МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Тольяттинский государственный университет»

Институт математики, физики и информационных технологий
(наименование института полностью)

Кафедра «Высшая математика и математическое образование»
(наименование)

44.04.01 Педагогическое образование
(код и наименование направления подготовки)

Математическое образование
(направленность (профиль))

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА (МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ)

на тему «Групповая форма организации учебной деятельности старшеклассников как средство реализации многосенсорного подхода в обучении математике»

Обучающийся М.Ю. Бамбуляк
(Инициалы Фамилия) (личная подпись)

Научный руководитель д-р пед. наук, профессор, Р.А. Утеева
(ученая степень (при наличии), ученое звание (при наличии), Инициалы Фамилия)

Тольятти 2022

Оглавление

Введение

Актуальность и научная значимость настоящего исследования.

Общество быстро меняется и то, что изучают учащиеся сегодня, должно быть актуальным и ориентированным на будущее. В связи с этим в образовательное законодательство и стандарты вносятся изменения, направленные на решения проблемы внедрения современных достижений психологической науки в образовательный процесс [74, 109]. Данные изменения нацелены на то, чтобы создать ученику комфортные условия в старшей школе, повысить качество образования и мотивацию ученика, сформировать образовательную среду, в которой ученику отводится активная роль в собственном обучении и развитии.

Для обеспечения механизмов саморазвития учащегося учитель может воспользоваться предшествующим теоретическим и эмпирическим опытом, который нашел отражение в прикладной психологии, получившим название нейролингвистического программирования (НЛП). Многосенсорное (или мультисенсорное) обучение является одной из основных техник НЛП, которая позволяет ученикам не только получать информацию через ведущий канал восприятия, но и развивать другие сенсорные каналы, что способствует лучшему пониманию и запоминанию учебного материала [48, 107].

Ученики могут воспринимать один и тот же материал по-разному. Не совсем точное понимание восприятия школьниками учебной информации может быть связано с несоответствием повествовательного стиля – стиля подачи информации (стиля учителя, учебника) познавательному стилю ученика, несоответствием стиля восприятия конкретного ученика стилю большинства учащихся класса. Поэтому при объяснении нового понятия, новой темы желательно учитывать ведущую модальность каждого ученика. Но при этом при закреплении учебного материала можно организовать работу учащихся таким образом, чтобы они выполняли задания различного типа, использовали разные стратегии. В этом случае будет происходить развитие «неприоритетных» модальностей. При контроле знаний, чтобы понизить уровень тревожности учащихся, можно предложить задания с учетом стиля каждого ученика. Данная методика, предложенная Б.Л. Ливер (Betty Lou Leaver) [36], состоит в том, что введение нового материала следует осуществлять в предпочитаемой для ученика модальности, закрепление и отработку – в наименее предпочитаемом стиле, контроль – в предпочитаемом стиле. Таким образом можно осуществлять развитие разных сенсорных каналов.

Оценки учителей, психологов, исследователей [27, 40, 52, 102] совпадают с нашими наблюдениями и показывают, что в обычном классе из 30 человек:

– примерно у 73 % учеников достаточно развиты аудиальные, визуальные и кинестетические способности;

– примерно 20 % учащихся составляют так называемые «трансляторы», преимущественно или визуалы «В», или аудиалы «А», или кинестетики «К»;

– примерно 7 % учащихся испытывают трудности в обучении по причинам, не связанным с особенностями восприятия.

В этой связи становится актуальным применение в процессе обучения дифференциации с учетом индивидуальных психофизиологических особенностей учащихся. По образному выражению Ш.А. Амонашвили, «пользоваться различными педагогическими методиками без учета индивидуальных особенностей учащегося – значит уподобиться врачу, который различает лекарства по цвету и по форме, не зная о силе и характере воздействия на больного» [1].

Проблему переориентации образования с учетом психофизиологических особенностей учащихся рассматривали многие психологи – Л.С. Выготский [20], П.Я. Гальперин [22], М.А. Холодная [76], И.С. Якиманская [81, 83, 84] и другие, они показали связь когнитивных стилей с более глубоким усвоением материала.

К важным психофизиологическим свойствам головного мозга человека относится и его функциональная асимметрия (ФАМ), под которой понимают неравнозначность функциональных структур правого и левого полушарий мозга. Считается, что правое полушарие способно воспринимать информацию в целом, работать сразу по многим каналам и, в условиях недостатка информации, восстанавливать целое по его частям. Левое полушарие обеспечивает способность к речи, анализу, детализированию, отвечает за абстрактно-логический компонент в мышлении [34].

Математика, как предмет, позволяет представлять одну и ту же информацию в различной форме. Например, при изучении геометрии, при выходе в пространство мы активизируем работу правого полушария. При этом нередко при решении геометрических задач мы используем алгебру, а алгебраических материал можно интерпретировать – визуализировать с помощью геометрического представления. Так, при использовании теоремы Пифагора, учащиеся сначала работают с чертежом, доказывают наличие прямого угла в треугольнике, а затем составляют и решают квадратное уравнение, то есть применяют алгебраический метод. И наоборот, практика показывает, что для некоторых учащихся визуальное доказательство формул сокращенного умножения с помощью геометрических фигур и работы с их площадями оказывается легче, как для понимания, так и для запоминания. Существует также большой класс задач, который решается графически, геометрически, так и алгебраическим способом.

Таким образом, у учителей появляется возможность развития у учащихся недоминирующего стиля, а у учеников при этом – возможность выбора наиболее удобного для них способа решения задач при работе с новым материалом и при контроле полученных знаний.

Обучая, многие учителя претендуют на многосенсорное представление информации, чтобы активизировать работу сразу нескольких анализаторов. Поэтому для обеспечения полноты восприятия необходимо, чтобы вербально-логическая форма обязательно считалась с образной, зрительное восприятие – с практическими действиями [14, 27, 36, 39, 41, 59, 99, 105].

М. Гриндер (Michael Grinder) считает, что такой подход будет воздействовать на большую часть учеников и позволит им получать информацию, выбрав свой входной канал, усилит дополнительные сенсорные каналы учеников [102].

Развитие человека как личности требует учета как возрастных, психофизиологических особенностей, так и субъектного опыта. По определению И.С. Якиманской, «под субъектным опытом понимается опыт жизнедеятельности, накопленный человеком в ходе практики его непосредственного общения с миром людей и вещей в процессе индивидуального онтогенетического развития» [81].

В.В. Сериков пришел к выводу, что «наблюдения и сведения, накопленные детьми в их разнообразной жизнедеятельности, используются для достижения дидактических целей:

– для пробуждения интереса к новым знаниям и тем самым стимулирования поступательного движения учебного познания;
– как составная часть того фактического материала, на основе анализа и обобщения которого формируются новые понятия и устанавливаются закономерности;
– для иллюстрации и подтверждения рассмотренных на уроке теоретических положений; г) как объект применения усвоенных научных знаний» [63].

Достаточно сложно учитывать психофизиологические особенности при обучении, как отмечает Ф.И. Копелевич, и в то же время подобное представление учебного процесса представляется одним из эффективных путей гуманизации образования. По мнению автора, именно учет психофизиологических особенностей и субъектного опыта учащихся в процессе обучения обеспечивает во многом понимание учебного материала [32].

Таким образом, немаловажным элементом учебной деятельности как учителя, так и учеников является учет субъективного опыта последних.

Как показывает практика, недостаточно изменить содержание математического образования, подобрать или разработать задания, учитывающие индивидуальные особенности учеников, необходимо выстроить систему форм учебной деятельности учащихся на уроке и при организации домашней работы, позволяющей школьникам обучаться на соответствующем для каждого из них уровне возможностей, знаний и умений, интересов.

Одной из таких форм организации учебной деятельности является групповая форма работы, которая позволяет реализовать принципы уровневой дифференциации и дает возможность ученику стать равноправным участником образовательного процесса.

Существуют различные подходы к пониманию уровневой дифференциации, которые исследовали многие российские ученые, среди них В.Г. Болтянский [12], Г.Д. Глейзер [23], В.А. Гусев [24], Г.В. Дорофеев [25], С.Б. Суворова [25], Л.В. Кузнецова [25], Ю.М. Колягин [29], И.Э. Унт [70], Р.А. Утеева [71, 73]. Отметим, что большинство исследователей едины в том, что основной целью процесса дифференциации на современном этапе является максимальное развитие личности каждого учащегося с учетом его индивидуальных особенностей.

Несмотря на то, что проблемы дифференцированного и многосенсорного обучения исследуются достаточно давно и им уделяется большое внимание, существуют ряд вопросов, которые недостаточно полно освещены в педагогической литературе. В их число можно включить:

– выбор приемов и методов внутренней дифференциации в старших классах школы (в том числе, и в норвежской старшей школе), где обучаются дети с разными уровнем и степенью подготовки;
– критерии отбора учебного материала для различных уровней обучения;

– уровень внедрения современных достижений психологической науки в теорию и особенно в практику процесса обучения.

Таким образом, актуальность проблемы исследования обусловлена сложившимися к настоящему времени противоречиями между:

– необходимостью реализации дифференцированного подхода в процессе многосенсорного обучения и отсутствием для этого необходимого теоретического обоснования;

– потребностью повышения эффективности педагогических средств диагностики мыслительных стратегий учащихся и недостаточной разработанностью теоретических основ процессов ее моделирования;

– необходимостью комплексного использования техник НЛП в условиях внутренней дифференциации и недостаточным его обоснованием.

Все выше сказанное определяет актуальность **проблемы исследования:** выявление теоретических и методических основ групповой формы организации учебной деятельность старшеклассников в ходе реализации многосенсорного подхода в обучении математике.

Актуальность рассматриваемой проблемы обусловила выбор **темы** научного исследования: «Групповая форма организации учебной деятельности старшеклассников как средство реализации многосенсорного подхода в обучении математике»

Объект исследования – процесс обучения математике в старших классах школы (11-13 классах норвежской старшей школы).

Предмет исследования – методическая система организации групповой работы на уроках математики как средство реализации многосенсорного подхода в обучении.

Цель исследования – выявить теоретические и методические основы групповой формы организации учебной деятельности старшеклассников в ходе реализации многосенсорного подхода в обучении математике и подтвердить экспериментально эффективность разработанной методической системы.

Гипотеза исследования: групповая работа является эффективным способом организации учебной деятельности старшеклассников при многосенсорном подходе в обучении при выполнении следующих условий:

1) успешно диагностируется и определяется ведущая репрезентативная система;

2) используются различные подходы формирования групп учащихся с учетом ведущей модальности на разных этапах обучения;

3) осуществляется обратная связь «ученик-учитель», необходимая для корректировки дальнейшего обучения.

Для достижения поставленной цели и в соответствии с выдвинутой гипотезой были сформулированы следующие **задачи** исследования:

1. Ознакомиться с накопленным опытом – изучить научную литературу по проблеме исследования (многосенсорный подход, групповая работа, дифференциация).
2. Провести наблюдения за деятельностью учащихся и учителей в процессе обучения математике.
3. Провести тестирование экспериментальной и контрольной групп школьников и учителей для выявления их ведущих модальностей.
4. Разработать подборку заданий математического содержания с учетом индивидуальных особенностей восприятия учащихся, познавательных стилей и субъектного опыта учащихся.
5. Поверить в ходе педагогического эксперимента соответствие математических заданий, стиля их формулирования и подачи стилям восприятия учащимися.
6. Проанализировать и обобщить результаты исследования.

Теоретико-методологическую основу данного исследования составили работы В.Г. Болтянского [12], Г.Д. Глейзера [23], В.А. Гусева [24], Г.В. Дорофеева [25], С.Б. Суворовой [25], Л.В. Кузнецовой [25], Ю.М. Колягина [29], И.Э. Унт [70], Р.А. Утеевой [71, 73].

Базовыми для настоящего исследования явились также работы Л.С. Выготского [20], П.Я. Гальперина [22], М.А. Холодной [76], И.С. Якиманской [81], [83], [84].

Для решения поставленных задач в процессе исследования применяется комплекс **теоретических и практических методов**: анализ литературы, систематизация и обобщение педагогического опыта (включая собственный опыт работы в средних и старших классах российской и норвежской общеобразовательных школ), педагогическое наблюдение за деятельностью учащихся, педагогический эксперимент, апробация учебных материалов в процессе обучения, количественный и качественный анализ полученных данных, обработка и обобщение результатов исследования.

Основные этапы исследования:

Этап 1 (2019-2020 гг.):

– анализ психолого-педагогической методической литературы, учебников по алгебре и геометрии для старших классов средней общеобразовательной школы России и старшей школы Норвегии;

– анализ нормативных документов (концепций, стандартов, программ, планов России и Норвегии);

– определение и формулирование проблемы, цели, предмета и объекта исследования;

– изучение и анализ опыта работы по данной проблеме (научно-исследовательская литература, практический опыт работы).

Этап 2 (2020-2021 гг.):

– подбор и разработка заданий с учетом индивидуальных особенностей учащихся по теме «Функция»;

– психологическое исследование учеников экспериментальной и контрольной групп с целью определения ведущей модальности.

Этап 3 (2021-2022):

– окончательная реализация формирующего эксперимента;

– обработка материалов апробации;

– проверка эффективности разработанной системы организации учебной деятельности учащихся старшей школы Норвегии;

– анализ и обобщение полученных результатов.

Опытно-экспериментальная база исследования: Старшая школа Трумсдален (Tromsdalen videregående skole), г. Тромсё, Норвегия и НИЛ «Школа математического развития и образования - 5+» ФГБОУ ВО «Тольяттинский государственный университет».

Научная новизна исследования заключается в предложенной методической системе организации учебного процесса в старших классах школы с использованием групповой деятельности и реализации многосенсорного подхода в обучении.

Теоретическая значимость исследования заключается в предложенной методике организации групповой деятельности для реализации многосенсорного подхода для общего развития и улучшения академических результатов в процессе обучения математике.

Практическая значимость исследования заключается в сформулированных рекомендациях по организации групповой деятельности учащихся и разработанной программе элективного курса «Задачи с практическим содержанием в теме Функция», целью которого является формирование готовности выпускников основной школы ответственно осуществлять выбор профиля обучения на старшей ступени, в соответствии с их способностями и интересами.

Достоверность и обоснованность результатов исследования обеспечивались сочетанием теоретических и практических методов исследования, анализом педагогической практики и личным опытом работы в общеобразовательной школе в России и старшей школе в Норвегии.

Личное участие автора в организации и проведении исследования состоит в выявлении методических особенностей и формулировании методических рекомендаций по формированию математической грамотности, умений и навыков учащихся при обучении функциям; разработке элективного курса по теме «Задачи с практическим содержанием в теме «Функция» в курсе алгебры общеобразовательной школы России и в курсе математики старшей школы Норвегии, разработке заданий по теме «Функция» для реализации многосенсорного подхода в обучении, разработке индивидуализированного дидактического материала – когнитивной карты по теме «Непрерывность функции в точке», разработке методического проекта по проектированию содержания темы «Исследование функции с помощью производной» для математического профиля в рамках технологии педагогических творческих мастерских, разработке контрольно-измерительных материалов по теме «Применение производной».

Апробация и внедрение результатов работы велись в течение всего исследования. Его результаты докладывались на следующих конференциях:

1. Конференция учителей «Новые учебные планы» (Nyelæreplaner) (Тромсё, Норвегия, ноябрь 2020 г.);
2. Педагогическая интернет-конференция «Школа завтрашнего дня» (Morgendagensskole) (Осло, январь 2021 г.);
3. Региональная конференция учителей (Fylkelærekonferansen) (Тромсё, Норвегия, май 2021 г.);
4. Научно-практическая конференция «Преемственность в обучении математике» (SUM) (Тромсё, Норвегия, сентябрь 2022 г.);

По теме исследования имеются 12 публикаций [4, 5, 6, 7, 8,9,55, 56, 86, 87, 88, 89].

На защиту выносятся:

1. Теоретические обоснования организации групповой формы учебной деятельности при многосенсорном подходе в обучении.

2. Методические рекомендации по организации групповой работы как средства реализации многосенсорного подхода в обучении математике.

3. Разработка заданий по теме «Функция» для реализации многосенсорного подхода в обучении при групповой форме работы.

4. Индивидуализированный дидактический материал – когнитивная карта по теме «Непрерывность функции в точке».

5. Элективный курс «Задачи с практическим содержанием в теме «Функция».

6. Педагогические творческие мастерские по теме «Исследование функции с помощью производной».

7. Контрольно-измерительные материалы по теме «Применение производной».

Структура магистерской диссертации. Работа состоит из введения, двух глав, заключения, содержит 25 рисунков, 24 таблицы, список используемой литературы (109 источников). Текст работы изложен на 114 страницах.

Глава 1. Теоретические основы многосенсорного подхода и групповой формы работы в старшей школе

1.1 Понятие многосенсорного подхода в обучении

В настоящее время основной целью образования является обеспечение индивидуального развития учащегося.

Цель Концепции развития математического образования в Российской Федерации, утвержденной в 2013 году – «вывести российское математическое образование на лидирующее положение в мире» [31]. Концепцией определены задачи развития математического образования, среди них: обеспечение отсутствия пробелов в базовых знаниях для каждого обучающегося, формирование у участников образовательных отношений установки «нет неспособных к математике детей», обеспечение уверенности в честной и адекватной задачам образования государственной итоговой аттестации, предоставление учителям инструментов диагностики(в том числе автоматизированной) и преодоления индивидуальных трудностей; обеспечение наличия общедоступных информационных ресурсов, необходимых для реализации учебных программ математического образования, в том числе в электронном формате, инструментов деятельности обучающихся и педагогов, применение современных технологий образовательного процесса [31].

Федеральный государственный образовательный стандарт (ФГОС) нового поколения предлагает использовать «системно-деятельностный подход, который обеспечивает формирование готовности обучающихся к саморазвитию, построение образовательной деятельности с учётом индивидуальных, возрастных, психологических особенностей обучающихся»[74]. С этой целью учитель может использовать методы и средства обучения, основанные на одном из современных направлений психологии – нейролингвистическом программировании (НЛП).

Константин Дмитриевич Ушинский говорил, что «если вы хотите, чтобы дитя усвоило что-нибудь прочно, то заставьте участвовать: ... зрение, ... голосовой орган, ... слух, ... мускульное чувство руки, ... призовите к участию осязание, обоняние и вкус ... При таком дружном содействии всех этапов в акте усвоения вы победите самую ленивую память» [38].

А. Эллис (Arthur Ellis) и Д. Фоутс (Jeffrey Fouts) отмечают, что: «Сущность индивидуальных стилей учебной деятельности заключается в том, что каждый из нас воспринимает и перерабатывает информацию по-разному, и поэтому преподаватель должен сделать все от него зависящее, чтобы уловить, каким способом ученик лучше всего усваивает материал…Типовые школьные задания ставят учащихся в неравное положение, давая одним преимущество перед другими» [78]. Учащиеся различаются не только по способам восприятия информации, но и по способам работы с ней на стадиях осмысления и переработки [59].

Многосенсорный (или мультисенсорный) подход в обучении (multisensory learning) предполагает построение учебного процесса и представление материала учащимся с учетом их индивидуальных особенностей восприятия и работы с информацией [99, 102, 106].

Д.Р. Рэйнс (Jenny R. Rains) в своем исследовании, опираясь на теоретические работы по педагогической психологии Л.С. Выготского [20] и других, и практический опыт, обосновывает важность использования многосенсорных материалов и техник при обучении математике школьников [105].

Т.Н. Веселова отмечает, что, несмотря на большое количество исследований, направленных на изучение особенностей восприятия информации человеком, остро стоит вопрос многосенсорного обучения, так как «возникает конфликт между стилем учащихся и стилем преподавания учителя, стилем, на который ориентированы средства обучения и/или стилем обучения одноклассников этого ученика» [14].

Автор делится своим опытом работы с так называемой группой учащихся, как «дети риска». По наблюдениям Т.Н. Веселовой [14], с этой группой относятся в основном кинестетики. По ее мнению, задания в учебниках не ориентированы на этих детей. Веселова описывает свои наблюдения и дает рекомендации по работе с учениками – кинестетиками следующим образом:

1) организовать работу при закреплении материала при помощи двигательной активности самого ребенка;
2) при общении с учащимися использовать жесты, прикосновения и типичную для них медленную скорость мыслительных процессов;
3) для привлечения внимания таких учеников важно обращаться к каждому по имени, по возможности, используя прикосновение;
4) организовать на уроках физическую активность учащихся, использовать приемы преувеличения при подаче информации.

Помимо вышеперечисленных рекомендаций, автор приводит примеры дидактических игр, а также других материалов, направленных на отработку новой лексики, разработанные с учетом особенностей восприятия кинестетиков.

И.Л. Садовская [59, 60] предлагает классификацию методов обучения по способам фиксации, трансляции и восприятия информации, на аудиальные, визуальные, кинестетические и полимодальные, которые в свою очередь подразделяет на аудиовизуальные, визуально-кинестетические, аудиально-кинестетические и аудиовизуально-кинестетические. Автор, ссылаясь на опыт великих методистов прошлого, отмечает, что обучение должно быть полимодальным, то есть при правильной организации обучения информация должна транслироваться и восприниматься по всем информационным каналам. Среди методических приемов в составе метода обучения, И.Л. Садовская предлагает выделить отдельную группу «приемы оптимизации восприятия информации для повышения эффективности методов обучения» [59].

М.В. Мельников обосновывает использование полимодального представления информации в процессе профессиональной подготовки студентов технических университетов для повышения ее эффективности. Автор разработал программу спецкурса «Речевое общение как основа речевой компетентности будущего специалиста». Он считает, что «полимодальное представление информации обеспечивает дифференцированный подход к обучающимся в соответствии с их личными особенностями восприятия и обработки информации» [39].

В качестве подтверждения актуальности использования данного подхода М.В. Мельников приводит объективные причины, связанные с интеграцией российского образования в общеевропейскую систему. Опираясь на работы отечественных и зарубежных исследователей, таких как В.А. Сластенин [65], Н.В. Кузьмина [35], Т.С. Полякова [53], Д. Рутенберг [57] и другие, автор предлагает использовать следующую схему диагностики индивидуальных особенностей учащихся:

– первичное наблюдение;
– выбор методик диагностики индивидуальных особенностей;
– диагностическое заключение;
– выбор форм представления учебного материала на основе диагностического заключения.

При этом целью диагностики является не столько выявление проблем в процессе формирования речевой компетентности обучающихся (студентов технического вуза в контексте исследования автора), как выявление индивидуальных особенностей учащихся с последующей организацией полимодального представления информации.

М.В. Мельников отмечает, что программа спецкурса, в которой представлена поэтапная работа с текстом, разработаны задания, тесты с учетом индивидуальных особенностей восприятия, способствует «оптимизации овладения всех видов речевой деятельности, профессиональных знаний и умений, коммуникативной речевой деятельности и поведения» [39].

Э.А. Мусенова [48] описала разработанную и апробированную ей модель диагностики нейропсихологических детерминант с целью комплексного применения техник НЛП в реализации личностно-ориентированного обучения в предмете «Химия». Автор отмечает, что полимодальное представление информации, соответствие стилей ученика и учителя, визуализация, использование позитивных предложений на уроке позволяет улучшить коммуникацию участников процессов обучения: учитель лучше понимает мыслительные стратегии учеников, учащиеся лучше воспринимают учебный материал. При этом увеличивается время включенности учащихся в активную познавательную деятельность, повышается мотивация учащихся.

1.2 Анализ опыта работы по применению многосенсорного подхода в обучении

Согласно концепции НЛП, в формировании индивидуальной модели познания окружающего мира участвуют две системы: репрезентативная система отвечает за восприятие информации человеком, ведущая система – за обработку и хранение информации [59, 108]. Термины «репрезентативная система» (representational system) и «ведущая система» (lead system) были предложены основателями НЛП Р. Бендлером (Richard Bandler) и Д. Гриндером (John Grinder) [90, 91, 100, 101], они же предложили термины для обозначения разных групп по способам восприятия: «аудиалы», «визуалы», «кинестетики» (от английского: auditory, visual, kinesthetic) [10, 90]. Соответствующим образом выделяют визуальную, аудиальную, кинестетическую (в последнее время даже дигитальную) системы восприятия. Также используется термин «предпочитаемой репрезентативной системы», где понимается, что это система восприятия, которую человек использует чаще других и проводит в ней больше времени. Ведущей системой, в свою очередь, называют предпочитаемый внутренний процесс для получения допуска к информации, т.е. ее обработке и хранению [59].

Многие учителя, использующие в своей работе техники НЛП, отмечают, что так как ученики отличаются по способам восприятия, переработки и усвоения учебного материала, то в процессе обучения желательно не только презентовать материал с учетом ведущей репрезентативной системы, но и организовать работу по его усвоению [108]. При этом Ю.А. Труфанова рекомендует использовать индивидуальный подход при работе с учениками с разными модальностями [69]. Например, для визуалов, которые лучше воспринимают информацию через зрительных канал, объяснять материал, используя видеоматериалы, записи на доске, в книге. При работе с информацией, такие ученики предпочитают делать «карты памяти», оформлять новые знания в виде таблиц, схем. Для аудиалов, которые предпочитают использовать слуховой канал, можно использовать звуковые файлы, формулировать задания и давать рекомендации в устной форме. Как отмечает Л.Д. Хирч (L.D. Hirsch), такие ученики – хорошие слушатели и они стараются запомнить сказанное и обработать полученную информацию, обсуждая с другими [103]. Групповая работа часто является эффективным способом организации учебного процесса для таких учеников, при этом следует учитывать, что шум может вызывать дискомфорт у таких учеников и быть препятствием в их учебной деятельности.

Что касается учеников-кинестетиков, то было замечено, что они лучше усваивают материал, работая у доски, используя моторные навыки, например, вырезая и конструируя модели фигур, строя графики функций с использованием таких программных средств, как GeoGebra, участвуя в ролевых играх.

И.Л. Садовская подтверждает это наблюдение в своем исследовании [59], замечая что принадлежность студентов к определенной группе по восприятию в значительно мере определяет успешность обучения, и если, по наблюдению автора, аудиалы и визуалы достаточно хорошо справляются с учебным материалом по предметам при традиционном обучении, то «кинестеты неизбежно попадают в группу риска».

Таким образом, мы приходим к выводу, что одной из основных задач учителя в реализации личностно-ориентированного обучения является организация учебного процесса с учетом индивидуальных особенностей учащегося и развития у него всех сенсорных каналов.

При этом, как отмечает М.А. Павлова [108], важными условиями эффективности урока с позиций НЛП являются следующие:

1) Урок начинается с позитивного якоря (якорь – это любое действие, которое запускает ряд внутренних реакций).
2) Создается мотивация на обучение.
3) Дается новый материал, использую все три модальности (визуальную, аудиальную, кинестетическую).
4) Непонимание, ошибка используется как «дверь к пониманию».
5) Успехи ученика сравниваются с его собственными прошлыми достижениями.

В качестве позитивного якоря можно использовать музыкальный фрагмент, чтобы переключить внимание учеников на работу в аудиальном канале, или начинать урок с хлопков, предложив ученикам подстроиться к ритму, хлопая в такт, таким образом, включив в работу три модальности и настроив учащихся на полимодальное представление материала.

Для положительной мотивации можно использовать прием обращения к приятным воспоминаниям, например, попросить учащихся закрыть глаза и подумать о каком-нибудь приятном моменте. Это может быть подарок, сюрприз, путешествие, поход, каникулы и т.д. Затем попросить их открыть глаза и прочитать тему урока, условие задачи, затем вернуться к приятным воспоминаниям, закрыв глаза и повторить процесс несколько раз.

М.А. Павлова называет эту технику «интеграцией якоря» и советует начинать обучение с ощущений радости и удовольствия [108].

В качестве якоря можно также использовать рукопожатия, а для создания положительной мотивации можно обсудить какое-нибудь приятное событие, произошедшее в классе. Например, футбольный матч, спортивное состязание, концерт или выступление, в котором принимали участие ученики класса. Для создания положительной мотивации можно использовать образное мышление школьников и предложить им представить картинку, где они испытывают радость и удовольствие от хорошо проделанной работы, к примеру, от решенной контрольной работы.

Н.Ф. Талызина и Ю.В. Карпов отмечают, что «дети различаются между собой тем, в каком плане мыслительной деятельности они могут первоначально выполнить новый прием... одни выполняют (его) сразу в словесно-логическом плане, другие – в наглядно-образном, третьи – только в наглядно-действенном плане. Эта качественная особенность... носит устойчивый для данного ребенка характер» [67]. С точки зрения НЛП и методов обучения, интерпретируют эту информацию следующим образом: в словесно-логическом плане выполняют прием аудиалы, в наглядно-образном – визуалы, в наглядно-действенном – кинестетики (или кинестеты) [59, 67].

Многие отечественные ученые, дидакты, психологи работали и работают над проблемами психологии усвоения знаний, среди них, Ираида Сергеевна Якиманская, которая считает одной из главных задач обучения, создание условий для всестороннего развития личности, отмечая, что для «характеристики и оценки умственного развития ученика важно отслеживать не только уровень овладения учащимся учебного содержания, но и то, какими способами учебной работы это усвоение достигнуто» [80].

Большое внимание в своей работе она уделяет формированию пространственного мышления при обучении математике, так как считает, что именно оно составляет основу успешности математического образования, также «характеризует общую умственную культуру человека». Под руководством И.С. Якиманской разработаны психолого-дидактические материалы, целью которых является выявление и объективная оценка пространственного мышления учащихся [79, 80, 82]. Задания также могут использоваться и на этапе отработки теории.

Учитель может спланировать и организовать индивидуальную работу с каждым учеником, опираясь также на субъективный опыт ученика, учитывая «уровень развития его восприятия, памяти, мышления» [80, С. 105].

Одна из основных психологических теорий усвоения связана с именем Петра Яковлевича Гальперина, который решал задачу, как определить условия, при которых ученик будет действовать «как надо» и неизбежно придет к заранее намеченным результатам [16, 21, 22]. Поскольку, как доказал Лев Семенович Выготский, знания усваиваются только в ходе работы учащегося с этими знаниями [19, 20].

П.Я. Гальперин является автором теории поэтапного формирования умственных действий, с помощью которой обучение строится таким образом, чтобы ученик вначале понял какой материал надо усвоить и как с ним работать, затем организовать работу ученика так, чтобы иметь возможность контролировать каждый его шаг, после чего осуществить переход от пошагового контроля к самоконтролю [16, 21].

Таким образом, реализация многосенсорного подхода в обучении, в нашем понимании, состоит не только в том, чтобы предоставлять информацию учащимся, используя по возможности три модальности [50, 99, 105, 107], но и в том, чтобы на разных этапах обучения давать каждому ученику возможность перерабатывать информацию удобным для него способом, при этом создавая условия для развития его репрезентативных систем [4, 6, 39, 59, 87].

1.3 Групповая форма организации учебной деятельности учащихся

Групповая форма обучения является одной из форм организации учебно-познавательной деятельности учащихся в школе наряду с фронтальной, коллективной, парной и индивидуальной. Групповой подход в организации учебного процесса был предметом исследования многих ученых, среди них М.Д. Виноградова [15], В.В. Котов [33], В.К. Дьяченко [26], И.М. Чередов [77], Ю.К. Бабанский [3], М.Н. Скаткин [64] и другие. Особое внимание исследованию теоретических основ и методических особенностей организации групповой формы учебной деятельности уделено в работах Р.А. Утеевой [72, 73].

Автор отмечает, что только групповая и индивидуальная формы учебной деятельности «допускают дифференциацию» и определяет групповой формой такой способ организации учебной деятельности учащихся на уроке математики, «если:

– перед всеми типологическими группами одновременно поставлена некоторая учебная цель, как общая цель для учащихся данной группы;

– содержание задания одинаково для всех типологических групп, либо дифференцированно с учетом особенностей этих групп;

– в основе формы лежит коллективная деятельность членов группы, реализующая отношение «деятельность учителя – деятельность группы – деятельность учащегося» (а также несамостоятельная индивидуальная деятельность каждого учащегося);

– всем учащимся оказывается одинаковая помощь со стороны учителя в виде общих указаний без учета особенностей типологических групп школьников и индивидуальных особенностей каждого и специальная помощь каждой типологической группе в виде дополнительных указаний с учетом их особенностей;

– руководство процессом выполнения задания осуществляет член данной группы;

– подводятся итоги деятельности каждой группы» [73].

Обратим внимание, что касательно 5-го признака (руководство процессом…) автор уточняет, что «групповая форма учебной деятельности учащихся требует от учителя организации работы звеньевых или консультантов, которые осуществляют на уроке руководство деятельностью группы»[73].

Р.А. Утеева выделяет единую и дифференцированную формы определению групповой формы учебной деятельности, отмечая, что «при единой форме групповой работы все группы выполняют одинаковые по содержанию задания, а при дифференцированной – дифференцированные задания, построенные с учетом особенностей каждой типологической группы». Автор делает вывод, что единая и дифференцированная групповая формы учебной деятельности «могут быть эффективно организованы на любом этапе урока» и рассматривает особенности организации групповой формы работы на различных этапах: изучения нового материала; первичного применения знаний; формирования навыков и умений; проверки знаний и умений [73].

В структуре взаимосвязи форм учебной деятельности учащихся, полученной Р.А. Утеевой: $Ф \rightarrow К \rightarrow Г_е \rightarrow Г_д \rightarrow И_е \rightarrow И_д$ (где: Ф – фронтальная, К – коллективная, Г – групповая, И – индивидуальная, е – единая, д – дифференцированная), с увеличением степени самостоятельности учащихся по мере перехода от одной форме к следующей, групповая форма занимает центральное место [73].

Выделяя типологические группы, Р.А. Утеева предлагает четыре группы по их уровню знаний и умений по математике, где к типологической группе A относятся учащиеся с высоким уровнем знаний и умений, к B – с продвинутым уровнем, к C – с базовым уровнем, и к D – учащиеся, не достигшие базового уровня [2, 71, 73].

С точки зрения реализации многосенсорного подхода в обучении математике, как дифференцированного подхода по способам передачи и обработки информации в учебном процессе, типологические группы определяются по репрезентативным системам и системам восприятия. В тоже время, формирование групп для организации групповой работы в классе (единой и дифференцированной), целесообразно проводить с учетом репрезентативной системы и уровня знаний учащихся, чтобы сделать более эффективным взаимообучение и использование учеников-консультантов в учебном процессе [59, 73, 87, 102]. Под взаимообучением мы понимаем «способ организации обучения, используя который учащиеся обучают друг друга, контролируют результаты, оказывают помощь в усвоении и применении знаний» [28].

1.4 Технологический подход к обучению математике

Идея «технологизации» обучения развивалась в двух направлениях:

1) разработка и применение различных технических средств;
2) разработка и применение организационно-методического инструментария, обеспечивающего определенную заданность и воспроизводимость педагогических результатов [13].

Поиски путей результативного обучения детей привели ученых и практиков к попытке «технолологизировать» учебный процесс.

Я.А. Коменский сформулировал важнейшую черту педагогической технологии – гарантированность результата [13, 30, 62]. Механизм обучения, приводящий к запланированным результатам, был назван «дидактической машиной», для которой важно определить цели, обозначить средства достижения этих целей, отыскать правила пользования этими средствами.

Внедрение «технологии» в педагогику – это попытка сделать процесс усвоения учащимися знаний управляемым.

Проблема использования технологий обучения стала одной из наиболее обсуждаемых в связи с признанием педагогических технологий Ш.А. Амонашвили (гуманитарно-личностная технология) [1], В.П. Беспалько (технология программированного обучения) [11], С.М. Лысенковой (перспективно-опережающее обучение) [13, 37]. В настоящее время, в связи с разработкой информационно-коммуникативных технологий, возможности педагогических технологий синтезируются с возможностями электронных средств обучения.

По описанию М.В. Кларина [13], технологических подход к обучению включает в себя:

– постановку и формулировку целей, ориентированных на достижение запланированных результатов обучения;

– организацию всего хода обучения в соответствии с учебными целями;

– оценку текущих результатов, коррекцию обучения, направленную на достижение поставленных целей;

– заключительную оценку результатов.

А.А. Темербекова выделяет классификации технологий обучения по:

– направленности действия (обучения учеников, студентов, учителей);

– целям обучения;

– предметной среде (для гуманитарных дисциплин, естественных дисциплин и т.д.);

– технической среде (аудиовизуальная, компьютерная и другие);

– организации учебного процесса (индивидуальная, коллективная, смешанная);

– методической задаче (одного предмета, одного средства, одного метода) [68].

Г.К. Селевко отмечает, что многие технологии, являясь авторскими, в то же время могут иметь много сходства по своим целям, содержанию, применяемым методам и средствам и по этим общим признакам могут быть классифицированы в обобщенные группы. По мнению автора, не существует технологий, которые использовали бы только один единственный фактор, метод или принцип в обучении – педагогическая технология всегда комплексна, однако каждая технология становится характерной благодаря своему акценту в определенную сторону процесса обучения [61].

К современным технологиям обучения математики относят различные педагогические технологии, в том числе, по А.А. Темербековой [68]: реализацию теории поэтапного формирования умственных действий М.Б. Воловича [18]; личностно-ориентированное развивающее обучение И.С. Якиманской [83].

А.А. Темербекова выделяет в отдельные блоки информационные технологии, технологии дистанционного обучения, технологии развивающего обучения, smart-технологии (технологии с использованием интерактивных средств) [68].

По классификации Г.К. Селевко [61] технологии могут объединяться в различные группы, как педагогические технологии на основе: личностной ориентации педагогического процесса; активизации и интенсификации деятельности учащихся; эффективности управления и организации учебного процесса; дидактического усовершенствования и реконструирования материала. Автор выделяет в отдельные блоки частно-предметные педагогические технологии; альтернативные технологии; природосообразные технологии; технологии развивающего обучения; технологии авторских школ.

Реализация теории поэтапного формирования умственных действий М.Б. Воловича [18] и педагогическая технология на основе эффективных уроков А.А. Окунева [49] относятся к частно-методическим (частно-предметным) педагогическим технологиям обучения математике по классификации Г.К. Селевко [61] с уточнением Г.Н. Васильевой [13]. Ниже приводятся краткие описания выбранных технологий.

Технология обучения математике М.Б. Воловича

Целью технологии обучения, предложенной М.Б. Воловичем является эффективное усвоение программных знаний, умений, навыков; формирование глубины, прочности, фундаментальности системы знаний, умений, навыков; развитие способов умственной деятельности [13, 17, 18, 19].

Теоретической основой технологии является психология усвоения – теория поэтапного формирования умственных действий П.Я. Гальперина [16, 22].

Последовательность обучения на основе теории поэтапного формирования умственных действий слагается из этапов:

1. Ориентировочный: предварительное знакомство с действием, создание, построение в сознании обучаемого ориентировочной основы действия (ООД).
2. Материальное (материализованное) действие. Обучаемые выполняют материальное (материализованное) действие в соответствии с учебным заданием во внешней материальной, развернутой форме. Они получают и работают с информацией в виде различных материальных объектов: реальных предметов или их моделей, схем, макетов, чертежей и т.д., сверяя свои действия с ООД (инструкцией).
3. Этап внешней речи. После выполнения нескольких однотипных действий необходимость обращаться к инструкции отпадает и функцию ориентировочной основы выполняет громкая внешняя речь (образы). Обучаемые проговаривают вслух то действие, ту операцию, которую в данный момент осваивают. В их сознании происходит обобщение, сокращение учебной информации, а выполняемое действие начинает автоматизироваться.
4. Этап внутренней речи. Обучаемые проговаривают выполняемое действие, операцию про себя, при этом проговариваемый текст необязательно должен быть полным, обучаемые могут проговаривать только наиболее сложные, значимые элементы действия, что способствует его дальнейшему мысленному свертыванию и обобщению.
5. Этап автоматизированного действия. Обучаемые автоматически выполняют отрабатываемое действие, даже мысленно не контролируя

себя, правильно ли оно выполняется. Это свидетельствует о том, что действие интериоризировалось, перешло во внутренний план и необходимость во внешней опоре отпала [13, 18].

Обучение основано на деятельности с использованием ООД, когда успешность усвоения материала обеспечивается его правильной организацией. Роль учителя состоит в том, чтобы обдумать и определить оптимальную организацию работы учеников, которая соответствует порции учебного материала, содержание которого ученики должны усвоить. Основная цель этапа первоначального знакомства – подготовить школьников к самостоятельному выполнению нужной работы, и сразу ее организовать [13, 18, 19].

Модель организации усвоения в соответствии с теорией П.Я. Гальперина [21, 22] подразумевает, что если способ работы уже знаком школьникам, то достаточно познакомить их с новыми знаниями и организовать самостоятельную работу. Затем ученики смогут переносить это умение на любой другой материал, которому соответствует та же самая работа. Схема организации обучения предусматривает, что каждый ученик выполняет своеобразные тесты – работу с конспектами. Особое внимание в технологии обучения отводится контролю на каждом шаге работы ученика, который направлен на то, чтоб помочь ученику избежать возможных ошибок на всех этапах усвоения [16, 17, 18].

В технологии М.Б. Воловича в учебном процессе используется цикл из четырех типов уроков: 1) объяснение; 2) решение задач; 3) общение в форме самопроверки; 4) самостоятельная работа. Автор предлагает педагогическую технику проведения каждого из четырех типов уроков [13, 17, 18, 19].

Технология педагогических творческих мастерских

Технология педагогических мастерских была разработана в 20-х годах XX века педагогами «Французской группы нового образования» (GFEN – Le Groupe Français d'Education Nouvelle). А.А. Окунев разработал технологию мастерских, как альтернативу классно-урочной форме организации учебного процесса, опираясь на свою систему эффективных уроков, идеи и опыт GFEN [13, 49, 51].

Цели педагогической технологии на основе эффективных уроков – усвоение стандартных знаний, умений, навыков и математических способов умственных действий, развитие способных детей. Концептуальные положения педагогической технологии определяются: движущей силой учебного процесса, как противоречием между задачами, которые учитель ставит перед учениками, и их знаниями, умениями; принципом интереса – наличием новизны, нового материала, который выступает своего рода раздражителем, вызывающим рассогласование и включающим механизмы деятельности по ориентировке и познавательной деятельности; хорошим уроком – уроком вопросов и сомнений, озарений и открытий [13, 49].

Автором определены следующие условия хорошего урока: теоретический материал должен даваться на высоком уровне, а спрашиваться по способностям; следует учить применять знания в необычных ситуациях (принцип связи теории с практикой); школьник должен действовать на пределе своих возможностей, талант учителя – угадать эти возможности и правильно определить степень трудности (принцип доступности); ученик должен знать, что он проходит (принцип сознательности); установка должна быть не на запоминание, а на смысл, задача – в центре содержания; должны даваться основы запоминания (принцип прочности усвоения знаний); мышление должно главенствовать над памятью, учебная информация распределена на крупные блоки, материал дается большими дозами; отрабатывается умение наблюдать (принцип наглядности); выделяется главное, учитывается время (принцип оптимизации) [13, 49].

А.А. Окунев отмечает, что «мастерская – это новый способ организации деятельности учеников. Она состоит из ряда заданий, которые направляют работу ребят в нужное русло, но внутри каждого задания школьники абсолютно свободны. Они каждый раз вынуждены осуществлять выбор, выбор пути исследования, выбор средств для достижения цели, выбор темпа работы и т.д.» [13, 49].

Педагогическая мастерская – форма сотрудничества, которая объединяет все направления педагогической деятельности: от ученичества до мастерства. Цель технологии – создать содержательные и организационные условия для личностного саморазвития учащихся, осознания ими самих себя и своего места в мире, понимания других людей, закономерностей мира. Технология заключается в специально организованном педагогом-мастером развивающем пространстве, которое позволяет ученикам в индивидуальном и коллективном поиске приходить к построению или открытию знания. На мастерской знания выстраиваются, но не даются в готовом виде [49].

А.А. Окунев выделил основные этапы работы мастерской и составил алгоритмы проведения занятий. Основные этапы мастерской:

1) индукция (введение);
2) самоконструкция – диалог ученика с самим собой;
3) социоконструкция – групповая работа по решению проблемы;
4) социализация – «обнародование»;
5) афиширование – представление работ на общее обозрение;
6) разрыв – кульминация творческого процесса;
7) рефлексия – самоанализ [49].

Автор реализовал идеи «Французский группы нового образования» в технологии педагогических мастерских, разработал тематику и планы большого количества мастерских по математике [13, 49].

Авторы пособия [66] приводят пример двух типов творческих мастерских: мастерская № 1 «Познание теории» и мастерская № 2 «Изучать – значит совершать открытия для себя» по теме «Вычисление площади боковой и полной поверхности пирамиды».

Можно сделать вывод о том, что цели рассмотренных выше примеров уроков-мастерских – научить школьника самостоятельно и осознанно изучать теоретический материал, снять стресс перед решением задач, познакомить его с разнообразными способами и методами их решения. Они полностью соответствуют целям и задачам мастерских, сформулированных А.А. Окуневым [49].

Вышеназванные технологии –технология обучения математике М.Б. Воловича [18]и технология педагогических мастерских с системой эффективных уроков А.А. Окунева [49], были выбраны для реализации целей и задач нашего исследования по оценке эффективности групповой формы организации учебной деятельности старшеклассников при осуществлении многосенсорного подхода в обучении математике и апробированы в ходе педагогического эксперимента [87, 88, 89].

Выводы по первой главе

В первой главе рассмотрены теоретические основы и практический опыт реализации многосенсорного подхода в обучении и групповой формы организации учебной деятельности как одной из форм уровневой дифференциации в общеобразовательной школе.

Обоснована целесообразность организации групповой формы учебно-познавательной деятельности, дифференциации по уровню знаний и индивидуальным психофизиологическим особенностям учащихся для реализации многосенсорного подхода в обучении математике с целью развития личности и улучшения академических результатов в процессе обучения. Рассмотрен технологический подход в обучении математике в школе и выбраны педагогические технологии обучения математике для реализации педагогического эксперимента по теме исследования.

Глава 2 Методические основы многосенсорного подхода и групповой формы работы в старшей школе

2.1 Содержание и организация групповой работы при обучении по теме «Функция»

Пример использования технологии М.Б. Воловича на этапе решения задач.

Когнитивные карты – это индивидуализированный дидактический материал, в котором представлены математические действия, речемыслительные действия, приводятся формулы, определения, даются комментарии и указания, а также содержится тест, с приведенными критериями оценивания [54, 55, 56].

Данные учебные материалы могут быть применены при различных формах организации учебной деятельности, включая групповую и индивидуальную [40, 54, 55, 56]. В экспериментальном классе когнитивные карты применялись на этапе закрепления материала при обучении в группах. При этом у учащихся была возможность выбирать задания различного уровня сложности и выполнять их в индивидуальном темпе. Взаимодействие в группе осуществлялось следующим образом: сначала учащиеся разбирали пример, рассмотренный в дидактическом материале, озвучивая (проговаривая вслух) каждый шаг, затем записывали решение в тетрадь и проговаривали его уже про себя. На следующем этапе каждый ученик выбирал задание теста, соответствующее его уровню знаний изучаемой темы на тот момент, и выполнял задание в тетради, проговаривая шаги алгоритма решения. После этого учащиеся объясняли свое решение другим участникам группы. В случае выбора одинакового задания один из учащихся презентовал решение, а второй комментировал его или дополнял.

На заключительном этапе работы с когнитивной картой ученики работали индивидуально, выбирая задания более сложного уровня и осуществляя контроль и самооценку своей деятельности.

Когнитивные карты дают возможность продуктивно осуществлять диалог как между учащимися, так и между учителем и учеником. Например, с целью диагностики уровня успешности учебного материала можно воспользоваться заданиями теста и обсудить пошаговое решение, выявляя возникшие трудности, и найти пути их преодоления. Данный дидактический материал помогает учащимся формулировать вопросы, выступать инициатором учебного диалога, активно оказывать взаимопомощь, а учителю – оказывать дозированную помощь по мере необходимости. Когнитивные карты также могут использоваться на этапе изучения нового материала. Здесь возможны два варианта: 1) после объяснения нового материала учителем; 2) без предварительного объяснения учителем [54, 55, 56].

Выполняя задания теста, учащиеся, переходя через этапы «взаимоконтроль» и «самоконтроль», подходят к режиму «внутренний самоконтроль».

Индивидуализированный дидактический материал эффективен и на этапе повторения, подготовки к контрольной работе, зачету, экзамену позволяя учащимся повторить теоретический материал, решение основных задач по теме, осуществить самокоррекцию знаний и умений.

Как показала опытно-экспериментальная работа, включение в процесс обучения когнитивных карт помогает учащимся развивать учебную самостоятельность, коммуникативные навыки, умения объективной самооценки, выстраивать индивидуальную образовательную траекторию учебной деятельности, а также активизирует использование нескольких каналов восприятия.

В ходе педагогического эксперимента было замечено, что при работе с индивидуальными дидактическими материалами в рамках классно-урочной системы, учащиеся значительно меньше испытывают затруднения в учебе, глубже понимают учебный материал. При использовании групповой формы деятельности межличностные взаимоотношения между участниками учебного процесса (как взрослыми, так и учениками) становятся более гуманными, учащиеся чувствуют себя более свободно, комфортно, снимается психологическое напряжение.

Пример когнитивной карты

В таблице 1 представлена разработанная когнитивная карта по теме «Непрерывность функции в точке».

Задание: определите непрерывность функции $f(x)=3x-|x+1|$ в точке $x=-1$.

Таблица 1 – Когнитивная карта по теме «Непрерывность функции в точке»

Математические действия	Речемыслительные действия	Комментарии и указания
$\lim_{x\to -1^{-0}} f(x)=(4x+1)=-3$ $\lim_{x\to -1^{+0}} f(x)=(2x-1)=-3$ $f(-1)=-3$ т.о. выполняется условие непрерывности в точке. Функция $f(x)=3x-\|x+1\|$ непрерывна в точке x=-1.	Сначала перепишем функцию с модулем в кусочно заданную. $f(x)=\begin{cases}4x+1, x<-1\\2x-1, x\geq -1\end{cases}$ Я знаю, что для того, чтобы функция была непрерывна в точке, надо, чтобы выполнялось условие $\lim_{x\to x_0^-} f(x)=\lim_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0)$ Вычисляю односторонние пределы в точке $x=-1$ $\lim_{x\to -1^{-0}} f(x)=(4x+1)=-3$ $\lim_{x\to -1^{+0}} f(x)=(2x-1)=-3$ Нахожу значение функции в точке $x=-1$ $f(-1)=-3$ Я замечаю, что односторонние пределы равны и совпадают со значением функции в точке. Т.о., можно сделать вывод, что функция непрерывна в точке.	Условие непрерывности функции $f(x)$в точке Односторонние пределы равны и их значение равно значению функции в точке $\lim_{x\to x_0^-} f(x)=\lim_{x\to x_0^+} f(x)=$ $=f(x_0)$

Тест для самооценки

I. Я смогу без труда проверить успешность этой темы, если решу следующие задания:

Задания

1) Определите, является ли функция $f(x) = $
$= \begin{cases} x-3, \text{ если } x \le 0 \\ 2, \text{ если } x > 0 \end{cases}$ непрерывной в точке $x = 0$

2) Определите, является ли функция $f(x) = $
$= \begin{cases} x-3, \text{ если } x \le 0 \\ -2, \text{ если } x > 0 \end{cases}$ непрерывной в точке $x = 0$

3) Определите, является ли функция $f(x) = $
$= \begin{cases} x+2, \text{ при } x < 3 \\ 1, \text{ при } x = 3 \\ 14 - x^2, \text{ при } x > 3 \end{cases}$ непрерывной в точке $x = 3$

4) Определите, является ли функция $f(x) = 5 - |2 - x|$ непрерывной в точке $x = 2$.

5) Определите значение параметра aтак, чтобы функция $f(x) = \begin{cases} ax, \text{ при } x > 2 \\ x^2, \text{ при } x \le 2 \end{cases}$ была непрерывна в точке $x = 2$ и постройте ее график.

6) Определите значение параметра pтак, чтобы функция $f(x) = \begin{cases} |x|, \text{ при } -1 \le x \le 1 \\ |x - p|, \text{ при } 1 < x \le 3 \end{cases}$ была непрерывна в точке $x = 1$. Решите задание аналитическим и графическим способом.

II. Я смогу по ответам проверить правильность решения заданий (ответы могут быть записаны на доске или у учителя).

III. Я смогу без труда оценить свою успешность. Критерии оценивания:

1) Я могу считать задание выполненным «удовлетворительно», если правильно решены задания теста 1, 2 и 3.

2) Я могу считать задание выполненным «хорошо», если правильно решены задания теста 3, 4 и 5.

3) Я могу считать задание выполненным «отлично», если правильно решены задания теста 4, 5 и 6.

Система задач по теме «Функция»

При составлении системы задач с использованием многосенсорного подхода, учитывались различные типы восприятия информации учащимися. Таким образом, предложенный набор заданий включает себя задачи, направленные на аудиалов (А), визуалов (В) и кинестетиков (К) и предназначен для групповой формы организации учебной деятельности.

I группа – «Визуалы»

Задания, ориентированные на учащихся с визуальным каналом восприятия

Исследование функции с помощью производной с применением электронного ресурса GeoGebra.

Задания:

– Ознакомьтесь с теорией по учебнику [92, С. 168-171] и ресурсам Национальной площадки цифрового обучения (NDLA–Nasjonal digital læringsarena) [104].

– Постройте график функции $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ с помощью GeoGebra. Найдите и отметьте точки экстремума функции, промежутки возрастания и убывания.

– Постройте график функции $f'(x)$ в той же системе координат. Найдите нули функции.

– Постройте график функции $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x + 1$ и проведите касательную в точке, принадлежащей интервалу [-2; 5]. Исследуйте, есть ли связь между тангенсом угла наклона и значением наклонной. Используйте глайдер.

– Последовательно изменяя значения параметров функции $f(x)$, исследуйте взаимосвязи функций $f(x)$ и $f'(x)$.

– Оформите результаты наблюдений в виде таблицы; подберите задания из учебника, иллюстрирующие ваши наблюдения, и выполните их.

– Исследуйте на монотонность функции:

$f(x) = 3x - e^x$, $h(x) = x - \ln x$, $s(x) = e^{5x} + x^2$

используя CAS и производную. Найдите также точки экстремума, точки перегиба функции.

– Подготовьте доклад (презентацию, видео отчет), включив в него также примеры, относящиеся к заданию.

II группа – «Кинестетики»

Задания, ориентированные на учащихся с кинестетическим каналом восприятия

Учащиеся получают несколько картонных листов, и им предлагается собрать коробку, а затем исследовать её по предлагаемому сценарию. Это задание направлено на составление математической модели, нахождение наибольшего значения функции. Задания:

– Сделайте коробку без крышки из листа картона размером 48 см×30 см таким образом, как показано на рисунке ниже (Рисунок 1).

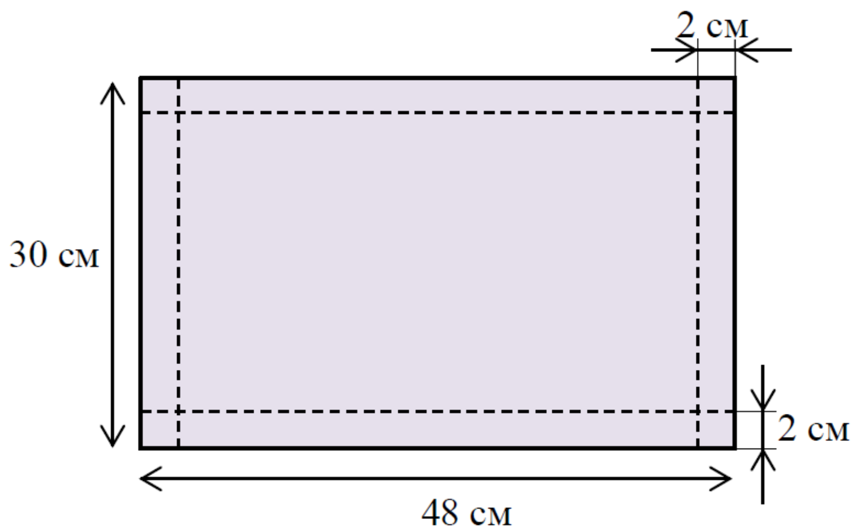


Рисунок 1 – Изображение листа картона для изготовления коробки

– Отрежьте квадраты со стороной 2 см от каждого угла картона и сложите коробку.

– Вычислите объем полученной коробки.

– Измените длину стороны квадрата в углу листа картона. Как меняется объем коробки?

– Найдите размеры коробки (длина, ширина, высота) наибольшего объема, которую можно сделать из данного листа картона.

– Изучите теорию по учебнику [92, С. 172], ресурсам Национальной площадки цифрового обучения (NDLA) [104] и Альтернативного и дополнительного взаимодействия (ASK) [85].

– Решите задачу, используя производную.

– Подберите задание из учебника и выполните его.

– Подготовьте отчет о проектной работе.

Примером вариации данного задания может служить следующая формулировка:

Распределите листы картона между участниками группы таким образом, чтобы каждый учащийся изготовил коробку с различными размерами. Используйте предложенный рисунок (Рисунок 1). Определите размеры коробок, вычислите их объемы. Заполните таблицу 2.

Таблица 2 – Таблица для задания II группы – «Кинестетики»

Размер коробки	1	2	…	N
Длина стороны квадрата				
Длина коробки				
Ширина коробки				
Высота коробки				
Объем коробки				

Составьте формулу объема коробки с использованием длины стороны квадрата, обозначим ее за x.

Выдвинете гипотезу, каким образом мы можем, используя данную функцию, вычислить наибольший объем коробки.

III группа – «Визуалы-кинестетики»

Задания, ориентированные на учащихся с визуальным и кинестетическим каналами восприятия

Составление программы для нахождения приближенных значений нулей функции с помощью метода Ньютона. Задания:

– Постройте произвольный график функции, который пересекает ось абсцисс только один раз.

– Выберите значение аргумента правее нуля функции и постройте касательную к графику в этой точке.

– Постройте еще одну касательную в точке, где первая касательная пересекает ось абсцисс.

– Повторите этот алгоритм действий для точек, лежащих слева от нуля функции.

– Запишите свои наблюдения.

– Найдите приближенное значение нуля функции $f(x) = 3x^2 - 10 - e^{-x}$, использую алгоритм, описанный выше.

– Изучите теорию по учебнику [92, С. 193-194], ресурсам Национальной площадки цифрового обучения (NDLA) [104] и Альтернативного и дополнительного взаимодействия (ASK) [85].

– Составьте программу, которая ищет приближенные значения нуля функции $f(x) = 3x^2 - 10 - e^{-x}$ с помощью метода Ньютона.

– Подготовьте презентацию, включив в нее примеры, относящиеся к заданию.

2.2 Содержание и организация групповой работы при обучении по теме «Исследование функции с помощью производной» на основе технологии творческих мастерских

Выбор технологии творческих мастерских для реализации темы «Исследование функции с помощью производной» обоснован тем, что эта технология позволяет реализовать многосенсорный подход в обучении, так как она предусматривает организацию деятельности учащихся в различных формах (групповой, коллективной, индивидуальной и фронтальной) [49, 66]. Учебно-методический комплект (УМК) А.Г. Мордковича [42, 43] выбран в качестве основного для реализации темы:

– учебник входит в федеральный перечень учебников, допущенных Министерством просвещения Российской Федерации к использованию при реализации образовательных программ общего образования [75];

– в учебнике достаточно полно раскрыто теоретическое и практическое содержание темы «Исследование функции с помощью производной»;

– в учебно-методическом комплекте представлены основные типы задач, реализующие этапы работы с производной при исследовании функции;

– приоритет в учебнике отдается функционально-графической линии и развивающей концепции математического моделирования и математического языка;

– учащиеся экспериментальной и контрольной групп 12-го класса естественно-научного профиля старшей школы Норвегии ранее обучались с использованием УМК А.Г. Мордковича [44, 45, 46, 47], в том числе проходили элективный курс «Задачи с практическим содержанием в теме «Функция» в 11-м классе.

Задания при реализации темы разработаны в соответствии с УМК О. Борган (Ø. Borgan) – основным учебником по математике для 12 класса естественно-научного профиля старшей школы Норвегии [93].

Мастерская «Познание теории» (2 ч.)

Цели и задачи:

– заметить взаимосвязь между промежутками знакопостоянства производной и промежутками монотонности функции;

– заметить взаимосвязь между нулями производной и точками экстремума функции;

– сформулировать первые шаги в алгоритме исследования функции с помощью производной;

– ввести определение стационарных и критических точек;

– отработать навыки использования GeoGebra при построении динамических графиков и при решении уравнений, дифференцировании функций;

– отработать понятия стационарных точек, критических точек, точек экстремума функции.

Мастерская «Изучать – значит совершать открытия для себя» (2 ч.)

Цели и задачи:

– повторить теоретический материал с прошлых уроков (мастерской);

– ввести понятия второй производной, точек перегиба, промежутков выпуклости, вогнутости функции;

– доработать алгоритм исследования функции с помощью производной, включив пункты со второй производной и асимптотами;

– сформулировать правило нахождения точек экстремумов функции с помощью второй производной.

Урок: Контроль знаний – промежуточный контроль (1 ч.).

Мастерская «Познание теории»

Этап 1: Индукция – мотивация учащихся

Звучит музыка из фильма «Розовая пантера». Какие ассоциации вызывает у вас этот музыкальный отрывок? Запишите несколько ассоциаций, обсудите их с соседом.

На экране появляется фото Эркюля Пуаро. Узнаете ли вы этого человека? Какие ассоциации у вас возникают сейчас? Обсудите с соседом. Затем – общее обсуждение.

Возможные ответы: лето, детство, пантера, детектив, Агата Кристи, книга, фильм, мультфильм, радость, расследование и т.д.

После общей дискуссии учитель делится своими ассоциациями: следы – дело – расследование – факты – детектив.

Выход на тему «Исследование функции с помощью производной».

Этап 2: Самоконструкция – диалог ученика с самим с собой

Создание проблемной ситуации.

Учащиеся получают задание: описать свойства функции, используя график (Рисунок 2А, Б, В, Г), затем обменяться ответами в парах и воссоздать по описанным свойствам график функции.

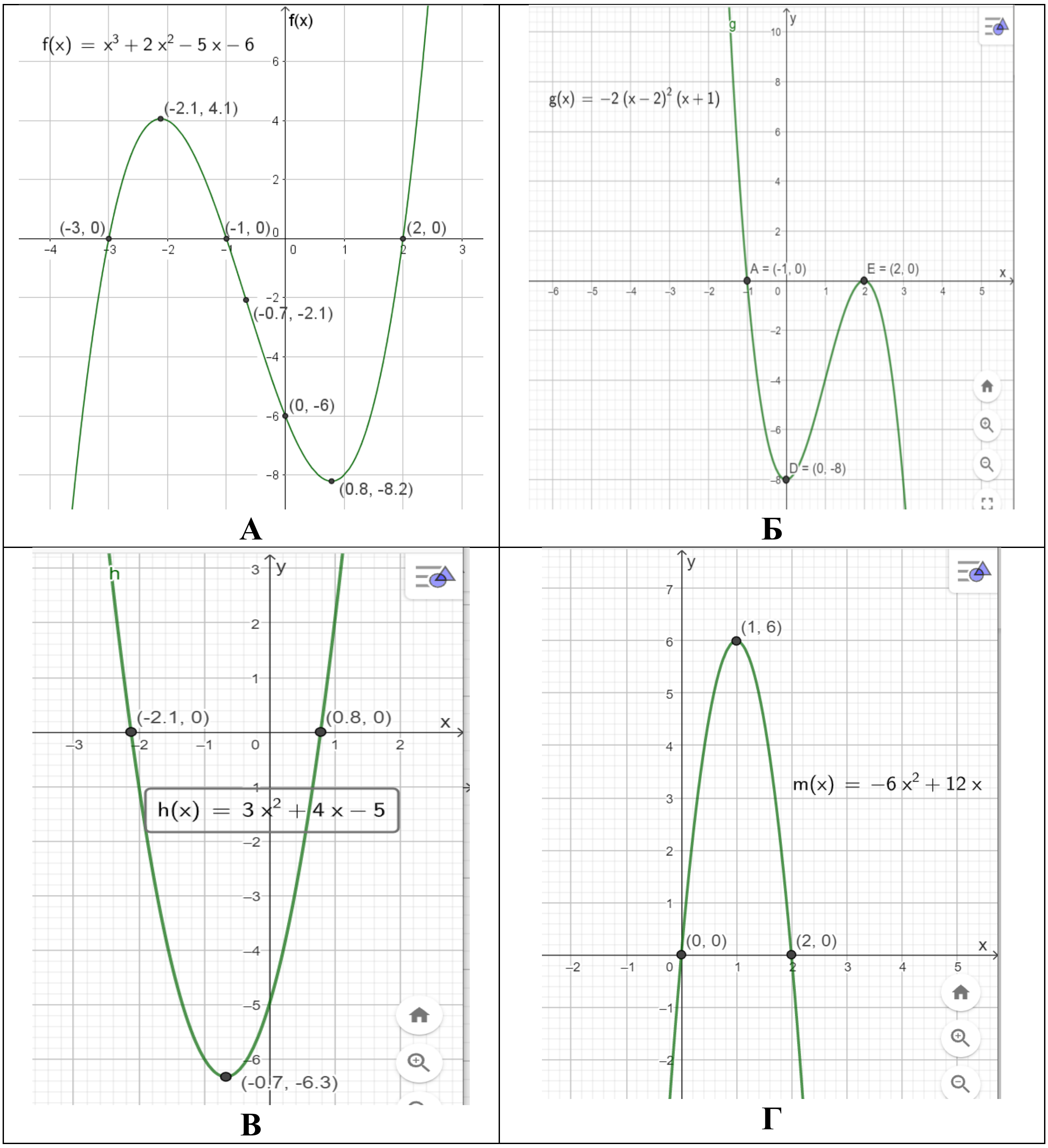


Рисунок 2 – Графики функций к заданию этапа 2 «Самоконтроль»

Задание 1.1

1) Опишите свойства функции, изображенной на графике, заполнив таблицу (Таблица 3). Обратите внимание на запись нулей функции, запись промежутков монотонности и знакопостоянства функции.

Таблица 3 – Таблица для заполнения учащимися по заданию 1.1

Задание	*Ответ*
Укажите область определения функции	
Запишите нули функции	
Укажите промежутки знакопостоянства	
Найдите точки экстремума(ов)	
Запишите промежутки монотонности	
Укажите экстремумы функции	

2) Объединитесь в пары внутри группы следующим образом: те ученики, которые выполняли задание А, обмениваются таблицей с ответами с учениками, выполнявшими задание В, а учащиеся, работавшие с заданием Б – с учащимися, выполнявшими задание Г. Обменяйтесь с напарником схемой с ответами. Постройте график функции, используя информацию из схемы.

Комментарии: на данном этапе происходит актуализация знаний, которые ученики будут использовать при изучении новой темы. Здесь открывается возможность повторить умение читать графики функции и грамотно записывать информацию с использованием математической символики. Заострим внимание на следующих моментах: а) на запись нулей функции, где ученики возвращаются к повторению определения нуля функции и координаты точки пересечения графика функции с осями координат; б) на запись промежутков монотонности с использованием запятой, а не знаков объединения интервалов.

3) Обменяйтесь решениями с соседом. Удалось ли построить график функции, используя информацию из таблицы? Обсудите решение с соседом.

4) Заполните таблицу (Таблица 4 и Таблица 5).

Таблица 4 – Таблица к заданию 1.1 (пункт 4) этапа «Самоконтроль» (для первого ученика пары)

Функция	**Схематичный график**		
$f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$		Точки экстремума функции	Промежутки монотонности x
$h(x) = 3x^2 + 4x - 5$		Нули функции	Промежутки знакопостоянства x

Таблица 5 – Таблица к заданию 1.1 (пункт 4) этапа «Самоконтроль» (для второго ученика пары)

Функция	**Схематичный график**		
$g(x) = -2(x-2)^2(x+1)$		Точки экстремума функции	Промежутки монотонности x
$m(x) = -6x^2 + 12x$		Нули функции	Промежутки знакопостоянства x

5) Заметили ли вы зависимость между: Точками экстремума кубической функции и нулями квадратичной функции? Промежутками монотонности и промежутками знакопостоянства?

6) Попробуйте сформулировать свои наблюдения в общем виде.

Комментарии: ученики замечают, что графики, с которыми они работали в парах, соответствую графику функции и графику ее производной и выдвигают гипотезу, что нули производной являются точками экстремума функции, а промежутки знакопостоянства производной дают нам представление о характере монотонности исходной функции.

Этап 3: Социоконструкция– групповая работа по решению проблемы

Учащиеся выдвигают гипотезу для решения проблемного вопроса.

Работа в группах.

Комментарии: учащиеся распределены в группы заранее по типу восприятия, здесь: А – аудиалы, В – визуалы, К – кинестетики (выраженная ведущая репрезентативная система), АВ – аудиалы-визуалы, АК – аудиалы-кинестетики, ВК – визуалы-кинестетики (преобладание двух репрезентативных систем).

Три группы сформированы следующим образом: Группа А+АК, Группа ВК+К, Группа ВК+АВ.

Задание 2 (для работы в группах):

Задания для работы в группах представлены в таблице 6.

Этап 4: Социализация – обсуждение работы в группах

Работа в группах и «обнародование».

Обсуждение внутри группы.

На данном этапе учащиеся согласовывают и формулируют общее мнение группы, оформляют решение на листах формата А1, продумывают план презентации своего решения.

Таблица 6 – Задания для работы в группах

Группа А+АК	Группа ВК+К	Группа ВК+АВ
Работа с учебником: Рассмотреть пример из учебника [93, С. 170], записать его решение в тетрадь, обсудить в группе, составить алгоритм решения задач подобного типа.	Работа с графиком функции в GeoGebra: Построить в одной системе координат графики функции $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ и ее производной, отметить на графике *f'(x)* нули, а на графике *f(x)* – экстремумы функции. Изменяя значения коэффициентов *a*, *b*, *c*, *d* подтвердите или опровергните свою гипотезу.	Дана функция $f(x) = x^4 - 6x^2 + 5$ Найдите производную функции, используя формулы и правила дифференцирования. Проверьте результат с помощью CAS GeoGebra. Решите уравнение *f'(x)*=0 с использованием CAS GeoGebra и без. Найдите промежутки знакомостоянства производной с помощью CAS GeoGebra.

Этап 5: Афиширование – презентация результатов работы

Учащиеся представляют результат выполнения заданий по группам, обсуждают их в классе. Вывешивают результаты, ходят по классу, обсуждая их. Группы вносят исправления или дополнения в свой вариант выполнения задания, учитывая комментарии от участников других групп.

Группа А+АК

Учащиеся представляют решение задания, оформляя его на листе формата А1. Алгоритм исследования функций с помощью производной, разработанный на примере решения задания из учебника:

1. Найти производную функции.
2. Составить уравнение $f'(x) = 0$ и найти его корни.
3. Отметить стационарные точки на числовой прямой.
4. Найти промежутки знакопостоянства$f'(x)$.
5. Сделать вывод о характере монотонности исходной функции.
6. Записать точки экстремума функции.

Группа ВК+К

Ученики представляют свою работу перед всем классом, демонстрируя с помощью видеопроектора исследование графиков с использованием программы GeoGebra. Изменяя значения коэффициентов исходной функции $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, записывают результаты наблюдений в таблицу7.

Таблица 7 – Таблица для заполнения и презентации результатов работы группы ВК+К

f(x)	*f(x)*	*f'(x)*
Значение коэффициентов a = b = c = d =	Стационарные точки: x_1 = x_2 =	Нули функции: x_1 = x_2 =
	Промежутки монотонности	Промежутки знакопостоянства

Таким образом, гипотеза о том, что знак производной связан с характером монотонности функции подтверждена для кубической функции, записанной в общем виде. Учащиеся также отмечают, что промежутки монотонности исходной функции могут быть использованы для нахождения промежутков знакопостоянства производной функции.

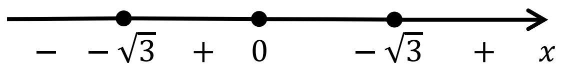
Во время презентации учащиеся используют график производной для ответов на следующие вопросы: каким образом мы можем использовать график производной для того, чтобы сделать вывод о точках экстремума функции; являются ли они точками максимума или минимума (график исходной функции при презентации делается невидимым).

Затем график производной скрывали (убирали с экрана) и, используя график $f(x)$, отвечали на вопросы по нахождению стационарных точек и промежутков знакопостоянства $f'(x)$.

Группа ВК+АВ

Учащиеся оформляют результаты своей работы на листе формата А1, при этом они могут использовать таблицу, где в левой колонке записывается решение без использования GeoGebra, а в правой – описание команд в CAS GeoGebra (Таблица 8).

Таблица 8 – Таблица для презентации результатов работы группы ВК+АВ

Решение без использования GeoGebra	Команды в CAS GeoGebra
$f(x) = x^4 - 6x^2 + 5$ $f'(x) = 4x^3 - 12x$	1. Сначала определить функцию $f(x) = x^4 - 6x^2 + 5$используя команду «производная» функции, или набрав $f'(x)$: 1 $\mathrm{f(x) := x^4 - 6\,x^2 + 5}$ $\rightarrow$ $\mathbf{f(x) := x^4 - 6\,x^2 + 5}$ $\mathrm{f'(x)}$ $\rightarrow$ $\mathbf{4\,x^3 - 12\,x}$
$f'(x) = 0$ $4x^3 - 12x = 0$ $4x(x^2 - 3) = 0$ $x = 0, \qquad x = \pm\sqrt{3}$	2. Записать уравнение $f'(x) = 0$ и выбрать команду $\boxed{x =}$ или $\boxed{x \approx}$ 2 $\mathrm{f'(x) = 0}$ NLøs: $\mathbf{\{x = -1.73, x = 0, x = 1.73\}}$
	3. Подставляем в производную значения x: 3 $\mathrm{f'(-2)}$ $\rightarrow$ $\mathbf{-8}$ 4 $\mathrm{f'(-1)}$ $\rightarrow$ $\mathbf{8}$ 5 $\mathrm{f'(1)}$ $\rightarrow$ $\mathbf{-8}$ 6 $\mathrm{f'(3)}$ $\rightarrow$ $\mathbf{72}$

Этап 6: Разрыв

Обобщение работы в группах.

Выход на алгоритм исследования функции с помощью производной:

Теорема 1 [42, С. 353]. Если во всех точках открытого промежутка X выполняется неравенство $f'(x) \geq 0$ (причем равенство $f'(x) = 0$ выполняется лишь в отдельных точках и не выполняется ни на каком сплошном промежутке), то функция $y = f(x)$ возрастает на промежутке X.

Теорема 2 [42, С. 353]. Если во всех точках открытого промежутка X выполняется неравенство $f'(x) \leq 0$ (причем равенство $f'(x) = 0$

выполняется лишь в отдельных точках и не выполняется ни на каком сплошном промежутке), то функция $y = f(x)$ убывает на промежутке X.

Теорема 4 (достаточные условия экстремума) [42, С. 360]. Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на промежутке X и имеет внутри промежутка стационарную или критическую точку $x = x_0$. Тогда:

а) если у этой точки существует такая окрестность, в которой при $x < x_0$ выполняется неравенство $f'(x) < 0$, а при $x > x_0$ – неравенство$f'(x) > 0$, то $x = x_0$ – точка минимума функции $y = f(x)$;

б) если у этой точки существует такая окрестность, в которой при $x < x_0$ выполняется неравенство $f'(x) > 0$, а при $x > x_0$ – неравенство $f'(x) < 0$, то $x = x_0$ – точка максимума функции $y = f(x)$;

в) если у этой точки существует такая окрестность, что в ней и слева и справа от точки x_0 знаки производной одинаковы, то в точке x_0 экстремума нет.

Алгоритм исследования непрерывной функции $y = f(x)$ на монотонность и экстремумы [42, С. 361]:

1. Найти производную $f'(x)$.

2. Найти стационарные и критические точки.

3. Отметить стационарные и критические точки на числовой прямой и определить знаки производной на получившихся промежутках.

4. Описать теоремы 1, 2 и 4, сделать выводы о монотонности функции и о ее точках экстремума.

Этап 7: Рефлексия – самоанализ

Задания под пунктами 1-8 ниже решаются с помощью графика (Рисунок 3).

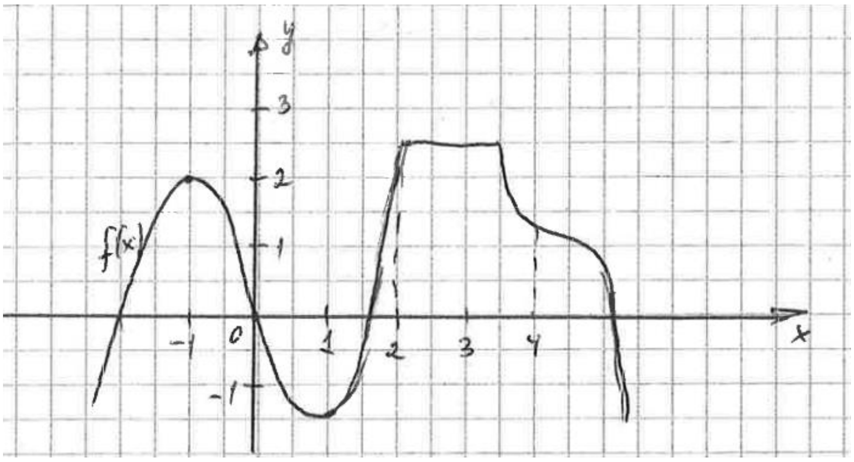


Рисунок 3 – Схематичный график к тесту (самоанализу)

1. Для каждой найденной точки максимума (минимума) x_i указать какую-либо окрестность точкиx_i, в которой выполняется неравенство $f(x) < f(x_i)$ ($f(x) > f(x_i)$).

2. Объяснить, почему, например, точки $x = 2,\ x = 3{,}5$не являются точками экстремума функции $f(x)$.

3. Как расположены касательные к графику функции $y = f(x)$ в точках экстремума?

4. Найдите $f'(-1)$, $f'(4)$ (при нахождении $f'(4) = 0$ обращается внимание на то, что $x = 4$ не является точкой экстремума).

5. Есть ли на отрезке [2; 6] значения x, для которых $f'(x) = 0$?

6. Найдите промежутки возрастания и убывания функции$f(x)$.

7. Решите неравенства:

$$f'(x) < 0$$

$$f'(x) > 0$$

8. Сравните:

$$f'(-2) \text{ и } f'(0)$$

$$f'(3) \text{ и } f'(4)$$

9. Найдите стационарные точки функции $f(x) = \frac{x^2}{x^2+2}$.

10. Определите промежутки монотонности и найдите точки экстремума функции $f(x) = \frac{x^2}{x^2+2}$.

Упражнение «Продолжи фразу»

Ученикам предлагается задание «Продолжи фразу»:

– Сегодня я узнал …

– Сегодня я смог …

– Сегодня меня удивило …

– Мне захотелось …

Домашнее задание

Выполните задания из учебника [43] под номерами 44.34 (а, г), 44.38 (а), 44.58 (а) и 44.68 (а).

Мастерская «Изучать – значит совершать открытия для себя»

Цель: закрепить знания, умения и навыки учащихся по теме «Исследование функций с помощью производной», доработать алгоритм исследования функций с помощью производной с учетом рассмотрения критических точек и использования алгоритма для построения графиков функций, заданных аналитически.

Задания для мастерской разработаны с использованием материалов образовательной программы по изучаемой теме [42, 43, 92].

Вопросы и задания к уроку:

1) Тема мастерской: «Исследование функции, заданной аналитически, с целью построения графика». Сформулируйте проблемы этой темы, которые вы бы хотели решить.

2) Выполните следующее задание:

Задание 2.1:

Дан график производной (Рисунок 4):

– определить промежутки монотонности функции;

– определить стационарные точки;

– определить решения уравнения $f'(x) = 0$;

– определить знак $f'(3)$;

– определить характер монотонности функции при $x = 3$;

– используя полученную информацию, построить график $f(x)$.

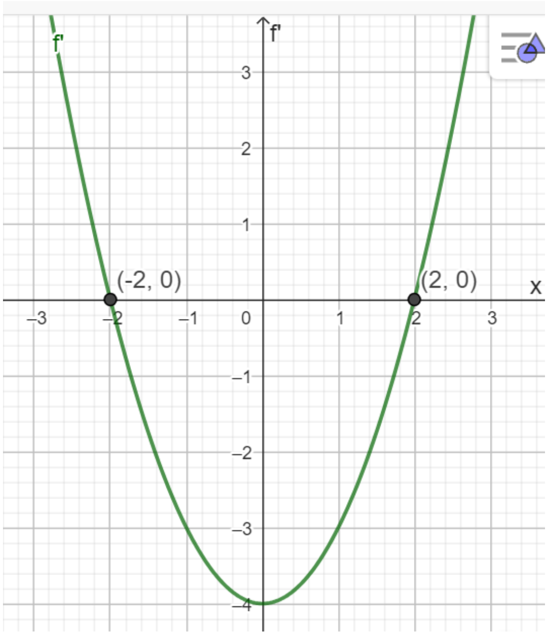


Рисунок 4 – График производной к заданию 2.1

3) Сравните полученные результаты с соседом. Обсудите свое решение в группе. С какими трудностями вы столкнулись при выполнении задания? Какую дополнительную информацию вы бы хотели получить для более точного построения графика функции.

Комментарии: учащиеся замечают, что им не хватило информации об: области определения, области значений функции, нулях функции, точках пересечения графика функции с осью OY, значений экстремумов функции. В этом случае группы сформированы таким образом, чтобы в каждой группе по возможности присутствовали ученики с разными ведущими каналами восприятия (А, В, К и их комбинации АВ, АК, ВК). На данном этапе работы учащиеся, используя свой доминирующий канал, имеют возможность выстаивать диалог с учащимися, у которых ведущим является другой канал восприятия. Таким образом, происходит развитие неприоритетного канала (репрезентативной системы).

4) Найдите в своих записях с прошлого урока алгоритм исследования функции с помощью производной. Дополните пункты, которые вам кажутся необходимыми.

5) Решите задание 2.2, используя доработанный вами алгоритм.

Задание 2.2:

Дана функция: $f(x) = \begin{cases} x^2 - 6x, & -2 \le x \le 7 \\ 14 - x, & 7 < x \le 18 \end{cases}$

а) найти критические точки;

б) найти промежутки возрастания, убывания функции.

в) построить график $f(x)$.

Комментарии: пример решение задания 2.2 приведен ниже.

Решение задания 2.2:

а) Найти критические точки:

Определение: критические точки – это точки, в которых производная равна нулю или функция не дифференцируема.

$x = -2,\ x = 18$ – конечные точки области определения, поэтому являются критическими, так как $f(x)$ не дифференцируема на концах промежутка [–2, 18].

$f'(x) = \begin{cases} 2x - 6, & -2 \le x \le 7 \\ -1, & 7 < x \le 18 \end{cases}$

$2x - 6 = 0,\ \ x = 3,\ 3 \in [-2, 7]$

$x = 3$ – критическая точка.

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 7^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 7^-}(x^2 - 6x) = 7 \\ \lim\limits_{x\to 7^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 7^+}(14 - x) = 7 \end{array}\right\} \Rightarrow f(x)$ – непрерывна в точке $x = 7$

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 7^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to 7^-}(2x - 6) = 8 \\ \lim\limits_{x\to 7^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 7^+}(-1) = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow f(x)$ – недифференцируема в точке $x = 7$.

Ответ: критические точки: $x = -2,\ x = 18,\ x = 3,\ x = 7$.

б) Найти промежутки монотонности функции:

Отметим критические точки на числовой прямой и определим знаки производной на каждом из промежутков (Рисунок 5).

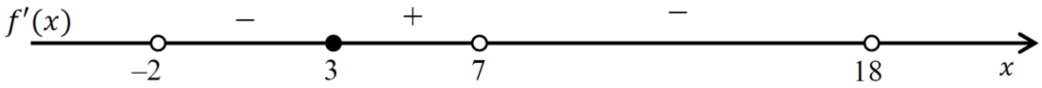


Рисунок 5 – Изображениек решению задания 2.2. Промежутки знакопостоянства $f'(x)$ на числовой оси

$f'(0) = 2 \cdot 0 - 6 < 0 \quad f'(4) = 2 \cdot 4 - 6 > 0 \quad f'(10) = -1 < 0$

Ответ: на промежутках $x \in [-2, 3], (7, 18]$ $f(x)$ убывает, на $x \in [3, 7)$ $f(x)$ возрастает.

в) Построить график $f(x)$:

Для более точного построения графика проведем дополнительные вычисления и исследования функции:

1) $x = 3$ – является точкой минимума;$x = 7$ – точкой максимума;

2) $f(3) = 9 - 18 = -9$ и $f(7) = 49 - 42 = 7$ – экстремумы функции.

3) Находим нули функции$f(x)$:

– при $-2 \leq x \leq 7 f(x) = x^2 - 6x \to x(x - 6) = 0 \to x_1 = 0$ и $x_2 = 6$.

– при $7 < x \leq 18 f(x) = 14 - x \to 14 - x = 0 \to x = 14$.

4) Точка пересечения графика функции с осью OY: (0, 0)

$f(0) = 0^2 - 6 \cdot 0 = 0; f(-2) = 16; f(18) = -4$

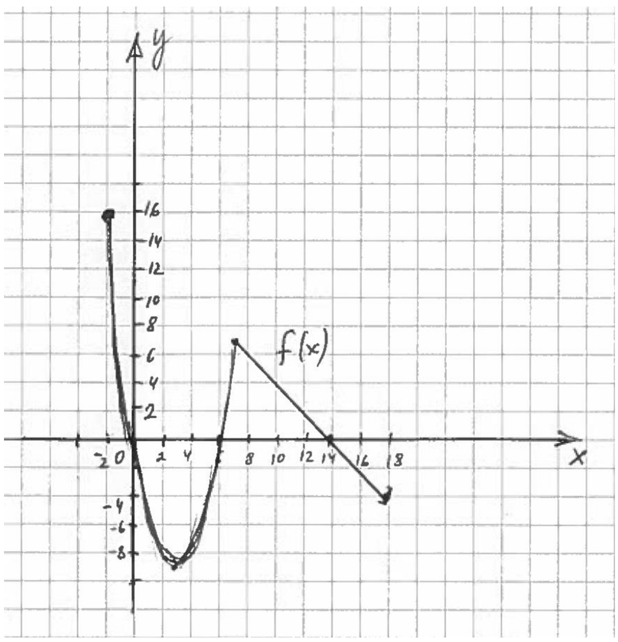


Рисунок 6 – Схематичный график $f(x)$ к решению задания 2.2 (пункт в)

6) Обсудите в группе решение задания, алгоритм исследования функции и сформулируйте общее мнение.

Комментарий: некоторые группы при выполнении данного задания работают стоя за листом формата А1, размещенном на стене. При этом каждый ученик пишет маркером своего цвета, что позволяет как ученику, так и учителю оценить вклад каждого в общую групповую работу. Хочется отметить, что при такой форме групповой работы оптимальное количество учащихся в группе – 3 человека, и как правило, учащиеся, работающие в группе стоя, быстрее включаются в обсуждение задания и в целом работают более эффективно. Особым успехом такая форма групповой работы пользуется у учеников с преобладанием кинестетического канала восприятия.

7) Разместите решение своей группы на стене, пройдите по классу, ознакомьтесь с решениями других групп. Вернитесь к своему решению и внесите коррективы, если считаете это необходимым. Решите следующее задание.

Задание 2.3 (вторая производная):

Дана функция $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 40$. Постройте графики $f(x), f'(x), f''(x)$, используя программу GeoGebra.

Заметили ли вы какую-нибудь связь между точками максимума (минимума) функции, нулями первой производной и значением второй производной в этих точках?

Комментарии: учащиеся, отвечая на вопрос, выходят на альтернативный способ нахождения точек экстремума с помощью второй производной.

Нахождение точек экстремума функции с помощью второй производной:

1. $f'(a) = 0$и $f''(a) < 0$, тогда $x = a$– точка максимума;

2. $f'(a) = 0$и $f''(a) > 0$, тогда $x = a$– точка минимума.

8) Выберите один из пунктов задания 2.4 (а, б или в) и решите его. Обсудите с соседом ваши решения. Затем решите задание 2.5.

Задание 2.4:

Найти точки экстремума, экстремумы функций и построить график:

а) $f(x) = 2\sqrt{x} - x$

б) $f(x) = 2x - e^x$

в) $f(x) = 2\ln x - x^2$

Комментарии: решение задания 2.4. под пунктом в) подводит учащихся к формулированию дополнительного пункта в алгоритме исследования функции – нахождение асимптот, а также дает возможность использовать *вторую производную для определения точек экстремумов функции.*

Задание 2.5:

Сколько точек экстремума имеет функция $f(x) = 2\ln(x^2 + k) - \frac{1}{2}x$, $k \in \mathbb{R}$ при различных значениях k?

9) Проверьте свое решение, используя программу GeoGebra. Сформируйте домашнее задание. Это могут быть два-три задания из учебника [43, С. 258-265] или задания сегодняшнего урока, которые вы не успели решить или решили неверно.

Схема исследования функции:

1. Область определения функции.
2. Исследование функции на периодичность.
3. Исследование функции на четность.
4. Нули функции, точки разрыва, промежутки знакопостоянства.
5. Исследование поведения функции у концов промежутков области определения, нахождение асимптот.
6. Исследование функции на экстремумы и монотонность.
7. Построение графика функции по точкам (с учетом проведенного исследования).

Примечание: пункты 3 и 4 схемы исследования добавляются позже, так как изучение периодических функций и свойств четности, нечетности в норвежской школе рассматриваются позднее.

Урок - контроль знаний

Пояснительная записка к уроку промежуточного контроля знаний

При осуществлении промежуточного контроля знаний по теме «Исследование функции с помощью производной» ученикам предоставляется возможность выбора задания самостоятельной работы с учетом формулировки: словесно-графическим или словесно-аналитическим способом, также представлены задания, для решения которых требуется применение различных стратегий. Таким образом, данная самостоятельная работа позволяет не только оценить знания и умения учащихся по теме, но и отследить развитие стилевой гибкости школьников.

Самостоятельная работа

Учащиеся выбирают по два задания с графическим и аналитическим представлением (по два задания из каждого столбца, Таблица 9).

Комментарий: решения заданий промежуточного контроля представлены ниже.

Самоанализ работы

Вопросы для самоанализа:

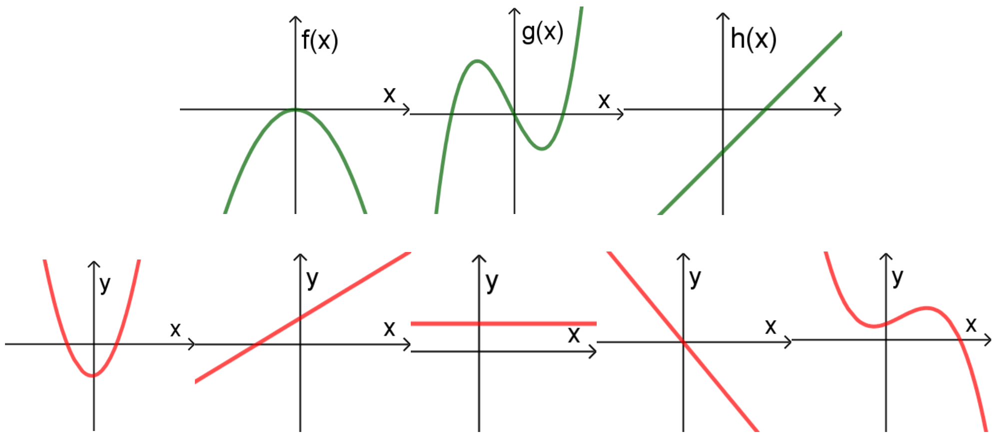
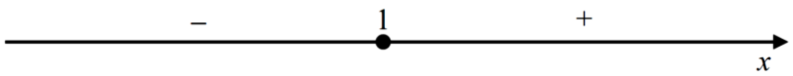
1) Как Вы готовились к самостоятельной работе? Какие определения, понятия, теоремы повторяли?

2) Есть ли что-то, что Вы узнали, изучили, открыли для себя во время выполнения заданий самостоятельной работы?

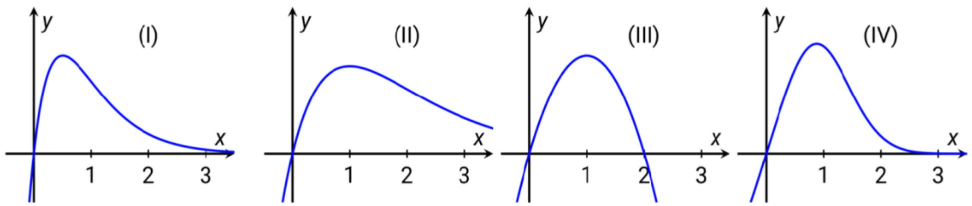
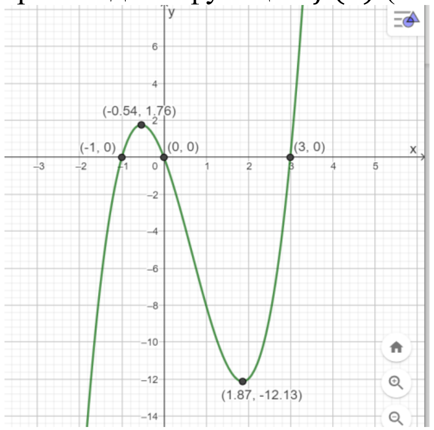
3) Хотите ли Вы отметить какие-то моменты в решении заданий, которыми Вы особенно довольны?

4) Как Вы думаете, есть ли какие-то вопросы в этой теме, к которым Вы вернетесь, чтобы повторить?

Таблица 9– Задания самостоятельной работы – варианты с графическим и аналитическим представлением условий

I вариант	II вариант
1. Перед вами три графика функций $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ (верхний ряд) и пять графиков других функций Graf 1-5 (нижний ряд). Определите, какой из графиков Graf1-5 соответствует графику производной функции $f(x)$, $g(x)$или$h(x)$.  **Graf 1** **Graf2** **Graf3** **Graf4** **Graf5**	1. Дана функция $f(x) = x^3 - 3x^2$.Область определения (–2, 4): а) найдите промежутки монотонности функции; б) определите экстремумы функции; в) проведите дополнительное исследование функции и постройте ее график.
2. Используя полученную информацию (см. ниже), схематически постройте график функции $f(x)$:  и $f'(-1) = 0$ и $f'(3) = 0$	2. Дано: 1) уравнение $f'(x) = 0$ имеет корни $x_1 = -3, x_2 = 2$; 2) $f''(-3) = -2,\ \ f''(2) > 0$ Исходя из полученной информации, схематически изобразите график функции $f(x)$.

Продолжение Таблицы 9

I вариант	II вариант
3. Даны 4 графика I-IV (см. ниже). Выберите тот, который соответствует графику функции $f(x) = 4x \cdot e^{-x}$. Обоснуйте свой выбор.  	3. Дана функция $f(x) = 5x^3 - x\|x+1\|$ Найдите критические точки, стационарные точки и точки экстремумов функции $f(x)$.
4. Используя график производной функции $f(x)$ (см. ниже)  а) найдите решение уравнения $f'(x) = 0$ б) найдите решение уравнения $f''(x) = 0$ в) Используя решения заданий под пунктами а) и б), а также то, что точка с координатами (0, 12) принадлежит графику, найдите значения коэффициентов $a, b,$ с функции $f(x) = ax^4 + bx^3 - 3x^2 + c$.	4. Дана функция $f(x) = ax^4 + bx^2 + cx - 2$, область определения – все действительные числа. Определите значения коэффициентов a, b, c, если $x = 2$– точка экстремума, $f''(-2) = 0$ и $f(1) = 2$.

Решения заданий промежуточного контроля знаний

I вариант:

1. $f(x)$ – Graf 4; $g(x)$ – Graf 1; $h(x)$ – Graf 3.

2. $\left.\begin{matrix} f'(-1) = 0 \\ f'(3) = 0 \end{matrix}\right\} => x = -1$ и $x = 3$ – стационарные точки.

$f''(-1) < 0 => x = -1$ – точка максимума.

$f''(3) > 0 => x = 3$ – точка минимума.

3. $f(x) = 4x \cdot e^{-x}$

1) $f(x) = 0, x = 0$ – нуль функции.

2) $f'(x) = 4 \cdot e^{-x} - 4x \cdot e^{-x} = 4e^{-x}(1 - x)$.

$f'(x) = 0 \ => x = 1$ – стационарная точка.

3) $f'(x) = 4 \cdot e^{-x} - 4x \cdot e^{-x} = 4e^{-x}(1 - x)$.

$f'(x) = 0 \ => x = 1$ – стационарная точка.

4) Промежутки знакопостоянства $f'(x)$ (Рисунок 7).

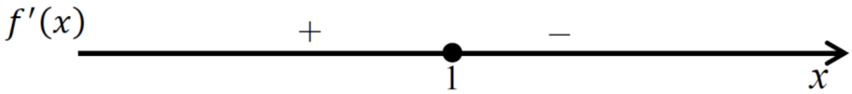


Рисунок 7 – Изображение к решению задания № 3 варианта I. Промежутки знакопостоянства $f'(x)$ на числовой оси

Т.о. $x = 1$ – точка максимума.

Так как $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{4x}{e^x} = 0$ (по правилу Лопиталя), то схематичный график IV соответствует $f(x)$.

Ответ: график IV.

4. На рисунке 8 изображен график $f'(x)$.

а) $f'(x) = 0,\ x = -1,\ \ x = 0,\ \ x = 3$ – читаем с графика.

б) $f''(x) = 0,\ x = -0{,}54$ и $x = 1{,}87$

в) $(0, 12) => f(0) = 0 + 0 - 0 + c = 12 \ => \ c = 12$.

$f'(-1) = -4a + 3b + 6;\ \ f'(3) = 4a \cdot 27 + 3b \cdot 9 - 6 \cdot 3 \ \ \to$

$\to \begin{cases} -4a + 3b + 6 = 0 \mid \cdot -1 \\ 4 \cdot 27a + 27b - 18 = 0 \mid : 9 \end{cases} => \begin{cases} 4a - 3b - 6 = 0 \\ 12a + 3b - 2 = 0 \end{cases} \ =>$

$$=> \begin{cases} 4a - 3b + 6 = 0 \\ 3b = -12a + 2 \end{cases} \to 4a + 12a - 2 - 6 = 0 \ \to 16a = 8 \to a = \frac{1}{2},$$

$$3b = -12 \cdot \frac{1}{2} + 2 \ \to b = -\frac{4}{3}.$$

Ответ: $a = \frac{1}{2}, b = -\frac{4}{3}, c = 12.$

II вариант:

1. $f(x) = x^3 - 3x^2 D_f: (-2, 4)$

а) $f'(x) = 3x^2 - 6x.$

$3x^2 - 6x = 0 \ \to 3x(x-2) = 0 \to x_1 = 0, \ x_2 = 2.$

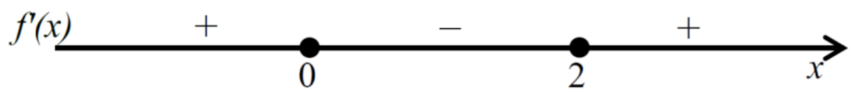


Рисунок 8 – Изображение к решению задания № 1 варианта II. Промежутки знакопостоянства $f'(x)$на числовой оси

$f(x)$ возрастает при $x \in (-2, 0), (2, 4)$,$f(x)$ убывает при $x \in (0, 2)$.

б) $x = 0$ – точка максимума $\to$ $f(0) = 0$ $(0, 0)$.

$x = 2$ – точка минимума $\to f(2) = 8 - 12 = -4$ $(2, -4)$

в) дополнительные исследования:

1) нули функции: $f(x) = x^2(x-3) \to x = 0$ и $x = 3$

2) $f(-2) = -8 - 3 \cdot 4 = -20;$ $f(4) = 64 - 3 \cdot 16 = 16.$

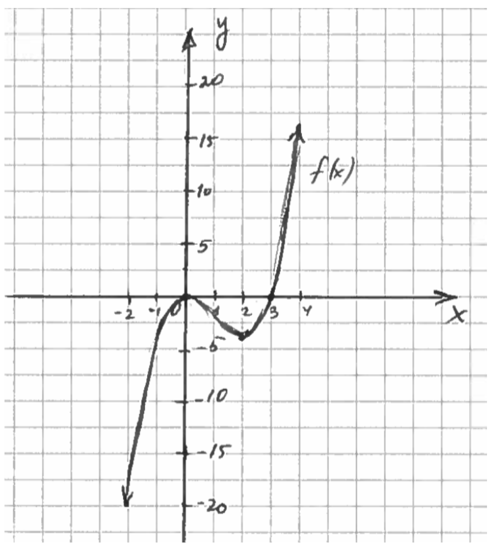


Рисунок 9 – Схематичный график $f(x)$ к решению задания № 1 варианта II

2. $\left.\begin{array}{l} f'(-3) = 0 \\ f''(-3) < 0 \end{array}\right\} \rightarrow\ x = -3$ – точка максимума.

$\left.\begin{array}{l} f'(2) = 0 \\ f''(2) > 0 \end{array}\right\} \rightarrow\ x = 2$ – точка минимума.

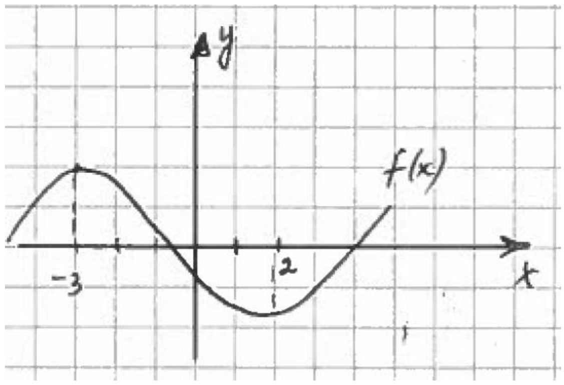


Рисунок 10 – Схематичный график $f(x)$ к решению задания № 2 варианта II

3. $f(x) = 5x^3 - x|x+1|$, так как $|x+1| = \begin{cases} x+1, & x \geq -1 \\ -x-1, & x < -1 \end{cases} \rightarrow$

$\rightarrow f(x) = \begin{cases} 5x^3 - x^2 - x, & x \geq -1 \\ 5x^3 + x^2 + x, & x < -1 \end{cases}$

1) $x = -1$

$\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -5 - 1 + 1 = -5$

$\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = -5 - 1 + 1 = -5$

$f(-1) = -5 - 1 + 1 = -5 \rightarrow f(x)$ непрерывна в точке $x = -1$

$\lim\limits_{x \to -1^+} f'(x) = 15 \cdot 1 - 2 \cdot (-1) - 1 = 16$

$\lim\limits_{x \to -1^-} f'(x) = 15 \cdot 1 - 2 \cdot (-1) + 1 = 14 \rightarrow x = -1$ – критическая точка, так как $f(x)$ недифференцируема при $x = -1$.

2) $f'(x) = \begin{cases} 15x^2 - 2x - 1, & x \geq -1 \\ 15x^2 + 2x + 1, & x < -1 \end{cases}$

Корни уравнения $f'(x) = 0$

а) при $x \geq -1$

$$15x^2 - 2x - 1 = 0 \ \rightarrow D = 4 + 60 = 64 \rightarrow x_{1,2} = \frac{2 \pm 8}{30} \rightarrow x_1 = \frac{1}{3},$$

$$x_2 = -\frac{1}{5}$$

б) при $x < -1$

$15x^2 - 2x - 1 = 0 \ \rightarrow \ D < 0$ →корней нет.

3) Промежутки знакопостоянства $f'(x)$ (Рисунок 11).

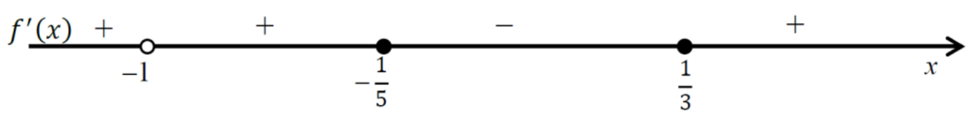


Рисунок 11 – Изображение для решения задания № 3 варианта 2. Промежутки знакопостоянства $f'(x)$

Ответ: критические точки: $x = -1$, $x = \frac{1}{3}$, $x = -\frac{1}{5}$; стационарные точки: $x = \frac{1}{3}$, $x = -\frac{1}{5}$; точка максимума $x = -\frac{1}{5}$, точка минимума $x = \frac{1}{3}$.

4. $f(x) = ax^4 + bx^2 + cx - 2$

$f'(x) = 4ax^3 + 2bx + c$

$f''(x) = 12ax^2 + 2b$

$f''(-2) = 0 \ \rightarrow 12a \cdot 4 + 2b = 0$

$f(1) = 2 \ \rightarrow a + b + c - 2 = 0$

$f'(2) = 0 \ \rightarrow 4a \cdot 8 + 2b \cdot 2 + c = 0$

Ответ: $a = \frac{4}{41}$, $b = -\frac{96}{41}$, $c = \frac{256}{41}$.

Контрольно-измерительные материалы по теме «Применение производной»

Пояснительная записка к контрольной работе

Письменная контрольная работа по теме «Применение производной» составлена для проведения в 12-м классе норвежской старшей школы на первом году профильного математического обучения естественно-научного блока (matematikk R1). Контрольная работа состоит из 2-х частей и рассчитана на 90 минут. Часть I учащиеся выполняют в течение 40 минут без использования дополнительных вспомогательных материалов. После сдачи части I контрольной работы у учащихся есть выбор формы контроля для части II. При этом во время выполнения части II ученикам разрешается пользоваться учебником и собственными конспектами, использование программы GeoGebra является обязательным.

Варианты выполнения части II контрольной работы:

A. «Письменный отчет». Учащиеся решают задания контрольной работы из части II письменно с возможным выбором между заданиями 6А, где функция, заданная аналитически, описывает практическую ситуацию, и 6Б – комбинированным заданием с привлечением наглядного материала (рисунок с изображением графика и геометрической фигуры). Задание 7 дается без выбора вариантов. Учащиеся работают 50 минут и сдают свою работу в виде документа, оформленного в Word с включением рисунков – изображений решений, полученных в GeoGebra.

B. «Озвучивание». Учащиеся выбирают одной из заданий части II контрольной работы, решают его под копирку в течение 20 минут, одну копию (оригинал) сдают учителю, вторую копию оставляют у себя и переходят в соседний класс (свободный кабинет) для записи озвучивания своего решения. Звуковой файл сдается через 30 минут – по окончании сдвоенного (90 минут) контрольного урока.

C. «2 + 2». Учащиеся выполняют устное задание – выбирают из части II контрольной работы одно задание на двоих, решают его в течение 30 минут и представляют учителю. По окончании презентации каждый учащийся отвечает на индивидуальные теоретические вопросы по теме.

D. «Постер». Учащиеся составляют отчет по изученной теме и оформляют его в виде постера, где кратко описывают теоретический материал, приводят примеры с решениями. Защита отчета проходит на следующем уроке, после презентации отчета-постера, ученики – его авторы, отвечают на вопросы одноклассников и учителя по теме контрольной работы.

Контрольная работа

Часть I (без дополнительных вспомогательных материалов)

Задание 1

Дана функция f, заданная выражением $f(x) = 2xe^{-x}$

а) Найдите точки экстремумов функции f.

б) Найдите точки перегиба на графике функции f.

в) Постройте схематичный график функции f.

Задание 2А

На рисунке (Рисунок 12) показан график функции f и касательная к графику в точке (0, f(0)).

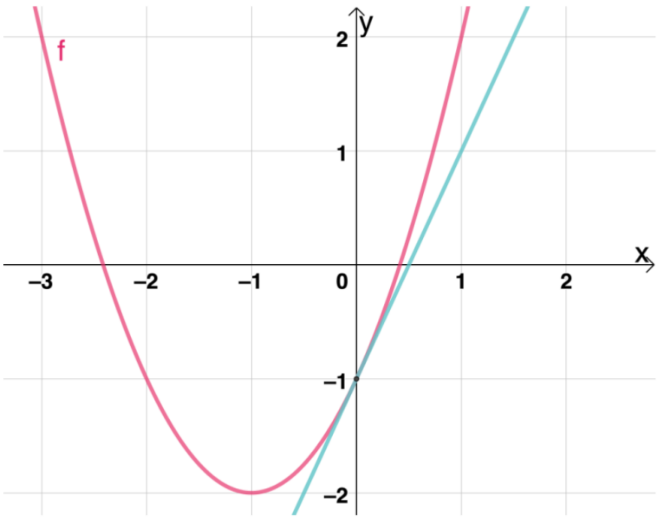


Рисунок 12 – Изображение к заданию 2А

Найдите значения $f'(-1)$ и $f'(0)$.

Задание 2Б

Функция h задана выражением $h(x) = 2e^{4-x}$, D_h: ℝ.

Георгий должен был найти значение $(h^{-1})'(1)$ и решил задачу следующим образом:

$$h(x) = 2e^{4-x} => h'(x) = -2e^{4-x}$$

$$(h^{-1})'(1) = \frac{1}{h'(1)} = -\frac{1}{2e^3}$$

Рассмотрите и оцените решение Георгия.

Задание 3

Функция g задана выражением $g(x) = \ln(x^2 + k) - x$.

Определите k таким образом, чтобы угловой коэффициент касательной в точке $(3,\ g(3))$ был равен 0.

Задание 4

На рисунке (Рисунок 13) изображен график производной функции f.

а) Отметьте на числовой прямой промежутки знакопостоянства$f'(x)$ и $f''(x)$.

б) Определите примерные значения координат xточек максимума, минимума и перегиба функции f.

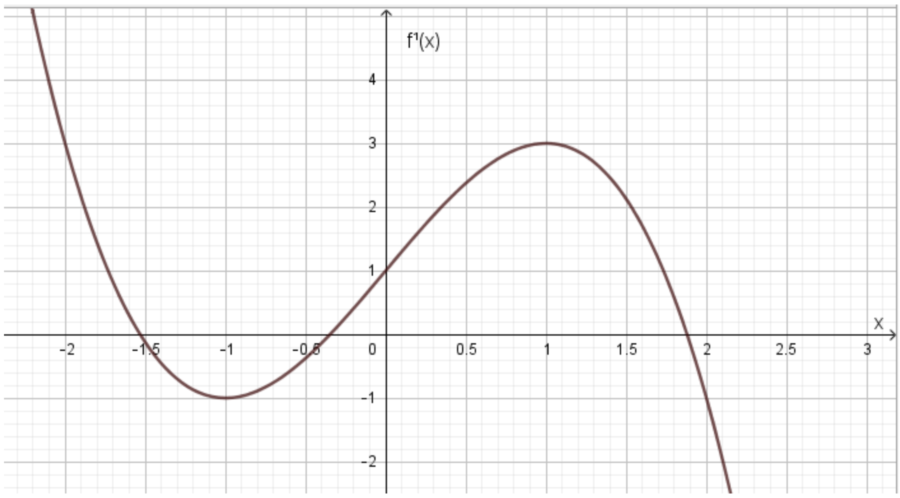


Рисунок 13 – Изображение к заданию 4

Задание 5

Вам известно о функции f, что она:

а) определена на промежутке $x \in (-5, 5)$;

б) непрерывна для всех значений области определения, за исключением $x = 2$;

в) дифференцируема во всех значениях области определения, за исключением ± 2;

г) равна нулю при $x = -1$ и $x = 1$.

Постройте схематичный график функции f.

Часть II

В задании 6 выберите один из вариантов: 6А или 6Б.

Задание 6А

Модель N задана выражением $N(t) = \frac{5000}{330e^{-0,25t}+1}$.

Модель описывает количество рыбы в Черном озере в период с 1950 до 2000 гг.

а) Найдите $N'(10)$. Что объясняет ответ о количестве рыбы в Черном озере?

б) Когда количество рыбы в Черном озере увеличивалось быстрее всего? Насколько быстро тогда росло число рыб? Сколько рыбы было в Черном озере в тот год?

Задание 6Б

Дана функция $f(x) = e^{0,2x}, \ \ x \in (0,10)$

На рисунке (Рисунок 14) изображены график функции f и прямоугольник *ABCD*.

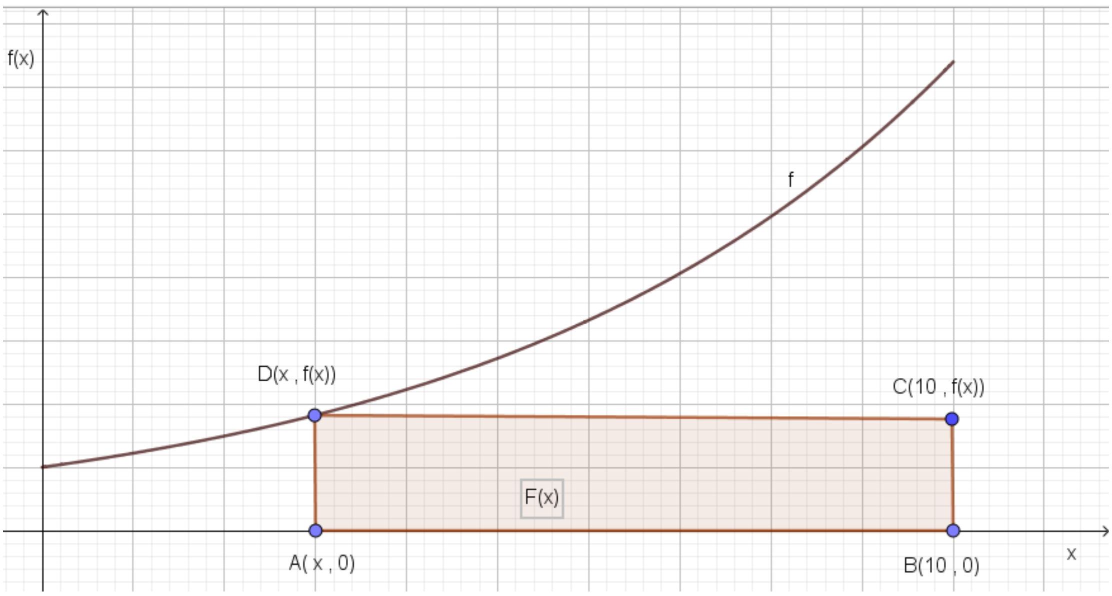


Рисунок 14 – Изображение к заданию 6Б

а) Найдите значение $f(4)$. Вычислите площадь прямоугольника *ABCD* при $x = 4$.

б) Объясните, что площадь прямоугольника на рисунке можно найти по формуле $F(x) = (10 - x)e^{0,2x}$.

в) Используйте CAS GeoGebra, чтобы найти координаты точки A, при которых площадь прямоугольника *ABCD* максимальная. Чему равна площадь прямоугольника в этом случае?

Задание 7

Пусть $p \in \mathbb{R}$и функция fзадана следующим образом

$$f(x) = \begin{cases} |x^3| \text{ при} - 3 \leq x \leq 1 \\ |3x - p| \text{при } 1 < 1 \leq 2 \end{cases}$$

а) Определите все значения pпри которых fнепрерывна в точке 1.

б) Существуют ли значения p, при которых fдифференцируема в 1?

Презентация и самооценка

Выберите и выполните один из вариантов для презентации: А – «Письменный отчет», В – «Озвучивание, С – «2 + 2» или D – «Постер», и представьте отчет по конрольной работе.

Проведите самооценку и планирования дальнейшей работы по структуре, представленной ниже.

Оценка собственных достижений в изучении темы «Применение производной»

После выполнения контрольных заданий, полезно оценить собственную работу. По итогам, вам нужно ответить на несколько вопросов, таких как:

– Что Вы знали до контрольной работы?

– Что Вы узнали, чему научились во время контрольной работы?

– Чем Вы были особенно довольны в своей работе?

– На что Вам надо обратить особое внимание, что улучшить?

– Опишите как вы работали с материалом при подготовке (Вы читали учебник? Смотрели видео-уроки с Интернет-ресурсов Ikrement, Lokus, Youtube и др.?)

– Опишите, что было сделано – запишите несколько ключевых пунктов для лучшего обзора.

– Насколько хорошо Вы поняли тему?

– Какие понятия, правила, формулы Вы узнали когда работали с учебным материалом и заданиями?

План на дальнейшую работу с производной и исследованием функций

В схеме, представленной ниже (Таблица 10), Вы можете записать цели и планы по их достижению. Ставьте перед собой четкие и реальные цели, формулируйте конкретные планы достижению этих целей. Сконцентрируйтесь не на количестве, а на качестве – выполнимости планов по достижению целей. Вы можете проводить оценку хода и результата работы каждую неделю или каждые две недели, и ставить перед собой новые цели и планы действий.

Таблица 10 – Схема составления плана дальнейшей работы по теме

№ недели	*Цель*	*План действий по достижению цели*
Номер	Текст	Текст

2.3 Особенности организации групповой работы в рамках элективного курса «Задачи с практическим содержанием по теме «Функция»

Пояснительная записка к элективному курсу

Программа элективного курса «Задачи с практическим содержанием по теме «Функция» освещает намеченные, но не совсем проработанные в общем курсе математики вопросы применения учащимися своих знаний по данной теме. Предлагаемый элективный курс составлен в соответствии с требованиями к математической подготовке учащихся основной школы и может быть использован, как в общеобразовательных, так и в классах с углубленным или профильным изучением математики, а также в качестве повторения темы «Функция» и подготовки к экзаменам, включая ОГЭ, ЕГЭ.

При необходимости курс можно разбить на отдельные модули и включать задания с практическим содержанием при изучении логарифмической, экспоненциальной функций, а также при изучении темы «Производная».

Этот курс направлен в первую очередь, на деятельностный компонент образования, что позволяет повысить мотивацию обучения, в определенной степени реализовать способности, возможности, потребности и интересы обучающегося. Курс нацелен на то, чтобы помочь учащимся сориентироваться и определить профиль будущей трудовой деятельности.

Цели курса: формирование готовности учащихся общеобразовательной школы (9 класс России, 11 класс в Норвегии) ответственно осуществлять выбор профиля обучения на старшей ступени (10-11 классы в России, 12-13 классы в Норвегии), в соответствии с их способностями и интересами; знакомство учащихся с методами применения теоретических знаний на практике.

Задачи курса:

– развитие познавательного интереса, интеллектуальных и творческих способностей учащихся в процессе самостоятельного приобретения знаний с использованием различных источников информации;

– повышение информационной, коммуникативной культуры, опыта самостоятельной деятельности;

– совершенствование умений и навыков в ходе выполнения программы курса, выполнения практических заданий, отбор и систематизация информации, подготовка презентации;

– овладение учащимися знаниями о широких возможностях применения функций в жизни человека.

– создание условий для осуществления связи обучения математике с жизнью,

– развитие межпредметных связей.

Элективный курс рассчитан на 17 часов в рамках предпрофильной подготовки учащихся (9 класса в России, 11 класса в Норвегии).

Оценивание

Для оценивания учебных достижений обучающихся по освоению элективного курса используется система: «зачет-незачет». Курс считается освоенным (зачтенным), если обучающийся посетил не менее 2/3 занятий по этому курсу и/или по окончании курса предоставил зачетную работу. Зачетная работа может быть выполнена в форме практической, презентационной, исследовательской работы, защиты проекта.

Метапредметными результатами изучения курса является формирование универсальных учебных действий (УУД).

Регулятивные УУД

Ученик получит возможность:

– самостоятельно обнаруживать и формулировать проблему в классной и индивидуальной учебной деятельности;

– выдвигать версии решения проблемы, выбирать средства достижения цели из предложенных или их искать самостоятельно;

– составлять (индивидуально или в группе) план решения проблемы;

– подбирать к каждой проблеме (задаче) адекватную ей теоретическую модель, составлять математические модели, описывающие жизненную ситуацию;

– использовать наряду с основными и дополнительные средства (справочная литература, компьютер, Интернет), работая по предложенному или самостоятельно составленному плану;

– планировать свою индивидуальную образовательную траекторию;

– работать по самостоятельно составленному плану, сверяясь с ним, исправляя ошибки, используя самостоятельно подобранные средства (например Интернет).

Средством формирования регулятивных УУД служат технология проблемного диалога на этапе изучения, повторения теоретического материала и метод проектов на этапе работы над практическим заданием.

Вход в проектную деятельность осуществляется в конце урока – повторения теоретического материала, а поиск информации, консультации, оформление презентации проходит во внеурочное время.

Познавательные УУД

Ученик получит возможность научиться:

– анализировать, сравнивать, классифицировать и обобщать факты и явления;

– строить логически обоснованное рассуждение, включающее установление причинно-следственных связей;

– создавать математические модели;

– составлять тезисы, различные виды планов (простых, сложных и т.п.).

– преобразовывать информацию из одного вида в другой (таблицу в текст, диаграмму и пр.);

– уметь определять возможные источники необходимых сведений, производить поиск информации, анализировать и оценивать её достоверность.

– использовать различные виды чтения (изучающее, просмотровое, ознакомительное, поисковое), приёмы слушания.

– уметь использовать компьютерные и коммуникационные технологии как инструмент для достижения своих целей.

Коммуникативные УУД

Ученик получит возможность:

– самостоятельно организовывать учебное взаимодействие в группе (определять общие цели, договариваться друг с другом и т.д.);

– отстаивая свою точку зрения, приводить аргументы, подтверждая их фактами;

– в дискуссии уметь выдвинуть контраргументы;

– учиться критично относиться к своему мнению, с достоинством признавать его ошибочность (если оно таково) и корректировать его;

– уметь взглянуть на ситуацию с иной позиции и договариваться с людьми иных позиций.

Средством формирования коммуникативных УУД служат технология проблемного диалога (побуждающий и подводящий диалог) и организация работы в малых группах, также использование на уроках элементов технологии продуктивного чтения.

Предметными результатами изучения элективного курса являются следующие умения:

– применять теоретические знания по теме «Функции» в практических ситуациях;

– использовать при решении задач с практическим содержанием теоретические знания об основных свойствах функций (линейных, полиномиальных, тригонометрических, экспоненциальных, потенциальных, рациональных, логарифмической), о построении графиков элементарных функций;

– уметь вычислять значения функции, определять, находить и записывать функцию, область определения и область значения функции. Задавать функцию с помощью таблиц, графиков, формул;

– записывать функциональные зависимости к текстовой задаче с практическим содержанием;

– находить точки пересечения графиков функций графически и аналитически. Находить ошибки в таблицах, на схематических чертежах, в решениях. Сравнивать графики функции. Применять компьютерные программы для построения графиков. Приводить примеры реальных явлений (процессов), количественные характеристики которых описываются с помощью линейной, квадратичной, тригонометрической, экспоненциальной, потенциальной, рациональной, логарифмической функций;

– решать текстовые задачи на вычисление процента инфляции;

– определять промежутки возрастания и убывания с помощью производной;

– находить наибольшее и наименьшее значения функции.

Учебно-тематическое планирование

Учебно-тематическое планирование элективного курса представлено в таблице ниже (Таблица 11).

Таблица 11 – Учебно-тематическое планирование элективного курса

Содержание темы	**Кол-во часов**	**Виды занятий**
Элективный курс «Задачи практического содержания по теме «Функция»	**17**	
1. Линейные функции. Теория. Решение задач с практическим содержанием	2	Уроки-практикумы Урок обобщения Проектная работа
2. Квадратичная, кубическая, рациональная функции	2	
3. Потенциальная, экспоненциальная функции	2	
4. Логарифмическая функция	2	
5. Тригонометрические функции	2	
6. Использование производной при решении практических задач	4	
7. Подведение итогов, защита проектов	3	

Краткое содержание разделов, модулей

Примеры задач с практическим содержанием

В качестве примера ниже приведены задачи практического характера

Задачи по теме «Линейная функция»

Задача 1

Численность зубров в заповеднике может быть найдена по формуле: $y = 50 + 3t$, где y – количество особей, а t – время (в годах). Найдите, сколько особей будет в данном заповеднике через 3 года. Через сколько лет в этом заповеднике будет 65 зубров?

Задача 2

Какой вес будет иметь аквариумная рыбка, поедающая 15 г сухого корма, и рыбка, поедающая 15 г живого корма? Сделать вывод о зависимости

$M(m)$. Одинакова ли эта зависимость для рыбки на сухом корме и на живом корме?

Задача 3

В организме человека всегда есть определенное количество бактерий, их около 10 тысяч. Во время эпидемии гриппа, если больной не принимает антибиотики, то количество бактерий в организме каждый день увеличивается на 100 тысяч. Сколько бактерий будет в организме человека через 3 дня, через 5 дней? Запишите формулу и ответьте на следующий вопрос: будет ли данная зависимость линейной?

Задача 4

Мы ставим кастрюлю с водой на плите. Температура воды в кастрюле 25 ˚С до того, как мы включим горелку. Через три минуты после того, как мы включили горелку, вода нагрелась до 70 ˚С. Пусть линейная функция T будет моделью, показывающей зависимость температуры T в ˚С от времени x в минутах. Опираясь на данные, приведенные выше, мы получаем две точки (0, 25) и (3, 70) на графике $T(x)$.

а) Какой будет функция, описывающая модель T?

б) Каким будет диапазон применимости модели T?

в) Как мы называем процесс, который вы использовали в задании а)?

Задача 5

Компания по доставке забирает небольшие посылки с предприятий и доставляет их заказчикам. Общая стоимость y, которую предприятие должно заплатить за доставку xпосылок, определяется линейной зависимостью $y = ax + b$ (крон). График на рисунке (Рисунок 15) иллюстрирует данную зависимость.

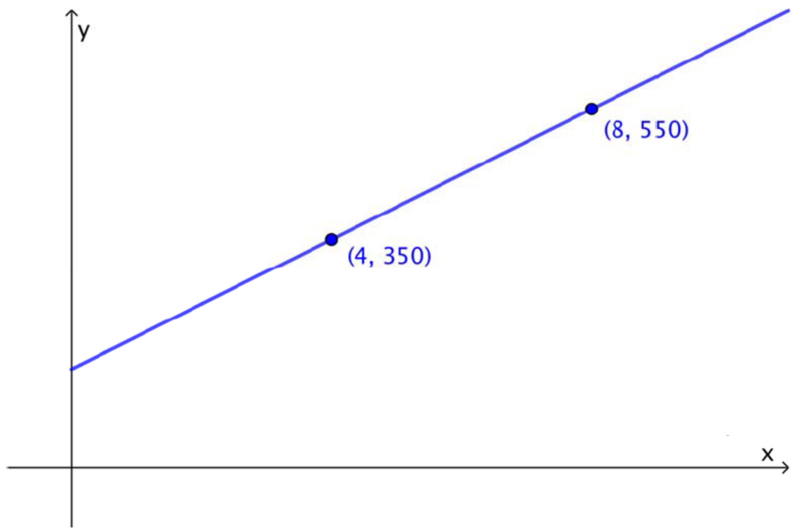


Рисунок 15 – График зависимости к задаче 5 элективного курса

а) Определите значения aи b.

б) Дайте практическое объяснение коэффициентов aи bв данном задании.

Задача 6

В парке отдыха посетители могут приобрести смузи в 0,5 литровом многоразовом стакане за 90 крон, который можно пополнять неограниченное количество раз, каждый раз доплачивая 15 крон. В том же парке можно купить 0,5 литровый одноразовый стакан со смузи за 35 крон.

а) Найдите линейную функцию f, показывающую зависимость стоимости fот количества xпорций, проданных в одноразовых стаканах.

б) Найдите линейную функцию g, показывающую зависимость стоимости g от количестваxпорций смузи, проданных в одном многоразовом стакане.

в) Нарисуйте графики функций fиgв одной системе координат. Определите по графикам, сколько порций смузи надо выпить, чтобы было выгоднее приобретать их в многоразовом стакане.

г) Определите, решив задачу аналитически, сколько порций смузи надо выпить, чтобы было выгоднее приобретать их в многоразовом стакане.

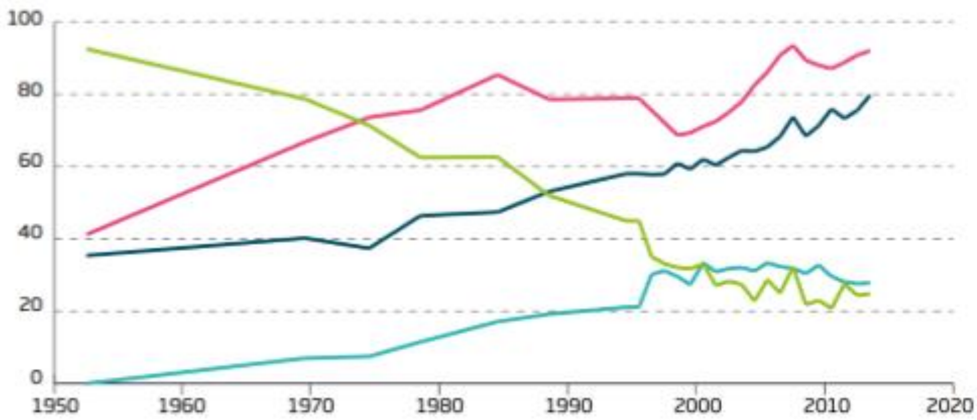
Задача 7

На диаграмме из доклада Директората здравоохранения Норвегии за 2015 год (Рисунок 16) показана структура среднего потребления четырех различных категорий овощей и фруктов населением в период с 1954 по 2014 годы.

а) Потребление фруктов (количество килограммов в среднем на человека в год) в период с 1954 по 1984 годы может быть описано с помощью функции $f(x) = ax + b$, где x – количество лет после 1954 года. Найдите значения aи b.

б) Дайте практическое толкование для коэффициентов aи b.

в) Дайте прогноз по потреблению фруктов (количество килограммов в среднем на человека) на 2022 год, используя модель, которую вы нашли в задании а). Объясните, может ли этот результат быть реалистичным? Дайте рекомендацию по продолжительности использования данной модели.



Потребление овощей и фруктов населением Норвегии (кг на человека в год): зеленая линия – картофель (свежий), розовая – фрукты, синяя – овощи, голубая – продукты из картофеля

Рисунок 16 – Диаграмма к задаче 7 элективного курса

Задача 8

Используя информацию, что шмель летит со скоростью 18 км/ч, а стрекоза – 10 м/с, составьте и решите задачу с использованием понятий – линейная функция, график линейной функции.

Задачи по теме «Квадратичная, кубическая, линейная функции»

Задача 9

Карл стоит на балконе и бросает в воздух мяч. Через t секунд мяч находится на высоте примерно $h(t)$ метров над землей, где $h(t) = -5t^2 + 10t + 15$.

а) Заполните таблицу, приведенную ниже (Таблица 12).

Таблица 12 – Таблица к задаче 9 элективного курса

t	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
h(t)							

б) Нарисуйте график функции $h(t)$.

в) Дайте практическое толкование значений $h(0)$ и $h(3)$.

Задачи по теме «Потенциальная, экспоненциальная функции»:

Задача 10

Вы должны найти зависимость между частотой сердцебиения и весом животных. У воробья весом 40 г частота пульс сердцебиения составляет 450 ударов в минуту, а у слона весом 6 тонн – 25 ударов в минуту.

а) Заполните приведенную ниже таблицу (Таблица 13).

Таблица 13 – Таблица для заполнения к задаче 10 элективного курса

Вес (кг)		
Частота сердцебиения (уд./мин.)		

Пусть m обозначает вес животного в кг, а $f(m)$ – частоту сердцебиения.

б) Используйте таблицу из задания а) и создайте потенциальную модель f, для расчета частоты сердцебиения $f(m)$ животного весом m кг.

в) Используйте модель f, чтобы определить частоту сердцебиения кошки весом 6 кг.

Задачи по теме «Логарифмическая функция»

Задача 11

Уровень шума L в дБ определяется по формуле $L = 10\lg I + 120$, где I – мощность звука в Вт/м^2.

а) Уровень шума на главной улице составляет 70 дБ. Какая величина мощности звука?

б) Найдите I, выраженное через L.

в) Как изменится уровень шума, если мощность звука увеличится вдвое?

Задачи по теме «Тригонометрические функции»:

Задача 12

Составьте задачу на использование свойств тригонометрических функций по рисунку с изображением треугольника (Рисунок 17).

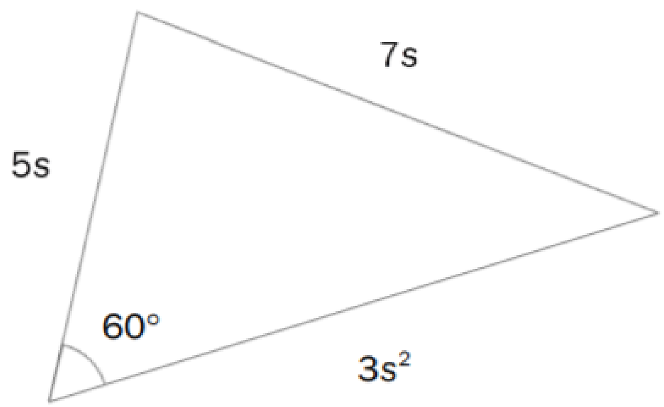


Рисунок 17 – Изображение треугольника к задаче 12 элективного курса

Задачи по теме «Использование производной при решении практических задач»

Задача 13

Модель N определяется как $N(t) = 300 \cdot (e^{-0,12t} - e^{-0,20t})$.

Модель показывает сколько людей в день заражается гриппом во время эпидемии, где $N(t)$ – количество человек, t – количество дней после начала эпидемии.

а) Определите $N'(2)$ и $N''(2)$. Что объясняют эти значения об эпидемии гриппа?

б) Когда были заражены наибольшее количество людей?

в) Решите уравнение $N''(t) = 0$. Какую практическую информацию об эпидемии нам дает корень/корни этого уравнения.

Примеры тем проектов

Примеры дифференцированных проектных заданий для учеников с разным уровнем математической подготовки.

Проекты могут использоваться как в индивидуальной, так и в групповой работе. Проекты дифференцированы по уровню подготовки – знаний и умений по математике учащихся (от высокогоА до низкого D по Р.А. Утеевой [73]) и степени оказываемой помощи учителем (от меньшей для A к большей для D).

Уровень А:

Количество особей в популяции можно описать следующей функцией: $f(x) = ax^4 + bx^2 + cx - 2,\ D_f \in \mathbb{R},\ a, b$ и c – константы.

Известно, что:

а) $x = 2$ – точка экстремума функции f;

б) $x = -2$ – точка перегиба функции f;

в) $f(1) = 2$.

Определите значения коэффициентов $a,\ b,\ c$ и используйте функцию $f(x)$ в качестве отправной точки, чтобы продемонстрировать свои знания по теме «Функции и производная».

Подготовьте устный доклад на 10-15 минут, чтобы охватить как можно больше ваших компетенций по данной теме. Вы должны презентовать основные правила расчетов с использованием компьютерных средств и без них.

Уровень В:

Зайдите на сайт Центрального статистического бюро. Выберите ваш муниципалитет, выберите раздел, который вам интересен и сделайте таблицу на основе данных этого раздела.

Уровень С:

Предложите модель, которая подходит для описания значений в таблице. Используйте в том числе и экспоненциальную функцию. В таблице ниже указано количество населения в Норвегии на 1 января указанного года (Таблица 14). Возьмите за х количество лет после 1960 года.

Таблица 14 – Данные для проектного задания Уровня С

Год	1960	1970	1980	1990	2000	2010	2017
Население (млн чел.)	3,57	3,86	4,08	4,23	4,47	4,85	5,25

Уровень D:

Вам надо создать модель развития пригородного железнодорожного сообщения в районе Трондхейма.

а) Зайдите на сайт Центрального статистического бюро и перейдите по ссылке в «Банк статистических данных». Выберите область статистики «Транспорт и туризм», далее «Наземный транспорт» и «Железнодорожный транспорт».

Выберите таблицу «10 484 Пассажирские перевозки поездами регулярного сообщения».

б) Вам следует указать переменные, которые должны быть включены в таблицу. В разделе «Статистические переменные» выберите «Пассажирские перевозки (пассажиро-километры)». В разделе «Год» нажмите «Выбрать все» и будут выделены годы с 2012 по 2019 включительно. В разделе «Маршруты поездов» выберите 140 пригородных поездов в районе Трондхейма. Для завершения нажмите «Показать таблицу» и таблица будет создана и выведена на экран.

Создайте линейную модель T, которая покажет объем пассажирских перевозок в пассажиро-километрах $T(x)$ в x год после 2021 года. Округлите значения до тысяч.

Общие инструкции для трех уровней – B, C и D

Используйте информацию, изложенную в проектном задании, в качестве отправной точки, чтобы показать свои знания в работе с математическими моделями. Желательно, чтобы вы показали, как широту знаний по предмету, так и глубину в рамках целей учебной программы, а именно:

– умение использовать цифровые информационные технологии для исследования и решения поставленных задач, связанных со свойствами функций;

– способность обсуждать решения;

– умение интерпретировать и использовать функции в математическом моделировании и решении задач.

Вы должны представить основные правила расчета и показать их применение как с помощью компьютерных средств, так и без них.

Оцениваются умения:

– представлять соответствующую теорию и использовать математические понятия;

– показывать примеры расчетов и обосновывать методы решений;

– использовать компьютерные средства там, где это целесообразно.

Среди *целей обучения*, отметим, что учащиеся должны в том числе уметь:

– использовать формулы нахождения производной степенной, экспоненциальной и логарифмической функций, а также использовать правила нахождения производной суммы, разности, произведения и частного функций;

– использовать формулы первой и второй производной при исследовании функций и интерпретации производных в моделях практических ситуаций;

– строить графики функций с помощью компьютерных программ и без них, объяснять основные свойства функции при помощи графика.

Примеры тем проектов

1. COVID-19 в Норвегии.
2. Транспорт в Норвегии.
3. Изменение климата.
4. Зеленая энергетика.

Занятие для предпрофильной подготовки в рамках элективного курса «Задачи с практическим содержанием по теме «Функция»

Задачи занятия:

– формирование умений представлять информацию в зависимости от поставленных задач в виде таблицы, схемы, графика, диаграммы, использовать компьютерные программы, такие как GeoGebra, Интернет при ее обработке;

– овладение учащимися математическим языком и аппаратом как средством описания и исследования явлений окружающего мира;

– овладение системой математических знаний, умений и навыков, необходимых для решения задач повседневной жизни;

– воспитание отношения к математике как к части общечеловеческой культуры

План занятия

1. Теория к занятию – повторение необходимых теоретических сведений по теме (10 минут).

2. Понятие линейной функции. Область определения и область значений. График функции. Построение графиков функций, заданных различными способами. Свойства функций. Примеры функциональных зависимостей в реальных процессах и явлениях.

3. Решение задач в группах (30 минут).

4. Работа над мини-проектами (46 минут).

5. Выбрать тему, найти информацию по выбранной теме, составить задачи, привести примеры линейных зависимостей в реальных процессах и явлениях.

6. Подведение итогов (5 минут).

Дополнительные задания

Задание I

Функция *f*задана как $f(x) = 2(x-3)^2$, $0 < x < 3$.

Прямоугольный треугольник ΔABC определяется вершинами $A(0,0), B(x,0)$ и $C(x, f(x))$ – (Рисунок 18).

а) Докажите, что площадь F треугольника ΔABC может быть описан формулой $F(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$.

б) Найдите x при котором площадь ΔABC будет максимальной.

в) Найдите площадь ΔABC при $x = 2$. Есть ли другие значения x, при которых площадь ΔABC будет такой же.

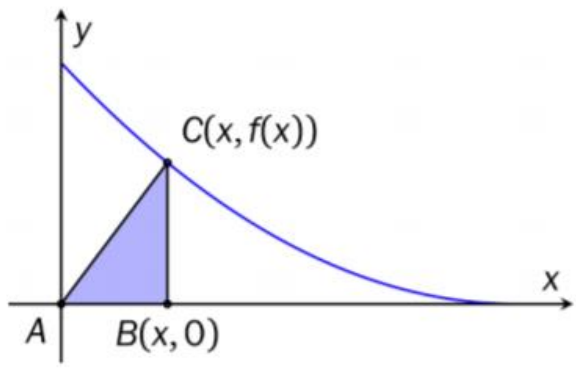


Рисунок 18 – Изображение к заданию I

Задание II

Ниже описаны 4 различные ситуации и построены 6 графиков.

Ситуация 1: Свен покупает квартиру за 2,5 миллиона крон. Он рассчитывает, что стоимость квартиры в будущем будет расти на 2 % в год.

Ситуация 2: Бьёрн изучал условия жизни популяции диких животных в горной экосистеме. По результатам исследований он предположил, что в будущем популяция будет уменьшаться на 15 особей в год.

Ситуация 3: На сегодняшний день в Норвегии проживает 5,3 миллиона человек. Мы предполагаем, что число жителей будет увеличиваться в ближайшие годы, но ежегодный прирост будет уменьшаться с годами.

Ситуация 4: Сири купила автомобиль за 300 тысяч крон. Она предполагает, что цена автомобиля в будущем будет уменьшаться на 15% в год.

Определите, какой из графиков на рисунке (Рисунок 19A, B, C, D, E, F) описывает каждую из ситуаций 1-4. Объясните свой выбор.

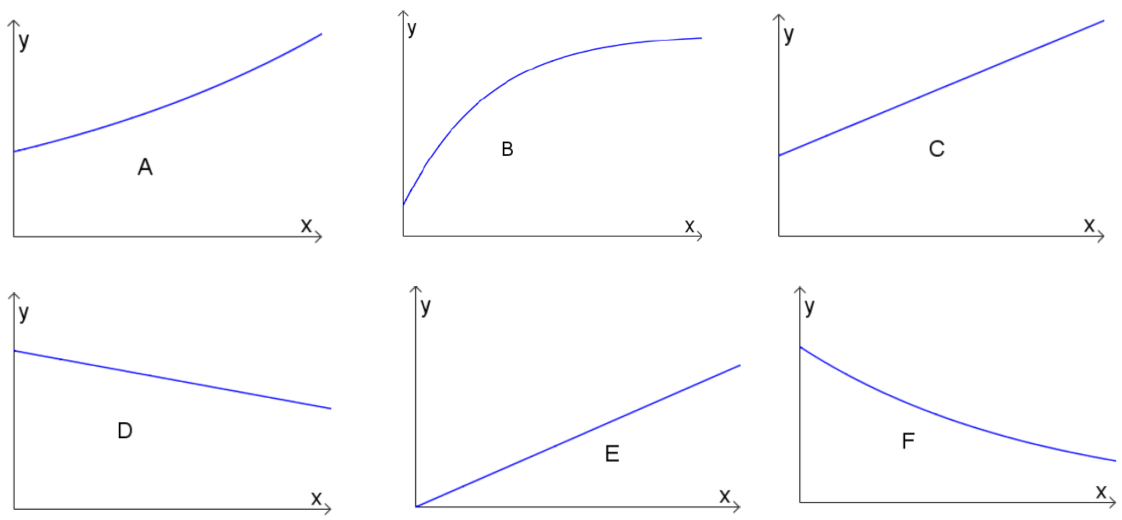


Рисунок 19 – Графики к заданию II

Задание III

График на рисунке (Рисунок 20) показывает, как изменялось количество рыбы в водоеме в течение определенного промежутка времени, где f – количество рыб (особей), x – время (недель).

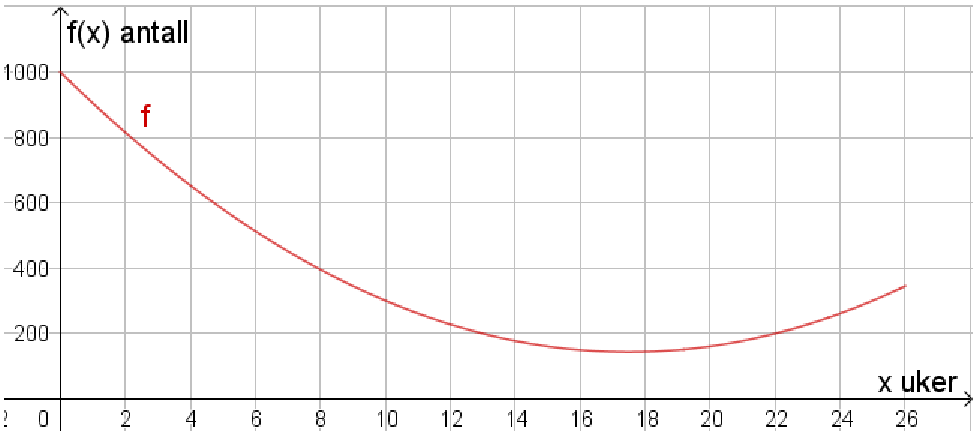


Рисунок 20 – График к заданию III

а) Какое было количество рыбы в водоеме в начале исследования и через 8 недель?

б) Через сколько недель после начала исследования в озере насчитывалось 400 особей рыб.

в) Отметьте на графике точку $f(13)$. Какую практическую информацию вы можете получить по этой точке.

г) Какое средняя скорость изменения $f(x)$ на промежутках [0, 8] и [13, 22]. О чем говорят эти результаты?

д) Найдите области определения и значения функции.

Задание IV

Кафе сдает в аренду зал вместимостью до 20 человек. Лиза арендует зал на празднование своего 18-летия. В стоимость празднования входит фиксированная цена за аренду зала плюс расходы на еду и напитки гостей. В таблице (Таблица 15) показана, как изменяется общая стоимость в зависимости от количества гостей.

Таблица 15 – Таблица к заданию IV

Количествогостей	10	15
Стоимостьпразднования, крон	2200	3030

а) Сколько стоит аренда зала?

б) Какова будет общая стоимость празднования для 18 гостей?

Рекомендуемые источники дополнительной информации по элективному курсу для учащихся:

1. COVID-19 в Норвегии. Статистические данные по заболеваемости COVID-19 в Норвегии. Режим доступа: https://www.covid19data.no/

2. Транспорт в Норвегии. Статистические данные Государственной транспортной службы Норвегии. Режим доступа: https://dataut.vegvesen.no/nb/dataset/

Рекомендуемая литература по элективному курсу для учителей:

1. УМК по математике для уровня R1 / Matematikk R1. Режим доступа: https://ndla.no/subject:1:734bd33b-da6d-49b0-bb34-c6df5b956f8e/

2. УМК по математике для уровня 1T / Matematikk 1T. Режим доступа: https://ndla.no/subject:1:8bfd0a97-d456-448d-8b5f-3bc49e445b37/

3. УМК по математике для уровня 1P / Matematikk 1P. Режим доступа: https://ndla.no/subject:1:a3c1b65a-c41f-4879-b650-32a13fe1801b/

4. Учебно-методические материалы по преподаванию в старших школах Норвегии / Aschehougunivers. Режим доступа: https://aunivers.lokus.no/

5. Учебно-методические материалы в помощь учителям математики в Норвегии / Campus Inkrement. Режим доступа: https://campus.inkrement.no/

2.4 Определение эффективности групповой формы работы при реализации многосенсорного подхода в обучении опытно-экспериментальным путем

Описание педагогического эксперимента

Этапы подготовки и реализации педагогического эксперимента:

Подготовительный этап

– реализация элективного курса «Задачи с практическим содержанием по теме «Функция» в параллели 11 классов старшей школы Трумсдален в рамках предпрофильной подготовки.

Констатирующий этап

– выбор экспериментальной и контрольной групп – двух 12-х классов естественно-научного профиля старшей школы Трумсдален для реализации педагогического эксперимента;

– диагностика учащихся и учителя контрольной и экспериментальной групп для определения ведущей репрезентативной системы;

– диагностика уровня знаний и умений по математике учащихся контрольной и экспериментальной групп.

Формирующий этап

– обучение учащихся контрольной и экспериментальной групп по теме «Функция» с реализацией многосенсорного подхода; организация групповой формы учебной деятельности в экспериментальной группе;

– реализация в экспериментальной группе разработанных в рамках исследования: подборки практических заданий для работы в группах при многосенсорном подходе в обучении, индивидуализированного дидактического материала – когнитивной карты по теме «Непрерывность функции в точке», подборки задач по теме «Функция», творческих мастерских по теме «Исследование функции с помощью производной».

– контроль знаний и умений в экспериментальной и контрольной группах по единым контрольно-измерительным материалам, включая разработанные в рамках исследования контрольные задания по теме «Применение производной».

Заключительный этап

– анализ результатов контроля знаний и умений в экспериментальной и контрольной группах;

– подведение итогов педагогического эксперимента.

Констатирующий этап педагогического эксперимента

Для реализации педагогического эксперимента выбраны два класса старшей школы (12-е классы старшей школы Трумсдален, г. Тромсё, Норвегия) естественно-научного профиля (realfag – R), изучающие математику по программе первого года углубленного уровня (matematikk R1 [93]): контрольная группа – 29 учащихся и экспериментальная группа – 30 учащихся.

В обоих классах была проведена диагностика учащихся и учителей, работающих в данных классах для определения ведущей репрезентативной системы. В обучении использовался многосенсорный подход с учётом индивидуальных стилей учащихся. При этом, в экспериментальном классе применялась групповая форма организации учебного процесса.

После определения 2-х классов – контрольной и экспериментальной групп, были проведены тестирования для определения ведущего типа репрезентативной системы каждого учащегося. Таким образом, по результатам 3-х видов тестов, наблюдений за учениками, была составлена «сенсорная карта» для каждого из классов.

Использованные тесты включали в себя следующие 3 тестовых способа, предложенных А. Пилигиным и А. Герасимовым [52]:

1. Визуальный способ:

Глядя на специальную карточку, ученику предлагалось запомнить в течение короткого времени ряд букв и цифр из 15 символов, после чего воспроизвести его в любой последовательности.

2. Аудиальный способ:

В данном способе учащиеся прослушивали ряд из 15 символов в течение короткого времени. Важно, чтобы учитель проговаривал звуки чётко, интонационно и достаточно громко. После этого учащимся предлагалось произнести вслух то, что они услышали в произвольном порядке.

3. Кинестетический способ:

Учащимся обратной стороной карандаша или пальцем на спине записывают поочередно 15 символов с секундным интервалом. Важно, чтобы тестирование проводилось в тишине с закрытыми глазами, чтобы достичь максимальной концентрации на выполнении теста. Проверку в данном способе можно проводить при помощи записи на бумаге всех символов в произвольном порядке. Данные способы тестирования были применены вместе с анкетированием, где учащиеся выбирали утверждения, наиболее точно описывающие их.

Ниже представлены результаты распределения учащихся по ведущему типу репрезентативной системы (Таблица 16 и Таблица 17).

На разных этапах обучения использовались различные способы формирования групп по типу ведущей репрезентативной системы восприятия. В ходе проведения педагогического эксперимента периодически проводились промежуточные тесты для отслеживания динамики в ведущей репрезентативной системе у учащихся экспериментальной и контрольной групп.

Таблица 16 – Результаты распределения учащихся по ведущему типу репрезентативной системы в экспериментальной группе (классе).

Тип ведущей репрезентативной системы	*Количество учеников*	*% от общего числа учеников в классе*
Визуал (В)	0	0 %
Аудиал (А)	2	7 %
Кинестетик (К)	3	10 %
Визуал-Аудиал (ВА)	5	17 %
Визуал-Кинестетик (ВК)	13	43 %
Аудиал-Кинестетик (АК)	7	23 %
Всего:	30	100 %

Таблица 17 – Результаты распределения учащихся по ведущему типу репрезентативной системы в контрольной группе(классе).

Тип ведущей репрезентативной системы	*Количество учеников*	*% от общего числа учеников в классе*
Визуал (В)	0	0 %
Аудиал (А)	0	0 %
Кинестетик (К)	1	3 %
Визуал-Аудиал (ВА)	6	21 %
Визуал-Кинестетик (ВК)	15	52 %
Аудиал-Кинестетик (АК)	7	24 %
Всего:	29	100 %

При промежуточном тестировании репрезентативной системы – каналов входа и выхода, учащимся предлагаются тесты математического содержания с подробными инструкциями как для работы в парах, так и для индивидуальной работы. При этом даются разъяснения, что целью тестов является отслеживание индивидуальной динамики способа работы с информацией.

Примеры заданий по теме «Формулы производной» для промежуточного тестирования каналов входа и выхода учащихся приведены ниже:

I. Вход – визуальный, выход – визуальный. Пример карточки для тестирования канала входа представлена на рисунке ниже (Рисунок 21).

Найдипроизводнуюфункции:

$(2x^3)'$	$(\frac{2}{3}x)'$	$(\sqrt{x})'$
$(3-x)'$	$(\frac{2}{3\sqrt{x}})'$	$(x^{-\frac{2}{3}})'$

Рисунок 21 – Пример карточки для тестирования визуального канала входа

Инструкция по выполнению задания теста:

1) Сядь удобно, не произноси никаких звуков, не делай никаких движений – изучи карточку в течение 15 секунд и запомни данные ряды функций. При воспроизведении вспомни эти функции, представляя карточку как фото.

2) Вывод информации: покажи в таблице (Рисунок 22) в любой последовательности те функции, которые тебе удалось запомнить.

$(3-x)'$	$(5-x)'$	$(\frac{2}{3\sqrt{x}})'$
$(\sqrt{x})'$	$(\frac{3}{2\sqrt{x}})'$	$(2x^3)'$
$(3x^2)'$	$(x^{-\frac{2}{3}})'$	$(\frac{2}{3}x)'$

Рисунок 22 – Пример карточки для тестирования визуального канала выхода

II. Вход – визуальный, выход – аудиальный. Карточка аналогичная карточке для тестирования канала входа из пункта I (Рисунок 21).

Инструкции по выполнению задания теста:

Сядь удобно – смотря карточку в течение 25 секунд, находи производные данных функций и вслух произноси ответы.

III. Вход – аудиальный, выход – кинестетический. Работая в паре, один ученик зачитывал задания с карточки (Рисунок 21), второй ученик (с аудиальным каналом входом и кинестетическим каналом выхода) записывал ответ.

Результаты педагогического эксперимента

Пояснительная записка – краткое описание школьной системы образования в Норвегии

Норвежская система школьного образования предусматривает 13-летние обучение и делится на три ступени – младшую, среднюю и старшую школы (Таблица 18).

Таблица 18 – Ступени школьного образования Норвегии

Наименование ступени образования	*Название ступени образования на норвежском языке*	*Классы*	*Возраст учащихся (лет)*
Младшая школа	Barneskole	1-7	6-13
Средняя школа	Ungdomsskole	8-10	13-16
Старшая школа	Videregåendeskole	11-13	16-19

Дети начинают обучение в школе с 6 лет и в большинстве случаев переходят в старшую школу в 16-летнем возрасте. Обязательным является образование в средней школе (grunnskole) с 1-го по 10-й классы, которая включает младшую школу с 1-го по 7-й классы (начальные классы с 1-го по 4-й и старшие начальные с 5-го по 7-й) и среднюю школу с 8-го по 10-й классы. В следующие годы обучения в старшей школе учащиеся могут выбирать либо профессиональное направление обучения, ориентированное на получение профессии по окончании школы и прохождении практики, либо обучение по программе общего образования в 11-13-м классах, ориентированное на поступление и продолжение учебы в университете.

В 11-м классе – на первом году обучения в старшей школе, учащиеся изучают математику (matematikk) по двум профильным уровням – практическом (praktikk – 1P [96]) и теоретическом (teori – 1T [97]) и проходят дополнительную предпрофильную подготовку для выбора дальнейшей программы обучения по математике. В 12-м классе учащиеся, освоившие программу уровня 1T, могут выбирать двухлетнюю программу по математике для гуманитарного профиля (samfunnsfag – S1 [94], S2 [95]) или естественно-научного профиля (realfag – R1 [93], R2 [98]), ориентированные на продолжение обучение в университете по соответствующим направлениям. Учащиеся, освоившие в 11 классе программу по математике уровня 1P продолжают в течение одного года обучение по программе базового уровня по математике для практического профиля (2P [92]) (Таблица 19). Углубленному уровню обучения математике старшеклассников соответствует программа для естественно-научного профиля старшей школы Норвегии (matematikk R1, R2).

Таблица 19 – Распределение программ обучения математике для различных профилей старшей школы Норвегии

Класс	*Профиль, программа обучения по математике*		
11	Практический, 1P	Теоретический, 1T	
12	Практический, 2P	Естественно-научный, R1	Гуманитарный, S1
13	Практический, (нет)	Естественно-научный, R2	Гуманитарный, S2

В начальной школе до 7 класса используют безоценочную систему контроля знаний. В средней и старшей школах с 8-го по 13-й класс учащиеся получают оценки по 6-и бальной системе, где «6» – высшая оценка, «1» - низшая и единственная неудовлетворительная оценка.

Касательно экзаменов, все учащиеся по окончании 10-го класса средней школы сдают по 4 обязательных экзамена – 2 устных и 2 письменных. Учащиеся узнают о том, по какие именно предметам и в какой форме им предстоит сдавать экзамены за 3 дня до даты испытаний.

По окончании первого года обучения на старшей ступени только 25 % от общего количества учащихся школы сдают экзамен (предмет и ученика выбирают случайным образом), после второго года обучения все учащиеся сдают экзамен по одному из предметов, и по окончании третьего года обучения в старшей школе (13-го класса) 100 % выпускников сдают по 2 устных и 2 письменных экзамена. Целью экзаменов является определение общего национального уровня знаний учащихся [108].

На экзаменах, включая выборочный экзамен после 11-го класса, как правило, представлены учащиеся с разным уровнем знаний и умений по предметам. При этом письменный экзамен по математике является единым по содержанию и централизованным по организации контроля. Ответы учащихся кодируются и отправляются на проверку внешним экзаменаторам – практикующим учителям школ, авторизованным для проверки экзаменационных работ соответствующего уровня (базового, углубленного). Устный экзамен проводится на базе школы, где учитель экзаменуемого является одним из экзаменаторов и имеет право совещательного голоса, итоговую оценку выставляет приглашенный экзаменатор – учитель соответствующего уровня другой школы города.

Результаты академической успеваемости по темам курса, годовой и экзаменационной аттестации учащихся экспериментальной и контрольной групп

Процедура и критерии выставления оценок за контрольные работы и письменные экзамены: 1) каждое задание оценивается в количество баллов в соответствии с его сложностью; 2) баллы переводятся в итоговые проценты выполнения заданий работы; 3) проценты выполненных заданий переводятся в оценку по шкале (Таблица 20).

Таблица 20 – Шкала перевода процентов выполненных заданий в оценку

%	[0, 25)	[25, 45)	[45, 60)	[60, 75)	[75, 95)	[95, 100]
Оценка	1	2	3	4	5	6

Результаты контроля знаний по темам курса представлены в таблицах и на диаграммах ниже: Таблица 21 – оценки за контрольные работы по темам и годовую контрольную работу по математике; Таблица 22 – итоговые оценки по математике за учебный год; Таблица 23 – оценки за годовые письменные экзамены учащихсяиз контрольной и экспериментальной групп (по 15); Таблица 24 – оценки за годовые устные экзамены учащихся из контрольной и экспериментальной групп (по 6); Рисунок 23 – диаграмма со средними оценками за контрольные работы и учебный год учащихся экспериментальной и контрольной групп; Рисунок 24 и Рисунок 25 – диаграммы со средними оценками за годовые контрольные работы, письменные и устные экзамены учащихся из контрольной и экспериментальной групп, выбранных для прохождения экзаменационных испытаний.

Сравнительный анализ результатов контроля знаний и умений, включая оценки за контрольные работы, письменные и устные экзамены учащихся контрольной и экспериментальной групп в ходе педагогического эксперимента, показал, что групповая работа является эффективной формой организации учебной деятельности при реализации многосенсорного подхода в обучении старшеклассников математике.

Таблица 21 – Результаты выполнения контрольных работ учащимися экспериментальной и контрольной групп

Оценка	Количество учеников контрольной группы (29)	Количество учеников экспериментальной группы (30)
	Тема «Степени и логарифмы»	
6	2	2
5	7	5
4	5	6
3	7	7
2	6	8
1	2	2
Средняя оценка	*3,52*	*3,33*
	Тема «Пределы, непрерывность, производная»	
6	2	2
5	6	7
4	6	8
3	8	10
2	6	3
1	1	0
Средняя оценка	*3,55*	*3,50*
	Тема «Применение производной. Обратные функции»	
6	1	4
5	8	8
4	8	8
3	7	9
2	5	1
1	0	0
Средняя оценка	*3,76*	*4,17*
	Тема «Векторы»	
6	3	4
5	8	9
4	7	7
3	6	10
2	5	0
1	0	0
Средняя оценка	*3,93*	*4,23*
	Тема «Математические модели»	
6	4	8
5	10	12
4	5	6
3	8	4
2	2	0
1	0	0
Средняя оценка	*4,21*	*4,80*

Продолжение Таблицы 21

Оценка	Количество учеников контрольной группы (29)	Количество учеников экспериментальной группы (30)
	Годовая контрольная работа	
6	2	6
5	8	8
4	7	9
3	11	7
2	1	0
1	0	0
Средняя оценка	*3,97*	*4,43*

Таблица 22 – Итоговые оценки по математике за 2021-2022 учебный год учащихся контрольной и экспериментальной групп

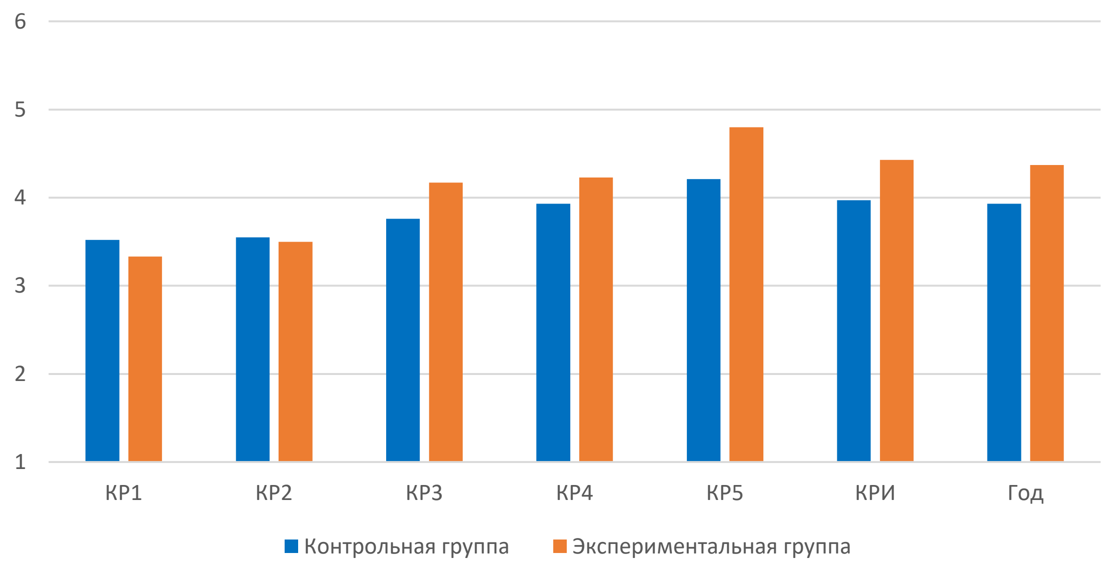
Оценка	*Количество учеников контрольной группы (29)*	*Количество учеников экспериментальной группы (30)*
	Итоговая оценка за учебный год	
6	3	5
5	8	9
4	7	8
3	6	8
2	5	0
1	0	0
Средняя оценка	*3,93*	*4,37*

Таблица 23 – Результаты письменного экзамена по математике учащихся из контрольной и экспериментальной групп

Оценка	*Количество учеников из контрольной группы (15)*		*Количество учеников из экспериментальной группы (15)*	
	Годовая контр. работа	**Письменный экзамен**	**Годовая контр. работа**	**Письменный экзамен**
6	1	2	2	4
5	5	5	4	5
4	3	4	6	5
3	4	2	2	1
2	2	2	1	0
1	0	0	0	0
Средняя оценка	*3,93*	*4,20*	*4,27*	*4,80*

Таблица 24 – Результаты устного экзамена по математике учащихся из контрольной и экспериментальной групп

Оценка	*Количество учеников из контрольной группы (6)*		*Количество учеников из экспериментальной группы (6)*	
	Годовая контр. Работа	**Устный экзамен**	**Годовая контр. работа**	**Устный экзамен**
6	1	1	1	2
5	2	3	1	3
4	1	0	2	1
3	1	1	2	0
2	1	1	0	0
1	0	0	0	0
Средняя оценка	*4,17*	*4,33*	*4,17*	*5,17*



Средние оценки: КР1-5 – контрольные работы по пяти темам курса, КРИ – итоговая годовая контрольная работа, Год – 2021-2022учебный год

Рисунок 23 – Средние оценки за контрольные работы и учебный год учащихся контрольной и экспериментальной групп

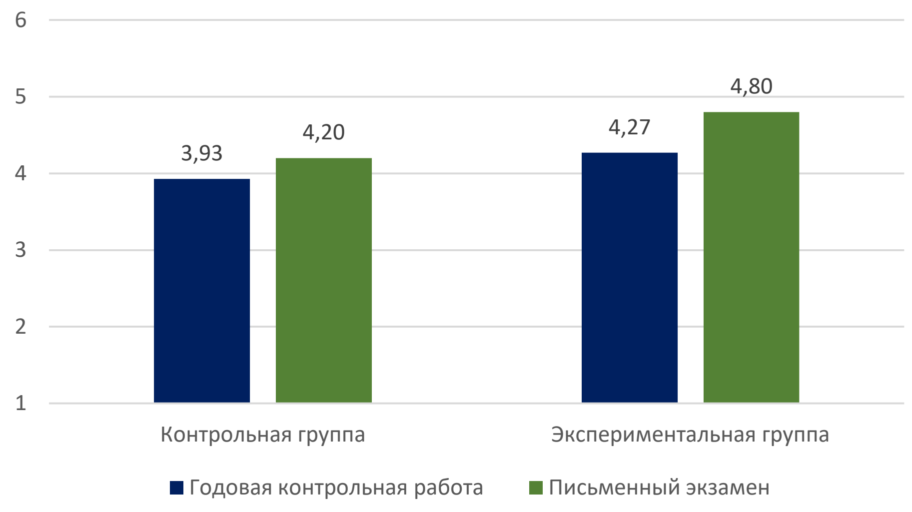


Рисунок 24 – Средние оценки за годовую контрольную работу и письменный экзамен по математике учащихся из контрольной и экспериментальной групп

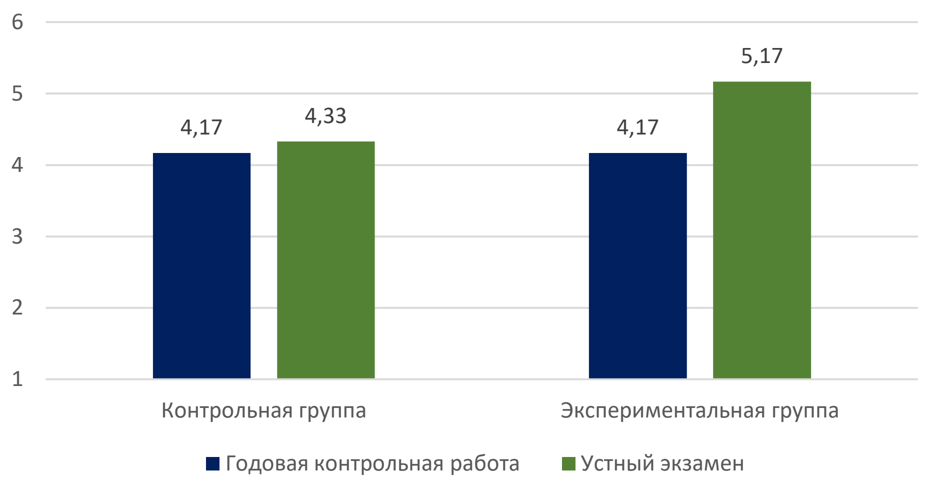


Рисунок 25 – Средние оценки за годовую контрольную работу и устный экзамен по математике учащихся из контрольной и экспериментальной групп

Выводы по второй главе

Во второй главе представлены разработки уроков, заданий и элективного курса по общей теме «Функция» для организации групповой формы учебной деятельности при реализации многосенсорного подхода в обучении математике. Был проведен педагогический эксперимент в классах естественно-научного профиля старшей школы Трумсдален, Норвегия.

Элективный курс «Задачи с практическим содержанием по теме «Функция» был реализован в ходе подготовительного этапа педагогического эксперимента и проведен в рамках предпрофильной подготовки во всей параллели 11 классов – первого года обучения в старшей школе Трумсдален.

Был реализован педагогический эксперимент, в ходе которого была проведена диагностика ведущих репрезентативных систем учащихся и учителя, апробированы технология педагогических мастерских [49, 66], технология М.В. Воловича [18] при групповой форме организации учебной деятельности и многосенсорном подходе в обучении математике. Разработан и апробирован индивидуализированный дидактический материал – когнитивная карта по теме «Непрерывность функции в точке». Разработаны и апробированы контрольно-измерительные материалы с учетом модальностей учащихся и возможностью групповой формы организации контроля знаний.

Практические задания для работы в группах по теме «Функция» и творческие мастерские по теме «Исследования функции с помощью производной» с групповой формой организации учебной деятельности были реализованы в ходе педагогического эксперимента в экспериментальной группе. В экспериментальной и контрольной группах использовались единые контрольно-измерительные материалы, включая централизованные экзамены.

Были подведены итоги педагогического эксперимента, сделан сравнительный анализ результатов контроля знаний и умений – промежуточных и итоговых контрольных работ и экзаменов в экспериментальной и контрольной группах.

Заключение

Опираясь на теорию и практику многосенсорного подхода в обучении [6], [39], [102], [105] и обоснование эффективности групповой формы организации учебно-познавательной деятельности Р.А. Утеевой [73], а также педагогические технологии личностно-ориентированного обучения И.С. Якиманской [83], обучения математике М.Б. Воловича [18] на основе теории формирований умственных действий П.Я. Гальперина [21], творческих мастерских А.А. Окунева [49], в рамках нашего исследования была:

– установлена актуальность применения многосенсорного подхода для обучения старшеклассников математике с учетом индивидуальных особенностей восприятия информации учащимися для улучшения академических результатов и интеллектуального развития личности;

– обоснована и апробирована групповая форма организации учебно-познавательной деятельности учащихся для реализации многосенсорного подхода при обучении старшеклассников математике;

– проведена диагностика ведущих репрезентативных систем учащихся и учителя 12-х классов естественно-научного профиля старшей школы Трумсдален, Норвегия – экспериментальной и контрольной групп в ходе педагогического эксперимента;

– разработаны и апробированы в ходе педагогического эксперимента задания с практическим применением по теме «Функция» в рамках технологии поэтапного формирования умственных действий;

– разработаны и апробированы педагогические творческие мастерские по теме «Исследование функции с помощью производной»;

– разработан и применен на практике индивидуализированный дидактический материал – когнитивная карта по теме «Непрерывность функции в точке»;

– разработан элективный курс «Задачи с практическим содержанием по теме «Функция» и апробирован на этапе предпрофильной подготовки учащихся 11 класса старшей школы Трумсдален, Норвегия;

– разработаны и апробированы контрольно-измерительные материалы, составленные с учетом модальностей учащихся и организацией групповой формы работы при контроле знаний;

– подтверждена экспериментально эффективность применения групповой формы организации учебной деятельности при реализации многосенсорного подхода в обучении математике на этапах изучения нового материала, формирования умений и навыков, контроля знаний.

Результаты проведенного исследования, включая результаты педагогического эксперимента, промежуточных и итоговых (годовых) контрольных работ и экзаменационных испытаний учащихся, подтвердили верность выдвинутой гипотезы об эффективности использования групповой формы организации учебной деятельности при реализации многосенсорного подхода в обучении старшеклассников математике.

При проведении педагогического эксперименты были выполнены условия:

1) успешно диагностировались и определялись ведущие репрезентативные системы;

2) использовались различные подходы формирования групп учащихся с учетом ведущей модальности на разных этапах обучения;

3) осуществлялась обратная связь «ученик-учитель», необходимая для корректировки дальнейшего обучения.

Список используемой литературы и используемых источников

1. Амонашвили Ш.А. Размышления о гуманной педагогике / Ш.А. Амонашвили. М.: Издательский дом Шалвы Амонашвили, 2001. 464 с.
2. Антонова И.В. О дифференцированной работе с учащимися при обучении математике в общеобразовательной школе / И.В. Антонова, К.В. Черкашина // Научное отражение. 2017. № 5-6 (9-10). С. 17-20.
3. Бабанский Ю.К. Избранные педагогические труды /сост. М.Ю. Бабанский. М.: Педагогика, 1989. 560 с.
4. Бамбуляк М.Ю. Арифметический: читаю и перевожу со словарем. Развитие математической речи учащихся 5-6 классов в контексте трудности и доступности учебного материала // Учительская газета. 2003. № 27(9952)
5. Бамбуляк М.Ю. Конспект урока в 8 классе по теме: «Решение дробных рациональных уравнений» // Педагогический вестник Карелии, № 1(12) Петрозаводск: ИПКРО, 2006 С. 15-17. Режим доступа: https://kiro-karelia.ru/images/journal/arhiv/pdf/1-12.pdf
6. Бамбуляк М.Ю. Личностно-ориентированное обучение и многосенсорный подход // Информационно-методический журнал «Северная Двина». 2004. № 3. С. 17-19
7. Бамбуляк М.Ю. Рассказываю о рассказанном – это обо мне… Учитель года: мастерство и вдохновение / Министерство образования и по делам молодежи Республики Карелия. Петрозаводск: Verso, 2004. С. 17-19
8. Бамбуляк М.Ю. Урок учителя // Учительская газета. 2002. (педагогическое эссе конкурса «Учитель года»)
9. Бамбуляк М.Ю. Уроки мастерства: сборник уроков и статей учителей года Карелии (выпуск 1) / сост. М.Ю. Бамбуляк. Петрозаводск: Ассоциация «Учитель Республики Карелия», 2010. 134 с.
10. Бендлер Р. Вводный курс НЛП тренинга: пер. с англ. / Р. Бендлер, Д. Гриндер. Нью-Йорк, 1978. 259 с.

11. Беспалько В.П. Программированное обучение: дидактические основы / В.П. Беспалько. М.: Высшая школа, 1970. 300 с.

12. Болтянский В.Г. К проблеме дифференциации школьного математического образования / В.Г. Болтянский, Г.Д. Глейзер // Математика в школе. 1988. № 3. С. 9-13.

13. Васильева Г.Н. Современные технологии обучения математике [Электронный ресурс]: учеб. пособие. Ч. 1 / Г.Н. Васильева, В.Л. Пестерева. Пермь: Пермский гос. гуманит.-пед. ун-т, 2013. 113 с. Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/32091.html

14. Веселова Т.Н. Особенности обучения кинестетиков на уроках иностранного языка как средство повышения профессиональной компетенции учителя и повышения качества образования. // Открытый урок. Первое сентября. 2010. Режим доступа: https://urok.1sept.ru/articles/584979

15. Виноградова М.Д. Коллективная познавательная деятельность и воспитание школьников: из опыта работы / М.Д. Виноградова, И.Б. Первин. М.: Просвещение, 1977. 159 с.

16. Волович М.Б. Легкий предмет – математика (о теории поэтапного формирования умственных действий Гальперина) // Народное образование. 1989. №10. С. 70-74.

17. Волович М.Б. Математика без перегрузок / М.Б. Волович. М.: Педагогика, 1991. 144 с.

18. Волович М.Б. Наука обучать. Технология преподавания математики / М.Б. Волович. М.: LINKA-PRESS, 1995. 280 с.

19. Волович М.Б. Система ориентиров – условие успешности обучения // Советская педагогика. 1988. №4. С. 54-58.

20. Выготский Л.С. Педагогическая психология / Л.С. Выготский; под ред. В.В. Давыдова. М.: Педагогика, 1991. 480 с.

21. Гальперин П.Я. Методы обучения и умственное развитие ребенка / П.Я. Гальперин. М.: Изд-во МГУ, 1985. 45 с.

22. Гальперин П.Я. Четыре лекции по психологии: учеб. пособ. для студ. вузов / П.Я. Гальперин. М.: Книжный дом Университет, 2000. 112 с.

23. Глейзер Г.Д. Проблемы индивидуальности и дифференциации в вечерней школе. Л.: Изд-во АПП СССР, 1981.

24. Гусев В.А. Методические основы дифференцированного обучения математике в средней школе: дисс. докт. пед. наук / В.А. Гусев. Москва, 1990. 398 с.

25. Дорофеев Г.В. Дифференциация в обучении математике / Г.В. Дорофеев, Л.В. Кузнецова, С.Б. Суворова, В.В. Фирсов // Математика в школе. 1990. №4. С. 15-21.

26. Дьяченко В.К. Организационная структура учебного процесса и ее развитие / В.К. Дьяченко. М.: Просвещение, 1989. 156 с.

27. Ершова А.Э. Влияние ведущей модальности на особенности восприятия учебной информации и формирование инженерных компетенций обучающихся. // VII Международный конкурс исследовательских работ/проектов учащихся и студентов «Магнит познания». Чебоксары: Экспертно-методический центр, 2019. 56 с.

28. Загвязинский В.И. Педагогический словарь: учеб. пособие для студ. высш. учеб. заведений / В.И. Загвязинский, А.Ф. Закирова, Т.А. Строкова и др. М.: Академия, 2008. 352 с.

29. Колягин Ю.М. Профильная дифференциация обучения математике / Ю.М. Колягин, М.В. Ткачева, Н.Е. Федорова // Математика в школе. 1990. № 4. С. 21-27.

30. Коменский Я.А. Педагогическое наследие / Я.А. Коменский, Д. Локк, Ж.-Ж. Руссо, И.Г. Песталоцци // сост. В.М. Кларин, А.Н. Джуринский. М.: Педагогика, 1989. 416 с. Режим доступа: http://jorigami.ru/PP_corner/Classics/Komensky/Komensky_Yan_Amos_Velikaya_didakt_izbr.htm

31. Концепция развития математического образования в Российской Федерации / Распоряжение Правительства РФ от 24.12.2013 № 2506-р.

32. Копелевич Ф.И. Учет индивидуальных особенностей учащихся при обучении математике: дисс. … канд. пед. наук. / Ф.И. Копелевич. СПб.: РГПУ им. А.И. Герцена, 2004. 245 с.

33. Котов В.В. О методах организации на уроках коллективной учебной деятельности // Математика в школе. 1978. № 3. С. 33-35.

34. Красильников Г.Т. Психологическое и клиническое значение функциональной асимметрии головного мозга / Г.Т. Красильников и др. // Социальная и клиническая психиатрия. 2019. Т. 29, № 4. С. 100-103.

35. Кузьмина Н.В. Методы системного педагогического исследования / Н.В. Кузьмина. Л.: Изд-во ЛГУ, 1980. 172 с.

36. Ливер Б.Л. Обучение всего класса / Б.Л. Ливер. М.: Новая школа, 1995. 48 с.

37. Лысенкова С.Н. Жизнь моя – школа, или право на творчество / С.Н. Лысенкова. М.: Новая школа, 1995. 237 с.

38. Любимов А.С. Мастерство коммуникации / А.С. Любимов. М.: Просвещение, 2008. 64 с.

39. Мельников М.В. Полимодальное представление информации в процессе профессиональной подготовки. // Педагогика высшей школы в техническом вузе. Известия Самарского научного центра РАН. 2013. Т. 15. № 4(4). С. 958-962.

40. Михайлова Е.В. Формирование субъектного познавательного опыта учащихся индивидуализированными средствами обучения. // Вестник КГУ им. Некрасова. 2008. Т. 14. № 1. С. 65-67

41. Михайлова Е.В. Формирование субъектного познавательного опыта учащихся индивидуализированными средствами обучения: автореф. дисс. ... канд. пед. наук. / Е.В. Михайлова. Петрозаводск: КГПУ, 2008. 24 (192) с.

42. Мордкович А.Г. Алгебра и начала анализа. 10 класс. В 2 ч. Ч. 1: учебник для общеобразовательных учреждений (профильный уровень) / А.Г. Мордкович, П.В. Семенов. 4-е изд., доп. М.: Мнемозина, 2007. 424 с.

43. Мордкович А.Г. Алгебра и начала анализа. 10 класс. В 2 ч. Ч. 2: задачник для общеобразовательных учреждений (профильный уровень) / А.Г. Мордкович и др.; под ред. А.Г. Мордкович, П.В. Семенов. 4-е изд., испр. М.: Мнемозина, 2007. 336 с.

44. Мордкович А.Г. Алгебра. 8 класс: учебник для общеобразовательных организаций (углубленный уровень). В 2 ч. Ч. 1 / А.Г. Мордкович и др.; под ред. А.Г. Мордковича. 15-е изд., стер. М.: Мнемозина, 2019. 288 с.

45. Мордкович А.Г. Алгебра. 8 класс: учебник для общеобразовательных организаций (углубленный уровень). В 2 ч. Ч. 2 / А.Г. Мордкович и др.; под ред. А.Г. Мордковича. 16-е изд., стер. М.: Мнемозина, 2019. 351 с

46. Мордкович А.Г. Алгебра. 9 класс: учебник для общеобразовательных организаций (углубленный уровень). В 2 ч. Ч. 1 / А.Г. Мордкович и др. 13-е изд., стер. М.: Мнемозина, 2019. 288 с.

47. Мордкович А.Г. Алгебра. 9 класс: учебник для общеобразовательных организаций (углубленный уровень). В 2 ч. Ч. 2 / А.Г. Мордкович и др.; под ред. А.Г. Мордковича. 13-е изд., стер. М.: Мнемозина, 2019. 287 с.

48. Мусенова Э.А. Техники нейро-лингвистического программирования как средство личностно ориентированного обучения старшеклассников: на примере образовательной области «Химия»: дис. … канд. пед. наук. Ульяновск, 2008. 238 с.

49. Окунев А.А. Как учить не уча [Электронный ресурс] / А.А. Окунев СПб: Питер Пресс, 1996. 448 с.

50. Павлова М.А. Интенсивный курс повышения грамотности на основе НЛП / М.А. Павлова. М.: Совершенство, 1997. 223 с.

51. Петрова Н.Ф. Педагогические мастерские как средство активизации познавательного интереса школьников // Мир науки, культуры, образования. 2012. № 4 (35). С. 209-210.

52. Плигин А.А. Исследование закономерностей развития репрезентативных систем школьников / А.А. Плигин, А.В. Герасимов // Вестник НЛП. 1996. №1. С. 29–34.

53. Полякова Т.С. Историко-методическая подготовка учителя математики: методический аппарат. Ростов-на-Дону: РГПУ, 1997. 64 с.

54. Разинов П.А. Математика без проблем: Индивидуальные когнитивные карты для учащихся 9-11 классов. (Часть III) // П.А. Разинов, Е.В. Михайлова, Т.М. Пархоменко. Петрозаводск: ИПКРО, 2005. 82 с.

55. Разинов П.А. Математика без проблем: Когнитивные карты для учащихся 5-6 классов (Часть 1) / П.А. Разинов, М.Ю. Бамбуляк, В.Г. Глазова, Е.В. Михайлова. Петрозаводск: ИПКРО, 2005. 69 с.

56. Разинов П.А. Математика без проблем: Когнитивные карты для учащихся 7-8 классов (Часть II) / П.А. Разинов, Е.В. Михайлова, В.В. Буйчик, М.Ю. Бамбуляк. Петрозаводск: ИПКРО, 2006. 69 с.

57. Рутенберг Д. Психодиагностика как необходимая составная часть педагогического мастерства учителя // Вопросы психологии. 1984. № 4. С. 149-152.

58. Рыжик В.И. Дидактические материалы по геометрии для 9 класса: для учащихся шк. и кл. с углубл. изуч. математики. / В.И. Рыжик, А.А. Окунев. М.: Просвещение, 1999. 112 с.

59. Садовская И.Л. Методика коррекции усвоения знаний в процессе обучения биологии в педагогическом вузе: дис… канд. пед. наук / И.Л. Садовская. М., 2000. 197 с.

60. Садовская И.Л. Методы обучения: новая концепция //Вестник Красноярского педагогического университета им. В.П. Астафьева. 2007. № 1. С. 56-61.

61. Селевко Г.К. Современные образовательные технологии: учеб. пособие / Г.К. Селевко. М.: Народное образование, 1998. 256 с.

62. Селевко Г.К. Энциклопедия образовательных технологий. В 2 т. Том 1 / Г.К. Селевко. М.: Народное образование, 2006. 816 с.

63. Сериков В.В. Образование и личность. Теория и практика проектирования педагогических систем / В.В. Сериков. М.: Логос, 1999. 272 с.

64. Скаткин М.Н. Проблемы современной дидактики / М.Н. Скаткин. 2-е изд. М.: Педагогика, 1984. 95 с.

65. Сластенин В.А. Психология и педагогика: учеб. пособие для студ. высш. пед. учеб. заведений / В.А. Сластенин, В.П. Каширин. М.: Академия, 2001. 480 с.

66. Стефанова Н.Л. Методика и технология обучения математике: лабораторный практикум: пособие для пед. вузов [Электронный ресурс] / Н.Л. Стефанова, Н.С. Подходова, В.В. Орлов и др.; под науч. ред. В.В. Орлова. М.: Дрофа, 2007. 320 с.

67. Талызина Н.Ф. Педагогическая технология: Психодиагностика интеллекта: учебно-методическое пособие / Н.Ф. Талызина, Ю.В. Карпов. М.: Изд. МГУ, 2007. С. 138

68. Темербекова А.А. Методика обучения математике: учеб. пособие / А.А. Темербекова, И.В. Чугунова, Г.А. Байгонакова. СПб.: Лань, 2015. 512 с.

69. Труфанова Ю.А. Техники нейролингвистического программирования в преподавании русского языка [Электронный ресурс]/ Ю.А. Труфанова // Информио, 2019. Режим доступа: https://www.informio.ru/publications/id4675/Tehniki-neirolingvisticheskogo-programmirovanija-v-prepodavanii-russkogo-jazyka

70. Унт И.Э. Индивидуализация и дифференциация обучения / И.Э. Унт. М.: Педагогика, 1990. 188 с.

71. УтееваР.А. Актуальные проблемы современной методики обучения математике // Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis / Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia 4 (2012): 167-174. Режим доступа: http://eudml.org/doc/296401

72. Утеева Р.А. Групповая работа как одна из форм деятельности учащихся на уроке // Математика в школе. 1985. № 2.

73. Утеева Р.А. Теоретические основы организации учебной деятельности учащихся при дифференцированном обучении математике в средней школе: дис. ... докт. пед. наук. / Р.А.Утеева. М.: Прометей, 1998. 363 с.

74. Федеральный государственный образовательный стандарт среднего общего образования / Приказ Минобрнауки РФ от 17.05.2012 г. № 413.

75. Федеральный перечень учебников, рекомендуемых к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ начального общего, основного общего, среднего общего образования организациями, осуществляющими образовательную деятельность / Приказ Минпросвещения России от 21.09.2022 г. № 858.

76. Холодная М.А. Психология интеллекта: парадоксы исследования / М.А. Холодная. СПб.: Питер, 2002. 272 с.

77. Чередов И.М. Система форм организации обучения в советской общеобразовательной школе / И.М. Чередов. – М.: Педагогика, 1987. 150 с.

78. Эллис А. Педагогические инновации / А. Эллис, Дж. Фоутс. М.: Изд. ИПОиМИО РАО, 1993. С. 46–47.

79. Якиманская И.С. Знание и мышление школьника / И.С. Якиманская. М.: Знание, 1985.78 с.

80. Якиманская И.С. Как развивать учащихся на уроках математики: учебно-методическое пособие / И.С. Якиманская. М.: МЭИ, 1996. 107 с.

81. Якиманская И.С. Личностно-ориентированное обучение в современной школе / И.С. Якиманская. М.: Сентябрь, 1996. 96 с.

82. Якиманская И.С. Развитие пространственного мышления школьников / И.С. Якиманская. М.: Педагогика, 1980. 240 с.

83. Якиманская И.С. Технология личностно ориентированного образования / И.С. Якиманская. М.: Сентябрь, 2000. 175 с.

84. Якиманская И.С. Требования к учебным программам, ориентированным на личностное развитие школьников // Вопросы психологии. 1994. №2. С. 64-76.

85. Alternativ og supplerende kommunikasjon (ASK) [Электронный ресурс]. Режим доступа: https://www.askstudio.no/

86. Bambulyak M. Forskningsoppgaver i matematikkundervisning i videregående skole // Sammenheng gjennom Undersøkende Matematikk undervisning konferanserapport. Trondheim: NTNU, 2022.

87. Bambulyak M. Gruppearbeid som en måte til å øke studentmotivasjonen // Nye læreplaner konferanserapport. Tromsø: Tromsfylke, 2020.

88. Bambulyak M. Innovasjoner i systemet for faglig utvikling av lærere // Rapport fra Morgendagens skole digital konferanse om lærerspesialistordningen. Oslo: Utdanningsdirektoratet, 2021.

89. Bambulyak M. Undervisning i matematikk – teori om gradvis dannelse av mentale handlinger // Fylkelærekonferanserapport. Tromsø: Tromsfylke, 2021.

90. Bandler R. Frogs into princess: neuro linguistic programming / R. Bandler, J. Grinder. Moab, UT: Real People Press, 1979. 194.

91. Bandler R. Reframing: neuro-linguistic programming and the transformation of meaning / R. Bandler, J. Grinder. Moab, UT: Real People Press, 1982. 208. https://www.academia.edu/23023626/

92. Borgan Ø. Matematikk 2P / Ø. Borgan, J. Engeseth, O. Heir, H. Moe, T.T. Norderahaug, S.M. Vie. Oslo: Aschehoug, 2021. 272.

93. Borgan Ø. Matematikk R1 / Ø. Borgan, I.C. Borge, J. Engeseth, O. Heir, H. Moe, T.T. Norderhaug, S.M. Vie. Oslo: Aschehoug, 2021. 414. Режим доступа: www.lokus.no/direkte/matematikkr1

94. Borgan Ø. Matematikk S1 / Ø. Borgan, I.C. Borge, J. Engeseth, O. Heir, H. Moe, T.T. Norderhaug, S.M. Vie. Oslo: Aschehoug, 2021. 385. Режим доступа: www.lokus.no/direkte/matematikks1

95. Borgan Ø. Matematikk S2 / Ø. Borgan, I.C. Borge, J. Engeseth, O. Heir, H. Moe, T.T. Norderhaug, S.M. Vie. Oslo: Aschehoug, 2022. 334. Режим доступа: www.lokus.no/direkte/matematikks2

96. Borge I.C. Matematikk 1P / I.C. Borge, J. Engeseth, H. Haug, O. Heir, H. Moe, T.T. Norderahaug, S.M. Vie. Oslo: Aschehoug, 2020. 423.

97. Borge I.C. Matematikk 1T / I.C. Borge, J. Engeseth, O. Heir, H. Moe, T.T. Norderahaug, S.M. Vie. Oslo: Aschehoug, 2020. 280.

98. Borge I.C. Matematikk R2 / I.C. Borge, J. Engeseth, O. Heir, H. Haug, H. Moe, T.T. Norderahaug, S.M. Vie. Oslo: Aschehoug, 2022. 472.

99. Chandrasekaran C. Computational principles and models of multisensory integration // Current Opinion in Neurobiology, 43: 25-34. doi:10.1016/j.conb.2016.11.002

100. Grinder J. Reframing: Neuro-linguistic programming and the transformation of meaning / J. Grinder, R. Bandler. Moab, UT: Real People Press, 1983. 381.

101. Grinder J. Whispering in the wind / J. Grinder, C. Bostics St Clair. Scotts Valley, CA: J & C Enterprises, 2001. 127.

102. Grinder M. Righting the educational conveyor belt / M. Grinder. Portland, OR: Metamorhpous press, 1991. 231. Режим доступа: https://archive.org/details/rightingeducatio00grin

103. Hirsch L.D. Likeverdig, inkluderende og tilpasset opplæring: masteroppgave i spesialpedagogikk / L.D. Hirsch. Oslo: UiO, 2007. 95.

104. Nasjonal Digital Læringsarena (NDLA) [Электронный ресурс]. Режим доступа: https://ndla.no/

105. Rains J.R. The evolution of the importance of multi-sensory teaching techniques in elementary mathematics: theory and practice / J.R: Rains, C.A. Kelly, R.I. Durham // Journal of Theory and Practice in Education. 2008. 4(2). 239-252.

106. Rosenberg L. The effects of multisensory, explicit, and systematic instructional practices on elementary school students with learning impairments in encoding and oral reading // Boston, Massachusetts: Northeastern University. 2015. doi:10.17760/D20194142

107. Stein B.E. The New Handbook of Multisensory Processing / B.E. Stein (ed.) // The MIT Press, 2012. doi:10.7551/mitpress/8466.001.0001

108. UDir. Eksamen [Электронный ресурс] / Utdanningsdirektoratet (UDir). Режим доступа: https://www.udir.no/eksamen-og-prover/eksamen/

109. UDir. Hvorfor har vi fått nye læreplaner? [Электронный ресурс] / Utdanningsdirektoratet. – 24.06.2021. Режим доступа: http://www.udir.no/laring-og-trivsel/lareplanverket/stotte/hvorfor-nye-lareplaner/