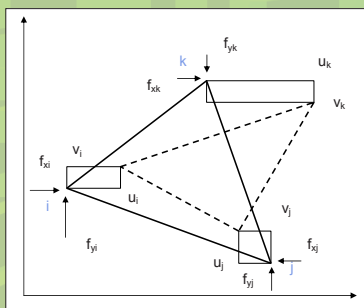


В.И. Булгаков

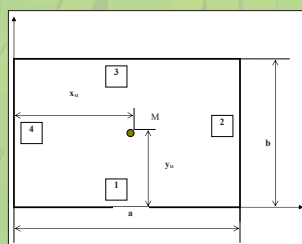
ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ В РАСЧЕТАХ СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Электронное учебно-методическое пособие



A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	M	N	O	P	Q
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14					4
16	-16	2	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5
8	21	-8	1	-8	3	0	0	0	0	0	0	0	0	6
1	-8	20	-8	2	-8	2	1	0	0	0	0	0	0	7
0	2	-16	19	0	4	-8	0	1	0	0	0	0	0	8
2	-16	4	0	20	-16	2	2	0	0	0	0	0	0	9
0	3	-8	2	-8	23	-8	-8	3	0	0	0	0	0	10
0	0	4	-8	-2	-16	20	4	-8	-1	0	0	0	0	11
0	0	2	0	2	-16	4	22	-16	2	0	0	0	0	12
0	0	0	1	0	16	-8	-16	25	-8	0	0	0	0	13
0	0	0	0	0	0	4	8	-32	20	0	0	0	0	14
														15
0.2	0.3	0.3	0.2	0.2	0.5	0.3	0.3	0	0.1	0	0.002667		0.007239	w ₁
0.2	0.6	0.6	0.3	0.4	1	0.5	0.6	1	0.2	0	0.002667		0.012961	w ₂
0.2	0.6	0.8	0.4	0.5	1.3	0.7	0.8	1	0.2	0	0.002667		0.016563	w ₃
0.2	0.6	0.8	0.5	0.5	1.4	0.7	0.8	1	0.2	0	0.002667		0.017772	w ₄
0.2	0.9	1	0.5	0.8	1.8	0.9	1.1	1	0.3	0	0.002667		0.023317	w ₅
0.3	1	1.3	0.7	0.9	2.4	1.2	1.5	2	0.4	0	0.002667		0.029861	w ₆
0.3	1	1.3	0.7	0.9	2.5	1.4	1.6	2	0.5	0	0.002667		0.032887	w ₇
0.3	1.2	1.6	0.8	1.1	3	1.6	2	2	0.6	0	0.002667		0.038308	w ₈
0.3	1.2	1.6	0.9	1.2	3.2	1.7	2.2	2	0.7	0	0.002667		0.041199	w ₉
0.3	1.3	1.7	1	1.2	3.4	1.9	2.3	3	0.8	0	0.002667		0.044266	w ₁₀

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ \vdots \\ F_{xm} \\ F_{ym} \end{Bmatrix} \quad \{U\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \\ v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{Bmatrix} \quad [K] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1j} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2j} & \dots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{i1} & k_{i2} & \dots & k_{ij} & \dots & k_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nj} & \dots & k_{nn} \end{bmatrix}$$



УДК (624.01:004.41) (075.8)
ББК 38.5:32.81

Рецензенты:

канд. техн. наук, директор ООО «Экспертный центр Кузнецова»
А.В. Кузнецов;
д-р техн. наук, профессор Тольяттинского
государственного университета *В.А. Ерышев*.

Булгаков, В.И. Численные методы в расчетах строительных конструкций : электронное учеб.-метод. пособие / В.И. Булгаков. – Тольятти : Изд-во ТГУ, 2014. – 1 электрон. опт. диск.

Электронное учебно-методическое пособие является своеобразным маршрутизатором по самостоятельному изучению дисциплины «Численные методы»; в нем приводится содержание разделов теоретического курса, теоретические сведения по основным темам, вопросы для самоподготовки.

Пособие предназначено для студентов заочной формы обучения направления подготовки бакалавра 270800.62 «Строительство».

Текстовое электронное издание

Рекомендовано к изданию научно-методическим советом Тольяттинского государственного университета.

Минимальные системные требования: IBM PC-совместимый компьютер; Windows XP/Vista/7/8; ПП 500 МГц или эквивалент; 128 Мб ОЗУ; SVGA; Adobe Reader.

Номер государственной регистрации электронного издания

© ФГБОУ ВПО «Тольяттинский
государственный университет», 2014

Редактор *О.И. Елисеева*
Технический редактор *З.М. Малявина*
Верстка: *Л.В. Сызганцева*
Художественное оформление,
компьютерное проектирование: *И.И. Шишкина*

Дата подписания к использованию 16.01.2014.
Объем издания 44 Мб.
Комплектация издания: CD-диск, первичная упаковка.
Заказ № 1-37-13.

Издательство Тольяттинского государственного университета
445667, г. Тольятти, ул. Белорусская, 14,
тел. 8 (8482) 53 91 47, www.tltsu.ru

ВВЕДЕНИЕ

Расчет строительных конструкций базируется на использовании ряда численных методов, актуальность применения которых возросла в настоящее время в связи с широким внедрением средств вычислительной техники в практику строительного проектирования.

Знание основных численных методов расчета строительных конструкций позволяет более качественно решать расчетные задачи как в плане подготовки исходных данных для расчета, так и в плане анализа полученных с помощью различных программных комплексов результатов.

1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

Дисциплина «Численные методы» (ДС1) наряду с другими выпускающими курсами завершает подготовку студентов заочной формы обучения направления подготовки бакалавра 270800.62 «Строительство».

Изучение дисциплины «Численные методы» на заочном отделении предусмотрено учебным планом в 9–10 семестрах. Распределение учебной нагрузки приведено в табл. 1.

Таблица 1

№ семестра	Количество недель в семестре	Количество аудиторных часов по плану			Всего часов СРС	Количество индивидуальных занятий	Форма итоговой аттестации
		Всего	Лекций	Практических занятий			
9	17	2	2				
10	17	6		6	100	Зачет	
Всего		8	2	6	100		

Распределение учебной нагрузки по семестрам

В 9-м семестре в соответствии с графиком учебного процесса предусмотрены лекционные занятия в период зимней экзаменационной сессии. В период данной сессии студенты получают вопросы для подготовки к сдаче зачета.

В 10-м семестре в период летней экзаменационной сессии студенты сдают зачет.

2. СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

2.1. Содержание теоретического курса

Таблица 2

Наименование разделов и тем, краткое содержание тем	Литература
Введение	
Раздел 1. Общие сведения	
1. Основные сведения из линейной алгебры. 2. Применение электронных таблиц для решения задач (на примере метода наименьших квадратов)	[*, с. 9–13; 2, с. 522–532; 1, с. 116–123]
Раздел 2. Расчет рамы методом перемещений	
1. Основные положения метода перемещений. 2. Составление системы канонических уравнений. 3. Матричное представление системы канонических уравнений. 4. Определение усилий в раме	[*, с. 14–22; 3, с. 165–175]
Раздел 3. Расчет балки на упругом основании	
1. Основные положения смешанного метода. 2. Составление системы уравнений. Матричное представление системы уравнений. 3. Определение усилий в балке на упругом основании	[*, с. 23–30]
Раздел 4. Расчет плиты методом конечных разностей	
1. Основные положения метода конечных разностей. 2. Определение прогибов плиты. 3. Определение усилий в плите	[*, с. 30–36; 4, с. 86–91]
Раздел 5. Применение метода конечных элементов для расчета строительных конструкций	
1. Основные положения метода перемещений. 2. Составление системы канонических уравнений. Матричное представление системы канонических уравнений. 3. Определение перемещений, напряжений и деформаций	[*, с. 37–40]

* – Данное учебно-методическое пособие.

2.2. Вопросы для самостоятельной подготовки

Раздел 1

1. Что называется матрицей?
2. Чем матрица отличается от определителя матрицы?
3. Какая матрица называется квадратной?
4. Какая матрица называется единичной?
5. Как получить транспонированную матрицу?
6. Чем характеризуется матрица-столбец?
7. Как получить сумму двух матриц?
8. Как умножить матрицу на число?
9. Что получается в результате умножения матрицы на матрицу?
10. Какое условие должно быть выполнено при умножении матриц?
11. Какая матрица называется обратной матрицей?
12. Как можно представить систему линейных алгебраических уравнений в матричной форме?
13. Каким образом можно получить решение системы линейных алгебраических уравнений в матричной форме?
14. Что такое электронная таблица (ЭТ)?
15. Какие данные можно хранить в ячейках ЭТ?
16. Как копируются данные в среде ЭТ Excel?
17. Как получить обратную матрицу в среде ЭТ Excel?
18. Как осуществляется умножение матриц в среде ЭТ Excel?

Раздел 2

1. Какие величины принимаются неизвестными в методе перемещений?
2. Как формируется система канонических уравнений метода перемещений?
3. Как определяются коэффициенты при неизвестных и свободные члены уравнений метода перемещений?
4. Как используется решение матричного уравнения метода перемещений?

Раздел 3

1. Чем характеризуется смешанный метод строительной механики?
2. Как представляется расчетная схема балки на упругом основании?
3. Как назначается длина участков, на которые делится балка на упругом основании?
4. Назовите типы участков при расчете балки на упругом основании.
5. Как записываются матричные уравнения для участков различных типов?
6. Что характеризует коэффициент постели?
7. Как формируется матрица упругих свойств системы (балки на упругом основании)?
8. Какие величины определяются в результате расчета?

Раздел 4

1. В чем заключается идея метода конечных разностей?
2. Каким дифференциальным уравнением описывается изгиб тонкой плиты?
3. Какие зависимости применяются для замены производных первого, второго порядка?
4. Чем заменяется дифференциальное уравнение изгиба тонкой плиты при применении метода конечных разностей?
5. С учетом чего нумеруются узлы сетки, накладываемой на плиту?
6. Чем отличаются граничные условия при шарнирном опирании плиты по контуру и при ее защемлении по контуру?
7. Чему равно количество неизвестных в системе заменяющих алгебраических уравнений?
8. Как определяются прогибы плиты?
9. Как определяются изгибающие моменты в плите?

Раздел 5

1. Основные предпосылки метода конечных элементов.
2. Как записывается основное матричное уравнение метода конечных элементов и какие величины оно связывает?
3. Сколько элементов содержит матрица-столбец перемещений, составленная для некоторой системы?
4. Какова размерность матрицы жесткости системы?
5. Как записывается матричное уравнение для треугольного конечного элемента?
6. Чему равна размерность матрицы жесткости треугольного конечного элемента?
7. Как определяются перемещения узлов треугольного конечного элемента?
8. Что нужно знать для того, чтобы определить напряжения и деформации в пределах треугольного конечного элемента?

3. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ ПО КУРСУ

3.1. Метод наименьших квадратов

Пусть имеется поле точек с координатами $(x_1, y_1), \dots, (x_i, y_i), \dots, (x_n, y_n)$, т. е. можно записать

$$y(x_1) = y_1, y(x_2) = y_2, \dots, y(x_i) = y_i, \dots, y(x_n) = y_n. \quad (3.1)$$

В окрестностях этих точек можно провести некоторую линию, отвечающую определенной функциональной зависимости $Y = f(x)$.

Зададим функцию в виде

$$Y = ax + b \quad (3.2)$$

и определим коэффициенты a и b таким образом, чтобы величина

$$F_1 = \sum_{i=1}^n (Y_i - y_i)^2 \quad (3.3)$$

была минимальна. Поэтому используем *метод наименьших квадратов*.

Функция достигает экстремума (максимума или минимума), если выполняются следующие условия:

$$\frac{\partial F_1}{\partial a} = 0; \quad \frac{\partial F_1}{\partial b} = 0. \quad (3.4)$$

В дальнейшем будет показано, что при выполнении условий (3.4) функция (3.3) достигает минимума.

Представим (3.3) в развернутом виде:

$$F_1 = (ax_1 + b - y_1)^2 + (ax_2 + b - y_2)^2 + (ax_2 + b - y_2)^2 + \dots + (ax_n + b - y_n)^2. \quad (3.5)$$

Определим первые производные и приравняем их нулю.

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial a} &= 2x_1(ax_1 + b - y_1) + \dots + 2x_i(ax_i + b - y_i) + \dots \\ &\dots + 2x_n(ax_n + b - y_n) = 0; \\ \frac{\partial F_1}{\partial b} &= 2(ax_1 + b - y_1) + \dots + 2(ax_i + b - y_i) + \dots \\ &\dots + 2(ax_n + b - y_n) = 0. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Систему уравнений (3.6) можно привести к виду

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \cdot a + \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \cdot b &= \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \cdot a + n \cdot b &= \sum_{i=1}^n y_i \end{aligned} \quad (3.7)$$

Решение системы уравнений (3.7) можно записать в виде

$$a = \frac{n \cdot \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \cdot \sum_{i=1}^n y_i}{n \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2} \quad (3.8)$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n y_i - a \cdot \sum_{i=1}^n x_i}{n} \quad (3.9)$$

Продифференцируем первое и второе условия (3.6) соответственно по a и b .

Получим

$$\frac{\partial^2 F_1}{\partial a^2} = 2x_1^2 + \dots + 2x_i^2 + \dots + 2x_n^2 > 0 \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial^2 F_1}{\partial b^2} = 2n > 0$$

Так как вторые производные неотрицательны в точке экстремума, функция F_1 достигает минимального значения.

При значениях коэффициентов a и b , вычисленных с помощью выражений (3.8) и (3.9), сумма квадратов отклонений всех точек от прямой минимальна.

В общем случае аппроксимирующая функция может быть записана в виде

$$Y = a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + a_{k-2} x^{k-2} + \dots + a_i x^i + \dots + a_1 x + a_0. \quad (3.11)$$

Для нахождения значений коэффициентов a_i составляется система уравнений, которая может быть представлена в матричной форме

$$A\vec{q} = \vec{b}, \quad (3.12)$$

где A – квадратная матрица, для определения элементов которой используются значения абсцисс точек x_i :

$$A = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n x_i^{2k} & \sum_{i=1}^n x_i^{2k-1} & \sum_{i=1}^n x_i^{2k-2} & \dots & \sum_{i=1}^n x_i^k \\ \sum_{i=1}^n x_i^{2k-1} & \sum_{i=1}^n x_i^{2k-2} & \sum_{i=1}^n x_i^{2k-3} & \dots & \sum_{i=1}^n x_i^{k-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{i=1}^n x_i^{k+1} & \sum_{i=1}^n x_i^k & \sum_{i=1}^n x_i^{k-1} & \dots & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i^k & \sum_{i=1}^n x_i^{k-1} & \sum_{i=1}^n x_i^{k-2} & \dots & n \end{pmatrix}; \quad (3.13)$$

q – матрица-столбец, в состав которой входят неизвестные коэффициенты a_i :

$$q = \begin{pmatrix} a_k \\ a_{k-1} \\ a_{k-2} \\ \dots \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix}; \quad (3.14)$$

b – матрица-столбец, элементы которой определяются с использованием значений координат точек:

$$b = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n x_i^k y_i \\ \sum_{i=1}^n x_i^{k-1} y_i \\ \dots \\ \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ \sum_{i=1}^n y_i \end{pmatrix}. \quad (3.15)$$

Решением матричного уравнения служит результат умножения обратной матрицы A^{-1} на матрицу-столбец b :

$$q = A^{-1}b. \quad (3.16)$$

Пример 1. Определить коэффициенты аппроксимирующей функции, заданной в виде $Y = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, с помощью МНК.

Координаты точек приведены в табл. 3.

Таблица 3

i	1	2	3	4	5	6	7	8
x	1	2	3	4	5	6	7	8
y	4	7	12	18	24	36	49	58

В данном примере параметры k и n равны соответственно 3 и 8.

Решение. Получим с использованием электронных таблиц Excel. В табл. 4 содержатся исходные данные и результаты расчета. Значения коэффициентов получены в ячейках S7:S10 (см. продолжение табл. 4).

Таблица 4

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	Σ	1
x^1	1	2	3	4	5	6	7	8	36	2
x^2	1	4	9	16	25	36	49	64	204	3
x^3	1	8	27	64	125	216	343	512	1296	4
x^4	1	16	81	256	625	1296	2401	4096	8772	5
x^5	1	32	243	1024	3125	7776	16807	32768	61776	6
x^6	1	64	729	4096	15625	46656	117649	262144	446964	7
										8
										9
										10
										11

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8		12
y	4	7	12	18	24	36	49	58	208	13
x^3*y	4	56	324	1152	3000	7776	16807	29696	58815	14
x^2*y	4	28	108	288	600	1296	2401	3712	8437	15
$x*y$	4	14	36	72	120	216	343	464	1269	16
n	8								208	17
										18
x	1	2	3	4	5	6	7	8		19
Y	4.394	6.647	11.2	17.78	26.12121	35.94156	46.97186	58.93939		20
$Y-y$	0.394	-0.353	-0.799	-0.216	2.121212	-0.05844	-2.02814	0.939394		21
$(Y-y)^2$	0.155	0.124	0.638	0.047	4.499541	0.003415	4.113346	0.882461	10.46	22
$Y-y$ B %	9.0	-5.3	-7.1	-1.2	8.1	-0.2	-4.3	1.6		23

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J

Продолжение табл. 4

	446964	61776	8772	1296		58815		1
	61776	8772	1296	204		8437		2
	8772	1296	204	36	b=	1269		3
A=	1296	204	36	8		208		4
								5
								6
	0.001684	-0.022727	0.0867	-0.083333		-0.045455	=a3	7
A⁻¹=	-0.02273	0.312771	-1.224026	1.214286		1.4231602	=a2	8
	0.0867	-1.224026	4.97102	-5.202381		-1.698052	=a1	9
	-0.08333	1.214286	-5.202381	6.071429		4.7142857	=a0	10

M	N	O	P	Q	R	S	T
----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------

В ячейках N2:Q5 содержатся элементы матрицы A , определенные в соответствии с (3.13), а в ячейках S2:S5 – элементы вектора b , вычисленные по (3.15).

В ячейках B2:I2 и B13:I13 содержатся заданные значения координат точек. Область B3:I7 включает вычисляемые значения x_i в степенях со 2 по 6, а область B14:I16 – произведения y соответственно на x^3 , x^2 и x . В столбце J вычислены соответствующие суммы, используемые при составлении матрицы A и вектора b .

В ячейках N7:Q10 размещается обратная матрица. Для ее вычисления надо использовать матричную функцию МОБР.

Результат (значения коэффициентов a_3 , a_2 , a_1 , a_0) получается после умножения обратной матрицы A на вектор b . Для этого следует воспользоваться матричной функцией МУМНОЖ.

3.2. Расчет рам методом перемещений

Для расчета балочных и рамных конструкций широко применяется *метод перемещений*. При значительном количестве неизвестных метода перемещений целесообразно использовать компьютерное программное обеспечение.

Расчет неразрезных балок и плоских рам может быть выполнен с использованием электронных таблиц. Рассмотрим раму, расчетная схема которой представлена на рис. 1.

Данная система является статически неопределимой. Количество неизвестных метода перемещений в данном случае равно 6.

Составим систему канонических уравнений (3.17), которая в данном случае будет включать 6 уравнений с 6 неизвестными $Z_2, Z_3, Z_5, Z_6, Z_7, Z_8$. Первые 4 неизвестные являются углами поворота сечений в узлах соответственно 2, 3, 5, 6 под действием внешней нагрузки, а последние два – линейными перемещениями узлов соответственно 5 (2) и 6 (3).

$$\begin{aligned}
r_{22}Z_2 + r_{23}Z_3 + r_{25}Z_5 + r_{26}Z_6 + r_{27}Z_7 + r_{28}Z_8 + R_{2p} &= 0 \\
r_{32}Z_2 + r_{33}Z_3 + r_{35}Z_5 + r_{36}Z_6 + r_{37}Z_7 + r_{38}Z_8 + R_{3p} &= 0 \\
r_{52}Z_2 + r_{53}Z_3 + r_{55}Z_5 + r_{56}Z_6 + r_{57}Z_7 + r_{58}Z_8 + R_{5p} &= 0 \\
r_{62}Z_2 + r_{63}Z_3 + r_{65}Z_5 + r_{66}Z_6 + r_{67}Z_7 + r_{68}Z_8 + R_{6p} &= 0 \\
r_{72}Z_2 + r_{73}Z_3 + r_{75}Z_5 + r_{76}Z_6 + r_{77}Z_7 + r_{78}Z_8 + R_{7p} &= 0 \\
r_{82}Z_2 + r_{83}Z_3 + r_{85}Z_5 + r_{86}Z_6 + r_{87}Z_7 + r_{88}Z_8 + R_{8p} &= 0
\end{aligned}
\tag{3.17}$$

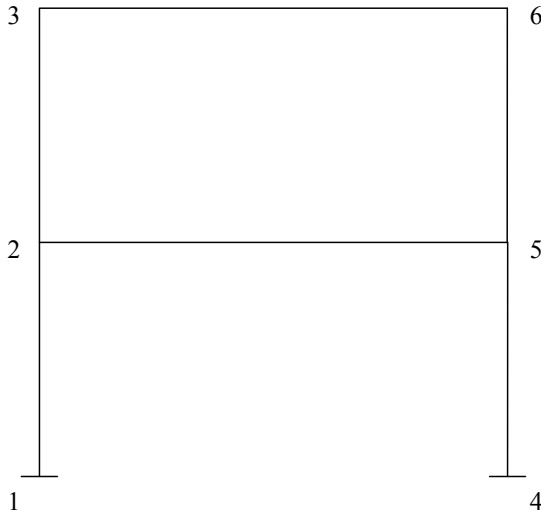


Рис. 1. Расчетная схема

Для определения коэффициентов и свободных членов уравнений рассматривается основная система, которая отличается от расчетной схемы наличием связей, наложенных по направлениям неизвестных. В узлах 2, 3, 5, 6 вводятся заделки, особенностью которых является то, что они препятствуют только поворотам соответствующих сечений и не препятствуют их линейным перемещениям. В узлах 5, 6, кроме того, вводятся линейные связи, препятствующие смещениям указанных узлов в горизонтальном направлении. Каждый элемент рамы рассматривается обособлен-

но как балка с жесткой заделкой с двух сторон (вариант 1) либо с защемлением с одной стороны и шарниром с другой (вариант 2).

Коэффициенты при неизвестных являются либо моментами, либо силами, возникающими в соответствующих узлах (первое значение индекса) соответственно от единичных поворотов или единичных перемещений определенных узлов (второе значение индекса) рамы.

Если первое значение индекса равно 2, 3, 5 или 6, то коэффициент соответствует моменту, возникающему от единичных поворотов узлов 2, 3, 5, 6 (второе значение индекса равно соответственно 2, 3, 5, 6) или от единичных линейных перемещений узлов 5 и 6 (второе значение индекса равно соответственно 7 или 8).

Если первое значение индекса равно 7 или 8, то коэффициент соответствует силе, возникающей от единичных поворотов узлов 2, 3, 5, 6 (второе значение индекса равно 2, 3, 5, 6) или от единичных линейных перемещений узлов 5 и 6 (второе значение индекса равно соответственно 7 или 8).

Аналогично величины R являются либо моментами, либо силами, возникающими от внешней нагрузки по направлениям неизвестных перемещений. Если в индексе присутствует 2, 3, 5, 6, то это момент. При наличии в индексе значений 7 и 8 величина соответствует силе.

При определении значений величин r_{ij} и R_i используются справочные таблицы (прил.), в которых для 1 и 2 вариантов опирания однопролетных балок приводятся значения моментов и реактивных сил, возникающих от единичных поворотов и единичных перемещений, а также от внешней нагрузки в виде сосредоточенных сил, моментов, равномерно распределенной нагрузки.

Система (3.17) может быть представлена в матричной форме

$$AZ + R = 0, \quad (3.18)$$

где A – матрица, составленная из коэффициентов r_{ij} ; Z – матрица-столбец, включающая неизвестные $Z_2 \dots Z_8$; R – матрица-столбец, включающая величины R_i .

Решение матричного уравнения (3.18) может быть получено путем умножения обратной матрицы A^{-1} на матрицу-столбец $(-R)$:

$$Z = A^{-1}(-R). \quad (3.19)$$

Формирование матрицы A и вычисления, связанные с использованием формулы (3.19), можно выполнить в среде ЭТ Excel.

Пример 2. Определить величину изгибающего момента в элементе 2-5 рамы, изображенной на рис. 1, при следующих значениях параметров, характеризующих систему:

- пролет $L = 6$ м;
- высота этажа $H = 3,3$ м;
- сечение колонны $b_k \times h_k = 400 \times 400$ мм;
- сечение ригеля $b_p \times h_p = 400 \times 800$ мм;
- модуль деформации материала $E = 20000000$ кПа;
- коэффициент Пуассона $\nu = 0,2$;
- равномерно распределенная нагрузка интенсивностью $q = 10$ кН/м приложена к элементам 2-5 и 3-6;
- равномерно распределенная нагрузка интенсивностью $p = 4$ кН/м приложена к элементам 1-2 и 2-3;
- равномерно распределенная нагрузка интенсивностью $p_1 = 3$ кН/м приложена к элементам 4-5 и 5-6.

Решение

1. Определяем погонные жесткости элементов рамы:

$$i_k = \frac{Eb_k h_k^3}{12H} = \frac{20000000 \cdot 0,4 \cdot 0,4^3}{12 \cdot 3,3} = 12929,3 \text{ кН/м};$$

$$i_p = \frac{Eb_p h_p^3}{12L} = \frac{30000000 \cdot 0,4 \cdot 0,8^3}{12 \cdot 6} = 56888,9 \text{ кН/м}.$$

2. Определяем значения элементов матриц A и R_p .

На примере узлов 2, 3 и 6 определим r_{ij} .

От единичного поворота сечения в узле 2 изгибающие моменты возникнут в элементах рамы 1-2, 2-3 и 2-5. Покажем эпюры M (прил.) в указанных элементах (рис. 2).

Определяем

$$r_{22} = 8i_c + 4i_p, r_{23} = 2i_c, r_{25} = 2i_p, r_{26} = 0, r_{27} = 0, r_{28} = -6i_c/H.$$

От единичного поворота сечения в узле 3 изгибающие моменты возникнут в элементах рамы 2-3 и 3-6. Покажем эпюры M (прил.) в указанных элементах (рис. 3).

Определяем

$$r_{33} = 4i_c + 4i_p, r_{35} = 0, r_{36} = 2i_p, r_{37} = 6i_c/H, r_{38} = -6i_c/H.$$

От единичного поворота сечения в узле 6 изгибающие моменты возникнут в элементах рамы 5-6 и 3-6. Покажем эпюры M (прил.) в указанных элементах (рис. 4).

Определяем

$$r_{66} = 4i_c + 4i_p, r_{67} = 6i_c/H, r_{68} = -6i_c/H.$$

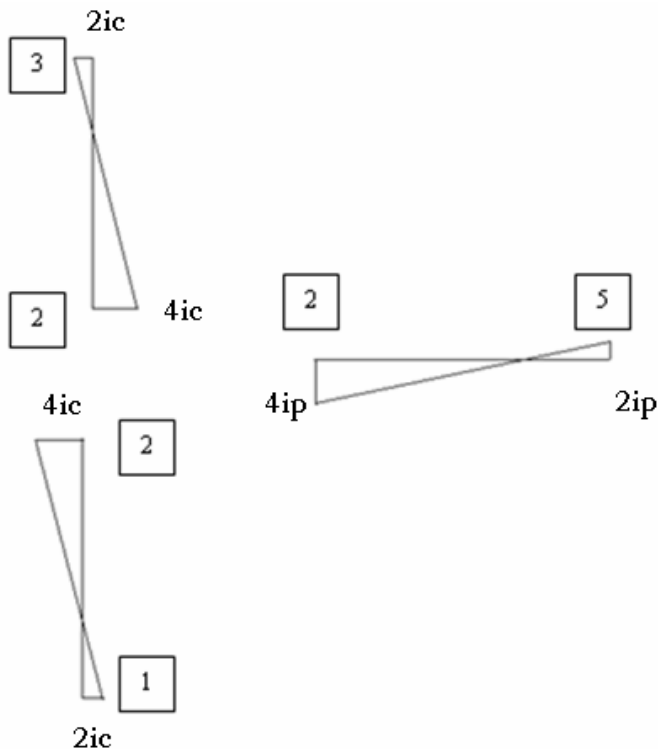


Рис. 2. Эпюры моментов от единичного поворота сечения в узле 2

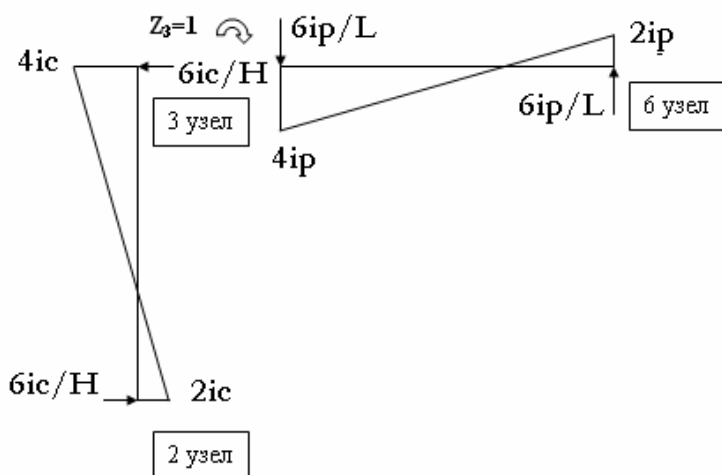


Рис. 3. Эпюры моментов от единичного поворота сечения в узле 3

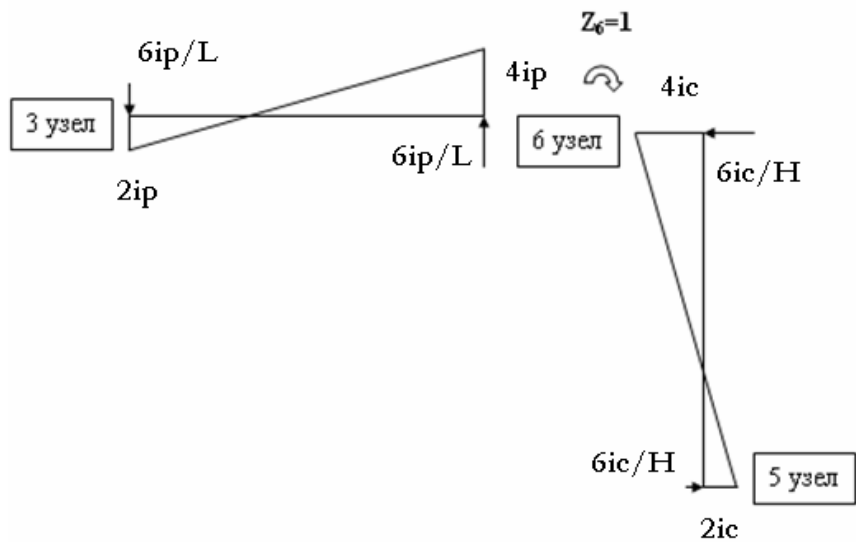


Рис. 4. Эпюры моментов от единичного поворота сечения в узле 6

По аналогии определяются другие элементы матрицы A :

$$\begin{pmatrix} 8i_c + 4i_p & 2i_c & 2i_p & 0 & 0 & -6i_c/H \\ 2i_c & 4i_c + 4i_p & 0 & 2i_p & 6i_c/H & -6i_c/H \\ 2i_p & 0 & 8i_c + 4i_p & 2i_c & 0 & -6i_c/H \\ 0 & 2i_p & 2i_c & 4i_c + 4i_p & 6i_c/H & -6i_c/H \\ 0 & 6i_c/H & 0 & 6i_c/H & \frac{48i_c}{H^2} & -\frac{24i_c}{H^2} \\ -6i_c/H & -6i_c/H & -6i_c/H & -6i_c/H & -\frac{24i_c}{H^2} & \frac{24i_c}{H^2} \end{pmatrix}$$

Заполним область электронной таблицы A1:M2 исходными данными (рис. 5). В таблице приняты следующие соотношения $L_c = H$, $L_p = L$. Ячейки E2, F2, J2, K2 содержат формулы. Например, в ячейке E2 размещена следующая формула = C2 D2 ^ 3/12. Формула содержит ссылки на ячейки, в которых хранятся соответствующие значения величин, входящих в формулу для определения (в данном случае) момента инерции поперечного сечения стойки I_c . Ячейки A2:D2, G2:I2, L2:N2 содержат числа, соответствующие исходным данным.

Матрица A размещена в области A4:F9, обратная матрица занимает область A11:F16. Она получена с помощью матричной функции МОБР. В ячейках, хранящих значения элементов матрицы A , записаны формулы для вычисления r_{ij} . Например, в ячейке A4 записана формула = 8 F2 + 4 K2 для вычисления r_{11} .

В области H4:H9 размещен вектор $-R$, содержащий значения R_i с обратным знаком. Например, в выделенной на рис. 5 ячейке H7 размещена формула для определения R_4 . Ее вид представлен в первой строке рис. 5.

Решение содержится в ячейках H11:H16. Первые четыре значения соответствуют углам поворота в радианах, последние два значения соответствуют линейным перемещениям в метрах. Решение получено с применением матричной функции МУМНОЖ.

H7 \rightarrow Δ = N2*B2*12/L4

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
	E	Lc	bc	hc	lc	ic	Lp	bp	hp	lp	ip	q	p	p1
1	20000000	3.3	0.4	0.4	0.00213333	12929.2929	6.00	0.4	0.8	0.017066667	56688.9	10	4	3
4	330989.899	25858.58586	113777.7778	0	0	-23507.8053		30			$qL_p^2/12=$	30		
5	25858.58586	279272.7273	0	113777.7778	23507.8053	-23507.8053		26.37			$pL_c^2/12=$	3.63		
6	113777.7778	0	330989.899	25858.58586	0	-23507.8053		-30						
7	0	113777.7778	25858.58586	279272.7273	23507.8053	-23507.8053		-32.7225						
8	0	23507.80533	0	23507.80533	56988.619	-28494.3095		23.1						
9	-23507.8053	-23507.8053	-23507.8053	-23507.8053	-28494.3095	28494.3095		11.55						
10														
11	370896E-06	-3.1673E-07	-9.6209E-07	4.16249E-07	2.2497E-06	4.5814E-06	22=	2.24E-04		0.00022364				
12	-3.1673E-07	4.4917E-06	4.16249E-07	-1.6653E-06	8.2105E-08	2.496E-06	23=	1.82E-04		0.00018168				
13	-9.8209E-07	4.16249E-07	3.70896E-06	-3.1673E-07	2.2497E-06	4.5814E-06	25=	-1.45E-05		-0.00001451				
14	4.16249E-07	-1.6653E-06	-3.1673E-07	4.4917E-06	8.2105E-08	2.496E-06	26=	-1.38E-04		-0.00013818				
15	2.24967E-06	8.21048E-08	2.24967E-06	8.21048E-08	3.6807E-05	4.2654E-05	27=	1.39E-03		0.00138857				
16	4.58145E-06	2.49599E-06	4.58145E-06	2.49599E-06	4.2654E-05	8.9427E-05	28=	2.00E-03		0.00200233				

Рис. 5. Решение задачи (пример 2)

На рис. 6 показаны значения перемещений узлов рамы, полученные с помощью альтернативного продукта. Из сопоставления значений следует, что они полностью совпадают.

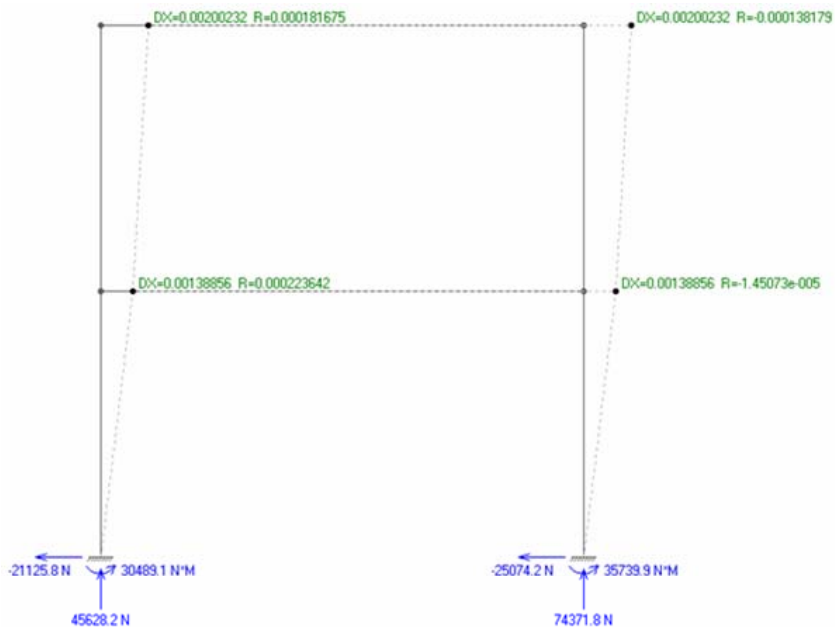


Рис. 6. Перемещение узлов рамы

Определив перемещения узлов рамы, можно определить моменты в произвольных сечениях каждого ее элемента.

Составим уравнения для вычисления значений моментов в произвольных сечениях участков 2-3 (колонна) и 3-б (ригель).

При составлении уравнений воспользуемся эпюрами M , построенными для всех единичных и внешних воздействий на элемент. При этом эпюры от единичных воздействий корректируются путем умножения значений моментов на соответствующие значения перемещений. Сумма указанных значений M в любом сечении соответствует действующему в данном сечении изгибающему моменту.

Для участка 2-3 получим уравнение

$$M_x = -6i_c z_2 x / L_c + 4i_c z_2 - 6i_c z_3 x / L_c + 2i_c z_3 - 12i_c z_7 x / (L_c)^2 + 6i_c z_7 / L_c + 12i_c z_8 x / (L_c)^2 - 6i_c z_8 / L_c - p(L_c)^2 / 12 + p(L_c)x / 2 - px^2 / 2.$$

Поместив в ячейку A20 значение x , можно разместить в ячейке A21 формулу для вычисления значения момента в сечении, соответствующем x :

$$= -6 \text{ F2 Н11 A20/B2} + 4 \text{ F2 Н11} - 6 \text{ F2 Н12 A20/B2} + 2 \text{ F2 Н12} - 12 \text{ F2 A20 Н15/(B2 ^ 2)} + 6 \text{ F2 Н15/B2} + 12 \text{ F2 A20 Н16/(B2 ^ 2)} - 6 \text{ F2 Н16/B2} - \text{L5} + \text{M2 B2 A20/2} - \text{M2 A20 ^ 2/2}.$$

Значение $x = 0$ соответствует узлу 2. Для узла 3 $x = 3,3$ м.

Для участка 3-6 получим уравнение

$$M_x = -6i_p z_3 x / L_p + 4i_p z_3 - 6i_p z_6 x / L_p + 2i_p z_6 - q(L_p)^2 / 12 + q(L_p)x / 2 - qx^2 / 2.$$

Разместим в ячейке A22 формулу для вычисления значения момента в сечении, соответствующем x :

$$= -6 \text{ K2 Н12 A20/G2} + 4 \text{ K2 Н12} - 6 \text{ K2 Н14 A20/G2} + 2 \text{ K2 Н14} - \text{L2 G2 ^ 2/12} + \text{L2 G2 A20/2} - \text{L2 A20 ^ 2/2}.$$

Значение $x = 0$ соответствует узлу 3. Для узла 6 $x = 6$ м.

Определяем значения M при $x = 0$ для ригеля и при $x = 3,3$ м для стойки. Получим одно и то же значение 4380,54 кНм, что свидетельствует о равновесии узла 3.

Сопоставив внешнюю нагрузку и реакции, можно сказать, что вся система в целом (рама) также находится в равновесии: проекции всех сил и реакций на горизонтальную и вертикальную оси равны нулю, а также равны нулю моменты указанных факторов относительно опорных узлов.

3.3. Расчет балки на упругом основании

Рассмотрим *смешанный метод* строительной механики применительно к расчету балок на упругом основании. На рис. 7 приведена схема балки длиной L , имеющей ширину и высоту поперечного сечения соответственно B и h . К балке приложены сосредоточенные силы $P_1 \dots P_4$. Основание характеризуется коэффициентом постели k_0 .

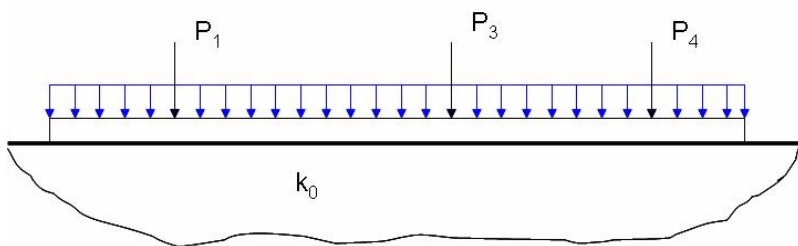


Рис. 7. Схема балки на упругом основании

Разделим балку на отдельные участки, выполняя следующие рекомендации:

1) длина участка l_y не должна превышать значение, которое определяется по формуле

$$l = \sqrt[4]{\frac{4EI}{k_0 B}}, \quad (3.20)$$

где E – модуль деформаций материала балки, кПа; I – момент инерции поперечного сечения балки относительно горизонтальной оси, проходящей через центр сечения, м^4 ;

2) границы участков необходимо совмещать с линиями действия сосредоточенных сил.

Расчетная схема балки представлена на рис. 8. На схеме показаны реакции опор r , осадки опор Z , изгибающие моменты x , углы поворота сечений ν .

Всего рассматривается пять участков, каждый из которых можно отнести к одному из трех типов:

– тип 1 характеризуется наличием шарнирного опирания слева и заделкой правого конца;

- тип 2 характеризуется заделкой обоих концов;
- тип 3 характеризуется заделкой слева и шарнирным опиранием справа.

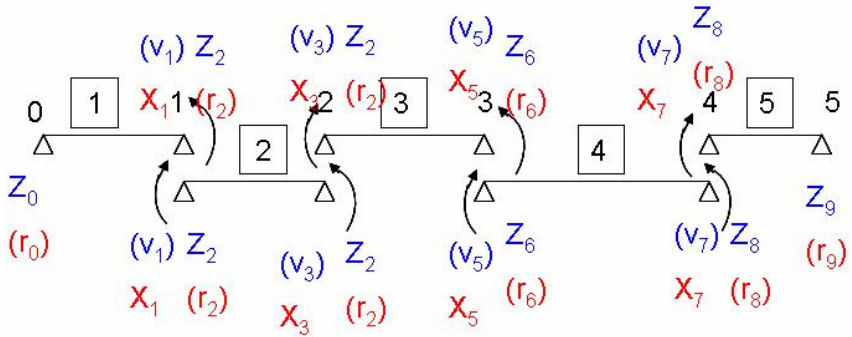


Рис. 8. Расчетная схема балки на упругом основании

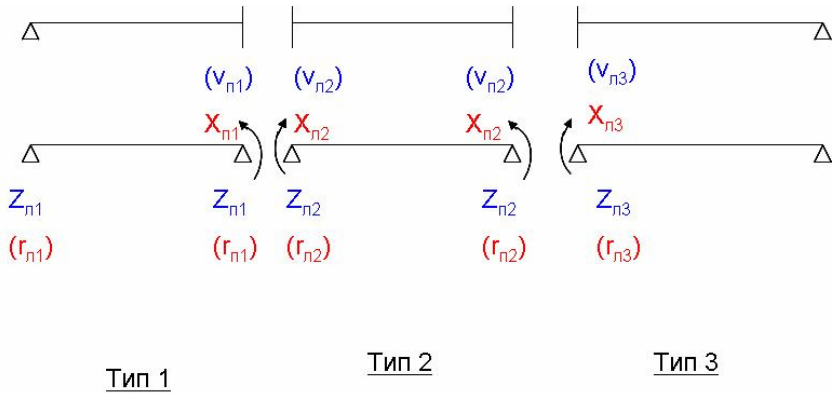


Рис. 9. Типы участков

Для каждого типа можно записать матричное уравнение, связывающее усилия и перемещения.

Для участков 1-го типа уравнение записывается в виде

$$\begin{pmatrix} r_{n1} \\ r_{n1} \\ v_{n1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & a & -b \\ a & 2a & b \\ b & -b & 2c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_{n1} \\ Z_{n1} \\ X_{n1} \end{pmatrix}. \quad (3.21)$$

Для участков 2-го типа уравнение записывается в виде

$$\begin{pmatrix} r_{n2} \\ v_{n2} \\ r_{n2} \\ v_{n2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & b & a & -b \\ -b & 2c & b & c \\ a & -b & 2a & b \\ b & c & -b & 2c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_{n2} \\ X_{n2} \\ Z_{n2} \\ X_{n2} \end{pmatrix}. \quad (3.22)$$

Для участков 3-го типа уравнение записывается в виде

$$\begin{pmatrix} r_{n3} \\ v_{n3} \\ r_{n3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & b & a \\ -b & 2c & b \\ a & -b & 2a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_{n3} \\ X_{n3} \\ Z_{n3} \end{pmatrix}. \quad (3.23)$$

Входящие в уравнения (3.21)...(3.24) величины определяются по формулам

$$a = \frac{k_0 l_y}{6}; \quad (3.24)$$

$$b = \frac{l}{l_y}; \quad (3.25)$$

$$c = \frac{l_y}{6E}. \quad (3.26)$$

Составим матричные уравнения для балки на упругом основании (рис. 8).

$$\begin{pmatrix} r_0 \\ r_2 \\ v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & a & -b \\ a & 2a & b \\ b & -b & 2c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_0 \\ Z_2 \\ X_1 \end{pmatrix}; \quad (3.27)$$

$$\begin{pmatrix} r_2 \\ v_1 \\ r_4 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & b & a & -b \\ -b & 2c & b & c \\ a & -b & 2a & b \\ b & c & -b & 2c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_2 \\ X_1 \\ Z_4 \\ X_3 \end{pmatrix}; \quad (3.28)$$

$$\begin{pmatrix} r_4 \\ v_3 \\ r_6 \\ v_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & b & a & -b \\ -b & 2c & b & c \\ a & -b & 2a & b \\ b & c & -b & 2c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_4 \\ X_3 \\ Z_6 \\ X_5 \end{pmatrix}; \quad (3.29)$$

$$\begin{pmatrix} r_6 \\ v_5 \\ r_8 \\ v_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & b & a & -b \\ -b & 2c & b & c \\ a & -b & 2a & b \\ b & c & -b & 2c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_6 \\ X_5 \\ Z_8 \\ X_7 \end{pmatrix}; \quad (3.30)$$

$$\begin{pmatrix} r_8 \\ v_7 \\ r_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & b & a \\ -b & 2c & b \\ a & -b & 2a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_8 \\ X_7 \\ Z_9 \end{pmatrix}. \quad (3.31)$$

В развернутом виде уравнения (3.27)...(3.31) можно представить в виде

$$\begin{aligned} r_0 &= 2aZ_0 + aZ_2 - bX_1 \\ r_2 &= aZ_0 + 2aZ_2 + bX_1 \\ v_1 &= bZ_0 - bZ_2 + 2cX_1 \\ r_2 &= 2aZ_2 + bX_1 + aZ_4 - bX_3 \\ v_1 &= -bZ_2 + 2cX_1 + bZ_4 + cX_3 \\ r_4 &= aZ_2 - bX_1 + 2aZ_4 + bX_3 \\ v_3 &= bZ_2 + cX_1 - bZ_4 + 2cX_3 \\ r_4 &= 2aZ_4 + bX_3 + aZ_6 - bX_5 \\ v_3 &= -bZ_4 + 2cX_3 + bZ_6 + cX_5 \\ r_6 &= aZ_4 - bX_3 + 2aZ_6 + bX_5 \\ v_5 &= bZ_4 + cX_3 - bZ_6 + 2cX_5 \\ r_6 &= 2aZ_6 + bX_5 + aZ_8 - bX_7 \\ v_5 &= -bZ_6 + 2cX_5 + bZ_8 + cX_7 \\ r_8 &= aZ_6 - bX_5 + 2aZ_8 + bX_7 \\ v_7 &= bZ_6 + cX_5 - bZ_8 + 2cX_7 \\ r_8 &= 2aZ_8 + bX_7 + aZ_9 \\ v_7 &= -bZ_8 + 2cX_7 + bZ_9 \\ r_9 &= aZ_8 - bX_7 + 2aZ_9. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Представленные выше уравнения используются для формирования матрицы упругих свойств D системы, которая описывается матричным уравнением

$$\begin{pmatrix} r_0 \\ r_2 \\ v_1 \\ r_4 \\ v_3 \\ r_6 \\ v_5 \\ r_8 \\ v_7 \\ r_9 \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} Z_0 \\ Z_2 \\ X_1 \\ Z_4 \\ X_3 \\ Z_6 \\ X_5 \\ Z_8 \\ X_7 \\ Z_9 \end{pmatrix}. \quad (3.33)$$

Обозначим матрицу-столбец, стоящую слева от знака равенства, — R , а матрицу-столбец, стоящую справа, — Z .

Для определения элементов матрицы упругих свойств системы D необходимо преобразовать (3.33) в систему алгебраических уравнений, каждое из которых содержит слева от знака равенства один из элементов R , а справа сумму всех слагаемых (3.32), соответствующих этому элементу. Результат описанной операции для рассматриваемой системы представлен ниже:

$$\begin{aligned} r_0 &= 2aZ_0 + aZ_2 - bX_1 \\ r_2 &= aZ_0 + 2aZ_2 + bX_1 + 2aZ_2 + bX_1 + aZ_4 - bX_3 \\ v_1 &= bZ_0 - bZ_2 + 2cX_1 - bZ_2 + 2cX_1 + bZ_4 + cX_3 \\ r_4 &= aZ_2 - bX_1 + 2aZ_4 + bX_3 + 2aZ_4 + bX_3 + aZ_6 - bX_5 \\ v_3 &= bZ_2 + cX_1 - bZ_4 + 2cX_3 - bZ_4 + 2cX_3 + bZ_6 + cX_5 \\ r_6 &= aZ_4 - bX_3 + 2aZ_6 + bX_5 + 2aZ_6 + bX_5 + aZ_8 - bX_7 \\ v_5 &= bZ_4 + cX_3 - bZ_6 + 2cX_5 - bZ_6 + 2cX_5 + bZ_8 + cX_7 \\ r_8 &= aZ_6 - bX_5 + 2aZ_8 + bX_7 + 2aZ_8 + bX_7 + aZ_9 \\ v_7 &= bZ_6 + cX_5 - bZ_8 + 2cX_7 - bZ_8 + 2cX_7 + bZ_9 \\ r_9 &= aZ_8 - bX_7 + 2aZ_9. \end{aligned} \quad (3.34)$$

После приведения подобных получим систему уравнений, которую можно представить в виде матричного уравнения

$$R = DZ. \quad (3.35)$$

Матрица D имеет вид, представленный на рис. 10. Для удобства в верхней строке и в первом столбце показаны величины, соответствующие столбцам и строкам матрицы D .

	Z0	Z2	X1	Z4	X3	Z6	X5	Z8	X7	Z9
r0	2a	a	-b	0	0	0	0	0	0	0
r2	a	4a	2b	a	-b	0	0	0	0	0
v1	b	-2b	4c	b	c	0	0	0	0	0
r4	0	a	-b	4a	2b	a	-b	0	0	0
v3	0	b	c	-2b	4c	b	c	0	0	0
r6	0	0	0	a	-b	4a	2b	a	-b	0
v5	0	0	0	b	c	-2b	4c	b	c	0
r8	0	0	0	0	0	a	-b	4a	2b	a
v7	0	0	0	0	0	b	c	-2b	4c	b
r9	0	0	0	0	0	0	0	a	-b	2a

Рис. 10. Элементы матрицы D

Решение матричного уравнения (3.35) можно представить в виде

$$Z = D^{-1}R. \quad (3.36)$$

Решение задачи удобно представить в среде ЭТ Excel. Ниже рассматривается пример, иллюстрирующий применение смешанного метода.

Пример 3. Определить изгибающие моменты в характерных сечениях балки на упругом основании и ее прогибы при следующих исходных данных:

- высота сечения полосы – 1 м;
- ширина полосы – 12 м;
- коэффициент постели – 2000 кН/м²;

- длина полосы – 15 м;
- сосредоточенные силы по 20 кН приложены через 3 м по длине полосы во всех сечениях кроме крайних (всего приложено четыре силы).

Решение задачи представлено на рис. 11 в табличной форме.

В области ЭТ А1:J10 вычислены элементы матрицы D (см. рис. 10). Вектор $(-R)$ сформирован в области L1:L10 (см. (3.3.14). Знак минус указывает на то, силы действуют сверху вниз.

В области А12:J21 располагается обратная матрица A^{-1} . Решение получено в ячейках L12:L21. Перемещения Z измеряются в метрах, изгибающие моменты X – в нМ.

Исходные данные и результаты промежуточных вычислений содержатся в области А23:F27.

P19		f _c												
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	
1	2000	1000	-0.33	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
2	1000	4000	0.66	1000	-0.33	0	0	0	0	0	0	0	-20	
3	0.33	-0.66	0.001	0.33	0.00025	0	0	0	0	0	0	0	0	
4	0	1000	-0.33	4000	0.66	1000	-0.33	0	0	0	0	0	-20	
5	0	0.33	0.00025	-0.66	0.001	0.33	0.00025	0	0	0	0	0	0	
6	0	0	0	1000	-0.33	4000	0.66	1000	-0.33	0	0	0	-20	
7	0	0	0	0.33	0.00025	-0.66	0.001	0.33	0.00025	0	0	0	0	
8	0	0	0	0	0	1000	-0.33	4000	0.66	1000	0	0	-20	
9	0	0	0	0	0	0.33	0.00025	-0.66	0.001	0.33	0	0	0	
10	0	0	0	0	0	0	0	1000	-0.33	2000	0	0	0	
11														
12	0.000501	-7.8E-05	0.229871	-1.4E-05	-0.07141	1.05E-05	0.004416	-2.4E-06	0.004125	5.34E-07		0.001682	Z0	
13	-7.8E-05	0.000226	-0.21244	-1.1E-05	0.136554	-1.4E-05	-0.02581	5.79E-06	-0.00281	-2.4E-06		-0.00414	Z2	
14	-0.22987	0.212439	749.4026	-0.11902	-18.9813	0.02077	-51.438	0.002805	16.501	-0.00413		-2.33996	X1	
15	-1.4E-05	-1.1E-05	0.119016	0.000202	-0.20002	-8.5E-06	0.122772	-1.4E-05	-0.02077	1.05E-05		-0.00337	Z4	
16	0.071409	-0.13655	-18.9813	0.200023	794.7189	-0.12277	-30.2667	0.025807	-51.438	-0.00442		0.669929	X3	
17	1.05E-05	-1.4E-05	-0.02077	-8.5E-06	0.122772	0.000202	-0.20002	-1.1E-05	0.119016	-1.4E-05		-0.00337	Z6	
18	-0.00442	0.025807	-51.438	-0.12277	-30.2667	0.200023	794.7189	-0.13655	-18.9813	0.071409		0.669929	X5	
19	-2.4E-06	5.79E-06	-0.00281	-1.4E-05	-0.02581	-1.1E-05	0.136554	0.000226	-0.21244	-7.8E-05		-0.00414	Z8	
20	-0.00413	0.002805	16.501	0.02077	-51.438	-0.11902	-18.9813	0.212439	749.4026	-0.22987		-2.33996	X7	
21	5.34E-07	-2.4E-06	0.004125	1.05E-05	0.004416	-1.4E-05	-0.07141	-7.8E-05	0.229871	0.000501		0.001682	Z9	
22														
23	k0=	2000	кН/м2	a=	1000	кН/м								
24	L=	3	м	b=	0.33	1/м								
25	E=	20000000	кН/м2	c=	0.00025	1/кНм								
26	B=	12	м											
27	H=	1	м											

Рис. 11. Решение задачи (пример 3)

3.4. Расчет изгибаемой плиты

При определении прогиба плиты применяется *метод конечных разностей*. Идея метода конечных разностей построена на замене обыкновенных и частных производных, входящих в дифференциальные уравнения, описывающие поведение различных систем, их приближенными выражениями, в которых дифференциалы аргументов dx и dy и функций $df(x, y)$ заменены конечными приращениями.

Разобьем двумерную область XOY (рис. 12) прямоугольной сеткой с равными шагами в каждом из двух взаимно перпендикулярных направлений соответственно h_x и h_y .

Введем обозначения $f(x_m; y_n) = f_{m,n}$.

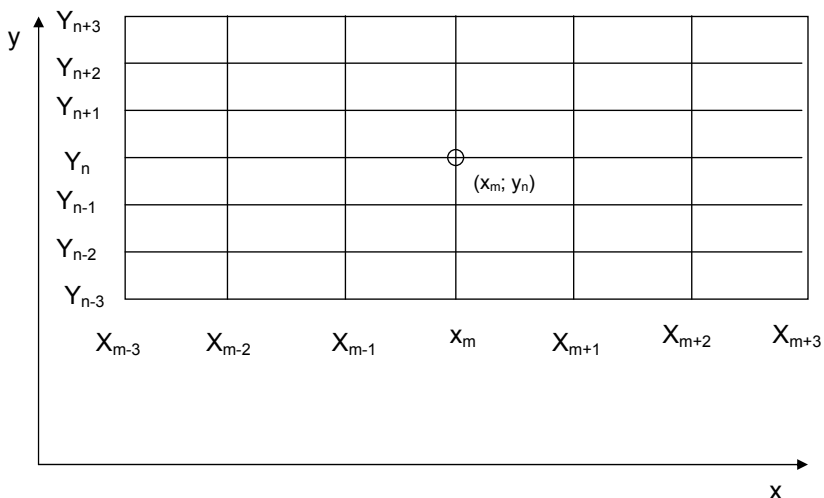


Рис. 12. Обозначение координат узлов в окрестностях выбранного узла

Для точки $(x_m; y_n)$ можно записать следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{1}{h_x^2} (f_{m+1,n} - 2f_{m,n} + f_{m-1,n}) & \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{1}{2h_x} (f_{m+1,n} - f_{m-1,n}) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{1}{h_y^2} (f_{m,n+1} - 2f_{m,n} + f_{m,n-1}) & \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{1}{2h_y} (f_{m,n+1} - f_{m,n-1}) \end{aligned} \quad (3.37)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{1}{4h_x h_y} (f_{m+1,n+1} - f_{m-1,n+1} - f_{m+1,n-1} + f_{m-1,n-1}); \\ \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} &= \frac{1}{h_x^4} (f_{m+2,n} - 4f_{m+1,n} + 6f_{m,n} - 4f_{m-1,n} + f_{m-2,n}); \\ \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} &= \frac{1}{h_y^4} (f_{m,n+2} - 4f_{m,n+1} + 6f_{m,n} - 4f_{m,n-1} + f_{m,n-2}); \\ \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} &= \frac{1}{h_x^2 h_y^2} (f_{m+1,n+1} + f_{m+1,n-1} - 2f_{m+1,n} - 2f_{m,n+1} + \\ &+ 4f_{m,n} - 2f_{m,n-1} - 2f_{m-1,n} + f_{m-1,n+1} + f_{m-1,n-1}.\end{aligned}$$

Дифференциальное уравнение, описывающее изгиб плиты под действием равномерно распределенной нагрузки интенсивностью q , записывается в виде

$$\nabla^4 w = \frac{q}{D}, \quad (3.38)$$

где

$$D = \frac{Eh_{nl}^3}{12(1-\mu^2)}; \quad (3.39)$$

$$\nabla^4 w = \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}. \quad (3.40)$$

Учитывая зависимости (3.37) дифференциальное уравнение (3.38) можно представить в виде системы конечно-разностных уравнений типа

$$\begin{aligned}&\frac{\alpha}{h_y^4} [\alpha (f_{m-2,n} - 4f_{m-1,n} + 6f_{m,n} - 4f_{m+1,n} + f_{m+2,n}) + \\ &+ 2(f_{m-1,n-1} + f_{m-1,n+1} - 2f_{m-1,n} - 2f_{m,n-1} + 4f_{m,n} - 2f_{m+1,n} - \\ &- 2f_{m,n+1} + f_{m+1,n-1} + f_{m+1,n+1}) + \frac{1}{\alpha} (f_{m,n-2} - 4f_{m,n-1} + 6f_{m,n} - \\ &- 4f_{m,n+1} + f_{m,n+2})] = \frac{q}{D}.\end{aligned} \quad (3.41)$$

Для составления конечно-разностного уравнения при $\alpha = (h_y/h_x)^2 = 1$ можно воспользоваться шаблоном, изображенным на рис. 13.

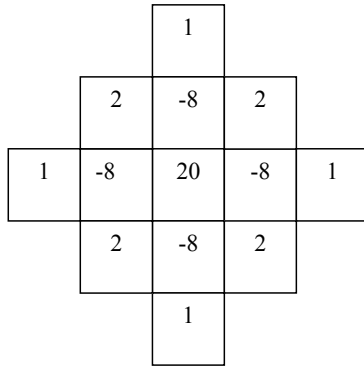


Рис. 13. Шаблон для составления конечно-разностного уравнения

Значения, указанные в квадратах шаблона, соответствуют выбранному в качестве центрального узлу (20), удаленным от выбранного узла на один шаг вверх, вниз, вправо и влево узлам (-8), удаленным на один шаг по диагонали от выбранного (центрального) узла узлам (2) и удаленным от выбранного узла на два шага вверх, вниз, вправо и влево узлам (1). Указанные значения следует умножить (см. уравнение (3.41)) на значения соответствующей функции в указанных узлах. В данном случае это функция прогибов плиты w .

Для того чтобы воспользоваться зависимостью (3.41), на плиту накладывается сетка с равными шагами h в направлении оси x и оси y . Затем производится нумерация узлов этой сетки с учетом возможной симметрии модели.

Составление одного из алгебраических уравнений заменяющей дифференциальное уравнение (3.38) системы покажем на примере.

Схема плиты показана на рис. 14.

Выберем в качестве центрального узел 12. Алгебраическое уравнение, соответствующее этому узлу, запишется в виде

$$20w_{12} - 8(w_{11} + w_8 + w_{13} + w_{12}) + 2(w_7 + w_9 + w_{13} + w_{11}) + (w_{10} + w_3 + w_{12} + w_8) = \frac{qh^4}{D}.$$

Количество уравнений в заменяющей системе равно числу узлов, в которых прогиб не равен нулю. Для каждого из таких узлов составляется свое алгебраическое уравнение.

1	2	3	4	3	2 1
6	7	8	9	8	7 6
10	11	12	13	12	11 10
10	11	12	13	12	11 10
6	7	8	9	8	7 6

Рис. 14. Схема плиты с нумерацией узлов

Таким образом, до составления заменяющей системы необходимо определить количество узлов, в которых прогиб не равен нулю. При этом необходимо учитывать граничные условия.

В месте шарнирного опирания плиты на опоры прогиб равен нулю. При жесткой заделке по контуру, кроме того, нулю равны прогибы во всех предконтурных узлах, отстоящих на один шаг от контура (опоры).

При расчете шарнирно опертой плиты для составления уравнений для отдельных узлов, выбранных в качестве центральных, необходимо учитывать прогибы законтурных узлов, удаленных на один шаг от контура. Следует принимать значения прогиба в этих узлах равными значениям прогиба в соответствующих предконтурных узлах, отстоящих на один шаг от контура, с про-

твояположным знаком. Поясним это на примере составления уравнения для узла 11 (рис 14).

$$20w_{11} - 8(w_{10} + w_7 + w_{12} + w_{11}) + 2(w_{10} + w_6 + w_8 + w_{12}) + (w_2 + w_{13} + w_7 - w_{11}) = \frac{qh^4}{D}.$$

Составленную систему алгебраических уравнений можно решить различными способами. Рассмотрим способ, основанный на матричном представлении полученной системы в виде

$$A\bar{w} = \bar{Q}, \quad (3.42)$$

где A – квадратная матрица, составленная из коэффициентов при неизвестных в конечно-разностных уравнениях; \bar{w} – матрица-столбец, включающая все неизвестные прогибы; \bar{Q} – матрица-столбец, включающая правые части конечно-разностных уравнений.

Решение уравнения (3.42) можно получить в виде

$$\bar{w} = A^{-1}\bar{Q}, \quad (3.43)$$

где A^{-1} – обратная матрица, вычисляемая с помощью ЭТ Excel.

Пример 4. Определить прогибы w и изгибающие моменты M_x и M_y в плите размерами 16 16 м, толщиной $h_{пл} = 0,3$ м, к которой приложена равномерно распределенная нагрузка $q = 8$ кН/м². Принять коэффициент Пуассона μ равным 0,25, модуль деформаций материала плиты $E = 2 \times 10^7$ кПа. Опираание плиты на опоры – шарнирное.

Решение. На рис. 16 представлена расчетная таблица, в которой в ячейках $O_5:R_6$ записаны исходные данные задачи 1. Названия ячеек соответствуют номерам строк и обозначениям столбцов, указанных справа и снизу от таблицы.

Цилиндрическая жесткость D вычислена в ячейке N6 с использованием формулы (3.39).

В ячейках $A_5:J_{14}$ записана матрица A . Ячейки $A_4:J_4$ и $M_5:M_{14}$ содержат номера узлов 5...14, в которых прогибы не равны нулю и подлежат определению. Коэффициенты при неизвестных w , входящие в состав матрицы A , определяются в соответствии с ранее изложенными рекомендациями.

0	1	2	3	4	3	2	1	0
1	5	6	7	8	7	6	5	1
2	6	9	10	11	10	9	6	2
3	7	10	12	13	12	10	7	3
4	8	11	13	14	13	11	8	4
3	7	10	12	13	12	10	7	3
2	6	9	10	11	10	9	6	2
1	5	6	7	8	7	6	5	1
0	1	2	3	4	3	2	1	0

Рис. 15. Схема плиты к примеру 4

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J		M	N	O	P	Q
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14						4
18	-16	2	0	2	0	0	0	0	0	5	D, кНм	E, кПа	$h_{пл}, м$		5
-8	21	-8	1	-8	3	0	0	0	0	6	48000	20000000	0.3		6
1	-8	20	-8	2	-8	2	1	0	0	7					7
0	2	-16	19	0	4	-8	0	1	0	8					8
2	-16	4	0	20	-16	2	2	0	0	9					9
0	3	-8	2	-8	23	-8	-8	3	0	10	μ	$q, кН/м^2$	$h, м$		10
0	0	4	-8	2	-16	20	4	-8	1	11	0.25	8	2		11
0	0	2	0	2	-16	4	22	-16	2	12					12
0	0	0	1	0	6	-8	-16	25	-8	13	$q \cdot h^4/D$	0.002667			13
0	0	0	0	0	0	4	8	-32	20	14					14
														W, м	15
0.2	0.3	0.3	0.2	0.2	0.5	0.3	0.3	0	0.1	5	0.002667		0.007239	w_5	16
0.2	0.6	0.6	0.3	0.4	1	0.5	0.6	1	0.2	6	0.002667		0.012961	w_6	17
0.2	0.6	0.8	0.4	0.5	1.3	0.7	0.8	1	0.2	7	0.002667		0.016553	w_7	18
0.2	0.6	0.8	0.5	0.5	1.4	0.7	0.8	1	0.2	8	0.002667		0.017772	w_8	19
0.2	0.9	1	0.5	0.8	1.8	0.9	1.1	1	0.3	9	0.002667		0.023317	w_9	20
0.3	1	1.3	0.7	0.9	2.4	1.2	1.5	2	0.4	10	0.002667		0.029861	w_{10}	21
0.3	1	1.3	0.7	0.9	2.5	1.4	1.6	2	0.5	11	0.002667		0.032087	w_{11}	22
0.3	1.2	1.6	0.8	1.1	3	1.6	2	2	0.6	12	0.002667		0.038308	w_{12}	23
0.3	1.2	1.6	0.9	1.2	3.2	1.7	2.2	2	0.7	13	0.002667		0.041189	w_{13}	24
0.3	1.3	1.7	1	1.2	3.4	1.9	2.3	3	0.8	14	0.002667		0.044294	w_{14}	25

Рис. 16. Расчетная таблица Excel к примеру 4

Вычисленные значения прогибов $w_5; w_{14}$ содержатся в ячейках $P_{16}; P_{25}$.

3.5. Метод конечных элементов

Основные предпосылки МКЭ:

- сплошное тело рассматривается как состоящее из конечного числа отдельных элементов;
- элементы прилегают вплотную друг к другу, при этом они шарнирно скреплены между собой в вершинах;
- форма элементов может быть различной;
- сплошная среда после разделения на элементы остается по-прежнему сплошной, составленной из отдельных двумерных или трехмерных элементов конечных размеров;
- в общем случае среда может быть неоднородной по своим механическим свойствам.

Основное матричное уравнение МКЭ

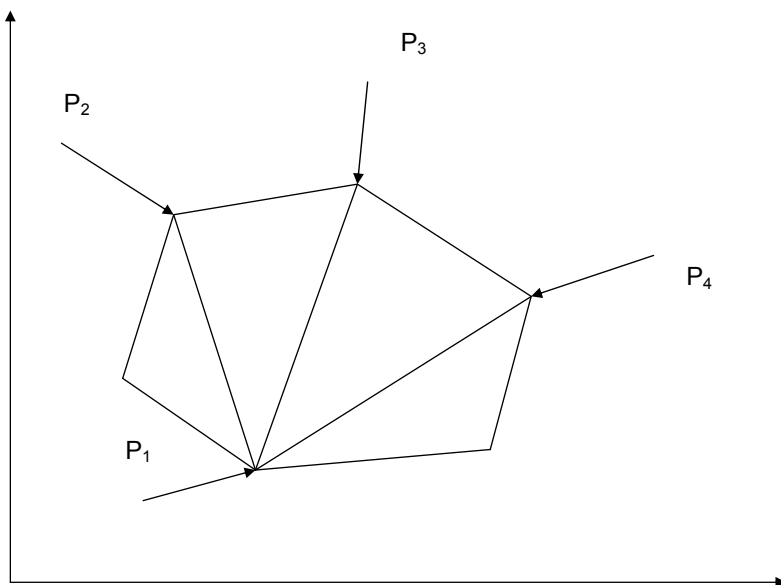


Рис. 17. Схема деления на конечные элементы

Основное матричное уравнение для системы, включающей определенное количество конечных элементов, записывается в виде

$$\{F\} = [K]\{U\}, \quad (3.44)$$

где $\{F\}$ – матрица-столбец, включающая компоненты внешних сил, приложенных в вершинах (узлах) элементов; $[K]$ – матрица жесткости системы; $\{U\}$ – матрица-столбец, включающая компоненты перемещений узлов:

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{x2} \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ F_{xm} \\ F_{y1} \\ F_{y2} \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ F_{ym} \end{Bmatrix} \quad \{U\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ u_n \\ v_1 \\ v_2 \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ v_n \end{Bmatrix} \quad [K] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \bullet & k_{1j} & \bullet & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \bullet & k_{2j} & \bullet & k_{2n} \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ k_{i1} & k_{i2} & \bullet & k_{ij} & \bullet & k_{in} \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ k_{n1} & k_{n2} & \bullet & k_{nj} & \bullet & k_{nn} \end{bmatrix}$$

Определение вида матрицы жесткости K

Матрица жесткости может быть сформирована несколькими способами.

Наиболее распространен способ, основанный на использовании матриц жесткости отдельных конечных элементов.

Матрица жесткости треугольного элемента

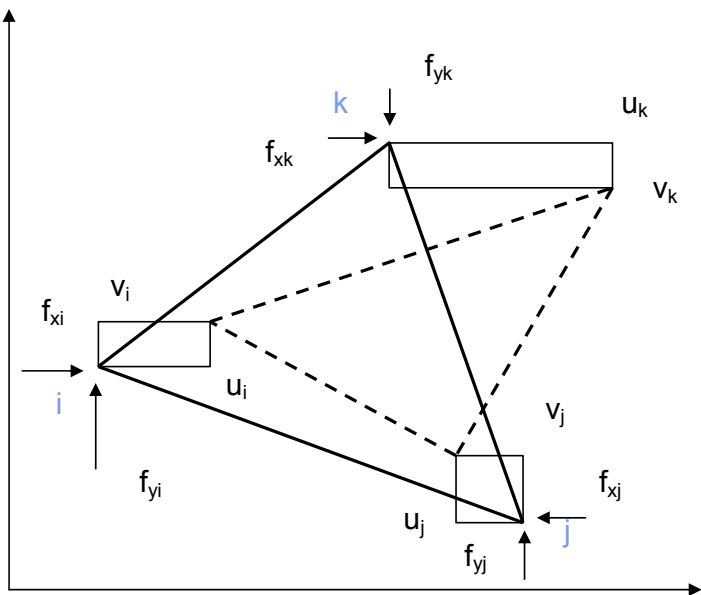


Рис. 18. Схема деформирования треугольного конечного элемента

Матричное уравнение для треугольного конечного элемента можно записать в виде

$$\{f\} = [k] \{u\}; \quad (3.45)$$

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} f_{xi} \\ f_{xj} \\ f_{xk} \\ f_{yi} \\ f_{yj} \\ f_{yk} \end{Bmatrix} \quad \{u\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_k \\ v_i \\ v_j \\ v_k \end{Bmatrix} \quad [k] = \frac{1}{4S} \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} & k_{46} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} & k_{56} \\ k_{61} & k_{62} & k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66} \end{bmatrix}$$

$$S = \frac{1}{2} (x_{ij} y_{ik} - x_{ik} y_{ij})$$

Определение перемещений узлов конечного элемента:

$$\{u\} = [k]^{-1} \{f\}. \quad (3.46)$$

Определение напряжений:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{1}{2S} \left[A(y_{jk}u_i + y_{ki}u_j + y_{ij}u_k) + C(x_{kj}v_i + x_{ik}v_j + x_{ji}v_k) \right] \\ \sigma_y &= \frac{1}{2S} \left[C(y_{jk}u_i + y_{ki}u_j + y_{ij}u_k) + A(x_{kj}v_i + x_{ik}v_j + x_{ji}v_k) \right] \\ \tau_{xy} &= \frac{1}{2S} G(x_{kj}u_i + x_{ik}u_j + x_{ji}u_k + y_{jk}v_i + y_{ki}v_j + y_{ij}v_k) \end{aligned} \quad (3.47)$$

Определение деформаций:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{2S} (y_{jk}u_i + y_{ki}u_j + y_{ij}u_k) \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{2S} (x_{kj}v_i + x_{ik}v_j + x_{ji}v_k) \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{2S} (x_{kj}u_i + x_{ik}u_j + x_{ji}u_k + y_{jk}v_i + y_{ki}v_j + y_{ij}v_k) \end{aligned} \quad (3.48)$$

Определив по формуле (3.46) перемещения узлов, можно определить напряжения и деформации по формулам (3.47) и (3.48). В указанных формулах наряду с величинами перемещений используются разности координат узлов конечного элемента до деформации. Например, $y_{ik} = y_i - y_k$. Величины A , C , G зависят от вида напряженного состояния.

4. ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАНЯТИЯ

Цель – выполнение заданий служит для закрепления на практике теоретических знаний, полученных в процессе проработки теоретического материала по дисциплине.

Студент на практических занятиях должен выполнить три задания с использованием исходных данных, представленных в табл. 5–7.

Задания

Задание 1. Определить прогиб плиты, имеющей длину a и ширину b , в точке с координатами x_M и y_M (табл. 5). Толщина плиты равна $h_{пл}$, модуль деформации принять равным $E = 2 \cdot 10^7$ кПа.

При выполнении задания использовать метод конечных разностей. Задаться шагом сетки h , указанным в табл. 5.

Условия опирания плиты принять по табл. 5 (графы 8–11) и рис. 19.

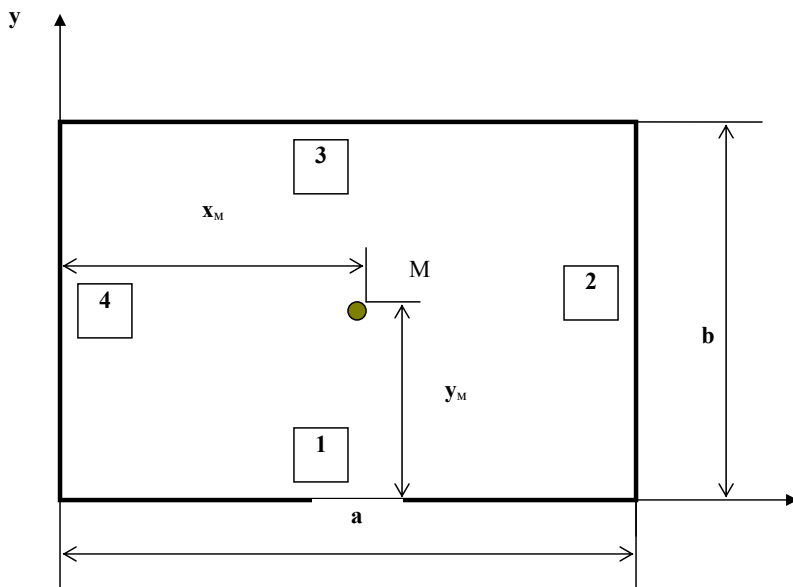


Рис. 19. Схема плиты (задание 1)

Задание 2. Применяя метод наименьших квадратов, определить параметры аппроксимирующей функции, заданной в виде

$$Y = a_2 x^2 + a_1 x + a_0.$$

Координаты точек приведены в табл. 6.

Задание 3. Определить усилия в заданном элементе (табл. 7) плоской рамы (рис. 20) с использованием электронных таблиц. Сечение стоек 400 400 мм, сечение ригелей 400 600 мм. Пролеты равны 6 м, высота этажа – 4 м. Модуль деформации $E = 2 \cdot 10^7$ кПа.

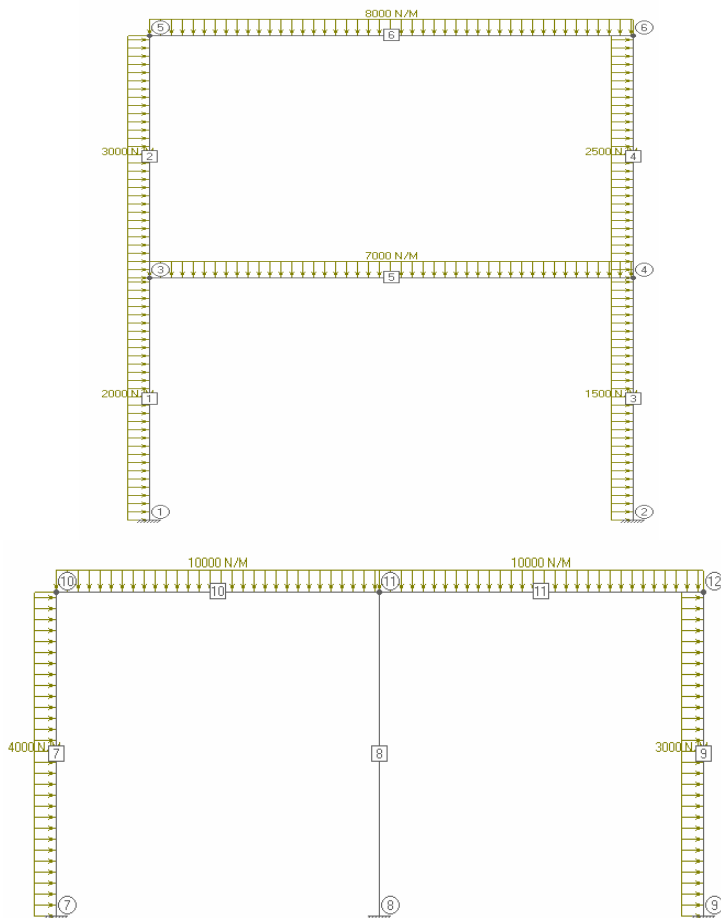


Рис. 20. Схемы к заданию 3

Варианты заданий

Таблица 5

№ варианта	a , м	b , м	$h_{пл}$, м	h , м	x_m , м	y_m , м	1	2	3	4
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	6	6	0,2	1	3	3	з	з	з	з
2	2	2	0,1	0,5	1	1	ш	ш	ш	ш
3	6	7	0,22	1	3	3	з	з	з	з
4	1,5	2,5	0,1	0,5	0,5	1,5	з	ш	з	з
5	3	5	0,15	1	1	3	з	ш	з	з
6	6	8	0,25	1	3	4	з	з	з	з
7	5	9	0,2	1	2	4	з	з	з	з
8	2,5	2	0,1	0,5	1	1	ш	з	з	з
9	5	8	0,22	1	3	4	з	з	з	з
10	4,5	6	0,22	0,75	2,25	3	з	з	з	з
11	5	4	0,18	1	2	2	ш	з	з	з
12	6	2	0,15	1	3	1	з	з	ш	з
13	4	4	0,18	1	2	2	з	ш	з	ш
14	4	4	0,2	1	2	2	ш	ш	ш	ш
15	4	4	0,18	0,5	2	2	з	з	з	з
16	2,5	4	0,12	0,5	1,5	2	з	з	з	з
17	3	4	0,2	0,5	1	2	з	з	з	з
18	2,5	4,5	0,15	0,5	1	2	з	з	з	з
19	3	3,5	0,18	0,5	1,5	1,5	з	з	з	з
20	3	4	0,18	0,5	1,5	2	з	з	з	з
21	2	2	0,12	0,25	1	1	з	з	з	з

Примечание. з – жесткая заделка; ш – шарнирное опирание.

Таблица 6

№ вари- анта	Координаты точек											
	1		2		3		4		5		6	
	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y
1	1	-18	2	-13	3	-6	4	3	5	14	6	27
2	1	-15	2	-6	3	7	4	24	5	45	6	70
3	1	-12	2	1	3	20	4	45	5	76	6	113
4	1	-9	2	8	3	33	4	66	5	107	6	156
5	1	-6	2	15	3	46	4	87	5	138	6	199
6	1	-3	2	22	3	59	4	108	5	169	6	242
7	1	0	2	29	3	72	4	129	5	200	6	285
8	1	3	2	36	3	85	4	150	5	231	6	328
9	1	6	2	43	3	98	4	171	5	262	6	371
10	1	9	2	50	3	111	4	192	5	293	6	414
11	1	12	2	57	3	124	4	213	5	324	6	457
12	1	15	2	64	3	137	4	234	5	355	6	500
13	1	18	2	71	3	150	4	255	5	386	6	543
14	1	21	2	78	3	163	4	276	5	417	6	586
15	1	24	2	85	3	176	4	297	5	448	6	629
16	1	27	2	92	3	189	4	318	5	479	6	672
17	1	30	2	99	3	202	4	339	5	510	6	715
18	1	33	2	106	3	215	4	360	5	541	6	758
19	1	36	2	113	3	228	4	381	5	572	6	801
20	1	39	2	120	3	241	4	402	5	603	6	844
21	1	42	2	127	3	254	4	423	5	634	6	887

Таблица 7

Вариант	1	2	3	4	5	7	8	9	10	11	12
Участок	8	9	10	11	7	1	2	3	4	5	6

Вопросы к зачету

1. Интерполяционная формула Лагранжа.
2. Интерполяционная формула Ньютона.
3. Метод наименьших квадратов.
4. Метод конечных разностей. Зависимости между производными функции в точке и значениями самой функции в данной и окрестных точках.
5. Применение метода конечных разностей при расчете изгибаемых плит. Составление системы алгебраических уравнений для определения прогибов плиты в узлах сетки.
6. Применение метода конечных разностей при расчете изгибаемых плит. Граничные условия для шарнирно опертых и защемленных по контуру плит.
7. Применение метода конечных разностей при расчете изгибаемых плит. Определение изгибающих моментов в плите.
8. Матрицы. Виды матриц. Операции над матрицами (умножение матриц, транспонирование матриц, обращение матриц).
9. Матричные функции электронных таблиц: получение обратной матрицы, умножение матриц.
10. Применение электронных таблиц для определения неизвестных перемещений в многопролетной неразрезной балке.
11. Составление матрицы жесткости для многопролетной неразрезной балки.
12. Определение усилий в различных сечениях неразрезной многопролетной балки с использованием электронных таблиц.
13. Применение электронных таблиц для определения неизвестных перемещений в плоской раме.
14. Составление матрицы жесткости для плоской рамы.
15. Определение усилий в различных сечениях плоской рамы с использованием электронных таблиц.

16. Составление расчетной схемы при расчете балки на упругом основании смешанным методом. Типы участков. Матричные уравнения для отдельных участков.
17. Порядок составления матрицы упругих свойств системы (балки на упругом основании). Получение решения с использованием электронных таблиц.
18. Применение метода конечных элементов для расчета строительных конструкций. Основное матричное уравнение метода конечных элементов.
19. Виды конечных элементов. Факторы, влияющие на точность решения.
20. Матрица жесткости треугольного конечного элемента.
21. Составление матрицы жесткости для системы, состоящей из треугольных конечных элементов. Получение решения с использованием электронных таблиц.

Библиографический список

1. Масленников, А.М. Расчет статически неопределимых систем в матричной форме / А.М. Масленников. – Л. : Стройиздат, 1970. – 128 с.
2. Пискунов, Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления : в 2 т. / Н.С. Пискунов. – М. : Наука, 2001. – Т. 2. – 544 с.
3. Строительная механика / Ю.И. Бурчаков [и др.]. – М. : Интеграл-Пресс, 2010. – 255 с.
4. Безухов, Н.И. Приложение методов теории упругости и пластичности к решению инженерных задач / Н.И. Безухов, О.В. Лужин. – М. : Высш. шк., 1974. – 200 с.

Приложение

№ п/п	Схема балки	Значения моментов	Реакции
1		$M_A = 4i$ $M_B = 2i$	$R_A = \frac{6i}{L}$ $R_B = \frac{6i}{L}$
2		$M_A = 3i$	$R_A = \frac{3i}{L}$ $R_B = \frac{3i}{L}$
3		$M_A = \frac{6i}{L}$ $M_B = \frac{6i}{L}$	$R_A = \frac{12i}{L^2}$ $R_B = \frac{12i}{L^2}$
4		$M_A = \frac{3i}{L}$	$R_A = \frac{3i}{L^2}$ $R_B = \frac{3i}{L^2}$
5		$M_A = \frac{qL^2}{12}$ $M_B = \frac{qL^2}{12}$	$R_A = \frac{qL}{2}$ $R_B = \frac{qL}{2}$

СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	3
1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ.....	4
2. СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ.....	5
2.1. Содержание теоретического курса	5
2.2. Вопросы для самостоятельной подготовки	6
3. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ ПО КУРСУ	9
3.1. Метод наименьших квадратов.....	9
3.2. Расчет рам методом перемещений.....	14
3.3. Расчет балки на упругом основании.....	24
3.4. Расчет изгибаемой плиты.....	31
3.5. Метод конечных элементов.....	37
4. ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАНЯТИЯ	41
Вопросы к зачету.....	45
Библиографический список.....	47
Приложение.....	48