МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Тольяттинский государственный университет»

Институт математики, физики и информационных технологий
(наименование института полностью)

Кафедра «Высшая математика и математическое образование»
(наименование)

44.04.01 Педагогическое образование
(код и наименование направления подготовки)

Математическое образование
(направленность (профиль))

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА (МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ)

на тему «Методика обучения теме «Обратная функция» в курсе алгебры и начал математического анализа общеобразовательной школы»

Обучающийся Ю.С. Саврасова
(Инициалы Фамилия) (личная подпись)

Научный
руководитель канд. пед. наук, доцент, Н.Н. Кошелева
(ученая степень (при наличии), ученое звание (при наличии), Инициалы Фамилия)

Тольятти 2022

Оглавление

Введение

Актуальность и научная значимость настоящего исследования. Актуальность исследования обусловлена тем, что в настоящее время с внедрением Федерального государственного образовательного стандарта (полного) общего образования (ФГОС), основная роль в системе образования отводится результатам обучения. Поэтому целью современного образования становится создание условий, при которых учащиеся в ходе образовательного процесса смогут получить лучшие результаты обучения. Исходя из этого, переход к новому ФГОС предполагает внедрение качественно новой модели процесса обучения.

В настоящее время уделяется большое внимание школьному образованию как основной ступени образовательного процесса. Одна из важнейших его задач – обеспечение учащихся глубокими и прочными знаниями, а также формирование умений рационально применять полученные знания не только в учебной, но и в практической деятельности. Формирование математического мышления является важным элементом жизни в современном обществе.

Изучение функций и построение их графиков – важный раздел школьного курса.

Исследованиям возможностей совершенствования методики преподавания темы «Обратная функция» придается важное значение, поскольку заданий по теме в школьных учебниках не хватает по причине сложности материала. Кроме того, количество часов, отведенных на данную тему в рамках программ общеобразовательных школ, недостаточно. Поэтому зачастую ученики испытывают сложности с усвоением материала и не всегда могут решить даже простейшие задачи, а задачи повышенной сложности становятся совершенно недоступными.

Таким образом, актуальность темы исследования обусловлена противоречием, существующим до настоящего времени между необходимостью научно обоснованного изучения темы "Обратная функция" в алгебры и начал математического анализа общеобразовательных школ и недостаточной разработанностью методических материалов для изучения программного материала по этой теме.

Противоречие помогло сформулировать задачу диссертационного исследования: выявить методические особенности преподавания темы "Обратная функция" в курсе алгебры и начал математического анализа средних школ.

Объект исследования: процесс обучения алгебре и началам математического анализа общеобразовательной школы.

Предмет исследования: методика обучения теме «Обратная функция» в курсе алгебры и начал математического анализа общеобразовательной школы.

Цель исследования заключается в выявлении методических особенностей обучения теме «Обратная функция» в курсе алгебры и начал математического анализа общеобразовательной школы.

Гипотеза исследования основана на предположении о том, что повышение качества математической подготовки по теме «Обратная функция» достигается при выявлении методических особенностей изучения обратной функции и разработке системы упражнений по этой теме, учитывающей их.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие **задачи исследования**:

1. Изучить основные цели и задачи преподавания темы "Обратная функция" в курсе алгебры и начал математического анализа.

2. Проанализировать различные подходы к введению понятия "обратная функция" в школьный курс математики.

3. Изучить современные технологии преподавания темы "Обратная функция".

4. Описать методическую схему изучения обратной функции в курсе алгебры и началах математического анализа, которая может быть использо-

вана при объяснении темы "Обратная функция" в курсе алгебры и началах математического анализа.

5. Разрабатывать или подобрать математические задачи для системы упражнений по теме исследования, решение которых направлено на формирование навыков учащихся по теме «Обратная функция».

6. Провести педагогический эксперимент и проанализировать его результаты.

Теоретико-методологическую основу данного исследования составили работы таких авторов, как Г.И. Саранцев [33], Р. Декарт [7], Л.М. Фридман [44], Е.А. Бакулина [6], М.А. Ступницкая [38], Е.Ю. Куприенко Н.Г [21].

Базовыми для настоящего исследования явились работы Г.И. Саранцева [33], М.А. Ступницкой [38], Е.Ю. Куприенко [21].

Методы исследования: анализ литературы по теме исследования, анализ опыта работы учителей по данной теме, наблюдение за учащимися, педагогический эксперимент.

Основные этапы исследования.

1 этап (2020/21 уч.г.: анализ ранее выполненных исследований по теме диссертации, анализ школьных учебников, нормативных документов (стандартов, программ), анализ опыта школы по данной теме.

2 этап (2020/21 уч.г.): сравнение различных подходов к изучению темы исследования, рассмотрение теоретических аспектов методики обучения обратной функции.

3 этап (2020/21 уч.г.): определение методических основ исследования по теме диссертации, разработка системы упражнений по теме исследования, организация и проведение педагогического эксперимента с целью выявления исходного состояния предмета исследования и апробации методики обучения.

4 этап (2021/22 уч.г.): оформление диссертации, корректировка ранее представленных материалов, уточнение аппарата исследования, описание результатов экспериментальной работы, формулирование выводов.

Опытно-экспериментальная база исследования: ГБОУ СОШ № 33 г. Сызрань.

Научная новизна исследования заключается в том, что в нем определена и обоснована методическая схема введения понятия обратной функции в курс алгебры и начал математического анализа образовательных школ.

Теоретическая значимость исследования состоит в том, что в нем:

- определены основные цели и задачи преподавания обратной функции в школьном курсе математики средней школы, требования к математической подготовке учащихся;
- рассматриваются различные подходы к изучению обратной функции с использованием системы упражнений по этой теме, отвечающей требованиям к предметным и метапредметным компетенциям при изучении обратной функции;
- методические особенности преподавания по теме "Обратная функция" раскрываются в курсе алгебры и начал математического анализа.

Практическая значимость исследования определяется тем, что в нем разработана методическая схема по введению понятия обратная функция в курсе алгебры и начал математического анализа образовательной школы, предоставлена система упражнений по теме «Обратная функция».

Достоверность и обоснованность результатов исследования обеспечивались сочетанием теоретических и практических методов исследования и анализом педагогической практики в общеобразовательной школе.

Личное участие автора в организации и проведении исследования состоит в выявлении методической схемы по введению понятия «Обратная функция» в курсе алгебры и начал математического анализа общеобразовательной школы; в разработке системы упражнений по теме «Обратная функция».

Апробация и внедрение результатов работы велись в течение всего исследования. В ходе производственной практики (научно-исследовательской работы) и производственной практики (преддипломной практики) на базе кафедры «Высшая математика и математическое образование» ФГБОУ ВО «Тольяттинский государственный университет» была осуществлена экспериментальная проверка методической схемы, в период прохождения производственной практики (педагогической практики) в ГБОУ СОШ № 33 г. Сызрань.

На защиту выносятся:

− методическая схема по введению понятия обратной функции в курсе алгебры и начал математического анализа образовательной школы;

− система упражнений по теме «Обратная функция», включающая практико-ориентированные задачи.

Структура магистерской диссертации. Работа состоит из введения, двух глав, заключения, содержит 18 рисунков, 7 таблиц, список используемой литературы (50 источников). Основной тест работы изложен на 71 страницах.

Глава 1 Методические аспекты обучения теме «Обратная функция» в курсе алгебры и начал математического анализа общеобразовательной школы

1.1 Основные цели и задачи обучения теме «Обратная функция» в курсе алгебры и начал математического анализа общеобразовательной школы

Согласно требованиям федерального государственного образовательного стандарта основного общего образования «результаты изучения предметной области математика должны отражать:

1) формирование представлений о математике как о методе познания действительности, позволяющем описывать и изучать реальные процессы и явления;

2) овладение системой функциональных понятий, развитие умения использовать функционально-графические представления для решения различных математических задач, для описания и анализа реальных зависимостей» [42].

Исследуем исторический аспект понятия «функция».

Одним из первых исследовал данную категорию Н.Я. Виленкин, который в своей статье «Как возникло и развивалось понятие функции» отмечает, что идея зависимости функций брала своё начало с очень давних времен, когда люди стали осознавать причины окружающих явлений. Не имея навыков работы с числами, люди увидели, что благополучие и сила племени напрямую зависят от количества урожая или производства. «Со временем количество известных взаимосвязей между значениями увеличилось. Большинство из этих зависимостей начали выражаться с помощью чисел. Если для одной овцы было предусмотрено 5 корзин ягод, то для двух - 10, а для трех - 15. Так возникла идея пропорциональности величин. Позже людям пришлось столкнуться с более сложными зависимостями. Возникла необходимость понять зависимость объемов геометрических фигур от их размеров.» [13]

Люди начали составлять таблица, которые облегчали вести расчеты. Еще в Античном Вавилоне появление, так называемых табличных заданий функции использовались при обмене добычей или для решения споров в рыночных отношениях.

В рукописях французского ученого Н. Оресм были обнаружены рисунки, напоминающие современные графики функций, и их классификация. Однако для развития этих идей необходимо иметь возможность выражать взаимосвязь между величинами с помощью записи формул, но уровень науки в то время сильно отставал, в алгебре буквы не использовались. И только в 16 веке, благодаря проникновению идеи переменных, появилась возможность дальнейшего развития понятия функции.

«Первоначально понятие функции находилось в непосредственной связи с геометрическими, а также механическими представлениями. У И. Ньютона понимание о переменной величине появилось с рассмотрением вопросов механики. Под функцией он понимал величину, изменяющуюся с течением времени. Р. Декарт и П. Ферма (1601 – 1665) связывали представление о переменной величине с исследованием вопросов геометрии» [7]

Р. Декарт в своем труде «Геометрия» писал: «Придавая линии последовательно бесконечное множество различных значений, мы найдем также бесконечное количество значений и, тем самым, получим бесконечное количество различных точек…; они опишут требуемую линию» [19]. Мысль о выражении зависимости между величинами с помощью графика (графика функции) ярко прослеживается в словах Р. Декарта.

Примеры переменной и постоянной величины можно наблюдать и в таких науках, как экономика, социальные науки или в любой другой области знаний. Можно заметить, что некоторые величины являются постоянными, а другие изменяются. «Переменной называется величина, которая при выполнении определенных условий, может принимать различные значения. Постоянная - величина, которая при выполнении определенных условий, сохраняет одно и то же значение» [35]

Необходимо отметить, что одна и та же величина может быть переменной и постоянной, главным критерием для определения вида является выполнение комплекса условий. Например, «цена на продукты в условиях рыночной экономики является переменной величиной. Но при определенных условиях (жесткого планирования экономики) цены на ряд продуктов могут держаться на одном уровне, таким образом быть постоянной величиной. Переменные величины обычно обозначаются последними буквами латинского алфавита (x, y, z, u), а постоянные - первыми (a, b, c)» [18].

«Исследуя явления, мы имеем дело с множество переменных величин, которые связаны между собой. Таким образом, можно проследить зависимость одних величин от других, то есть каждым значениям одних величин соответствуют значения других. Так, например, ясно, что:

1) каждому значению цены товара соответствует определенная величина спроса;

2) каждому значению объема производства соответствует определенная величина издержек;

3) каждому году соответствует сумма накопившегося денежного вклада в Сбербанке;

4) числу членов научного коллектива соответствует его продуктивность» [5].

«Единым во всех примерах является то, что каждому числовому значению одной величины сопоставляется определенное числовое значение другой.

Центральным понятием математического анализа является определение понятия функции.

Пусть даны два множества X и У.

Определение. Соответствие f, которое каждому элементу $x \in X$ сопоставляет один элемент $y \in Y$, называется функцией. Это обозначается так: y

= f (x). Независимой переменной или аргументом называют x, а y - зависимой переменной. О величинах x и y говорят, что они связаны функциональной зависимостью» [46].

«Термин «функция» происходит от латинского слова functio - исполнение, осуществление» [3].

В 1673 году немецкий математик Г. Лейбниц впервые употребил термин «функция». Изначально данное понятие только использовалось «в узком смысле и связывалось только с геометрическим представлением. Этот термин использовался, когда речь шла об отрезках, касательных к кривым, их проекциях на ось» [36] и любых других линиях, которые выполняли любую функцию для фигуры. Понятие функции было напрямую связано с геометрическим представлением.

В начале 18 века с активным развитием математического анализа произошел переход от интуитивно-геометрического представления о функции к заданному с помощью формул определению. Иоганн Бернулли (1667 – 1748). сделал огромный вклад в эту работу. Он утверждал, что функция переменной величины - это количество, сформированное определенным способом задания с помощью, зависимой и независимой переменных (1718 г). В 1748 г. Леонард Эйлер, который являлся учеником Иоганна Бернулли, «определил функцию переменной величины как аналитическое выражение, составленное каким-либо способом из этой переменной величины и из чисел, либо постоянных величин. Л. Эйлеру принадлежит современное обозначение функции» [28].

В настоящее время к определению функции используется зачастую определение Ю.М. Колягина, который полагает, что «понятие функции – одно из фундаментальных математических понятий, непосредственно связанных с реальной действительностью [22]. В нем ярко воплощены изменчивость и динамичность реального мира, взаимная обусловленность реальных объектов и явлений. Функции, их свойства и графики образуют основу школьного курса математики. Вокруг функциональной линии группируется вся современная школьная алгебра, начала математического анализа и в некоторой степени геометрия. [50] Специфичность данной линии заключается в ее возможности устанавливать в обучении внутрипредметные и межпредметные связи» [18].

«В своём историческом развитии понятие функции прошло через пять этапов:

1) пропедевтический. Длился с древнейших времен и продолжался вплоть по 17 века;
2) введение понятия функции через механические и геометрические представления. Середина 17 века;
3) аналитические определение функции. Продолжалось с конца 17 века до начала 19 века;
4) функция как отображение. Вторая половина 19 века;
5) дальнейшее развитие понятия функции. С начала 20 века и вплоть до сегодняшних дней» [15].

«Задать функцию - значит задать три объекта:

– множество X,
– множество У,
– правило f.» [15].

Для решения экономических проблем зачастую используют методы математического анализа, при наличии функциональных зависимостей социально-экономических явлений. Знакомство с методами математического анализа начнем со способов задания функции.

Можно выделить три способа задания функции: аналитический, табличный и графический [15].

Аналитический способ предполагает задание функции формулой. Она задает перечень операций для X, с помощью которых можно получить Y [44].

«Табличный способ. Этот метод самый простой в использовании. Значения независимого аргумента записываются в один столбец, а значения зависимой переменной записываются во второй столбец. Этот метод самый простой в использовании. Значения независимого аргумента записываются в один столбец, а значения зависимой переменной записываются во второй столбец. Этот метод записи функции часто используется, когда область определений состоит из постоянного числа значений (таблица цен на товары, таблица розыгрыша лотереи и т. Д.) [17]. Часто используются таблицы значений различных функций: в таблицах тригонометрических функций, логарифмов и т. п. В виде таблиц записываются результаты экспериментального исследования каких-либо процессов и явлений» [15].

«Графический способ. Аналитический и табличный способы задания функции страдают отсутствием наглядности. Графический способ не имеет такого недостатка. Графическим способом называется такой способ задания функции $y = f(x)$, при котором соответствие между аргументом x и функцией y устанавливается с помощью графика. Графиком функции $y = f(x)$ называется множество всех точек плоскости с координатами $(x, f(x))$, т.е. таких, координаты которых обращают выражение $y = f(x)$ в тождество» [23].

«К основным свойствам функции $y = f(x)$ относятся:

1) область определения $D(f)$,

2) область значений $E(f)$,

3) четность, нечетность,

4) монотонность,

5) ограниченность,

6) периодичность» [48].

Далее рассмотрим, что же такое обратная функция.

«Пусть функция $y=f(x)$ определена на множестве D, а E — множество её значений. Обратная функция по отношению к функции $y=f(x)$ — это функция $x=g(y)$, которая определена на множестве E и каждому $y \in E$ ставит в соответствие такое значение $x \in D$, что $f(x)=y$» [3].

Таким образом, «область определения функции $y=f(x)$ является областью значений обратной к ней функции, а область значений $y=f(x)$ — областью определения обратной функции» [30].

«Чтобы найти функцию, обратную данной функции y=f(x), надо:

1) в формулу функции вместо y подставить x, вместо x — y:

x=f(y);

2) из полученного равенства выразить y через x:

y=g(x)» [25].

Пример.

Найти функцию, обратную функции $y = 2x - 6$.

$x = 2y - 6, -2y = -x - 6, y = -x - 6, y = 0{,}5x + 3.$.

Функции $y = 2x - 6$ и $y = 0{,}5x + 3$ являются взаимно обратными.

«Графики прямой и обратной функций симметричны относительно прямой y=x (биссектрисы I и III координатных четвертей)» [5].

Получившиеся линейные функции y=2x-6 и y=0,5x+3 на графике изображены в виде прямой. Для построения прямой берём две точки.

$y = 2x - 6$:

y(0) = - 6, y(3)=0.

$y = 0{,}5x + 3$?

y(0) =3, y(-6)=0.

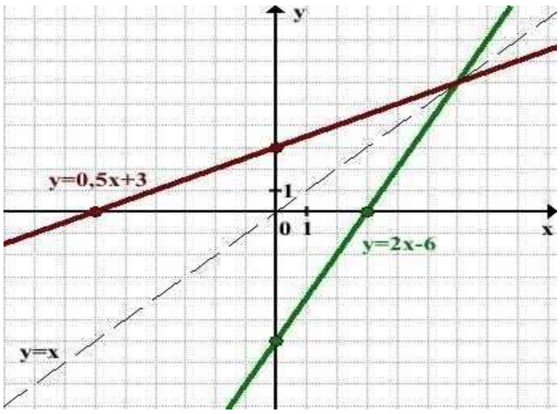

Рисунок 1 - Графики линейных функций

Выражение y(x) возможно в том случае, если уравнение x = f(y) имеет единственное решение. «Это можно сделать в том случае, если каждое своё значение функция $y=f(x)$ принимает в единственной точке её области определения (такая функция называется обратимой)» [32].

«Теорема (необходимое и достаточное условие обратимости функции): если функция $y=f(x)$ определена и непрерывна на числовом промежутке, то для обратимости функции необходимо и достаточно, чтобы $f(x)$ была строго монотонна.»[8]

При монотонном возрастании функции $y=f(x)$, функция f^{-1} так же монотонно возрастает, и наоборот.

«Если условие обратимости не выполнено на всей области определения, можно выделить промежуток, где функция только возрастает либо только убывает, и на этом промежутке найти функцию, обратную данной» [11].

Рассмотрим часть параболы, заданную формулой $y=x^2$, $x\in[0;\infty)$, Функция монотонно возрастает. При выполнении условия обратимости, можно искать обратную функцию.

«Так как область определения функции $y=x^2$ - промежуток $[0;\infty)$, область значений на этом промежутке - также $[0;\infty)$, то область определения и область значений обратной функции - также $[0;\infty)$.

1) $x=y^2$,

2) $y^2=x$, $\rightarrow$ $y=\pm\sqrt{x}$,

Так как $y\geq 0$, то $y=\sqrt{x}$.

То есть на промежутке $[0;\infty)$ $y=\sqrt{x}$ - функция, обратная к функции $y=x^2$. Их графики симметричны относительно биссектрисы I и III координатных четвертей» [49].

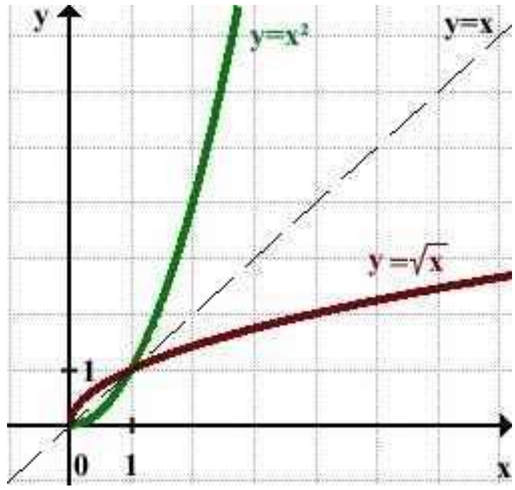

Рисунок 2 - Графики прямой и обратной функции

«В алгебре наиболее известными примерами взаимно обратных функций являются показательная и логарифмическая функция, а также тригонометрические и обратные тригонометрические функции.» [47].

«Примерная основная образовательная программа среднего общего образования (одобрена решением федерального учебно-методического объединения по общему образованию, протокол от 28.06.2016 N 2/16-з)» [47] предполагает, что при изучении темы «Функция» «выпускник научится:

– оперировать на базовом уровне понятиями: зависимость величин, функция, аргумент и значение функции, область определения и множество значений функции, график зависимости, график функции, нули функции, промежутки знакопостоянства, возрастание на числовом промежутке, убывание на числовом промежутке, наибольшее и наименьшее значение функции на числовом промежутке, периодическая функция, период;

– оперировать на базовом уровне понятиями: прямая и обратная пропорциональность линейная, квадратичная, логарифмическая и показательная функции, тригонометрические функции;

– распознавать графики элементарных функций: прямой и обратной пропорциональности, линейной, квадратичной, логарифмической и показательной функций, тригонометрических функций;

– соотносить графики элементарных функций: прямой и обратной пропорциональности, линейной, квадратичной, логарифмической и показательной функций, тригонометрических функций с формулами, которыми они заданы;

– находить по графику приближенно значения функции в заданных точках;

– определять по графику свойства функции (нули, промежутки знакопостоянства, промежутки монотонности, наибольшие и наименьшие значения и т.п.);

– строить эскиз графика функции, удовлетворяющей приведенному набору условий (промежутки возрастания/убывания, значение функции в заданной точке, точки экстремумов и т.д.)» [36].

Таким образом можно выделить основные цели изучения темы «Обратная функция»:

– ввести определение обратимой и обратной функции;

– научить находить обратную функцию, используя её определение при решении различных задач;

– формировать понятие обратной функции;

– воспитывать аккуратность при построении графиков обратной функции.

«Для достижения целей необходимо выполнить следующие задачи:

– сформировать понятие функции, как математической модели, позволяющей описывать и изучать разнообразные зависимости между реальными величинами;

– сформировать понятие функциональной терминологии (значение функции, аргумент, график функции, область определения, возрастание и др.);

– сформировать навыки нахождения значения функций, заданных формулой, таблицей, графиком, решать обратную задачу;

– сформировать навыки нахождения по графику функции промежутки возрастания и убывания функции, промежутки знакопостоянства, находить наибольшее и наименьшее значения;

– сформировать навыки построения графиков функций – линейной, прямой и обратной пропорциональностей, квадратичной функции» [16].

1.2 Различные подходы к введению понятия «Обратная функция» в курсе алгебры и начал математического анализа общеобразовательной школы

«В настоящее время уделяется большое внимание школьному образованию как первой ступени образовательного процесса. Одна из важнейших его задач – обеспечить учащимся глубокие и прочные знания, а также умение рационально применять их в учебной и практической деятельности. Понятие функциональной зависимости, являясь одним из центральных в математике, пронизывает все ее приложения, оно, как ни одно другое, приучает воспринимать величины в их живой изменчивости, во взаимной связи и обусловленности» [26]. «Одним из важных разделов школьного курса является изучение свойств функций и построение графиков. Очень часто единственный возможный способ записать функцию - это использовать формулу, которая широко используется в технике и лежит в основе работы автоматических устройств. Когда они активно используют и осваивают графические технологии, учащимся становится доступным решение заданий. Умение создавать графики функций представляет большой интерес для учеников» [17].

Обзор темы «Функции» в программе курса алгебры в различных учебниках для основной школы.

«Вовремя изучения темы «Функция» ученик знакомится с самим понятием, областью определения и областью значения функции, с графиков функции, а также со свойствами функциями. К свойствам функции относятся возрастание и убывание, смена знака, наибольшее и наименьшее значение функции, четность функции» [35].

Кроме того, рассматриваются простейшие преобразования графиков функций.

«После изучения темы «Функция» в основной школе учащиеся должны:

- понимать, что функция – это математическая модель, позволяющая описывать и изучать разнообразные зависимости между реальными величинами, что конкретные типы функций описывают большое разнообразие реальных зависимостей;
- правильно употреблять функциональную терминологию (значение функции, аргумент, график функции, область определения, возрастание и др.) и символику; понимать её при чтении текста, в речи учителя, в формулировке задач;
- находить значения функций, заданных формулой, таблицей, графиком, решать обратную задачу;
- находить по графику функции промежутки возрастания и убывания функции, промежутки знакопостоянства, находить наибольшее и наименьшее значения;
- строить графики функций – линейной, прямой и обратной пропорциональностей, квадратичной функции;
- интерпретировать в несложных случаях графики реальных зависимостей между величинами, отвечая на поставленные вопросы» [37].

«Анализируя различные подходы к введению понятия функции в школьных учебниках, можно заметить, что данная тема у различных авторов рассматривается в разное время. Например, Теляковский С.А. в своём учебнике 7-го класса вводит такие понятия, как: функция, аргумент, область определения функции, график функции и рассматривает способы задания функции. Там же изучается прямая пропорциональность, линейная функция и степенные функции вида $y = x^2$, $y = x^3$, их свойства и графики. В 8 классе рассматриваются обратная пропорциональность и функция $y = \sqrt{x}$. В 9 классе вводятся понятия возрастающей и убывающей функций, чётности и нечётности функций. Рассматриваются квадратичная функция (её график и свойства), простейшие преобразования графиков (на примере квадратичной функции) и степенная функция $y = x^n$ с натуральным показателем» [24].

«В 7 классе в учебниках под редакцией С.А. Алимова понятие функции вводится как зависимость одной переменной от другой. При объяснении автор не вводит понятие аргумента, область определения функции, а рассматривает только методы задания функции и, непосредственно, сам график функции. Отмечаются зависимости прямой пропорциональности и линейная, а также их изображение на плоскостях. В 8 классе рассматривается квадратичная функция, сначала изучается график и свойства функции $y = x^2$ затем $y = ax^2$ и $y=ax^2 +bx +c$. В 9 классе вводятся понятия области определения функции, возрастание и убывание функции, чётность и нечетность функции. Рассматриваются обратная пропорциональность и степенная функция $y = x^n$» [4].

«В учебниках А.Г. Мордковича функция начинает изучаться в 7 классе. Здесь рассматриваются линейное уравнение с двумя переменными и его график, линейная функция, прямая пропорциональность и функция $y = x^2$, их графики. Учащиеся учатся находить наибольшее и наименьшее значения этих функций на заданном промежутке. Вводится понятие о непрерывных и разрывных функциях, разъясняется запись $y = f(x)$, а также вводится функциональная символика. В 8 классе рассматриваются следующие функции:

$y = к/x$, $y = ax^2 + bx + c$, $y = x$ и их графики. В 9 классе вводятся определение функции, способы задания функции, область значения, область определения функции, свойства функций: монотонность, ограниченность, наибольшее и наименьшее значение функции на заданном промежутке, чётность и нечётность. Даны наглядно-геометрические представления о непрерывности и выпуклости функции» [2].

Г.В. Дорофеев считает целесообразным начинать изучение понятия функции с седьмого класса. Наряду с понятием функции, он рассматривает её график, изучает по нему свойства функции, объясняет, что такое пропорциональные переменные «Учащиеся знакомятся с прямой пропорциональностью, с линейной функцией, с функцией $y=k/x$ их свойствами и графиком, а также с графиком линейного уравнения с двумя переменными. В 8 классе изучается функция $y = x^2$, в 9 классе рассматривается квадратичная функция и функция $y = x^n$ (особое внимание уделяется случаю $n = 3$» [14].

Итак, можно сделать вывод, что «ведущая функциональная линия наблюдается в учебниках А.Г. Мордковича. В рассмотренных выше учебниках большее внимание уделяется методическим линиям. Содержание и место изучения данной содержательной линии отличается не существенно» [34].

Зачастую авторы учебников исследуют функции сразу несколькими способами.

Комбинированный метод применяется в учебниках под ред. С.А. Теляковского, Ш.А. Алимова и Г.В. Дорофеева. Аналитический метод – в учебниках 9 класса под редакцией С.А. Теляковского. Графический метод - в учебниках А.Г. Мордковича.

«Квадратичная функция вводится в 8-м или 9-м классе, рассматривают ее свойства, график, примеры квадратичных величин. Квадратичная функция определяется, как обычно, формулой $y=ax^2+bx+c$. Здесь же выясняются её частные случаи в зависимости от коэффициентов b и c (один или оба равны нулю); коэффициент, $a\neq0$ по определению. Учащиеся должны научиться распознавать квадратичную функцию по формуле и определять коэффициенты. Изучение квадратичной функции начинается с частного случая $y=ax^2$ ($a \neq 0$). При $a = 1$ получаем уже знакомую функцию $y=x^2$, которая послужит своеобразным эталоном при изучении других функций.

Определение обратной функции не имеет аналогов, поэтому мы должны представить ее точным определением. Роль обратной функции очень велика. Использование обратной функции при объяснении тем необходимо для введения значимого количества основных базовых элементарных функций» [40].

«При изучении обратной функции выясняется зависимость ее монотонности от монотонности исходной функции – это необходимо для того, чтобы обосновать существование обратной функции и подробно рассматривать взаимное расположение графиков данной и обратной функций. Преподаватель может подвести учащихся к понятию обратной функции, поставив новую для учащихся познавательную задачу» [29].

«После полученного представления о зависимых и независимых переменных уместно провести рассуждение: каждому допустимому значению переменной x равенство $y=f(x)$ ставит в соответствие вполне определенное значение переменной величины y. Однако в некоторых случаях соотношение $y=f(x)$ можно рассматривать и как такое равенство, которое каждому допустимому значению переменной величины y ставит в соответствие вполне определённое значение переменной величины x» [45].

«Далее следует пояснение данного сопоставления на примере. Равенство $y=2x-1$ каждому значению y ставит в соответствии следующее значение x: $x=(y+1)/2$. например при $y=1$ $x=1$; при $y=2$ $x=1{,}5$; при $y=3$ $x=2$ и так далее. Поэтому можно сказать что равенство $y=2x-1$ определяет x как некоторую функцию переменной величины y» [36]. В явном виде эта функция записывается таким образом: $x=(y+1)/2$. «Если в каждом случае обозначить независимую переменную буквой x, а зависимую переменную буквой y, то получим формулы: $y=f(x)$, и $x=\varphi(y)$ во второй формуле y выступает в качестве аргумента, а x – в роли функции. Переписав в привычном виде, мы получим $y=\varphi(x)$. Определенная таким образом функция $y=\varphi(x)$ называется обратной по отношению к функции $y=f(x)$. Если функция $y=f(x)$ определена и возрастает (убывает) на промежутке X и областью ее значений является промежуток Y, то у нее существует обратная функция, причем обратная функция определена и возрастает(убывает) на Y.

Таким образом, чтобы построить график функции, обратной к функции $y=f(x)$, надо график функции $y=f(x)$ подвергнуть преобразованию симметрии относительно прямой $y=x$.» [4]

Во время обучения теме «Функция» приветствуется использование компьютерных технологий для повышения интереса к математике и наглядной демонстрации материала.

Анализ содержания темы «Обратная функция» в учебниках, рекомендованных Минобрнауки РФ, рассмотрен в Таблице 1.

В большинстве учебников по алгебре определение обратной функции вводится в 10-ом классе. Методика введения определения у разных авторов различна.

В учебнике А.Г. Мордковича понятие обратной функции вводится в 10 классе следующим образом: 1) автор предлагает два графика монотонной и не монотонной функции, после нахождения области определения и области значения функции, вводится определение и теорема об обратимой функции. После введения определения обратной функции, предлагается построить график взаимно обратных функций и приводятся свойства графиков.

В учебнике Н.Я. Виленкина понятие обратимой функции вводится с помощью выражения стороны квадрата через площадь. Далее автор вводит определение обратной функции и на примере линейной функции выражает переменную x через y. На одном графике строят взаимно обратные функции и вводят теорему и утверждения о монотонности.

В учебнике Ш.А. Алимова определение обратной функции также дается в 10 классе в теме «Обратные функции» во 2 главе «Степенные функции».

Таблица 1 – Сравнительный анализ теоретического материала по теме «Обратная функция» в учебниках алгебры и начал математического анализа 10-11 класс

Авторы	Мордкович А.Г., Семенов П.В 10 класс	Колягин Ю.М., Ткачева М.В, Федорова Н.Е	Виленкин Н.Я. 10 класс	Ш.А. Алимов [и др.]. 10 класс	С.М. Никольский. 11 класс
Место введения	Первое полугодие	Первое полугодие	Второе полугодие	Первая четверть	Первое полугодие
Кол-во часов на изучение	3 часа	2 часа	2 часа	1 час.	6 часов
Структура раздела	Глава 2: Числовые функции §10 Обратные функции	Глава III : Степенная функция §10 Взаимно обратные функции	Глава IV: Предел и непрерывность. §2 Предел функции в точке П. 7. Обратная функция.	Глава II: Степенная функция §7 Взаимно обратные функции	§3. Обратные функции. П. 1. Понятие обратной функции. П.2. Взаимно обратные функции. П.3. Обратные тригонометрические функции. П.4. Примеры использования обратных тригонометрических функций.
Вводимые понятия	Обратимые и обратные функции; свойства и графики обратных функций; монотонность функций; взаимно обратные функции.	Обратимая и обратная функция; построение графика обратной функции.	Обратимая и обратная функция; построение графика обратной функции.	Обратимая и обратная функции; способы нахождения обратной функции; свойства взаимно обратных функций.	Обратимая и обратная функция; взаимно обратные функции; обратные тригонометрические функции.
Задачный материал	35 упражнений.	7 упражнений.	2 упражнения.	7 упражнений.	22 упражнения.

Параграф 7 посвящен взаимно обратным функциям. Понятие «обратная функция» иллюстрируется на примере взаимно обратных функциональных зависимостей: формулы зависимости скорости от времени при движении тела, брошенного вверх с начальной скоростью $v_0 = v - gt$ и обратной зависимости – времени от скорости $t = \frac{v_0 - v}{g}$. Этот же методический прием можно наблюдать в учебнике Ю.М. Колягина. После введения определения авторы переходят к знакомству со свойствами обратных функций и условиями монотонности.

В учебнике С.М. Никольского для 11 класса тема «Обратные функции» рассматривается в параграфе 3, который содержит 4 пункта: «Понятие обратной функции», «Взаимно обратные функции», «Обратные тригонометрические функции», «Примеры использования обратных тригонометрических функций». Первый пункт содержит материал для базового уровня, пункты 2-4 – для профильного уровня. Задачный материал по теме «Обратные функции», представленный в учебниках С.М. Никольского, требует дополнения, так как уделено недостаточно внимания построению графиков сложных функций и решению уравнений и неравенств. Автор учебника вводит понятие обратной функции с помощью степенных функций, определение взаимно обратных функций вводится с помощью графиков.

1.3 Современные технологии обучения теме «Обратная функция»

«Образовательные технологии – совокупность организационных форм, педагогических методов, средств, а также социально-психологических, материально-технических ресурсов образовательного процесса, создающих комфортную и адекватную целям воспитания и обучения образовательную среду, содействующую формированию всеми или подавляющим большинством студентов необходимых компетенций и достижению запланированных результатов образования» [26].

В связи с этим сегодня особенно актуальны современные образовательные технологии, которые направлены на организацию деятельности учащихся, развитие их навыков, качеств и компетенций посредством этой деятельности. Ведь невозможно "научить всему", вложить в головы учеников все важнейшие достижения различных наук. Гораздо важнее научить их приобретать эти знания, развивать их интеллектуальные, коммуникативные, творческие навыки через обучение, формировать научное мировоззрение.

Обеспечить кардинальное совершенствование образовательных технологий возможно только на основе принципа педагогической целесообразности использования средств современных информационных технологий и развития информационной культуры у всех участников образовательного процесса.

Таким образом, принимая во внимание местные условия (или специфику соответствующего учебного заведения), личный опыт и стиль преподавания, каждый учитель может творчески выстраивать свою индивидуальную методику преподавания, разрабатывая пути и методы взаимодействия между преподавателями и учащимися.

«Совместная деятельность учителя и учеников в процессе познания, освоения учебного материала означает, что каждый вносит свой особый индивидуальный вклад, происходит обмен знаниями, идеями, способами деятельности, причем происходит это в атмосфере взаимной поддержки, что позволяет не только получать новые знания, но и развивает саму познавательную деятельность, переводит ее на более высокие уровни кооперации и сотрудничества, способствует раскрытию личных качеств участников.

Таким образом, в настоящее время, в связи с принятием новых федеральных государственных образовательных стандартов образования изменился подход к организации образовательного процесса в целом» [10].

Для обеспечения максимально возможного уровня усвоения обучающимися знаний и формирования практических навыков, современный учитель должен не только донести информацию в виде научных знаний, но и уметь использовать современные методы обучения, тем самым привлекая и поддерживая интерес учащихся, побуждать к саморазвитию.

В современных стандартах прописаны требования к методам, средствам, формам обучения и педагогическим технологиям. Организация и проведение уроков математики на современном этапе невозможны без использования педагогических образовательных технологий, которые позволяют создать условия для смены видов деятельности на уроках и ликвидации однообразности в образовательном процессе.

Базу знаний преподавателей обеспечивает огромный выбор методологической и учебно-методической литературы. Умения применять современные методы основывается не только на «знание» этих методов, но и на опыте их применения.

«Невозможно представить современный процесс обучения без использования таких технологий активного обучения, как:

– интерактивные методы: кейс-стади, метод проектов;
– методы проблемного обучения, решение ситуативных задач;
– исследовательские методы;
– тренинговые формы;
– проведение деловых и ролевых игр, круглых столов на базе современных информационных технологий;
– модульно-рейтинговые технологии организации учебного процесса и др.» [41].

В настоящее время активно применяется замена образовательных технологий применением информационных технологий. Во время дистанционного обучения стали проводиться занятия в режиме видеоконференций. Дистанционное обучение становится более востребованным, в настоящее время можно получить образование во многих вузах, находясь за сотни километров. Использование электронных библиотек и интернет ресурсов дает возможность для саморазвития и самостоятельного изучения интересующих тем.

Использование образовательных платформ дает возможность учителям быстро и продуктивно проверить знания у учащихся, а также использование наглядных материалов для объяснения темы.

Для уроков математики в настоящее время особенно актуальны такие образовательные технологии, как:

– «проектная технология;
– игровые технологии;
– групповые технологии;
– технология развивающего обучения;
– технология проблемного обучения;
– кейс-технология;
– технология интегрированного обучения;
– технология развития критического мышления;
– здоровьесберегающие технологии;
– технологии уровневой дифференциации» [8].

Также стоит отметить, использование компьютерных технологий при обучении функциям повышает интерес к изучению данной темы, дает возможность получить всестороннее представление об изучаемом математическом объекте.

В настоящее время широкую популярность при обучении получили проектные технологии. Современные исследователи предлагают рассматривать проект: как одно из средств обучения, как совместную деятельность и как вид самостоятельной работы учащихся.

Проект является одним из средств обучения, в современной научной и методической литературе многие исследователи зачастую рекомендуют использовать метод проектов при обучении:

– М.А. Ступницкая отмечает, что «проект – это работа, направленная на решение конкретной проблемы, на достижение оптимальным способом заранее запланированного результата» [38];

– Е.А. Бакулина отмечает, что «под учебным проектом подразумевается вид творческой работы учащихся, в котором предлагается разработка замысла, идеи, детальное рассмотрение практической задачи, лабораторное исследование и т.д., оформление результатов работы и защита проекта (презентация)» [6];

– Куприенко Е.Ю. отмечает, что «математический проект – это средство обучения математике, содержательную основу которого составляет проектное задание, ориентированное на реализацию технологии сотрудничества» [21].

Проанализировав опыт учителей математики по обучению темы «Обратная функция» особый интерес вызывает опыт Ефремовой С.В., учитель математики, которая использует в своей практике в 10 классе по теме «Обратная функция» обучение по технологии смешанного обучения «Перевернутый класс». Технология смешанного обучения «Перевернутый класс» позволила повысить результаты обучающихся. Учащиеся достаточно хорошо выполнили самостоятельную работу: не справился с работой 1 человек, что было не характерно для результатов самостоятельных работ, выполненных в традиционном формате. Цель урока была достигнута, а задачи- выполнены.

Цель урока: выявить уровень усвоения нового материала, разобранного дома самостоятельно, усвоить понятия «обратимая функция», «обратная функция», научить применять знания о свойствах взаимно обратных функций к построению их графиков, научить общаться и сотрудничать в группах.

«Планируемые результаты.

Личностные:

– формирование ответственного отношения к учению на основе мотивации к обучению и познанию;

– формирование коммуникативной компетентности в общении и сотрудничестве со сверстниками и взрослыми в процессе учебной деятельности;

– формирование мотивации на обучение и способности к выстраиванию индивидуального образовательного маршрута.

Метапредметные:

– умение определять и формулировать цель изучения нового материала;

– умение оценивать правильность выполнения учебных и иных задач;

– умение работать с различными источниками информации, классифицировать и обобщать, выявлять аналогичные процессы и явления, делать выводы и умозаключения;

– умение получать информацию в результате смыслового прочтения текста;

– умение оформлять свои действия в форме алгоритма;

– умение применять ИКТ - компетенции для решения учебных задач» [10].

Предметные:

– обеспечить усвоение новых понятий «обратимая функция», «обратная функция», свойств взаимно обратных функций;

– обобщить сведения о свойствах взаимно обратных функций, научиться строить графики взаимно обратных функций;

– закрепить навык аналитического задания функции, обратной данной.

Организационная структура урока. Этап урока: самостоятельная работа дома.

Инструкция к выполнению домашнего задания по алгебре и началам анализа в 10 классе по теме «Обратная функция» (по технологии смешанного обучения «Перевернутый класс»):

1. Внимательно прочитайте п. 10 «Обратная функция» стр.71-74 учебника 10 кл. А.Г. Мордкович, П.В. Семенов (профильный уровень) или п.3 Обратная функция стр.18-22 учебника 10-11 кл. А.Г. Мордкович, П.В. Семенов (базовый уровень).

2. Внимательно изучите новый материал на сайте: «Алгебра класс», обратная функция http://www.algebraclass.ru/obratnaya-funkciya/

3. Посмотрите презентацию по теме урока, обратите внимание на примеры.

4. Проанализируйте различные источники и составьте опорный конспект по изученному материалу.

5. Ответьте на вопросы:

– Какая функция называется обратимой?

– Какая функция называется обратной?

– Какая функция обратима на некотором множестве X?

– Какими свойствами обладают взаимно обратные функции?

– Как из графика функции y=f(x) получить график ей обратной функции?

– Как задать аналитически функцию, обратную данной y=f(x)? Составьте алгоритм.

6. Зарегистрируйтесь на сайте и пройдите тест для тренировки: http://www.yaklass.ru.

Выводы по первой главе

Сформулируем основные выводы и полученные результаты:

1) «изучена история формирования функциональной содержательно-методической линии в школьном курсе математики, с переходом от включения некоторого объема функционального материала до ведущей роли в формировании математических понятий. Рассмотрены различные трактовки определения функции, включенные к изучению в школьной программе алгебры, а также примерное содержание функционального материала в курсе математики основной и старшей школы» [45]. На основании проведенного анализа были выявлены основные

цели и задачи изучения обратной функции в курсе алгебры и начал математического анализа. Так основной целью изучения обратной функции является подготовка учащихся к введению понятия взаимно обратных функций и построению их графиков. Для этого необходимо решить ряд задач по формированию определенных знаний и умений у учеников, а именно: знания определения обратной функции, умения построения графиков обратных функций, задания обратной функции графическим, табличным и аналитическим способом;

2) проведем анализ различных подходов к внедрению определения «обратная функция» в разных учебных пособиях. Каждый подход имеет свои особенности. Однако, стоит отметить, что подход к введению понятия «обратная функция» Мордковича А. Г. является ведущим. Авторы всех рассмотренных учебников предлагают введение определения обратной функции с помощью выражения независимой переменной через зависимую, таким образом меняя их роли местами. Рассматривается построение графиков взаимно обратных функций на одной координатной плоскости;

3) определены наиболее эффективные формы, методы и технологии организации учебной деятельности учеников при обучении темы «Обратная функция». Так, в качестве метода обучения можно использовать метод проектов. В настоящее время широкую популярность при обучении получили проектные технологии. Современные исследователи предлагают рассматривать проект как: одно из средств обучения; определенную деятельность; вид самостоятельной работы учащихся. Так же стоит отметить, что в школе при обучении уместно использовать компьютерные технологии, для наглядности материала и активизации устойчивого интереса к предмету.

Глава 2 Реализация методики обучения теме «Обратная функция» в курсе математики общеобразовательной школы

2.1 Методическая схема по введению понятия «Обратная функция»

В настоящее время большое внимание уделяется школьному образованию как первому этапу образовательного процесса. «Одна из важнейших его задач – обеспечить учащимся глубокие и прочные знания, а также умение рационально применять их в учебной и практической деятельности.» [43]

Метод проектов является одним из самых эффективных подходов в формировании функционально-графических знаний и умений. Так же предлагаем включить в методическую схему использование практико-ориентированных задач в совокупности с традиционными методами.

«Учитывая, что знания, полученные учениками в результате изучения функций, выступают в качестве справочного материала для понимания обратных функций, в следующих разделах курса преподавателю необходимо знать последовательность изучения отдельных функционально-графических понятий и свойств функции и их применения для решения практико-ориентированных задач» [27].

Методическая схема преподавания темы «Обратная функция» была разработана с учетом методических рекомендаций, основанных на концепции поэтапного формирования математических понятий, сформулированных Г.И. Саранцевым [34]:

1 этап: мотивация к учению понятия;

2 этап: выделение существенных признаков понятия;

3 этап: усвоение понятия;

4 этап: применение понятия.

Так, при обучении теме «Обратная функция» нами были проведены следующие этапы:

Актуализация опорных знаний для изучения обратной функции.
Введение определения обратимой и обратной функции, выделение характерных признаков отличия от других видов функций
Построение графиков обратных функций (квадратичная, тригонометрическая, логарифмическая, показательная).
Применение понятия обратная функция при решении практико-ориентированных задач.
Закрепление и основных теоретических фактов по теме «Обратная функция»

Рисунок 3 – Методическая схема изучения обратной функции в старших классах

Не редко график является единственным возможным способом задания функции. На изучение зависимости функций и построение их графиков уделяется особое внимание в школьном курсе.

Действительно, каждому человеку в жизни встречаются на пути сложные расчеты, применение нужных формул, таблицы с информацией, диаграммы, графики, различные алгоритмы, случайные события, которые нужно уметь прочитать, составить и понимать.

I этап. Актуализация опорных знаний для изучения обратной функции.

Целью данного этапа служит проверка готовности учащихся к введению нового понятия. В качестве подготовки ученикам можно предложить решение практико-ориентированных задач в виде блиц-опроса или командной игры.

Задача 1. Автомобиль стоит 1,2 млн. рублей, а годовое обслуживание составляет 0,24 млн. рублей. Запишите формулу стоимости автомобиля в зависимости от времени эксплуатации.

Репродуктивный характер задачи позволяет диагностировать знания и умения, необходимые для введения обратной функции.

Задачи, решаемые аналитическим способом, уместно включить на этапе повторения пройденного материала.

Задача 2. Разбейте на три группы функции:

Таблица 2 - Вариант задания на классификацию вида «Сопоставьте»

<table>
<tr><td colspan="3">$\mathbf{f(x) = x^3}$, $\mathbf{f(x) = -3x^2}$, $\mathbf{f(x) = 7x + 5}$, $\mathbf{f(x) = x^3 - 2}$,
$\mathbf{f(x) = -7x}$, $\mathbf{f(x) = \frac{x}{3}}$, $\mathbf{f(x) = \sqrt{x-1}}$, $\mathbf{f(x) = \frac{9}{x-1}}$</td></tr>
<tr><td>Монотонно убывает</td><td>Монотонно возрастает</td><td>Различна по монотонности</td></tr>
</table>

«С целью активного повышения учебной мотивации уместно также рассмотреть задачи продуктивного типа с неявной визуализацией для привязки абстрактных понятий к явлениям реального мира, применения теоретических знаний к моделированию реальных процессов, что одновременно позволяет проверить умение строить графики функций. Рассмотрим визуализированную задачу с неявным графическим образом, для решения которой можно использовать программу динамической математики, например, DESMOS, GeoGebra.»[24]

Для проверки умений стоить графики функций можно рассмотреть задачи продуктивного типа. При рассмотрении визуализированной задачи с неявным графическим образом можно использовать программу динамической математики, например, DESMOS, GeoGebra.

Задача 3. «Траекторию мяча, по которому ударили клюшкой, можно смоделировать функцией, заданной формулой $f(x) = 30x - 5x^2$,где x – время, f(x) -–высота мяча от уровня земли.»[31]

1. «Схематично изобразите график данной функции (*ответ*: рисунок 4).

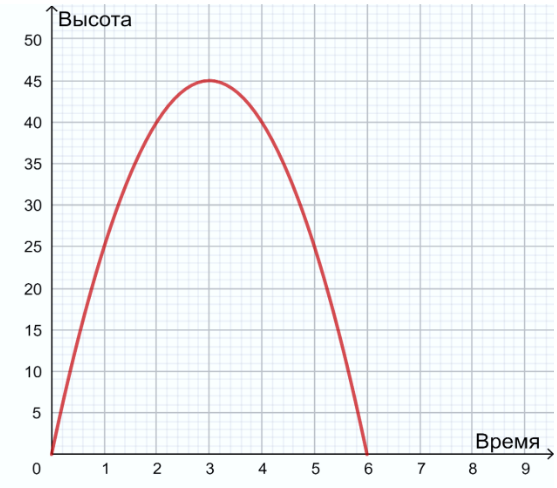

Рисунок 4 - График функции траектории мяча.

2. Определите максимальную высоту мяча в полете? (ответ: 45).
3. Определите время полета мяча. Связаны ли между собой время полета и область определения функции; время полета и область значения функции?

При ответе на подобные вопросы учащиеся осознают, что абстрактные математические понятия приобретают практический смысл» [12].

II этап. Введение определения обратимой и обратной функции, выделение характерных признаков отличия от других видов функций.

«Понятие обратной функции не имеет аналогов, поэтому приходится вводить их посредством явного определения. Роль обратной функции велика. Использование обратной функции необходимо для введения большого количества классов основных элементарных функций: корня k-й степени, логарифмической, обратных тригонометрических функций» [39].

Перед введением понятия обратной функции следует ввести понятие обратимой функции. Проанализировав графики обратимой функции на монотонность, можно заметит, что она зависит напрямую от монотонности исходной функции.

Перед введением определения ученикам предлагают ознакомиться с графиками функций, у которых D(f) = E(f), но одна из функций монотонная, а вторая нет (рис. 5). Функция f(x) является монотонной, а функция g(x) - нет. Таким образом, учитель подводит учеников к понятию обратимой функции.

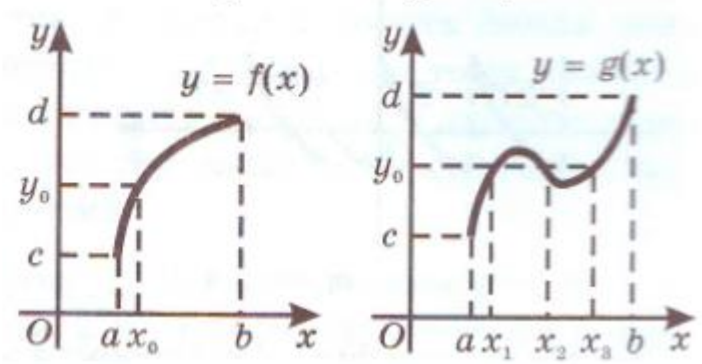

Рисунок 5 - Графики функции f(x) и g(x).

Затем учитель формулирует определение обратимости функции и приводит доказательство теоремы об обратимой функции.

Определение: «функцию y=f(x), x ∈ X называют обратимой, если любое своё значение принимает в одной точке множества X.

Теорема: если функция y=f(x) монотонна на множестве X, то она обратима.

Доказательство:

1. Пусть функция *y=f(x)* возрастает на *X* и пусть $x_1 \neq x_2$- две точки множества *X*.
2. Для определенности пусть $x_1 < x_2$. Тогда из того, что $x_1 < x_2$ следует, что $f(x_1) < f(x_2)$.
3. Таким образом, разным значениям аргумента соответствуют разные значения функции, т.е. функция обратима.» [2]

Перед введением определения обратной функции можно предложить задание на нахождение обратимых функций.

Задача 4. Определите по графику, какая из функций обратима. (рис.6)

Рисунок 6 - Графики функции f(x) и g(x).

Какая функция называется обратной?

Определение: «Пусть функция y=f(x) – обратимая и D(y)=X, E(y)=У. Поставим в соответствие каждому значению y ∈ У единственное значение x, при котором f(x)=y. Тогда получим функцию x $=f^{-1}$(y), которая определена на У, а Х – её область значений. Такую функцию x $=f^{-1}$(y) называют обратной по отношению к функции y=f(x).»[2]

Затем учитель знакомит учеников со способом нахождения обратной функции, заданной аналитически.

Задача 5. Найдите обратную функция g (x) для функции y=f(x):

1) y(x)= $\frac{3-2x}{5}$;

2) y(x)=2x^2-1, D(y) = $[0; +\infty)$.

Для повышения учебной мотивации учащихся и представления значимости приложения к реальным процессам использование данного подхода к определению формируемого понятия позволяет продемонстрировать целесообразность изучения обратной функции.

Основное внимание уделяется построению графиков обратной функции на третьем этапе согласно методической схеме.

III этап. Построение графиков обратных функций (квадратичная, тригонометрическая, логарифмическая, показательная).

Свойства обратной функции:

1. Область определения и область значений взаимно обратных функций меняются местами.

2. Если функция возрастает (убывает) на Х, то ей обратная функция так же возрастает (убывает) на У.

3. Графики взаимно обратных функций лежат симметрично относительно прямой y = x.

Задача 6. «Дано: монотонная функция.

$$\begin{cases} f(x) = x^2 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Найти: обратную функцию f $^{-1}$ (x) и ее график.»[4]

Решение.

1. Решим относительно x уравнение $\begin{cases} f(x) = x^2 \\ x \geq 0 \end{cases}$, получаем:

$\begin{cases} x = \sqrt{y} \\ y \geq 0 \end{cases}$ обратная функция;

переобозначим переменные и получим:

y=$\sqrt{x}$.

2. График прямой функции – это правая ветвь параболы, график обратной функции будет симметричен относительно прямой y=x (см. рис. 7).

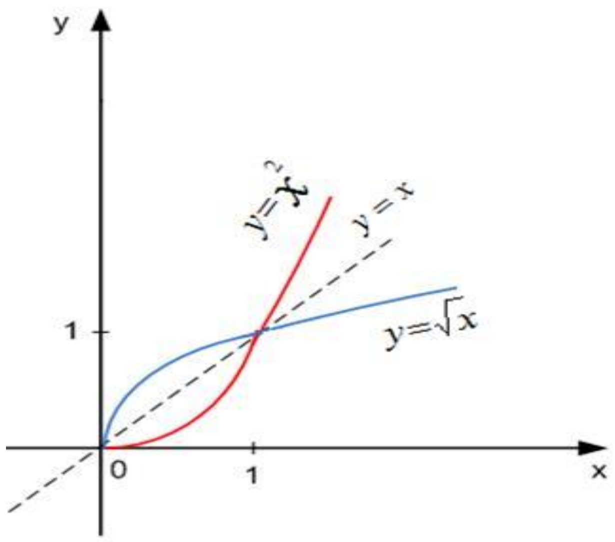

Рисунок 7 - Иллюстрация к задаче 6

Задача 7:

Дано: монотонная функция.

$\begin{cases} f(x) = x^2 \\ x \leq 0 \end{cases}$

Найти: обратную функцию $f^{-1}(x)$ и ее график.

Решение.

1. Решим относительно x уравнение $\begin{cases} f(x) = x^2 \\ x \le 0 \end{cases}$, получаем:

$\begin{cases} x = -\sqrt{y} \\ y \le 0 \end{cases}$ обратная функция;

переобозначим переменные и получим:

y=$-\sqrt{x}$.

2. График прямой функции – это левая ветвь параболы, график обратной функции будет симметричен относительно прямой y=x (см. рис. 8).

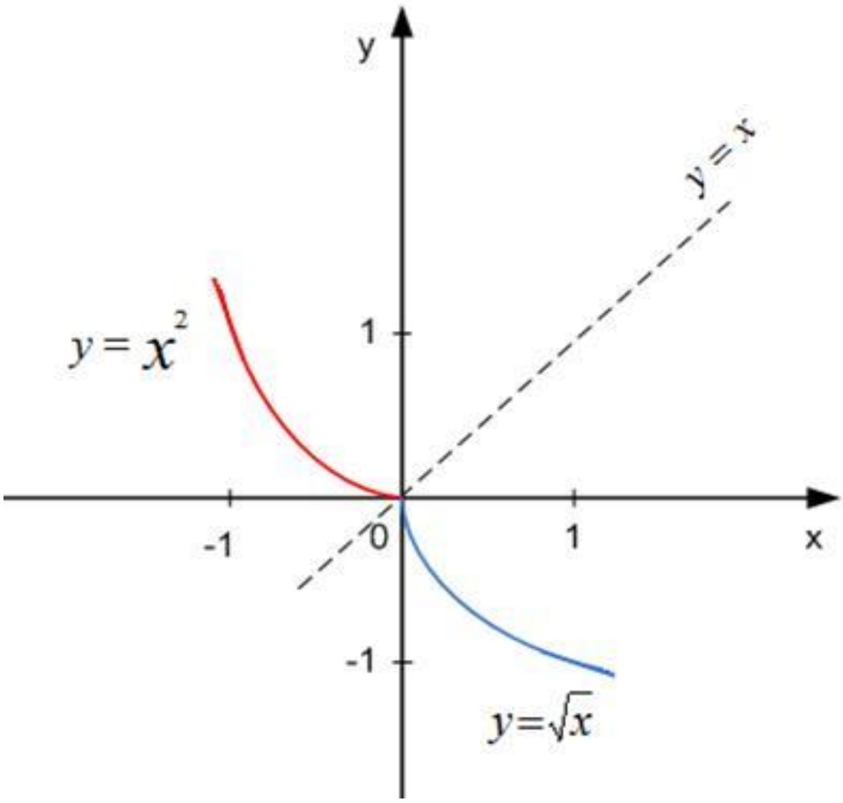

Рисунок 8 - Иллюстрация к задаче 7

Задача 8. Постройте графики функций и запишите их свойства: y=arcsin x.

Основные свойства арксинуса:

1) sin(arcsin x) =x, x∈ $[-1;1]$;

2) arcsin(sin y) =y, y∈ $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

Основные свойства функции арксинуса:

1) D(x)= $[-1;1]$.
2) E(y)= $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.
3) Функция нечетная arcsin (-x) = - arcsin(x).
4) Функция монотонно возрастает.

Построим график функции.

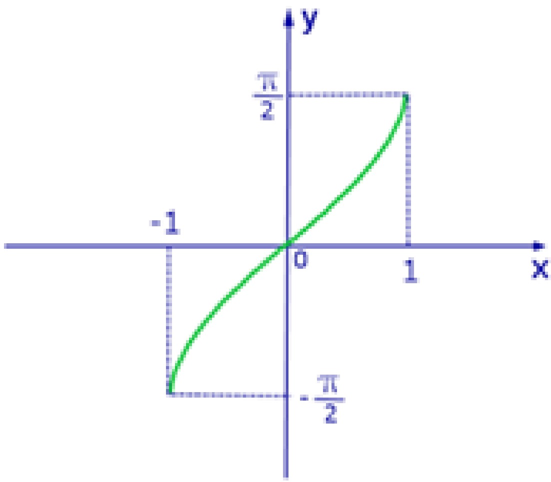

Рисунок 9 - Иллюстрация к задаче 8

Задача 9. Постройте графики функций и запишите их свойства:

y=arcos x

Основные свойства арккосинуса:

1) cos(arccos x) =x, x∈ $[-1;1]$;

2) arccos(cos y) =y, y∈ $[0;\pi]$.

Основные свойства функции арксинуса:

1) D(x)= $[-1;1]$;

2) E(y)= $[0;\pi]$;

3) Функция общего вида arcos(-x)= π-arccos x;

4) Функция монотонно убывает.

Построим график функции.

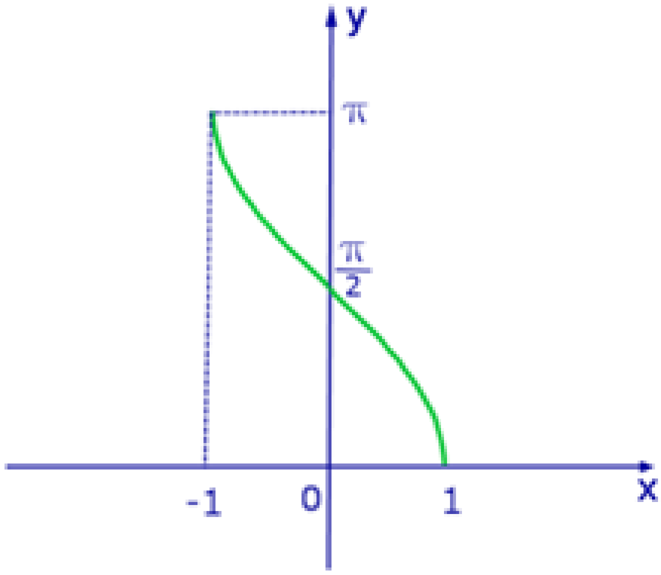

Рисунок 10 - Иллюстрация к задаче 9

Задача 10. Постройте графики функций и запишите их свойства:

y=arctg x.

Основные свойства арктангенса:

1) tg(arctg x) =x, x∈ R;

2) arctg(tg y) =y, y∈ $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$;

Основные свойства функции арктангенса:

1) D(x)=R;

2) E(y)=$\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$;

3) Функция является нечетной arctg(-x) = - arctg(x);

4) Функция монотонно возрастает.

Построим график функции.

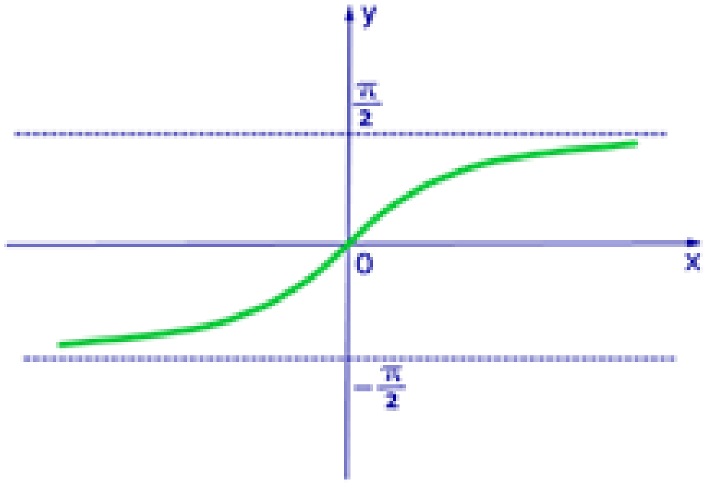

Рисунок 11 - Иллюстрация к задаче 10

Задача 11. Постройте графики функций и запишите их свойства:

y=arcctg x.

Основные свойства арккосинуса:

1) ctg(arcctgs x) =x, x$\in R$;

2) arcctg(ctg y) =y, y$\in$ $(0;\pi)$.

Основные свойства функции арксинуса:

1) D(x)=R;

2) E(y)= (0;π);

3) Функция общего вида arcctg(-x) =π-arcctg x;

4) Функция монотонно убывает.

Построим график функции.

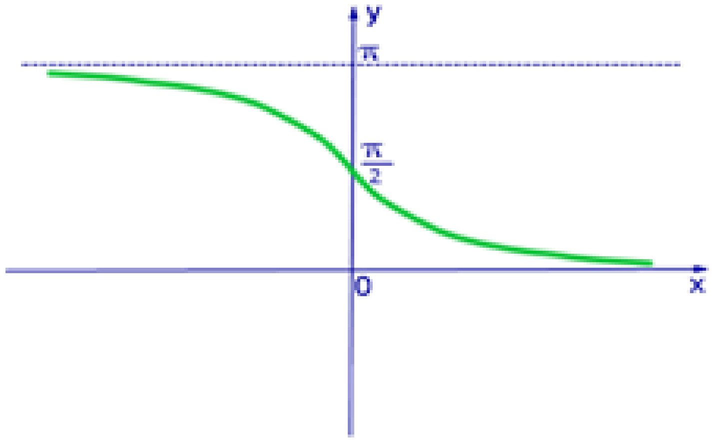

Рисунок 12 - Иллюстрация к задаче 11.

Задача 12. Постройте на одном графике функции: y=a^x и y=$\log_a x$.

Рассмотрим график a$>$ 1.

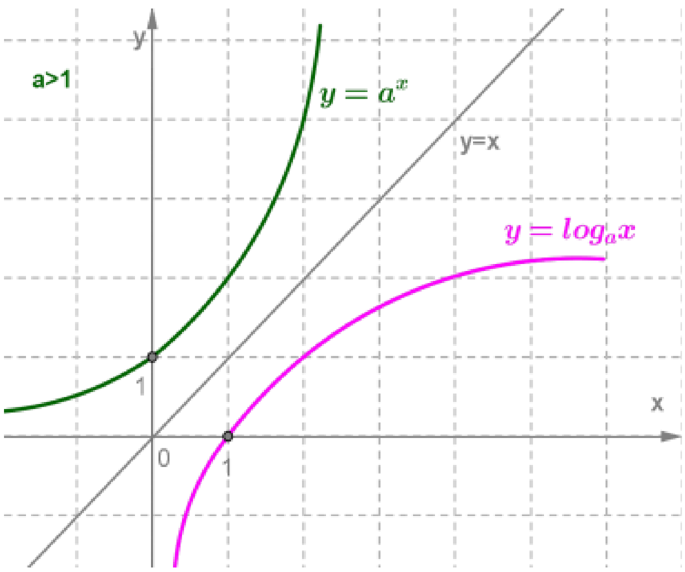

Рисунок 13 - Иллюстрация к задаче 12.

Рассмотрим график 0<a<1.

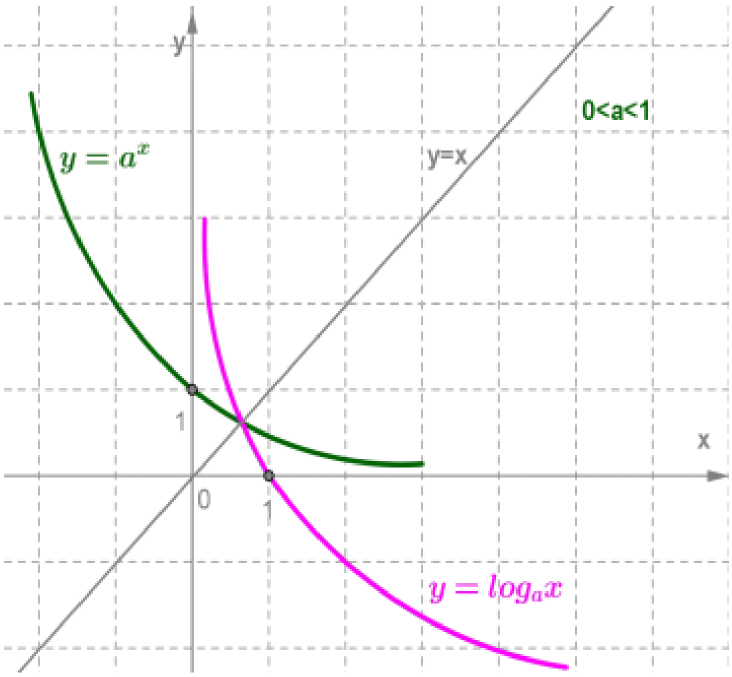

Рисунок 14 - Иллюстрация к задаче 12

По графикам можно сделать вывод, что функции y=a^x и y=$\log_a x$ взаимно обратны. Графики функций симметричны прямой y=x.

IV этап. Применение понятия обратная функция при решении практико-ориентированных задач.

Практико-ориентированная задача понимается как математическое задание, в котором раскрывается применение математики в окружающей жизни, в смежных предметах. Такие задачи используются в технологиях и экономике современного производства, в сфере услуг, в повседневной жизни, при выполнении рабочих заданий и в различных сферах человеческой деятельности. В школьных учебниках их не так много, но будущее за ними.

При введении новых определений целесообразно использование практико-ориентированных задач, так как это влечет наиболее прочное усвоение знаний. У учащихся повышается интерес, способствующий лучшему восприятию информации. «Учащиеся получают возможность развивать логическое и ассоциативное мышление, обеспечивается развитие личности ученика: наблюдательность, умение воспринимать и перерабатывать информацию, делать выводы образного и аналитического мышления. Учащиеся получают умение применять знания для анализа наблюдаемых процессов. Так же развиваются творческие способности у обучающихся, самостоятельная деятельность математического характера. Раскрывается роль математики в современном мире. Выпускники школы получают помощь в определении профиля своей дальнейшей деятельности.»[45]

Учитель предлагает разобрать несколько задач на обратную пропорциональность, и на примере этих задач рассматривает, как знания по данной теме пригодится в повседневной жизни.

Задача 13. В небольшой типографии города S печатают визитки. Александр в типографии работает со скоростью 42 визитки в час и находится на производстве полный рабочий день – 8 часов. Если бы он работал немного быстрее и печатал 48 визиток за час, насколько раньше он смог бы уйти домой?

По условия задачи составим краткую схему, обозначив неизвестную у как х:

↓ 42 виз/ч – 8 ч ↑

↓ 48 виз/ч – х ч ↑

Перед нами обратно пропорциональная зависимость: чем больше визиток в час напечатает сотрудник, тем меньше времени нужно для выполнения работы. Зная это, составим пропорцию:

$\frac{42}{48} = \frac{x}{8}$, $x = \frac{42*8}{48}$=7 часов

8-7=1ч.

Таким образом, завершив работу за 7 часов, Александр смог бы уйти домой на час раньше.

V этап. Закрепление пройденного материала и проведение контрольно-проверочных мероприятий.

2.2 Система упражнений по теме «Обратная функция»

«Основываясь на представленной методической схеме обучения теме «Обратная функция», а также требованиях к системе заданий, направленной на усвоение новых математических понятий, согласно Е.И. Лященко, в разрабатываемую систему упражнений должны быть включены задачи:

1) отображающие практическую значимость нового понятия;

2) на актуализацию опорных знаний и умений;

3) на выделение существенных признаков понятия;

4) на распознавание формируемого понятия;

5) на выделения существенных признаков понятия;

6) на применение понятия к исследованию обратных функций;

7) на применение умений построения графиков;

8 на применение понятия к решению уравнений» [34].

Таким образом, в целях соблюдения вышеуказанных требований был осуществлен отбор заданий для системы упражнений по теме «Обратная функция» с включением практико-ориентированных задач, решение которых формирует метапредметные компетенции.

Данная система упражнений ориентирована на применение в качестве вспомогательной к основному задачному материалу, представленному в выбранном УМК, аккредитованному на территории РФ, как в урочное время, так и на элективных курсах.

Система упражнений по теме «Обратная функция».

Задачи на актуализацию знаний и умений.

Задача 1. Из равенства $p = \frac{st^3}{2-s}$ выразите s(p), s(t).

Задача 2. Упростите выражение:

А) sin(arcos x),

Б) cos(arcsinx),

В) tg(arcctg x).

Задача 3. Вычислите:

А) tg(arcsin$\frac{\sqrt{3}}{2}$),

Б) sin(arccos$\frac{4}{5}$).

Задача 4 . Вычислите:

А) $2(\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + arctg(-1) + arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$;

Б) $arctg\left(-\sqrt{3}\right) + \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + arcsin1$.

Задачи с показом практической значимости понятия.

Задача 5. Каждую секунду скачивается с интернета 0,5 Мб. Сколько Мб будет загружено через t c, если сейчас загружено 120Мб? Задайте формулой зависимость загруженных Мб от времени загрузки.

Задача 6. Объем загруженного файла, возрастает от времени равномерно. За 10 с объем загрузки изменился с 24Мб до 52Мб. Выразите объем передаваемой информации V как функцию времени t.

Задача 7. Водитель автомобиля проезжает каждый час 75 км. Какой путь проедет водитель за 3 часа, если он уже проехал 35 км. Запишите формулу, которая показывает зависимость пути водителя от времени.

Задача 8. Изобразите в виде графика смысл следующих поговорок 1группа – «Пересев хуже недосев». 2 группа – «Чем дальше в лес, тем больше дров».

Задачи на распознавание формируемого понятия.

Задача 9. Запишите определение функции:

А) $y = \arcsin x$;

Б) $y = arctg\, x$;

В) $y = \arccos x$;

Г) $y = \mathrm{arcc}tg\, x$.

Задача 10. Совпадает ли аналитический способ задания взаимно обратных функций?

А) $y = \frac{7}{\mathrm{x}}$,

Б) $y = \frac{7}{x-2}$,

В) $y = -\frac{8}{x}$,

Г) $y = 5 - \frac{8}{x}$.

Задача 11. Найдите функцию обратную данной:

А) $y = x^4, x \in [0; +\infty)$;

Б) $y = x^4, x \in (-\infty; 0]$;

В) $y = x^{2m}, x[0; +\infty), m \in N$;

Г) $y = x^{2m}, x(-\infty; 0], m \epsilon N$;

Д) $y = x^{2m+1}, x(-\infty; 0], m \epsilon N$;

Е) $y = x^{2m+1}, x(-\infty; +\infty), m \epsilon N$;

Ж) $y = a^x, x\epsilon(-\infty; +\infty), a > 0, a \neq 1$.

Задача 12. Вычислите:

А) $\arccos 0$;

Б)$\arccos 1$;

В) $\arccos(-\frac{\sqrt{2}}{2})$;

Г)$\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

Д) $\arccos(-1) + \arccos 0$.

Задачи на выделение существенных признаков понятия.

Задача 13. Для функции $y=x^2$ на каждом из указанных промежутков, по возможности, найдите обратную функцию и задайте ее аналитическим и графическим способами.

А) на R;

Б) $x \in [1;+\infty)$;

В) $x \in (-1;5]$.

Задача 14. Для функции $y=(x+3)^2 -2$ на каждом из указанных промежутков, по возможности, найдите обратную функцию и задайте ее аналитическим и графическим способами.

А) на R;

Б) $x \in [-3;+\infty)$;

В) $x \in (-\infty;-3]$;

Г) $x \in [-4;4]$.

Задача 15. «На каждом из указанных промежутков найдите, если это возможно, функцию, обратную данной:

$y = \begin{cases} 2x-5, x \le 1 \\ x-6, x > 1 \end{cases}$ на $(-\infty;1]$, на $(1; +\infty)$, на R.» [13]

Задачи на применение понятия к исследованию обратных функций.

Задача 16. Найдите D(f) и E(f) функции y=g(x), обратной для функции y=f(x), если:

А) D(f)= R, E(f) = $(3;+\infty)$;

Б) D(f)= $(2;3)\cup[5;6)$, E(f) = $(3;4)\cup(7;+\infty)$.

Задача 17. Определите вид функции: четная, нечетная, общего вида

А) $y = \frac{\arcsin x}{x^4}$;

Б) $y = \ sin^2 x + xarcsin\ x$;

В) $y = \arcsin x^3 + 3\cos 2x$;

Г) $y = 2tg\ x + x^5 - 3\arcsin 2x$;

Задача 18. Найдите область определения выражения $\log_{0,3}(x^2 - 16)$.

Задачи на применение умений построения графиков.

Задача 19. Задайте функцию, обратную данной; постройте график:

А) $y = \begin{cases} 2x, x \le 0 \\ 3x, x > 0 \end{cases}$;

Б) $y = \begin{cases} -5x - 3, x \le -1 \\ -1 - 3x, x > -1 \end{cases}$.

Задача 20. Изобразите график сложной функции y=f(g(x)), если

А) f(x)=4x, g(x)=0,25x;

Б) f(x)=x-3, g(x)=x+3.

Задача 21. Изобразите график сложной функции y=f(g(x)), если

А) $f(x) = x^2$, $g(x) = \sqrt{x}$;

Б) $f(x) = -x^2$, $y = -\sqrt{-x}$.

Задача 22. Изобразите график сложной функции y=f(g(x)), если

А) $f(x) = \frac{3}{x}$, $g(x) = \frac{3}{x}$;

Б) $f(x) = \frac{3}{x+1}$,$g(x) = \frac{3-x}{x}$.

Задача 23. Задайте функцию тремя способами:

$$y = \begin{cases} 2x + 1, x \le 2 \\ \frac{1}{2}x + 4, x > 2 \end{cases}.$$

Задача 24. «Определите существует ли функция обратная данной. Если существует обратная функция, задайте ее графическим и аналитическими способами.

А) $y = 3x + |x|$;

Б) $y = x + 2|x|$.

Задача 25. Определите существует ли функция обратная данной. Если существует обратная функция, задайте ее графическим и аналитическими способами.

А) $y = x|x|$;

Б) $y = x^2 + 2|x|$.

Задача 26. Изобразите функцию на плоскости хОу:

А) $y = \frac{4}{x-2}, x \in (2; +\infty)$;

Б) $y = 1 - \frac{6}{x+2}, x \in (-2; +\infty)$;

В) $y = \frac{1}{1+x^2}, x \epsilon\ [0; +\infty)$;

Задача 27. Изобразите график:

А) $y = tg(arctg\, x)$;

Б) $y = \sin(arctg\, x)$;

В) $y = \arccos(\cos x)$.

Задача 28. Постройте график:

А) $y = \arcsin(x - 1) + \frac{\pi}{2}$;

Б) $y = 2 \arcsin 2x$;

В) $y = \arcsin 2x$.

Задача 29. Постройте и прочитайте график:

А) $y = \begin{cases} \pi, x < -1 \\ \arccos x, -1 < x \leq 1 \\ \sqrt{x-1}, x > 1 \end{cases}$;

Б) $y = \begin{cases} \arccos x, -1 \leq x \leq 1, \\ \frac{\pi}{3}, 0{,}5 \ < x \leq \frac{\pi}{3} \\ x, \frac{\pi}{3} < x \leq 3 \end{cases}$.

Задачи на применение понятия к решению уравнений.

Задача 30. Изобразите на одной координатной плоскости графики т двух взаимно-обратных функций y=f(x) и y=g(x), чтобы уравнение f(x)=g(x) имело один корень; имело три корня.

Задача 31. Решите уравнение:

А) $arcsin(3x^2 - 5x + 1) = \frac{\pi}{3}$;

Б) $arctg\big(\ x^2 - 27 - \sqrt{3}\big) = -\frac{\pi}{3}$.

Задача 32. Докажите, что для $x \in [-1; 1]$, верно равенство $\sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}$.

Задача на применение понятия к решению неравенств.

Задача 33. Решите неравенство:

А) $\arcsin x > \frac{3\pi}{4}$;

Б) $arctg\ x\ > -\frac{\pi}{4}$.

При решении вышеупомянутых задач учащиеся проводят визуальный анализ, используя график, формулу, чертеж или содержание задания в качестве подсказки. Основная цель учителя при объяснении материала - научить вас видеть, извлекать и применять эти подсказки для решения проблем.

2.3 Педагогический эксперимент и его результаты

Педагогический эксперимент проводился на базе ГБОУ СОШ № 33 г. Сызрани в 2022 учебном году.

В эксперименте участвовали 30 учеников 10-го класса, обучающихся на профильном уровне. Ученики обучались по учебному пособию А.Г. Мордковича.

На констатирующем этапе эксперимента определялся уровень сформированности понятия "обратная функция" у учащихся, выявление уровня умения решать задачи по теме «Обратная функция», определения у учащихся уровня владения умением построения графиков обратных функций.

В рамках эксперимента была составлена проверочная работа в двух вариантах, которая содержала следующие типы заданий:

1) на распознавание формируемого понятия (задание №1);
2) на применение умений построения графиков (задание № 2(А));
3) на применение понятия к исследованию обратных функций (задание №2(Б)).

Задание под номером 2 является заданием повышенной трудности.

С целью выявления уровня сформированности понятия «обратной функции» и свойств обратных функций в работу включены 2 теоретических вопроса, которые не влияют на результат контрольной работы.

1. Дополните утверждение: «Если функция y=f(x) принимает каждое свое значение y только при одном значении x, то эту функцию называют…» [1].

А) обратной,

В) обратимой,

С) линейной.

2. Выберите верное(ые) утверждение(ия):

А) если функция f(x) ↑,, то функция f^{-1} ↑;

B) если функция f(x) ↑, то функция f^{-1} ↓;

C) если функция f (x) ↓, то функция f^{-1} ↑;

D) если функция f (x) ↓, то функция f^{-1} ↓;.

1 вариант.

1. Найдите функцию обратную к данной:

А) y=2x-3;

Б) $y = \frac{4}{x}$;

В) $y = \frac{-1+x}{x-2}$;

Г) $y = x^2$, x≥0.

Решение.

1.Найдите функция обратную к данной:

А) y=2x-3 → 2x=y+3 → x=$\frac{y+3}{2}$;

Б) $y = \frac{4}{x} \to x = \frac{4}{y}$;

В) $y = \frac{-1+x}{x-2}$ → -1-x=y(x-2) →-1-x= xy-2y → -x-xy=1-2y →x(-1-y)=1-2y →$x = \frac{1-2y}{-1-y}$;

Г) $y = x^2$, x≥0 →$x = \sqrt{y}$.

2. А) На одном графике постройте функцию и обратную к ней.

Б) Для всех функций найдите область определения и область значения функции.

$$y = \frac{4}{x-2}$$

Решение.

А) Найдем функцию обратную данной (выразим x(y)):

4=y(x-2) → 4=xy-2y → xy=4+2y → $x = \frac{4+2y}{y}$.

Построим функцию $y(x) = \frac{4}{x-2}$ и $y(x) = \frac{4+2x}{x}$ на одном графике.

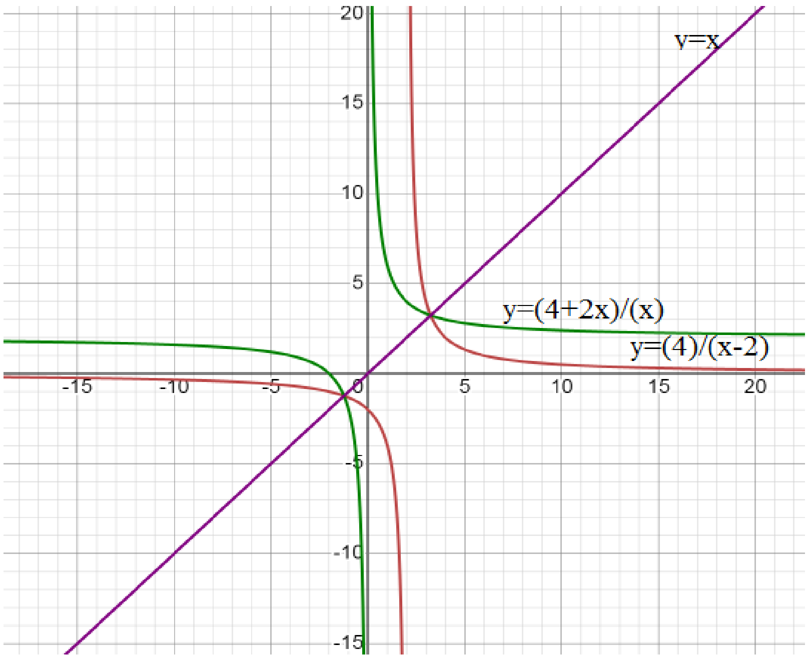

Рисунок 14 - График взаимно обратных функций к задаче 2А
(1 вариант)

Б) Для всех функций найдите область значений и область определения функции:

$$y = \frac{4}{x-2}$$

D(f) ∈ (-∞; 2) ∪ (2; +∞), E(f) ∈ (-∞; 0) ∪ (0; +∞).

$$y(x) = \frac{4+2x}{x}$$

D(f) ∈ (-∞; 0) ∪ (0; +∞), E(f) ∈ (-∞; 2) ∪ (2; +∞).

2 вариант.

1. Найдите функцию обратную к данной:

А) y= - 4x+1;

Б) $y = -\frac{16}{x}$;

В) $y = \frac{x-1}{3-x}$;

Г) $y = -x^2$, x≤0.

Решение. Найдите функцию обратную к данной:

А) y= - 4x+1 → -4x=y-1 →$x=-\frac{y-1}{4}$;

Б) $y=-\frac{16}{x}\rightarrow x=-\frac{16}{y}$;

В) $y=\frac{x-1}{3-x}$ → y(3-x)=x-1 →3y –xy=x-1 → -x-xy=-1-3y →x(-1-y)=-1-3y →$x=\frac{-1-3y}{-1-y}$;

Г) $y=-x^2$, x≤0 → x= $-\sqrt{y}$.

2. А) На одном графике постройте функцию и обратную к ней.

Б) Для всех функций найдите область определения и область значения функции.

$y=3x^2$, x≥0.

Решение.

А) Найдем функцию обратную данной (выразим x(y)): $x^2=\frac{y}{3}$ → x=$\sqrt{\frac{y}{3}}$.

Построим функции на одном графике.

$y(x)=3x^2$, x≥0.

$y(x)=\sqrt{\frac{y}{3}}$

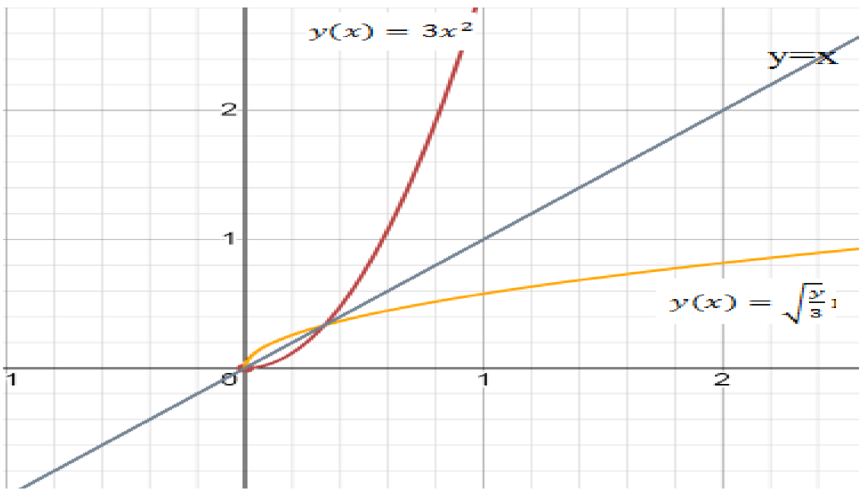

Рисунок 15- График взаимно обратных функций к задаче 2А (2 вариант)

$$y(x) = 3x^2,\ x \geq 0:$$

D(f) ∈ $(2; +\infty)$, E(f) ∈ $(0; +\infty)$.

$$y(x) = \sqrt{\frac{y}{3}}:$$

D(f) ∈ $(0; +\infty)$, E(f) ∈ $(0; +\infty)$.

Результаты ответов на теоретические вопросы и практической части проверочной работы представлены в таблицах 4 и 5 соответственно.

Таблица 4 - Результаты ответов на теоретические вопросы проверочной работы

№ задания	Количество учащихся	
	Выполнили верно	Выполнили неверно
1	17 (56,6%)	13 (43,4%)
2	22 (73,3%)	8 (26,7 %)

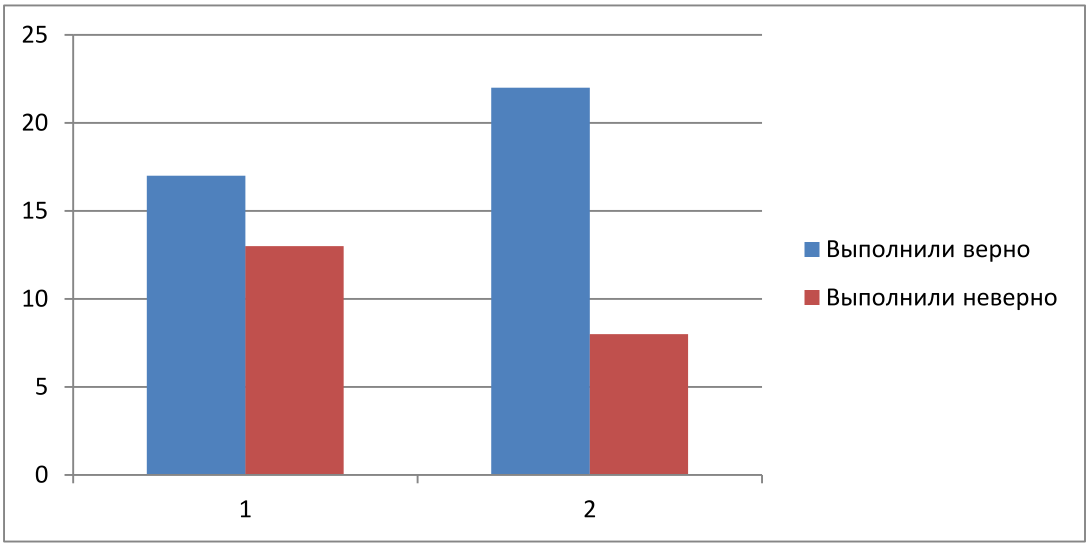

Рисунок 16 - Результаты ответов на теоретические вопросы проверочной работы

Таблица 5 - Результаты выполнения практической части проверочной работы

№ задания	Количество учащихся		
	Выполнили верно	Выполнили неверно	Не приступили к заданию
1а	23 (76,6%)	7 (23,3%)	0 (0%)
1б	20 (66,6 %)	9 (30%)	1 (3%)
1в	10 (33,3 %)	17 (56,6%)	3 (10%)
1г	15 (50%)	12 (40%)	3 (10%)
2а	13 (43,3 %)	12 (40%)	5 (16,6%)
2б	13(43,4%)	13(43,4%)	4 (13,3)

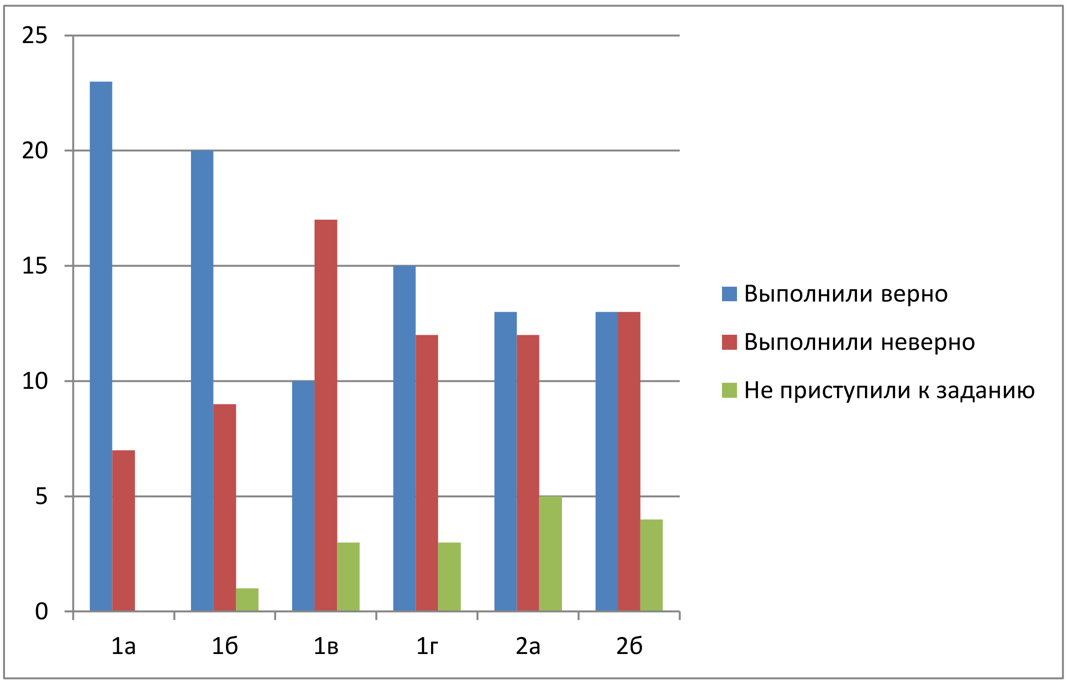

Рисунок 17- Результаты выполнения практической части проверочной работы

Результаты ответов на теоретические вопросы проверочной работы указывают на недостаточную сформированность у учащихся понятий «обратная функция» и свойств обратных функций. Практически половина класса неверно ответила на представленные вопросы.

Анализ результатов практической части тестовой работы (таблица 5) показывает, что у учащихся возникли трудности с задачей построения взаимно обратных функций, нахождения области определения и области значения функции. 43,3% учеников справились с заданием № 2. Только 10 человек справились с заданием 1В – найти обратную функцию, а 17 человек вообще не смогли правильно решить эту задачу. Задачи 1В, 2А, 2В имеют низкую скорость решения. При выполнении заданий 1В, 1Г, 2А, 2В. было допущено большое количество ошибок – 17 учащихся не справились с заданием 1В, 12 – с заданием 1Г, 12 – с заданием 2А, 13 – с заданием 2В.

Стоит отметить, что лучше всего учащиеся справились с заданием 1А на нахождение обратной функции (линейной) (к этому заданию приступили все учащиеся).

Мы проанализировали типичные ошибки, допущенные учениками при решении заданий. Анализ представлен в таблице 6.

Анализ ошибок показал, что учащиеся в большинстве случаев испытывают трудности с поиском обратных функций. Особенно учеников смущает правильность выражения одной переменной через другую. Большое количество ошибок выполняют по невнимательности (ошибка в смене знака).

Обратите внимание, что особое значение придается задачам нахождения области определения функции. Ошибки в этом задании указывают на то, что не все учащиеся полностью понимают концепцию "обратной функции". На это также указывают ошибки в задаче 2.

Стоит отметить, что у учащихся имеются ошибки при нахождении обратных функций, содержащих в числителе и в знаменателе переменную. Причиной таких ошибок может быть невнимательность.

Таблица 6 – Анализ ошибок учащихся

<table>
<tr><td rowspan="2">Задание 1А</td><td>Вычислительная ошибка</td><td colspan="2">Ошибка в смене знака</td></tr>
<tr><td>3</td><td colspan="2">4</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Задание 1Б</td><td>Неверный ход решения</td><td colspan="2">Вычислительная ошибка (упущен минус)</td></tr>
<tr><td>6</td><td colspan="2">3</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Задание 1В</td><td>Неверный ход решения</td><td colspan="2">Неверное раскрытие скобок</td></tr>
<tr><td>12</td><td colspan="2">5</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Задание 1Г</td><td>Неверный ход решения</td><td colspan="2">Не учтено ОДЗ</td></tr>
<tr><td>3</td><td colspan="2">12</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Задание 2А</td><td>Вычислительная ошибка</td><td colspan="2">Неверное построение графика</td></tr>
<tr><td>7</td><td colspan="2">5</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Задание 2Б</td><td>Неверно определена область значения функции</td><td>Неверно определена область определения функции</td><td>Неверно использована запись интервала</td></tr>
<tr><td>4</td><td>5</td><td>4</td></tr>
</table>

В таблице 7 представлены итоговые результаты контрольной работы.

Таблица 7 - Результаты проверочной работы

Оценка	Количество учеников, получивших данную оценку
«5»	5 (16,6%)
«4»	12 (40%)
«3»	10 (33,3%)
«2»	3 (10%)

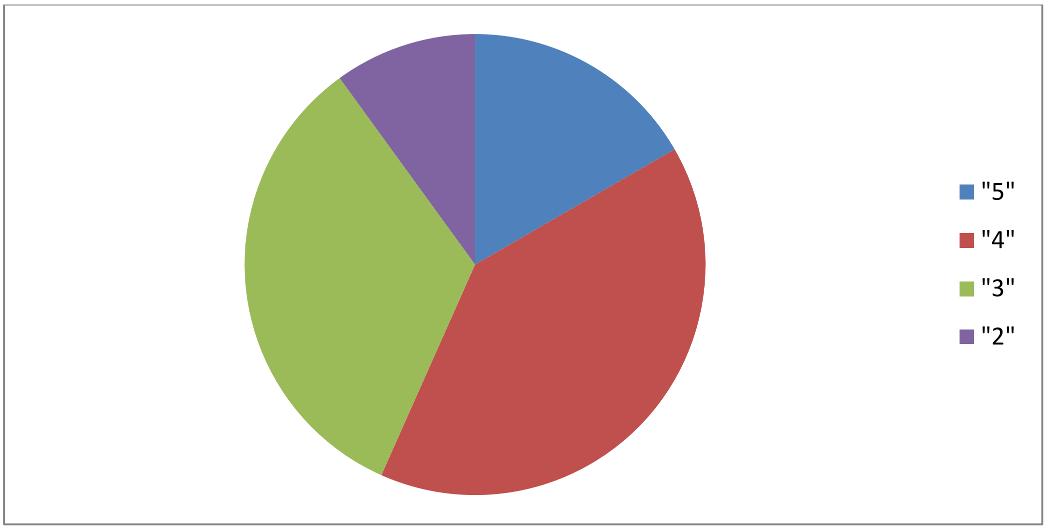

Рисунок 18 - Результаты проверочной работы

Таким образом, можно сделать вывод о том, что большинству учеников сложно решать задачи на тему "Обратная функция". Разработанная нами система упражнений направлена на развитие навыков решения проблем по изучаемой теме. А предлагаемая нами методическая схема по введению понятия «обратная функция» и свойств обратных функций может способствовать более эффективному усвоению темы, как на теоретическом, так и на практическом уровне. большинство учеников испытывают трудности с решением задач по теме "Обратная функция". Разработанная нами система упражнений направлена на развитие навыков решения задач по изучаемой теме. А предложенная нами методическая схема введения понятия «обратная функция» и свойств обратных функций может способствовать более эффективному усвоению темы, как на теоретическом, так и на практическом уровне.

Выводы по второй главе

Сформулируем основные выводы и полученные результаты по второй главе:

1. На основе методических рекомендаций Г.И. Саранцева разработана методическая схема обучения отдельным функционально-графическим понятиям и свойствам обратной функции и их применения к решению уравнений и задач, способствующая осмысленности изучаемого функционального содержания по обратной функции.

2. Для учащихся 10 класса была выбрана система заданий, отражающая требования к материалу заданий, сформулированные Е.И. Лященко. Основная цель данной системы заданий направлена на активное развитие умения определять обратные функции разными способами (аналитическим и графическим), определять свойства обратной функции, заданной графически, а для развития метапредметных компетенций в подборку включены практико-ориентированные задания для активизации мыслительной деятельности учащихся "вне шаблон стереотипных заданий" из учебника, использование функциональной грамотности.

3. Реализация педагогического эксперимента показала, что применение современных технологий обучения алгебре и началам математического анализа, в частности при подаче функционального материала, значительно облегчают понимание учащимися изучаемого материала. Результаты проверочной работы свидетельствуют о том, что учащиеся не умеют устанавливать связь между графическим представлением функции и ее аналитической формой. Применение представленной в работе методической схемы в рамках педагогического эксперимента позволило изменить ситуацию в лучшую сторону.

Заключение

В результате проведенного исследования были получены следующие результаты и выводы:

1. Выявлены основные цели и задачи обучения обратной функции в курсе алгебры и начал математического анализа как:

– ввести определение обратимой и обратной функции;

– научить находить обратную функцию, используя её определение при решении различных задач;

– воспитывать аккуратность при построении графиков обратной функции.

2. Проанализированы различные подходы к введению понятия «обратная функция» авторов действующих учебных пособий общеобразовательной школы.

Выявлено, что авторы рассмотренных учебников связывают данное понятие с рассмотрением задач на выражение одной переменной, через другую.

3. Определены наиболее эффективные формы, методы и технологии организации учебной деятельности, обучающихся при обучении теме «Обратная функция».

Так, при введении понятия «обратная функция» следует сочетать метод проектов и компьютерные технологии, что позволяет усилить интерес к изучению математики.

4. Разработана методическая схема с соблюдением методических рекомендаций Г.И. Саранцева по формированию математических знаний по теме исследования, состоящая из пяти этапов:

1) актуализация опорных знаний для изучения обратной функции;

2) введение определения обратимой и обратной функции, выделение характерных признаков отличия от других видов функций;

3) построение графиков обратных функций (квадратичная, тригонометрическая, логарифмическая, показательная);

4) применение понятия обратная функция при решении практико-ориентированных задач.

5. Разработана система упражнений по теме «Обратная функция», удовлетворяющая требованиям к системе задач Е. И. Лященко, которая включает в себя различные типы упражнений, ориентированные на формирование понятия обратной и обратимой функции, умений строить графики взаимно обратных функций, умений решать практико-ориентированные задачи.

6. Проведен анализ констатирующего и поискового этапов педагогического эксперимента.

Список используемой литературы

1. Алгебра и начала анализа 10 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений: базовый и профил. уровни / [С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин]. М.: Просвещение, 2019. 430 с.
2. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс. В 2 ч. Ч.1. Учебник для учащихся общеобразовательных организаций (базовый и углубленный уровень) /А. Г. Мордкович, П.В. Семенов. М.: Мнемозина, 2018. 311 с.
3. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс. Углубленный уровень. / Виленкин Н.Я., Ивашев-Мусатов О.С., Шварцбурд С.И. М.: Мнемозина, 2019. 313 с.
4. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы. (базовый и углубленный уровни) / Алимов А.Ш., Колягин Ю.М. и др. М.: Просвещение, 2016. 464 с.
5. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс. В 2 ч. Ч.2. Задачник для учащихся общеобразовательных организаций (базовый и углубленный уровень) / А. Г. Мордкович и др. М.: Мнемозина, 2019. 264 с.
6. Бакулина Е.А. Проектные домашние задания по математике как средство интеграции деятельности учителя и учащихся // Интеграция образования. 2011. № 3. С. 60-62.
7. Беспалько, В.П. Слагаемые педагогической технологии. М.: Педагогика, 1989.
8. Богу В.В. Применение динамической системы мониторинга дистанционных учебных проектов при решении совместных систем линейных алгебраических уравнений // Ярославский педагогический вестник. 2012. № 2. С. 7 – 12.
9. Вербицкий А. А. Активное обучение в высшей школе: контекстный подход. Москва : Высш. шк., 1991. 204 с.

10. Волович М.Б. Наука обучать. / Технология преподавания математики. - М.: LINKA-PRESS, 1995. 290 с.

11. Выгодский М.Я. Справочник по элементарной математике. М.: Мнемозина, 2016. 509 с.

12. Гальперин П.Я. Психология мышления и учение о поэтапном формировании умственных действий // Психология как объективная наука. М.: Издательство Институт практической психологии, Воронеж: НПО Модек, 1998.

13. Дидактика средней школы: Некоторые проблемы современной дидактики / Под ред. М.А. Данилова и М.Н. Скаткина. М.: Просвещение, 1975. 303 с.

14. Дорофеев Г.В. Алгебра и начала анализа, 8-11 кл. Пособие для школ и классов с углубленным изучением математика. М.: Дрофа, 2002. 352 с.

15. Дроздов В.Б. Аркфункции в задачах // Математика в школе. – 2010. –№ 4. С. 31–35.

16. Звавич Л. И. Алгебра и начала анализа, 8-11 кл. Пособие для школ и классов с углубленным изучением математики. М.: Дрофа,2002.352 с.

17. Капкаева Л.С. Лекции по теории и методике обучения математике: Частная методика: Учеб. пособие для студентов мат. спец. пед. вузов / Мордов. гос. пед. ин-т. Саранск, 2009. 262 с.

18. Колягин Ю.М. Профильная дифференциация обучения математике / Ю.М. Колягин // Математика в школе. 1990. №4. С. 2127.

19. Концепция профильного обучения на старшей ступени общего образования // Официальные документы в образовании. 2002. №27. С. 3–12.

20. Кругликов В. Н. Интерактивные образовательные технологии: учеб. и практикум для вузов. Москва : Юрайт, 2021. 353 с.

21. Куприенко Е.Ю. Понятие и типология математических проектов // Письма в Эмиссия. Оффлайн. 2015 год, август.

22. Лобанок И.П. Пропедевтика как средство интеграции в обучении математике; учеб. -метод. пособие / И.П, Лобанок. Могилев; МГУ им. А.А. Кулешова, 2005. 68 с.

23. Лященко, Е.И., Мазаник А.А. Методика обучения математики в IVV классах. Минск.: Народная асвета, 1976. 222 с.

24. Маркушевич А.И. Об очередных задачах преподавания математики в школе. На путях обновления школьного курса математики. М.: Просвещение, 1978. С. 29–48.

25. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. Углубленный уровень. 10 класс.: учебник/ Г. К. Муравин, О.В. Муравина. М.: Дрофа, 2013. 318 с.: ил.

26. Махмутов М.И. Теория и практика проблемного обучения. М.: Просвещение, 1975. 368 с.

27. Михайлова Т.А. Пропедевтика как основа процесса обучения функциям на уроках математики в 7-11 классах: дис. канд. пед. наук. Биробиджан, 2015. 180 с.

28. Монахов В.М. Введение в теорию педагогических технологий. Волгоград: Перемена, 2006.

29. Перельман Я.И. Занимательная геометрия: научные статьи. Екатеринбург.: Тезис, 1994. 288 с.

30. Покровский В. П. Методика обучения математике: функциональная содержательно-методическая линия: учеб. -метод. Пособие. Владимир: Изд-во ВлГУ, 2014. 143 с.

31. Решу ОГЭ. Образовательный портал для подготовки к экзаменам [Электронный ресурс]. URL: https://oge.sdamgia.ru/ (дата обращения 13.05.2022).

32. Решу ЕГЭ. Образовательный портал для подготовки к экзаменам [Электронный ресурс]. URL: https://math-ege.sdamgia.ru/ (дата обращения 13.05.2022)

33. Саранцев Г.И. Методика обучения математике в средней школе: Учеб. пособие для студентов мат. спец. пед. вузов и ун-тов. М.: Просвещение, 2002. 224 с.

34. Селевко Г.К. Современные образовательные технологии: Учебное пособие. М.: Народное образование, 1998. 256 с.

35. Скаткин М.Н. Совершенствование процесса обучения (Проблемы и суждения). М.: Педагогика, 1971. 205 с.

36. Стандарт основного общего образования по математике // Математика в школе. 2004. № 4. С. 4 - 9.

37. Стандарт среднего (полного) общего образования по математике // Математика в школе. 2004. № 4. С. 9 - 16.

38. Ступницкая М.А. Что такое проект? Учебно-методическое пособие /. М.: Первое сентября, 2010. 44 с.

39. Супрун В.П. Математика для старшеклассников: дополнительные разделы школьной программы: 275 задач для эффективной подготовки к вступительным испытаниям и олимпиадам. Москва: URSS, 2014. 208 с.

40. Темербекова А. А., Чугунова И. В., Байгонакова, Г. А. Методика обучения математике: Учебное пособие. СПб.: Издательство «Лань», 2015. 512 с.

41. Утеева Р.А. Групповая работа как одна из форм деятельности учащихся на уроке //Математика в школе. 1985. № 2. С. 33-35.

42. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования / М-во образования и науки Рос. Федерации. 6-е изд., перераб. М.: Просвещение, 2017. 61 с.

43. Федеральный закон «Об образовании в Российской Федерации». Новосибирск: Норматика, 2016. 144 с.

44. Фридман Л.М. Теоретические основы методики обучения математики: Пособие для учителей, методистов и педагогических высших учебных заведений. Москва: Московский психолого-социальный институт: Флинта, 1998 г.224 с.

45. Ященко И.В. Математика: 30 типовых вариантов экзаменационных работ для подготовки к ЕГЭ. Москва: АСТ: Астрель, 2014.

46. Bukari, Hamidu I. Using Constructivist Approach to Enhance Students Understanding of Logarithmic Functions: A Case Study of Kalpohin Senior High School, Tamale-Ghana. / Hamidu I Bukari, Abdul-Rahaman Yakubu // International Journal of Engineering and Applied Sciences, 2018.vol. 5, no. 3.

47. Glasersfeld, E. von. A constructivist approach to teaching. / E. von Glaserfeld // Steffe L. P. & Gale J. (eds.) Constructivism in education. Erlbaum, Hillsdale: 3–15. URL: http://vonglasersfeld.com/172.

48. Natsheh, I. Exploring the potential role of visual reasoning tasks among inexperienced solvers. / Intisar Natsheh, Ronnie Karsenty // ZDM Mathematics Education, 2014. № 46. P. 109-122.

49. Star, J. R. Teaching Strategies for Improving Algebra Knowledge in Middle and High School Students / P. Caronongan, A. Foegen, J. Furgeson, B. Keating, M. R. Larson, J. Lyskawa, W. G. McCallum, J. Porath, R. M. Zbiek. - Washington, DC, 2015. 64 p. [Электронный ресурс]: https://ies.ed.gov/ncee/wwc/Docs/PracticeGuide/wwc_algebra_040715.pdf.

50. Wathall, J.C. Mathematics: Analysis and Approaches, Higher Level / J.C. Wathall, J. Harcet, R. Harrison // Oxford IB Diploma Programme, Oxford University Press, 2019. 855 p.