решении определенных типов текстовых задач, в том числе задач на работу и производительность. То есть, по сути происходит необоснованное сужение возможностей мышления школьников с целью прикладного использования при выборе методов и инструментов решения математических задач конкретного типа. На наш взгляд, данный процесс должен строиться в обратном направлении, то есть обучение решению текстовых задач должно способствовать расширению кругозора школьников и комплексному развитию их мышления.

В теории и методике обучения математике, говоря о сущности мышления школьников, Ю.М. Колягин считает, что «развитие математического мышления предполагает не столько развитие у учащихся способности к овладению фиксированными операциями и приемами, сколько способности к обнаружению новых связей, овладения общими приемами решения новых задач. Проще говоря, у учащихся следует формировать общие приемы мышления, а не приемы мышления в конкретной ситуации» [29, с. 34].

На наш взгляд, главная цель решения текстовых математических задач в целом, и задач на работу и производительность, в частности, заключается в том, что на основе решения конкретных типов задач у учеников будут формироваться общие универсальные методы мышления, которые, в дальнейшем, будут с успехом использоваться не только при выполнении математических заданий других типов, но и применимы при изучении других предметов, а также практически полезны в процессе их жизнедеятельности. В свою очередь, Карр Ч. и Хоун Ч., справедливо полагали, что «почти всегда изучение любой человеческой деятельности - в труде или игре - можно проводить как изучение ситуаций, в которых приходится принимать решение, то есть таких ситуаций когда один человек или группа людей, сталкиваются с необходимостью выбора какого-нибудь одного из нескольких действий (хотя бы из двух). Поэтому изучение человеческой деятельности можно в основном свести к изучению поведения человека в условиях производимого им выбора, то есть в условиях ситуаций, в которых нужно принимать решение» [26, с. 16]. По сути, в процессе решения человеком определенных задач.

В этой связи, возникает объективная необходимость рассмотрения ключевого понятия нашего диссертационного исследования – понятия задачи. Отметим, что несмотря на значительное использование термина «задача» как в математике, так и в других науках и повседневной жизни, в настоящее время существуют разные трактовки понятия «задача».

Так, психолог Я.А. Пономарев справедливо отмечал, что «понятие задачи обычно используется только в ограниченном объеме: говорят о научных (математических, физических и т.п.) задачах, о задачах в образовании, о задачах политических, хозяйственных, технических. Общее понятие задачи еще не выработано» [59, с. 109].

Рассмотрим различные подходы к понятию задачи и другим понятиям, связанным с ним, в теории и методике обучения математике.

Если понимать сущность понятия задачи в широком смысле и включить в его состав любое вычислительное упражнение или теорему, что, как справедливо полагал Ф.Х. Вольф, «…занятие математикой состоит в решении задач» [9, с. 138]. С вышеприведенной точкой зрения косвенным образом согласны значительное количество авторов, которые считали термины «упражнение», «вопрос», «задача», «проблема» синонимами.

В частности, Данилов М.А. полагал, что «в теории и практике обучения доказано, что образование умений и навыков происходит главным образом в процессе упражнений. Упражнение - сознательное многократное выполнение сходных действий, опирающихся на знания, на различном (но в отношении цели-сходном) материале, применяемое с целью овладения умением или навыком» [17, с. 206].

Г.И. Саранцев писал, что несмотря на разные определения понятия «упражнение», один из его основных признаков – «упражнение как средство формирования умений». Автор отмечал, что «в контексте учебников математики школьные задачи являются упражнениями» [69, с. 184]. Поэтому мы будем в соответствии с позицией автора, отождествлять понятие «задача» с понятием «упражнение».

Вместе с этим, Лернер И.Я. считал нецелесообразным отождествлять понятие «задача» с понятием «вопрос», так как «в определенном смысле всякую задачу можно заменить некоторым вопросом. Однако, далеко не каждый вопрос является задачей, хотя бы в силу того, что для одного субъекта ответ на вопрос может быть известен заранее, а для другого сама постановка вопроса может отказаться непонятной» [57, с. 23].

В этой связи, считаем необходимым отметить, что вопрос является не тождественно равным задаче, а, по нашему мнению, является компонентом задачи и как подчеркнул Колягин Ю.М. представляет собой «свойство, сопутствующее задаче или ее неотъемлемый компонент» [29, с. 37]. В целом, задача является одним из эффективных инструментов мотивации мыслительного процесса обучающихся или, как выразилась, Славская К.А. «….она сама выступает прежде всего как объект, детерминирующий процесс мышления человека» [75, с. 211].

Говоря о процессе мышления при решении задачи, нельзя игнорировать специфику взаимосвязи между математической задачей и лицом, которое решает задачу. Балл Г.А. отмечал, что «заманчиво было бы представить совокупность задач как у нечто, существующее во внешнем мире и не зависящее от того, кто решает задачу…такой подход является только первым приближением к проблеме» [92, с. 65]. На наш взгляд, задача становится инструментом обучения математике в том случае, когда она существует не «сама по себе», а ее проблемная составляющая «вникает» в учебно-мыслительный процесс ученика, а последний, в свою очередь, осознает проблемную ситуацию, описанную в задаче. В этой связи, следует согласиться, что понятия задачи и понятия проблемной ситуации, несмотря на их смысловую близость, не являются тождественно равными. В частности, Фридман Л.М. определял задачу как «всякую знаковую модель проблемной ситуации, считая понятие проблемной ситуации исходной» [87, с. 65].

Т.А. Иванова под задачей понимает «задание, которое должен выполнить субъект, или вопрос, на который он должен найти ответ, опираясь на указанные условия и все вытекающие их них следствия» [21, с. 164].

В теории и методике обучения математике приводятся различные классификации задач по определенным основаниям.

Так, Н.Л. Стефановой, Н.С. Подходовой выделены виды задач по:

− «математическому содержанию (условие и заключение принадлежат определённому разделу математики): арифметические, алгебраические, геометрические, тригонометрические, комбинаторные и т.д.;

− методу решения: практические, арифметические (на основании зависимостей между компонентами арифметических действий), алгебраические, графические (составление уравнений, неравенств и их систем), геометрические (через использование геометрических фигур и их свойств), комбинированные;

− характеру требований: задачи на вычисление, доказательство, объяснение, преобразование, конструирование, построение и т.д.;

– специфике языка: текстовые (условие представлено на естественном языке), сюжетные (присутствует фабула), абстрактные (предметные)» [46], [47].

Как видно, из вышеприведенной классификации, текстовые задачи представляют собой особый вид математических задач, содержание которых представлено в естественно-языковой форме. Однако, в настоящее время нет общепринятого единого определения понятия текстовой задачи.

Так, в частности, Л.М. Фридман определяет текстовые задачи из школьного курса математики, как «задачи – словесные модели, в которых требуется узнать значение одной или нескольких величин. Из того, что это неизвестное значение однозначно выражается через другие известные величины, которые имеют с ними те или иные взаимные связи, следует возможность нахождения искомых величин» [88]. Автор указывает, что в текстовых (сюжетных) задачах «описан некоторый жизненный сюжет (явление, событие, процесс) с целью нахождения определенных количественных характеристик или значений [89, с. 3].

Ю.М. Колягин приводит определение текстовой задачи как «описание некоторой ситуации или нескольких ситуаций на не математическом языке, в которой требуется найти значение того или иного компонента данной ситуации, выяснить наличие или отсутствие какого-либо отношения между ее компонентами или определить его вид» [29].

Если рассматривать исторический аспект возникновения текстовых математических задач, то он берет свое начала со времен Древнего Вавилона. В те времена люди использовали глиняные таблички для передачи и сохранения содержания текстовых задач. Эти задачи являлись в те времена не столько методом и средством обучения математике, сколько формой передачи жизненного опыта от одного поколения к другому.

Однако, следует отметить, что использование текстовых математических задач в современном мире не должно ограничиваться их применением как метода обучения математике. Дело в том, что текстовые математические задачи, в первую очередь, используют текст как основную форму передачи их содержания и проблемы, которую необходимо решить в процессе применения тех или иных математических методов. Но, правильное понимание текста математической задачи зависит не только от того, насколько грамотно он сформулирован, но и от того, как этот текст воспринимается с объективной и субъективной точек зрения со стороны ученика. Ученики, в свою очередь, могут воспринимать один и тот же текст математической задачи абсолютно с разных точек зрения в зависимости от следующих факторов:

- факты и ситуации, которые описаны в содержании текстовой математической задачи;
- возраст и психолого-эмоциональное состояние ученика определенного возраста;
- степень овладения определенным математическим инструментарием со стороны школьника;
- накопленный жизненный опыт ученика и его соответствие содержанию текста математической задачи.

Г.И. Саранцев отмечает, что при обучении математике задачи исторически использовались в соответствии с определенными этапами:

«1 этап: изучение математики с целью обучения решению задач;

2 этап: обучение математике, сопровождаемое решением задач;

3 этап: обучение математике, через решение задач» [69, с. 184].

В пособии Н.Л. Стефановой, Н.С. Подходовой указано, что существуют различные подходы к понятию задачи: «как цели, заданной в определенных условиях (Г.А. Балл [1]); как модели проблемной ситуации (Л.М. Фридман); как объекта мыслительной деятельности (Л.Л. Гурова [14]). Отмечается, что основными компонентами структуры задачи являются условие, обоснование (базис), решение, заключение» [46, с. 107].

В качестве этапов решения задач в методической литературе в основном определяют: анализ текста, поиск решения, реализацию плана, проверку и запись ответа.

Следует отметить, что, несмотря на большое количество трактовок понятия задачи в научно-методических трудах различных исследователей, мы не смогли найти четкого определения текстовой задачи на работу и производительность, что, исходя из логики нашего исследования, делает необходимым ее авторскую формулировку. На наш взгляд, текстовая математическая задача на работу и производительность представляет собой формализованную в виде текста модель проблемной ситуации в области живого или овеществленного труда, которая требует дать количественную оценку его отдельных компонентов с использованием математических методов. При этом живой труд представляет собой целесообразную деятельность людей и механизмов, направленную на выполнение определенных действий, связанных с выполнением определенной работы раздельным или совместным способом, а овеществленный труд представляет собой результат живого труда, в материализованной форме.

1.2 Виды текстовых задач на работу и производительность и их место в структуре школьного курса математики старших классов

Текстовые задачи на работу и производительность традиционно широко используются не только в структуре школьного курса математики старших классов, но и начинают применяться при обучении математике школьников, начиная с первых лет обучения в общеобразовательной школе, то есть с 5-6 класса. Впервые учащиеся знакомятся с ними в начальной школе.

В соответствии с ФГОС среднего общего образования по математике профильного уровня [82] в качестве общих требований к результатам освоения основной образовательной программы среднего общего образования по теме «Задачи на работу и производительность» приведены следующие:

- сформированность умений применять полученные знания при решении различных задач;
- сформированность представлений о математике как части общечеловеческой культуры, универсальном языке науки, позволяющем описывать и изучать реальные процессы и явления;
- владение методами доказательств и алгоритмов решения; умение их применять, проводить доказательные рассуждения в ходе решения задач;
- сформированность понятийного аппарата по основным разделам курса математики; знаний основных теорем, формул и умения их применять; умения доказывать теоремы и находить нестандартные способы решения задач;
- сформированность умений моделировать реальные ситуации, исследовать построенные модели, интерпретировать полученный результат.

Опишем основные цели и задачи изучения темы «Задачи на работу и производительность» в старших классах.

Цель: рассмотреть различные методы решения задач на работу и производительность.

Задачи:

- развитие у старшеклассников логического мышления, умения анализировать, сравнивать и обобщать;
- формирование понятий работы и производительности;
- решение старшеклассниками задач на раздельную и совместную работу различными методами;
- повышение уровня математической подготовки через решение задач на работу и производительность.

Теоретический и практический материал, рассматриваемый при обучении решению задач на работу и производительность, способствует систематизации и обобщению знаний и умений обучающихся о решении данных задач; развитию навыков их решения; а также развитию познавательного интереса и мотивации к изучению математики, развитию логического мышления в процессе решения текстовых задач; формирует у них математическую культуру и межпредметные математические компетенции.

Приведем результаты методического анализа темы «Задачи на работу и производительность» в старших классах.

Базовыми знаниями являются:

– понятие производительности;
– понятие объема работы;
– понятие времени;
– понятие совместной работы;
– понятие раздельной работы;
– этапы решения текстовых задач;
– основные методы решения текстовых задач (арифметический, алгебраический).

Рассматриваемые сведения:

– задачи на совместную работу;
– задачи на раздельную работу.
– примеры решения стандартных задач на работу и производительность различными методами (арифметическим, алгебраическим, геометрическим);
– примеры решения нестандартных задач на работу и производительность.

Теоретический материал.

Базовые знания и умения, необходимые для решения задач на работу и производительности школьники получают при изучении математики в 5-6 классах, а затем при изучении алгебры в 7-9 классах. Старшеклассники решают задачи на работу и производительность в рамках материала для повторения, который содержится в учебниках алгебры и начал математического анализа 10-11 классов или в рамках изучения тем, где задачи на работу и производительность используются как вспомогательный материал. При этом текстовые задачи на работу и производительность в трех основных комплектах федеральных учебников углубленного уровня, которые мы проанализировали размещены крайне неравномерно. В профильных учебниках алгебры и начал математического анализа Г.К. Муравина, О.В. Муравиной [50], А.Г. Мерзляка [44] для 10 класса данные задачи отсутствуют полностью, за исключением учебника Ю.М. Колягина [30] и коллектива авторов. В соответствующих федеральных учебниках алгебры и начала математического анализа для 11 класса А.Г. Мерзляка [45] и Ю.М. Колягина [31] размещены текстовые задачи на работу и производительность. В учебнике для 11 класса Г.К. Муравина, О.В. Муравиной [51] данные задачи отсутствуют.

Анализ содержания темы «Задачи на работу и производительность» в рассмотренных учебниках алгебры и начала математического анализа углубленного уровня для 10-11 класса, утвержденных Министерством Просвещения на 2022-2023 учебный год, рассмотрен ниже в таблице 1.

На основе анализа учебного материала, входящего в данную тему, в учебниках алгебры и начал математического анализ 10-11 классов углубленного уровня, представленного в таблице 1, можем сделать вывод, что, на наш взгляд, наиболее приемлемым является учебники Ю.М. Колягина [30, 31], поскольку именно в них представлена наиболее широкая подборка рассматриваемых задач с точки зрения повторения изученного материала, так и как вспомогательного материала при изучении определенных тем курса алгебры и начал математического анализа в старших классах.

Приведем пример задачи из учебника А.Г. Мерзляка для 11 класса. «Одна бригада может выполнить некоторый заказ за 8 дней, а другая - за 12 дней.

Сначала первая бригада работала 2 дня, а затем ее сменила вторая. За сколько дней был выполнен заказ?» [45, с. 256].

Таблица 1 – Содержание учебного материала, входящего в тему «Задачи на работу и производительность», в учебниках алгебры и начал математического анализ 10-11 классов углубленного уровня

Автор учебника	Глава, параграф	Номера задач
Мерзляк А.Г. и др. [45], 11 класс	Глава 5 «Повторение», Параграф 28 «Упражнения для повторения курсов математики, алгебры, алгебры и начала анализа»	Задачи 28.38, 28.39, 28.43, 28.44 на с. 256; 28.60 на с. 258, где 28.44 - на раздельную работу, остальные – на совместную работу.
Муравин Г.К., Муравина О.В., 10 и 11 классы [50], [51]	-	-
Колягин Ю.М. и др. [30], 10 класс	Глава 1 «Алгебра 7-9 классов (повторение), Параграф 2 «Линейные уравнения и системы уравнений», Параграф 6 «Квадратные уравнения».	Задачи на раздельную работу: 29 на с. 16; 41 на с. 17. Задачи на совместную работу: 11 на с. 15; 122 и 123 на с. 37.
	Глава 3 «Многочлены. Алгебраические уравнения», Параграф 10 «Системы уравнений»	Задачи на совместную работу: 85 на с. 123; 118 на с. 126.; 6 на с. 127; 371 на стр. 129. Задачи на раздельную работу: 84, 86 на с. 123; 370 на стр. 129.
Колягин Ю.М. и др. [31], 11 класс	Глава 8 «Повторение курса алгебры и начал математического анализа», Параграф 7 «Упражнения»	Задачи 968 (на совместную работу), 973 на с.339 (на раздельную работу)

Приведем пример задачи из учебника Ю.М. Колягина для 10 класса. «Две бригады, из которых вторая начинает работать на 5 дней позже первой, закончили работу за 15 дней, считая от момента начала работы второй бригады. Если бы эта работа была поручена каждой бригаде отдельно, то для её выполнения первой бригаде понадобилось бы па 10 дней больше, чем второй. За сколько дней может выполнить эту работу каждая бригада, работая отдельно?» [30, с. 127].

На наш взгляд, наиболее удачным учебником для обучения старшеклассников решению задач на работу и производительность является учебник алгебры и начал математического анализа для 10 класса Колягина Ю.М., Ткачева М.В., Федоровой Н.Е., Шабунина М.И. [30].

Рассмотрение вопросов работы и производительности в текстовых задачах в данном учебнике представлено в главах, посвященным повторению курса алгебры 7-9 классов, и Главе 3 «Многочлены. Алгебраические уравнения», Параграф 10 «Системы уравнений». Однако с точки зрения типологии текстовых задач на работу и производительность и их количества данный учебник, на наш взгляд, является наиболее оптимальным по следующим причинам:

– учебник входит в федеральный перечень учебников, рекомендованных Министерством Просвещения Российской Федерации к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ среднего общего образования образовательных учреждений;
– в данном учебнике наиболее полно раскрыты основные типы задач на работу и производительность: задачи на раздельную и совместную работу; эти задачи представлены в рамках повторения курса алгебры 7-9 классов на углубленном уровне, а именно в темах: «Линейные уравнения и системы уравнений», «Квадратные уравнения», «Системы уравнений» и необходимы для подготовки к ЕГЭ по математике профильного уровня;
– в учебнике наиболее полно раскрыто содержание учебного материала.

В таблице 2 представлен фрагмент перечня элементов содержания (по кодификатору) [83], проверяемых на ЕГЭ 2023 года по математике в задании №9 повышенного уровня, направленного на умение школьников строить и исследовать простейшие математические модели, в соответствии с темой «Задачи на работу и производительность».

Задачи на работу и производительность можно условно разделить на два основных типа: на совместную работу и раздельную работу.

В 5-9 классах федеральные учебники знакомят школьников с базовыми понятиями в этой области и основными методами решения данных задач. В 10-11 классах учебники углубленного уровня содержат задачи на работу и производительность в контексте повторения изученного материала.

Таблица 2 – Перечень элементов содержания (по кодификатору), проверяемых на ЕГЭ по математике в задании №9 (повышенный уровень).

<table>
<tr><th>Код раздела</th><th>Федеральный компонент ФГОС СОО</th><th>Элементы содержания, проверяемые заданиями экзаменационной работы</th></tr>
<tr><td>2.1</td><td colspan="2">Уравнения</td></tr>
<tr><td>2.1.7</td><td>Равносильность уравнений, систем уравнений.</td><td rowspan="3">Решение задач на движение и совместную работу, смеси и сплавы с помощью линейных, квадратных и дробно-рациональных уравнений и их систем.</td></tr>
<tr><td>2.1.8</td><td>«Простейшие системы уравнений с двумя неизвестными» [83].</td></tr>
<tr><td>2.1.9</td><td>«Основные приёмы решения систем уравнений: подстановка, алгебраическое сложение, введение новых переменных» [83].</td></tr>
<tr><td>2.1.12</td><td>«Применение математических методов для решения содержательных задач из различных областей науки и практики. Интерпретация результата, учёт реальных ограничений» [83].</td><td>Решение задач на движение и совместную работу, смеси и сплавы с помощью линейных, квадратных и дробно-рациональных уравнений и их систем. Решение задач с помощью числовых неравенств и систем неравенств с одной переменной, с применением изображения числовых промежутков. Решение задач с использованием уравнений и их систем</td></tr>
<tr><td>2.2</td><td colspan="2">Неравенства</td></tr>
<tr><td>2.2.1</td><td>Квадратные неравенства.</td><td>Решение задач с помощью числовых неравенств и систем неравенств с одной переменной, с применением изображения числовых промежутков</td></tr>
<tr><td>2.2.5</td><td>Системы линейных неравенств.</td><td>Решение задач с помощью числовых неравенств и систем неравенств с одной переменной, с применением изображения числовых промежутков</td></tr>
</table>

Кроме этого, на специализированных сайтах, например, [93] и [65], посвященных подготовке к ЕГЭ, среди которых особое место занимает сайт «Решу ЕГЭ», наблюдается аналогичная типология текстовых задач на работу и производительность, решаемые различными методами (в основном – арифметическим и алгебраическим), а именно:

Задачи на раздельную работу:

Задача №1. «Заказ на 110 деталей первый рабочий выполняет на 1 час быстрее, чем второй. Сколько деталей в час делает второй рабочий, если известно, что первый за час делает на 1 деталь больше?» [93].

Задача №2. «Первая труба пропускает на 1 литр воды в минуту меньше, чем вторая. Сколько литров воды в минуту пропускает первая труба, если резервуар объемом 110 литров она заполняет на 2 минуты дольше, чем вторая труба заполняет резервуар объемом 99 литров?» [93].

Задача № 9 (26592). «Заказ на 110 деталей первый рабочий выполняет на 1 час быстрее, чем второй. Сколько деталей за час изготавливает второй рабочий, если известно, что первый за час изготавливает на 1 деталь больше?» [65].

Задача № 9 (26595). «На изготовление 99 деталей первый рабочий тратит на 2 часа меньше, чем второй рабочий на изготовление 110 таких же деталей. Известно, что первый рабочий за час делает на 1 деталь больше, чем второй. Сколько деталей в час делает второй рабочий?» [65].

Задача № 9 (26597). «Первая труба пропускает на 1 литр воды в минуту меньше, чем вторая. Сколько литров воды в минуту пропускает первая труба, если резервуар объемом 110 литров она заполняет на 1 минуту дольше, чем вторая труба?» [65].

Задачи на совместную работу:

Задача №3. «Двое рабочих, работая вместе, могут выполнить работу за 12 дней. За сколько дней, работая отдельно, выполнит эту работу первый рабочий, если он за два дня выполняет такую же часть работы, какую второй -за три дня?» [93].

Задача №4. «Андрей и Паша красят забор за 9 часов. Паша и Володя красят этот же забор за 12 часов, а Володя и Андрей — за 18 часов. За сколько часов мальчики покрасят забор, работая втроем?» [93].

Задача № 9 (118293). «Один мастер может выполнить заказ за 6 часов, а другой — за 3 часа. За сколько часов выполнят заказ оба мастера, работая вместе?» [65].

Задача № 9 (26596). «Двое рабочих, работая вместе, могут выполнить работу за 12 дней. За сколько дней, работая отдельно, выполнит эту работу первый рабочий, если он за два дня выполняет такую же часть работы, какую второй — за три дня?» [65].

Задача № 9 (324107). «Две бригады, состоящие из рабочих одинаковой квалификации, одновременно начали строить два одинаковых дома. В первой бригаде было 3 рабочих, а во второй — 9 рабочих. Через 4 дня после начала работы в первую бригаду перешли 7 рабочих из второй бригады, в результате чего оба дома были построены одновременно. Сколько дней потребовалось бригадам, чтобы закончить работу в новом составе?» [65].

Как видно из вышеперечисленных задач, большая часть подобных заданий на работу в структуре экзаменационных материалов ЕГЭ, представлена задачами на раздельную и совместную работы [65].

Отметим, что особая значимость текстовых задач в обучении математике заключается в их комплексном влиянии на обучающихся, которое заключается в многовекторном развитии математических знаний с одной стороны и расширении практического жизненного кругозора за счет решения общебытовых и реалистичных проблемных ситуаций с помощью математических методов с другой. Поэтому, на наш взгляд, текстовые математические задач в целом, и задачи на производительность и работу в частности, необходимо рассматривать как педагогический инструмент в рамках следующих составляющих: текстовые задачи как:

- метод обучения математике;
- средство расширения кругозора школьников;
- инструмент воспитания старшеклассников в общеобразовательной школе.

1.3 Психолого-педагогические особенности старшеклассников современной российской общеобразовательной школы

Методические сложности обучения старшеклассников решению текстовых задач на работу и проиводительность помимо методических и организационно-учебных особенностей, на наш взгляд, усугубляются психолого-педагогическими специфическими характеристиками школьников старшего возраста, которые предопределяют не только формы и методы восприятия ими сущности текстовых задач, но и зачастую обуславливают особый алгоритм их мотивационного и воспитательного воздействия на старшеклассников в процессе их решения.

Реформирование современной российской общеобразовательной школы делает его центром - школьника, который не только получает среднеее образование определенного уровня, но и формируется как личность в процессе возрастных изменений его личности на основе перестройки сознания и самосознания. Процесс ее формирования сейчас происходит в очень сложных социально-экономических условиях, поскольку относительная свобода, полученная российскими школьниками приводит, зачастую, к девальвации моральных устоев и ограничений. Постоянная занятость родителей приводит к дефициту родительского внимания и воспитания, который заполняется не всегда положительным заменителем в виде «улицы» и социальных сетей.

Психолого-педагогическим особенностям старшеклассников посвящено немало трудов исследователей в психологии (В.А. Бодров [3], [4]; М.А. Виниченко [8]; М.Р. Гинзбург [11], [12]; И.С. Кон [32]; Д.А. Леонтьев [38], [39]; Э. Эриксон [104]) и в педагогике (Г.М. Потанин, В.Г. Косенко [60]; Д.И. Фельдштейн [84]) и других.

М.А. Виниченко [8] определено, что процесс физического и психо-эмоциональнго взросления учащихся старших классов приводит, как правило, и к трансформации их социальной позиции в современном обществе. Данная трансформация приводит к тому, что старшеклассник все более настойчиво выражает свою индицидуальную позицию по многим вопросам, в том числе в процессе изучения школьного курса математики, стремится получить от сверстников и окружающих его людей старшего возраста больше социального признания его места в обществе, что, в конечном итоге, приводит к его социально ответственному самоопределению как личности.

Д.И. Фельдштейн отмечал, что в юношестве намечаются новые моменты, связанные с актуализацией абстрактного и логического мышления, рефлексии своих чувств, осмысления собственного жизненного пути, усиления стремления к самореализациии. В этот период формируется наиболее сложный, высший механизм целеполагания, связанный со способностью «осуществлять самопроецирование в будущее не только как постановку конкретных целей, но и как самопроектирование» [84,с.18].

Главное направление психологической трансформации старшеклассников в процессе изучения математики заключается в усилении их индивидуализации как основной формы социализации.

Усиливающаяся индивидуализация приводит к тому, что старшие школьники становятся действующими субъектами социальных отношений, которые имеют, пусть и незначительный, но уже индивидуально накопленный жизненный опыт, который может войти в противоречие со смысловым содержанием текстовых математических задач. Если данное содержание будет устаревшим и содержать жизненные примеры только из прошлого, а не из настоящего и будущего старшеклассника, то его мотивация к изучению решения текстовых задач будет неуклонно снижаться. При этом считаем нужным отметить важность отражения будущего в содержании текстовых математических задач не столько с хронологической точки зрения, сколько с точки зрения психологии, то есть психологическое будущее, обладающее индивидуальной структурой и образовательно-воспитательными функциями. Это позволит старшекласснику при решении текстовых математических задач видеть себя как личность и понимать, что будущие жизненные ситуации, отраженные в текстовых математических задачах важны для него с практической точки зрения.

Психологическое будущее у современных российских старшеклассников заключается прежде всего в формировании и развитии личного жизненного самоопределения. Эти значительные изменения обусловлены как объективными, так и субъективными причинами, но среди всего многообразия я могу выделить половое созревание, усложнение жизненных ситуаций старшеклассников, расширение круга общения. Эти и другие факторы в своей совокупности приводят к активизации ценностно-ориентированной деятельности старшеклассников. Ученики 10-11 классов российских школ, в большинстве своем, уже начинают обдумывать свою жизненную стратегию на ближайшее будущее, что направляет вектор формирования их личности как взрослого человека со своей индивидуальной системой ценностей.

Однако, у подростков система ценнностей представляет собой не столько роль фундаментальных норм, которые помогают им делать обоснованный и социально поддерживаемый выбор правил поведения, сколько субъективные мотивы поступков в различных жизненных ситуациях, большинство из которых старшеклассник не испытал лично, на собственном опыте. В этой связи, текстовые математические задачи, на наш взгляд, являются одним из дополнительных элементов формирования личностных смыслов старшеклассников в условиях дефицита собственного жизненного опыта.

По мнению Д.А. Леонтьева [38]; [39], только часть социально признаваемых ценностей принимаются старшеклассниками в качестве личностных, поскоку последние не всегда вовлечены в качестве субъектов в групповую деятельность, направленную на реализацию определенной ценности. В этой связи, текстовые математические задачи позволяют, через процесс их осмысления, активизировать личностную активность страшеклассников.

Активность как свойственная личности характеристика - это «ее собственная динамика как источник преобразования или поддержания ею жизненно значимых связей с окружающим миром» [63, с. 10], причем жизненная значимость данных связей может оцениваться старшеклассником субъективно, что приводит как к недооценке действительно важных и принципиальных, так и к переооценке второстепенных и незначительных. Кроме этого, в условиях активного развития информационных технологий и виртуализации части реальной жизни старшеклассников данные проблемы только усиливаются, поскольку они начинают происходить в двух условных жизненных сферах: реальной и виртуальной (цифровой).

Логичным результатом вышеперечисленных проблем неправильной оценки жизненной значимости определенных типов связей старшеклассников с окружающим миром является формирование определенных типов противоречий, которые Г.М. Потанин, В.Г. Косенко [60], условно разделили на три сферы:

- сфера общения старшеклассников как между собой, так и другими социальным группами людей;
- сфера деятельности в которой завышенные притязания старшеклассников вступают в противоречия с их ограниченными возможностями полноценной реализации;
- сфера жизненного опыта и социального статуса в которой незначительный жизненный опыт старшеклассников вместе с их низким социальным статусом вступают в противоречие с их необоснованно высокими встречными психологическими ожиданиями.

Вышеперечисленные три группы противоречий не должны игнорироваться в школьной среде, а требуют преодоления на каждом этапе психологического развития старшеклассника, в том числе и на уроках алгебры и начал математического анализа в 10-11 классах. Легкость или сложность данного преодоления зависит, прежде всего, от объема и глубины данных противоречий, которые увеличиваются прямо пропорционально взрослению старшеклассника, что требует и увеличения нравственно-волевыхэнергозатран на их преодоление. В процессе этого преодоления и происзодит развитие направленности личности старшеклассника, переход его развитяи с одного уровня на другой. Результатом данного преодоления противоречивых конфликтных ситуаций является формирование нравственного опыта старшеклассника, причем данный опыт «набирается» в условиях внутренней нестабильности подростковой психики, которая приводит к всплескам категоричности, скептицизма и авторитетного негилизма. Эти личностные особенности старшеклассников должны быть известны и учитываться в работе не только школьными психологами, но и учителями математики, которые должны понимать, что школьники старших классов понимают относительность иерархии современного общества, но еще не понимают как найти свое место в этой иерархии, даже в рамках школьного коллектива. Вместо этого, обычно школьные учителя опираются на простые ссылки на авторитеры, но старшеклассников такая ссылка не удовлетворяет. Кроме этого, они зачастую самостоятельно «разрушают» даже устоявшиеся авторитеры, поскольку это становиится их психологической потребностью, сопособом формирования личного интеллектуального и морального опыта. С нашей точки зрения этот процесс формирования морального сознания тесно взаимосвязан с социальным поведением и реальной деятельностью ученика в школе. Причем в структуре этой реальной учебной деятельности особое место занимают текстовых задачи по математике, которые, с одной стороны, служат традиционным обучающим математике инструментом, а с другой стороны иллюстрируют школьнику различные жизненные ситуации в виде словесных моделей, которые могут быть разрешены методами математической науки.

По мнению И.С. Кон [32], наименее продуктивной формой разрешения данных личностных противоречий современных старшеклассников является сопоставление неокрепшего подросткового сознания и его поведения, поскольку последнее во многих случаях является произвольным. «Произвольное поведение, происходящее в условиях конфликта противоположно направленных мотивационных тенденций, опосредствуется внутренним планом действия, в котором и происходит перестройка мотивационной сферы субъекта. Однако чисто интеллектуальное взвешивание всех «за» и «против» неспособно совершить такую перестройку, так как сам интеллектуальный план оказывается либо нацело блокированным более сильным непосредственным мотивом, либо процессы рассуждения идут в направлении поддержки непосредственно более социального мотива» [32, с. 187].

Нельзя не согласиться с М.А. Виниченко, которая справедливо утверждала, что динамика мотивационной среды подростков является ключевым факторов формирования их активной жизненной позиции, выражающейся в их поведении, которое зачастую может быть неустойчивым. Добиться поведенческой устойчивости старшеклассников можно только в том случае, если нормы морали и алгоритмы поведения в обществе будут признаны как ценностные ориентиры в сознании подростков. И в этой связи, ключевым условием становления личности старших школьников является ценностно-ориентированное поведение школьника на основе общепризнанных норм этики и морали. Причем нормы этики и морали постоянно находятся в «противодействии» с системой ложных ценностей и жизненных ориентиров, демонстрируемых старшеклассникам как в реальной жизни, так и в виртуальном пространстве. А поскольку изолировать старшеклассников от многоверкторной системы ценностей реальной жизни и цифрового мира не представляется возможным, да и является, по нашему мнению нецелесообразным, то наиболее эффективным инструментом ценностно ориентированного формирования личности школьников является создание устойчивой системы ценностей личности подростка и механизмов его социальной адаптивности в современном обществе. Результатами эффективной модели социальной адаптивности в старших классах являются: поведенческий опыт, мировоззрение;

самоопределение, самоактуализация, самореализация «Я», определяется субъективность индивида [8, с. 68].

Однако, если говорить о временной структуре жизнеделятельности старшеклассников, то у большинства из них больший удельный вес занимает учебно-профессиональная деятельность, которая позволяет формировать профессиональные и познавательные интересы, фокусирует старшего школьника строить собственные планы на жизнь, а также предопределеяет вектор его социальной активности.

Школьный курс математики, являясь по сути одним из базовых и наиболее объемных по количеству часов в старших классах российских средних школ, что делает его роль в психологическом формировании личности старшеклассника одной из ведущих.

В свою очередь, текстовые задачи по математике несут в себе не глубокое смысловое и жизненное значение для старшеклассников, поскольку позволяют им ознакомиться с различными типами жизненных ситуаций.

Однако, к сожалению, даже в современных учебниках содержание многих текстовых задач является давно устаревшим. Это приводит к формированию неудовлетворенности школьников по причине расхождения содержания многих текстовых задач по математике с окружающей их реальностью, поэтому формируется потребность решения актуальных для современной жизни текстовых задач.

Данная учебная потребность старшеклассников требует удовлетворения, а это создает небходимость в возникновении новых типов текстовых современного типа, направленных на развитие их избирательных познавательных интересов.

Таким образом, в данном параграфе нами были рассмотрены психолого-педагогические особенности старшеклассников современной российской общеобразовательной школы.

1.4 Анализ проведенных исследований и опыта работы учителей математики по обучению решению текстовых задач на работу и производительность в общеобразовательной школе

В данном параграфе представим результаты проведенного исследования по обучению школьников решению текстовых задач, в частности задач на работу и производительность, в контексте в частности.

Так, в теории и методике обучения математике вопросу методики обучения решению текстовым задачам посвящены труды В.А. Далингера [16], Е.С. Канина и Ф.Ф. Нагибина [22], Л.С. Капкаевой [25], В.И. Крупича [35], М.В. Лурье [40], Д Пойа [58], А.В. Рудника [67], Л.М. Фридмана [85-91], А.В. Шевкина [99-101], В.П. Добрицы [19] и других.

Опишем результаты их исследований подробнее.

В.А. Далингер подчеркивал, что решение текстовых задач формирует у учащихся предметные и общеинтеллектуальные умения и навыки, навыки учебно-познавательной деятельности и самообразования. Он особо отмечал, что решение текстовых задач формирует универсальные учебные действия. Анализ, который провел Виктор Алексеевич, позволил выявить те просчеты учителей и недостатки учебников по математике, которые тормозят процесс формирования у учащихся умения решать текстовые сюжетные задачи на нужном уровне. Главная причина состоит в том, что при решении задачи учебно-познавательная деятельность учащихся направляется учителем, главным образом, на получение ответа на вопрос задачи, в ущерб ознакомлению школьников с методами и способами рассуждений, лежащих в основе поиска решения. Учителем не симулируется постоянный анализ обучающимися своей деятельности при решении задачи, в результате чего эта деятельность ими не осознается. Поверхностные, формальные знания у учащихся по математике возможны, прежде всего, там, где вся работа строится вокруг решения только готовых задач. Вот почему полезно предлагать школьникам задания на составление задач по задачным ситуациям. Составление задач способствует формированию у учащихся умения работать с текстом, задавать вопросы, выделять главное; их активное участие в постановке задачи приводит к более активной работе над ней. Одно из главных назначений такой работы состоит в том, что происходит соединение анализа и синтеза [16].

Е.С. Канин и Ф.Ф. Нагибин акцентировали особое внимание на методическую неразработанность заключительного этапа решения текстовых задач, в структуре которого данные исследователи отмечали следующие важные этапы: обсуждение задачи и ее решения, поиски и осуществление иных способов решения данной задачи и выбор лучшего варианта решения, формулирование и решение иных задач, «порожденных» ранее решенной, полезные выводы о проделанной работе [22].

Л.С. Капкаева разработала новый методический подход на основе интеграция алгебраического и геометрического методов посредством двух способов: путем сочетания данных методов или связи их в одном методе. Данная интеграция, по ее мнению, проявляется в следующих формах: совокупности алгебраических и геометрических методов решения одной и той же задачи, упорядоченности данных методов, организации (когда в объединении методов появляются связи) и системы, представляющей собой хорошо организованное (органическое) множество алгебраических и геометрических методов или их приемов, образующее целостное единство. Модель интеграции алгебраического и геометрического методов реализуется в учебном процессе посредством задач, объединяемым в блоки по определенным принципам, таким как: принцип целостности, то есть наличия в блоке алгебраических и геометрических задач; решения каждой задачи алгебраическими, так и геометрическими методами или одним методом, включающим алгебраические и геометрические приемы; интеграции одинаковых методов; использования одинаковых способов интеграции и другие [24].

В.И. Крупич провел систематизацию задач по степени возрастания сложности их структур и дал количественную оценку сложности задачи. Кроме этого, он впервые ввел понятие основного отношения, которое дало возможность выделить структурный элемент задачи [35].

Патрик Томпсон предложил использовать систему взаимосвязанных заданий при изучении тригонометрии в школах, при этом он обосновал, что данный подход можно применять и при решении текстовых задач [111].

М.В. Лурье разработал систему текстовых задач на составление уравнений и подробно разобрал технику их решений традиционным и нетрадиционными для средней школы методами [40].

Достаточно фундаментальным методическим трудом в области обучения решению текстовых задач является учебное пособие для учителей Дж. Пойа «Как решать задачу. Пособие для учителей». В этой книге дается психологическо-педагогический анализ проблемы решения математической задачи и предлагается определенная общая методика обучения решению задач.

Лейтмотивом методики Д. Пойа служит мысль о необходимости привития учащимся наряду с навыками логического рассуждения также прочных навыков эвристического мышления. Свою конкретизацию эта установка получает в тщательно продуманной системе («таблице») стереотипных указаний (выраженных либо в форме советов-рекомендаций, либо в форме наводящих вопросов), посредством которых учитель может привести в действие и эффективным образом направить усилия ученика, затрудняющегося самостоятельно начать или продолжать решение задачи. Систематическое применение учителем данного метода должно способствовать усвоению последнего самим учащимся, т.е. развитию математической самостоятельности учащегося [58].

А.В. Рудник в качестве авторского подхода к повышению эффективности обучения решению текстовых задач метод пере переформулирования текста задачи как путь отыскания её решения [67].

К. Чен обосновывала необходимость использования нестандартных методов решения текстовых задач через использование двух типов доказательств при решении «правильное доказательство» и «неправильное доказательство», которые в своей совокупности получили название «парадокса доказывания». Автором данного метода считается японский математик Шиничи Мочизуки [106].

Безусловно, одним из наиболее значимых методических результатов в теорию, методологию и практику решения текстовых задач является научное наследие Л.М.Фридмана [85-91]. Он справедливо полагал, что «культура решения задачи заключается в том, что поиск решения совершается на базе глубокого и всестороннего предварительного анализа задачи» [86, с. 251].

Обобщая накопленный отечественный опыт обучения школьников решению текстовых задач, Л.М. Фридман, справедливо отмечал, что «большинство выпускников школ так и не научились, в должной степени, решению текстовых задач и встретивших с задачей не столько трудной, а задачей малознакомого и незнакомого вида, не знаю, как к ней подступиться, с чего начать решение и после нескольких неудачных попыток решить такую задачу прекращают это «безнадежное» дело со словами: «А мы такие задачи не решали». Автор полагал, что главная причина такой ситуации заключается в том, что традиционная методика обучения школьников решению текстовых задач малоэффективна, потому что ее структура не способствует активизации креативного математического мышления у школьников в процессе решения нестандартных и малоизвестных задач. В чем суть традиционной методики? Если говорить кратко, то большинство школьных учителей идут по многолетнему «проторенному» методическому пути. Изучив, какой-либо теоретический раздел школьного курса математики, учитель самостоятельно решает определенный тип текстовых задач на применение изученной теории, затем несколько подобных задач решаются школьниками в классе при помощи учителя и после этого самостоятельно решается большое количество подобных задач в процессе выполнения домашней работы для «закрепления» полученных навыков [90, с. 108].

К сожалению, одной из причин данной многолетней негативной ситуации заключается в том, что до сих пор большая часть учителей математики, методистов и даже ученых-педагогов, довольно упрощенно понимают роль текстовых задач в школьном курсе математики и воспринимают их лишь как средство обучения математике, а по Л.М . Фридману функции текстовых задач намного шире, а именно при их решении у учащихся осуществляется:

а) формирование мотивации к учебной деятельности, интереса и склонности к этой деятельности;

б) иллюстрация и конкретизация изучаемого материала;

в) выработка устойчивых навыков и умений;

г) оценка учебной деятельности школьников;

д) получение школьниками новых знаний [90, с. 109-110].

Реализация всех вышеперечисленных функций текстовых задач должны привести к формированию главному, с точки зрения Л.М. Фридмана умению у школьников: формирование общего подхода, общего умения решать любые задачи. Ведь, частные способы решения отдельных видов задач на основе алгоритмов, изучаемых в отдельных разделах школьного курса математики могут быть со временем забыты, а вот общее умение, общий подход к решению любых типов задач должен сохраниться у каждого выпускника на всю жизнь. Ибо общий подход к решению любых математических задач, по сути дела, формирует модель разумного подхода к решению любых бытовых, научных, технических и экономических задач, которые будут встречаться старшекласснику на протяжении всей его жизни. Ведь жить-это значит решать задачи [90, с. 111].

Помимо Л.М. Фридмана, по нашему мнению, не менее значимый вклад в теорию, методику и практику обучения школьников решению текстовых задач внес А. В. Шевкин, который является автором большого количества печатных научных трудов по данной тематике [99-101], а также автором специализированного математического сайта www.shevkin.ru, на котором представлено значительное количество методических разработок и практических материалов в области решения текстовых задач [98].

В.П Добрица. и А.Ж. Садыкова обосновали использование метода компрессивного обучения при решении текстовых задач. Применение данного метода позволит учащимся значительно ускорить процесс и количество изучаемого материала, что позволит решать текстовые задачи в более сжатые временные сроки, решая проблему необходимости решения текстовых задач в рамках ЕГЭ и других экзаменационных испытаний [19].

Авторами «под компрессивным обучением понимается технология, позволяющая за ограниченное время усвоить значительный объем материала и которая включает в себя комплексное использование таких направлений как развитие памяти, внимания, технику быстрого чтения, умения анализировать текст, устанавливать взаимосвязи между понятиями, выделять новую смысловую информацию и необходимый для изучения материал, умелое использование информационных систем, технических и информационных средств обучения» [19, с .35].

В основе компрессивного обучения решению текстовых задач по математике лежат следующие взаимосвязанные этапы:

- ускоренное чтение исходного содержания текстовой задачи;
- выявление понятий, отношений и смысловых единиц текстовой задачи;
- исследование текста задачи на энтропийность, то есть выделение уже известных понятий и новых, с которыми старшеклассник не встречался ранее;
- выявление взаимосвязи между известными и неизвестными понятиями;
- актуализация (повторение) ранее изученных понятий, имеющихся в условии текстовой задачи;
- анализ возможной значимости новых понятий;

– формулировка целей запоминания.

Другой прогрессивной технологией обучения решению текстовых задач на работу и производительность является «кейс-технология», которая в основу развития навыков решения таких задач взяла использование максимально возможного широкого спекта практических ситуаций (кейсов) с которыми должны ознакомиться учашиеся и научиться разрешать проблемы, описанные в них. Годом «рождения» кейс-технологии принято считать 1921 год, когда были опубликованы первые подборки кейсов Гарвардского университета [112]. В дальнейшем, американская модель кейс-обучения была модернизирована в Великобритании в Манчерстерской школе бизнеса, которая не только обучала студентов по «статичным» кейсам, описывающим прошлые ситуации, но и «внедряла» обучающихся в реальные компании для разбора конкретных «живых» кейсов в процессе работы [108]; [112].

Кроме того, опишем ряд диссертационных исследований 2006-2008 гг. (Н.П. Быковой [6], С.Р. Мугаллимовой [49], А.А. Смирновой [76]), в которых также раскрываются некоторые методические аспекты обучения решению текстовых задач.

Н.П. Быкова обосновала целесообразность и выявила возможности использования графового моделирования как средства оптимизации межпредметных связей в процессе обучения учащихся решению алгебраических и физических текстовых задач в условиях преемственности. На основе анализа теории педагогических измерений она разработала и реализовала на конкретном содержании технологию косвенного измерения сложности решений текстовых задач по шкале порядка на основе метода графового моделирования. Кроме этого, на основе структурного анализа систем задач в сборниках задач по алгебре и физике для 8-10 классов средней школы ею был проведен сравнительный анализ сложности структур решений алгебраических и физических текстовых задач, а также была осуществлена систематизация текстовых задач по соответствующим рангам сложности, выделены критерии формирования рангов сложности [6].

С.Р. Мугаллимова обосновала место и содержание эвристических процедур в творческой учебно-познавательной деятельности, направленной на разрешение проблемных ситуаций и предложила авторский подход к определению понятия «эвристический прием», к построению системы эвристических приемов и к разработке методики их формирования в процессе обучения решению математических задач, разработала систему эвристических приемов с учетом действий, выполняемых в процессе поиска решения задачи [49].

А.А. Смирнова разработала метод варьирования текстовых задач по математике как средство повышения качества знаний учащихся. Она полагала, что если в содержание учебного материала включить цепочки задач, сконструированные с помощью метода варьирования текстовых задач, организовать работу с ними в соответствии с разработанными уровнями осознанности знаний, то это позволит повысить уровень осознанности и прочности знаний учащихся [76].

Вместе с этим, некоторые методические аспекты обучения решению текстовых задач, в частности задач на работу и производительность, отражены в исследованиях В.Н. Фрундина [20], Ю.Н. Кашициной и М.В. Васильевой [28], В.С. Лебедева [37], Л.А. Никитиной [52].

Ю.Н. Кашицина разработала методику обучения решению текстовых задач по математике с использованием средств ИКТ на основе программы: «Математика на компьютерах». В отличие от классических методов работы с текстовыми задачами «Математика на компьютерах» позволяет построить наглядную модель условия задачи, что способствует более эффективному поиску правильного решения задачи [28].

Л.А. Никитина отмечала, что наименее разработанными остаются приемы вовлечения учащихся в совместную деятельность при решении текстовых задач, так как организация работы над ней сводится к выполнению определенных этапов, где главной целью выступает формирование умения решать задачи определенных типов. На основе проведенных исследований ей были предложены методические рекомендаци, соблюдение которых поможет учителю изменить свою позицию на уроке математики при решении текстовых задач, а также включить детей в совместную деятельность. К числу главных рекомендаций она отнесла:

- создавайте условия для инициатив учащихся, поддерживайте и развивайте их;
- включайте в работу разные варианты схем, в том числе и неверные;
- создавайте проблемные ситуации;
- предоставьте школьникам возможность самим выбирать задачу для решения;
- при планировании урока тщательно продумывайте приемы работы на этапе рефлексии;
- при решении текстовых задач включайте в урок групповые формы работы [52].

В направлении использования метода совместной деятельности также работала и Г.А. Цукерман, которая обосновывала метод совместной деятельности при решении текстовых задач как фактор личностного развития ее участников, обеспечивающий интеллектуальное развитие (учебное сотрудничество), рост познавательной активности и объема усваиваемого материала; увеличение самокритичности ребенка и приобретение им социальных навыков [94].

По мнению Г.А. Цукерман, совместная деятельность – это фактор личностного развития ее участников, обеспечивающий интеллектуальное развитие (учебное сотрудничество) возрастает познавательная активность и объем усваиваемого материала; растет самокритичность ребенка; приобретает социальные навыки [94, с. 41].

Г.Н. Прозументова определяет совместную деятельность как деятельность, в которой происходят актуализация, обогащение, расшифровка, исследование, истолкование, накопление и порождение личного опыта участников совместной деятельности. Совместная деятельность рассматривается Г.Н. Прозументовой не с точки зрения обмена мирами, а с точки зрения участников разных миров по построению общего [62].

Последующие вопросы мы раскрыли, опираясь на модели организации совместной деятельности (авторитарная, лидерская, партнерская), выделенные Г.Н. Прозументовой. Каждая из этих моделей оформляет свое содержание образования, проявляется разное качество связей участников совместной деятельности, разные типы педагогической деятельности и, соответственно, проявляется разная позиция педагога. Авторитарная модель реализует нормативные связи участников, при которых педагог выступает в позиции руководителя, а дети в позиции исполнителей [53]. Учитель реализует заранее запланированную схему урока, главным выступает формирование знаний, умений и навыков, мнения и инициатива детей остаются в стороне, они не важны. Лидерская модель совместной деятельности – это ценностные связи участников (педагог – лидер, ребенок – соисполнитель), которые реализуются через ситуации решения общих задач (проблем). «Культура лидерства – это культура формулирования проблем, культура совместного обсуждения способов их решения, их реализация в групповых формах взаимодействия, анализ эффективности индивидуальных и совместных действий» [53, с. 9]. В лидерской модели педагог является организатором постановки значимых не только для него, но и для детей целей, ценностей совместной деятельности, «втягивает», вовлекает детей в образование совместной деятельности в реализацию ее целей [53]. Партнерская модель строится на личностных связях участников, когда педагог находится в двойственной позиции организатора-участника совместной деятельности. Партнерская модель совместной деятельности – это появление взрослых и детей в качестве участников ее образования. Такая модель совместной деятельности характеризуется тем, что педагог берет на себя функции посредника и занимает позицию партнера (одного из нас) в совместной деятельности. Педагог вовлекает детей в образование совместной деятельности. Партнерская модель - это влияние всех участников совместной деятельности на создание форм организации, выработку и обоснование норм ее организации [53].

В.Н. Фрундин и Ю.С. Затолокина предложили индивидуально-дифференцированный подход в обучении решению текстовых задач в курсе алгебры, который по мнению автора, должен опираться на учет ранее выделенных индивидуальных особенностей, которые положены в основу дифференциации. Учет этих особенностей будет способствовать повышению качества обучения. Для того чтобы осуществить качественное индивидуальное и дифференцированное обучение решению тестовых задач, необходимо, по мнению автора, использовать специальным образом спроектированные диагностические методики изучения индивидуальных особенностей учащихся. Ею была разработана компьютерная диагностическая система «Тест на определение типа мышления», которая представляет собой систему сбора, хранения и представления психолого-педагогической информации об ученике. Тест был разработан по методике Дж. Брунера на определение типов мышления и уровня креативности [20].

В зарубежной литературе также уделяется внимание применению индивидуального подхода в обучении школьников математике [109].

В.С. Лебедев считал, что то, что в школьном курсе математики решение текстовых задач считается одним из самых сложных для восприятия и усвоения учащимися разделов, связано с неразработанностью аналитического аппарата, который бы позволял рассматривать любую текстовую задачу как систему, в независимости от того, является ли она задачей на движение, на работу, на смеси или сплавы, на проценты и т.д. Структура системы определяется характером взаимосвязи между элементами. Таким образом, для полного раскрытия системы задачи он предлагал определить взаимосвязи между:

а) компонентами каждого участника в каждом состоянии. Назовем их вертикальными взаимосвязями;

б) компонентами участников в каждом состоянии. Назовем их горизонтальными взаимосвязями или уравнивающими;

в) компонентами каждого участника в различных состояниях;

г) компонентами участников в различных состояниях [37].

Е.И. Шпитальский обосновал необходимость научить учеников самостоятельно пользоваться аналитическим и синтетическим способами рассуждений, а именно:

- синтетический способо мышления: от данных к искомому;
- аналитический способ мышления: от вопроса к данным.

При этом он придавал огромное значение обучению умению сопровождать рассуждения при решении текстовых задач графическими схемами. Однако, автор предупреждал, что данный способ не является алгоритмом для решения текстовых задач, а просто дает схему рассуждений ученика [102].

Аналогичный подход интеграции алгебраических методов и геометрических был использован М.Г. Кац посредством использования графиков при решении задач на составление уравнений [27].

Д.И. Гаткевич акцентировала свое научное внимание на необходимость формирования общих способой решения задач у школьников, что позволит им использовать универсальный подход к их успешному решению, независимо от содержания конкретной задачи [10]. В свою очередь, В.Г. Гульчевская обосновывала необходимость формирования рациональных способой решения задач подростками, с учетом особенностей их возрастного развития и накопленного жизненного опыта [13].

Отметим, что теоретические аспекты обучения решению текстовых задач, а также задач на работу и производительность в начальной школе описаны в исследованиях Т.Е. Демидовой [18], Н.Б. Истоминой [19], И.В. Шадриной [95].

Т.Е. Демидова в своем учебном пособии обобщила накопленный теоретический и практический опыт решения текстовых задач, характеризовала понятие `текстовая задача`, ее структуру, привела различные классификации текстовых задач, а также этапы работы над задачей, детально разобрала приемы, помогающие осуществлять эти этапы. Кроме этого, ею были представлены основные методы решения текстовых задач (арифметический, алгебраический, геометрический, логический и практический). Изложение каждого метода сопровождалось разбором типичных задач, также были приведены задачи для самостоятельного решения [18].

По мнению Н.Б. Истоминой, средством организации деятельности учащихся, направленной на формирование умения решать задачи, являются специальные обучающие задания, включающие методические приемы сравнения, выбора, преобразования, конструирования [19].

В частности, И.В. Шадрина отмечает, что обязательным условием овладения умением осуществлять поиск решения задачи (выбор арифметического действия) является постепенное усложнение ситуаций (деятельностных контекстов), требующих применения действий сложения, вычитания, умножения, деления, с помощью которых устанавливаются новые связи с уже имеющимся знанием. Ситуация, описанная в задаче, может быть наглядно проиллюстрирована графической моделью, что значительно обогащает умственное развитие учащихся [95].

Вместе с этим, теоретические аспекты обучения решению текстовых задач рассмотрены были и в работах психологов. Так, Л.Л. Гурова исследовала взаимоотношение в мышлении семантики и логики с точки зрения использования субъектом информации задачи и логического аппарата ее решения. Эта проблема, по ее мнению, является конкретизацией общей проблемы соотношения логического и психологического в мыслительном процессе, которую Лидия Леонтьевна считала генеральной проблемой психологии мышления, актуальной для его теории и многих областей практики.

Поэтому она считала важным проведение психологического анализа процесса решения задачи школьниками [14].

Следует отметить, что теоретико-методологическое наследие в области обучения старшеклассников решению текстовых задач получило свое органическое развитие в практическом опыте школьных учителей, среди которых считаем необходимым выделить следующих педагогов-практиков.

Т.А. Пидоря разработала авторскую систему работы для учителей математики по развитию смыслового чтения в ходе обучения решению текстовых задач. В основе ее системы лежит система работы по обучению решения задач при помощи таблиц, в которых излагается краткая запись условия задачи, вводятся неизвестные. Основные особенности предлагаемого подхода связаны с тем, что главная задача сфокусирована на тщательном прочтении предлагаемого текста. Чтобы чтение стало осмысленным, необходимо чтобы оно сопровождалось дополнительным заданием, например, выбором ключевых слов, поэтапным заполнением таблицы. Данные приѐмы развивают в ученике навык работы с письменным текстом, учат анализировать данные, логически структурировать информацию, выбирать главное, а также повышают качество учебной деятельности в целом [55].

Кочегуро Е.Н., учитель математики МАОУ "Общеобразовательный лицей «АМТЭК» г. Череповец Вологодской области в 2021 году разработала рабочую программу факультативного курса «Решение нестандартных задач по математике», рассчитанную на 28 учебных часов для старшеклассников 10-11 классов [34].

Крючкова Л.Н., учитель математики МАОУ Гимназия №11 «Гармония», предложила использование графических схем при решении задач на работу и производительность. Данный педагог обосновала, что текстовые задачи настолько разнообразны, что порой трудно увидеть в предлагаемой задаче уже знакомую. Чтобы научить решать задачи надо сформировать умение выявлять их математическую суть. Этому помогает моделирование условия задачи с помощью графических схем. Таким образом, научить решать задачи — научить моделированию условия задачи и переводу его с языка русского на язык математический. Графическая модель задачи помогает лучше понять условие, отношения величин и облегчает процесс составления уравнений и их систем [36].

В журнале «Математика в школе» были широко представлены типы задач на работу и производительность, решаемых различными методами. В частности, статья Т.А. Маланичевой «О решении задач на работу» была посвящена различным вариантам математического моделирования текстовых задач на работу и движение [42], статья Л.А. Сафоновой «О действиях, составляющих умение решать текстовые задачи» раскрывала сущность основных действий учащихся, которые позволят эффективно решать текстовые задачи на работу [71]. Статья А.В. Шевкина «О задачах на «работу» и не только о них» была посвящена различным типам текстовых задач, включая задачи на работу, которые могут использоваться для развития логического мышления у школьников [110], в дальнейшем в учебно-методическом журнале «Математика», Александр Владимирович представил авторский подход перехожа от задач на совместную работу к задачам на наибольшее и наименьшее значение при обучении школьников решению текстовых задач [101]. Кроме этого, в Б.П. Рязанов в своей статье раскрыл основные приемы решения задач на совместную работу [68], а А.А. Щепоткин описал алгоритм решения задач на тему «Работа» [103].

Американский опыт обучения математике в средней и старшей школе достаточно полно описан в книге Д. Брахиера, который особое внимание уделял самостоятельной и экспериментальной работе старших школьников на уроках математики [107].

С точки зрения задачного материала, наиболее полный набор текстовых задач на работу и производительность представлен в федеральных учебниках, анализ, которых представлен в разделе 1 данного методического проекта, а также на сайте «Решу ЕГЭ» [65], на котором представлены текстовые задачи для подготовки ЕГЭ по математике. В разделе 9 представлена 51 текстовая задача на работу (27 для базового уровня и 24 для профильного).

На сайте «Репетитор по скайпу» [64] представлены текстовые задачи с решениями по различным темам. В обшей сложности на данном сайте представлено более 200 текстовых задач, в том числе на работу и производительность.

Нестандартные задачи на работу и производительность встречаются в олимпиадных заданиях по математике. Данные задачи имеют место на сайте «Интернет-проект МЦНМО «Задачи» коллектива авторов под руководством И.В. Ященко [105]. Такие задачи требуют для решения развитой математической культуры - умения грамотно строить рассуждения. Для обучения старшеклассников решению таких задач учитель математики Бердовская С.В. МАОУ лицей «Морской технический», г. Новороссийск, Краснодарский край, предложила использование метода «Оценка плюс пример» при решении нестандартных задач по математике [2].

Анализ проведенных исследований и опыта работы учителей математики по обучению решению текстовых задач на работу и производительность в общеобразовательной школе показал, что несмотря на достаточно длительный историко-педагогический опыт их использования в отечественном образовании эффективность накопленного опыта, старшеклассники испытывают затруднения при их решении в силу следующих основных причин:

- формальный подход многих российских учителей к процессу обучения решению текстовых задач;
- использование текстовых математических задач в качестве вспомогального инструмента при изучении определенных тем в рамках программы старших классов по алгебре и геометрии;
- недостаточно полное использование развивающих и воспитательных функций текстовых математических задач, что особенно важно при

формировании профессиональной траектории будущих выпускников российских школ;

– несоответсвие текстового содержания математических задач жизненным интересам российских школьников и окружающей их современной действительностиж

– неэффективное использование форм групповой работы и совместного сотрудничества учителя и старшеклассников при самостоятельном моделировании содержания тектовых задач.

Выводы по первой главе:

1. На основе результатов теоретического анализа сущности понятия текстовой задачи и ее роли в обучении математике было установлено, что несмотря на значительное использование термина «задача» как в математике, так и в других науках и повседневной жизни, в настоящее время существуют разные трактовки понятия «задача»; мы отождествляем понятие «задача» с понятием «упражнение»; под задачей понимаем «всякую знаковую модель проблемной ситуации, считая понятие проблемной ситуации исходной» [87]; текстовая математическая задача на работу и производительность представляет собой формализованную в виде текста модель проблемной ситуации в области живого или овеществленного труда, которая требует дать количественную оценку его отдельных компонентов с использованием математических методов. При этом живой труд представляет собой целесообразную деятельность людей и механизмов, направленную на выполнение определенных действий, связанных с выполнением определенной работы раздельным или совместным способом, а овеществленный труд представляет собой результат живого труда, в материализованной форме.

2. Анализ видов текстовых задач на работу и производительность и их места в структуре школьного курса математики старших классов показал, что впервые учащиеся знакомятся с ними в начальной школе. Базовые знания и умения, необходимые для решения задач на работу и производительности школьники получают при изучении математики в 5-6 классах, а затем при изучении алгебры в 7-9 классах. Старшеклассники решают задачи на работу и производительность в рамках материала для повторения, который содержится в учебниках алгебры и начал математического анализа 10-11 классов или в рамках изучения тем, где задачи на работу и производительность используются как вспомогательный материал.

3. В результате изучения содержания федеральных учебников по алгебре и началам математического анализа для 10-11 классов профильного уровня было выявлено, что наиболее приемлемым учебником для обучения старшеклассников решению задач на работу и производительность являются учебники Колягина Ю.М., Ткачева М.В., Федоровой Н.Е., Шабунина М.И. Рассмотрение данных задач в их учебнике для 10 класса представлено в главах, посвященным повторению курса алгебры 7-9 классов, и Главе 3 «Многочлены. Алгебраические уравнения», § 10 «Системы уравнений». Кроме этого, с точки зрения типологии текстовых задач на работу и производительность и их количества данный учебник, на наш взгляд, является наиболее оптимальным по следующим причинам:

– учебник входит в федеральный перечень учебников, рекомендованных Министерством Просвещения Российской Федерации к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ среднего общего образования образовательных учреждений;

– в данном учебнике наиболее полно раскрыты основные типы задач на работу и производительность: задачи на раздельную и совместную работу;

эти задачи представлены в рамках повторения курса алгебры 7-9 классов на углубленном уровне, а именно в темах: «Линейные уравнения и системы уравнений», «Квадратные уравнения», «Системы уравнений» и необходимы для подготовки к ЕГЭ по математике профильного уровня;

– в учебнике наиболее полно раскрыто содержание учебного материала.

4. В результате исследования психолого-педагогических особенностей старшеклассников современной российской общеобразовательной школы было выявлено, что методические сложности обучения старшеклассников решению текстовых задач на работу и производительность помимо методических и организационно-учебных особенностей, на наш взгляд, усугубляются психолого-педагогическими специфическими характеристиками школьников старшего возраста, которые предопределяют не только формы и методы восприятия ими сущности текстовых задач, но и зачастую обуславливают особый алгоритм их мотивационного и воспитательного воздействия на старшеклассников в процессе их решения.

5. Текстовые задачи по математике несут в себе не глубокое смысловое и жизненное значение для старшеклассников, поскольку позволяют им ознакомиться с различными типами жизненных ситуаций. Однако, к сожалению, даже в современных учебниках содержание многих текстовых задач является давно устаревшим. Это приводит к формированию неудовлетворенности школьников по причине расхождения содержания многих текстовых задач по математике с окружающей их реальностью, поэтому формируется потребность решения актуальных для современной жизни текстовых задач. Данная учебная потребность старшеклассников требует удовлетворения, а это создает необходимость в возникновении новых типов текстовых математических задач современного типа, направленных на развитие их избирательных познавательных интересов.

6. Анализ проведенных исследований и опыта работы учителей математики по обучению решению текстовых задач на работу и производительность в общеобразовательной школе показал, что несмотря на достаточно длительный историко-педагогический опыт их использования в отечественном образовании эффективность накопленного опыта, старшеклассники испытывают затруднения при их решении в силу формального подхода многих российских учителей к процессу обучения решению текстовых задач, использования текстовых математических задач в качестве вспомогального инструмента при изучении определенных тем в рамках программы старших классов по алгебре и геометрии, недостаточно полного использования развивающих и воспитательных функций текстовых математических задач, что особенно важно при формировании профессиональной траектории будущих выпускников российских школ, неэффективного использования форм групповой работы и совместного сотрудничества учителя и старшеклассников при самостоятельном моделировании содержания текстовых задач.

Глава 2 Методические основы обучения решению текстовых задач на работу и производительность в старших классах общеобразовательной школы

2.1 Методические рекомендации по обучению старшеклассников решению текстовых задач на работу и производительность

Анализ научно-методической литературы показал, что процесс обучения решению текстовых задач на работу и производительность в старших классах общеобразовательной школы имеет определенные методические особенности. Старшеклассники испытывают затруднения при их решении.

На основе анализа практического опыта обучению решению тектовых задач на работу и производительность, можно выделить их следующие отличительные особенности:

- при решении задачи необходимо придерживаться одинаковых единиц измерения при нахождении значений величин;
- зависимость между величинами при решении даных задач выражается формулой: $A = P \cdot t$, где A – это работа, P – производительность труда (мощность), t – время;
- если в текстовой задаче не задан объем выполняемой работы, то вся работа принимается за единицу;
- анализ условия задачи целесообразнее показывать в табличной форме;
- если в задаче имеет место совместная работа, то сумма производительностей работников равна общей производительности;
- задачи на работу и производительность чаще всего решаются в старших классах на основе составления уравнения или системы уравнений (алгебраическим методом).

Методика обучения решению текстовых задач на работу и производительность старшеклассников общеобразовательной школы представляет собой взаимосвязанную совокупность форм, методов и средств обучения.

Для обучения старшеклассников решению текстовых задач на работу и производительность у них необходимо формировать:

- умение анализировать текст задачи;
- умение определять тип задачи и проводить поиск определенного метода ее решения;
- умение оформлять решение задачи, реализуя план ее решения на основе выбранного метода;
- умение осуществлять проверку решения задачи на основе изучения ее найденного решения, формулировки выводов и запись ответа к ней.

Обучение учащихся решению текстовых задач – одна из основных методических проблем.

По мнению Т.А. Ивановой, у обучающихся надо формировать умение решать не только стандартные, но и нестандартные задачи. Вместе с этим, «обучение решению задач состоит в формировании у учащихся умений выполнять отдельные действия, входящие в аналитико-синтетическую деятельность по решению задач, составлять цепочки действий, приводящие к решению, в выделении, накоплении и систематизации эвристик по мере изучения материала, в приобщении учащихся к решению и составлению задач» [21, с. 173].

Методику обучения решению текстовых задач на работу и производительность в старших классах общеобразовательной школы можно структурно разделить на четыре последовательных этапа:

Первый этап. Обучение умению анализировать текст задачи.

Н.Л. Стефановой, Н.С. Подходовой [46, с. 105-106] указывается, что «одна из трудностей анализа текста задачи состоит в том, что текст неодинаково воспринимается и понимается разными людьми».

З.П. Матушкина [43, с. 10] в качестве умения анализировать текст задачи, необходимого для формирования умения решать задачи у школьников предлагает:

- «внимательно читать задачу;
- проводить первичный анализ текста задачи;
- оформлять краткую запись текста задачи;
- выполнять чертежи, рисунки по тексту задачи».

Для формирования умения анализировать текст задачи автором определены ряд приемов, например: использование образцов чтения для формирования умения читать текст задачи, изменение числовых данных или сюжета задачи, или числовых данных и сюжета задачи для усвоения содержания задачи; формирование всевозможных условий к данному вопросу задачи, составление задачи по ее вопросу или рисунки (чертежу), или по ее краткой записи; установление соответствия между краткой записью задачи и текстом задачи и др.

Т.А. Иванова под умением анализировать условие задачи понимает умение «выделять данные, требования, соотносить данные с требованием» [21, с. 173].

Автор приводит такие способы предъявления задачи учащимся, как:

- «чтение задачи вслух;
- чтение задачи «про себя» с последующими ответами на вопросы учителя;
- выполнение заданий под диктовку учителя (математический диктант);
- «чтение» по готовому рисунку (таблице)» [21, с. 186].

Т.А. Ивановой выделены умения (элементарные действия), входящие в анализ текста задачи:

- «устанавливать количество ситуаций (элементов), имеющихся в задаче,
- выделять величины в тексте;
- выделять предложения, выражающие функциональные связи (зависимости) между величинами, и фиксировать эти связи;

– выделять и фиксировать искомые величины» .

Анализ текстовой задачи завершается схематической записью - моделью текста задачи:

– «линейчатой или столбчатой диаграммой,

– отрезком с составляющими его частями,

– таблицей,

– отрезком или лучом с положением на нем движущихся объектов в различные моменты времени,

– графиком равномерного движения и другими объектами» [21, с. 186].

Известо, что краткая запись условия задачи способствует выбору определенного метода или способа решения.

Учитель математики Т.А. Пидоря выделила методические особенности формирования и развития смыслового чтения в ходе обучения решению текстовых задач в школьном курсе математики, где основное внимание уделяет при анализе текста задачи табличному способу записи ее условия и введению неизвестных. На этапе анализа текста задачи автор рекомендует основное внимание уделять тщательному прочтению предлагаемого текста задачи. Приведен план работы по решению текстовой задачи:

«1. Первое чтение, после которого отвечаем на вопросы:

– Кто «действующие лица и исполнители»?

– Какие ключевые слова мы выделим для решения задачи?

2. Рисуем карандашом и линейкой таблицу, чаще всего 3 х 4. Вписываем данные первого чтения» [55].

«3. Второе чтение. Что необходимо найти? Определяем главный вопрос в задаче. Ставим вопросительный знак в нужной клетке таблицы.

4. Третье чтение. Осмысленное. Выбираем данные задачи по каждому «исполнителю» и ключевому слову. Если не получается с первого раза повторяем чтение текста задачи. При необходимости второе и третье чтение можно менять местами либо объединить» [55].

«5. Если арифметическая задача, то определяем порядок действий, составляем план решения. Если задачу будем решать при помощи составления уравнения, то вводим неизвестное, заполняем все клетки таблицы и по последнему заполненному столбцу составляем уравнение.

6. Решение по действиям или решение уравнения.

7. Запись ответа. Проверка существования полученного ответа» [55].

Автор приводит примеры задач, направленные на выработку у обучающихся навыка работы с информацией в задаче.

Учитель математики Н.П. Петракова при обучении решению задач предлагает также использовать прием самостоятельного составления школьниками текстовых задач, так как «математическое творчество учащихся - это высшая форма самостоятельности их мышления»; … данный мыслительный процесс «позволяет учащимся задуматься о значимости каждого используемого слова в тексте задачи, о достаточности данных в задаче, о подборе ключевых слов, а, следовательно, ведет к развитию смыслового чтения у обучающихся» [54]. Автор также считает эффективным при обучении решению задач обращать внимание на применение смыслового чтения текста задач и схематической записи задачи в виде таблицы в соответствии с ФГОС среднего общего образования.

Итак, отметим, что в качестве схематической записи задачи на работу и производительность выступают таблицы при ее решении алгебраическим или арифметическим методами; при решении этих задач геометрическим методом могут использоваться двумерные диаграммы или графики, например, работы, выполненой разными субъектами. В схематической записи задачи в виде таблицы работа может быть принята за единицу, если в текстовой задаче не задан объем выполняемой работы. Наибольшие трудности у учащихся вызывают задачи на совместную работу. Схематическая запись задачи табличным способом, когда условие задачи оформляется в виде таблицы, и составление модели задачи (чаще всего уравнения или системы уравнений) нивелирует всю трудность задачи. Приведем пример задачи из учебника Ю.Н. Макарычева 8 класса и покажем схематическую запись задачи в виде таблицы 3, заполненной по условию и требованию задачи, на основе которой несложно составить модель задачи - уравнение. Данный тип задачи решается в качестве повторения и на уроках в старших классах.

Задача № 632. «При совместной работе двух кранов разгрузку баржи закончили за 6 часов. Сколько времени потребовалось бы каждому крану отдельно для разгрузки баржи, если известно, что первому крану для этого требуется на 5 часов больше, чем второму?» [41].

Таблица 3 - Пример схематической записи задачи в виде таблицы

	Производительность	Время, ч.	Объем выполненной работы
1 кран	? $\frac{1}{x+5}$	? на 5 больше, чем 2 кран $x+5>0$	1
2 кран	? $\frac{1}{x}$	? $x>0$	1
1 и 2 краны	$\frac{1}{6}$	6	1

Вместе с этим отметим, что при обучение старшеклассников анализу текста задачи на работу и производительность необходимо учитывать следующие аспекты:

а) обучение их пониманию сущности работы и производительности как ключевых дидактических единиц в данных задачах, которое связано с повторением учебного материала, изученного ими в курсе алгебры в 7-9 классах;

б) обучению правильному применению операций трансформации вербального содержания текста задачи на работу и производительность в невербальную форму;

в) обучение правильной формулировке учебной цели задачи на работу и производительность с точки зрения математической науки.

Так, обучение пониманию сущности работы и производительности как ключевых дидактических единиц в данных задачах представляет собой процесс конкретизации и уточнения имеющихся у старшеклассников знаний о работе и производительности, которые были иим получены в курсе алгебры в 7-9 классах. Главная трудность правильного понимания данных понятий у старшеклассников заключается в том, что данные понятия могут имеют двойственный смысл с точки зрения смысловой нагрузки в русском языке. В частности, понятие «работа» может трактовая с двух точек зрения: «работа как результат» и «работа как процесс». Аналогично, понятие «производительность», может трактоваться двойственно, с точки зрения соотнесения количества выполненной работы к разным периодам времени. Например, количество деталей, которые станок делает за 1 час может трактоваться как производительность данного станка в час, так и количество работы (деталей) которые может станок произвел за этот период времени. Для обучения старшеклассников правильному пониманию сущности работы и производительности как ключевых дидактических единиц в данных задачах в рамках нашей методики мы рекомендуем использовать демонстрацию учебных видео материалов, в которых описываются различные жизненные ситуации, связанные с работой людей или механизмов, в которых старшеклассникам предлагается выделить работу и производительность с математической точки зрения.

Данное обучение пониманию сущности работы и производительности как ключевых дидактических единиц в данных задачах мы рекомендуем проводить с учетом определенных характеристик.

По форме обучения:

- по количеству старшеклассников и характеру взаимодействия: групповая; фронтальная.
- по месту обучения: на уроке;

– по продолжительности: 10 мин.

По методам обучения:

– по характеру познавательной деятельности: объяснительно-иллюстративный: демонстрация;

– по компонентам деятельности: организационно-действенные: методы организации и осуществления учебно-познавательной деятельности;

– по дидактическим целям: методы закрепления знаний;

– по способам изложения учебного материала: диалогические (беседа);

– по источникам передачи знаний: наглядные (показ материала);

По средствам обучения:

– словесные: учебники, математические тексты;

– простые визуальные средства: графики, математические модели;

– механические визуальные средства: компьютер, проектор.

Обучение правильному применению операций трансформации вербального содержания текста на работу и производительность в невербальную форму мы рекомендуем проводить на основе обучения старшеклассников семантическому анализу текста задачи, под которым понимается процесс прочтения текста задачи с целью правильного определения его основных элементов: условие, известные данные, неизвестные данные, вопрос.

Данное обучение необходимо проводить с учетом определенных характеристик.

По форме обучения:

– по количеству старшеклассников и характеру взаимодействия: индивидуальная.

– по месту обучения: на уроках;

– по продолжительности: 10 мин.

По методам обучения:

– по характеру познавательной деятельности: объяснительно-иллюстративный: демонстрация;

– по компонентам деятельности: организационно-действенные: организация и осуществление учебно-познавательной деятельности;
– по дидактическим целям: методы закрепления знаний;
– по способам изложения учебного материала: монологические (объяснение);
– по источникам передачи знаний: практические (упражнения);

По средствам обучения:
– словесные: учебники, математические тексты;
– простые визуальные средства: графики, математические модели;
– механические визуальные средства: компьютер, проектор.

Обучение правильной формулировке учебной цели задачи на работу и производительность с точки зрения математической науки мы рекомендуем проводить на основе результатов семантического анализа текста задачи посредством формулировки неизвестных искомых данных задачи, которые нужно выразить в количественном виде.

Данное обучение необходимо проводить с учетом определенных характеристик.

По форме обучения:
– по количеству старшеклассников и характеру взаимодействия: коллективная;
– по месту обучения: на уроке;
– по продолжительности: 10 мин.

По методам обучения:
– по характеру познавательной деятельности: объяснительно-иллюстративный: беседа;
– по компонентам деятельности: организационно-действенные: организация и осуществление учебно-познавательной деятельности;
– по дидактическим целям: методы закрепления знаний;
– по способам изложения учебного материала: диалогические (беседа);

– по источникам передачи знаний: практические (упражнения);

По средствам обучения:

– словесные: учебники, математические тексты;

– простые визуальные средства: графики, математические модели;

– механические визуальные средства: компьютер, проектор.

Второй этап. Обучение умению определять тип задачи и проводить поиск определенного метода ее решения.

З.П. Матушкина [43, с. 10] в качестве умения определять тип задачи и проводить поиск определенного метода ее решения, необходимого для формирования умения решать задачи у школьников предлагает:

– «проводить вторичный (более детальный) анализ текста задачи: выделять данные и искомые, устанавливать связи между данными, между искомыми, между данными и искомыми;

– переводить словесный текст задачи на математический язык;

– устанавливать полноту постановки задачи;

– актуализировать теоретические знания, необходимые для решения задачи;

– осуществлять поиск и находить план решения задачи».

Т.А. Ивановой выделены умения (элементарные действия), входящие в поиск плана решения задачи [21, с. 188-190]:

1) «переводить отношения между величинами на язык равенств, уравнений, неравенств, их совокупностей и систем; выражать величины из полученных равенств; по заданному равенству устанавливать отношения между величинами;

2) записывать зависимости между величинами с помощью формул известных процессов и выражать величины из формул;

3) выбирать неизвестную (ые) величину (ы), через которую (ые) выражать другие величины (при решении задачи алгебраическим методом).

4) выбирать условие (я), на основе которого (ых) составляется уравнение (система уравнений) (при решении задачи алгебраическим методом)».

Действия 3 и 4 являются дополнительными при решении задачи алгебраическим методом.

Отметим, что при обучении решению стандартных текстовых задач на работу и производительность на уроках математики, где используются готовые алгоритмы, считаем целесообразным применять метод совместной деятельности как эффективный педагогический инструмент.

Так, в статье Л.А. Никитиной, И.С. Кукушкиной [52] отмечается, что, к сожалению, в большинстве российских школ учителя математики достаточно формально организовывают совместную деятельность со старшеклассниками, используя только отдельные ее элементы. Это приводит к тому, что все обучение решению текстовых задач, зачастую, сводится к определению типа текстовой задачи и подборе метода ее решения. Кроме этого при выборе формы работы при решении текстовых задач большинство учителей отдают предпочтение фронтальному характеру взаимодействия с учениками; в процессе обучения решению текстовых математических зада старшеклассники овладевают только предметными умениями, а метапредметные и личностные умения остаются малозадействованными; при решении текстовых задач учитель зачастую идет по стандартной схеме, алгоритму, который повторяется из урока в урок («читаем задачу, выделяем структурные компоненты, составляем схему, затем один ученик решает задачу у доски, остальные в тетради, записываем ответ»). При этом учащиеся остаются в стороне, вне деятельности, учитель не привлекает их к построению плана, к обсуждению способов решения задачи, к доказательству того или иного решения.

Вместе с этим, в зависимости от результатов формулировки неизвестных искомых данных текстовой задачи необходимо научить старшеклассников научить определять тип задачи.

Если неизвестная искомая величина работы выполняется отдельно (самостоятельно) человеком или механизмами, то данная задача является задачей на раздельную работу. Если неизвестная искомая величина работы выполняется совместно (в любой последовательности) группой людей или механизмов, то данная задача является задачей на сместную работу работу.

Если задача может быть решена старшеклассниками на основе общих правил и алгоритмов с помощью основных методов, изученных ими ранее в 5-9 классах средней школы, то такие задачи являются стандартными, в противном случае - они являются нестандартными.

Если искомой неизвестной величиной является количество работы, выполненной в любой (материальной или нематериальной) формах, то данная задача относится к задачам на нахождение работы. Если искомой неизвестной величиной является количество работы в любой (материальной или нематериальной) формах, выполненной за установленную единицу времени, то данная задача является задачей на на нахождение производительности.

В результате обучения определения типа задачи старшеклассники должны уметь ранжировать предлагаемые к решению задачи на следующие группы:

- стандартные задачи на раздельную работу;
- стандартные задачи на совместную работу;
- нестандартные задачи на работу и производительность.

На основе анализа условия задачи и определения ее типа старшеклассники должны выбрать метод решения задачи, который позволит найти неизвестную искомую величину наиболее простым способом.

К основным методам решения стандартных задач, в частности задач на работу и производительность относят: арифметический; алгебраический; геометрический.

В методической литературе также выделяются такие методы решения текстовых задач, как: логический; практический; комбинированный; проб и ошибок.

Методы решения нестандартных задач: выведение следствий; переформулирование; разбиение на подзадачи; введение нового элемента.

Обучение определению типа задачи и составлению плана ее решения мы рекомендуем проводить с учетом следующих характеристик.

По форме обучения:

- по количеству старшеклассников и характеру взаимодействия: коллективная;
- по месту обучения: на уроке;
- по продолжительности: 10 мин.

По методам обучения:

- по характеру познавательной деятельности: объяснительно-иллюстративный: беседа;
- по компонентам деятельности: организационно-действенные: организация и осуществление учебно-познавательной деятельности;
- по дидактическим целям: методы закрепления знаний;
- по способам изложения учебного материала: диалогические (беседа);
- по источникам передачи знаний: практические (упражнения);

По средствам обучения:

- словесные: учебники, математические тексты.

Проанализировав методический опыт учителей по обучению школьников решению текстовых задач различной тематики, отметим, что стандартные приемы и методы, рассмотренные нами в 1 главе нашей диссертационной работы, при решении нестандартных задач в целом и нестандартных задач на работу и производительность, к сожалению, не работают. Поэтому, решение нестандартных текстовых задач, как правило, вызывает у старшеклассников затруднения. Для того, чтобы разработать действенные рекомендации по обучению старшеклассников решению нестандартных задач разберем сущность этого понятия. В целом, базовым определением нестандартной задачи, мы считаем трактовку Фридмана Л.М, а именно: «Нестандартные задачи - это такие, для которых в курсе математики не имеется общих правил и положений, определяющих точную программу их решения» [86].

В целом, считаем возможным дать авторское определение нестандартной текстовой задачи на работу и производительность как задачи, у которой учащиеся не знают алгоритм решения и не знают какой учебный материал можно использовать.

Универсального подхода к решению нестандартных текстовых задач нет и быть не может, однако в целом уже накоплен некоторый опыт по решению нестандартных математических задач, который описан в книгах Д. Пойа "Как решать задачу» [58], "Математическое открытие"; Л.М. Фридмана и Е.Н. Турецкого " Как научиться решать задачу" [86]; Ю.М. Колягина "Учись решать задачу".

По мнению Л.М. Фридмана [86]; [89], процесс решения любой нестандартной задачи состоит в последовательном применении двух основных операций:

- «сведение (путем преобразования или переформулирования) нестандартной задачи к другой, ей эквивалентной, но уже стандартной (способ моделирования);
- разбиение нестандартной задачи на несколько стандартных вспомогательных подзадач (способ разбиения). Для того чтобы легче было осуществлять способы разбиения и моделирования, мы считаем полезным построение вспомогательной модели задачи - схемы, чертежа, рисунка, графа, графика, таблицы».

Третий этап. Обучение умению оформлять решение задачи, реализуя план ее решения на основе выбранного метода.

З.П. Матушкина [43, с. 10] в качестве умения оформлять решение задачи, реализуя плана ее решения на основе выбранного метода, необходимого для формирования умения решать задачи у школьников предлагает:

- «записывать найденный способ решения;

– записывать результат решения задачи».

Обучение старшеклассников реализации плана решения задачи на работу и производительность осуществляется посредством использования основных методов решения (арифметического, алгебраического и геометрического), которые были достаточно полно изучены в школьном курсе математики в 5-9 классах.

Приведем примеры оформления решений задач на работу и производительность различными методами.

Решение стандартной задачи на совместную работу арифметическим методом:

Задача №1. «Один мастер может выполнить весь заказ за 15 часов, а другой - за 10 часов. За сколько часов выполнят заказ оба мастера, работая вместе?» [32].

Решение:

За 1 час первый мастер выполнит $\frac{1}{15}$ часть заказа. За 1 час второй мастер выполнит $\frac{1}{10}$ часть заказа. Вместе за 1 час они выполнят: $\frac{1}{15} + \frac{1}{10} = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$ часть заказа. Поскольку весь заказ это - 1, то потребуется:

$1: \frac{1}{60} = 1 \cdot 6 = 6$ часов для выполнения заказа при совместной работе.

Ответ: 6 часов.

Решение стандартной задачи на совместную работу алгебраическим методом:

Задача №2. «Решите задачу алгебраическим методом. Петя и Ваня выполняют одинаковый тест. Петя отвечает за час на 8 вопросов теста, а Ваня — на 9. Они одновременно начали отвечать на вопросы теста, и Петя закончил свой тест позже Вани на 20 минут. Сколько вопросов содержит тест?» [72].

Решение:

Обозначим за x количество вопросов в тесте. Поскольку производительность Пети составляет 8 вопросов в час, то он потратит на ответы всего теста $\frac{x}{8}$ часов. Производительность Вани равна 9 вопросов в час, значит на ответы на все вопросы теста он потратит $\frac{x}{9}$ часов. Кроме этого, из условия задачи известно, что если они начнут одновременно отвечать на вопросы теста, то Петя закончить свой тест позже Вани на 20 минут, то есть на выполнение всей работы (ответы на все вопросы теста) Петя потратит на $\frac{20}{60} = \frac{1}{3}$ часа больше.

На основании вышеизложенного составим и решим уравнение:

$$\frac{x}{8} - \frac{x}{9} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{9x}{72} - \frac{8x}{72} = \frac{24}{72}$$

$$9x - 8x = 24$$

$$x = 24.$$

Итого в тесте было 24 вопроса.

Ответ: 24 вопроса.

Задача №3. «Двое рабочих, работая вместе, могут выполнить работу за 12 дней. За сколько дней, работая отдельно, выполнит эту работу первый рабочий, если он за два дня выполняет такую же часть работы, какую второй — за три дня?» [80].

Решение:

Пусть x количество работы, которое может выполнить первый рабочий за 1 день, тогда за 2 дня он выполнит количество работы, равное $2 \cdot x$.

Аналогично, пусть y количество работы, которое может выполнить второй рабочий за 1 день, тогда за 3 дня он выполнит количество работы, равное $3 \cdot y$.

По условию задачи, первый рабочий за 2 дня выполняет такую же часть работы, как второй за три дня. Поэтому можно составить уравнение:

$2 \cdot x = 3 \cdot y$. Отсюда: $y = \frac{2x}{3}$.

Получается, что за 1 день оба работника выполнят количество работы равное: $x + y = x + \frac{2x}{3} = \frac{5x}{3}$.

За 12 дней они выполнят работу, равную 1, то есть составим и решим уравнение: $12 \cdot \frac{5x}{3} = 1$. Отсюда $x = \frac{1}{20}$.

То есть за 1 день первый рабочий выполнить $\frac{1}{20}$ часть работы, а значит вся работа будет выполнена за 20 дней.

Ответ: 20 дней.

Решение стандартной задачи на совместную работу геометрическим методом.

Задача №4. «Решите задачу геометрическим методом. Чан наполняется водой при помощи двух кранов А и В. Наполнение чана только с помощью крана А длится на 22 минуты дольше, чем наполнение через кран В. Если же оба крана открыть одновременно, то чан наполнится водой за 1 час. За какое время может наполнить водой чан только кран В?» [66].

Решение:

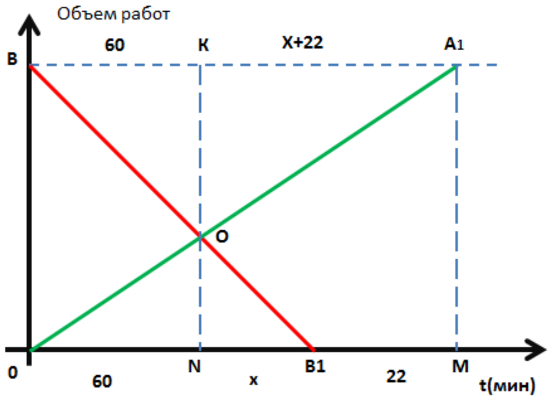

Рисунок 1 – К задаче 4

Рассмотрим рисунок 1. На нем AA_1 и BB_1 – графики зависимости выполненного объема работы от времени наполнения чанов водой кранами А и В соответственно.

По условию задачи BK = AN = 1 час = 60 минут. B_1M = 22 минуты. Используем подобие треугольников:

ΔBKO подобен ΔB_1NO, тогда $\frac{BK}{NB_1} = \frac{KO}{ON}$; $\frac{60}{x} = \frac{KO}{ON}$.

ΔKOA_1 подобен ΔNOA, тогда $\frac{KA_1}{AN} = \frac{KO}{ON}$; $\frac{x+22}{60} = \frac{KO}{ON}$.

Таким образом, имеем пропорцию: $\frac{60}{x} = \frac{x+22}{60}$

Перепишем в виде квадратного уравнения:

$x^2 + 22x - 3600 = 0;$

$x = 50$ или $x = -72.$

По смыслу задачи $x = 50$ минут.

Таким образом, $AB_1 = AN + NB_1 = 60 + 50 = 110$ (минут).

Ответ: за 110 минут.

Задача №5. Решите задачу геометрическим методом. «Двое рабочих, выполняя задание вместе, могли бы закончить его за 12 дней. Если сначала будет работать только один из них, а когда он выполнит половину всей работы, его сменит второй рабочий, то все задание будет закончено за 38 дней. За сколько дней каждый рабочий в отдельности может выполнить все задание?» [66].

Решение:

Построим графическую модель задачи (рисунок 2):

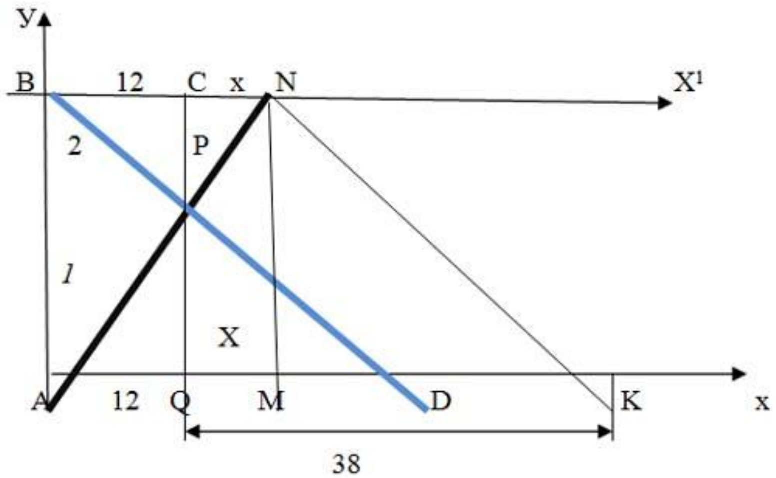

Рисунок 2 – К задаче 5

Для определенности предположим, что первый рабочий работает быстрее, чем второй. Так как в задаче работа рассматривается как равномерный процесс, то отрезок AN – график работы первого рабочего, а отрезок BD – график работы второго рабочего, AQ изображает время совместной работы, AQ = 12. Проведем

NK II BD, тогда AK = 50. Далее используем подобие образовавшихся треугольников.

Треугольники NMA, PQA и PCN подобны по двум углам, отсюда следует, что: $\frac{\mathrm{MN}}{\mathrm{CP}} = \frac{12+\mathrm{x}}{\mathrm{x}}$.

Треугольники NMK, PQD и PCB подобны по двум углам, отсюда следует, что: $\frac{\mathrm{MN}}{\mathrm{CP}} = \frac{38-\mathrm{x}}{12}$.

Составим уравнение: $\frac{12+x}{x} = \frac{38-x}{12}$. Решая это уравнение, находим: $x_1=18$, $x_2 = 8$. Учитывая, что первый рабочий работает быстрее, то значит, x = 8. Тогда время t_1, его изображает отрезок AM, равно 20 ч, а время t_2, его изображает отрезок MK, равно 30 ч.

Ответ: 20 ч, 30 ч.

Решение нестандартных задач на работу и производительность с помощью приема введения вспомогательных элементов, а также с помощью разбиения на подзадачи приведено нами в параграфе 2.2.

Приведем пример нестандартной задачи, которая решается школьниками при проведении олимпиад.

Задача №6. «Ванна заполняется холодной водой за 6 минут 40 секунд, горячей – за 8 минут. Кроме того, если из полной ванны вынуть пробку, вода вытечет за 13 минут 20 секунд. Сколько времени понадобится, чтобы наполнить ванну полностью, при условии, что открыты оба крана, но ванна не заткнута пробкой?» [105].

Решение:

Заменим время в секундах временем в минутах: 6 минут 40 секунд заменим на $6\frac{2}{3}$, или $\frac{20}{3}$, а 13 минут 20 секунд на $\frac{40}{3}$. За одну минуту холодной водой заполнится $\frac{3}{20}$ ванны, горячей $\frac{1}{8}$ ванны, а вытечет $\frac{3}{40}$ ванны. Следовательно, за одну минуту наполнится $\frac{3}{20}+\frac{1}{8}-\frac{3}{40}=\frac{1}{5}$ ванны. Значит, вся ванна наполнится за 5 минут.

Ответ: за 5 минут.

Отметим, что обучение умению оформлять решение задачи, реализуя план ее решения на основе выбранного метода, мы рекомендуем проводить с учетом следующих характеристик:

По форме обучения:

- по количеству старшеклассников и характеру взаимодействия: коллективная;
- по месту обучения: на уроке;
- по продолжительности: 15 мин.

По методам обучения:

- по характеру познавательной деятельности: репродуктивный (решение задач);
- по компонентам деятельности: организационно-действенные: организация и осуществление учебно-познавательной деятельности;
- по дидактическим целям: методы закрепления знаний;
- по способам изложения учебного материала: диалогические (беседа);
- по источникам передачи знаний: практические (упражнения);

По средствам обучения:

- словесные: учебники, математические тексты;
- простые визуальные средства: графики, математические модели;
- механические визуальные средства: компьютер, проектор.

Отметим, что вышеприведенные задачи необходимо решать в классе совместно с учителем. Для закрепления полученных навыков решения текстовых задач на работу и производительность различного типа мы рекомендуем использовать разработанную нами систему задач, приведенную в параграфе 2.2 данного исследования.

1. Обучение умению осуществлять проверку решения задачи на основе изучения ее найденного решения, формулировки выводов и запись ответа к ней.

Обучение умению осуществлять проверку решения задачи и записи ее ответа является заключительным этапом обучения решению задач на работу и производительность.

З.П. Матушкина [43, с. 10] в качестве умения осуществлять проверку решения задачи на основе изучения ее найденного решения, формулировки выводов и запись ответа к ней, необходимых для формирования умения решать задачи у школьников предлагает:

- «осуществлять контроль решения задачи;
- давать оценку результатам решения задачи;
- заканчивать работу над задачей: уяснять способ решения, получать выводы по задаче и решению и т.п.;
- составлять новые задачи».

Вместе с этим, в методической литературе рекомендуется использовать на данном этапе следующие приемы обучения:

1. Подстановка результата в условие текстовой задачи.
2. Решение текстовой задачи другим способом.
3. Составление и решение обратной задачи.
4. Анализ ответа и его прикидка.

Каждый из вышеперечисленных методов имеет ограниченное использование, в зависимости от условия текстовой задачи и параметров искомой неизвестной величины.

Обучение проверке найденного решения задачи на работу и производительность и формулировке выводов мы рекомендуем проводить по определенным характеристик:

По форме обучения:

- по количеству старшеклассников и характеру взаимодействия: индивидуальная; коллективная.
- по месту обучения: на уроке;
- по продолжительности: 5 мин.

По методам обучения:

- по характеру познавательной деятельности: частично-поисковый;
- по компонентам деятельности: организационно-действенные: организация и осуществление учебно-познавательной деятельности;
- по дидактическим целям: методы изучения новых знаний и методы закрепления полученных знаний;
- по способам изложения учебного материала: диалогические (беседа);
- по источникам передачи знаний: практические (упражнения);

По средствам обучения:

- словесные: учебники, математические тексты;
- простые визуальные средства: графики, математические модели;
- механические визуальные средства: компьютер, проектор.

Отметим, что при обучении старшеклассников решению текстовых задач на работу и производительность целесообразно использовать актуальные по содержанию задачи, которые отражают окружающую старшеклассника действительность. В частности, в современных школьных учебниках содержится большое количество «старинных» текстовых задач, которые являются как бы конспективными новеллами, рассказывающими о заботах и думах людей того времени. Не отрицая важность решения таких текстовых задач, особенно с воспитательной и исторической точек зрения, следует отметить, что безусловно такие задачи можно предлагать для решения на уроках, но они нуждаются в дополнительных пояснениях исторического характера.

Кроме того, при обучении старшеклассников решению текстовых задач на работу и производительность целесообразно использовать индивидуальный и дифференцированный подходы к школьникам.

Так, на сегодняшнее время существует ряд проблем, которые снижают уровень умений и навыков решать математические задачи. Например, первая проблема состоит в осуществлении анализа задачи, выполнении схематизации, которая представляет из себя рисунок или таблицу. Вторая проблема –

составление уравнения, связывающего данные величины и переменные, которые вводит учащийся. Третья проблема – это решение полученного уравнения наиболее рациональным способом. С целью того, чтобы вызвать интерес, необходим и коллективный подход: поставить перед классом цель, познавательную задачу, создать поисковую ситуацию, раскрыть важность поиска и помочь каждому включиться в учебный труд. Наблюдения демонстрируют то, что не сразу все школьники начинают проявлять интерес к новому, включаются в активную познавательную работу. Определенным учащимся необходима индивидуальная помощь в осознании того, что они уже ранее узнали и что должны узнать, как искать верный путь к истине. Реализация индивидуального подхода в обучении школьников не является разовым «мероприятием». Это активный и динамичный процесс, проходящий совместно с развитием и изменением ребенка. Согласно степени его знания, сформированности умений и навыков, развитию и изменению интересов и склонностей учитель может изменить программу обучения, а именно цели: содержание, приёмы подхода к ребёнку. По этой причине немаловажно видеть перспективы развития класса и возможную дальнейшую работу с ним. Если учитель понимает идею дифференциации и индивидуализации, то перед ним открывается широкое поле деятельности. Например, создаются возможности для развития творческой, целенаправленной личности, осознающей конечную цель и конкретную задачу обучения. У учителя повышается мотивация учения и формируется новое прогрессивное педагогическое мышление. Учитель освобождается от шаблона в оценках и мнениях относительно способностей учащихся, учится видеть в «бесспорных достижениях» и теневые стороны, мешающие максимальному развитию успеха, а также в явных недостатках замечать то положительное, что может привести к оптимальному раскрытию потенциальных возможностей школьника [20].

В случае, если учитель не в полной мере выполняет сформулированные требования, то у обучающихся может сформироваться искаженная эмоциональная реакция на математику. Отрицательное отношение к математике и страх перед решением математических текстовых задач является глобальной проблемой, для которого ученые ввели специальный термин – «математическая тревожность».

Психолог-педагог Ф. Ричардсон определил «математическую тревогу» как чувство напряжения и тревоги, которое мешает манипуляции с числами и решению математических задач в самых разнообразных жизненных и академических ситуациях [110].

Вышеперечисленные факторы, обуславливающие формирование математической тревожности при решении текстовых задач по математике проводят к тому, что старшеклассники не могут даже на начальном этапе начать эффективно осмысливать ее содержание, не способны адекватно проводить анализ содержащихся в них данных и не принимают активное участие в совместной работы, «замыкаясь» в себе, что в конечном этапе приводит к неспособности правильно формировать стратегию ее решения на определенных этапах.

Для подтверждения эффективности сформулированных методических рекомендаций нами была определена система контроля качества знаний по данной теме «Задачи на работу и производительность», который предусматривает проверку у старшеклассников уровня умения решать текстовые задачи на работу и производительность различными методами. Для его выявления составлена контрольная работа, которая должна включать в себя 4 задачи:

- стандартные задачи на раздельную работу (задачи №1-2);
- стандартная задача на совместную работу (задача №3);
- нестандартная задача на работу и производительность (задача №4).

Данная контрольная работа приведена нами в параграфе 2.3 в рамках описания результатов проведенного педагогического эксперимента.

2.2 Система текстовых задач на работу и производительность в рамках технологии развивающего обучения решению задач

Применение технологии развивающего обучения при обучении решению задач на работу и производительность позволяет организовать новый способ познавательной деятельности старшеклассников на уроках алгебры в 10 и 11 классах.

В основе выбора технологии обучения лежат основные функции текстовых задач, которые, на наш взгляд, наиболее полно классифицировала Матушкина З.П., а именно:

- дидактическая функция;
- познавательная функция;
- развивающая функция.

Текстовые задачи с дидактическими функциями, в школьном курсе математики, предназначены в основном для закрепления основных положений изученного теоретического материала. Познавательные текстовые задачи углубляют отдельные, обязательные для изучения, вопросы теоретического курса школьной математики, знакомят с новыми методами решения текстовых задач. Если же задача такова, что для ее решения требуется применение искусственных приемов, не рассматриваемых отдельно в школьном курсе математики, то такие задачи являются развивающими и такие задачи ученики должны решать в меру своих способностей. Эти задачи должны иметь посильные для учащихся трудности и предлагаться в процессе всего обучения, а не от случая к случаю [43].

Теоретические основы применения технологии решению развивающих задач описаны в работах Т.А. Ивановой, Д. Пойа, Г.И. Саранцева, Л.М. Фридмана [21], [58], [70], [90], [91].

Так, по мнению Т.А. Ивановой, «развивающее обучение решению задач решает более «высокие» цели: развитие школьника, его осознанное отношение к математической деятельности, понимание математического содержания… Решение нестандартных, проблемно-развивающих задач предполагает знакомство учащихся с дополнительной информацией: фактами, теоремами, идеями, методами и приемами» [21].

Однако, по нашему мнению, наиболее полно теоретические и методические аспекты и проблемы обучения школьников решению текстовых задач были изложены в трудах Л.М. Фридмана.

Обобщая накопленный отечественный опыт обучения школьников решению текстовых задач, Лев Моисеевич, справедливо отмечал, что «большинство выпускников школ так и не научились, в должной степени, решению текстовых задач и встретивших с задачей не столько трудной, а задачей малознакомого и незнакомого вида, не знаю, как к ней подступиться, с чего начать решение и после нескольких неудачных попыток решить такую задачу прекращают это «безнадежное» дело со словами: «А мы такие задачи не решали». Л.М. Фридман полагал, что главная причина такой ситуации заключается в том, что традиционная методика обучения школьников решению текстовых задач малоэффективна, потому что ее структура не способствует активизации креативного математического мышления у школьников в процессе решения нестандартных и малоизвестных задач. В чем суть традиционной методики? Если говорить кратко, то большинство школьных учителей идут по многолетнему «проторенному» методическому пути. Изучив, какой-либо теоретический раздел школьного курса математики, учитель самостоятельно решает определенный тип текстовых задач на применение изученной теории, затем несколько подобных задач решаются школьниками в классе при помощи учителя и после этого самостоятельно решается большое количество подобных задач в процессе выполнения домашней работы для «закрепления» полученных навыков [90, с. 108].

К сожалению, одной из причин данной многолетней негативной ситуации заключается в том, что до сих пор большая часть учителей математики, методистов и даже ученых-педагогов, довольно упрощенно понимают роль текстовых задач в школьном курсе математики и воспринимают их лишь как средство обучения математике, а по Л.М . Фридману функции текстовых задач намного шире, а именно при их решении у учащихся осуществляется:

- формирование мотивации к учебной деятельности, интереса и склонности к этой деятельности;
- иллюстрация и конкретизация изучаемого материала;
- выработка устойчивых навыков и умений;
- оценка учебной деятельности школьников;
- получение школьниками новых знаний [91, с. 109-110].

Реализация всех вышеперечисленных функций текстовых задач должны привести к формированию главному, с точки зрения Л.М. Фридмана умению у школьников: формирование общего подхода, общего умения решать любые задачи. Ведь, частные способы решения отдельных видов задач на основе алгоритмов, изучаемых в отдельных разделах школьного курса математики могут быть со временем забыты, а вот общее умение, общий подход к решению любых типов задач должен сохраниться у каждого выпускника на всю жизнь. Ибо общий подход к решению любых математических задач, по сути дела, формирует модель разумного подхода к решению любых бытовых, научных, технических и экономических задач, которые будут встречаться старшеклассснику на протяжении всей его жизни. Ведь жить-это значит решать задачи [90, с. 111].

В основе технологии развивающего обучения решению текстовых задач должно лежать решение сочетания стандартных и нестандартных задач, причем последние по мнению многих методистов должны предлагаться к решению школьниками без какой-либо предварительной подготовки. Под нестандартными задачами автор понимает «задачи, для решения которых нет определенного алгоритма и решение которых сводится к решению одной или нескольких стандартных задач» [90, с. 125]. Однако, данный подход будет эффективен только со школьниками с определенными математическими способностями, то есть в рамках углубленного изучения математики, что позволит у данных школьников выработать общий разумный подход к решению любой задачи, развивать математическую интуицию в проникновении в сущность задачи, видеть за текстом задачи ту реальную проблемную ситуацию, моделью которой она является и уметь находить подход к решению данной реальной ситуации [90, с. 116].

В методической литературе выделены приемы решения нестандартных задач: выведение следствий; переформулирование; разбиение на подзадачи; введение нового элемента и др.

На основе анализа вышеперечисленных принципов, достоинств и недостатков технологии развивающего обучения решению текстовых задач на работу и производительность можем утвердительно заключить, что она является перспективной при обучении математике в старших классах общеобразовательной школы по следующим причинам:

- учитывает возрастные особенности старшеклассников и ориентируется на их ближайший «горизонт» жизни окончания школы и вхождения во взрослую жизнь, поскольку большая часть старших школьников уже имеет учебный опыт решения текстовых задач в 5-9 классах и имеют практический опыт выполнения определенных видов работ как с оплатой, так и без таковой;
- старшеклассники будут получать моральное и эмоциональное удовлетворение от решения данных задач, поскольку они затрагивают практические аспекты их жизнедеятельности;
- способствует развитию их познавательной активности, поскольку подразумевает самостоятельную формулировку учебных и практических целей при решении текстовых задач на работу и производительность;

– способствует расширению экономического кругозора старшеклассников за счет знакомством с понятиями живого, овеществленного труда при выполнении различных видов работ;

– способствует формированию учебной конкуренции между старшеклассниками за счет рационального сочетания индивидуальной и групповой работы.

Вышеперечисленные факторы перспективности использования технологии развивающего обучения старшеклассников решению текстовых задач на работу и производительность базируются на основополагающих принципаз данной системы, среди которых можно выделить:

– принцип развития. При обучении решению текстовых задач на работу и производительность учитель должен учитывать индивидуальные особенности старшеклассников и возрастные особенности подросткового возраста;

– принцип ответственности. Не только учитель несет ответственность за качество обучения решению текстовых задач на работу и производительность, но и ученики несут на себе часть этой ответственности за счет умения применять полученные знания в процессе учебной деятельности;

– принцип самостоятельности и активности. Учитель должен создавать условия для формирования самостоятельности старшеклассников при решении текстовых задач на работу и производительности, отучать их от необходимости постоянного руководства со стороны учителя;

– принцип самоорганизации. Данный принцип органически «вытекает» из принципа самостоятельности и активности. Самостоятельность старшеклассников при решении текстовых задач на работу и производительность должны быть ограничена рамками самоорганизации и не превращаться в хаотический процесс;

– принцип коллективизма. Предполагает, что самостоятельность и самоорганизация в процессе решения текстовых задач на работу и производительность не должны разрушать работу в классе и сохранять взаимодействие между старшеклассниками в различных формах групповой работы [56].

При проектировании системы текстовых задач на работу и производительность, на наш взгляд, необходимо учитывать определенные классификации задач:

– по содержанию: задачи на работу и производительность.

При решении данных задач в методической литературе выделяются два типа задач: на раздельную работу и на совместную работу.

– по наличию алгоритма решения задач или по отношению к способу решения: стандартные задачи; нестандартные задачи.

Итак, система текстовых задач на работу и производительность, разработанных нами в рамках технологии развивающего обучения решению задач включает:

– стандартные задачи на раздельную работу;

– стандартные задачи на совместную работу:

– нестандартные задачи на работу и производительность.

Приведем указанную систему текстовых задач на работу и производительность с решениями:

1. Стандартные задачи на раздельную работу.

Задачи, решаемые арифметическим методом.

Задача 1. «Костя и Гриша выполняют одинаковый тест. Костя отвечает за час на 12 вопросов, а Гриша — на 20. Они одновременно начали отвечать на вопросы теста, и Костя закончил свой тест позже Гриши на 90 минут. Сколько вопросов содержит тест?»

Решение задачи № 1. I способ.

а) 60 : 12 = 5 (мин) — тратит на 1 вопрос Костя, б) 60 : 20 = 3 (мин) — тратит на 1 вопрос Гриша,

в) 5 – 3 = 2 (мин) — на каждый вопрос Костя тратит на 2 мин больше, чем Гриша, а всего он потратил на 90 мин больше,

г) 90 : 2 = 45 (вопросов) — в тесте.

Решение задачи № 1. II способ (алгебраический метод).

Пусть в тесте было x вопросов.

а) 60 : 12 = 5 (мин) — Костя тратит на 1 вопрос, значит, 5x минут тратит на все вопросы,

б) 60 : 20 = 3 (мин) — Гриша тратит на 1 вопрос, значит, 3x минут тратит на все вопросы.

Составим уравнение: 5x – 3x = 90, x = 45. В тесте 45 вопросов.

Ответ. 45» [97].

Задачи, решаемые алгебраическим методом.

Задача 2. «Первая труба пропускает на 6 литров воды в минуту меньше, чем вторая. Сколько литров воды в минуту пропускает первая труба, если резервуар объемом 112 литров она заполняет на 6 минут дольше, чем вторая труба?» [72].

Решение задачи №2.

Пусть пропускная способность второй трубы: x литров, тогда первой трубы: $x-6$ литров. Время работы второй трубы: $\frac{112}{x}$, а первой трубы: $\frac{112}{x-6}$. Зная, что вторая труба наполняет резервуар на 6 минут быстрее, чем первая труба, составим уравнение:

$$\frac{112}{\mathrm{x}-6}-\frac{112}{\mathrm{x}}=6$$

$$\frac{112}{\mathrm{x}-6}-\frac{112}{\mathrm{x}}=6 \mid \cdot \mathrm{x}-6 \neq 0$$

$$112\mathrm{x}-112(\mathrm{x}-6)=6(\mathrm{x}-6)\mathrm{x}$$

$$112\mathrm{x}-112\mathrm{x}+672=6\mathrm{x}^2-36\mathrm{x}$$

$$6\mathrm{x}^2-36\mathrm{x}-672=0$$

$$\mathrm{x}^2-6\mathrm{x}-112=0$$

$$D = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-112) = 484 = 22^2$$

$$x_1 = \frac{6 + 22}{2 \cdot 1} = \frac{28}{2} = 14$$

$$x_2 = \frac{6-22}{2\cdot 1} = \frac{-16}{2} = -8\ \emptyset$$

Ответ: 14 литров в минуту.

Задача 3. «Петя и Митя выполняют одинаковый тест. Петя отвечает за час на 10 вопросов текста, а Митя - на 16. Они одновременно начали отвечать на вопросы теста, и Петя закончил свой тест позже Мити на 117 минут. Сколько вопросов содержит тест?» [72].

Решение задачи №3.

Пусть x - количество вопросов теста. Имеем:

- время, необходимое пете на все ответы: $\frac{x}{10}$ час;
- время, необходимое мите на все ответы: $\frac{x}{16}$ час;
- составление и решение уравнения:

$$\frac{x}{10} - \frac{x}{16} = \frac{117}{60}$$

$$\frac{6x}{160} = \frac{117}{60}$$

$$6x \cdot 60 = 117 \cdot 160$$

$$x = 117 \cdot \frac{4}{9} = 52.$$

Ответ: тест содержит 52 вопроса.

Задача 4. «Имеются два двигателя одинаковой мощности. Один из них, работая, израсходовал 600 г бензина, а второй, работавший на 2 ч меньше, израсходовал 384 г бензина. Если бы первый двигатель расходовал в час столько бензина, сколько второй, а второй, наоборот, столько, сколько первый, то за одно и то же время работы расход бензина в обоих двигателях был бы одинаковым. Сколько бензина в час расходует каждый двигатель?» [77].

Решение задачи №4:

Пусть первый двигатель, работая 1 ч, расходует x г бензина, а второй - y г. Тогда первый двигатель израсходовал 600 г за 600x ч, а второй - 384 г за 384y ч. Из условия следует, что $\frac{600}{x} - \frac{384}{y} = 2$.

Если бы первый двигатель в 1 ч расходовал y (г), то за 600x ч он израсходовал бы $\frac{600y}{x}$ (г). Если бы второй двигатель в 1 ч расходовал x (г), то за 384y ч он израсходовал бы $\frac{384x}{y}$ (г). Тогда приходим к уравнению $\frac{600y}{x} = \frac{384x}{y}$. При решении системы уравнений методом подстановки получим: 60 г; 48 г.

Ответ: 60 г; 48 г. [77].

Задачи, решаемая геометрическим методом.

Задача 5. «Плиточник должен уложить 187 м^2 плитки. Если он будет укладывать на 6 м^2 плитки в день больше, чем запланировал, то закончит работу на 6 дней раньше. Сколько квадратных метров плитки в день планирует укладывать плиточник?» [23].

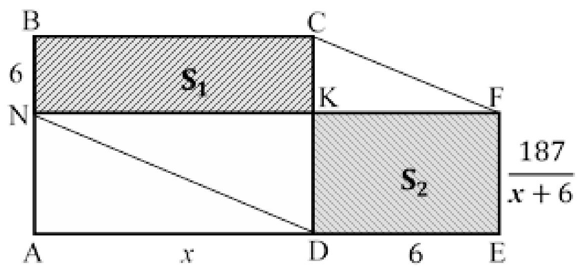

Рисунок 3 – К задаче 5

Решение задачи №5.

Этап 1: построение двумерной диаграммы.

Пусть площадь прямоугольника ABCD определяет весь объем работы 187 м^2 плитки. Отрезок AD изображает производительность плиточника в день по плану (рисунок 3), AD = x; AB изображает количество дней, за которое он должен выполнить всю работу по плану.

Если плиточник будет укладывать на 6 м^2 плитки в день больше, чем по плану, то следует прибавить к отрезку AD отрезок DE, условно изображающий 6 м^2, тогда AE будет изображать повышенную производительность плиточника в день. Время его работы в этом случае EF, а площадь прямоугольника AEFN определяет весь объем работы.

Этап 2: решение задачи с использованием геометрических соотношений.

Так как объем работы и в первом, и во втором случае один и тот же, то площади прямоугольников ABCD и AEFN равны, тогда:

$S_1 + S_{ANKD} = S_{ANKD} + S_2$; имеем $S_1 = S_2$ или:

$$6x = 6 \cdot \frac{187}{x+6} \Leftrightarrow x = \frac{187}{x+6}$$

Учитывая, что x > 0 это уравнение равносильно следующему:

$x^2 + 6x - 187 = 0.$ Откуда $x_1 = 11$, $x_2 = -17$. Второй корень отрицательный, поэтому он не удовлетворяет условию задачи. Итак, AD = 11.

Этап 3: интерпретация полученного решения, перевод его на естественный язык.

Плиточник планирует укладывать в день 11 м^2.

Ответ: 11 м^2.

2. Стандартные задачи на совместную работу.

Задачи, решаемые арифметическим методом.

Задача 6. «Один мастер может выполнить весь заказ за 30 часов, а другой - за 15 часов. За сколько часов выполнят заказ оба мастера, работая вместе?» [83].

Решение задачи №6:

За 1 час первый мастер выполнит $\frac{1}{30}$ часть заказа.

За 1 час второй мастер выполнит $\frac{1}{15}$ часть заказа.

Вместе за 1 час они выполнят:

$\frac{1}{30} + \frac{1}{15} = \frac{1+2\cdot 1}{30} = \frac{3}{30} = \frac{1}{10}$ часть заказа.

Поскольку весь заказ это - 1, то потребуется:

$1 : \frac{1}{10} = 1 \cdot 10 = 10$ часов для выполнения заказа при совместной работе.

Ответ: 10 часов.

Задача 7. «Первый и второй насосы наполняют бассейн за 10 минут, второй и третий – за 14 минут, а первый и третий – за 15 минут. За сколько минут эти три насоса заполнят бассейн, работая вместе?» [72].

Решение задачи №7:

Производительность первого и второго насосов $\frac{1}{10}$ бассейна в минуту, производительность второго и третьего насосов $\frac{1}{14}$ бассейна в минуту, производительность первого и третьего насосов $\frac{1}{15}$ бассейна в минуту.

Следовательно, два первых, два вторых и два третьих насоса имеют общую производительность:

$\frac{1}{10} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} = \frac{21}{210} + \frac{15}{210} + \frac{14}{210} = \frac{5}{21}$ бассейна в минуту.

А тогда один первый, один второй и один третий насосы имеют общую производительность: $\frac{5}{42}$ бассейна в минуту, следовательно, они все вместе заполнят бассейн за: $\frac{42}{5} = 8{,}4$ мин.

Ответ: 8,4 мин.

Задача 8. «Каждый из двух рабочих одинаковой квалификации может выполнить заказ за 15 часов. Через 3 часа после того, как один из них приступил к выполнению заказа, к нему присоединился второй рабочий, и работу над заказом они довели до конца уже вместе. Сколько часов потребовалось на выполнение всего заказа?» [132].

Решение задачи №8.

Рабочий выполняет $\frac{1}{15}$часть заказа в час, поэтому за 3 часа он выполнит $\frac{1}{5}$ часть заказа. После этого к нему присоединяется второй рабочий, и, работая вместе, два рабочих должны выполнить $\frac{4}{5}$ заказа. Чтобы определить время совместной работы, разделим этот объём работы на совместную производительность:

$$\frac{\frac{4}{5}}{\frac{1}{15}+\frac{1}{15}} = \frac{4}{5} \cdot \frac{15}{2} = 6 \text{ часов.}$$

Тем самым, на выполнение всего заказа потребуется: $6 + 3 = 9$ часов.

Ответ: 9 часов.

Задачи, решаемые алгебраическим методом.

Задача 9. «Двум машинисткам было поручено выполнить некоторое задание. Вторая приступила к работе на 1 ч позже первой. Через 3 ч после того как первая начала работу, им осталось выполнить еще $\frac{9}{20}$ всего задания. По окончании работы оказалось, что каждая машинистка выполнила половину всего задания. За сколько часов каждая из них в отдельности могла бы выполнить все задание?» [77].

Решение задачи № 9:

«Пусть первой машинистке для выполнения всего задания требуется x часов, а второй - y часов. Когда первая проработала 3 ч, вторая проработала 2 ч, причем обе они выполнили $1 - \frac{9}{20} = \frac{11}{20}$ всего задания. Получаем уравнение $\frac{3}{x} + \frac{2}{y} = \frac{11}{20}$.

По окончании работы выяснилось, что каждая машинистка выполнила половину всего задания. Значит, первая потратила $\frac{x}{2}$ ч, а вторая $\frac{y}{2}$ ч. Так как первая машинистка работала на 1 ч больше, чем вторая, то приходим к уравнению $\frac{x}{2} - \frac{y}{2} = 1$.

В полученной системе уравнений одно из решений содержит отрицательный y, что противоречит условию задачи. Следовательно, только одно из решений является ответом исходной задачи.

Ответ: за 10 ч, за 8 ч.» [77].

Задача 10. «Двое рабочих выполняют некоторую работу. После 45 мин совместной работы первый рабочий был переведен на другую работу, и второй рабочий закончил оставшуюся часть работы за 2 ч 15 мин. За какое время мог бы выполнить всю работу каждый рабочий в отдельности, если известно, что второму для этого понадобится на 1 ч больше, чем первому?» [78].

Решение задачи № 10:

Пусть первый рабочий выполняет всю работу за x часов, а второй - за y часов. Из условия следует, что $\mathbf{x = y - 1}$. За 1ч первый рабочий выполнит $\mathbf{\frac{1}{x}}$ часть работы, а второй $\mathbf{\frac{1}{y}}$ часть работы. Так как они работали вместе $\mathbf{\frac{3}{4}}$ ч, то за это время они выполнили $\mathbf{\frac{3}{4}(\frac{1}{x} + \frac{1}{y})}$ часть работы. За $\mathbf{2\frac{1}{4}}$ ч работы второй выполнил $\frac{9}{4} \cdot \frac{1}{y}$ часть работы.

Так как вся работа выполнена, то можно составить такое уравнение:

$$\frac{3}{4}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) + \frac{9}{4} \cdot \frac{1}{y} = 1 \quad \text{или} \quad \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{x} + 3 \cdot \frac{1}{y} = 1.$$

Подставив значение x в это уравнение, получим:

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{y - 1} + \frac{3}{y} = 1.$$

Приводим это уравнение к квадратному: $4y^2 - 19y + 12 = 0,$ которое имеет решения $\frac{3}{4}$ ч и 4 ч. Первое решение не подходит, так как оба рабочих только вместе работали $\frac{3}{4}$ ч. Тогда $y = 4$, а $x = 3$.

Ответ: 3 ч и 2 ч. [78].

Задача 11. «В резервуар поступает вода из двух труб различных диаметров. В первый день обе трубы, работая одновременно, подали 14m^3 воды. Во второй день работала лишь малая труба и подала также 14m^3 воды, поскольку проработала на 5 ч дольше, чем в предыдущий день. В третий день обе трубы сначала подали 21m^3 воды, а затем работала лишь большая труба, подавшая еще 20m^3 воды, причем общая продолжительность времени подача воды была такой же, как и во второй день» [79].

Определить производительность каждой трубы.

Решение задачи № 11:

Пусть p_1 и p_2 - производительности труб, причем $p_1 < p_2$.

Тогда $t(p_1 + p_2) = 14$, где t ч - время работы труб в первый день.

Далее из условия следует, что:

$(t + 5)p_1 = 14, \quad m(p_1 + p_2) = 21, \quad (t + 5 - m)p_2 = 20,$

где m ч - время совместной работы труб в третий день.

Итого имеем четыре уравнения. Из первого и третьего выразим t и m и подставим во второе и четвертое.

Получим уравнения:

$\left(\frac{14}{p_1+p_2} + 5\right)p_1 = 14$ и $\left(\frac{14}{p_1+p_2} + 5 - \frac{21}{p_1+p_2}\right)p_2 = 20.$

Упростим оба уравнения и выразим из первого уравнения $p_2 = \frac{5p_1^2}{14-5p_1}$ и подставим во второе. После упрощения приходим к квадратному уравнению $105p_1^2 + 182p_1 - 784=0$, из которого следует, что $p_1 = 2$. Тогда $p_2 = 5$.

Ответ: 2; 5 [79].

Ниже представим задачу, решаемую несколькими способами: 1 и 2 способы – алгебраическим методом; 3 и 4 способы – арифметическим методом.

Задача 12. Двое рабочих, работая вместе, могут выполнить работу за 12 дней. За сколько дней, работая отдельно, выполнит эту работу первый рабочий, если он за два дня выполняет такую же часть работы, какую второй - за три дня?

Решение №1 задачи 12 (алгебраический метод):

Пусть первый рабочий, работая отдельно, выполнит работу за x дней. Второй рабочий делает за 3 дня то, что первый делает за 2 дня, поэтому, работая отдельно, он выполнит всю работу за 1,5x дней. Объем работы не задан, примем его за 1. Производительность равна отношению работы ко времени ее выполнения. Составим таблицу 4 по данным задачи.

Работая вместе, рабочие выполняют всю работу за 12 дней, то есть выполняют часть работы ежедневно. Производительности складываются, поэтому можно составить уравнение:

$$\frac{1}{x} + \frac{2}{3x} = \frac{1}{12} \Leftrightarrow \frac{5}{3x} = 12 \Leftrightarrow 3x = 5 \cdot 12 \Leftrightarrow x = 20.$$

Таблица 4 – К анализу условия задачи 12

	Производительность (ед. раб./день)	Время работы (дней)	Работа (ед.)
Первый рабочий	$\frac{1}{x}$	x	1
Второй рабочий	$\frac{2}{3x}$	$\frac{3x}{2}$	1

Следовательно, первый рабочий, работая отдельно, выполнит всю работу за 20 дней.

Ответ: 20 (дней).

Решение №2 задачи 12 (алгебраический метод):

Сведем задачу к системе уравнений. Обозначим v_1и v_2 - объёмы работ, которые выполняют за день первый и второй рабочий, соответственно, полный объём работ примем за 1. Тогда по условию задачи $12(v_1 + v_2) = 1$ и $2v_1 = 3v_2$. Решим полученную систему:

$$\begin{cases} 12(v_1 + v_2) = 1; \\ 2v_1 = 3v_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12\left(v_1 + \frac{2}{3}v_1\right) = 1; \\ v_2 = \frac{2}{3}v_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 20v_1 = 1; \\ v_2 = \frac{2}{3}v_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_1 = \frac{1}{20}; \\ v_2 = \frac{1}{30}. \end{cases}$$

Тем самым первый рабочий за день выполняет одну двадцатую всей работы, значит, работая отдельно, он справится с ней за 20 дней.

Ответ: 20 (дней).

Решение №3 задачи 12 (арифметический метод):

Пусть первый рабочий, работая один, выполняет в день некоторую часть работы; назовем ее нормой. Тогда второй выполняет две трети нормы, а вместе рабочие выполняют пять третьих нормы. За 12 дней рабочие выполнят всю работу или $12 \cdot \frac{5}{3} = 20$ норм. Следовательно, первый рабочий один может выполнить всю работу за 20 дней.

Ответ: 20 (дней).

Решение №4 задачи 12 (арифметический метод):

Первый рабочий работает в 1,5 раза быстрее второго. Тогда, работая вместе, рабочие будут работать в 2,5 раза быстрее, чем один второй рабочий. Следовательно, один второй рабочий потратил бы на выполнение заказа $12 \cdot 2{,}5 = 30$дней, тогда один первый рабочий потратил бы $30 : 1{,}5 = 20$ дней.

Ответ: 20 (дней) [72].

Задача 13. «Один комбайнер может убрать урожай пшеницы с участка на 24 ч быстрее, чем другой. При совместной же работе они закончат уборку урожая за 35 ч. Сколько времени потребуется каждому комбайнеру, чтобы одному убрать урожай?» [25, с. 132].

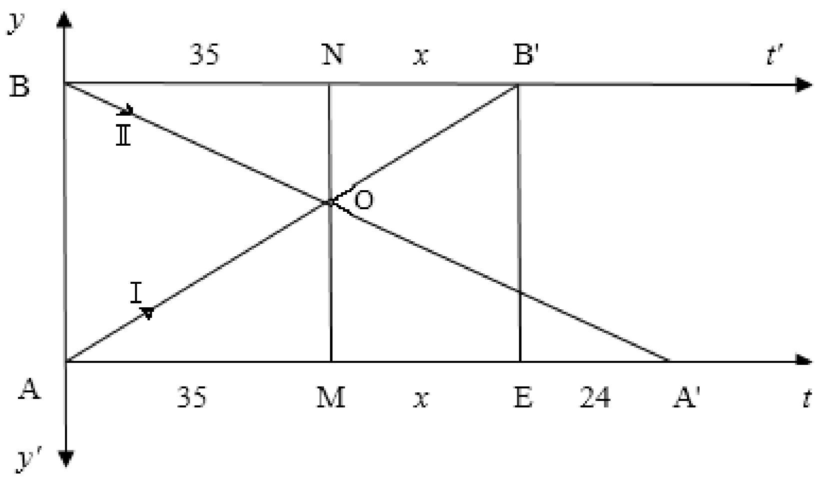

Рисунок 4 – К задаче 13

Решение задачи № 13:

Рассмотрим две системы координат tAy и t'By' (рисунок 4). Оси At и Bt' – оси времени с одинаковыми масштабами. Отрезок AB изображает площадь всего участка.

Объем выполненной работы пропорционален времени. Отрезок AB' – график работы 1-го комбайнера; отрезок BA' - график работы 2-го комбайнера. Отрезок AM изображает время, за которое уберут весь участок оба комбайнера, если будут работать вместе.

Пусть ME = x, ME = NB'. Δ AMO ~ Δ B'NO (по первому признаку: по двум углам), тогда: $\frac{35}{x} = \frac{OM}{ON}$. Аналогично Δ MA'O ~ Δ NBO (по первому признаку: по двум углам), тогда: $\frac{x+24}{35} = \frac{OM}{ON}$. Тогда из полученных равенств имеем:

$\frac{x+24}{35} = \frac{35}{x}$, $x^2 + 24x - 1225 = 0$. Решая уравнение, находим $x_1 = 25$, $x_2 = -48$, тогда $t_1 = AM + ME = 35 + 25 = 60$ ч, $t_2 = 60 + 24 = 84$ ч.

Ответ: 60 ч, 84 ч.

3. Нестандартные задачи на работу и производительность.

Решение нестандартной задачи с помощью приема введения вспомогательных элементов.

Задача 14 (задача Исаака Ньютона (1643-1727)). «Трава на лугу растет одинаково густо и быстро. Известно, что 70 коров съели бы всю траву на лугу за 24 дня, а 30 коров - за 60 дней. Сколько коров съедят всю траву на лугу за 96 дней?» [91].

Решение задачи № 14:

«Непосредственно составить уравнение или систему уравнений по данным задачи нельзя, ибо количество коров и число дней прямо не связаны: они не находятся в прямой или обратной пропорциональности. Чтобы найти связь между ними, введем вспомогательные элементы:

- первоначальное количество травы на лугу - a ед.
- каждый день там вырастает - b ед.
- одна корова за 1 день съедает c - ед.

Теперь можно составить такие уравнения:

- в первый раз всего травы за 24 дня выросло: $a + 24b$,
- 70 коров за 24 дня съели: $70 \cdot 24c$ ед. травы.

Тогда по условию: $a + 24b = 70 \cdot 24c$, (1)

Аналогично получаем:

$a + 60b = 30 \cdot 60c$, (2)

$a + 96b = x \cdot 986c$, (3)

где x - искомое количество коров.

Вычитая из (2) почленно (1), найдем: $36b = 120c$ или $c = 0.3b$, (4)

Подставляя значение c из (4) в (1), найдем: $a = 480b$, (5)

Подставим значения a и c из (5) и (4) в (3), получим:

$$576b = 28.8x \cdot b.$$

Так как $b \neq 0$, то, сократив на b , найдем: $x = 20$ (коров).

Ответ: 20 (коров) [91, с. 56-57].

Решение нестандартной задачи на работу и производительность с помощью разбиения на подзадачи, которые решаются арифметическим, и алгебраическим методами.

Задача 15. «Два плотника, работая вместе, могут выполнить задание за 36 ч. Производительности труда первого и второго плотников относятся как 3 : 4. Плотники договорились работать поочерёдно. Какую часть этого задания должен выполнить второй плотник, чтобы всё задание было выполнено за 69,3 ч?» (ЕГЭ, 2009 г.)

Решение задачи № 15:

Примем всю работу за 1.

1) $1 : 36 = \frac{1}{36}$ (задания) — выполняют два плотника за 1 ч при совместной работе.

Далее делим $\frac{1}{36}$ в отношении 3 : 4.

2) $\frac{1}{36} : (3 + 4) \cdot 3 = \frac{1}{84}$ (задания) — выполняют первый плотник за 1 ч работы,

3) $\frac{1}{36} - \frac{1}{84} = \frac{1}{63}$ (задания) — выполняют второй плотник за 1 ч работы,

4) $1 : \frac{1}{84} = 84$ (ч) - требуется первому плотнику на выполнение всей работы,

5) $1 : \frac{1}{63} = 63$ (ч) - требуется второму плотнику на выполнение всей работы.

Пусть первый выполнил часть работы, выражаемую дробью x, тогда второй — часть работы, выражаемую дробью 1 – x, они затратили 84x ч и 63(1 – x) ч соответственно при поочерёдной работе, а всего — 69,3 ч.

Составим уравнение: $84x + 63(1 – x) = 69,3$.

Это уравнение имеет единственный корень 0,3. Первый выполнил 0,3 работы, второй — $1 – x = 0,7$.

Ответ. 0,7 [97].

Две нестандартные задачи на работу и производительность, которые решаются с помощью приема введения вспомогательных элементов и методом разбиения на подзадачи представлены в п.п. 2.1 нашей методики. В дополнение к данным задачам рекомендуем в практике обучения старшеклассников использовать следующие задачи, представленные на олимпиадах для школьников.

Задача 16 (автор Е.В. Бакаев.). «У каждого из художников творческого объединения "Терпение и труд" свой рабочий график. Шестеро из них пишут по одной картине раз в два дня, ещё восемь художников – по одной картине раз в три дня, остальные не пишут картин никогда. С 22 по 26 сентября они написали в общей сложности 30 картин. Сколько картин они напишут 27 сентября?»[105].

Решение задачи №16:

Посмотрим, сколько картин напишут художники с 22-го по 27-е сентября включительно.

Каждый из шести художников, которые пишут по одной картине раз в два дня, напишет по три картины (по одной в каждую пару дней 22-23, 24-25 и 26-27), а каждый из восьми, которые пишут по одной картине раз в три дня, – по две картины.

Таким образом, суммарно художники напишут $6\cdot3 + 8\cdot2 = 34$ картины. Поскольку с 22-го по 26-е они написали 30 картин, то 27-го они напишут $34 – 30 = 4$ картины. Ответ: 4 картины.

Задача 17 (задача с неравенством, автор Д.А. Терешин). «Как-то Кролик торопился на встречу с осликом Иа-Иа, но к нему неожиданно пришли Винни-Пух и Пятачок. Будучи хорошо воспитанным, Кролик предложил гостям подкрепиться. Пух завязал салфеткой рот Пятачку и в одиночку съел 10 горшков мёда и 22 банки сгущенного молока, причём горшок мёда он съедал за 2 минуты, а банку молока – за минуту. Узнав, что больше ничего сладкого в доме нет, Пух попрощался и увёл Пятачка. Кролик с огорчением подумал, что он бы не опоздал на встречу с осликом, если бы Пух поделился с Пятачком. Зная, что Пятачок съедает горшок мёда за 5 минут, а банку молока – за 3 минуты, Кролик вычислил наименьшее время, за которое гости смогли бы уничтожить его запасы. Чему равно это время? (Банку молока и горшок мёда можно делить на любые части)» [105].

Решение задачи №17:

Ясно, что Пух и Пятачок должны закончить есть одновременно, иначе один из них сможет помочь другому, уменьшив тем самым общее время, затраченное на еду. Один Пух затратил на еду 42 минуты.

Съедая горшок мёда Пятачок уменьшает время Пуха на 2 минуты, но сам тратит на это 5 минут. Съедая две банки молока Пятачок уменьшает время Пуха на те же 2 минуты, но сам тратит на это уже 6 минут.

Поэтому Пятачку выгоднее есть мёд (пока он есть). Поедая горшок мёда Пятачок уменьшает разность между своим временем и временем Пуха на 7 минут. Значит, съев $42 : 7 = 6$ горшков, он сравняет время: и ему, и Пуху на еду потребуется по 30 минут. Ответ: 30 минут.

В качестве нестандартной задачи на работу и производительность старшелассникам может быть предложена задача на совместную работу с параметрами.

Задача 18. «Двое рабочих выполняют некоторую работу. Если первый рабочий проработает 2 часа, а затем они вместе будут работать 3 часа, то они вместе выполняют 75% всей работы. Какие значения может принимать время выполнения всей работы двумя рабочими вместе?» [15].

Решение задачи №18:

Пусть p_1 - удельная производительность труда первого рабочего (то есть часть всего объема работы, которую он выполняет за час), p_2 - удельная производительность труда второго рабочего, t-время выполнения всей работы двумя рабочими совместно (в часах). По условию:

$$t(p_1 + p_2) = 1 \text{ и } 2p_1 + 3(p_1 + p_2) = 0.75.$$

Отсюда $p_1 = 0.15 - 0.6p_2, t = \frac{1}{p_1+p_2} = \frac{1}{0.15+0.4p_2}$.

По смыслу задачи $p_2 > 0, p_1 > 0$, следовательно,

$0{,}15 - 0{,}6p_2 > 0$, $p_2 < 0.25$.

Является непрерывной и функция $t(p_2) = \frac{1}{0.15+0.4p_2}$ является непрерывной и монотонно убывает на отрезке (0;0.25), следовательно, при $p_2 \in (0; 0.25)$ значения функции $t(p_2)$ удовлетворяют неравенству:

$t(0.25) < t(p_2) < t(0), 4 < t(p_2) < 6\frac{2}{3}$.

При этом в силу непрерывности функция $t(p_2)$ принимает все значения из интервала $\left(4; 6\frac{2}{3}\right)$. Ответ: $\left(4; 6\frac{2}{3}\right)$.

2.3 Описание результатов педагогического эксперимента

Констатирующий и поисковый результаты педагогического эксперимента проводились на базе русскоязычной группы учеников частного образовательного учреждения «Explore Leaning» в г. Лондон в апреле-мае 2022 г. Данная база педагогического эксперимента была выбрана мною ввиду постоянного проживания в Великобритании и отсутствием фактической возможности проведения педагогического эксперимента на базе российской общеобразовательной школы. В эксперименте участвовало 19 учеников в возрасте 16-17 лет, обучающихся по школьной программе математики A Level, что соответствует 10-11 классам российской общеобразовательной школы.

Констатирующий этап педагогического эксперимента был нами проведен в рамках производственной практики (научно-исследовательской работы) 3.

Цель констатирующего этапа эксперимента – это выявить учащихся 16-17 лет, что соответствует старшим классам российской общеобразовательной школы фактический уровень умения решать текстовые задачи на работу и производительность различными методами.

В рамках данного этапа эксперимента обучающимся была предложена контрольная работа, которая включала в себе 4 задачи:

- стандартные задачи на раздельную работу (задачи №1-2);
- стандартная задача на совместную работу (задача №3);
- нестандартная задача на работу и производительность (задача №4).

Ниже представлен один из вариантов данной контрольной работы с решением задач.

Вариант №1

Задача №1. Решите задачу алгебраическим методом. «Заказ на 110 деталей первый рабочий выполняет на 1 час быстрее, чем второй. Сколько деталей в час делает второй рабочий, если известно, что первый за час делает на 1 деталь больше?» [65].

Решение:

Обозначим за x (деталей в час) - производительность второго рабочего. По условию задачи сказано, что первый рабочий делает за час на 1 деталь больше. Следовательно производительность первого рабочего составит x+1 (деталей в час). Поскольку величина заказа составляет 110 деталей, то на выполнение всего заказа первый рабочий потратит: $\frac{110}{x+1}$ часов, а второй рабочий потратит $\frac{110}{x}$ часов.

Из условия задачи также известно, что первый рабочий выполнит заказ на 1 час быстрее второго, поэтому можем составить уравнение:

$$\frac{110}{x+1}+1=\frac{110}{x}$$

Данное уравнение легко сводится к квадратному:

$$\frac{110}{x}-\frac{110}{x+1}-1=0$$

$x^2+x-110=0$; $D=441, x_1=10, x_2=-11.$

Поскольку производительность рабочего не может быть отрицательной величиной, то второй корень отбрасываем. Получается $x_1=10$.

Ответ: 10 деталей.

Задача №2. Решите задачу геометрическим методом. «По плану тракторная бригада должна была вспахать поле за 14 дней. Бригада вспахивала ежедневно на 5 гектаров, чем намечалось по плану, и потому закончила пахоту за 12 дней. Сколько гектаров было вспахано?» [25, с. 109].

Решение.

Этап 1. Построение двумерной диаграммы (рисунок 5).

Пусть S_{ABCD} изображает весь объем работы (га). AD = x – производительность тракторной бригады в день по плану. AB = 14 - количество дней. S_{AEFN} – площадь, которую вспахала бригада за 12 дней (га), AE = x + 5.

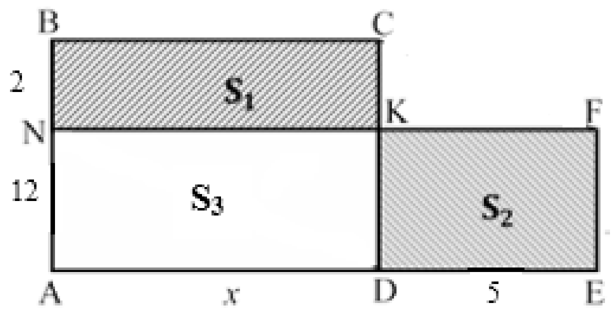

Рисунок 5 – К задаче 2

Этап 2.

1 способ. По условию $S_{ABCD} = S_{AEFN}$, поэтому мы имеем: 14 x = 12 (x + 5).

2 способ. Исключая общую площадь S_3, имеем $S_1 = S_2$ или $2x = 5 \cdot 12$, откуда x = 30, тогда $S_{ABCD} = 30 \cdot 14 = 420$.

Этап 3. Ответ: 420 га было вспахано.

Задача №3. Решите задачу арифметическим и алгебраическим методами. «Двое рабочих, работая вместе, могут выполнить работу за 2 дня. За сколько дней, работая отдельно, выполнит эту работу первый рабочий, если он за 1 день выполняет такую же часть работы, какую второй - за 2 дня?» [22].

Решение задачи алгебраическим методом:

Пусть x количество работы, которое может выполнить первый рабочий за 1 день. Аналогично, пусть y количество работы, которое может выполнить второй рабочий за 1 день, тогда за 2 дня он выполнит количество работы, равное $2 \cdot y$.

По условию задачи, первый рабочий за 1 день выполняет такую же часть работы, как второй за два дня. Поэтому можно составить уравнение: $x = 2 \cdot y$. Отсюда: $y = \frac{x}{2}$.

Получается, что за 1 день оба работника выполнят количество работы равное: $x + y = x + \frac{x}{2} = \frac{3x}{2}$.

За 2 дней они выполнят работу, равную 1, то есть составим и решим уравнение: $2 \cdot \frac{3x}{2} = 1$. Отсюда $x = \frac{1}{3}$.

То есть за 1 день первый рабочий выполнить $\frac{1}{3}$ часть работы, а значит вся работа будет выполнена за 3 дня.

Решение задачи арифметическим методом:

Первый рабочий работает в 2 раза быстрее второго. Тогда, работая вместе, рабочие будут работать в 3 раза быстрее, чем один второй рабочий. Следовательно, один второй рабочий потратил бы на выполнение заказа $2 \cdot 3 = 6$ дней, тогда один первый рабочий потратил бы $6 : 2 = 3$ дня.

Ответ: 3 дня.

Задача № 4. Решите задачу любым методом. «На дне озера бьют ключи. Стадо из 183 слонов могло бы выпить озеро за 1 день, а стадо из 37 слонов – за 5 дней. За сколько дней выпьет озеро один слон?» [105].

Решение:

37 слонов за пять дней выпивают столько же, сколько $37 \cdot 5 = 185$ слонов за один день.

Разница в два слона объясняется тем, что за четыре лишних дня из ключей "натекает" столько воды, сколько два слона выпивают за день.

Таким образом, ключи восполняют за день половину дневной порции слона. А в озере (без ключей) 182,5 дневных порций слона. Один слон половину дня пьет воду "из озера", а половину – "из ключей". Поэтому ему понадобится $182.5 \cdot 2 = 365$ дней.

Ответ: за 365 дней.

В таблице 5 приведены результаты контрольной работы.

Таблица 5 - Результаты контрольной работы

№ задания	Выполнили верно	Выполнили неверно	Не приступили к решению
1	(84%) 16	(11%) 2	(5%) 1
2	(16%) 3	(21%) 4	(63%) 12
3	(78%) 15	(11%) 2	(11%) 2
4	(11%) 2	(32%) 6	(57%) 11

По результатам контрольной работы можно сделать вывод, что обучающиеся справились в большей части со стандартными задачами на работу и производительность, которые решаются алгебраическими методами (84% с задачей №1 и 78% с задачей №3).

Отметим, что стандартная задача №2, которую требовалось решить геометрическим методом, и нестандартная задача № 4 вызвали затруднения; небольшое количество учащихся (11%) решили задачу №3 на совместную работу также и арифметическим методом.

Виды ошибок учащихся по каждому заданию представлены в таблице 6.

Таблица 6 – Виды ошибок школьников по итогам контрольной работы

Задача № 1		
Не записан подробно ход решения задачи	Вычислительная ошибка	Неправильный алгоритм решения задачи
1	1	
Задача № 2		
Не записан подробно ход решения задачи	Вычислительная ошибка	Неправильный алгоритм решения задачи
0	1	3
Задача № 3		
Не записан подробно ход решения задачи	Вычислительная ошибка	Неправильный алгоритм решения задачи
2	0	0
Задача № 4		
Не записан подробно ход решения задачи	Вычислительная ошибка	Неправильный ход решении задачи
1	0	5

Основные результаты выполнения контрольной работы учащихся представлены в таблице 7.

Таблица 7 – Количественный анализ результатов контрольной работы

Оценка	Количество учеников, получивших данную оценку
«5»	(11%) 2
«4»	(68 %) 13
«3»	(16 %) 3
«2»	(5%) 1

Анализ приведенных результатов позволяет сделать вывод о том, что знания у старшеклассников в области решения задач на работу и производительность преимущественно основаны на умении решать стандартные задачи алгебраическим или арифметическим методами. Значительные затруднения у 16% учеников вызвала задачи, решаемая геометрическим методом, у 11% учеников – задачи, неимеющие определенного «стандартного» алгоритма решения.

На поисковом этапе эксперимента в январе-феврале 2023 г. были апробированы на базе русскоязычной группы учеников частного образовательного учреждения «Explore Leaning» в г. Лондон разработанные нами системы текстовых задач на работу и производительность в рамках технологии развивающего обучения их решению.

Итоги педагогического эксперимента подводились на основе наблюдений, бесед с учащимися, результатов выполнения ими контрольной работы, а также в ходе его поискового этапа.

Выводы по второй главе:

Во второй главе были исследованы методические основы обучения решению текстовых задач на работу и производительность в старших классах общеобразовательной школы.

1. Разработаны методические рекомендации по обучению старшеклассников решению текстовых задач на работу и производительность.

Методика обучения решению текстовых задач на работу и производительность старшеклассников общеобразовательной школы представляет собой взаимосвязанную совокупность форм, методов и средств обучения. Ее можно структурно разделить на четыре последовательных этапа:

Этап 1. Обучение умению анализировать текст задачи.

Этап 2. Обучение умению определять тип задачи и проводить поиск определенного метода ее решения.

Этап 3. Обучение умению оформлять решение задачи, реализуя план ее решения на основе выбранного метода.

Этап 4. Обучение умению осуществлять проверку решения задачи на основе изучения ее найденного решения, формулировки выводов и запись ответа к ней.

Для подтверждения эффективности сформулированных методических рекомендаций нами была определена система контроля качества знаний по данной теме «Задачи на работу и производительность», который предусматривает проверку у старшеклассников уровня умения решать текстовые задачи на работу и производительность различными методами. Для его выявления составлена контрольная работа.

2. Исследованы возможности технологии развивающего обучения как методической основы обучения старшеклассников решению текстовых задач на работу и производительность.

На основе анализа принципов, достоинств и недостатков технологии развивающего обучения решению текстовых задач на работу и производительность можем утвердительно заключить, что она является перспективной при обучении математике в старших классах общеобразовательной школы по следующим причинам:

- учитывает возрастные особенности старшеклассников и ориентируется на их ближайший «горизонт» жизни окончания школы и вхождения во взрослую жизнь, поскольку большая часть старших школьников уже имеет учебный опыт решения текстовых задач в 5-9 классах и имеют практический опыт выполнения определенных видов работ как с оплатой, так и без таковой;
- старшеклассники будут получать моральное и эмоциональное удовлетворение от решения данных задач, поскольку они затрагивают практические аспекты их жизнедеятельности;
- способствует развитию их познавательной активности, поскольку подразумевает самостоятельную формулировку учебных и практических целей при решении текстовых задач на работу и производительность;
- способствует расширению экономического кругозора старшеклассников за счет знакомством с понятиями живого, овеществленного труда при выполнении различных видов работ;

– способствует формированию учебной конкуренции между старшеклассниками за счет рационального сочетания индивидуальной и групповой работы.

Разработана система текстовых задач на работу и производительность в рамках технологии развивающего обучения решению задач, которая включает:

- стандартные задачи на раздельную работу;
- стандартные задачи на совместную работу:
- нестандартные задачи на работу и производительность.

Стандартные задачи на раздельную работу в рамках разработанной системы включали в себя задачи №№ 1-4, решаемые арифметическим и алгебраическим методами, задачу№ 5, решаемую геометрическим методом.

Стандартные задачи на совместную работу включали в себя задачи №6-11, также решаемых арифметическим и алгебраическими методами, задачу №13, решаемую геометрическим методом; а также задачу №12, которая может быть решена 4 различными способами: 1 и 2 способы – алгебраическим методом; 3 и 4 способы – арифметическим методом.

Нестандартные задачи на работу и производительность представлены задачами, которые решаются с помощью приема введения вспомогательных элементов (задача № 14) и методом разбиения на подзадачи (задача №15); задачами, решаемыми на олимпиадах для школьников (задачи №16 и №17); задачей на совместную работу с параметрами (задача №18).

На основании вышеизложенного был сделан вывод, что использование при обучении математики в старших классах разработанной системы текстовых задач на работу и производительность, которые могут быть решены на основе комбинации традиционных и нетрадиционных методов позволят старшеклассникам сформировать устойчивые навыки их решения не только при сдаче ЕГЭ, но и в рамках углубленного изучения математики в профильных классах.

3. Проведен педагогический эксперимент, представлены его результаты.

Констатирующий и поисковый результаты педагогического эксперимента проводились на базе русскоязычной группы учеников частного образовательного учреждения «Explore Leaning» в г. Лондон (апрель-май 2022 г.)

На констатирующем этапа эксперимента у учащихся 16-17 лет, что соответствует старшим классам российской общеобразовательной школы, был выявлен фактический уровень умения решать текстовые задачи на работу и производительность различными методами с помощью разработанной контрольной работы, включающей стандартные и нестандартные задачи.

Ее результатам показали, что знания у старшеклассников в области решения задач на работу и производительность преимущественно основаны на умении решать стандартные задачи алгебраическим или арифметическим методами. Значительные затруднения у 16% учеников вызвала задачи, решаемая геометрическим методом, у 11% учеников – задачи, неимеющие определенного «стандартного» алгоритма решения.

На поисковом этапе эксперимента в январе-феврале 2023 г. были апробированы разработанные нами системы текстовых задач на работу и производительность в рамках технологии развивающего обучения их решению.

Итоги педагогического эксперимента подводились на основе наблюдений, бесед с учащимися, результатов выполнения ими контрольной работы, а также в ходе его поискового этапа.

Анализ приведенных результатов позволяет сделать вывод о том, что знания у старшеклассников в области решения задач на работу и производительность преимущественно основаны на традиционном подходе, основанном на алгебраическом или арифметическом методах решения данных задач. Использование геометрического метода при решении текстовых задач вызвало значительные затруднения, как и поиск творческих способов решения нетрадиционных задач на работу и производительность, которые не имеют «стандартного» пути решения.

Заключение

Сформулируем основные выводы и результаты, полученные в результате проведенного исследования:

1. Раскрыта сущность понятия текстовой задачи и ее роли в обучении математике. Установлено, что в настоящее время существуют разные трактовки понятия «задача»; мы отождествляем понятие «задача» с понятием «упражнение»; под задачей понимаем всякую знаковую модель проблемной ситуации, считая понятие проблемной ситуации исходной; текстовая математическая задача на работу и производительность представляет собой формализованную в виде текста модель проблемной ситуации в области живого или овеществленного труда, которая требует дать количественную оценку его отдельных компонентов с использованием математических методов. При этом живой труд представляет собой целесообразную деятельность людей и механизмов, направленную на выполнение определенных действий, связанных с выполнением определенной работы раздельным или совместным способом, а овеществленный труд представляет собой результат живого труда, в материализованной форме.
2. Выявлены виды текстовых задач на работу и производительность и определить их место в структуре школьного курса математики старших классов. Установлено, что данные задачи можно условно разделить на два основных типа: на совместную работу и раздельную работу. Впервые учащиеся знакомятся с ними в начальной школе. В 5-9 классах федеральные учебники знакомят школьников с базовыми понятиями в этой области и основными методами решения данных задач. В 10-11 классах учебники углубленного уровня содержат задачи на работу и производительность в контексте повторения изученного материала. В результате анализа учебников алгебры и начал математического анализа профильного уровня для 10-11 классов определено, что наиболее

приемлемым учебником для обучения старшеклассников решению задач на работу и производительность являются учебники Колягина Ю.М., Ткачева М.В., Федоровой Н.Е., Шабунина М.И. Рассмотрение данных текстовых задачах в их учебнике для 10 класса представлено в главах, посвященным повторению курса алгебры 7-9 классов, и Главе 3 «Многочлены. Алгебраические уравнения», § 10 «Системы уравнений».

3. Рассмотрены психолого-педагогические особенности обучающихся старших классов. Определено, что текстовые математические задачи являются одним из дополнительных элементов формирования личностных смыслов старшеклассников; текстовые задачи по математике несут в себе глубокое смысловое и жизненное значение для старшеклассников, поскольку позволяют им ознакомиться с различными типами жизненных ситуаций. Однако, к сожалению, даже в современных учебниках математики содержание многих текстовых задач является давно устаревшим. Это приводит к формированию неудовлетворенности школьников по причине расхождения содержания многих текстовых задач по математике с окружающей их реальностью, поэтому формируется потребность решения актуальных для современной жизни текстовых задач. Данная учебная потребность старшеклассников требует удовлетворения, а это создает небходимость в возникновении новых типов текстовых математических задач современного типа, направленных на развитие их избирательных познавательных интересов.

4. Изучены проведенные исследования и опыт работы учителей математики по обучению старшеклассников решению текстовых задач на работу и производительность в общеобразовательной школе. Выявлено, что несмотря на значительную степень теоретико-методическй разработанности основ их обучению и на длительный историко-педагогический опыт использования текстовых задач на работу и производительность, старшеклассники, к сожалению, испытывают

затруднения при их решении в силу формального формального подхода многих российских учителей к процессу обучения решению текстовых задач, использования текстовых математических задач в качестве вспомогального инструмента при изучении определенных тем в рамках программы старших классов по алгебре и началам математического анализа и геометрии, недостаточно полного использования развивающих и воспитательных функций текстовых математических задач, что особенно важно при формировании профессиональной траектории будущих выпускников российских школ, неэффективного использования форм групповой работы и совместного сотрудничества учителя и старшеклассников при самостоятельном моделировании содержания тектовых задач.

5. Обоснованы методические рекомендации по обучению старшеклассников решению текстовых задач на работу и производительность. Так, определено, что методика обучения решению текстовых задач на работу и производительность старшеклассников общеобразовательной школы представляет собой взаимосвязанную совокупность форм, методов и средств обучения. Ее можно структурно разделить на четыре последовательных этапа: обучение умению анализировать текст задачи: обучение умению определять тип задачи и проводить поиск определенного метода ее решения; обучение умению оформлять решение задачи, реализуя план ее решения на основе выбранного метода; обучение умению осуществлять проверку решения задачи на основе изучения ее найденного решения, формулировки выводов и запись ответа к ней.

6. Разработана система текстовых задач на работу и производительность в рамках технологии развивающего обучения решению задач. Данная технология учитывает возрастные особенности старшеклассников и ориентируется на их ближайший «горизонт» жизни

окончания школы и вхождения во взрослую жизнь, способствует развитию их познавательной активности, способствует расширению экономического кругозора старшеклассников за счет знакомством с понятиями живого, овеществленного труда при выполнении различных видов работ и приводит к формированию здоровой учебной конкуренции между старшеклассниками за счет рационального сочетания индивидуальной и групповой работы. Предложенная система текстовых задач на работу и производительность в рамках технологии развивающего обучения решению задач включает: стандартные задачи на раздельную работу; стандартные задачи на совместную работу; нестандартные задачи на работу и производительность, решаемые различными методами. Использование при обучении математики в старших классах разработанной системы текстовых задач на работу и производительность, которые могут быть решены на основе комбинации традиционных и нетрадиционных методов позволят старшеклассникам сформировать устойчивые навыки их решения не только при сдаче ЕГЭ, но и в рамках углубленного изучения математики в профильных классах.

7. Проведен педагогический эксперимент и представлены его результаты. В результате констатирующего этапа эксперимента был выявлен недостаточный уровень сформированности у старшеклассников умения решать текстовые задачи на работу и производительность, особенно задач, которые не могу быть решены традиционными методами. На поисковом этапе эксперимента были апробированы разработанные нами системы текстовых задач на работу и производительность в рамках технологии развивающего обучения их решению.

Все это дает основание считать, что задачи, поставленные в исследовании, полностью решены.

Список используемой литературы

1. Балл Г.А. О психологическом содержании понятия «задача» [Текст] / Г.А. Балл // Вопросы психологии. 1970. № 5. С. 81-87.
2. Бердовская С.В. Использование метода «Оценка плюс пример» при решении нестандартных задач по математике [Электронный ресурс]. URL:https://urok.1sept.ru/articles/683256 (дата обращения 15.03.2023).
3. Бодров В.А., Орлов В.Я. Психология и надежность в системах управления техникой [Текст]. М.: ИП РАН, 1998. 280 с.
4. Бодров В.А., Ложкин Г.В., Плющ А.Н. Нелинейная модель мотивационной сферы личности [Текст] // Психологический журнал. 2001. Т. 22. С. 90-100.
5. Брушлинский А.В. Психология мышления и кибернетика [Текст]. М.: Издательство «Мысль», 1970. 300 с.
6. Быкова Н.П. Графовое моделирование как средство оптимизации межпредметных связей в процессе обучения учащихся 8-10 классов решению алгебраических и физических текстовых задач [Текст]: автореф. дис. … канд. пед. наук : 13.00.02 / Ом. гос. пед. ун-т. Омск, 2006. 21 с.
7. Вахрушева Н.В. Использование цепочек взаимосвязанных задач в реализации профессиональной направленности обучения математике в экономическом вузе [Текст]: автореф. дис. … канд. пед. наук: 13.00.02 / ГОУ ВПО «Арзамасский государственный педагогический институт». Орел, 2006. 20 с.
8. Виниченко М.А. Психолого-педагогические особенности развития личности старших школьников в условиях сельских учебно-воспитательных комплексов: дисс. канд. психолог. наук [Текст]. Спец. 19.00.07. Белгород, 2003. 196 с.
9. Вольф Ф. Проблемы в преподавании математики [Текст]. Вашингтон, 1966. с. 138.
10. Гаткевич Д.И. О формировании общих способов решения задач у учащися [Текст] // В кн.: Актуальные вопросы методики преподавания математики / Сб. научн. трудов. М.: МГПИ им. В.И. Ленина, 1975. С. 32-35.

11. Гинзбург М.Р. Психологическое будущее городских и сельских подростков. [Текст] // Мир психологии. 1995. № 4. С. 60-67.
12. Гинзбург М.Р. Психологическое содержание личностного самоопределения. [Текст] // Вопросы психологии.1994. № 3. С.14-26.
13. Гульчевская В.Г. Формирование рациональных способов решения задач у подростков [Текст] // В кн.: Оптимизация процесса обучения / Под ред. Ю.М. Колягина. М.: НИИ школ МП РСФСР, 1978. С. 52-66.
14. Гурова Л.Л. Психологический анализ решения задач [Текст]. Воронеж: Изд-во Воронеж. ун-та, 1976. 327 с.
15. Далингер В.А. Задачи с параметрами: учебное пособие. [Текст] / В.А. Далингер. – Омск: Изд-во ООО «Амфора», 2012. 961 с.
16. Далингер В.А. Совершенствование процесса обучения учащихся решению текстовых задач [Текст] // Омский научный вестник. 2011. № 2(96). С.168-170.
17. Данилов М.А. Процесс обучения в советской школе [Текст]. М., 1960, с. 206.
18. Демидова Т.Е. Теория и практика решения текстовых задач [Текст] / Т.Е. Демидова. М.: «Академия», 2002. 288 с.
19. Добрица В.П., Садыкова А.Ж. К вопросу о необходимости компрессивных методов обучения [Текст] // Качество школьного образования: состояние, тенденции и перспективы. Материалы международной научно-практической конференции (18-19 мая 2000 г.). ч. 2. МОН РК, КОА им. Алтынсарина. ИОО. Алматы. 2000. С. 34-36.
20. Затолокина Ю.С., Фрундин В.Н. Индивидуально-дифференцированный подход в обучении решению текстовых задач в курсе алгебры 7–9 классов [Текст] // Актуальные исследования в области математики, информатики, физики и методики их изучения в современном образовательном пространстве: результаты исследований в области методики изучения математики, информатики и физики при реализации программ основного общего и среднего общего образования, среднего профессионального

образования. Выпуск 3. Курск. 2018. Изд-во: Курский государственный университет. С. 33-37.

21. Иванова Т.А. Теория и технология обучения математике в средней школе: Учебное пособие для студентов математических специальностей педагогических вузов [Текст] / Под ред. Т.А. Ивановой. 2-е изд. испр.и доп. Н. Новгород: НГПУ. 2009. 355 с.
22. Канин Е.С., Нагибин Ф.Ф. Заключительный этап решения учебных задач [Текст] // В кн.: Преподавание алгебры и геометрии. М.: Просвещение, 1982. С.131-138.
23. Капкаева Л.С. Геометрический метод как средство организации поисковой деятельности школьников в процессе решения алгебраических задач // Современные проблемы науки и образования. 2018. №6. [Электронный ресурс]. – URL: https://science-education.ru/ru/article/view?id=28336 (дата обращения 10.04.2023).
24. Капкаева Л.С. Интеграция алгебраического и геометрического методов в среднем математическом образовании: автореф. дис.докт. пед. наук: 13.00.02. [Текст] / Морд. гос. пед. ин-т им. М.Е. Евсевьева. Саранск, 2004. 41 с.
25. Капкаева Л.С. Интеграция алгебраического и геометрического методов решения текстовых задач: учебное пособие для студ. мат. спец. пед. вузов [Текст]. Саранск: Мордов. гос. пед. ин-т им. М. Е. Евсевьева, 2001. 134 с.
26. Карр Ч., Хоун Ч. Количественные методы принятия решений в экономике [Текст]. М., 1966. с. 16.
27. Кац М.Г. Использование графиков при решении задач на составление уравнений [Текст] / М.Г. Кац // Математика в школе. 1996. №2. С.22-25.
28. Кашицина Ю.Н. Методика обучения решению текстовых задач по математике с использованием средств ИКТ [Текст] / Ю.Н. Кашицина, М.В. Васильева // Мир науки, культуры, образования. 2020. №1(80). С.225-229.

29. Колягин Ю.М. Задачи в обучении математике. Часть 2. Обучение математике через задачи и обучение решению задач [Текст] / Ю.М. Колягин. М.: Просвещение, 1977. 204 с.
30. Колягин Ю.М. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс : базовый и углублённый уровни : учебник. [Текст] / Ю.М. Колягин, М.В. Ткачев, Н.Е. Федорова, М.И. Шабунин. -10-е изд., стер.М.: Просвещение, 2022. 384 с.
31. Колягин Ю.М. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс : базовый и углублённый уровни : учебник. [Текст] / Ю.М. Колягин, М.В. Ткачев, Н.Е. Федорова, М.И. Шабунин. -10-е изд., стер. М.: Просвещение, 2022. 384 с.
32. Кон И.С. Психология ранней юности [Текст]. М.: Просвещение, 1989. 255 с.
33. Концепция развития математического образования в Российской Федерации [Электронный ресурс]. URL: https://rg.ru/documents/2013/12/27/matematika-site-dok.html [Утверждена Правительством РФ 24.12.2013 № 2506-р (с учетом редакции, внесенной распоряжением Правительства Российской Федерации от 08.10.2020 № 2604-р)]. М: Правительство РФ, 2013. 5 с. (дата обращения .
34. Кочегуро Е.Н. Рабочая программа курса: «Решение нестандартных задач по математике» [Электронный ресурс]. URL: https://urok.1sept.ru/articles/686640 (дата обращения 07.03.2023).
35. Крупич В.И. Модель систематизации структур текстовых задач школьного курса математики [Текст] // В кн.: Задачи как цель и средство обучения математике учащихся средней школы. Л.: ЛГПИ им. А.И. Герцена, 1981. С.13-25.
36. Крючкова Л.Н. Использование графических схем при решении текстовых задач [Электронный ресурс]. URL:https://urok.1sept.ru/articles/312836 (дата обращения 22.03.2023).

37. Лебедев, В.С. Анализ и решение текстовых задач. Алгоритмизация [Текст]/ В.С. Лебедев // Математика. 2000. №41. С.8-10.
38. Леонтьев Д.А. Ценности как междисциплинарное понятие: опыт многомерной реконструкции [Текст]/ // Вопросы философии. 1994. №4. С.15-27.
39. Леонтьев Д.А. От социальных ценностей к личностным: социогенез и феноменология ценностной регуляции деятельности [Текст] // Вестник МГУ. Серия 14. Психология. 1996. № 4. С.35-44.
40. Лурье М. В. Задачи на составление уравнений. Техника решения [Текст] / М.В. Лурье. 3-е издание стереотип. М.: Изд-во УНЦ ДО, 2005. 124 с.
41. Макарычев Ю. Н. Алгебра. 8 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений [Текст]. / Ю. Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк, К. И. Нешков, С. Б. Суворова. // под ред. Теляковского.17-е изд.М.: Просвещение, 2009. 271 с. : ил.
42. Маланичева Т.А. О решении задач на работу. [Текст] // Математика в школе. 2015. №5. С.41-43.
43. Матушкина З.П. Методика обучения решению задач: Учебное пособие [Текст]. Курган: Изд-ва Курганского гос. ун-та, 2006. 154 с.
44. Мерзляк А.Г. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс углубленный уровень: учебник. [Текст] / А.Г. Мерзляк, Д.А. Номировский, В.М. Поляков. 6-е изд.М: Просвещение, 2022. 477 с.
45. Мерзляк А.Г. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс: углубленный уровень : учебник. [Текст] / А.Г. Мерзляк, Д.А. Номировский, В.М. Поляков. 6-е изд. М.: Просвещение, 2023. 415 с.
46. Методика и технология обучения математике. Курс лекций: пособие для вузов [Текст]/под научн.ред. Н.Л. Стефановой, Н.С. Подходовой.-2-е изд.испр.М.:Дрофа, 2008. 415 с.

47. Методика обучения математике в 2 ч. Часть 1.[Текст] : учебник для вузов / Н. С. Подходова (и др). ; под редакцией Н. С. Подходовой, В. И. Снегуровой. М.: Издательство Юрайт, 2022. 274 с.
48. Мирошин В.В. Формирование содержательно-методической линии задач с параметрами в курсе математики общеобразовательной школы [Текст]: автореф. дис. … канд. пед. наук: 13.00.02 / ГОУ ВПО «Московский городской педагогический университет». М., 2008. 22 с.
49. Мугаллимова С.Р.Формирование эвристических приемов у учащихся в процессе обучения решению задач векторным методом [Текст]: автореф. дис. …. канд. пед. наук: 13.00.02 / ГОУ ВПО «Омский государственный педагогический университет. Омск, 2008. 22 с.
50. Муравин Г.К. Математика: алгебра и начала математического анализа. 10 класс : углублённый уровень : учебник. [Текст]/ Г.К. Муравин, О.В. Муравина.10-е изд.М.: Просвещение, 2022. 319 с.
51. Муравин Г.К. Математика: алгебра и начала математического анализа. 11 класс : углублённый уровень : учебник. [Текст] / Г.К. Муравин, О.В. Муравина. 9-е изд.М.: Просвещение, 2022. 319 с.
52. Никитина Л.А., Кукушкина И.С. Вовлечение детей в совместную деятельность в процессе обучения решению текстовых задач на уроках математики [Текст] // Педагогическое образование на алтае. 2016. №2. 39-45.
53. Никитина Л.А. Поздеева С.И. Педагогическое наследие Г.Н. Прозументовой как ориентир для науки и образовательной практики [Текст] / Л.А. Никитина, С.И. Поздеева // Науч-пед. обозрение «Pedagogical Review». 2015. №4. С.7-14.
54. Петракова Н.П. Математическое творчество – высшая форма самостоятельности мышления учащихся [Электронный ресурс] / Н. П. Петракова. // Научно-методический электронный журнал «Концепт». 2015. Т. 6. С.111–115. URL: http://e-koncept.ru/2015/65223.htm (дата обращения

55. Пидоря Т.А. Система работы учителя математики по развитию смыслового чтения в ходе обучения решению текстовых задач. [Текст] // Информационно-коммуникационные технологии в педагогическом образовании. 2019. №3 (60). С. 56-66.
56. Плюсы и минусы. Образование: концепция развивающего обучения Л.М. Фридмана: плюсы и минусы [Электронный ресурс]. URL: https://plusiminusi.ru/koncepciya-razvivayushhego-obucheniya-fridmana-plyusy-i-minusy/ (дата обращения 10.03.2023).
57. Познавательные задачи в обучении гуманитарным наукам.[Текст] / Под ред. И.Я. Лернера, М., 1972, с.23.
58. Пойа Д. Как решать задачу. Пособие для учителей. Пер. с англ. [Текст]/ Под ред. Ю.М. Гайдука. 2-е изд. М.: Учпедгиз, 1961. 207 с.
59. Пономарев Я.А. Психология творческого мышления. [Текст] М., 1960. с.109.
60. Потанин Г.М., Косенко В.Г. Психолого-коррекционная работа с подростками. Учебное пособие [Текст]. Белгород: Белгородский государственный педагогический университет, 1995. 222 с.
61. Проведение исследования PISA-2018 в России. [Электронный ресурс]. URL: http://www.centeroko.ru/pisa18/pisa2018_ml.html. (дата обращения: 09.04.2021).
62. Прозументова Г.Н. Педагогика совместной деятельности: смысловые контексты и образовательная реальность [Текст] / Г.Н. Прозументова // Школа совместной деятельности: разработка образовательных программ в развивающейся школе / Под ред. Г.Н. Прозументовой.Томск: Дельтаплан, 2010. Кн. 5. С. 4-16.
63. Психологический словарь. [Текст]. М.: Просвещение, 1983. 198 с.
64. Репетитор по скайпу. Математика: задачи на работу с решениями. [Электронный ресурс]. URL:http://www.itmathrepetitor.ru/tekstovye-zadachi-zadachi-na-rabotu-s-re/ (дата обращения 07.04.2023).
65. Решу ЕГЭ. Образовательный портал для подготовки к экзаменам:
[
Э
л

дата обращения 04.04.2023).
66. Рогачева Э.Н. Геометрический метод (подобия) решения текстовых задач (на движение, работу) в курсе математики (8-9 класс) [Электронный ресурс]. URL: https://infourok.ru/geometricheskiy-metod-podobiya-resheniya-tekstovih-zadach-na-dvizhenie-rabotu-v-kurse-matematiki-klass-1577667.html. (дата обращения: 08.04.2023).
67. Рудник А.В. Переформулирование текста задачи как путь отыскания её решения // В кн.: Из опыта преподавания математики [Текст] / Сост. А.Д. Семушин и С.Б. Суворова. М.: Просвещение, 1978. С. 119-128.
68. Рязанов Б.П. Совместная работа [два приема для решения задач на совместную работу] [Текст] // Математика в школе.1996. № 2. С. 28.
69. Саранцев Г.И. Методика обучения математике [Текст] : методология и теория : учебное пособие для студентов бакалавриата высших учебных заведений по направлению «Педагогическое образование» (профиль «Математика»): по направлению 050100 Педагогическое образование / Г.И. Саранцев. Казань: Центр инновационных технологий, 2012. 292 с.
70. Саранцев Г.И. О методике обучения школьников поиску решения математических задач [Текст] //В кн.: Преподавание алгебры и геометрии в школе. М.: Просвещение, 1982. С. 123-131.
71. Сафонова Л. А. О действиях, составляющих умение решать текстовые задачи [Текст] // Математика в школе. 2000. № 8. С.34-36.
72. Сдам ГИА: Решу ЕГЭ [Электронный ресурс]. URL: https://math-ege.sdamgia.ru/problem?id=26596 (дата обращения 19.02.2023).
73. Середа А.А. Некоторые методические аспекты обучения старшеклассников решению текстовых задач на работу и производительность в общеобразовательной школе [Текст] // Вестник магистратуры. 2022. № 11-3(134). С. 48-50.
74. Середа А.А. Технология развивающего обучения старшеклассников решению текстовых задач на работу и производительность в общеобразовательной

школе [Текст] / И.В. Антонова, А.А. Середа // Дидактика математики: проблемы и исследования. 2023. №57.
75. Славская К.А. Детерминация процесса мышления. В кн.: Исследования мышления в советской психологии [Текст]. М., 1966, с. 211.
76. Смирнова А.А. Метод варьирования текстовых задач по математике как средство повышения качества знаний учащихся: автореф. дис. … канд. пед. наук: 13.00.02 [Текст] // ФГБОУ ВПО «Российский государственный педагогический университет». СПб, 2007. 22 с.
77. Текстовые задачи на работу. Решение задач 1-3 [Электронный ресурс]. URL: http://www.itmathrepetitor.ru/tekstovye-zadachi-na-rabotu-reshenie-za/ (дата обращения: 10.03.2023).
78. Текстовые задачи на работу. Решение задач 4-6 [Электронный ресурс]. URL: http://www.itmathrepetitor.ru/tekstovye-zadachi-na-rabotu-reshenie-za-2/ (дата обращения: 11.03.2023).
79. Текстовые задачи на работу. Решение задач 10-12 [Электронный ресурс]. URL: http://www.itmathrepetitor.ru/tekstovye-zadachi-na-rabotu-reshenie-za-5/ (дата обращения: 12.03.2023).
80. Тимофеева А.В. Решение задач на совместную работу методом уравнений [Текст] // Вестник научных конференций, 2018. №6-1 (34). С. 105-110.
81. Тихомиров О.К. Структура мыслительной деятельности человека [Текст]. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1969. 300 с.
82. Федеральный государственный образовательный стандарт среднего общего образования: [Утвержден Министерством образования и науки РФ 17.05.2012 № 413 (с учетом редакции, внесенной приказом Министерства просвещения РФ от 11 декабря 2020 г. № 712)]. М: Минобрнауки РФ, 2012. 45 с. [Электронный ресурс]. URL: https://fgos.ru/LMS/wm/wm_fgos.php?id=sred (дата обращения 05.04.2021).
83. Федеральный институт педагогических измерений [Электронный ресурс.].

84.Фельдштейн Д.И. Психология развития личности в онтогенезе [Текст]. М.: Педагогика, 1989. 208 с.
85.Фридман Л.М. Графическое решение текстовых задач / Из опыта преподавания алгебры в средней школе [Текст]. Под ред. П. В. Стратилатова. М.: Учпедгиз, 1958. С.132-141.
86.Фридман Л.М. Как научиться решать задачи: Кн. для учащихся 10-11 классов [Текст] / Л.М. Фридман. М.: Просвещение, 2004. 255 с.
87.Фридман Л.М. Логико-психологический анализ школьных учебных задач [Текст]. М.: Педагогика. 1977. 207 с.
88.Фридман Л.М. Психолого – педагогические основы обучения математике в школе: Кн. для учителей [Текст]. М.: Просвещение,1983. 192 с.
89.Фридман Л.М. Сюжетные задачи по математике. История, теория, методика [Текст]. М.: Школьная пресса, 2002. 115 с.
90.Фридмал Л.М. Теоретические основы методики обучения математике: Учебное пособие. Изд. 3-е [Текст]. М.: Книжный дом «Либроком», 2009. 248 с.
91.Фридман Л.М. Учитесь учиться математике [Текст]. М.: Просвещение, 1985. 112 с.
92.Человек и вычислительная техника. Под ред. В.М. Глушкова [Текст]. Киев: Наук. думка, 1971. с. 65.
93.Центр подготовки к ЕГЭ «ЕГЭ-студия». Задачи на работу на ЕГЭ по математике [Электронный ресурс]. URL: https://ege-study.ru/zadachi-na-rabotu-n
94.Цукерман Г.А. Совместная учебная деятельность как основа формирования умения учиться [Текст]: автореферат диссертации на соискание ученой степени доктора психологических наук: спец. 19.00.07 / Г.А. Цукерман; Научно-исследовательский институт общей и педагогической психологии. М., 1992. 39 с.

-

p

o

-

95.Шадрина И.В. Еще раз о простой задаче.[Текст] //Начальная школа. 2005. №3. С.89-92.
96.Шапиро И. М. Использование задач с практическим содержанием в преподавании математики: Кн. для учителя [Текст]. М.:Просвещение, 1990. 96 с.
97.Шевкин А.В. Математика. Школа. Будущее [Электронный ресурс]. URL: http://www.shevkin.ru (дата обращения 11.04.2023).
98.Шевкин А.В. Тектовые задачи в школьном курсе математики: Лекция 1 [Электронный ресурс]. URL:http://www.shevkin.ru/stat-i-podrobnee/a-v-shevkin-tekstovy-e-zadachi-v-shkol-nom-kurse-matematiki-lektsiya-1/ (дата обращения: 04.04.2021.
99.Шевкин А.В. Тектовые задачи в школьном курсе математики [Текст]. .М.: Илекса, 2019. 246 с.
100. Шевкин А.В. О задачах на «работу» и не только о них [Текст] / А.В. Шевкин // Математика в школе. 1993. № 6. С. 16-18.
101. Шевкин А.В. От задач на совместную работу к задачам на наибольшее и наименьшее значение [Текст] // Математика. 1996. №38. С. 10-11.
102. Шпитальский Е. Образовательное значение арифметических задач в связи с аналитическим приёмом и графическим способом их решения [Текст]. М.: тип. Г. Лисснера и А. Гешеля, 1904. 38 с.
103. Щепоткин А.А. Алгоритм решения задач на тему «Работа» [Текст] // Математика в школе. 1993. № 2. С. 21-22.
104. Эриксон Э. Идентичность: юность и кризис [Текст]. М.: Издательская группа «Прогресс», 1996. 320 с.
105. Ященко И.В. Проект МЦНМО «Система задач» / И.В. Ященко, П.В. Сергеев, Е.С. Горская, Л.Э. Медников, П. Митричев, В.Д. Арнольд [Электронный ресурс]. URL: https://problems.ru/about_system.php. (дата обращения 12.04.2023).

106. Caroline Chen. The Paradox of the Proof [Electronic resource] // Project Wordsworth, 2013. URL: http://projectwordsworth.com/ the-paradox-of-the proof. (дата обращения: 11.02.2022).
107. Daniel J. Brahier. Teaching Secondary and Middle School Mathematics [Text] / J. Brahier. Daniel // The Teaching of Number Sense, 2016. PP. 235-244.
108. Hamel J. Case study method, Beverly Hills [Text] CA: Sage Publications, 1993.
109. Juergen Maasz. A New View of Mathematics Will Help Mathematics Teachers [Text] ALM International Journal. 1(1). 2005. 4-5.
110. Richardson F.C. The mathematics anxiety rating scale: Psychometric data [Text] / F.C. Richardson, R.M. Suinn // Journal of Counseling Psychology. 1972.
111. Thompson P.W. The design of tasks in support of teachers’ development of coherent mathematical meanings [Text] / Thompson, P.W., Carlson, M.P. & Silverman J. J // Math Teacher Educ, 2007. № 4. С. 415-432.
112. Yin R.K. Case Study Research, Design and Methods, 2nd ed [Text] Newbury Park, Sage Publications. 1994.