

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Тольяттинский государственный университет»

Институт математики, физики и информационных технологий
(наименование института полностью)

Кафедра «Высшая математика и математическое образование»
(наименование)

44.04.01 Педагогическое образование
(код и наименование направления подготовки)

Математическое образование
(направленность (профиль))

**ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
(МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ)**

на тему «Сравнительный анализ содержания итоговой аттестации учащихся по математике в российской и зарубежной школах»

Обучающийся

Ш.К. Жубаева
(Инициалы Фамилия)

(личная подпись)

Научный
руководитель

канд. пед. наук, доцент, В.В. Липилина
(ученая степень (при наличии), ученое звание (при наличии), Инициалы Фамилия)

Тольятти 2022

Оглавление

Введение.....	3
Глава 1 Теоретические основы сравнительного анализа содержания итоговой аттестации по математике в российской школе и за рубежом.....	11
1.1 Основные цели и задачи итоговой аттестации в курсе математики общеобразовательной школы.....	11
1.2 Теоретико-методологические основы сравнительных исследований содержания итоговой аттестации по математике в российской и зарубежной школе.....	17
1.3 Содержательный анализ итоговой аттестации по математике общеобразовательной школы в России и за рубежом.....	24
Глава 2 Практическое содержание итоговой аттестации по математике в российской школе и за рубежом.....	38
2.1 Типология математических задач и основные методы и приемы сравнения содержания итоговой аттестации в разных странах.....	38
2.2 Формирование аналитических умений обучающихся как средство подготовки к итоговой аттестации по математике в российской школе.....	48
2.3 Использование результатов сравнительного анализа содержания итоговой аттестации учащихся по математике в российской школе.....	64
Заключение.....	79
Список используемой литературы.....	81

Введение

Актуальность и научная значимость настоящего исследования.

В условиях идущей глобализации конкурентоспособность профессиональных знаний и навыков современных специалистов из разных стран во всех сферах жизнедеятельности человека, несомненно, играет важную роль. Основа для этого закладывается в общеобразовательной школе, завершающим этапом которой является итоговая аттестация учащихся.

В соответствии с действующими нормативными документами «Федеральный государственный стандарт среднего общего образования (ФГОС СОО) является основой для проведения государственной итоговой и промежуточной аттестации обучающихся» [32].

Этим стандартом предусмотрен самостоятельный выбор обучающимися «уровня (базовый или профильный), в соответствии с которым будет проводиться государственная итоговая аттестация по учебному предмету Математика» [32]. Помимо этого, стандарт определяет, что «система оценки достижения планируемых результатов освоения основной образовательной программы должна включать описание организации, содержания и критериев оценки результатов по учебным предметам, выносимым на государственную итоговую аттестацию» [27], в том числе, по математике.

Уже на стадии среднего общего образования важны конкурентные преимущества знаний, полученных российскими школьниками, по сравнению с учащимися из других стран.

Именно этим, в первую очередь, обусловлена **актуальность** данной работы. Сравнительный анализ содержания итоговых аттестаций в различных странах позволяет выявить недостатки собственно учебно-познавательного процесса.

Актуальность работы обусловлена еще и тем, что анализ итоговых аттестаций указывает на проблемы в программах, в частности, по математике и будет способствовать повышению предметных компетенций обучающихся. Очевидна необходимость постоянного совершенствования методического обеспечения и его учебного содержания с учетом дифференцированного подхода.

Дополнительно отметим, что Россия до 6 июня 2022 года являлась полноправным участником Болонского процесса, основной целью которого являлась универсализация европейского образования, обеспечение сопоставимости стандартов и качества квалификаций высшего образования. Решение этой задачи предполагало сравнительный анализ базовых знаний учащихся разных стран на основе содержания и результатов итоговых аттестаций на уровне образовательной школы.

Помимо этого, заинтересованные учащиеся получают возможность продолжить образование на университетском уровне благодаря различным программам по взаимному студенческому обмену.

В российской научно-педагогической литературе уделяется недостаточно внимания актуальной теме соотносимости знаний, полученных в российской школе с уровнем зарубежного образования в ведущих с точки зрения научно-технического прогресса странах.

Несмотря на выход из программы Болонского процесса, изучение результатов итоговых аттестаций в разных странах остается актуальным.

Представляется, что данная работа, посредством анализа содержания итоговых аттестаций, будет способствовать более детальному пониманию особенностей, сходств и различий программ математической направленности в российской и зарубежных школах.

Таким образом, **актуальность и научная значимость** исследования обусловлена:

- требованиями ФГОС ООО к организации итоговых аттестаций обучающихся по математике;
- требованиями современной действительности к уровню конкурентоспособности знаний выпускников российских школ;
- необходимостью в анализе и учете особенностей математических программ зарубежной школы;
- сложившимися к настоящему времени **противоречиями** между необходимостью формирования предметных знаний и умений на конкурентном уровне и недостаточностью сравнительного анализа итоговых аттестаций по математике в российской и зарубежной школе.

Из данных противоречий вытекает **проблема данного диссертационного исследования**: каковы методические особенности, сходства и различия итоговых аттестаций по математике в российской и зарубежных школах?

Объект исследования: итоговые аттестации по математике, проводимые для учащихся в российских и зарубежных школах различного уровня.

Предмет исследования: содержание итоговых аттестаций обучающихся по математике в российской и зарубежной школе как в рамках стандартных курсов по математике, так и при углубленном изучении предмета.

Цель исследования состоит в выявлении методических особенностей итоговых аттестаций выпускников общеобразовательных школ в России и их сравнительный анализ с экзаменационными испытаниями в зарубежных странах.

Гипотеза исследования основана на предположении о том, что сравнительный анализ итоговых аттестаций по математике в российской и

зарубежной школе способствует повышению качества математической подготовки и конкурентоспособности знаний, получаемых в отечественных общеобразовательных учебных заведениях.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие **задачи**:

- изучить нормативную базу, которая регулирует организацию итоговых аттестаций по математике для обучающихся общеобразовательной школы;
- проанализировать учебно-методические пособия и материалы, используемые в процессе подготовки экзаменационных испытаний по математике;
- провести сравнительный анализ содержания собственно итоговых аттестаций и экзаменационных материалов по математике для учащихся в различных странах;
- проанализировать типологию математических задач, предлагаемых на итоговых аттестациях;
- исследовать типовые ошибки учащихся и основные затруднения при формировании аналитических умений обучающихся как средству для подготовки к итоговым аттестациям по математике;
- сформулировать ключевые темы для подготовки к итоговой аттестации, провести педагогический эксперимент и описать его результаты.

Теоретико-методологическую основу данного исследования составили работы Решетниковой О.А. [28], Мальковой З.А. [18], Зингера В.А. [7], Подласого И.П. [24].

Базовыми для настоящего исследования являются Федеральный закон от 29.12.2012 № 273-ФЗ (ред. от 30.12.2015 г.) «Об образовании в Российской Федерации» (с изменениями и дополнениями, вступающими в

силу с 01 июля 2016 г.) [33]; ФГОС СОО [32], материалы итоговых аттестаций в общеобразовательной школе Российской Федерации [23], а также материалы итоговых аттестаций в некоторых зарубежных странах, Германии, Грузии [19], Казахстана [29].

Методы исследования, использованные для решения поставленных задач: анализ научно-педагогической, исследовательской и учебно-методической литературы; изучение и обобщение практики проведения итоговых аттестаций в России и других странах; анализ результатов опытно-экспериментальной работы и педагогического эксперимента по проверке основных положений исследования.

Основные этапы исследования:

1 семестр (2020-2021 уч. г.): анализ существующих исследований по теме данной работы, анализ учебников, пособий, нормативных документов (стандартов, программ);

2 семестр (2020-2021 уч. г.): определение теоретико-методологических оснований сравнительных исследований содержания итоговой аттестации по математике в российской и зарубежной школе;

3 семестр (2021-2022 уч. г.): анализ содержания итоговой аттестации по математике в общеобразовательной школе России и за рубежом;

4 семестр (2021-2022 уч. г.): изучение типологии задач и основных затруднений при формировании аналитических умений обучающихся как средства для подготовки к итоговым аттестациям по математике;

5 семестр (2022-2023 уч. г.): формулировка ключевых темы для подготовки к итоговой аттестации; проведение педагогического эксперимента; оформление работы и корректировка материала, формулировка выводов.

Опытно-экспериментальная база исследования: КГУ «Средняя общеобразовательная школа №16 отдела образования города Экибастуза» Павлодарской области Республики Казахстан.

Научная новизна исследования заключается в том, что в нем изложены некоторые методические особенности итоговых аттестаций в российской и зарубежной школе на основе их сравнительного анализа.

Теоретическая значимость исследования состоит в том, что в нем:

- проведен анализ учебно-методических пособий и материалов по теме исследования;
- выявлены некоторые методические особенности итоговых аттестаций в российской и зарубежной школе, их сходства и различия;
- приведена типология математических задач и основные методы и приемы сравнения содержания итоговых аттестаций в разных странах.

Практическая значимость исследования определяется тем, что в данной работе:

- приведена типология математических задач в итоговых аттестациях различных стран;
- предложены ключевые темы и примеры ключевых задач для подготовки к итоговой аттестации.

Достоверность выводов по данной работе, полученных в ходе исследования, обеспечивалась сочетанием теоретических и практических методов, анализом педагогического эксперимента.

Личное участие автора в организации и проведении исследования состоит в определении типологии математических задач экзаменационных испытаний в различных странах, и составлении ключевых тем и задач, предназначенных для подготовки к итоговым аттестациям.

Апробация и внедрение результатов работы велись в течение всего периода проведения исследования. Экспериментальная проверка предлагаемой системы ключевых тем и задач была осуществлена в период

производственной практики (научно-исследовательской работы) и преддипломной практики на базе кафедры «Высшей математики и математического образования» Тольяттинского государственного университета, а также в период работы учителем математики средней общеобразовательной школы Республики Казахстан.

Теоретические выводы и практические результаты исследования представлены на Всероссийской студенческой научно-практической междисциплинарной конференции «Молодежь. Наука. Общество» – декабрь 2021 года, г. Тольятти; научно-методическом семинаре «Концепция школьной геометрии» – февраль 2022 года.; в публикациях:

- доклад «Формирование аналитических умений как средство подготовки к итоговой аттестации по математике в российской школе» – Диплом конкурса докладов по направлению «Математика, физика» – в рамках всероссийской студенческой научно-практической междисциплинарной конференции [6];
- доклад «Некоторые аспекты сравнительного анализа содержания итоговых аттестаций по математике для выпускников школ в России и США» принят для участия в VII Международном научно-практической конференции «Актуальные проблемы обучения математике в школе и вузе: от науки к практике» - Москва, МПГУ, 18-19 ноября 2022 года.

Результаты исследования обсуждались на заседаниях кафедры «Высшая математика и математическое образование» Тольяттинского государственного университета.

На защиту выносятся:

- сравнительный анализ содержания итоговых аттестаций и экзаменационных материалов по математике для обучающихся в различных странах;

- типология задач, предлагающихся для итоговой аттестации по математике в общеобразовательной школе;
- предложения по системе ключевых тем и задач для подготовки к итоговым аттестациям по математике в общеобразовательной школе;
- результаты педагогического эксперимента по практической апробации предложенной системы тем и задач к итоговым аттестациям.

Магистерская диссертации состоит из введения, двух глав и заключения, содержит 22 рисунка, 9 таблиц, список использованной литературы из 44 источников. Основной текст работы изложен на 85 страницах.

Глава 1 Теоретические основы сравнительного анализа содержания итоговой аттестации по математике в российской школе и за рубежом

1.1 Основные цели и задачи итоговой аттестации в курсе математики общеобразовательной школы

Начиная с 2009 года, в России в качестве итоговой аттестации на постоянной основе используется Единый государственный экзамен, с помощью которого оцениваются предметные результаты обучения выпускников. Тем самым, такая форма итоговой аттестации стала главным элементом для оценки качества образования.

Считается, что «Единый государственный экзамен стал действенным механизмом обеспечения равных шансов на получение высшего профессионального образования. У выпускников школ независимо от их социального происхождения и места проживания появилась реальная возможность выбрать вуз» [4].

Современная система итоговой аттестации обеспечила независимость ее результатов от конкретного учреждения образования. Одновременно, была предоставлена «важная для совершенствования процесса обучения информация учителям, методистам, авторам учебников и разработчикам образовательных стандартов» [4].

Основные цели и задачи итоговых аттестаций определены российским законодательством, и, в целом, находятся в соответствии с общепринятой мировой практикой.

Итоговые аттестации являются обязательными и проводятся «в целях определения соответствия результатов освоения обучающимися образовательных программ среднего общего образования соответствующим

требованиям федерального государственного образовательного стандарта среднего общего образования» [32].

Для подавляющего контингента выпускников проводятся эти испытания в форме единого государственного экзамена с использованием «заданий стандартизированной формы» [32]. Итоговая аттестация, которая проводится в форме государственного выпускного экзамена, предусмотрена для отдельных специальных категорий обучающихся.

Аттестация, «завершающая освоение имеющих государственную аккредитацию основных образовательных программ среднего общего образования, является обязательной» [26]. В свою очередь, к числу обязательных предметов при итоговой аттестации относится математика.

Экзамены по математике в российской школе подразделяется на два уровня:

- базовый уровень, который принимается в качестве результирующей государственной итоговой аттестации «общеобразовательными организациями и профессиональными образовательными организациями» [26];
- профильный уровень, который принимается в качестве результирующей государственной итоговой аттестации «общеобразовательными организациями и профессиональными образовательными организациями, а также в качестве результатов вступительных испытаний по математике при приеме на обучение по образовательным программам высшего образования – программа бакалавриата и программа специалитета – в образовательные организации высшего образования» [26].

К основным задачам итоговой аттестации в форме единого государственного экзамена относятся:

- улучшение возможностей по получению последующего профессионального образования;

- обеспечение преемственности знаний на общей и профессиональной ступени образования;
- формирование системы объективной оценки подготовки выпускников общеобразовательных учреждений.

Успешная подготовка обучающихся к государственной итоговой аттестации ставит перед учителем математики новые профессиональные задачи, решение которых связано с изменениями в методике преподавания предмета и в системе оценки образовательных достижений учащихся.

Цели и задачи итоговой аттестации являются стимулом к корректировке профессиональных огрехов при подготовке учителей и оказывают влияние на повышение компетенций и переподготовку кадров в системе образования.

Оценка – это «процесс сбора и анализа информации о том, какими знаниями, пониманиями и практическими навыками обладают учащиеся, которые позволили бы принять обоснованное решение о последующих шагах в их образовательном процессе» [14].

Система оценки достижений обучающихся по итогам аттестаций «обеспечивает целый ряд таких потребностей информационного характера, как создание информационной основы для обучения и преподавания, определение достигнутого прогресса, измерение достигнутых результатов, а также частичное повышение ответственности. Реализация этих информационных задач и принятие решений на основе такой информации в конечном итоге должны привести к повышению качества и уровней обучения в системе образования» [14].

Далее, приведем роль итоговых аттестаций в системах образования некоторых стран.

В Казахстане, например, законодательными актами установлено, что «итоговая аттестация обучающихся – это процедура, проводимая с целью определения степени освоения ими объема учебных предметов, учебных

дисциплин и (или) модулей, предусмотренных государственным общеобязательным стандартом соответствующего уровня образования» [25].

Итоговая аттестация для обучающихся 11(12) класса проводится «в следующих формах:

- письменного экзамена по казахскому языку/русскому языку и родному языку для школ с уйгурским/таджикским/узбекским языком обучения (язык обучения) в форме эссе;
- письменного экзамена по алгебре и началам анализа;
- тестирования по истории Казахстана;
- тестирования по казахскому языку в школах с русским/узбекским/уйгурским/таджикским языком обучения и тестирования по русскому языку в школах с казахским языком обучения;
- предметные тестирования по выбору (Физика, Химия, Биология, География, Геометрия, Всемирная история, Основы права, Литература, Иностранный язык (английский / французский / немецкий), Информатика)» [4].

В 2005 году решением правительства Грузии старая система вступительных экзаменов была заменена новой. Одновременно, новые экзамены стали играть роль итоговой аттестации для выпускников. Внедрение новой модели вступительных экзаменов по-прежнему считается одной из самых успешных реформ в стране.

Модель, разработанная и внедренная Национальным центром оценивания и экзаменов, представляет собой справедливую, прозрачную, единую меритократическую систему оценивания, которая обеспечивает отбор лучших абитуриентов для получения высшего образования.

Единые национальные экзамены включают:

- стандартизированный отбор;

- комплексную оценку навыков и знаний;
- присуждение государственных стипендий лучшим студентам;
- широкий выбор возможностей.

С 2020 года абитуриенты сдают ЕГЭ по новой модели. При зачислении на программу высшего образования (помимо медицинского направления), а также художественно-творческих/спортивных образовательных программ, проводятся экзамены по трем обязательным предметам: Родной язык и литература; Иностранный язык; Математика/История. Третий тест зависит от программ. Соискатели технических и естественных специальностей проходят итоговую аттестацию по математике, а гуманитарных наук – по истории и в зависимости от специфики программы выбирают историю или математику при выборе междисциплинарных специальностей.

Высшие учебные заведения дополнительно определили в соответствии с образовательными программами дополнительные экзаменационные предметы из следующего списка: биология, химия, физика, общие навыки, география, литература, изобразительное и прикладное искусство, гражданское образование [19]. Анализируя систему итоговых аттестаций в Германии [30] подчеркнем, что она в наиболее полной мере подстроена под Болонский процесс, который внес коррективы во многие страны.

Германия, используя право на собственные подходы к образовательному процессу, сформировала отличающуюся систему. К особенностям школьного обучения относится наличие двух особых ветвей.

По первой системе учеба длится 10 лет, после которой выпускники идут по линии получения профессионального образования.

По второй системе учеба длится 12/13 лет и выпускники идут по линии получения высшего образования. Основная масса учащихся, около 70%, оканчивает «десятилетку». Остальные 30% учатся еще 2/3 года и, затем, получают высшее образование.

Заметим, что в Германии отсутствуют вступительные экзамены в высшие учебные заведения (исключением являются ВУЗы медицинской направленности).

Цели и задачи итоговой аттестации, которая проводится после 10 года обучения, определены индивидуально, в каждом из территориальных образований (земель) Германии. Единого закона об образовании, как в России, в Германии не существует. Единственной сложностью данного обстоятельства является наличие в стране большого количества учебников, например, по математике. Для получения высшего образования тем, кто обучался 12/13 лет, необходима лишь мотивация. Выпускник, не изучавший физику, может поступить на физический факультет, если будет проявлено «искреннее желание» [30]. Используемые модели итоговых аттестаций можно представить в виде нескольких систем на примере стран СНГ. В Российской Федерации «единый государственный экзамен объединил цели итоговой аттестации и вступительных экзаменов, проводимых в одной процедуре, обязательной для участия минимум по двум предметам» [28].

В Республике Беларусь централизованное тестирование играет роль вступительных испытаний и «проводится после традиционной итоговой аттестации только для желающих поступить в высшие учебные заведения» [8]. В Армении «национальный экзамен проводится в две процедуры, разведенные по времени: только для целей итоговой аттестации (для выпускников школ, не планирующих продолжение образования в вузах) и в форме единого экзамена, объединяющего цели итоговой аттестации и вступительных испытаний (для желающих продолжить образование в вузах страны)» [28]. В Казахстане итоговая аттестация проводится для всех выпускников независимо от намерения поступать в ВУЗы.

Сравнивая итоговые аттестации в различных юрисдикциях, можно прийти к выводу, что, при всем различии подходов к системе образования, их цели и задачи являются схожими, и они направлены на совершенствование

как самой структуры образовательных программ, так и повышение предметных компетенций обучающихся.

1.2 Теоретико-методологические основы сравнительных исследований содержания итоговой аттестации по математике в российской и зарубежной школе

Учитывая современные процессы глобализации и интернационализации систем образования, приоритетное значение приобретают сравнительно-сопоставительные исследования, актуальность которых в отечественной педагогике вызвана необходимостью поиска новых форм и методов подготовки обучающихся, с учетом мирового научно-педагогического опыта. Как считают российские педагоги, «...реформирование отечественной системы образования невозможно без учета мирового инновационного опыта в этой области» [9].

В последние два десятилетия происходит модернизация собственных систем образования во многих странах мира, импульс которой был придан принятием в 1999 году Болонской Декларации. Учитывая важную роль синхронизации образовательного процесса, страны-участницы приступили к «всеобщим и глубоким преобразованиям национальных систем образования» [2]. Соответственно, представляет несомненный интерес опыт других стран в решении актуальных задач довузовского образования в целом, и такой важной его компоненты как итоговая аттестация обучающихся.

Уже начиная с конца 19 века в России стали проводиться сравнительно-сопоставительные исследования. Наибольший интерес представляют работы К.Д. Ушинского, который, анализируя зарубежный опыт, состояние зарубежной школы, считал необходимым использование отдельных положительных явлений зарубежного педагогического опыта в практике русской школы [31]. Для сравнительного анализа стали

использоваться такие методы, как обобщение и обработка зарубежного педагогического опыта, выявление положительных и отрицательных сторон различных систем образования

В начале 20 века сформировалось мнение, что сравнительно-сопоставительное исследование «... должно, по нашему мнению, поставить себе целью ... различать то, что составляет в деле воспитания национальные особенности школы, оттого, что, будучи общим достоянием всего цивилизованного мира, является необходимой основой всякой научной школы, где бы таковая не существовала, и, во-вторых, изучение школьного вопроса в чужих краях должно избавить нас от необходимости повторить всю ту массу опытов и экспериментов, через которые уже прошли школы других стран и результаты коих уже давно известны» [13].

В середине 20 века в разных странах мира создаются общества сравнительной педагогики. Исследования в рамках сравнительного анализа в это время воспринимались в качестве действенного инструмента для реформ в национальных системах образования. Советский период в России характеризуется интенсивными исследованиями зарубежного опыта в разрезе капиталистических, социалистических и развивающихся стран. Одновременно, советская система образования пристально изучалась в других странах и получала высокие оценки среди зарубежных исследователей [3], [35]. Стоит отметить, что исследования того периода 20 века были излишне идеологизированы с обеих сторон. В настоящее время исследования стали более объективными и менее тенденциозными, несмотря на существующую конкуренцию образовательных систем. Обсуждения о предназначении сравнительной педагогики ведутся с самого ее зарождения, как среди российских педагогов, так и в различных зарубежных странах, и продолжают они и в настоящее время.

Само название этого направления педагогики имеет различные трактовки. Применяется и «Сравнительное образование», и «Наука о

сравнении систем образования». Более широкое применение нашел термин «сравнительная педагогика», исходя из того, что «сравниваются системы образования, но метод сравнения носит всегда характер научного анализа, в данном случае педагогического, именно поэтому термин «педагогика» представляется закономерным» [18]. Многие считают, что «сравнительная педагогика до настоящего времени все еще не оформилась как направление в общей педагогике, надежно обеспеченное теоретической, методологической и кадровой базой, и, которое отвечало бы научным и практическим требованиям современного общества» [7]. Вместе с тем, предметом сравнительной педагогики являются образовательные системы различных стран мира в широком их понимании. Сравнительный анализ итоговых аттестаций по математике, проводимых в разных странах, находится в рамках сравнительной педагогики, поэтому, важны основные подходы к проведению исследований именно в этой сфере. Отметим, что проводимые сравнительно-педагогические исследования, как в России, так и за рубежом, «носят преимущественно эмпирический характер, а задачи исследования сводятся, в целом, к выявлению состояния проблемы исследования, проведению собственно сравнительно-сопоставительного анализа анализируемых систем, определению условий перенесения зарубежного педагогического опыта на отечественные учебные заведения» [10].

Соответственно, наблюдается некоторый недостаток методологического характера в части разработки «концепция целостного системного инструментария сравнительно-сопоставительного анализа педагогических систем» [10]. Для целей данной работы приведем информацию справочного характера (таблица 1) об итоговых аттестациях и проводимых тестированиях в различных странах мира [17]. Практически во всех странах математика относится к обязательным предметам, и содержание экзаменов предоставляют отличную возможность к проведению сравнительного анализа.

Таблица 1 – Итоговые аттестации

Страна	Итоговая аттестация
Китай (1)	«Экзамен National Higher Education Entrance Examination (gaokao) Используется для поступления в вуз. Состоит из обязательной части – китайский язык, математика и иностранный язык, и предметов по выбору (в зависимости от выбора направления обучения). Проводится 1 раз в год» [40].
Сингапур (2)	По окончании десяти лет образования (начальная и средняя школа), выпускники сдают экзамен на получение сертификата о среднем образовании (Singaporean GCE 'O' Level). Суммарный рейтинг определяется оценками от A1 до F9 (в порядке убывания) по шести экзаменам, в т.ч. по математике. Лучшая оценка равна 6 при получении A1 по всем экзаменам. Затем, желающие продолжают учебу на ступени предуниверситетского образования (2-3 года), и проходят итоговую аттестацию по «знаниям и исследованиям» (Knowledge & Inquiry).
Тайвань (5)	Для школьников предусмотрены экзамены после 9-го класса и итоговые аттестации после 12-го заключительного класса, которые играют роль вступительных в университеты. В феврале каждого года сдается тест «Общей аттестации школьных достижений», обязательной составляющей которого является математика. Далее, зачисление в ВУЗ осуществляется либо «по рекомендации школы», либо индивидуально после сдачи дополнительных экзаменов, определяемых каждым университетом индивидуально.
Япония (6)	Как таковых выпускных экзаменов по окончании старшей школы нет. Для получения высшего образования сдаются централизованные вступительные экзамены (UECE), которые играют роль итоговых испытаний в других странах. На выбор предлагается 12 экзаменационных тестов. Разные университеты требуют прохождения от 2-3 до 5 тестов. Второй этап экзаменов проходит в самом университете и его сложность варьируется в зависимости от факультетов. Все эти экзамены проводятся в последний период.

Продолжение таблицы 1

Страна	Итоговая аттестация
Южная Корея (7)	«College Scholastic Aptitude Test (CSAT) – национальный вступительный экзамен в колледж. Необходим для поступления в вуз (а это большинство студентов в Корее) Тест длится 8 часов (с 08:00 до 17:00), проводится по всей стране в ноябре. Студенты проверяются на знание корейского, английского, математики, истории Кореи, второго языка и двух дополнительных предметов. Между тестами есть перерывы и большой перерыв на ланч» [41].
Финляндия (16)	«Нет стандартизированных вступительных экзаменов для приема в университеты Каждый вуз проводит свои испытания и учитывает оценки студентов с предыдущей ступени образования (в частности, учитываются результаты Finnish Matriculation Examination) С 2020 года принимаются во внимание оценки по специальным бесплатным онлайн-курсам» [41].
Швеция (17)	«Национальное тестирование SweSAT (Шведская версия американского SAT) Результаты тестирования используются при поступлении в вуз Математика, родной язык, английский Проводится дважды в год – в апреле и октябре» [42].
Великобритания (18)	«GCSE (General Certificate of Secondary Education) – экзамен на получение сертификата о среднем образовании в Великобритании. A-level – это более углубленное изучение нескольких предметов GCSE. Обучение по A-level длится 2 года. Первый год называется AS (Advanced Subsidiary), второй – A2. Несмотря на то, что AS и A2 являются частями одной программы, их можно рассматривать как самостоятельные этапы обучения. Второй год не является неотъемлемой частью первого, он скорее дополняет его. Студент вправе прервать обучение после сдачи экзаменов AS и начать трудовую деятельность» [44].

Продолжение таблицы 1

Страна	Итоговая аттестация
Германия (20)	«Тест Abitur – выпускной экзамен (с накопительной частью) в 12 классе. Для получения аттестата Abitur студенту необходимо набрать 300 баллов. Учитываются баллы по пяти выбранным предметам за последние два года учебы. Они считаются следующим образом: каждый семестр студент может получить максимум 15 баллов за изучаемый предмет за сдачу экзамена по основному предмету – 30 баллов (т. е. максимум 90) за сдачу экзамена по выбору – 60 баллов (т. е. максимум 120). Проводится в апреле» [43].
Латвия (24)	«Централизованные экзамены в Латвии. Подтверждение освоения программы средней школы. Используется для поступления в вуз Латышский язык, математика, иностранный язык. Проводится 1 раз в год» [44].
Франция (25)	Вассалауреат – выпускной экзамен из школы, сдается в июне всеми выпускниками. Concoursdesgrandesecoles – набор экзаменов, необходимых для поступления в высшие учебные заведения (Grandesecoles), сдается в период с марта по июль.
США (37)	«Scholastic Aptitude Test (SAT) и American College Testing (ACT): два альтернативных экзамена от разных провайдеров: результат тестирования используется при поступлении в вуз; имеют отличающуюся, но в целом схожую структуру. АСТ – английский, чтение, математика и научное рассуждение, эссе (опциональное); SAT – работа с текстом, математика и эссе (опциональное). В течение года реализуются несколько раз: SAT – 7 раз, АСТ – до 6 раз» [45].
Израиль (41)	«Стандартизированный тест, результат которого учитывается при поступлении в вуз. Включает в себя три предметные области: математику, вербальное мышление и английский язык Тест можно сдать на иврите, арабском, русском, французском, испанском и иврите/английском. Тест проводится 5 раз в год на иврите Результаты тестирования действительны семь лет» [36].

Продолжение таблицы 1

Страна	Итоговая аттестация
Беларусь (38)	Переходных экзаменов между классами нет. Традиционные экзамены есть по окончании 9 и 11 классов. Зачисление в вузы осуществляется по результатам Централизованного тестирования.
Казахстан (54)	В школе все выпускники в РК, освоившие общеобразовательные учебные программы общего среднего образования, сдают итоговую аттестацию в виде 5 экзаменов, один из них по выбору. Период проведения в 2022 году с 27 мая по 10 июня: 1) Письменный экзамен по алгебре и началам анализа - 27.05.2022; 2) Письменный экзамен по казахскому языку /русскому языку и родному языку для школ с уйгурским/ таджикским/ узбекским языками обучения в форме эссе - 30.05.2022; 3) Устный экзамен по Истории Казахстана - 02.06.2022; 4) Письменный экзамен по казахскому языку и литературе в школах с русским/ узбекским/ уйгурским / таджикским языком обучения и по русскому языку и литературе в школах с казахским языком обучения - 07.06.2022; 5) Письменный экзамен по предмету по выбору (Физика, Химия, Биология, География, Геометрия, Всемирная история, Основы права, Литература, Иностранный язык (английский / французский / немецкий), Информатика) - 10.06.2022.
Молдова (55)	«Стандартизированные оценочные процедуры существуют на школьном уровне. Ученики проходят оценку при переходе со ступени гимназического образования (5–9 классы) в лицейское (10–12 классы), а также по завершении школы в июне – бакалаврские экзамены. Зачисление в вузы происходит на основании дипломов об окончании лицея. Вступительные экзамены есть на творческие специальности» [37].

В данной таблице страны ранжированы в соответствие с результатами исследования в рамках программы PISA [42] по оценке образовательных достижений учащихся, проведенными в 2018 году. Рядом с названием страны в скобках стоит число, соответствующее месту, которое занимает страна в

рамках этого рейтинга. Это исследование проводилось среди обучающихся в старшие школы, и, в целом, отражает уровень их математической грамотности. Заметим, что Россия по данным исследования занимает 30 место.

Представляет интерес и другое исследование по качеству математического образования, проводимое в рамках программы TIMSS [43]. Эта программа оценивает уровень знаний среди обучающихся 4-х и 8-х классов. Интересным является факт, что в этом рейтинге, составленном в 2019 году, Россия занимает 6 место для школьников как начальной школы, так и находящихся на восьмом году обучения. Это обстоятельство указывает на относительную слабость учебной программы для старшей школы в России, равно как и на недостаточный уровень подготовки выпускников общеобразовательной школы по сравнению с выпускниками в других странах (Китай, Юго-Восточная Азия, Евросоюз)

Конечно же, важную роль при проведении сравнительного анализа играет используемая технология. При технологическом подходе существенным является диагностика при постановке целей. Она необходима для правильной организации обратной связи, которая отражает процесс достижения поставленных целей и является средством их корректировки.

В современных научно-педагогических работах ведутся поиски таких подходов к технологиям в сфере образования, которые дали бы гарантированный результат [31].

1.3 Содержательный анализ итоговой аттестации по математике общеобразовательной школы в России и за рубежом

«Содержание итоговой аттестации определяет уровень математической подготовленности, как российских выпускников, так и выпускников учебных

заведений других стран. Сравнительный анализ содержания итоговых аттестаций в различных странах позволяет выявить сильные и слабые стороны учебных программ и уровень фактически получаемых знаний» [11].

Рассмотрим далее сопоставимые задачи в итоговых аттестациях нескольких стран. В качестве примера рассмотрим задачу на свойства целых чисел, предлагавшиеся в Англии, Германии и на профильном ЕГЭ в России.

Задача 1.3.1 [38]

Я обычно покупаю шоколадные батончики и газированные напитки. Шоколадные батончики Venus стоят 68 пенсов каждый, а батончики Tiger стоят по 48 пенсов каждый. Одна банка газировки стоит 60 пенсов.

При покупке шоколадных батончиков (Venus и Tiger) в общем количестве в 5 раз превышающем количество банок газировки я потратил 10,40 фунтов стерлингов (1 фунт = 100 пенсов).

Сколько банок газировки я купил?

Решение

Обозначим через x, y и z количество купленных батончиков Venus, Tiger и банок газировки соответственно. Тогда, по условию задачи:

$$\begin{cases} x + y = 5z \\ 68x + 48y + 60z = 1040 \end{cases}$$

Умножая первое уравнение на 48, и вычитая из второго, получаем:

$$20x + 60z = 1040 - 240z$$

Отсюда следует:

$$x + 15z = 52$$

По условию $z > 0$.

Далее,

- если $z = 1$, то $x = 37$ и $y = 5 \cdot 1 - 37 < 0$ (не подходит)
- если $z = 2$, то $x = 22$ и $y = 5 \cdot 2 - 22 < 0$ (не подходит)
- если $z = 3$, то $x = 7$ и $y = 5 \cdot 3 - 7 = 8$
- если $z \geq 4$, то $x = 37$ и $y = 5 \cdot 1 - 37 < 0$ (не подходит)

Таким образом, кол-во z купленных банок газировки равно 3.

Задача 1.3.2 [43]

Было куплено 30 бутылок напитков А, В и С за 30 одинаковых монет.

Пусть x, y и z — количество бутылок типа А, В и С соответственно. За 3 бутылки типа А была заплачена одна монета; за две бутылки типа В также была заплачена одна монета. По две монеты было заплачено за каждую бутылку типа С.

Сколько бутылок каждого сорта было куплено?

Решение

По условию задачи:

- цена одной бутылки напитка А равна $1/3$ монеты,
- цена одной бутылки напитка В равна $1/2$ монеты,
- цена одной бутылки напитка С равна 2 монетам.

Тогда:

$$\begin{cases} \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y + 2z = 30 \\ x + y + z = 30 \end{cases}$$

Умножаем второе уравнение на 2 и вычитаем из него первое:

$$\left(2 - \frac{1}{3}\right)x + \left(2 - \frac{1}{2}\right)y = 30$$

Получаем:

$$10x + 9y = 180$$

Для целочисленных решений $x > 0$ очевидно, что $x : 9$. Тогда:

- если $x = 9$, то $y = 10$
- если $x = 18$, то $y = 0$ (не подходит)
- если $x \geq 27$, то $y < 0$ (не подходит)

Таким образом,

$$x = 9, \quad y = 10, \quad z = 30 - x - y = 11$$

Некоторым аналогом указанных задач является задание № 18 профильного ЕГЭ по математике в России [19].

Задача 1.3.3

Каждое из четырех последовательных натуральных чисел разделили на свою первую цифру. Пусть S – сумма четырех получившихся чисел.

а) Может ли $S = 41\frac{11}{24}$?

б) Может ли $S = 569\frac{29}{72}$?

в) Какое наибольшее целое значение может принимать S , если известно, что 4 исходных числа не меньше 400 и не больше 999?

Решение

а) Если все четыре числа $n, n + 1, n + 2, n + 3$ начинаются с одной и той же цифры a , то:

$$S = \frac{n + (n + 1) + (n + 2) + (n + 3)}{a} = \frac{4n + 6}{a}$$

и знаменателем этой дроби не может быть число 24. Следовательно, часть из этих четырех чисел начинается с цифры $(a + 1)$. Тогда знаменателем дроби S (без сокращений) является $a(a + 1)$. С другой стороны, по условию:

$$S = 41\frac{11}{24} = \frac{995}{24} = \frac{2985}{72} = \frac{2985}{8 \cdot 9}$$

Это означает, что $a = 8$ и тогда:

- если $n = 87$, то

$$S = \frac{87 + 88 + 89}{8} + \frac{90}{9} \neq \frac{995}{24}$$

- если $n = 88$, то

$$S = \frac{88 + 89}{8} + \frac{90 + 91}{9} \neq \frac{995}{24}$$

- если $n = 89$, то

$$S = \frac{89}{8} + \frac{90 + 91 + 92}{9} = \frac{995}{24}$$

Таким образом, искомыми числами являются: 89, 90, 91, 92.

б) Очевидно, что ни для одного двузначного числа n сумма S не может достигать указанного значения. Для любого четырехзначного числа n отношение к его первой цифре a больше 1000, и, соответственно, $S > 4000$.

Следовательно, для заданного S :

$$S = 569 \frac{29}{72} = \frac{40997}{8 \cdot 9}$$

число n должно быть трехзначным. Причем, часть чисел начинается с $a = 8$, а часть – с $a + 1 = 9$.

Тогда:

- если $n = 897$, то

$$S = \frac{897 + 898 + 899}{8} + \frac{900}{9} \neq \frac{40997}{8 \cdot 9}$$

- если $n = 898$, то

$$S = \frac{898 + 899}{8} + \frac{900 + 901}{9} \neq \frac{40997}{8 \cdot 9}$$

- если $n = 899$, то

$$S = \frac{899}{8} + \frac{900 + 901 + 902}{9} \neq \frac{40997}{8 \cdot 9}$$

Это означает, что S не может принимать значение по пункту б).

в) Для трехзначного $n = 100a + 10b + c$ дробь:

$$\frac{n}{a} = 100 + \frac{10b + c}{a} \leq 100 + \frac{10b + c}{4}$$

при условии $4 \leq a \leq 9$. Полагаем $a = 4$ для всех четырех чисел $n, n + 1, n + 2, n + 3$. Тогда:

$$S = \frac{4n + 6}{4} = n + \frac{3}{2}$$

и число S не может быть целым. Если часть чисел начинается с $a = 4$ и часть с $a + 1 = 5$, то тогда:

- при $n = 497$:

$$S = \frac{497 + 498 + 499}{4} + \frac{500}{5} - \text{не является целым}$$

- при $n = 498$:

$$S = \frac{498 + 499}{4} + \frac{500 + 501}{5} - \text{не является целым}$$

- при $n = 499$:

$$S = \frac{499}{4} + \frac{500 + 501 + 502}{5} - \text{не является целым}$$

Далее полагаем, что для всех четырех чисел $a = 5$. Максимальное значение S может достигаться при $n = 596$. Проверяем целочисленность S :

$$S = \frac{596 + 597 + 598 + 599}{5} = 478.$$

Полученное значение является ответом на пункт в) задачи.

Анализируя приведенные задачи видно, что задача в российской итоговой аттестации является более сложной. Однако, эта задача предназначена для профильного уровня, и, причем, по классификации она носит олимпиадный характер. В то же время, задачи, предлагаемые в других странах, предназначены для выпускников всех уровней, проходящих итоговую аттестацию. Причем, задания по пунктам а) и б) задачи ЕГЭ, в принципе, соответствуют уровню задач, предлагаемых в Германии и Англии. Представляется, что базовый уровень заданий в этих странах несколько превышает уровень задач в российской итоговой аттестации.

Рассмотрим далее задания по геометрии. Приведем задачу по стереометрии из российской итоговой аттестации [23].

Задача 1.3.4.

«Дана треугольная пирамида $SABC$, в которой O — точка пересечения медиан основания ABC (рисунок 1).

а) Докажите, что плоскость, проходящая через прямую AB и середину M ребра SC , делит отрезок SO в отношении 3:1, считая от вершины S .

б) Найдите угол между прямой BC и плоскостью AMB , если пирамида правильная, а угол между прямой, проходящей через M и середину ребра AB , и прямой SO равен 45° » [22].

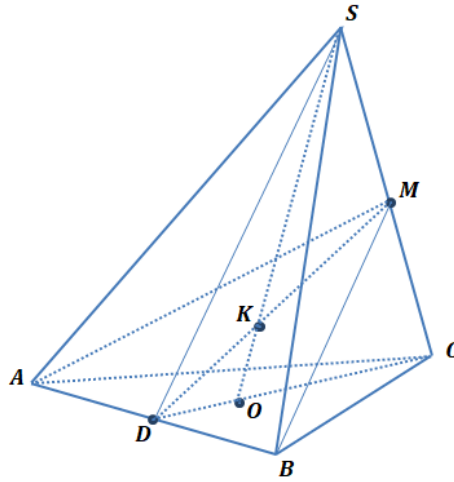


Рисунок 1 – Треугольная пирамида к

Решение. «Для доказательства по первой части задачи изображаем сечение SDC пирамиды (рисунок 2). По условию задачи в треугольнике SDC :

$$OC = \frac{2}{3} \cdot |DC| = \frac{2}{3} m, \quad MC = \frac{1}{2} \cdot |SC| = \frac{1}{2} l,$$

где m – длина медианы DC , основания заданной пирамиды, l – длина бокового ребра SC треугольной пирамиды $SABC$ » [21].

Опустим подробные преобразования, и запишем лишь основные из них:

$$S_{OMC} = \frac{1}{3} S_{SDC}, \quad S_{OMD} = S_{DMC} - S_{OMC} = \frac{1}{6} S_{SDC}$$

$$S_{OMD} = \frac{1}{2} \cdot |OO_1| \cdot |DM|, \quad S_{SDM} = \frac{1}{2} \cdot |SS_1| \cdot |DM|$$

«Тогда из подобия $\Delta SKS_1 \sim \Delta OKO_1$ получаем искомое соотношение:

$$\frac{|SK|}{|KO|} = \frac{|SS_1|}{|OO_1|} = \frac{S_{SDM}}{S_{OMD}} = \frac{\frac{1}{2} S_{SDC}}{\frac{1}{6} S_{SDC}} = 3$$

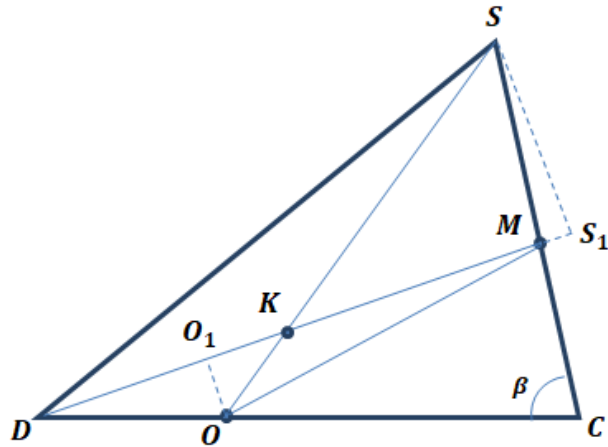


Рисунок 2 – Сечение пирамиды

Для определения угла α между BC и плоскостью ABM по второй части задания изображаем правильную пирамиду $SABC$ (рис.3). Обозначим через a сторону основания правильной пирамиды и запишем соотношения» [21]:

$$|CD| = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \quad |OC| = \frac{a\sqrt{3}}{3}, \quad MD \perp AB$$

Используя результат первой части задачи:

$$|SO| = 4 \cdot |OK| = 4 \cdot |OD| = 4 \cdot \frac{|CD|}{3} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{|SO|}{|OC|} = 2, \quad h = |SO| = l \sin \beta,$$

$$|CD| = \frac{3}{2}|OC| = \frac{3}{2}l \cos \beta$$

Далее:

$$a = \frac{2 \cdot |CD|}{\sqrt{3}} = l\sqrt{3} \cos \beta, \quad S_{ABC} = a^2 \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3l^2\sqrt{3}}{4} \cos^2 \beta$$

Записываем для объемов:

$$V_{SABC} = \frac{1}{3}hS_{ABC} = \frac{l^3\sqrt{3}}{4} \cos^2 \beta \sin \beta$$

$$V_{MABC} = \frac{1}{3}V_{SABC} = \frac{l^3\sqrt{3}}{8} \cos^2 \beta \sin \beta$$

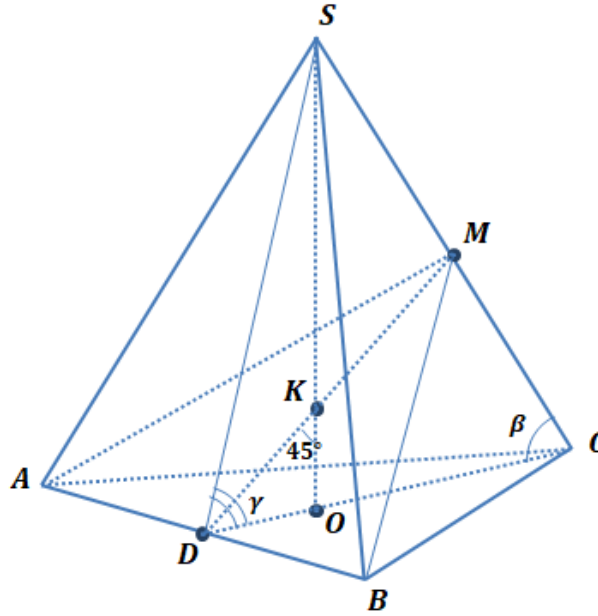


Рисунок 3 – Правильная пирамида к задаче 1.3.4

«Обозначим как h_1 высоту пирамиды $MABC$, проведенную из C к плоскости AMB . Тогда:

$$h_1 = \frac{3V_{MABC}}{S_{AMB}}$$

Найдем площадь треугольника AMB :

$$|DM| = \sqrt{|CD|^2 + |CM|^2 - 2|CD| \cdot |CM| \cos \beta} = \frac{1}{2}l\sqrt{1 + 3 \cos^2 \beta}$$

$$S_{AMB} = \frac{1}{2}a \cdot DM = \frac{l^2}{4} \sqrt{3 + 9 \cos^2 \beta} \cdot \cos \beta$$

Соответственно:

$$h_1 = \frac{3l\sqrt{3} \cos \beta \sin \beta}{2\sqrt{3 + 9 \cos^2 \beta}}.$$

Находим искомый угол α между BC и плоскостью AMB » [30]:

$$\sin \alpha = \frac{h_1}{a} = \frac{3 \sin \beta}{2\sqrt{3 + 9 \cos^2 \beta}} = \frac{\sqrt{6}}{4},$$

$$\alpha = \arcsin \frac{\sqrt{6}}{4}.$$

Далее, приведем задачу по стереометрии, предлагавшуюся на итоговой аттестации в Германии.

Задача 1.3.5

«Основание конуса имеет радиус $r_1 = 4$ см. Длина образующей линии s составляет 10,4 см.

а) Вычислите высоту h_k конуса в см.

б) Рассчитайте размер угла α в вершине конуса (округлить до целых градусов).

в) Конус точно помещается над цилиндром, радиусом основания которого равен $r_2 = 2,5$ см. Поверхность конуса касается цилиндра (рис.4). Рассчитайте высоту h_z цилиндра и его внешней поверхности» [30].

Решение

Из первых пунктов задания следует соответствующее решение:

$$h_k = \sqrt{s^2 - r_1^2} = \sqrt{10,4^2 - 4^2} = 9,6 \text{ см}$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{r_1}{s} = \frac{4}{10,4} = \frac{5}{13}$$

$$\alpha = 2 \arcsin \frac{5}{13}$$

$$\alpha \approx 45^\circ$$

Для поиска ответа по третьему пункту задания используем подобие:

$$\Delta AO_1B_1 \sim \Delta AOB$$

Находим:

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{h_k}{h_k - h_z},$$

$$h_z = \frac{(r_1 - r_2)h_k}{r_1} = \frac{4 - 2,5}{4} \cdot 9,6 = 3,6 \text{ см.}$$

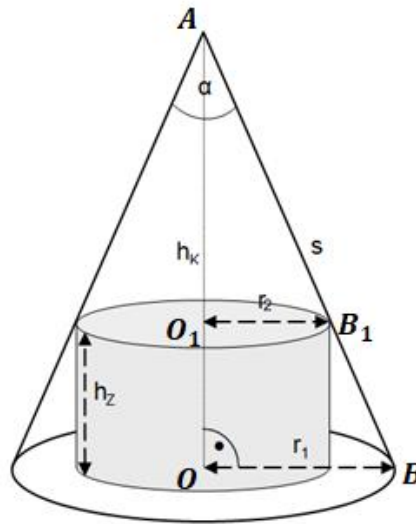


Рисунок 4 – Цилиндр и описанный конус

«Площадь боковой поверхности цилиндра равна:

$$S_{\text{бок}} = 2\pi r_2 h_z = 2\pi \cdot 2,5 \cdot 3,6 = 18\pi$$

Находим площадь полной поверхности» [30]:

$$S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + 2\pi r_2^2 = 18\pi + 2\pi \cdot 2,5^2 = 30,5\pi$$

Следующая задача по стереометрии предлагалась в Казахстане [29].

Задача 1.3.6

«Стороны оснований правильной усеченной треугольной пирамиды равны 4 и 12 дм. Боковая грань образует с большим основанием угол 60° (рис.5). Найти высоту пирамиды» [20].

Решение

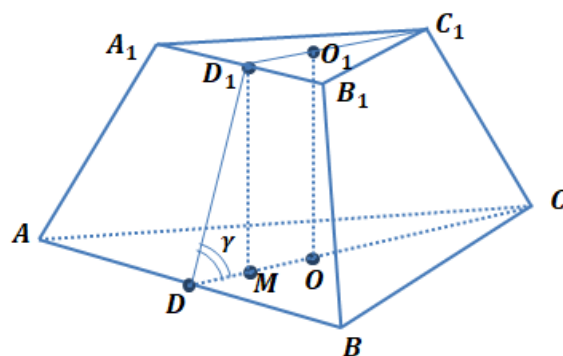


Рисунок 5 – Усеченная пирамида к задаче 1.3.6

«Проводим высоты оснований CD и C_1D_1 и обозначим через O и O_1 – центры оснований правильной усеченной пирамиды $ABCA_1B_1C_1$.

Соответственно:

$$|O_1D_1| = \frac{1}{3}|C_1D_1| = \frac{1}{3}|C_1B_1| \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$|OD| = \frac{1}{3}|CD| = \frac{1}{3}|CB| \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

Тогда, искомая высота OO_1 равна» [30]:

$$h = |OO_1| = |D_1M| = |DM|\operatorname{tg}\gamma = (|OD| - |O_1D_1|)\operatorname{tg}\gamma$$

$$h = \left(2\sqrt{3} - \frac{2}{3}\sqrt{3}\right)\operatorname{tg}60^\circ = 4$$

Приведем задачу по стереометрии, предлагавшуюся на итоговой аттестации в Грузии [19].

Задача 1.3.7

«Основанием пирамиды является ромб, диагонали которого равны 30 см и 40см. Основанием высоты пирамиды является точка пересечения диагоналей ромба. Найти площадь боковой поверхности ромба, если высота пирамиды 24 см» [19].

Решение

Полагаем: $|AC| = 40$ см, $|BD| = 30$ см

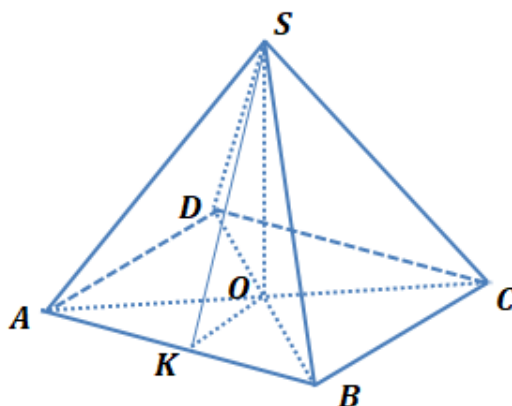


Рисунок 6 – Пирамида к задаче 1.3.7

«Очевидно, что все боковые грани пирамиды равны и они являются разносторонними треугольниками.

Сторона ромба, лежащая в основании равна:

$$a = |AB| = \sqrt{|AO|^2 + |BO|^2} = \sqrt{20^2 + 15^2} = 25 \text{ см}$$

Радиус r окружности, вписанной в ромб, равен:

$$r = \frac{|AO| \cdot |BO|}{a} = \frac{20 \cdot 15}{25} = 12 \text{ см}$$

Находим высоту SK боковой грани:

$$|SK| = \sqrt{h^2 + r^2} = \sqrt{24^2 + 12^2} = 12\sqrt{5} \text{ см}$$

Тогда искомая площадь боковой грани равна» [30]:

$$S = 4 \cdot S_{ABC} = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot |SK| = 2 \cdot 25 \cdot 12\sqrt{5} = 600\sqrt{5} \text{ см}^2$$

Анализируя приведенные задачи видно, что задача в российской итоговой аттестации является более сложной. Однако, эта задача предназначена для профильного уровня. В то же время, задачи, предлагаемые в других странах, предназначены для выпускников всех уровней, проходящих итоговую аттестацию. Приведем пример задачи по стереометрии на базовом уровне в российской школе:

«Даны два шара радиуса 9 и 3. Во сколько раз площадь поверхности большего шара больше площади поверхности меньшего?» [23].

Эта задача решается в одно действие, требует лишь начальных знаний по стереометрии и не требует развитых пространственных представлений о фигурах. Уровень подобных задач не в полной мере соответствует современным требованиям к предметным компетенциям выпускников. Представляется, что итоговая аттестация на базовом уровне должна в большей степени делать акцент на умение выпускников к корректному изображению пространственных объектов и на применение более сложных алгебраических действий при решении геометрических задач.

Планируемые изменения уровня сложности, вносимые в итоговую аттестацию по математике в 2022г. будут являться стимулом к усилению математической подготовки обучающихся, и способствуют повышению конкурентоспособности знаний выпускников российских школ.

Выводы по первой главе

Таким образом, в первой главе были проанализированы теоретические основы сравнительного анализа образовательных систем России и других стран, а также формы итоговой аттестации по математике для выпускников общеобразовательных учебных заведений.

Проанализирована нормативная база, которая регулирует организацию итоговых аттестаций по математике в общеобразовательной школе России. Приведено подробное описание итоговых аттестаций в некоторых странах, Германии, Казахстане, Беларуси и др. В табличном виде представлена информация справочного характера об итоговых аттестациях и проводимых тестированиях в тринадцати различных странах мира.

Изложены теоретико-методологические основания сравнительных исследований содержания итоговой аттестации по математике в российской и зарубежной школе. Проведен сравнительный анализ содержания собственно итоговых аттестаций и экзаменационных материалов по некоторым разделам математики для учащихся в различных странах.

На основании этого проанализирован уровень итоговой аттестации в России и конкурентоспособность предметных компетенций выпускников российских школ.

Глава 2 Практическое содержания итоговой аттестации по математике в российской школе и за рубежом

2.1 Типология математических задач и основные методы и приемы сравнения содержания итоговой аттестации в разных странах

Важную роль при подготовке к итоговой аттестации играет обобщающее повторение по всем основным разделам математики.

Обобщающее повторение позволяет систематизировать знания, полученные на всех этапах обучения, привить навыки самоконтроля, обобщить основные понятия, способы и методы решения математических задач. Повышение уровня подготовки выпускников к итоговой аттестации представляется возможным путем акцентированного повторения материала (таблица 2) по следующим основным разделам [20], [1].

Таблица 2 – Темы для повторения

Обобщающее повторение по темам
1. Тождественные преобразования и алгебраические уравнения. Свойства чисел.
2. Текстовые задачи. Составление уравнений и неравенств для решения задач.
3. Функции, их преобразование, построение графиков. Исследование функций.
4. Уравнения, неравенства и их комбинации. Системы уравнений.
5. Решение геометрических задач. Применение векторов.
6. Задачи с параметрами.
7. Задачи с экономическим содержанием.
8. Комбинаторика. Элементы теории вероятности.

Задачи, отбираемые для подготовки по отдельным темам итоговой аттестации, должны, как правило, удовлетворять нескольким принципам:

- преемственность, когда для решения задач используются уже полученные знания и навыки;

- связь теории с практикой, когда задачи позволяют закрепить теоретические знания;
- контрастность, при котором задачи имеют как положительный, так и отрицательный ответ;
- формирование исследовательских компетенций (постановка проблем, выдвижение гипотез, их доказательство/опровержение)

Представляется наиболее интересной для методики организации обобщающего повторения технология обучения математике Р.Г. Хазанкина.

Цель технологии: развитие индивидуальных способностей учащихся и их увлечение математикой с помощью ключевых задач, которые формируются применительно к каждой изучаемым темам.

Прогнозируемый результат: успешное усваивание материала всеми группами учащихся с учетом уровневой дифференциации. Для достижения целей данной технологии основным моментом являются ключевые задачи по каждой из изучаемых тем. Эти задачи обеспечивают успешное обучение на уровне стандарта всеми группами учащихся.

Для конкурентного сравнения и определения уровня сложности ключевых задач в рамках обобщающего повторения, рассмотрим далее итоговую аттестацию, которая проводится в США [33] и которая представляет собой некий аналог ЕГЭ, проводимого в России для выпускников общеобразовательных учебных заведений. В США существует несколько видов систем итоговых аттестаций, в частности, это SAT и ACT. Остановимся далее на системе SAT и приведем отличительные особенности этого экзамена.

Стандартный тест SAT [37] включает секцию математики с двумя разделами: с использованием калькулятора и без него, и данный тест сопоставим с базовым российским ЕГЭ. Математическая секция американского экзамена включает всего 58 задач/вопросов и для ответов отводится 80 минут.

Для сравнения, российский ЕГЭ по математике на базовом уровне включает 21 задание, на выполнение которых отводится 180 минут [23]. Заметим, что хотя американский экзамен проводится в виде тестирования, от обучающихся требуется достаточно высокий темп для нахождения правильных ответов (примерно 80 сек на одну задачу).

В таблицах 3 и 4 приведены темы/разделы математики, по которым предлагаются задачи в российском профильном ЕГЭ и в сопоставимом американском SAT Subject Math [34], [42].

Таблица 3 – Сравнение для тем ЕГЭ, часть 1

Профильный ЕГЭ, часть 1	SAT Subject Math, Level 1
1. Планиметрия	Планиметрия (линии и углы, треугольники, четырехугольники и другие многоугольники, круги)
2. Стереометрия	Стереометрия и координатная геометрия
3. Вероятность (базовый и повышенный уровень)	Основные понятия статистики, комбинаторики и вероятности; логика
4. Уравнения	Полиномы, уравнения и неравенства, базовая тригонометрия
5. Выражения	Базовая арифметика, дроби, десятичные числа и проценты, соотношения и пропорции
6. Анализ функций	Функции
7. Графики функций (базовый и повышенный уровень)	Графики функций
8. Текстовая задача, прикладная задача	Текстовая задача
9. -	Мнимые и комплексные числа, Последовательности

Для поступления в колледжи/университеты США технической направленности требуется прохождение предметного экзамена SAT Subject Math, который является двухуровневым: Level 1 и Level 2 [39], [36]. На обоих

уровнях предлагается по 50 тестовых задач/вопросов и на их решение дается 1 час. Ведущие университеты требуют сдачи итоговых аттестаций по уровню SAT Subject Math Level 2. Сравнивая с российским ЕГЭ по математике профильного уровня, можно условно сопоставить SAT Subject Math Level 1 с частью 1 отечественного экзамена, который состоит из 11 заданий. По уровню сложности SAT Subject Math Level 2 условно сопоставим со второй частью профильного ЕГЭ по математике из 7 задач.

Таблица 4 – Сравнение для тем ЕГЭ, часть 2

Профильный ЕГЭ, часть 2	SAT Subject Math, Level 2
1. Планиметрия	Планиметрия (треугольники и тригонометрия, преобразования и симметрия)
2. Стереометрия	Стереометрия (трехмерная геометрия, конические сечения)
3. Уравнения	Полиномы высших степеней
4. Неравенства	Полиномиальные неравенства
5. Задание с параметром	Параметрические уравнения
6. Экономическая задача	-
7. Олимпиадная задача	-
8. -	Функции (линейные и квадратичные, экспоненциальные и логарифмические, рациональные, тригонометрические)
9. -	Вероятность, статистика, комбинаторика
10. -	Комплексные числа, последовательности и ряды, матрицы
11. -	Векторы, полярные и трехмерные координаты

Проиллюстрируем требования к уровню компетентности выпускников с помощью ряда задач [42], предлагаемых на самых сложных итоговых испытаниях в США по математике SAT Subject Math Level 2.

Ряд предлагаемых задач, имеют нестандартное представление, но вполне соответствуют российской образовательной программе по математике.

Задача 2.1.1

Углы треугольника $\triangle QRS$ имеют вид:

$$\hat{Q} = 2x + 4, \quad \hat{R} = 4x - 12, \quad \hat{S} = 3x + 8$$

Найдите периметр $\triangle QRS$, зная, что:

$$QR = y + 9, \quad RS = 2y - 7 \text{ и } QS = 3y - 13$$

Варианты ответов:

$$A(11) \quad (B)20 \quad (C)44 \quad (D)55 \quad (E)68$$

Решение

Определяем переменную x из условия:

$$\hat{Q} + \hat{R} + \hat{S} = 180^\circ$$

Находим:

$$(2x + 4) + (4x - 12) + (3x + 8) = 180^\circ \Rightarrow x = 20^\circ$$

Соответственно:

$$\hat{R} = 4x - 12 = 68^\circ, \quad \hat{S} = 3x + 8 = 68^\circ$$

и $\triangle QRS$ является равнобедренным. Следовательно:

$$QS = QR$$

что позволяет найти переменную y :

$$3y - 13 = y + 9 \Rightarrow y = 11$$

Тогда искомый периметр равен:

$$P = QR + RS + QS = (y + 9) + (2y - 7) + (3y - 13) = 6y - 11 = 55$$

и правильным ответом является вариант (D).

Задача 2.1.2

Если $f(x) = 4x^2 - 1$ и $g(x) = 8x + 7$, то значение $g \circ f(2)$ равно:

$$(A)15 \quad (B)23 \quad (C)127$$

$$(D)345 \quad (E)2115$$

Решение

Заметим, что:

$$g(f(2)) = 8 \cdot (4 \cdot 2^2 - 1) + 7 = 127,$$

$$f(g(2)) = 4 \cdot (8 \cdot 2 + 7)^2 - 1 = 2115,$$

Данная задача направлена на корректное знание выпускниками выражения для композиции функции: $g \circ f = g(f(x))$

Соответственно, правильным ответом является вариант (C):

$$g \circ f(2) = g(f(2)) = 127$$

Далее, приведем задачи, для решения которых требуются знания, выходящие за рамки российской школьной программы, но, при этом, предусмотренные в программах США по математике.

Задача 2.1.3

Значение

$$\frac{20 \operatorname{cis} \left(\frac{19\pi}{18} \right)}{5 \operatorname{cis} \left(\frac{2\pi}{9} \right)}$$

равно:

$$(A) - 2\sqrt{3} + 2i \quad (B) - 2\sqrt{3} - 2i \quad (C) 2\sqrt{3} + 2i$$

$$(D) - 2 + 2i\sqrt{3} \quad (E) 2 - 2i\sqrt{3}$$

Решение

Заметим, что функция $\operatorname{cis} z$ в ряде западных стран определяется как

$$\operatorname{cis} z = \cos z + i \sin z$$

Для решения задачи необходимо знание формулы Эйлера:

$$\cos z + i \sin z = e^{iz}$$

Получаем, что правильным является вариант (A):

$$\begin{aligned} \frac{20 \operatorname{cis} \left(\frac{19\pi}{18} \right)}{5 \operatorname{cis} \left(\frac{2\pi}{9} \right)} &= 4 \frac{e^{i \frac{19\pi}{18}}}{e^{i \frac{2\pi}{9}}} = 4 e^{i \left(\frac{19\pi}{18} - \frac{2\pi}{9} \right)} = 4 e^{i \frac{5\pi}{6}} = \\ &= 4 \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right) = 4 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right) = -2\sqrt{3} + 2i. \end{aligned}$$

Задача 2.1.4

Асимптоты гиперболы имеют вид:

$$y - 1 = \pm \frac{3}{4}(x + 3).$$

Запишите уравнение гиперболы, если ее фокус F имеет координаты $(7; 1)$

$$(A) \frac{(x+3)^2}{16} - \frac{(y-1)^2}{9} = 1 \quad (B) = \frac{(y-1)^2}{9} - \frac{(x+3)^2}{16} = 1.$$

$$(C) \frac{(x+3)^2}{64} - \frac{(y-1)^2}{36} = 1 \quad (D) = \frac{(y-1)^2}{36} - \frac{(x+3)^2}{64} = 1.$$

Решение

Данная задача требует элементарных знаний аналитической геометрии (рисунок 7).

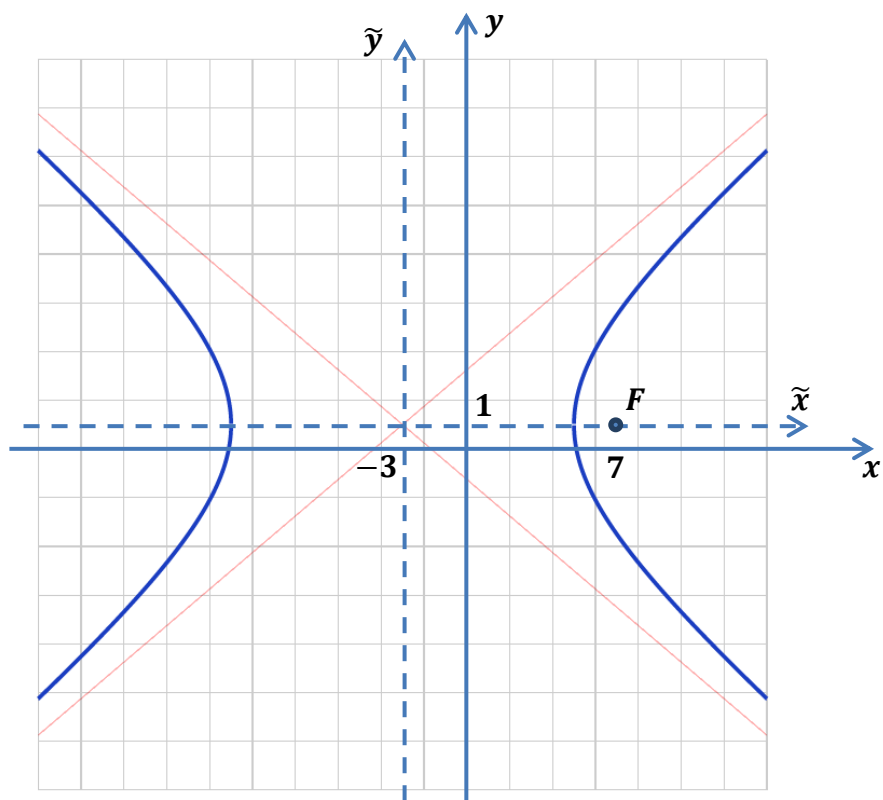


Рисунок 7 – Гипербола и ее асимптоты к задаче

С помощью преобразования: $\tilde{y} = y - 1$, $\tilde{x} = x + 3$

уравнение асимптот сводится к виду:

$$\tilde{y} = \pm \frac{3}{4} \tilde{x}$$

В координатах $(\tilde{x}, \tilde{y})$ находим координаты $(10; 0)$ для фокуса F . Это означает, что гипербола

$$\frac{\tilde{x}^2}{a^2} - \frac{\tilde{y}^2}{b^2} = 1, \quad a^2 + b^2 = 10^2$$

является горизонтально ориентированно и ее асимптоты записываются как

$$\tilde{y} = \pm \frac{b}{a} \tilde{x}$$

Очевидно, что из условий

$$a^2 + b^2 = 100, \quad \frac{b}{a} = \frac{3}{4}$$

следует: $b = 6$, $a = 8$ и правильным является вариант (C):

$$\frac{(x+3)^2}{64} - \frac{(y-1)^2}{36} = 1$$

Итоговой аттестацией по уровню SAT Subject Math Level 2 предусмотрено решение нескольких задач, которые исходя из рассмотренных тем заданий профильного российского ЕГЭ, можно классифицировать как задачи олимпиадного характера.

Задача 2.1.5

Какое из следующих утверждений справедливо для следующего выражения:

$$A = (a+b)^n - (a-b)^n$$

- I. Выражение A содержит $n/2$ членов, если n — четное
- II. Выражение A содержит $(n+1)/2$ членов, если n — нечетное
- III. Последнее слагаемое в выражении A имеет степень n

Варианты верных ответов:

- (A) утверждение I, (B) утверждение II, (C) утверждения I и II,
- (D) утверждения I и III, (E) утверждения II и III

Решение

Воспользовавшись биномом Ньютона

$$(a + b)^n = \sum_0^n C_n^m a^{n-m} b^m$$

видим, что в правой части данного равенства находится $(n + 1)$ слагаемых. Для $(a - b)^n$ записываем:

$$(a - b)^n = \sum_0^n (-1)^m a^{n-m} b^m$$

Среди $(n + 1)$ слагаемых выражение $(-1)^m$ принимает положительное значение для всех четных m (включая $m = 0$) и (-1) для всех нечетных m . Таким образом, разность $(a + b)^n - (a - b)^n$ будет содержать лишь члены с нечетным m . Тогда, если n — четное, то среди $(n + 1)$ членов будет $(n/2)$ четных членов и $(n/2 + 1)$ — нечетных.

Следовательно, разность по условию задачи будет содержать $(n/2)$ членов. Соответственно, при нечетном n количество четных и нечетных членов равно по $(n + 1)/2$, и искомая разность содержит $(n + 1)/2$ количество слагаемых.

Аналогично, несложно показать, что в случае четного n слагаемые, содержащие a^n или b^n будут отсутствовать. Таким образом правильным ответом является вариант (C).

Задача 2.1.6

На рисунке 8 изображены некоторые корни уравнения:

$$f(x) = 8x^6 + 72x^5 + bx^4 + cx^3 - 687x^2 - 2160x - 1700 = 0$$

и характер поведения функции $f(x)$ на некотором участке при $x < 0$.

Известно, что данное уравнение имеет два комплексных корня. Найдите произведение этих корней.

Варианты ответов:

$$(A) - 4 \quad (B) \frac{17}{2} \quad (C) 9 \quad (D) \frac{-687}{2} \quad (E) \frac{425}{2}$$

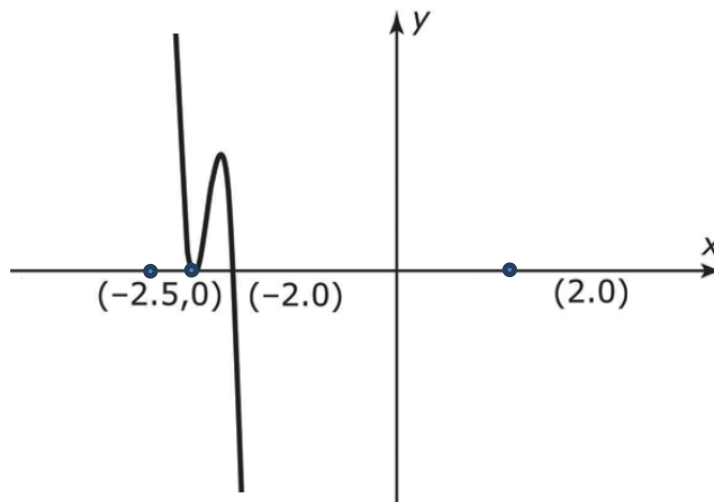


Рисунок 8 – Некоторые корни уравнения к задаче 2.1.6

Решение

Исходя из поведения функции в окрестности корня $x_1 = -2,5$ и учитывая, что уравнение имеет еще два корня $x_2 = -2, x_3 = 2$, можно функцию $f(x)$ представить в виде:

$$f(x) = (x + 2,5)^2 \cdot (x + 2) \cdot (x - 2) \cdot g(x)$$

Функция $f(x)$ является полиномом 6-ой степени, и, следовательно, функция $g(x)$ является квадратичной:

$$g(x) = a_1 x^2 + b_1 x + c_1$$

Очевидно, что здесь $a_1 = 8$ и коэффициент c_1 определяется исходя из величины свободного члена функции $f(x)$:

$$c_1 = \frac{-1700}{2,5^2 \cdot 2 \cdot (-2)} = 68.$$

Таким образом: $g(x) = 8x^2 + b_1 x + 68$.

и произведение корней квадратного трехчлена $g(x)$ равно:

$$\frac{c_1}{a_1} = \frac{68}{8} = \frac{17}{2}$$

Следовательно, правильным ответом является вариант (В).

Подчеркнем, что существенным отличием между наиболее сложными частями итоговых аттестаций в США и России является их проведение в тестовой форме в США и в традиционной форме с проверкой хода решения в России. Однако несмотря на то, что тестовая форма экзамена многими считается более «простой» для сдачи, определенно, этого нельзя сказать о SAT Subject Math Level 2 в США. Уровень заданий этого экзамена достаточно высокий и включает задачи олимпиадного характера (по условной российской классификации). Как видно из таблицы 2, тематика заданий шире, чем в российской школе, и требует весьма серьезной подготовки по большому количеству разделов и подразделов математики.

Представляется, что самым существенным отличием является то обстоятельство, что на решение одной задачи (выбор правильного варианта ответа) американского экзамена отводится в среднем 72 секунды. Это обстоятельство указывает на реально весьма высокие требования к уровню знаний обучающихся, а также к наличию твердых навыков и умений для решения математических задач. Проведение педагогического эксперимента по прохождению американского теста выпускниками российской школы на сопоставимом уровне представляет безусловный интерес для определения качества и конкурентоспособности отечественного образования.

2.2. Формирование аналитических умений обучающихся как средство подготовки к итоговой аттестации по математике в российской школе

При оценке конкурентоспособности образования в стране «особую значимость приобретает мотивация обучающихся к учебно-исследовательской деятельности. Без формирования аналитических умений невозможно полноценно овладеть школьными знаниями, и, следовательно, приобрести в будущем профессиональные навыки и умения, которые будут

отвечать повышенным требованиям к квалификации современного человека» [44]. В начальной и средней школе «закладываются базовые, фундаментальные основы, необходимые для успешного развития аналитических умений обучающихся для решения математических задач; в старшей школе происходит обобщение, систематизация полученных знаний и непосредственная подготовка к итоговым аттестациям» [10].

Процесс формирования аналитических умений может осуществляться не только на основных уроках, но и во внеурочной деятельности, на дополнительных (элективных) занятиях и в ходе выполнения различных проектов.

К факторам, влияющим на формирование аналитических умений в процессе обучения математике, и, как следствие, к успешному прохождению итоговой аттестации относятся:

- желание самих обучающихся к самостоятельной работе и к участию в различных математических проектах;
- наличие достаточных предметных компетенций для изучения нового материала.

Владение предметными компетенциями характеризует самого обучающегося и его способности к их использованию при решении как типовых, так и возникающих нестандартных задач. Сущность процесса формирования аналитических умений «сводится к:

- формированию мотивации и познавательной активности;
- повышению уровня интеллекта и креативности;
- развитию познавательных процессов и учебных навыков;
- развитию способностей по преодолению когнитивных трудностей;
- повышению уровня знаний по основным методам исследований;
- формированию способностей к выдвижению гипотез, классификации, структурированию, доказательствам;

- повышению уверенности в обоснованной справедливости собственных идей» [7].

Наличие аналитических умений у школьников предполагает существование возможностей проводить исследования для получения новых интеллектуальных знаний, и достаточное качество и высокую эффективность таких исследований.

Это предполагает способность к использованию такого инструментария, как выдвижение гипотез, расчленение проблем, выявление поэтапности и поиск рациональных путей решения.

В качестве основы для определения минимальных требований к уровню аналитических умений обучающихся можно принять предметные требования для базового ЕГЭ.

Приведем задания ЕГЭ в России по стереометрии, по модельным образцам к 2022 году [15].

Задача 2.2.1 (Россия, базовый уровень, задание №13)

Вода в сосуде цилиндрической формы находится на уровне $h = 80$ см. На каком уровне окажется вода, если её перелить в другой цилиндрический сосуд, у которого радиус основания в 4 раза больше, чем у данного? Ответ дайте в сантиметрах.

Решение

Задача рассчитана на знание формулы для объема цилиндра, что позволяет определить объем воды (рисунок 9):

$$V = \pi r^2 h$$

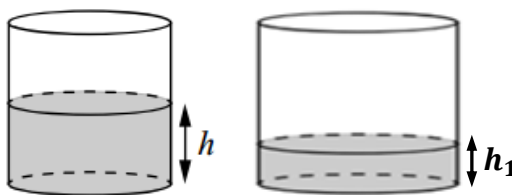


Рисунок 9 – Цилиндрические сосуды к задаче 2.2.1

Для второго сосуда $R = 4r$ и тогда:

$$V = \pi(4r)^2 h_1$$

Приравнивая полученные выражения, находим:

$$(4r)^2 h_1 = r^2 h, \quad h_1 = \frac{1}{16} h = \frac{80}{16} = 5 \text{ см}$$

Задача 2.2.2 (Россия, базовый уровень, задание №15)

В треугольнике ABC известно, что $AB = BC = 13, AC = 10$. Найдите длину медианы BM .

Решение

Эта задача рассчитана на использование стандартных соотношений в равнобедренном треугольнике (рисунок 10):

$$|BM| = \sqrt{|AB|^2 - \left(\frac{|AC|}{2}\right)^2} = \sqrt{13^2 - \left(\frac{10}{2}\right)^2} = 12$$

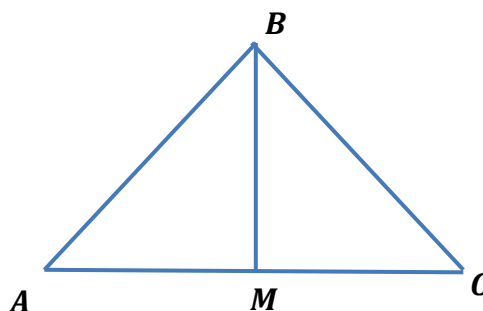


Рисунок 10 – Треугольник к задаче 2.2.2

С другой стороны, знание стандартной формулы для медианы треугольника также позволяет получить решение:

$$|BM| = \frac{1}{2} \sqrt{2|AB|^2 + 2|BC|^2 - |AC|^2} = \frac{1}{2} \sqrt{2 \cdot 13^2 + 2 \cdot 13^2 - 10^2} = 12$$

Задача 2.2.3 (Россия, базовый уровень, задание №16)

«Найдите объём правильной четырёхугольной пирамиды, сторона основания которой равна 4, а боковое ребро равно $\sqrt{17}$ » [23].

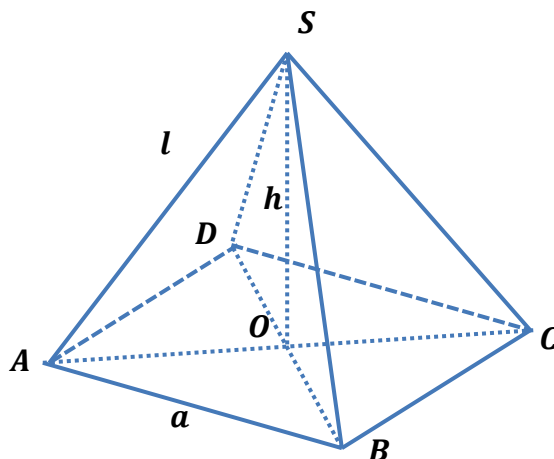


Рисунок 11 – Пирамида к задаче 2.2.3

Решение

В данной задаче предполагается использование стандартных знаний о правильных пирамидах (рис.11).

$$V = \frac{1}{3} \cdot |SO| \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot h \cdot a^2$$

Из $\triangle SOB$:

$$h = \sqrt{|SB|^2 - |BO|^2} = \sqrt{l^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{17 - (2\sqrt{2})^2} = 3$$

Получаем:

$$V = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 4^2 = 16$$

Гораздо более высоким является уровень требований к аналитическим умениям, гарантирующим успешное прохождение ЕГЭ на профильном уровне по математике, часть 1. Наиболее высокими являются требования профильного экзамена по математике, часть 2.

Задача 2.2.4 (Россия, профильный уровень, часть 1, задание №5)

«В первом цилиндрическом сосуде уровень жидкости достигает 16 см. Эту жидкость перелили во второй цилиндрический сосуд, диаметр основания которого в 2 раза больше диаметра основания первого.

На какой высоте будет находиться уровень жидкости во втором сосуде? Ответ дайте в сантиметрах» [23].

Решение

Данная задача, хоть и предлагается в первой части профильного экзамена, идентична задаче № 13 базового уровня (см. задачу 2.2.1 выше).

Приведем краткую запись решения:

$$h_1 = \frac{\pi r^2 \cdot 16}{\pi(2r)^2} = 4$$

Задача 2.2.5 (Россия, профильный уровень, часть 2, задание №13)

Все рёбра правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ имеют длину 6.

Точки М и N – середины рёбер AA₁ и A₁C₁ соответственно.

- а) Докажите, что прямые BM и MN перпендикулярны.
б) Найдите угол между плоскостями BMN и ABB_1 .

Решение

По условию задачи все ребра правильной призмы равны $a = 6$ и, соответственно, из прямоугольного $\triangle NA_1M$ (рис.12):

$$|MN| = \sqrt{(a/2)^2 + (a/2)^2} = a\sqrt{2}/2$$

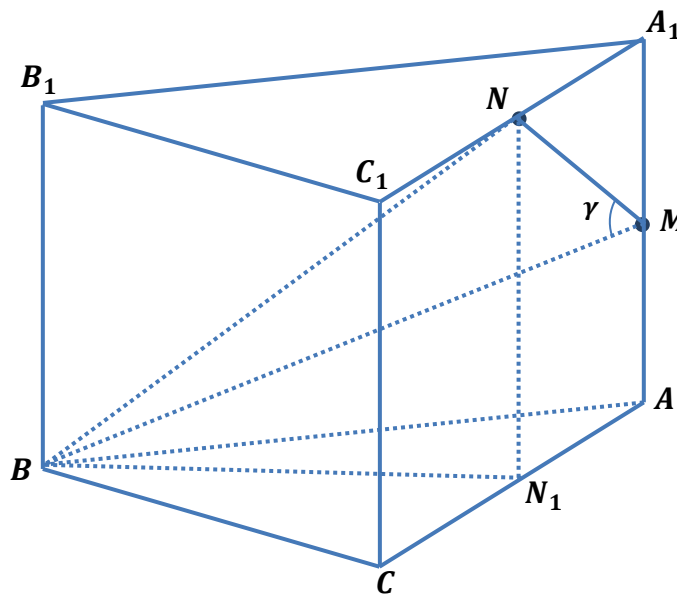


Рисунок 12 – Пирамида к задаче 2.2.5

Из прямоугольного $\triangle BAM$:

$$|BM| = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = a \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Из равностороннего $\triangle ABC$ (N_1 – середина AC):

$$|BN_1| = a \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Из прямоугольного $\triangle BN_1N$:

$$|BN| = \sqrt{|BN_1|^2 + |NN_1|^2} = \sqrt{\left(a \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + a^2} = a \frac{\sqrt{7}}{2}$$

В $\triangle BMN$ по теореме косинусов:

$$\begin{aligned} |BN|^2 &= |BM|^2 + |MN|^2 - 2|BM| \cdot |MN| \cdot \cos \gamma \\ \cos \gamma &= \frac{|BM|^2 + |MN|^2 - |BN|^2}{2|BM| \cdot |MN|} = \frac{\left(a \frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 + \left(a \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(a \frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2}{2 \cdot \left(a \frac{\sqrt{5}}{2}\right) \cdot \left(a \frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = 0 \end{aligned}$$

Это означает, что $\gamma = 90^\circ$, $\triangle BMN$ – прямоугольный и $(BM) \perp (MN)$, что и требовалось доказать.

Для определения угла α между (BMN) и (ABB_1) проведем перпендикуляр NM_1 к A_1B_1 . Из того, что $(A_1B_1C_1) \perp (AA_1B_1B)$ следует, что $(NM_1) \perp (AA_1B_1B)$. Как было показано, $(NM) \perp (BM)$. Тогда угол α между (NM) и (MM_1) является искомым. Учитывая, что

$$|NM_1| = |A_1N| \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{4}$$

и $\triangle NM_1M$ – прямоугольный, находим:

$$\sin \alpha = \frac{|NM_1|}{|NM|} = \frac{a \frac{\sqrt{3}}{4}}{a \frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{\frac{3}{8}}, \quad \alpha = \arcsin \sqrt{\frac{3}{8}}$$

Задача 2.2.6 (Россия, профильный уровень, часть 2, задание №16)

«Две окружности касаются внешним образом в точке K . Прямая AB касается первой окружности в точке A , а второй – в точке B .

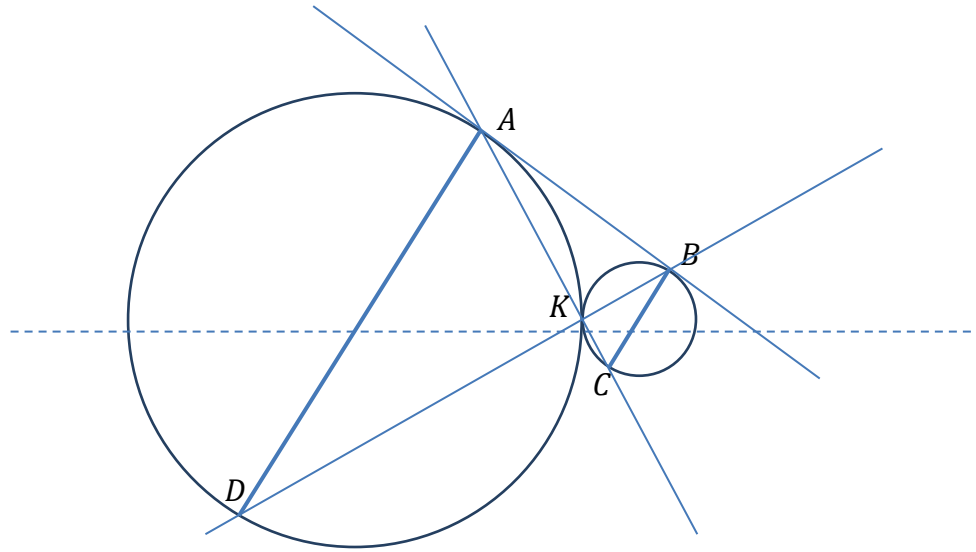


Рисунок 13 – Окружности к задаче 2.2.6

Прямая BK пересекает первую окружность в точке D , прямая AK пересекает вторую окружность в точке C (рисунок 13).

- а) Докажите, что прямые AD и BC параллельны.
- б) Найдите площадь треугольника AKB , если известно, что радиусы окружностей равны 4 и 1» [23].

Решение

Соединим центры окружностей O и O_1 с A и B соответственно (рисунок 14). Прямая (AB) является общей касательной для окружностей.

Поэтому:

$$(OA) \perp (AB), (O_1B) \perp (AB), (OA) \parallel (O_1B)$$

Обозначим угол между (O_1B) и (OO_1) как α . Тогда $\widehat{AOK} = \alpha$.

Следовательно:

$$OA = OK \Rightarrow \widehat{AKO} = \frac{\pi - \alpha}{2}$$

$$O_1K = O_1B \Rightarrow \widehat{BK O_1} = \frac{\alpha}{2}$$

$$\widehat{AKB} = \pi - \widehat{AKO} - \widehat{BKO_1} = \pi - \frac{\pi - \alpha}{2} - \frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{2}$$

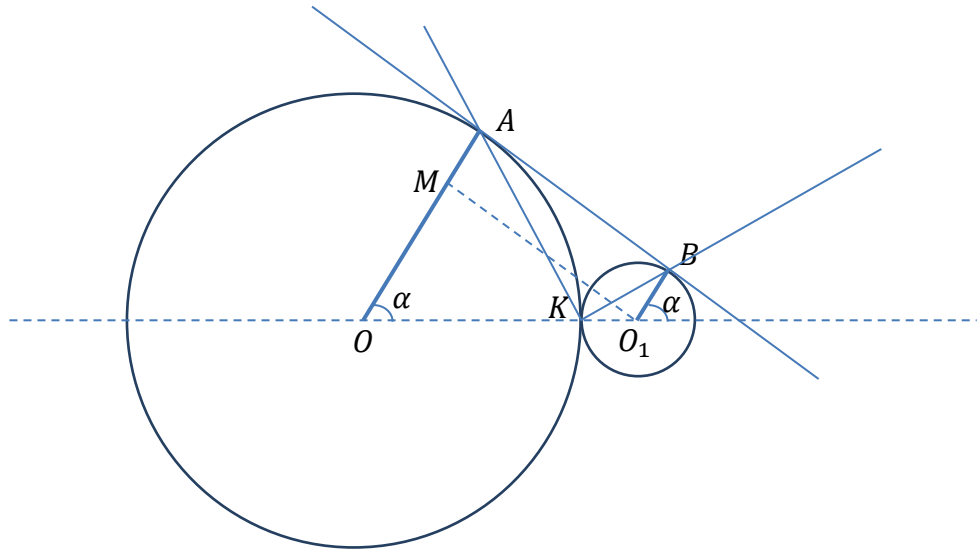


Рисунок 14 – Общая касательная окружностей к задаче 2.2.6

Это означает, что $\triangle AKB$ является прямоугольным. Площадь $\triangle AKB$ равна:

$$S = \frac{1}{2} |AK| \cdot |KB| = \frac{1}{2} \left(2R \sin \frac{\alpha}{2} \right) \cdot \left(2r \cos \frac{\alpha}{2} \right) = Rr \sin \alpha$$

Здесь R и r – радиусы окружностей. В прямоугольной трапеции $OABO_1$ ($(O_1M) \parallel (AB)$):

$$|OO_1| \cos \alpha = |OM| = |OA| - |O_1B|$$

$$\cos \alpha = \frac{|OA| - |O_1B|}{|OK| + |O_1K|} = \frac{R - r}{R + r}$$

Тогда:

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{R - r}{R + r} \right)^2} = \frac{2\sqrt{Rr}}{R + r}$$

Получаем:

$$S = \frac{2(Rr)^{3/2}}{R + r}$$

Полагая $R = 4, r = 1$ находим:

$$S = \frac{2 \cdot (4 \cdot 1)^{3/2}}{4 + 1} = 3,2$$

Для доказательства параллельности (AD) и (BC) рассмотрим фигуру $ADCB$. Как было показано, диагонали этого четырехугольника взаимно перпендикулярны:

$$(AK) \perp (KB), \quad (AC) \perp (DB)$$

Следовательно, треугольники ADK и BKC —прямоугольные. Это означает, что AD и BC являются диагоналями окружностей и проходят через их центры O и O_1 . Тогда из параллельности $(OA) \parallel (O_1B)$ следует параллельность $(AD) \parallel (BC)$, что и требовалось доказать.

Для сравнения, приведем задачи по геометрии, предлагающиеся на итоговой аттестации в Грузии [19] в 2021 году (максимальная сложность оценивается в 4).

Задача 2.2.7 (Грузия, сложность 3)

Гипотенуза AB прямоугольного треугольника ABC равна 4см и $\widehat{ABC} = 60^\circ$. Из вершины A остроуго к плоскости (ABC) восстановлен перпендикуляр AM , длина которого 6см. Найти тангенс угла между перпендикуляром, проведенным из M к прямой BC и плоскостью (ABC) .

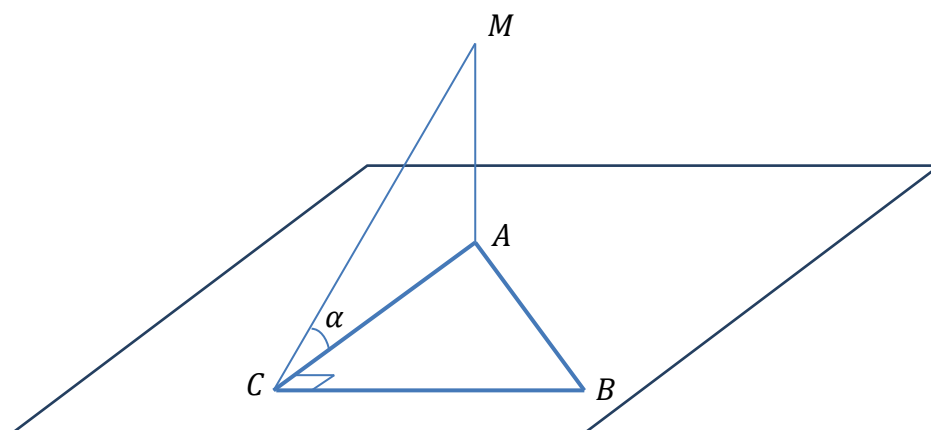


Рисунок 15 – Плоскость с треугольником к задаче 2.2.7

Решение

Задача рассчитана на использование известной теоремы о трех перпендикулярах. По условию задачи (рис.15):

$$(AM) \perp (ABC),$$

$$(AC) \perp (BC)$$

и, следовательно,

$$(MC) \perp (BC)$$

так как (AC) является проекцией (MC) на (ABC) .

Катет AC треугольника ABC равен:

$$|AC| = |AB| \sin 60^\circ = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

Из прямоугольного $\triangle MAC$ находим требуемых тангенс угла α :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{|AM|}{|AC|} = \frac{6}{2\sqrt{3}} = \sqrt{3}, \quad \alpha = 60^\circ$$

Задача 2.2.8 (Грузия, сложность 4)

Основаниями трапеции $ABCD$ являются AD и BC , ее высота равна 12 см, и $AD:BC = 5:1$. В трапеции проведена прямая параллельно основаниям трапеции, которая пересекает AB и CD в точках M и N соответственно. Известно, что $MN = 2 \cdot BC$, площадь четырехугольника $AMND$ равна 21см^2 . Найдите основания трапеции $ABCD$.

Решение

Обозначим меньшее основание трапеции как b и высоту как h . (рис.16).

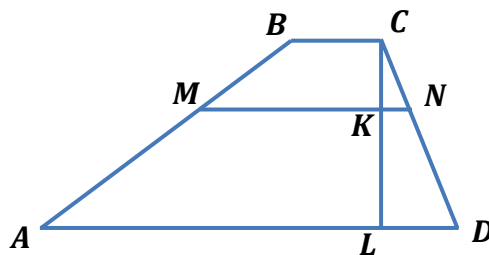


Рисунок 16 – Трапеция к задаче 2.2.8

Тогда:

$$AD = 5b, \quad MN = 2b$$

Из подобия трапеций $MBCN \sim ABCD$

следует:

$$\frac{|CK|}{|CL|} = \frac{|MN|}{|AD|} = \frac{2b}{5b} = \frac{2}{5}, \quad |CK| = \frac{2}{5}h$$

$$|KL| = |CL| - |CK| = h - \frac{2}{5}h = \frac{3}{5}h$$

Записываем выражение для площади S_{AMND} :

$$S_{AMND} = \frac{|AD| + |MN|}{2} \cdot |KL| = \frac{5b + 2b}{2} \cdot \frac{3}{5}h = 2,1bh$$

Находим длину основания BC :

$$S_{AMND} = 2,1bh = 21\text{см}^2$$

$$BC = b = \frac{21}{2,1 \cdot 12} = \frac{5}{6}\text{см}$$

Тогда:

$$AD = 5b = \frac{25}{6}\text{см}$$

Главными условиями формирования аналитических умений являются надлежащее содержание и организация занятий. «Отбирая материал и продумывая приемы, которые будут использованы на уроке, прежде всего, следует оценивать их с точки зрения возможности возбудить и поддерживать интерес к предмету» [24].

Для успешного прохождения итоговых аттестаций обучающимся необходим некоторый фундамент, позволяющий не отвлекаться на повтор правил выполнения достаточно рутинных операций. В качестве такого фундамента можно выделить вычислительные навыки и прочные знания теории.

Кроме того, следует отметить иные важные для формирования аналитических умений и успешного прохождения итоговых аттестаций направления работы учителя математики и отметить методические приемы для их реализации.

Систематическое совершенствование вычислительных навыков

Данный аспект является необходимым условием для формирования и развития аналитических умений, так как допускаемые ошибки могут привести к существенным искажениям в ходе анализа задач. Именно поэтому особое внимание следует уделить, например, способам быстрого умножения цифр, извлечения корней, возведения в степень и т.д.

Прочное знание теорем, формул и правил

Одним из приемов по закреплению теоретических знаний может служить проведение математических диктантов по соответствующим разделам изучаемой программы.

Развитие учебно-исследовательских навыков на практике

Представляется эффективным применение на занятиях универсальных подходов к компетенции задач. Это требует знания и понимания их структуры, основных методов решения.

Отметим далее, что процесс обучения в старших классах и при подготовке к итоговой аттестации предполагает развитие компетенций обучающихся, позволяющих «самостоятельно и осознанно выполнять мыслительные операции не только посредством основных алгоритмов решения задач, но и в ходе аналитических исследований» [5]. Благодаря «усложнению базовых задач и приданию им исследовательского характера можно достичь формирования способности выдвигать нешаблонный способ решения, когда алгоритмы решения отсутствуют и/или создаются самими обучающимися.

Усложнение базовых задач может происходить различными способами. Например, это:

- увеличение громоздкости уравнения и процесса его решения;
- необходимость создания своего рода вариации существующего алгоритма для решения нового, усложненного уравнения;
- придание уравнению нестандартной формы, когда требуется переосмысление задачи, ее переформулировка, чтобы воспользоваться стандартным решением.

Задачи исследовательского характера играют самую значимую роль для формирования аналитических умений, и требуют от обучающихся:

- выдвижения гипотез;
- комбинирования различных алгоритмов решения;
- применения оригинальных, нестандартных способов решения;
- выявления неочевидных связей между исходными данными и неизвестными переменными» [16].

Приведем пример многоуровневой задачи по алгебре, которая охватывает несколько тем курса математики общеобразовательной школы и способствует формированию и развитию аналитических умений при подготовке к итоговой аттестации по математике.

Задача 2.2.9. Дана система уравнений:

$$\begin{cases} x + y = 2; \\ x - ay = a. \end{cases}$$

Для этой системы уравнений возможно сконструировать несколько «различных по уровню сложности задач.

1. Базовая задача: при каком значении параметра a система не имеет решений?
2. Усложненная задача: при каком значении параметра a решение системы уравнений задает на координатной плоскости $(x; y)$ точку, лежащую на окружности радиуса 2?

3. Задача исследовательского характера: при каком значении параметра a выражение xy принимает наибольшее значение и чему оно равно?» [16].

Решение:

1. На первом этапе находим решение системы уравнений стандартным методом подстановки [20].

$$x = \frac{3a}{a+1}, \quad y = \frac{2-a}{a+1}.$$

Обучающиеся приходят к очевидному ответу базовой задачи:

$$a = -1.$$

2. Для решения усложненной задачи записываем уравнение окружности на координатной плоскости:

$$x^2 + y^2 = 4,$$
$$\frac{9a^2}{(a+1)^2} + \frac{(2-a)^2}{(a+1)^2} = 4.$$

Отсюда получаем: $a = 0, a = 2$ и решения имеют вид: $(0; -2), (2; 0)$.

3. «Решение исследовательской задачи сводится к анализу функции:

$$xy = f(a) = \frac{3a(2-a)}{(a+1)^2}.$$

на минимум.

Важным этапом является анализ преобразования $f(a)$ к виду:

$$f(a) = \frac{6a - 3a^2}{(a+1)^2} = -3 + \frac{12a + 3}{(a+1)^2} = -3 + \frac{12}{a+1} - \frac{9}{(a+1)^2}.$$

Из полученного выражения обучающиеся выделяют полный квадрат:

$$f(a) = -\left(\frac{3}{a+1} - 2\right)^2 + 1.$$

Очевидно, что наибольшее значение функция $f(a)$ достигается когда:

$$\frac{3}{a+1} - 2 = 0, \quad a = \frac{1}{2}.$$

и это значение равно» [44]:

$$(xy)_{min} = f\left(\frac{1}{2}\right) = 1.$$

Приведем пример еще одной задачи с экономическим содержанием [26].

Задача 2.2.10. Для упаковки детских игрушек необходимо изготовить картонные коробки с крышкой фиксированного объема в 3000 куб. см. и высотой в 7,5 см. Предполагая форму коробки в виде прямоугольного параллелепипеда, определить стоимость изготовления, если 1 кв. м. картона стоит 60 руб.

Решение:

Учащиеся, которые уже имели опыт с подобными задачами, легко справятся с записью функции, которую надо минимизировать:

$$S = 2xy + 2x \cdot 7,5 + 2y \cdot 7,5 = 2xy + 15(x + y)$$

Здесь x и y – стороны основания коробки, S – площадь полной поверхности прямоугольного параллелепипеда (коробки)

$$xy \cdot 7,5 = 3000, \quad xy = 400$$

Функция $S(x)$ принимает вид:

$$S(x) = 800 + 15\left(x + \frac{400}{x}\right)$$

На следующем шаге учащиеся вычисляют производную, проводят исследование на экстремум и получают ответ:

$$x_{min} = 20\text{см}, \quad S_{min} = 1400\text{см}^2,$$

$$P = 40 \cdot 2000 \cdot 10^{-4} = 8\text{руб.}$$

«В процессе решения таких задач обучающимся необходимо и выдвигать гипотезы, и составлять план решения, что способствует формированию аналитических умений, а именно, получению новых знаний, развитию способностей к проведению исследований и приобретению практического опыта. Приведенные примеры иллюстрируют значимость для формирования аналитических умений применения как базовых алгоритмов

решения, так и нестандартных подходов к анализу и поиску решения алгебраических задач» [16].

Эти аспекты играют важную роль для подготовки и успешного прохождения итоговых аттестаций по завершении курса математики общеобразовательной школы.

2.3. Использование результатов сравнительного анализа содержания итоговой аттестации учащихся по математике в российской школе

Практическая апробация экспериментальной программы (таблица 2) в рамках элективного курса «Обобщающее повторение по основным темам к профильному ЕГЭ по математике» проводилась на базе БОУ г. Омска «Средняя общеобразовательная школа №95 с углубленным изучением отдельных предметов». В апробации были задействованы учащиеся 11 «а» класса, изъявившие желание получить базовые и дополнительные знания в рамках элективного курса «Объемы круглых тел в задачах».

Для того, чтобы апробировать экспериментальную программу, был предварительно проведен с помощью анкетирования констатирующий этап экспериментальной работы в целях выявления степени понимания школьниками теоретических основ по основным разделам математики, представленным в ЕГЭ различного уровня.

Разработанная программа применялась на практике в период с 25 января 2022 года по 22 марта 2022 года. Программа и соответствующая технология проведения занятий была рассчитана на 18 часов (2 часа в неделю) для учащихся 11 класса.

Апробация экспериментальной программы «Обобщающее повторение по основным темам к профильному ЕГЭ по математике» осуществлялась на базе КГУ "Средняя общеобразовательная школа №16 отдела образования

города Экибастуза" Павлодарской области Республики Казахстан. Ответственной за апробацию была назначена Жубаева Ш.К., учитель алгебры и геометрии.

В апробации были задействованы учащиеся 11 «А» класса, изъявившие желание получить базовые и дополнительные знания в рамках экспериментальной программы «Обобщающее повторение по основным темам к профильному ЕГЭ по математике».

В основу курса были взяты учебники по алгебре и началам математического анализа для 10 и 11 класса авторского коллектива С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин [20], [21] и учебник по геометрии для 10 и 11 класса авторов Калинин А.Ю., Терешин Д.А. [11], [12]. В данных учебниках приведены все основные разделы, а также необходимые знания как для учащихся базовой школы, так и для профильных школ или для классов с углубленным изучением математики.

Для преподавателей, участвующих в апробации, предоставляется информация о дополнительном материале, который был использован при составлении экспериментальной программы. Это и теоретический материал и пособия, в которых представлены задачи по изучаемой теме.

В нижеследующей таблице представлен фактический план занятий по экспериментальной программе «Обобщающее повторение по основным темам к профильному ЕГЭ по математике».

В рамках программы было проведено девять занятий по 2 академических часа каждое.

Первая часть в каждом занятии была посвящена теоретическому материалу и проводилась в лекционной форме.

Вторая часть проводится в форме практического занятия и посвящена анализу предыдущего домашнего задания, а также решению типовых задач в рамках нового материала текущего занятия.

Таблица 6 – Занятия элективного курса

Обобщающее повторение по темам	Дата
1. Тождественные преобразования и алгебраические уравнения. Свойства чисел.	25.01.2022
2. Текстовые задачи. Составление уравнений и неравенств для решения задач.	01.02.2022
3. Функции, их преобразование, построение графиков. Исследование функций.	08.02.2022
4. Уравнения, неравенства и их комбинации. Системы уравнений.	15.02.2022
5. Решение геометрических задач. Применение векторов.	22.02.2022
6. Задачи с параметрами.	01.03.2022
7. Задачи с экономическим содержанием.	09.03.2022
8. Комбинаторика. Элементы теории вероятности.	15.03.2022
9. Завершающее занятие, обобщение изученного материала.	22.03.2022

Приведем фрагмент занятия по теме 6 «Задачи с параметрами».

Цели занятия:

Обучающая:

- формирование у школьников различных приёмов мыслительной деятельности;
- включение новой информации в структуру прежних знаний;
- обобщенное повторение полученных ранее знаний по задачам с параметром,
- систематизация задач, содержащих параметр,
- основные способы (методы) решения задач с параметром,
- примеры решения задач с параметром.

Воспитательная:

- привитие интереса к предмету;
- формирование уверенности в своих знаниях;

- сформировать потребность в знании через показ взаимосвязи между науками и жизнью; через показ значимости математики как метода (языка) научного познания.

Развивающая:

- развивать умение использовать теоретические знания при решении практических задач;
- развивать способность к анализу и обобщению полученных данных;
- развивать познавательный интерес к математике, расширять кругозор;
- применение полученных знаний в более сложных ситуациях.

Форма занятий и учебно-познавательной деятельности:

- занятия нацелены на новые знания, умения и навыки;
- на занятиях используется: индивидуальная и коллективная форма работы.

Методы, используемые на занятиях:

- объяснительно-иллюстративный,
- продуктивный.

Дидактический материал:

- школьные принадлежности,
- доска, маркеры (разноцветные мелки),
- проектор, презентация «Задачи с параметрами».

План урока:

- Организационный момент (1 мин),
- Подготовительный этап (мотивация) (5 мин),
- Изучение нового материала (15 мин),
- Решение задач (15 мин),
- Подведение итогов урока, задание на дом (4 мин).

Ход урока

- Организационный момент
- Подготовительный этап

Приведем часть урока, посвященную систематизации задач, содержащих параметр, и способы (методы) их решения.

Существуют общие особенности формулировок задач, содержащих параметры. Приведем основные из них.

«Тип 1. Уравнения, неравенства, их системы и совокупности, которые необходимо решить либо для любого значения параметра (параметров), либо для значений параметра, принадлежащих заранее оговоренному множеству.

Тип 2. Уравнения, неравенства, их системы и совокупности, для которых требуется определить количество решений в зависимости от значения параметра (параметров).

Тип 3. Уравнения, неравенства, их системы и совокупности, для которых требуется найти все те значения параметра, при которых указанные уравнения, неравенства, их системы и совокупности имеют заданное число решений (в частности, не имеют или имеют бесконечное множество решений).

Тип 4. Уравнения, неравенства, их системы и совокупности, для которых при искомым значениях параметра множество решений удовлетворяет заданным условиям в области определения.

Например, найти значения параметра, при которых:

- уравнение выполняется для любого значения переменной из заданного промежутка;
- множество решений первого уравнения является подмножеством множества решений второго уравнения и т. д.» [9].

Приведем далее основные способы (методы) решения задач с параметром.

«Способ I (аналитический). Это способ так называемого прямого решения, повторяющего стандартные процедуры нахождения ответа, которые применяются в задачах без параметра.

Способ II (графический). В зависимости от задачи (с переменной x и параметром a) рассматриваются графики или в координатной плоскости $(x; y)$, или в координатной плоскости $(x; a)$.

Способ III (решение относительно параметра). При решении этим способом переменные x и a принимаются равноправными и выбирается та переменная, относительно которой аналитическое решение признается более простым. После естественных упрощений возвращаемся к исходному смыслу переменных x и a и заканчиваем решение» [9].

Приведем далее задачу из профильного экзамена ЕГЭ 2022, которая относится к третьему типу и может быть решена как аналитическим, так и графическим способами.

Задача. Найти все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \frac{xy^2 - 2xy - 4y + 8}{\sqrt{4-y}} = 0 \\ y = ax \end{cases}.$$

имеет ровно три различных решения.

Решение. Из первого уравнения следует: $y < 4$. Учитывая, что $y = ax$, получаем: $a^2x^3 - 2ax^2 - 4ax + 8 = 0$.

Отсюда следует:

$$\begin{aligned} ax^2(ax - 2) - 4(ax - 2) &= 0 \Rightarrow (ax - 2)(ax^2 - 4) = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} ax = 2 \\ ax^2 = 4 \end{cases} \end{aligned}$$

Очевидно, что:

- при $a < 0$ получаем единственное решение объединения уравнений:

$$x = \frac{2}{a}$$

- при $a > 0, a \neq 1$ получаем три решения:

$$x = \frac{2}{a},$$

$$x = \pm \frac{2}{\sqrt{a}}$$

- при $a = 1$ получаем два решения:

$$x = \pm 2$$

Исходя из условия задачи, остановимся на случае $a \in (0; 1) \cup (1; +\infty)$.

Для переменной y получаем: $y = a \cdot \frac{2}{a} = 2$

или

$$y = \pm a \cdot \frac{2}{\sqrt{a}} = \pm 2\sqrt{a}$$

Из условия $y < 4$ следует:

$$2\sqrt{a} < 4 \Rightarrow 0 \leq a < 4$$

Решением задачи является пересечение интервалов:

$$a \in (0; 1) \cup (1; +\infty);$$

$$a \in [0; 4)$$

Получаем ответ (рисунок 17):

$$a \in (0; 1) \cup (1; 4)$$

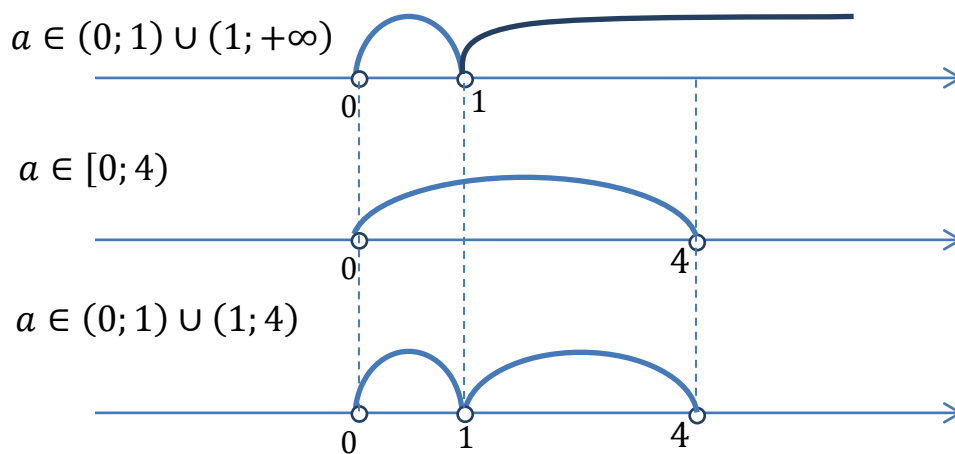


Рисунок 17 – Пересечение интервалов

Данное решение можно получить, используя графический способ решения. Из первого уравнения системы следует:

$$xy^2 - 2xy - 4y + 8 = 0 \Rightarrow xy(y - 2) - 4(y - 2) = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow (y - 2)(xy - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} y=2 \\ y=\frac{4}{x} \end{cases}$$

Здесь следует учесть, что $x = 0, y = 0$ не являются решением задачи, а также, необходимо выполнение условия $y < 4$.

Изображаем на графике (рисунок 18) полученные решения для первого уравнения. Это будет объединение точек на прямой $y = 2$ и гиперболы $y = \frac{4}{x}$, находящихся ниже прямой $y = 4$. Второе уравнение исходной системы представляет семейство прямых $y = ax$, проходящих через начало координат (рисунок 19). При $a > 0$ прямые расположены в 1-й и 3-й координатных четвертях, и при $a < 0$ – 2-й и 4-й четвертях.

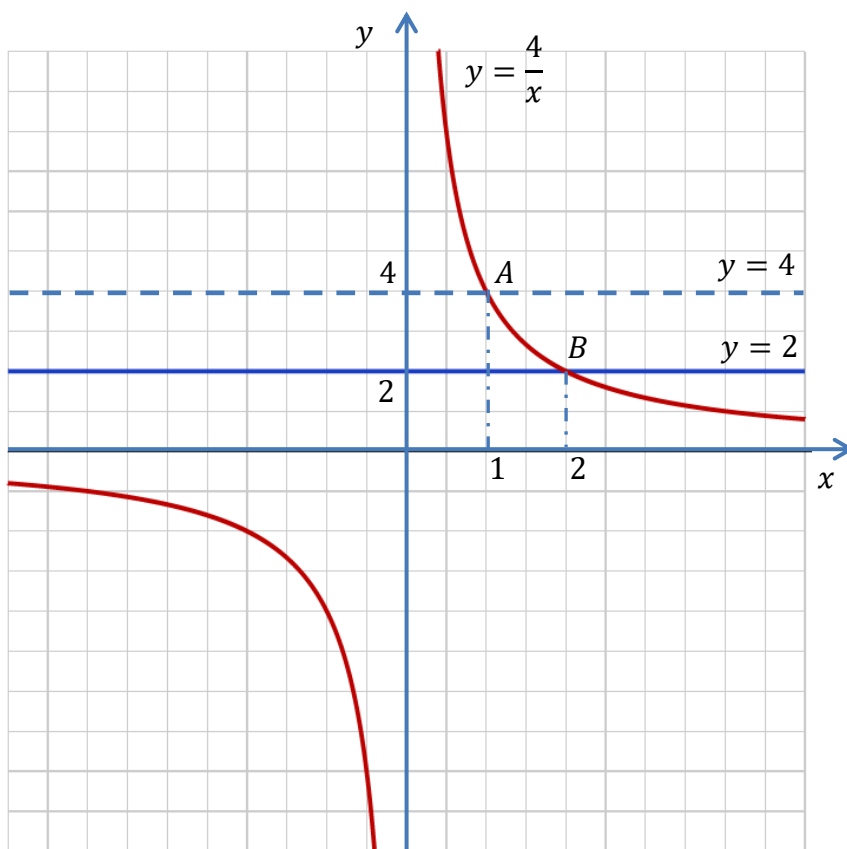


Рисунок 18 – Графики к первому уравнению системы

Несложно заметить, что при $a < 0$ прямая $y = ax$ (рисунок 19) пересекается из графиков на рис.1 лишь с прямой $y = 2$. В этом случае система имеет одно решение.

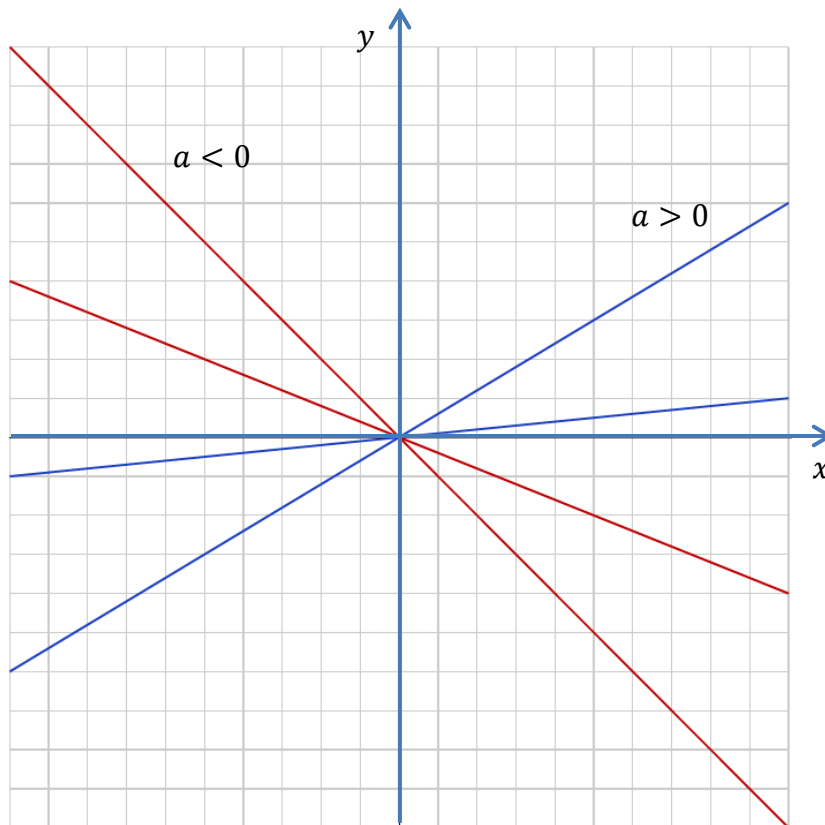


Рисунок 19 – Графики ко второму уравнению системы

При $a > 0$, прямая $y = ax$ (рис.2) пересекает обе ветви гиперболы и прямую $y = 2$ лишь при таких a , когда прямая $y = ax$ проходит «ниже» точки A и не проходит через точку B .

Очевидно, что через точку A проходит прямая $y = 4x$, ($a = 4$), а через точку B прямая $y = x$, ($a = 1$).

Таким образом, исходная система имеет три решения когда:

$$a \in (0; 1) \cup (1; 4)$$

По итогам всего курса на констатирующий этапе экспериментальной работы преподавателям с помощью анкетирования были заданы следующие вопросы:

- какие темы Вам представляются наиболее сложными для учащихся?
- считаете ли Вы обоснованным разделение тем с учетом уровневой дифференциации учащихся?
- как следует перераспределить темы между занятиями для лучшей усваиваемости?
- насколько следует изменить комплекс задач для домашних заданий?
- наблюдается ли Вы повышение интереса у обучающихся по ходу занятий?
- какие общие рекомендации по улучшению элективного курса Вы можете дать?

В целом, преподаватели отметили живой интерес учащихся (около 80%) к обобщающим занятиям в рамках данной программы. Наиболее сложными оказались темы №6 и №7, уровень правильного решения задач по эти темам оказался не очень высоким (примерно 50%). В целом, преподаватели, по итогам оценки домашних и самостоятельных работ посчитали целесообразным учет уровневой дифференциации при составлении заданий и изложении материала.

Учащимся, по завершении обучения на констатирующем этапе экспериментальной работы были заданы следующие вопросы:

- Были ли лекционные занятия интересны для Вас?
- Что на практических занятиях Вам давалось более легко?
- Какой материал вызвал у Вас наибольшее затруднения?
- Какой материал оказался наиболее интересным? Что было для Вас более «скучным»? По какой причине?

- При решении какого типа задач можно применить полученные во время курса знания?
- Считаете ли Вы полезным для себя полезными умения и навыки, полученные во время посещения занятий?

В целом, учащиеся посчитали курс интересным и познавательным для себя (около 85%).

Как и преподаватели, учащиеся испытывали затруднения в изучении тем №6 и №7 (примерно 70%).

Целью поискового этапа проведенного исследования состояла в апробации конкретного теоретического материала и ряда типовых задач в рамках экспериментальной программы.

В качестве контрольного занятия в 11 классе КГУ "Средняя общеобразовательная школа №16 отдела образования города Экибастуза" Павлодарской области Республики Казахстан обучающимся был предложен тест по математике, предлагавшийся в США по уровню SAT-2 [36].

Представим результаты итоговой контрольной работы в таблице 7.

Таблица 7 – Результаты теста

Номера заданий	Решили преимущественно правильно	Решили преимущественно неправильно	Не приступали к решению
1-15	80%	20%	0%
16-30	70%	30%	0%
31-42	50%	30%	20%
43-50	20%	40%	40%

Наибольшие затруднения у обучающихся вызвали тестовые задания под номерами 31-42 и 43-50.

Приведем анализ типичных ошибок обучающихся (таблица 8) и количественный анализ результатов (таблица 9, рисунок 20).

Таблица 8 – Типичные ошибки обучающихся

№ задания	Неверный выбор способа решения	Неверное использование формул	Ошибка в вычислениях
1	0%	0%	20%
2	0%	10%	10%
3	10%	20%	20%
4	20%	10%	10%

Таблица 9 – Анализ результатов

Оценка	Количество обучающихся
5	10%
4	40%
3	45%
2	5%

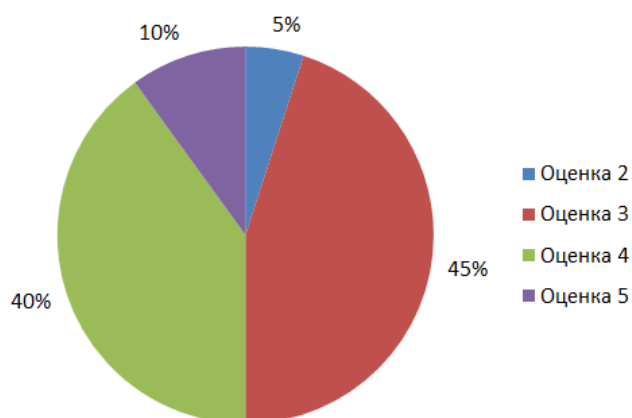


Рисунок 20 – Диаграмма к таблице 9

Сравнение результатов исходного и контрольного срезов представлено в виде гистограммы на рисунке 20.

Как видно, количество обучающихся, уровень знаний которых оценивался на оценку «2» и «3», уменьшилось с одновременным ростом обучающихся на «4» и «5».

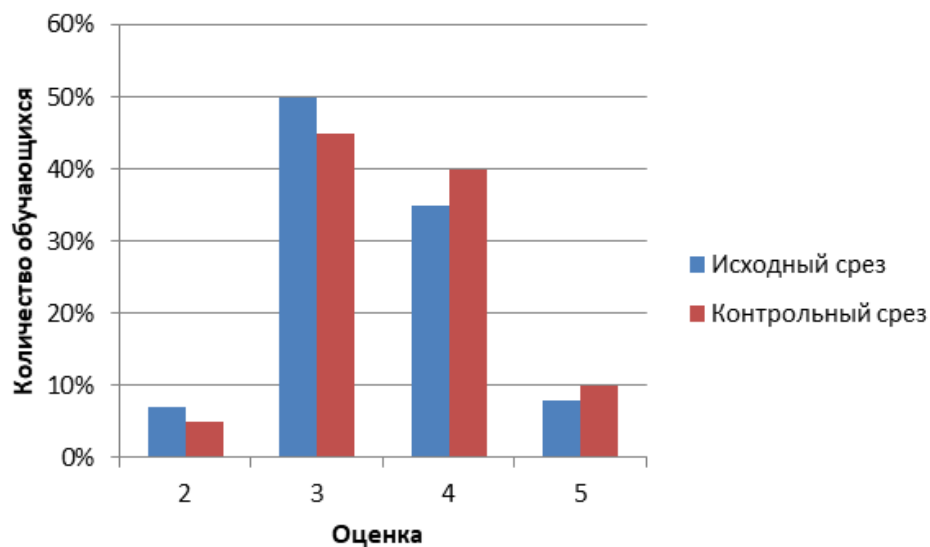


Рисунок 21 – Исходный и контрольный срез.

Контрольная группа, обучающиеся	Баллы
ГО	16
ПР	14
ОА	20
МА	7
ПА	13
КИ	15
РЫ	12
СО	10
ЛА	16
ЗЯ	18
ОР	13
СЕ	11
АВ	17
НЕ	9
ЧА	17

Экспериментальная группа, обучающиеся	Баллы
КУ	8
ИЛ	17
ОЛ	16
БО	10
ЮР	19
ЧР	9
БЕ	14
РЯ	10
БР	11
КР	15
ШВ	12
МЕ	6
КА	15
ИН	16
ОБ	13

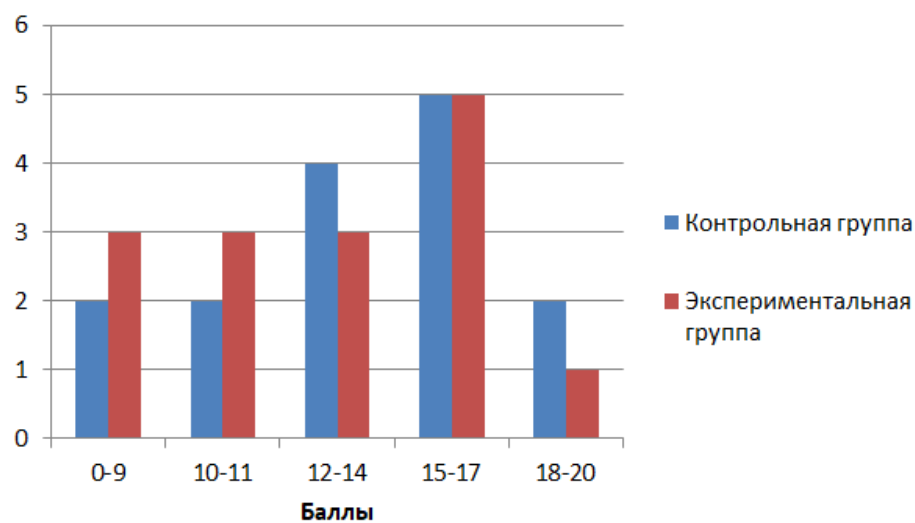


Рисунок 22 – Сравнимые группы.

Представленные результаты касаются обучающихся двух классов в целом.

Вместе с тем, в ходе эксперимента на констатирующем этапе было проведено деление обучающихся на 2 группы, основываясь на результатах исходного среза.

Контрольная и экспериментальная группы включали по 15 человек каждая.

Формирующий этап включал изучение основного материала и был нацелен на формирование и повышение предметных компетенций обучающихся.

Приведем баллы, полученные в этих группах по итогам контролирующего этапа (рисунок 22).

В результате данного этапа экспериментального исследования была разработана система задач и домашних заданий для «Обобщающее повторение по основным темам к профильному ЕГЭ по математике» для учащихся 11 классов в рамках базовой и углубленной программы общеобразовательной школы.

Выводы по второй главе

Вторая глава настоящей работы посвящена практическому содержанию итоговой аттестации по математике в российской и зарубежной школе.

Проведен сравнительный анализ предметного экзамена SAT в США и российского профильного ЕГЭ по математике.

Разобраны наиболее сложные задачи и экзаменационные задания в США, для решения которых требуются знания, выходящие за рамки российской программы.

Отдельно рассмотрена важность формирования аналитических умений обучающихся в разрезе повышения предметных компетенций обучающихся к итоговым аттестациям.

Предложена экспериментальная программа для курса занятий «Обобщающее повторение по основным темам к профильному ЕГЭ по математике». Приведен конспект урока по одной из тем элективного курса. По итогам занятий в 11 классе БОУ г. Омска «Средняя общеобразовательная школа №95 с углубленным изучением отдельных предметов» проведен педагогический эксперимент и представлены его результаты.

Апробация материала, составленного по итогам сравнительного анализа итоговых аттестаций в различных странах, показала повышенный интерес со стороны обучающихся и способствовала повышению их предметных компетенций в преддверии выпускных экзаменов.

Заключение

В условиях существующего противоречия между необходимостью формирования предметных компетенций обучающихся и недостаточностью сравнительного анализа с итоговыми аттестациями в других странах в работе рассмотрена проблема определения особенностей, сходства и различия выпускных испытаний в России и некоторых других стран.

Россия покинула программы Болонского процесса, однако, изучение результатов итоговых аттестаций в разных странах остается весьма актуальным. В работе были выявлены особенности итоговых аттестаций выпускников общеобразовательных школ в России и проведен их сравнительный анализ с экзаменационными испытаниями в зарубежных странах.

Подтверждена гипотеза исследования о том, что сравнительный анализ итоговых аттестаций по математике в российской и зарубежной школе способствует повышению качества математической подготовки и конкурентоспособности знаний, получаемых в отечественных общеобразовательных учебных заведениях.

Была изучена нормативная база, которая регулирует организацию итоговых аттестаций, проанализированы учебно-методические пособия и материалы, используемые в процессе подготовки экзаменационных испытаний по математике.

Проведён сравнительный анализ содержания собственно итоговых аттестаций и экзаменационных материалов в различных странах. Проанализирована типология математических задач, предлагаемых на итоговых аттестациях и исследовать типовые ошибки учащихся и основные затруднения при формировании аналитических умений обучающихся в разрезе подготовки к итоговым аттестациям по математике.

Разобранные в работе задачи наглядно иллюстрируют достоинства и недостатки итоговых аттестаций, предлагаемых обучающимся российской школы. В работе сформулировать ключевые темы для подготовки к экзаменационным испытаниям, предложена система ключевых задач в рамках предложенной технологии обучения.

Проведен педагогический эксперимент и описаны его результаты. В качестве контрольного задания по итогам занятий обучающимся российской школы был предложен тест по математике, предусмотренный в США при профильном образовании. Полученный результат показал эффективность занятий по подготовке к итоговым аттестациям и продемонстрировал пользу зарубежного опыта при подготовке выпускников общеобразовательных школ.

Таким образом, поставленные задачи исследования разрешены, и цель данной работы достигнута.

Список используемой литературы

1. Антанасян Л.С. Геометрия. Учебник для 10-11 класса. М.: Просвещение. 2021. 232с.
2. Батышева С.Я. Профессиональная педагогика. М, 1999. 146с.
3. Белканов Н.А. Оценка советской школы и педагогики 1920-х годов в педагогической советологии: Автореф. дис...докт. пед. наук. Елец, 2003.
4. Вальдман И.А., Боченков С.А. Интерпретация и представление результатов ЕГЭ: проблемы и возможные решения / Журнал «Вопросы образования», 2013. № 3.
5. Воробьева А.В. Исследовательские компетенции современного школьника: сущность и содержание. // Журнал научных публикаций «Дискуссия», 2013. №3.
6. Жубаева Ш.К. Формирование аналитических умений как средство подготовки к итоговой аттестации по математике в российской школе. // «Молодежь. Наука. Общество»: Всероссийская студенческая научно – практическая междисциплинарная конференция (Тольятти, 20-24 декабря 2021 года): сборник студенческих работ / отв. за вып. С.Х. Петерайтис. Тольятти: Изд-во ТГУ, 2021
7. Зингер В.А. Аттестация учащихся в школьном образовании США: Автореф. дис...канд. пед. наук. Санкт-Петербург. 2003.
8. Зорина, Л.Я. Дидактические основы формирования системности знаний старшеклассников. М. : «Педагогика». 1978.
9. Иванюк М. Е., Липилина В. В., Максютин А. А. Проблемы реализации ФГОС при обучении математике в основной и старшей общеобразовательной школе: монография /. М-во образ. и науки РФ. Самара : Порто-принт. 2014. 328 с.

10. Исмаилов Э.. Сравнительно-педагогический анализ систем среднего профессионального образования Швеции и России: Автореф. дис...докт. пед. наук. Калининград : 2004.
11. Калинин, А.Ю. Геометрия. 10-11 классы. / Калинин А.Ю., Терешин Д.А. Новое изд., испр. и доп. М.: МЦНМО. 2011. 640с.
12. Калинин, А.Ю. Стереометрия 11: экспериментальный учебник для школ с углублённым изучением математики/ Калинин А.Ю., Терешин Д.А. – М.: МФТИ, 2005. – 336 с.
13. Капнист П. Классицизм как необходимая основа гимназического образования. Выпуск II. Исторический очерк развития среднего образования в Германии. М. : 1900.
14. Кларк Маргарит. Что является наиболее важным в системах оценки достижений учащихся: основные ориентиры // Качество образования в Евразии. 2013. №1. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/chto-yavlyayetsya-naibolee-vazhnym-v-sistemah-otsenki-dostizheniy-uchaschihsya-osnovnye-orientiry> (дата обращения: 18.09.2022).
15. Кульнич С.В. Современный урок. Часть III: Проблемные уроки. Научнопрактич. пособие для учителей, студентов и аспирантов пед. учебн. завед., слушателей ИПК. Ростов н/Д: изд-во «Учитель». 2006. 288 с.
16. Лаврищева А.В., Митющенко Е.В. Отдельные аспекты обучения решению алгебраических уравнений в разрезе задачи формирования исследовательских компетенций в 7-9 классах // Российская наука в современном мире. Сборник статей XLII международной научно-практической конференции. Москва, 2021. с. 163-165.
17. Липилина В. И., Жубаева Ш.К. Некоторые аспекты сравнительного анализа содержания итоговых аттестаций по математике для выпускников школ в России и США. // «Актуальные проблемы обучения математике в школе и вузе: от науки к практике» : VII Международная научно – практическая конференция (к 80 – летию со дня рождения

В.А. Гусева), Москва, МПГУ, 18-19 ноября 2022 года; сборник материалов конференции.

18. Малькова З.А. Школа и педагогика за рубежом. М. : 1983.
19. Национальный экзаменационный центр: [Электронный ресурс]. URL: <https://naec.ge/#/ge/post/2464> (Дата обращения: 18.09.2022).
20. Никольский С.М., Потапов М.К., Решетников Н.Н., Шевкин А.В. Алгебра и начала математического анализа. Учебник для 10 класса. М. : Просвещение. 2009. 430с.
21. Никольский С.М., Потапов М.К., Решетников Н.Н., Шевкин А.В. Алгебра и начала математического анализа. Учебник для 10 класса. М. : Просвещение. 2021. 436с.
22. Оценка различных вариантов проведения Государственной итоговой аттестации в 2020 году с учетом международного опыта. URL: https://ioe.hse.ru/sao_ege (дата обращения: 19.09.2022).
23. Подготовка к ЕГЭ и ОГЭ по математике: [Электронный ресурс]. URL: <https://math100.ru/ege-profil2022/> (Дата обращения: 19.09.2022).
24. Подласый И.П. Педагогика. Теория и технология обучения: Учебник для вузов. М. : Эксмо. 2015. 343с.
25. Приказ Министерства образования и науки Республики Казахстан от 18 марта 2008 года № 125 «Об утверждении Типовых правил проведения текущего контроля успеваемости, промежуточной и итоговой аттестации обучающихся для организаций среднего, технического и профессионального, послесреднего образования».
26. Приказ Минпросвещения России «Об утверждении порядка проведения государственной итоговой аттестации по образовательным программам среднего общего образования» от 07.11.2018г., №190/1512.
27. Профильный ЕГЭ по математике: [Электронный ресурс]. URL: <https://blog.maximumtest.ru/post/profilnyj-ege-po-matematike-chto-nuzhno-znat.html> (Дата обращения: 16.10.2022).

28. Решетникова О.А. Системы национальных экзаменов в ряде стран СНГ: особенности и общие проблемы // Качество образования в Евразии. 2013. №1. URL:<https://cyberleninka.ru/article/n/sistemy-natsionalnyh-ekzamenov-v-ryade-stran-sng-osobennosti-i-obshchie-problemy> (дата обращения: 18.09.2022).
29. Сборник задач по геометрии с решениями. Более 80 задач по геометрии с экзамена ЕНТ. [Электронный ресурс]. <https://4ege.ru/matematika/52248-sbornik-zadach-po-geometrii-s-resheniyami.html>. (Дата обращения: 19.09.2022).
30. Свобода, доступность, качество: [Электронный ресурс]. URL: <https://forpost-sz.ru/a/2018-09-28/svoboda-dostupnost-kachestvo-nemeckaya-sistema-obrazovaniya-spustya-dvadcat-let-s> (Дата обращения: 18.09.2022).
31. Ушинский К.Д. О народности и общественном воспитании. Собр. соч., т. 2. М. : 1948.
32. Федеральный государственный образовательный стандарт среднего (полного) общего образования [Электронный ресурс]: // Министерство образования и науки Российской Федерации. URL : <https://fgos.ru/fgos/fgos-soo/> (дата обращения: 27.09.2022).
33. Федеральный закон «Об образовании в Российской Федерации» от 29.12.2012г., №273-ФЗ.
34. Фунтиков Р. А. Методика проведения курса по выбору «Решение задач с экономическим содержанием» для учащихся 10-го класса // Молодой ученый. - 2018 - №34 - с.119-123.
35. Шанин Теодор. История России XX века с позиций сквозной «третьемирности» // Отечественная история. М., 1999. №6
36. Ira K. Wolf, SAT Subject Test: Math Level 1 / Barrons Educational Services. 2018. 400p.
37. John Chung, SAT Math: Designed to help students / Dr. Chung's Test Prep. 2021. 588p.

38. King's Scholarship Awards. [Электронный ресурс]. <https://www.etoncollege.com/admissions/scholarships-and-awards/kings-scholarships/>. (Дата обращения: 27.10.2022).
39. Richard Ku, SAT Subject Test: Math Level 2 / Barrons Educational Services. 2018. 360p.
40. Organisation for Economic Co-operation and Development. PISA. [Электронный ресурс]. URL: <https://www.oecd.org/pisa> (Дата обращения: 06.11.2022).
41. SAT и ACT: Для поступления в университеты и колледжи США: [Электронный ресурс]. URL: <https://www.education-medelle.com/articles/sat-i-act-ekzameny-dlya-postupleniya-v-universitety-i-kolledzhi-ssha.html> (Дата обращения: 16.10.2022).
42. SAT Subject Math Level 1&2: Practice tests and explanations: [Электронный ресурс]. URL: <https://www.cracksat.net/sat2/math/> (Дата обращения: 16.10.2022).
43. Studienkolleg-münchen. [Электронный ресурс] <http://xn--studienkolleg-mnchen-3ec.de/downloadbereich>. (Дата обращения: 27.10.2022).
44. TIMSS & PIRLS. International Study Center. [Электронный ресурс]. URL: <https://timss.bc.edu/timss2019/index.html> (Дата обращения: 06.11.2022).