МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Тольяттинский государственный университет»

Институт математики, физики и информационных технологий
(наименование института полностью)

Кафедра «Высшая математика и математическое образование»
(наименование)

44.04.01 Педагогическое образование
(код и наименование направления подготовки)

Математическое образование
(направленность (профиль))

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА (МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ)

на тему «Интерактивный музей математики как средство популяризации у обучающихся научных идей и открытий»

Студент	О.В. Близнюкова (И.О. Фамилия)	(личная подпись)
Научный руководитель	д-р пед. наук, профессор, Р.А. Утеева (ученая степень, звание, И.О. Фамилия)	

Тольятти 2022

Оглавление

Введение

Актуальность и научная значимость настоящего исследования. В примерной основной образовательной программе основного общего образования к предметным результатам освоения математики на базовом и углубленном уровнях по разделу «Математика в историческом развитии» отнесены следующие знания и умения обучающихся:

– описывать отдельные выдающиеся результаты, полученные в ходе развития математики как науки;

– знать примеры математических открытий и их авторов, в связи с отечественной и всемирной историей;

– характеризовать вклад выдающихся математиков в развитие математики и иных научных областей;

– рассматривать математику в контексте истории развития цивилизации и истории развития науки, понимать роль математики в развитии России» [66].

Интеллектуальное развитие школьников в современном мире играет важную роль в процессе становления успешной, разносторонне развитой личности, способной реализовать свой внутренний потенциал, применить накопленные знания на практике, реализовать себя в различных отраслях научной и творческой деятельности. Однако для того, чтобы развить интеллект в ребенке, не всегда бывает достаточно только урочных занятий. Очень часто именно внеурочная деятельность является движущей силой развития обучающихся. Одной из форм организации интеллектуального досуга школьников является музей. Учитывая особенности технического прогресса, выведшего на новый уровень развитие музейной деятельности, стоит отметить, что все большую популярность набирают интерактивные музеи.

Анализ ранее выполненных диссертационных исследований, посвященных интерактивным музеям, позволил констатировать, что большинство диссертаций выполнены по техническим или иным специальностям. Так, например, в диссертации Т.В. Шеламовой [88] рассмотрены характеристики автоматизированных систем управления обучением, проанализирована специфика использования информационно-образовательного пространства, определено место виртуальных музеев в учебном процессе, определены теоретические основы ВМОС. Таким образом, основное внимание в данной диссертации уделено именно технической составляющей интерактивных музеев. На основе предложенной автоматизированной системы управления виртуальной музейно-образовательной средой (ВМОС) создан один из первых в Российской Федерации виртуальный музей университета СПбГУ информационных технологий, механики и оптики (http://museum.ifmo.ru).

Д.Н. Дзюба рассматривает виртуальные музеи как средство развития образования и туризма [29].

Докторская диссертация А.В. Леонова посвящена разработке трехмерных моделей различных объектов, связанных с наукой и техникой в целях сохранения исторического наследия и визуализации документов, рисунков, задач и других объектов научных открытий в различных областях. Автором проведен анализ российского и мирового опыта 3D-моделирования и реконструкций объектов истории науки и техники, разработаны методы и технологии трехмерного моделирования технических и природных объектов, обозначена эффективность применения этих методов, разработаны методические и технические подходы к созданию виртуальных музеев на основе виртуальных трехмерных моделей [47].

Анализ диссертаций показал, что в настоящее время тема развития интерактивных музеев весьма актуальна. Интерактивность обсуждается как с точки зрения прямого взаимодействия субъекта (посетителя музея) с объектом (экспонатом) так и с точки зрения создания виртуальных музеев.

Актуальность темы исследования обусловлена также сложившимися к настоящему времени противоречиями между необходимостью:

– развивать познавательный интерес обучающихся к изучению математики и недостаточной эффективностью традиционных форм, методов и средств для его развития;

– использовать интерактивные технологии в процессе обучения и воспитания математике и недостаточной разработанностью теоретических и методических основ их применения на практике.

Указанные противоречия позволили сформулировать **проблему диссертационного исследования:** каковы теоретические и методические основы проектирования интерактивного музея математики как средства популяризации научных идей и открытий.

Объект исследования: процесс обучения и воспитания школьников.

Предмет исследования: методическая система проектирования интерактивного музея математики как средства популяризации научных идей и открытий.

Цель исследования заключается в выявлении теоретических и методических основ проектирования интерактивного музея математики как средства популяризации научных идей и открытий.

Гипотеза исследования основана на предположении о том, что интерактивный музей математики способствует развитию познавательного интереса обучающихся к математике, если в основу его проектирования положить интерактивные тематические площадки, содержание которых основано на доступных научных идеях и открытиях.

Задачи исследования:

1. Рассмотреть основные цели и задачи создания интерактивного музея математики.

2. Раскрыть роль интерактивных музеев математики в популяризации у обучающихся научных идей и открытий.

3. Выполнить обзор основных интерактивных музеев математики.

4. Обосновать возможность включения экспериментальной математики как составляющей интерактивного музея математики.

5. Разработать тематические площадки по теме «Решение алгебраических уравнений. Научные идеи и открытия» и «Решение задач экспериментальной математики».

6. Провести педагогический эксперимент по апробации разработанных материалов тематических площадок музея.

Для решения поставленных задач применялись следующие **методы исследования:** анализ психолого-педагогической, научной и учебно-методической литературы; систематизация и обобщение практики работы различных интерактивных музеев математики, в том числе, международных, педагогический эксперимент.

Теоретико-методологическую основу исследования составили:

– концепции обучения математике, основанные на применение научных идей и открытий Ю.М. Колягина [37], Д. Пойа [63], Р.А. Утеевой [80];

– исследования в области создания интерактивных музеев математики И.К. Кондауровой [39], Г.Е. Сенькиной [73];

– исследования в стиле экспериментальной математики М.В. Шабановой, А.В. Ястребова [84], [85], [86].

Базовыми для настоящего исследования явились работы Н.Я. Виленкина [19], Г.И. Глейзера [22], [23], А.П. Юшкевича [89].

Основные этапы исследования:

– 1 семестр (2020/21уч.г.): анализ ранее выполненных исследований по теме диссертации, обзор статей по интерактивным музеям математики;

– 2 семестр (2020/21 уч.г.): определение теоретических основ проектирования интерактивного музея математики;

– 3 семестр (2021/22 уч.г.): разработка тематических площадок интерактивного музея математики по теме «Решение алгебраических уравнений. Научные идеи и открытия», «Задачи экспериментальной математики»;

– 4 семестр (2021/22 уч.г.): оформление диссертации, корректировка ранее представленного материала, уточнение аппарата исследования, описание результатов экспериментальной работы, формулирование выводов.

Опытно-экспериментальная база исследования: НИЛ «Школа математического развития и образования -5+» ФГБОУ ВО «Тольяттинский государственный университет», муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение городского округа Тольятти «Гимназия №38».

Научная новизна исследования заключается в том, что в нем проблема проектирования интерактивного музея математики как средства популяризации научных идей и открытий решается за счет наполнения её содержательного компонента тематическими площадками.

Теоретическая значимость исследования состоит в том, что в нем:

– раскрыта роль интерактивных музеев математики в популяризации у обучающихся научных идей и открытий;

– обоснована возможность включения экспериментальной математики как составляющей интерактивного музея математики.

Практическая значимость исследования определяется тем, что в нем разработаны: тематические площадки интерактивного музея математики по теме «Решение алгебраических уравнений. Научные идеи и открытия» и «Решение задач экспериментальной математики», которые могут быть использованы в практике работы с обучающимися в рамках организации их научно-исследовательской деятельности во внеурочное время или частично использованы на уроках математики.

Достоверность и обоснованность результатов и выводов, полученных в ходе проведенного исследования, обеспечиваются исходными теоретическими концепциями и подтверждаются результатами педагогического эксперимента.

Личное участие автора в организации и проведении исследования состоит в самостоятельном решении поставленных задач, в том числе: разработке двух тематических площадок, проведении педагогического эксперимента с обучающимися, описании результатов исследования.

Апробация и внедрение результатов работы велись в течение всего исследования, а также в период производственной (научно-исследовательской работы) и преддипломной практик. Базы практик – кафедра «Высшая математика и математическое образование» и НИЛ «Школа математического развития и образования -5+» Тольяттинского государственного университета, а также МБУ «Гимназия № 38» городского округа Тольятти.

Результаты исследований докладывались и обсуждались на:

– всероссийской студенческой научно-практической конференции «Молодёжь. Наука. Общество» (г. Тольятти, декабрь, 2021 г.);

– II международной научно-практической конференции «Качество обучения как проблема контроля и оценки образовательной деятельности образовательных организаций (учреждений)», 27-28 января 2022, г. Луганск;

– вузовской конференции «Студенческие дни науки» в ТГУ (апрель 2022 г.);

– заседании кафедры математики и информатики МБУ «Гимназия №38» (Самарская область, г.о. Тольятти).

Они также отражены в 3-х публикациях [10], [11], [12].

На защиту выносятся:

1. Тематическая площадка «Задачи экспериментальной математики»

2. Тематическая площадка «Решение алгебраических уравнений. Научные идеи и открытия».

Структура магистерской диссертации. Работа состоит из введения, двух глав и заключения, содержит 16 рисунков, 12 таблиц, список используемой литературы (100 источников). Основной текст работы изложен на 92 страницах.

Глава 1 Теоретические основы создания интерактивного музея математики

1.1 Основные цели и задачи интерактивных музеев математики

Для определения основных целей и задач интерактивного музея математики, проанализируем опыт создания таких музеев.

«Цель интерактивного музея математики «Всезнариум» – расширение и углубление математических знаний и умений посетителей, совершенствование их творческих способностей, развитие интереса к математике через совместный интеллектуальный отдых и развлечения (знакомство в интерактивной познавательной и игровой форме с математическими закономерностями и фактами)», – отмечают авторы статьи [39].

Интерактивный музей математики, содержательно наполненный различным интересным и познавательным материалом из области математики, может как нельзя лучше развить интерес обучающихся к предмету математики [74]. Но не только содержательная сторона музея должна служить средством популяризации у обучающихся научных идей и открытий. Неотъемлемой составляющей интерактивного музея математики, является и то, в какой форме представлена вся информация в этом музее. Здесь стоит ориентироваться конечно же на запросы современного общества. Современный ученик – это неотъемлемый участник цифровой образовательной среды, поэтому содержание разделов интерактивного музея должно носить не просто повествовательный характер, здесь должны быть представлены интерактивные игры, присутствовать картинки с Gif-анимацией, онлайн квесты, интерактивные игры.

Одним из основных положений, из которых мы исходим, является следующее: «Математика, математические идеи и открытия являются одним из лучших образцов для знакомства школьников, студентов, аспирантов, ученых с историей культуры и науки» [80].

Цель создания интерактивного музея математики: популяризация математики среди обучающихся посредством расширения и углубления математических знаний, внедрения новых образовательных технологий в процесс обучения математике, развития творческих и интеллектуальных способностей обучающихся.

Задачи:

– обеспечить развитие основных универсальных учебных действий по математике на базовом уровне согласно возрастным особенностям;

– показать, что математика не является абстрактной наукой, а математические знания можно применить для описания различных явлений окружающего мира и жизненных ситуаций;

– научить составлять математическую модель различных ситуаций, возникающих в жизни человека;

– расширить кругозор обучающихся и повысить их интерес к изучению математики при знакомстве с научными открытиями и изобретениями, а также принципами работы математических законов;

– развить чувство сопричастности к достижениям в области математики, тем самым повысив мотивацию в выборе будущей профессии;

– продолжить изучение математики во внеурочное время в неформальной обстановке;

– раскрыть творческий потенциал обучающихся, направив его на развитие экспериментальной и исследовательской деятельности.

Интерактивные музеи в современном мире набирают все большую популярность [2]. Они могут представлять собой, как и обычные музеи, некий комплекс экспонатов, размещенных в специально выделенном помещении. Или могут являться интерактивной площадкой, посетителем которой может стать любой пользователь сети Интернет. Такого рода интерактивные музеи становятся весьма актуальными в реалиях развития мировой цифровизации [94]. Кроме того, посетителем такого музея может стать любой желающий, находящийся за много тысяч километров от него. Даже если музей существует на коммерческой основе, его посещение обойдется во много раз дешевле, если бы для этого пришлось приехать в другой город.

1.2 О роли интерактивных музеев математики в популяризации у обучающихся научных идей и открытий

Одной из основных задач, поставленных перед математическим образованием и прописанных в Концепции развития математического образования в Российской Федерации, является «популяризация математических знаний и математического образования». Для этого необходимо:

– «обеспечение государственной поддержки доступности математики для всех возрастных групп населения;

– создание общественной атмосферы позитивного отношения к достижениям математической науки и работе в этой области, понимания важности математического образования для будущего страны, формирование гордости за достижения российских ученых;

– обеспечение непрерывной поддержки и повышения уровня математических знаний для удовлетворения любознательности человека, его общекультурных потребностей, приобретение знаний и навыков, применяемых в повседневной жизни и профессиональной деятельности» [41].

Автор статьи «Неформальные методы популяризации научного знания в технических музеях», А.К. Филякова приводит статистику исследования, проведенного зарубежными учеными Сойбергом и Шрейнером среди обучающихся 34 стран, посвященного восприятию науки опрошенными респондентами. По результатам опроса было выявлено, что «интерес школьников к научной деятельности обратно пропорционален уровню экономического развития страны проживания» [82].

В толковом словаре С.И. Ожегова дается следующее определение понятия «наука»:

«1. Система знаний о закономерностях развития природы, общества и мышления, а также отдельная отрасль таких знаний.

2.То, что поучает, дает опыт, урок» [56].

Понятие науки и техники тесно связано с понятием «культура», составляющим звеном которого является музей.

Таким образом, музей, являющийся хранилищем опыта и знаний предыдущих поколений, должен стать неизменной составляющей новой образовательной парадигмы.

Однако, современный музей математики должен быть переориентирован на потребности человека 21 века, его мировоззрение и жизненный опыт. Технические музеи, и в частности, музеи, посвященные математике, наиболее полно отражают картину мироустройства. Именно поэтому на сегодняшний день особую актуальность приобретает всестороннее развитие музеев технической направленности, одной из разновидностей которых являются музеи математики.

Дадим определение понятию «музей». В толковом словаре Д.Н. Ушакова музей – это «учреждение, имеющее целью собирание, хранение и экспозицию памятников истории и искусств, а также естественнонаучных коллекций и ведущее культурно-просветительскую работу» [81].

В современном мире помимо традиционных музеев все чаще встречаются музеи, организованные в виртуальном пространстве [7]. Это виртуальные музеи. В виртуальных музеях, также как и в традиционных появляется все больше экспонатов, которые можно и нужно трогать руками, изучать принцип их работы, наблюдать [97], [99]. Это и является элементом интерактивности, позволяющим установить связь между экспонатом музея и посетителем. Такая связь служит одним из основных мотивирующих факторов, способных популяризировать область науки, которую представляет экспонат.

Музеи, в привычном для нас понятии – это место, куда человек может прийти и полюбоваться экспонатами. Но современный оцифрованный мир подарил нам возможность увидеть другие музеи – *виртуальные,* которые содержательно не менее богаты, а порой даже могут показать посетителям экспонаты, присутствие которых в классических музеях маловероятно. Речь идет об интерактивных музеях [25].

Проанализируем понятие «интерактивный музей математики».

Согласно И.К. Кондауровой « интерактивный музей математики» – специально организованное для расширения и углубления математических знаний и умений, развития познавательного интереса к предмету игровое интерактивное образовательное пространство, предполагающее взаимодействие обучающегося с собой, другими обучающимися, организатором образовательного процесса, образовательным контентом, наполненным математическими моделями и объектами, позволяющими при взаимодействии с ними объяснять разнообразные математические факты, теории, закономерности» [39, с. 100].

Интерактивный музей математики несет в себе огромный потенциал по привлечению интереса обучающихся к изучению математики, исследовательской и проектной деятельности в этой области, но для этого необходимо грамотно и профессионально наполнить его содержанием, соответствующим современным запросам общества, а особенно молодежи [24].

Опираясь на собственный опыт работы в школе, можно сделать вывод о том, что, например, обучение геометрии стоит выводить на радикально новый уровень, а именно, использования классной доски и чертежных инструментов уже недостаточно для того, чтобы современный ученик, для которого гаджеты стали повседневными атрибутами, проявлял интерес к предмету. Не говоря уже о качественном усвоении материала. Учителю необходимо не только научиться самому искать нужную информацию на просторах интернета, но и научить своих подопечных находить правильные, полезные ресурсы, а самое главное, научиться применять их на практике. Большим подспорьем в преподавании математики служит, например, такой образовательный ресурс, как GeoGebra. Его плюсы – это наглядность и простота в применении. Присутствие подобного рода ресурса в интерактивном музее позволит развить интерес учеников к математике, научить их анализировать результат в зависимости от исходных данных, сопоставлять, делать выводы.

Проблемой современного ученика является нежелание читать большие тексты, неумение долго концентрировать внимание на объекте. В то же время новое поколение с интересом изучает материал, подкрепленный анимированными изображениями, 3D-моделями. Поэтому еще одной составляющей такого музея может быть каталог открытых задач, оформленных с применением анимации. Это могут быть задания о парадоксах, замощениях плоскости, занимательные задачи [71].

Еще одно увлечение современной молодежи – это квесты. Математические квесты могут быть представлены в виде цикла разноуровневых заданий, позволяющих проверить у учащихся уровень сформированности универсальных учебных действий.

Разделом интерактивного музея для старших школьников может являться раздел с разработанными экономическими задачами, представленными в виде деловой игры. Примером такого раздела могут служить экономические задачи из единого банка заданий ФИПИ ЕГЭ по математике. Задачи такого рода, да и вообще задачи на проценты, как правило, вызывают трудности у обучающихся. Практика показывает, что использование деловой игры при обучении теме «Проценты» способствует увеличению познавательного интереса среди обучающихся.

1.3 Обзор основных интерактивных музеев математики

Исходя из определения интерактивного музея, можно выделить следующие направления его работы:

– экспонаты музея представляют собой интерактивные среды, где путем эксперимента обучающийся может самостоятельно познакомиться с тем или иным математическим фактом, а также освоить его применение на практике;

– экспонаты музея представляют собой оцифрованную коллекцию теоретического материала по математике, представленную в виде видео и аудио лекций, электронной библиотеки, научных фильмов;

– экспонаты музея представлены в виде интерактивной игры для одного или нескольких участников. Заданиями игры являются задачи по математике, представленные в виде математической модели, выполненной в какой-либо из динамических сред, компьютерной программе или просто в виде текста. Поиск решения и ответа на предложенные задачи служит для организации групповой исследовательской работы;

– экспонаты музея создаются самостоятельно «посетителями» виртуального музея. Данная функция используется в том случае, если обучающиеся имеют достаточный опыт и теоретические знания по той теме, по которой «создается» экспонат. Действия обучающихся происходят по предварительному согласованию с руководством музея.

В современном мире уже не первый год существуют различные интерактивные музеи [15]; [16]; [34]; [55]; [90]; [95]; [98]. Это музеи истории и искусства, естественных наук и робототехники. Как правило, такого рода музеи представляют собой музей в музее, являясь тематической экспозицией или тематической площадкой, представляющей различные экспонаты, которые посетители могут «потрогать», став участниками интерактивной игры.

Анализируя статьи, посвященные теме интерактивных музеев [16]; [17]; [39], можно сделать вывод о том, что для современного человека этот вид искусства представляет повышенный интерес именно своим нестандартным подходом, возможностью вовлечения в творческий процесс. Именно это и привлекает в большей мере при создании интерактивного музея математики. Первым таким музеем в России стал «Дом занимательной науки», который был создан в 1934 году Я.И. Перельманом в Санкт-Петербурге. Целью создания данного музея стало желание его авторов привлечь интерес окружающих к естественным наукам и математике. Яков Исидорович говорил: «Находить в старом новое умеет не всякий, и далеко не всякий склонен глубоко задумываться над тем, что постоянно совершается перед глазами. Чтобы привлечь внимание к таким обыденным явлениям, надо показать в них новые, неожиданные стороны. Подобный метод пропаганды научных знаний был положен в основу своеобразного просветительского учреждения-Дома занимательной науки…» Искусство удивлять, вот главная идея ДЗН по мнению его авторов – В.А. Камского, Я.И. Перельмана, В.И. Прянишникова, Л.В. Успенского и А.Я. Малковах [17]. Если говорить о современных интерактивных музеях математики, то среди них можно выделить два музея, экспозиции которых посвящены популяризации математике. Эти музеи находятся в Германии и носят названия Арифмеум [90] и Математикум [98]. Арифмеум расположен под одной крышей с Исследовательским институтом дискретной математики и входит в состав Боннского университета. Экспонатами данного музея служат механические счетные машины. Математикум, находящийся в городе Гиссен, включает в себя около 200 экспонатов, позволяющих посетителям этого музея с головой окунуться в процесс математических открытий. В музей Математикум можно попасть и он-лайн. Интернет-посетителям предлагаются увлекательные головоломки, эксперименты, лекции [96].

Во многих городах мира существуют музеи с экспозициями в виде интерактивных экспонатов. Одним из таких музеев является специализированный музей математики в Нью-Йорке MoMath [16]. Этот музей рассчитан на детей младшего и среднего школьного возрастов. Его экспонаты можно потрогать руками, в полной мере став участником процесса изучения математики даже на интуитивном уровне. Начальные знания по математике здесь осваиваются в увлекательной игровой форме, посредством чего, даже самые маленькие «нелюбители» математики становятся ее активными поклонниками.

Еще один музей, являющийся проект-концепцией, выдвинутой французским математиком Клодом Брутером, который предложил создать «Математический парк» [15]. Парк будет представлять собой несколько павильонов, расположенных в определенной последовательности, в соответствии с тем, как исторически проходило развитие математики. Вот лишь некоторые названия павильонов - «Конус Аполлония» (посвящен классической геометрии Евклида), «Обсерватория Гаусса» (здесь будут проиллюстрированы понятия и факты из дифференциальной геометрии), «Сюрпризы Пуанкаре» (идеи современной математики). Поимо закрытых павильонов некоторые композиции здесь будут представлены в виде элементов садово-паркового искусства, например гидрокомпозиция, посвященная топологии с красивым названием «Мосты Леонардо Эйлера». Математический парк будет включать четыре функциональные зоны – экскурсионную, познавательно-развлекательную, выставочную и виртуальную. Математический парк представляет собой международный сетевой проект, над созданием которого трудятся ученые из разных стран. Параллельно с проектированием и строительством павильонов планируется создание сети виртуальных математических парков, представляющих собой взаимосвязанную систему интерактивных порталов, доступ к которым будет предоставлена всем желающим пользователям сети Интернет [16]. Несомненно, создание подобного грандиозного проекта направлено на развитие популяризации математики среди подрастающего поколения по всему миру.

Еще одним интерактивным музеем математики, на который стоит обратить внимание является «Сад Архимеда» [95], музей, расположенный в Италии во Флоренции. Особенностью музея является то, что знакомство с его экспозициями проходит в несколько этапов, каждый из которых посвящен какому-то одному из трех способов математических открытий. На первом этапе представлены несложные мини-игры с математическим содержанием. Посетитель может потрогать экспонаты, провести с ними различные манипуляции, заставляя их работать. Второй этап – это математические плакаты, в том числе и с историческим содержанием, касающемся истории развития математики. На третьем этапе посетитель может более детально познакомиться с некоторыми объектами математического исторического наследия. Приведем пример разделов данного музея.

Раздел 1 «За пределами компасов: геометрия кривых». Раздел посвящен изучению, построению, классификации и измерению кривых. Посетителям предлагаются три теоретических тура, первым из которых является концептуальный тур, в котором дается описание основных понятий геометрии кривых в зависимости от уровня сложности. Второй тур раскрывает эволюцию совершенствования математических методов изучения кривых. Третий тур показывает практическое применение кривых и их свойств в других областях, отличных от математики.

Раздел 2 «Пифагор и его теорема». Здесь представлены игры, загадки, математические головоломки, исторические факты, так или иначе связанные теоремой Пифагора.

Раздел 3. «Мост через Средиземное море». Выставка, посвященная Леонардо Фибоначчи. Экспозицию составляют иллюстрированные и фигурные панно, среди которых рукописные репродукции работ самого Фибоначчи, тексты средневековой математики, исследования о Фибоначчи и его открытиях ученых XIX века а также макет школ древнего Рима и Флоренции позднего средневековья.

Раздел 4 «От механики Галилея к повседневной жизни». Здесь посетитель, взаимодействуя с простейшими машинами и механизмами, представленными на выставке, опираясь на математические законы, самостоятельно может прийти к открытию принципа работы представленных механизмов.

Математика, не смотря на свою увлекательность и красоту, считается среди обучающихся довольно сложным предметом. Поэтому педагогическое сообщество постоянно находится в поиске новых форм и методов преподавания математики. Одной из таких форм может служить интерактивный музей математики, в качестве содержания которого может быть представлен как учебный материал, так и всевозможные дополнительные задания, касающиеся внеурочной деятельности.

Приведем несколько примеров разделов подобного музея математики:

Геометрические фигуры. Здесь могут быть представлены задания по планиметрии и стереометрии. При этом построение рисунка к задаче ученик может осуществить самостоятельно, построив его в специальной программе. При необходимости чертеж можно повернуть таким образом, чтобы ученик смог более детально представить объект исследования в задаче. Это особенно актуально на уроках стереометрии, при построении сечений, при решении олимпиадных задач, подготовке к ЕГЭ. Этот же раздел может быть представлен геометрическими заданиями, относящимися к дополнительному образованию по математике. Например, задачи о раскраске, пентамино, парадоксы с площадью и другие.

Функции и их графики. Данный раздел может быть посвящен тому, как выглядят графики функций, как они смещаются, в зависимости от того, какие параметры заданы. Не секрет, что данная тема является трудной для восприятия обучающимися именно из-за того, что на уроке, с помощью стандартных мела и доски не всегда можно наглядно показать, как изменяется график функции в зависимости от изменения исходных величин [38]. Поэтому присутствие в качестве экспоната музея программы, позволяющей наглядно увидеть и где-то даже «потрогать» эти изменения, позволяет развить интерес среди обучающихся к изучению алгебры, заинтересовать предметом, а значит, подготовить математически грамотное поколение.

Научные идеи и открытия. Этот раздел музея может быть наполнен не только различными математическими открытиями известных ученых и исследователей, но и также может содержать подраздел, являющийся копилкой научно-исследовательских работ обучающихся. Кроме того, на базе данного раздела можно организовать математические квесты для обучающихся различных возрастов, где учащиеся, в процессе выполнения заданий совершают самостоятельно научное открытие, уже сделанное до них известным ученым, а в качестве бонуса в конце игры получают рассказ об интересных фактах из жизни этого ученого [100].

Итак, подводя итог, можно сделать вывод, что интерактивные музеи в современном мире носят не только просветительскую направленность. Это очень важный и нужный механизм образовательного процесса в целом, так как грамотно построенные разделы данного музея способствуют развитию интереса к научно-исследовательской деятельности среди обучающихся, формированию устойчивого интереса к математике, повышению математической грамотности, становлению интеллектуально развитой и образованной личности.

Современный музей математики должен быть спроектирован с учетом возможности постоянного диалога между посетителем и экспонатами данного музея [93]. Выделим три направления развития музея математики, способствующих активному развитию данного диалога:

– интерактивность;

– использование компьютерных технологий и сети интернет;

– научные лаборатории.

С английского языка слово «интерактивность» переводится как «взаимодействие». Этот неотъемлемый компонент представляет собой постоянное взаимодействие между субъектом и объектом. «Руками трогать!»,

– девиз интерактивности. Данный компонент необходим и в образовательном процессе, так как представляет собой элемент экспериментально-исследовательской деятельности. Умение применять теоретические знания по математике на практике и использовать их в повседневной жизни – это то, на что делается особый акцент в последние годы в образовании. Использование интерактивных методов в образовательном процессе способствует формированию необходимой для обучения ассоциативной сети понятий у обучающихся [82]. В результате такого взаимодействия у обучающихся возникает понимание какого-либо теоретического материала с учетом пережитого личного опыта и ранее полученных знаний [77].

В жизни современного человека неотъемлемой частью стали всевозможные интернет-ресурсы, с помощью которых можно создавать собственные web-страницы, наполняя их различными текстами, фото- и видео-материалами. При использовании данного ресурса при взаимодействии с посетителями диалог достигается путем обмена информацией [92]. Это может быть обсуждение научных статей, исторических фактов и открытий в области математики. Кроме того, современные планшетные компьютеры и смартфоны позволяют посетителям скачивать различные приложения, являющиеся путеводителями по музею или представляющие собой игру, в которой рассказывается о том или ином открытии. Поочередно продвигаясь по этапам данной игры, обучающийся самостоятельно изучает не только теоретические знания по представленной теме, но и учится находить их практическое применение.

Долгое время преподавание математики носило в основном теоретический характер. В последние годы особое внимание, согласно Концепции математического образования, уделяется научно-исследовательской деятельности обучающихся. Одним из примеров является создание по всей России центров дополнительного образования «Кванториум» [61], представляющих собой инновационные площадки для привлечения детей и молодежи к изучению наукоемких технологий, а также образовательный центр «Сириус», деятельность которого направлена на развитие науки, искусства, спорта. На базе этих центров существуют научные лаборатории, где школьники могут заниматься научно-исследовательской деятельностью. Такие же лаборатории можно организовать на базе музеев, посвященных математике. Например, подобная практика существует в государственном Политехническом музее в Москве. Многие из опытов, которые проводятся на базе интерактивных музеев не требуют особых материальных затрат, но являются огромным подспорьем в процессе вовлечения обучающихся в научно-исследовательскую деятельность по математике, помогают школьникам определиться с выбором будущей профессии [49], [50], [53].

Рассмотрим пример создания проекта «Музей занимательной математики» на базе онлайн-сервисов и сетевого наставничества, описанный в статье М.А. Павловой [57], [58].

На базе данного проекта была организована сетевая проектная школа (СПШ) для обучающихся 7-11 классов. Каждый участник самостоятельно мог выбрать направление и тематику сетевого проекта, а также, при необходимости, расширить круг наставников.

Во время реализации проекта участники выполняли следующие виды работ:

– анализ коллекций экспонатов различных музеев занимательных наук, размещенных на их сайтах, научно-популярной литературы, размещенной на этих сайтах. По результатам анализа проводится отбор необходимого материала, который можно было бы использовать для создания собственных виртуальных или реальных объектов. Данный вид работ проходит под руководством учителя-тьютора;

– выдвижение собственных идей, распределение участников в рабочих группах, проведение обсуждения под руководством наставника-модератора проекта;

– анализ возможностей по реализации отобранных идей и распределение ролей среди участников каждой группы по подготовке, проектированию и созданию музейных экспонатов, разработки экскурсий;

– работа по созданию экспонатов, включающая в себя взаимодействие разработчиков со специалистами в различных областях;

– тестирование обучающимися полученных результатов совместно с кураторами под руководством наставника-модератора;

– совместная работа групп по разработке внешнего дизайна виртуального музея математики;

– размещение созданных экспонатов музея на виртуальной и реальной площадке;

– представление результатов проекта на конкурсах и выставках различного уровня.

При реализации подобного проекта, возникает вопрос о выборе интерактивных творческих сред, с помощью которых будут создаваться экспонаты будущего музея математики.

Приведем пример, предложенный в статье М.В. Шабановой и М.А. Павловой «Коллекция педагогических сценариев использования интерактивных творческих сред для дополнительных занятий по математике» [85]. Рассмотрим несколько педагогических сценариев, описанных авторами данной статьи.

От сюжетной задачи к самостоятельному исследованию.

В основу данного педагогического сценария положена сюжетная задача, решение которой осуществляется с помощью проведения компьютерного эксперимента. Авторы показывают суть применения данного сценария через пример работы с интерактивной игрой Геокэшинг (https://geocaching.su/).

Этапы реализации сценария: постановка задачи → обоснование привлечения компьютерного эксперимента → планирование и моделирование компьютерного эксперимента → сбор данных → анализ данных → использование результатов компьютерного эксперимента для решения задач → развитие идеи решенной задачи.

Сетевая игра.

Авторы разработали игру под названием «Геометрический Scrabble в облаках». В качестве облачного ресурса был выбран Google Диск. Однако, в данном случае возможно использование и отечественных облачных хранилищ, таких как, например, ЯндексДиск. Игра является прообразом игры «Эрудит». Участникам предлагалась стартовая задача по геометрии.

Далее участники решали эту задачу и разрабатывали на ее основе новую задачу. «Характер связи новой задачи со стартовой определял ее позицию на игровом поле:

– если новая задача изменяет геометрическую конструкцию исходной, то она размещается над стартовой;

– если представляет собой обобщение исходной, то справа от нее;

– если состоит в поиске особого частного случая стартовой задачи, то слева;

– если ставит новый вопрос относительно свойств конфигурации, то снизу».

Турнир по экспериментальной математике.

Целью проведения турнира был мониторинг уровня сформированности у обучающихся качеств математика-экспериментатора, а также популяризация интерактивных творческих сред и экспериментального подхода в обучении математики. В результате проделанной работы, авторы сделали выводы о том, что интерактивные творческие среды являются прекрасной площадкой для реализации творческого и научно-исследовательского потенциала обучающихся.

Рассматривая изложенный выше материал в контексте интерактивного музея математики, можно сделать вывод, что создание подобных музеев способствует популяризации математики среди обучающихся, носит профориентационный характер, является мощным стимулятором научно-исследовательской деятельности.

1.4 Экспериментальная математика – как составляющая интерактивного музея математики

Первое упоминание термина «экспериментальная математика» принадлежит российскому ученому-математику Н.Н. Красовскому. Впервые он был произнесен на открытии Уральского научного центра АН СССР [45].

Авторы статьи А.Н. Котельникова и И.Н. Красовский вводят термин «экспериментальная математика» таким образом: « … школьное обучение должно отражать в меру адекватно современные веяния науки и практики. Но одним из главных таких веяний является органичное слияние математики как таковой –математики аксиом, теорем, рафинированного пространства и аналитики− с информатикой, понимаемой как наука и практика автоматизации вычислений, геометрических построений, логических рассуждений, формирования коммуникаций, упаковки и распаковки информации. Обучение такой экспериментальной математике не должно чураться ни «высоких» математических «материй», ни «земного» компьютерного эксперимента. Разумеется, все это на уровне, доступном школьнику» [43, с. 50].

В статье Л.Н. Удовенко, М.И. Шабановой, М. Ниматулиева «экспериментальная математика рассматривается как проблемная область и особая методология, которая открывает возможности для организации исследовательской деятельности учащихся с различным уровнем базовой математической подготовки в целях формирования у них опыта деятельности в форме, которая получила название Science 2.0. Основными чертами Science 2.0, с которыми имеют возможность познакомиться учащиеся, являются: проектный характер работ, привлечение к решению научных задач любителей на условиях краудсорсинга, сетевой характер взаимодействия, широкое использование возможностей компьютерной поддержки исследовательской деятельности» [79] .

Некоторые ученые-методисты предлагают выделить новую содержательно-методическую линию школьного курса математики, связанную с применением экспериментальных методов. Эту линию авторы предлагают назвать линией экспериментальной математики. В статье [86] раскрываются теоретические основы ее проектирования, намечаются направления развертывания данной линии в содержании школьного курса математики по ступеням обучения.

О. С. Кипяткова [32] рассматривает экспериментальную математику как принцип фундаментальности математического образования. Автором показана реализация данного принципа при обучении математике будущих учителей начальных классов.

Понятие математического эксперимента появилось в математике еще в 50-е годы. Математический эксперимент являлся связующим звеном между различными предметами естественнонаучного цикла, при помощи которого можно было вводить метапредметные связи.

А.Я. Блох определил понятие математического эксперимента, как «сечение курса школьной математики, в которое попадают тематически и идейно связанные, но композиционно разъединенные фрагменты учебников. Материал, относящийся к каждой линии, изучается длительное время, нередко на протяжении всего курса, так что ее можно рассматривать с точки зрения и внутрипредметных преемственных связей» [13].

Основным фактором, оказавшим существенное влияние на развитие экспериментальной математики, послужил технический прогресс 70-80-х годов двадцатого века. Возникло такое понятие, как «компьютерный эксперимент». Особенностью эксперимента, проведенного с помощью ЭВМ, а впоследствии компьютеров, является его особая точность, исключающая возможные погрешности. Однако, недостатком компьютерного эксперимента может являться то, что зачастую проверенные с помощью машины факты не имеют достаточного теоретического подтверждения.

Таким образом, задачи экспериментальной математики разделились на три направления, относительно использования компьютерных программ :

– задачи, решаемые без привлечения компьютера;

– задачи, решение которых значительно облегчается при привлечении компьютерных средств;

– задачи, решаемые только с привлечением компьютерных средств.

Привлечение к решению математических экспериментальных задач компьютерных средств во многом сблизил «методологию математики с методологией естественных наук» [32].

Многие ученые, такие как Г. Вейль, Д. Гильберт, Ж. Адамар говорили о принадлежности математики экспериментальных начал, а не только теоретических. Вот что сказал по этому поводу В.И. Арнольд: «Математика является экспериментальной наукой – частью теоретической физики и членом семейства естественных наук» [4].

В книге «Экспериментальная математика» В.И. Арнольд раскрывает новый подход к преподаванию математики. Он говорит, что «слово «математика» означает «точное значение», и соответствующие открытия были получены из наблюдений явлений природы» [6]. В другой своей весьма увлекательной книге «Математическое понимание природы» Арнольд говорит о том, что «основной вклад математики в естествознание состоит вовсе не в формальных вычислениях, а в исследовании тех неформальных вопросов, где точное выяснение постановки вопроса составляет обычно полдела…Примеры учат больше, чем правила, а ошибки – больше чем правильные, но непонятные доказательства». В книге представлены интереснейшие решения задач путем постановки эксперимента. Даже названия задач «Возвращение по синусоиде», «Спасение хвостового оперения самолетов», «Ошибочные теоремы Куранта» и др. заставляют увлечься их решением [5].

Отправной точкой познания считал экспериментальный метод решения задач М.В. Ломоносов. Он уделял этому методу ведущую роль по причине того, что на его взгляд процесс человеческого познания обусловлен потребностями практической деятельности человека [84, с.40]

В период реформы А.Н. Колмогорова в математике получил широкое применение принцип самостоятельности и активности обучающихся в развитии их познавательной деятельности. Этот принцип поддержал в своих трудах И.Я. Лернер [48].

Реализация дидактического подхода привела к тому, что в содержание математического образования был включен новый компонент – опыт творческой деятельности. По мнению И.Я. Лернера, для того, чтобы в полной мере сформировать данный компонент, необходимо создать особые условия, среди которых использование учителем в своей работе методов проблемного обучения, и в частности, исследовательского метода.

Следующим направлением исследований ученых стал поиск и описание задач по математике, которые должны использоваться при проблемном обучении. Это творческие, проблемные, нестандартные задачи и др. Над данной проблемой работали такие ученые, как В.Г. Болтянский, А.А. Столяр, Ю.М. Колягин.

Дальнейшая работа математиков в данном направлении привела к тому, что ученые Р. Беллу и Х. Банчи [91] предложили классифицировать исследовательское обучение по уровням:

– Проведение подтверждающих, контрольных исследований.

На данном этапе обучающиеся самостоятельно пытаются подтвердить определенные теоретические утверждения, предоставленные учителем, и проверяют истинность уже существующих исследований ученых по представленным утверждениям. Это способствует лучшему восприятию обучающимися теоретических данных, полученных от учителя и продуктивному анализу фактов, подтверждающих эти данные.

– Проведение исследований по определенному плану.

Обучающиеся решают исследовательскую задачу по заранее сформированному плану, четко следуя инструкциям и указаниям. Здесь обучающиеся самостоятельно ведут сбор данных на каждом этапе исследования, анализируют их и делают собственные виды, опираясь на уже имеющиеся теоретические знания.

– Проведение исследований под руководством педагога.

Учитель ставит перед обучающимися исследовательскую задачу, помогая, при необходимости, определиться с направлением поисковой деятельности путем!!!. Обучающиеся самостоятельно составляют алгоритм своей деятельности, распределяют между собой обязанности, фиксируют полученные результаты, делают выводы. Итогом проделанной работы является защита проекта. Учителю на данном уровне отводится роль тьютера.

– Истинные (подлинные) исследования.

На данном уровне обучающиеся самостоятельно ставят перед собой исследовательские цели и задачи, определяют проблемы и задачи исследования, проводят ход исследования, делают выводы и проводят их защиту. Данный уровень используется при подготовке к научно-практическим конференциям.

Таким образом, анализируя сказанное выше, можно сделать вывод, что исследовательское обучение в школе тесно связано с математикой эксперимента [72].

Линия экспериментальной математики – это «содержательно-методологическая линия школьного курса математики, ведущим понятием которой является понятие математического эксперимента» [86].

По мнению А.Я. Блоха, выбор теоретического материала, являющегося фундаментом содержания такой линии, является одной из проблем проектирования линии экспериментальной математики в школе. Материал может быть специфическим, для ведущего понятия линии, то есть состоять из того, что характеризует теоретическое содержание линии экспериментальной математики, или неспецифическим, то есть состоящим из материала, относящегося ко всему курсу математики.

Второй проблемой в данном вопросе, по мнению А.Я. Блоха, является уровень и степень выраженности понятия «математический эксперимент», основного понятия данной линии.

М.В. Шабанова разработала «концепцию проектирования методологической составляющей школьного курса математики», основанную на поэтапном становлении элементов содержательно-методологической линии, подчиняющихся процессу рационализации и генерализации, т.е. «процессу эволюции методологических знаний, сопровождающийся изменением формы их существования и содержания» [86].

Математику эксперимента все больше используют на практике учителя в своей деятельности. Причем основной акцент в последнее время делается на решение экспериментальных задач с помощью различных компьютерных сред и программ [52].

В статье К.В. Малышевой [54] говорится о том, что при постановке математических экспериментов особая роль отводится компьютеру. Авторы приводят сравнительный анализ интерактивных динамических сред «Живая математика», «Математический конструктор», GeoGebra на предмет использования операционной системы, работы с объектами на плоскости и в пространстве, компьютерной визуализации, работы в среде онлайн и других.

Н.И. Фомина [83] описывает возможные задачи лабораторного практикума для обучающихся 10-11 классов, решаемых с помощью динамической среды GeoGebra по таким темам, как «Функции и их графики», «Логарифмическая функция», «Показательная функция», «Производная и ее геометрический смысл».

Отдельно стоит отметить статью А.В. Рожкова [69] посвященной новейшим разработкам и исследованиям группы студентов и магистрантов в области экспериментальных исследований по математике. Интересным является то, что авторы предлагают проводить экспериментальные вычисления, используя не общепринятые платформы и языки программирования, а малораспространенные в широких кругах, такие как ОС Debian (DebraLynn + IanMurdock) (https://www.debian.org), если говорить об операционной системе. В качестве языка программирования предлагается использовать Julia, разрабатываемый в Massachusetts Instituteof Technology. Особое внимание в статье уделяется проведению разведочных вычислений в области алгебры и теории чисел, таких как бинарная проблема Гольдбаха, проблема Коллатца и другие. Содержание задач программируется, и впоследствии с помощью программы получаются экспериментальные данные. Предложенная в статье система задач подойдет для научных исследований обучающимися 10-11 классов, углубленно изучающих математику.

В статье Ю.К. Константиновой [40] приведен не только анализ того, насколько современный учитель знаком с экспериментальной математикой, но и как он умеет применять эти знания на практике, в какой степени владеет информацией о компьютерном эксперименте в процессе преподавания математики и об отношении учителей к тому, насколько в их работе необходимо применять компьютерный эксперимент. При ответе на главный вопрос анкеты о том, можно ли развивать культуру математического мышления на основе компьютерного эксперимента, большинство респондентов ответило положительно.

С 1983 года при Московском центре непрерывного математического образования (МЦНМО) под руководством Г.Б. Шабата, доктора физико-математических наук, профессора РГГУ, МГУ и Независимого Университета работает Клуб Экспериментальной Математики (КЭМ) для учащихся 5-11 классов. Десятки его выпускников профессионально занимаются научной работой и имеют учёную степень. Школьники занимаются научно-исследовательской и проектной деятельностью по многим темам алгебры, арифметики, геометрии, динамики, комбинаторики, логики, топологии [6].

В 2015 году по инициативе кафедры «Экспериментальная математика и информатизация образования» Северного (Арктического) федерального университета им. М.В. Ломоносова был проведен первый турнир по экспериментальной математике среди школьников 7-9 классов (приняло участие 68 школьников) г. Архангельска и области [59].

Приведем примеры задач указанного турнира.

Задание 1. В равностороннем треугольнике ABC (тонкой треугольной однородной пластине) провели медиану AM. На ней отметили точку O, так что AO:OM = m:n, где m и n – целые числа. Опишите эксперимент, позволяющий методом взвешивания найти значения m и n. Перечислите оборудование, которое понадобится вам для его проведения.

Критерии оценивания приведены в таблице 1.

Таблица 1 – Критерии оценивания задания №1 турнира по экспериментальной математики

Баллы	Критерии
3	Найдена идея применения взвешивания.
6	Перечислен полный набор необходимого оборудования.
10	Описан план проведения экспериментальных работ и обработки данных эксперимента.

Задание 2. Возьмите лист бумаги с неровными краями. На нем произвольно отметьте три точки A, B и C. Перегибанием листа бумаги найдите центр окружности, проходящей через эти три точки. Обоснуйте правильность построений. В таблице 2 приведены критерии оценивания данного задания.

Таблица 2 – Критерии оценивания задания №2 турнира по экспериментальной математики

Баллы	Критерии
5	Правильно решена задача сгибанием для случая, представленного на листе бумаги.
10	Способ решения задачи обобщенно описан.
15	Способ решения задачи теоретически обоснован.

Экспериментальная математика рекомендуется для старшеклассников любого профиля. Это связано с тем, что обучать методам экспериментальной математики важно каждого обучающегося, независимо от выбора им будущей профессии, так как наблюдение, измерение, опыт, умение использовать компьютерные программы, являются одной из важных составляющих большинства видов современной деятельности [60], [67].

На данный момент нет ни одного учебника математики 10-11 классов общеобразовательной школы, в которых были бы представлены в полной мере задачи экспериментальной математики. Многие авторы учебников, например, Г.К. Муравин и О.В. Муравина в своих учебных пособиях рекомендуют использовать GeoGebra при решении задач не только по алгебре, но и по геометрии.

М.В. Шабановой, М.А. Павловой предложена дидактическая модель исследовательского обучения в стиле экспериментальной математики.

Цель построения дидактической модели – исследование влияния сочетания текущих значений таких факторов, как

– уровень базовой математической подготовки обучающихся (M);

– уровень сформированности у обучающихся качеств математика-экспериментатора и математика-теоретика (I);

– лимита учебного времени, отведенного на изучение учебного материала (T) [84].

Учитель самостоятельно принимает решения на каждом этапе обучения математики относительно степени применения стиля экспериментальной математики. Для достижения целей любого этапа применяется метод компьютерного эксперимента (таблица 3) [84].

Таблица 3 – Виды компьютерного эксперимента

Вид	Функции
«Конструктивный эксперимент	конструктивная проверка существования объекта исследования (изучения) → оценка адекватности модели объекта исследования (изучения) исходным данным → конструирование инструментов (средств, оборудования) или объяснение механизмов их работы → разработка рекомендаций по их использованию.

Продолжение таблицы 3

Вид	Функции
Иллюстративный эксперимент	визуализация утверждений, как поддержка работы памяти или достижение понимания.
Разведочный эксперимент	использование модели для использования экспериментальных данных, позволяющих выдвинуть гипотезы о свойствах и связях изучаемых объектов.
Контрольный эксперимент	контроль преобразований и вычислений, фальсификация, верификация гипотез.
Модифицирующий эксперимент	обнаружение ограниченности знаний, определение направления развития идеи, постановка новых задач» [Ш].

Математическое исследование зависит от уровня владения математическими знаниями, касающимися объекта исследования.

Для определения уровня математической подготовки обучающихся авторы монографии [84] применяют три, взаимосвязанных между собой фактора.

Первым таким фактором является уровень теоретических знаний, имеющихся у обучающегося перед началом исследования (таблица 4).

Таблица 4 – Начальные уровни теоретических знаний

Значения	Характеристика достаточности теоретического базиса для осуществления исследовательских действий
0	Обучающийся на обладает математическими знаниями, которые необходимы для осознанного восприятия исследования в стиле экспериментальной математики
1	Обучающийся имеет знания для осознанного восприятия образца исследования, но этих знаний недостаточно для самостоятельной реализации данного этапа исследования
2	Обучающийся не имеет знаний для самостоятельной реализации теоретической части исследования, но обладает знаниями для реализации его экспериментальной части
3	Обучающийся обладает знаниями для реализации и экспериментальной и теоретической части исследования

Вторым фактором успешной реализации математического исследования является уровень сформированности у обучающегося методологических основ исследования (таблица 5).

Таблица 5 – Уровни методологических основ деятельности

Значения	Показатели уровня методологических основ деятельности в стиле экспериментальной математики
0	Обучающийся не имеет образца деятельности в стиле экспериментальной математики в подобной ситуации
1	Обучающийся обладает неявными методологическими знаниями, связанными с конкретным образом познавательной деятельности
2	Обучающийся обладает частично-выявленными методологическими знаниями, являющимися отражением речевых комментариев учителя при демонстрации образов, но не имеет собственного опыта использования
3	Обучающийся обладает частично-выявленными методологическими знаниями, являющимися отражением текста инструкций, вопросов, указаний учителя, а также имеет опыт реализации плана исследования по инструкции
4	Обучающийся обладает частично-выявленными методологическими знаниями, являющимися отражением результата эвристических бесед и методологической саморефлексии в сократовском диалоге, а также опытом использования этих знаний для планирования познавательной деятельности в стиле экспериментальной математики
5	Обучающийся обладает объектизированными методологическими знаниями, опытом их использования для определения методологической базы исследования, включающей методы, отнесенные как к экспериментальному, так и теоретическому подходам.

Немаловажным фактором, влияющим на ход математического исследования, является лимит времени, доступный для проведения экспериментальной части исследования и для изучения теоретических основ, связанных с темой исследования (таблица 6).

Таблица 6 – Лимит времени на достижение цели дидактического этапа

Значения	Лимит времени на достижение цели дидактического этапа
0	Отсутствует время на организацию продуктивной деятельности обучающихся
1	Организация продуктивной деятельности возможна, но на ее реализацию отведена лишь часть урока
2	На реализацию продуктивной деятельности отведен целый урок или учебная пара
3	Продуктивная деятельности осуществляется во внеурочное время, то есть не ограничена по времени

Таким образом, успешная реализация экспериментальной исследовательской деятельности по математике зависит от сочетания нескольких факторов и степени их выраженности.

М.В. Шабанова предлагает формы познания в школьном курсе математики классифицировать следующим образом:

– метаэмпирическая форма познания (1-6 классы), включающая в себя первые два этапа методологических знаний об экспериментах;

– метаэмпирическая форма познания с элементами дедукции (7-11 классы), включающая в себя третий и четвертый этапы методологических знаний, в том числе и развитие представлений о мыслительном и компьютерном эксперименте (таблица 7) [84].

Таблица 7 – Основные этапы эволюции методологических знаний

«Этапы	Характеристика		Условия
	Форма	Содержание	
Зарождение	Неявное личностное	Личностные и процессуальные компоненты. Частное, конкретное, не воспроизводимое	Восприятие образов или инсайт
Распространение	Неясное межличностное	Процессуальные компоненты методологических знаний, эмпирически обобщенное, частично обратимое	Подражание, репродукция, осознание экстра-познавательной значимости
Выявление	Частично-объективизированное, надличностное	Процессуальные и информационные компоненты, эмпирически-обобщенное, абстрактное, обратимое	Сомнения в правильности, обнаружение ситуаций неэффективности
Опредмечивание	Объективизированное предметное или метапредметное знание	Информационные компоненты, теоретически обобщенное, формализованное, обратимое	Потребность в адекватном выражении и обосновании»

Рассмотрим содержательный аспект линии экспериментальной математики в школьной программе на примере старших классов общеобразовательной школы.

Цель этапа, согласно М.В. Шабановой: распространение мысленных экспериментов на новые области, развитие знаний о роли компьютерных экспериментов в поддержке мысленного экспериментирования и выхода за границы возможностей, определенных уровнем теоретической подготовки.

Элементы содержания:

– неспецифический, включает в себя теоретические знания по темам «Начала математического анализа», «Стереометрия», «Элементы математической статистики» и т.д.;

– специфический включат в себя стохастическое моделирование, мысленный эксперимент, компьютерный эксперимент и т.д.

Результаты:

– умение визуализировать мысленные эксперименты в компьютерные образы;

– умение использовать компьютерный эксперимент для наиболее успешной и более эффективной реализации мысленного эксперимента на практике;

– умение использовать компьютерный эксперимент в качестве средства для расширения возможностей, выходящих за пределы уже имеющихся теоретических знаний.

Под системой задач экспериментальной математики будем понимать набор специально подобранных задач, построенных с учетом определенных требований (принципов).

При проектировании системы задач экспериментальной математики в рамках дидактической модели обучения М.И. Шабановой мы исходили из следующих принципов:

– включение в систему таких задач, которые доступны для понимания и его выполнения обучающимися соответствующего возраста (принцип доступности);

– включение в систему таких задач, которые допускают применение методов экспериментальной математики (наблюдение, опыт, измерение, построение);

– включение в систему таких задач школьного курса математики, которые допускают различные методы решений, в том числе с использованием дополнительных средств измерения, построения;

– включение в систему таких задач школьного курса математики, которые допускают различные методы решений, в том числе с использованием компьютерного эксперимента.

Выводы по первой главе

В первой главе представлены теоретические основы проектирования интерактивных музеев математики на примерах уже существующих музеев и виртуальных площадок.

В первом параграфе рассмотрены основные цели и задачи интерактивных музеев математики.

При описании роли интерактивных музеев математики в популяризации у обучающихся научных идей и открытий вводится понятие «интерактивный музей математики» и раскрывается суть этого понятия на примерах исследований И.К. Кондауровой и А.К. Филяковой.

При описании работы основных интерактивных музеев математики рассказывается об акцентах, делающихся на том, как организована работа музея, какими экспонатами наполнены интерактивные музеи математики, расположенные по всему миру. Здесь дается характеристика интерактивных музеев математики представленных не только очно, но и на базе различных виртуальных площадок, также рассматриваются три направления развития интерактивных музеев с возможным применением коллекции педагогических сценариев при использовании интерактивных творческих сред при разработке площадки музея.

В заключении главы приводится описание линии экспериментальной математики как основной составляющей интерактивного музея, рассматривается классификация исследовательского обучения по трем уровням. В качестве основополагающей модели исследовательского обучения берется «Дидактическая модель исследовательского обучения в стиле экспериментальной математики» М.В. Шабановой и М.А. Павловой. Приводятся примеры практического опыта учителей в области проектирования компьютерных экспериментов и создания интерактивных площадок с использованием различных интерактивных сред и компьютерных программ при организации работы по теме «Задачи экспериментальной математики».

Глава 2 Методические основы проектирования интерактивного музея математики

1.1 Тематическая площадка интерактивного музея «Решение алгебраических уравнений. Научные идеи и открытия»

Тематическая площадка интерактивного музея «Решение алгебраических уравнений. Научные идеи и открытия» предназначена для обучающихся 9-11 классов универсального профиля для расширенного и углубленного изучения математики, подготовки их к научно-исследовательской деятельности. В процессе реализации данной площадки, обучающиеся познакомятся со способами решения уравнений 2-4 степеней, которые не входят в список тем обязательной программы по математике для общеобразовательных учреждений. Основной акцент данной разработки делается на исторический аспект и научные идеи и открытия ученых-математиков, таких как Тарталья, Кардано, Виет, Феррари и др., внесших значительный вклад в развитие теории решения алгебраических уравнений [3], [18].

Актуальность выбранной тематической площадки заключается в следующем:

– рассмотрение различных способов решения квадратных уравнений (способов, которые не рассматриваются в школьном учебнике), уравнений третьей и четвертой степеней, способствует развитию у обучающихся интереса к исследовательской деятельности;

– темы, рассматриваемые в рамках данной площадки, способствуют подготовке к решению олимпиадных задач;

– математические открытия и история появления различных способов решения алгебраических уравнений, представленные здесь способствуют формированию у обучающихся расширенного кругозора, развитию функциональной математической грамотности, креативного мышления, личностных и коммуникативных универсальных учебных действий (УУД);

– согласно требованиям федерального государственного образовательного стандарта, обучающиеся должны не только освоить основную образовательную программу по математике основной и средней школы, но и знать имена ученых, внесших бесценный вклад в изучение и развитие математики.

Педагогическая целесообразность площадки состоит в том, что в процессе знакомства с ней обучающиеся осваивают ключевые компетенции, способствующие формированию более глубокого осмысления курса алгебры, связанного с решением уравнений второй и высших степеней. Изучение данной темы способствует не только систематизации и укреплению знаний учащихся по математике, но также развивает интерес к научно-исследовательской деятельности среди обучающихся, позволяет более широко рассмотреть исторический аспект развития математических открытий, связанных с алгебраическими уравнениями [31].

Цель разработки площадки интерактивного музея математики по теме «Решение алгебраических уравнений. Научные идеи и открытия»: сформировать у обучающихся приемы и методы решения алгебраических уравнений 2-4 степеней, познакомить с историей развития математики в области решения алгебраических уравнений и именами ученых, совершивших открытия в данной области.

Новизна содержания представленной тематической площадки состоит в том, что в нем сочетается не только содержание базового школьного курса математики (квадратные уравнения), но и углубленного. Кроме того, в задачах, предлагаемых для реализации проекта, представлены темы по истории математики, на которые на уроках математики, как правило, выделяется недостаточное количество времени (таблица 8).

Таблица 8 – Планирование занятий тематической площадки «Решение алгебраических уравнений. Научные идеи и открытия»

№ занятий	Содержание темы	Кол-во часов
1	Вводное занятие.	1
2-5	Решение квадратных уравнений с помощью циркуля и линейки.	4
2,3	Окружность Карлейля.	2
4,5	Геометрическая алгебра и решение квадратных уравнений с помощью циркуля и линейки.	2
6-11	Алгебраические уравнения 3-ей степени.	8
6-7	«Рецепт» нахождения корней кубического уравнения дель Ферро. Способ Тартальи.	2
8-10	Формула Кардано.	3
11	Дискриминант кубического уравнения.	1
12-13	Решение кубических уравнений.	2
14-17	Алгебраические уравнения 4-ей степени.	4
14-16	Решение уравнений четвертой степени методом Феррари.	3
17	Итоговое занятие. Контрольная работа.	1

Вводное занятие.

Основная цель – познакомить обучающихся с основными идеями и открытиями, связанными с алгебраическими уравнениями.

Сформировать у обучающихся общее представление об открытиях, связанных с алгебраическими уравнениями. Назвать имена ученых, трудившихся над данной темой. Рассмотреть исторические этапы становления теоретических и практических знаний, связанных с алгебраическими уравнениями до 15-16 веков.

Занятие по теме «Окружность Карлейля».

Основная цель – познакомить обучающихся с геометрическими способами решения квадратных уравнений.

В данной теме рассматривается история открытия способа решения квадратных уравнений с помощью окружности Карлейля. Вводится понятие круга Карлейля. Разбирается доказательство взаимосвязи между радиусом окружности и координатами точек пересечения окружности с осями координат. Рассматривается взаимосвязь между уравнением окружности и квадратным уравнением через вывод формулы квадратного уравнения путем подстановки в уравнение окружности координат вершин прямоугольного треугольника, вписанного в окружность. Далее разбирается непосредственно способ нахождения корней квадратного уравнения с помощью окружности Карлейля. Отмечается тот факт, что самым распространенным применением на практике окружности Карлейля является построение правильных многоугольников.

Занятие по теме «Геометрическая алгебра и решение квадратных уравнений с помощью циркуля и линейки».

Основная цель - показать зависимость корней квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ от радиуса окружности с центром в точке с координатами$(-\frac{b}{2a}; \frac{c+a}{2a})$.

Доказать взаимосвязь между корнями квадратного уравнения, найденными по теореме Виета и координатами точек пересечения окружности с осью Ох. Необходимое условие – окружность проходит через точку с координатами (0;1). В результате доказательства определить радиус данной окружности и рассмотреть три случая:

– радиус окружности больше ординаты центра;

– радиус окружности равен ординате центра;

– радиус окружности меньше ординаты центра.

Занятие по теме «Рецепт» нахождения корней кубического уравнения дель Ферро. Способ Тартальи».

Основная цель – раскрыть исторический аспект научных открытий, связанных с появлением формулы корней кубических уравнений, носящей имя Кардано.

Познакомить с формулой корней уравнений третьей степени, выведенной дель Ферро. Рассмотреть частные случаи решения, изобретенные итальянским ученым Тартальей. Рассмотреть доказательства нахождения корней кубических уравнений путем преобразования формулы уравнения третьей степени в квадратное уравнение методом замены переменных. Рассмотреть вывод формулы корней кубического уравнения, примененной Тартальей в поединке с Марио Фиоре.

Занятие по теме « Формула Кардано».

Основная цель – рассмотреть этапы работы Кардано над окончательным вариантом формулы корней уравнения третьей степени, найти дискриминант кубического уравнения.

Рассмотреть вывод формулы Кардано. Разобрать важные выводы, касающиеся корней кубического уравнения, на которые Кардано обращал особое внимание. Путем замены переменных преобразовать кубическое уравнение в квадратное и сделать вывод о существовании дискриминанта кубического уравнения.

Занятие по теме «Дискриминант кубического уравнения».

Основная цель – показать зависимость корней кубического уравнения от его дискриминанта.

Рассмотреть три случая нахождения корней кубического уравнения, если:

– дискриминант больше нуля;

– дискриминант равен нулю;

– дискриминант меньше нуля.

Решение кубических уравнений.

Основная цель – рассмотреть практическое применение формулы Кардано, сделать выводы.

Разобрать решение нескольких уравнений третьей степени с помощью формулы Кардано. Сделать вывод о том, что решение кубических уравнений с помощью формулы Кардано часто приводит к тому, что корни уравнения имеют вид иррационального числа, хотя таковыми не являются.

Занятие по теме «Метод Феррари».

Основная цель – рассмотреть историю открытия способа решения уравнений четвертой степени методом Феррари.

Раскрыть суть решения уравнений четвертой степени с помощью их преобразований в квадратные уравнения с использованием вспомогательного уравнения третьей степени. Сделать акцент на том, что с помощью дискриминанта можно найти корни уравнений степени не выше 4.

Итоговое занятие. Диагностическая работа.

Основная цель – систематизировать и обобщить знания обучающихся по теме площадки «Решение алгебраических уравнений. Научные идеи и открытия».

Проверить уровень усвоения учащимися основных понятий и формул, связанных с решением алгебраических уравнений.

Методические рекомендации по проведению занятий по математике на базе площадки интерактивного музея по теме «Решение алгебраических уравнений. Научные идеи и открытия»

– Решение квадратных уравнений с помощью циркуля и линейки.

Данная часть программы может быть представлена в виде научно-исследовательской работы учащихся.

Вопросы для рассмотрения:

Как с помощью циркуля и линейки найти корни квадратного уравнения.

Обязательно ли строить окружность в координатной плоскости или можно отказаться от построения одной из осей при нахождении корней квадратного уравнения? Если да, то какой?

Занятие по теме «Окружность Карлейля».

При рассмотрении данной темы стоит сделать акцент на том, что графический способ нахождения корней квадратного уравнения с помощью параболы не всегда удобен. Кроме того, достаточно невелика точность нахождения корней данным способом. Поэтому данная тема заинтересовала шотландского математика и физика Джона Лесли, который предложил альтернативный способ решения квадратных уравнений, описав его в книге

«Элементы геометрии и плоской тригонометрии», изданной в 1809 году. В книге (в одном из последующих ее изданий) Лесли ссылается на своего ученика Томаса Карлейля, предложившего способ решения приведенного квадратного уравнения с помощью построения окружности на координатной плоскости. В последствии окружность, построенная на координатной плоскости, для нахождения корней квадратного уравнения получила название Карлайл круг. Идея доказательства возникла у Карлейля при решении задачи Лесли, рисунок к которой заимствован из книги Лесли (Рисунок 1). Задача была сформулирована следующим образом: «Построить прямоугольник, равновеликий данному прямоугольнику CDFE, полупериметр которого равен данному отрезку BC». Решение, предложенное Карлейлем, показано на рисунке 1.

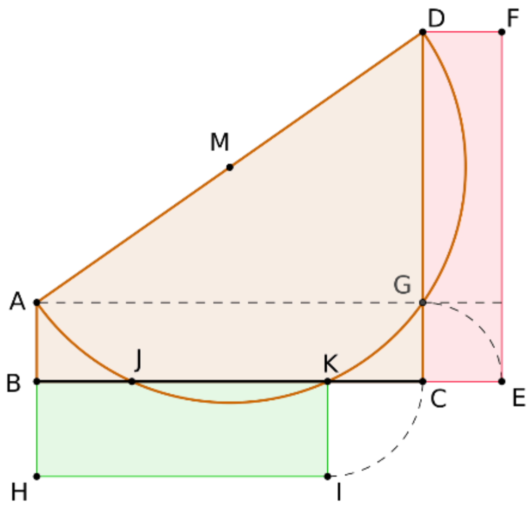


Рисунок 1 – Задача Лесли

Для доказательства рассмотрим рисунок, предложенный в задаче, в системе координат, где точка C будет являться началом координат. Предположим, что CE=e, CB=AG=b, CD=d. CG=CE по построению. Тогда точка A будет иметь координаты (b;e), точка Вбудет иметь координаты (b;0), D(0;d), G(0;d-e); M($\frac{b}{2}$; $\frac{d+e}{2}$)(рисунок 2).

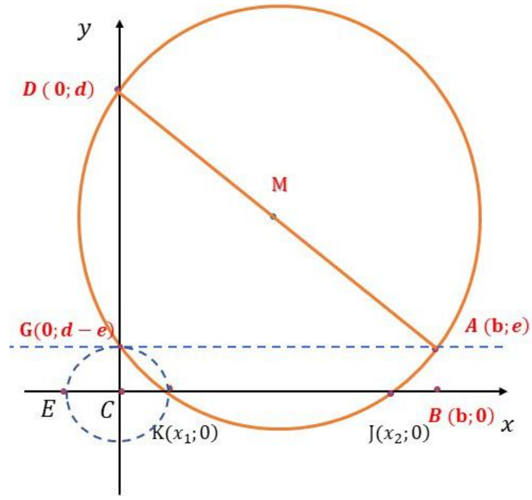


Рисунок 2 – Нахождение координаты центра окружности

Радиус окружности MD=MA=MG.Из прямоугольного треугольника AGD найдем медиану GM=$\frac{1}{2}AD$. По теореме Пифагора $AD^2 = AG^2 + GD^2$, тогда $AD^2 = b^2 + (d-e)^2$, следовательно $MG^2 = \frac{b^2+(d-e)^2}{4}$.

Составим уравнение окружности:

$$(x - \frac{b}{2})^2 + (y - \frac{d+e}{2})^2 = \frac{b^2 + (d-e)^2}{4}$$

$$(2x-b)^2 + (2y - (d+e))^2 = b^2 + (d-e)^2$$

$$4x^2 - 4bx + b^2 + 4y^2 - 4(d+e)y + (d+e)^2 = b^2 + (d-e)^2$$

$$4x^2 - 4bx + 4y^2 - 4(d+e)y + (d+e)^2 = (d-e)^2$$

$$4x^2 - 4bx + 4y^2 - 4(d+e)y + d^2 + 2de + e^2 = d^2 - 2de + e^2$$

$$4x^2 - 4bx + 4y^2 - 4(d+e)y + 4de = 0$$

$$x^2 - bx + y^2 - (d+e)y + de = 0$$

Так как в точках пересечения окружности с осью x K$(x_1; 0)$ и J$(x_2; 0)$, y=0, то получим уравнение

$x^2 - bx + de = 0$, являющееся квадратным.

Тогда, по теореме Виета получим $\begin{cases} x_1 + x_2 = b \\ x_1 \cdot x_2 = de \end{cases}$

$x_1 + x_2 = CK + CJ = b = CB$, а $x_1 \cdot x_2 = CK \cdot CJ = de$

Таким образом, можно сделать вывод, что $S_{CDFE} = S_{BKIH}$.

Стоит отметить, что идея использование окружности Карлейля для нахождения корней квадратного уравнения возникла не сразу. Австрийский инженер, Эдуард Лиль в 1867 году описал способ приближенного графического нахождения корней многочленов произвольной степени, а затем, в 1925 году американский ученый Джорж Миллер объяснил связь между применением окружности Карлейля к методу Лиля для нахождения корней квадратного уравнения [20], [36].

Способ нахождения корней квадратного уравнения с помощью окружности Карлейля:

Пусть дано приведенное квадратное уравнение $x^2 - sx + p = 0$.

Построим на координатной плоскости (рисунок 3) точки $A(0;1)$ и $\mathrm{D}(\mathrm{s};p)$. Найдем координату середины отрезка AD, точки L,получим$L\left(\frac{s}{2};\frac{p+1}{2}\right)$. Данная точка будет являться центром окружности радиуса LA=LD. Построим окружность с центром в точкеL радиуса LA. Абсциссы точек пересечения окружности с осью хи будут являться корнями исходного квадратного уравнения: $x^2 - sx + p = 0$.

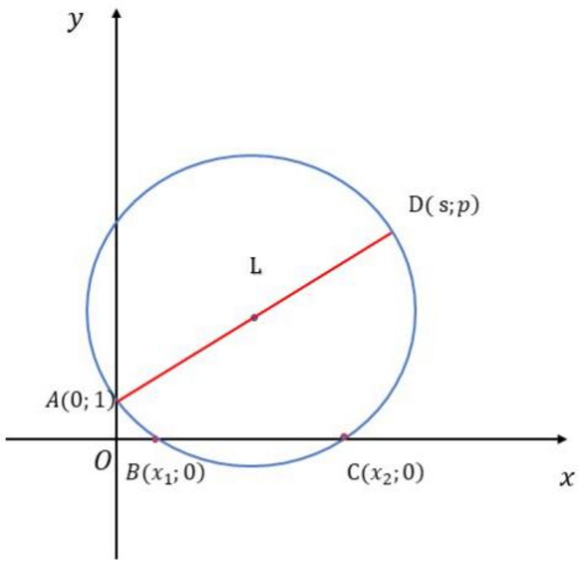


Рисунок 3 – Нахождение корней квадратного уравнения с помощью окружности Карлейля

Кроме того, вместо точки D($s;p$) можно взять ее проекции на координатные оси, а именно $D_1(s;0)$ и $D_2(0;p)$. Далее необходимо построить серединные перпендикуляры к отрезкам ОD_1и АD_2. Точка пересечения серединных перпендикуляров и будет являться центром окружности радиуса LA=LD_1=LD_2.Абсциссы точек пересечения окружности с осью x также и будут являться корнями исходного квадратного уравнения $x^2 - sx + p = 0$ (рисунок 4).

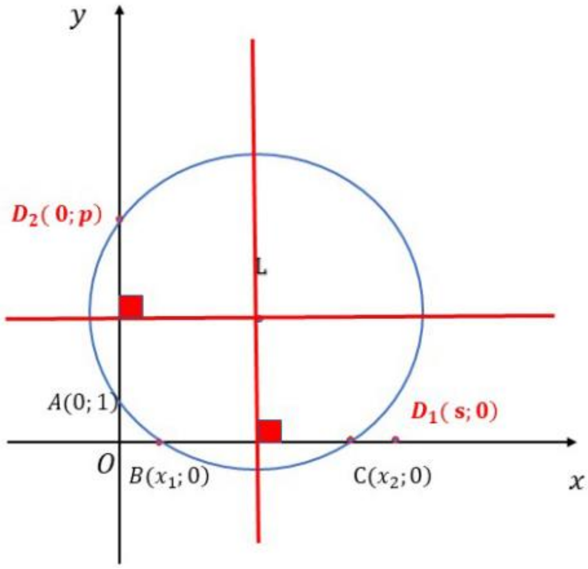


Рисунок 4 – Нахождение корней квадратного уравнения с помощью окружности Карлейля (второй способ)

Занятие по теме «Геометрическая алгебра и решение квадратных уравнений с помощью циркуля и линейки».

С помощью циркуля и линейки найдем корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

Дано квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ (2), где $a \neq 0$

a, b, c – действительные числа

Необходимо построить окружность на координатной плоскости xOy, проходящую через точку $A(0;1)$ и пересекающую ось x в точках $B(x_1;0)$ и $C(x_2;0)$, координаты которых по оси x и будут являться корнями квадратного уравнения (2) (рисунок 5).

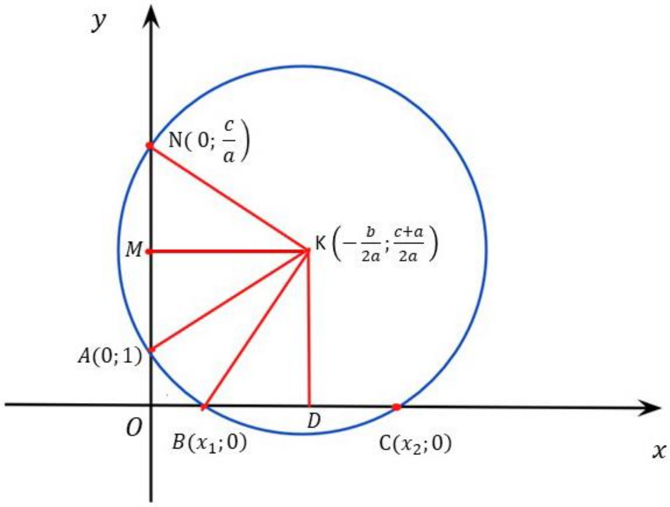


Рисунок 5 – Нахождение корней квадратного уравнения с помощью окружности с центром в точке с координатами $(-\frac{b}{2a};\frac{c+a}{2a})$

По теореме о секущих получим $OC \cdot OB = ON \cdot OA$,но, зная, что $|OC| = x_2$, $|OB| = x_1$, а $|OA| = 1$, следовательно $ON = \frac{OC \cdot OB}{OA}$,тогда$ON = \frac{x_2 \cdot x_1}{1}$, зная, что по теореме Виета корни квадратного уравнения можно найти по формуле $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$, получим

$ON = \frac{c/a}{1} = \frac{c}{a}$, поэтому точка Nбудет иметь координату (0; $\frac{c}{a}$).

Для того, чтобы найти координаты центра окружности, точки К, найдем координаты середины отрезкаAN, точки Ми координаты середины отрезкаBC, точки D.

Найдем координаты точки M(x;y). Так как $\mathrm{N}(0; \frac{c}{a})$, а $A(0;1)$ то

$x = \frac{0+0}{2} = 0$; y $= \frac{\frac{c}{a}+1}{2} = \frac{c+a}{2a}$, следовательно точкаM имеет координаты (0;$\frac{c-a}{2a}$).

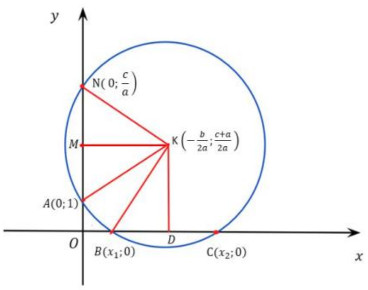
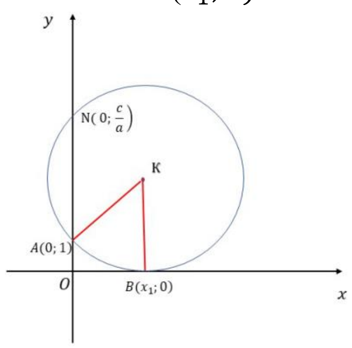
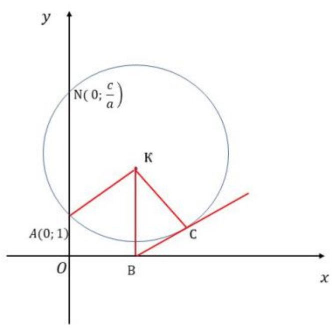
Рассуждая аналогично, получим т. D ($\frac{x_1+x_2}{2}$; 0).

Согласно теореме Виета, проведем замену, получим $\frac{x_1+x_2}{2} = -\frac{b}{2a}$, тогда точка К, являющаяся точкой пересечения серединных перпендикуляров к отрезкам ANи BC и одновременно являющаяся центром окружности, будет иметь координаты $(-\frac{b}{2a};\frac{c+a}{2a})$.

Тогда, для нахождения корней квадратного уравнения$ax^2 + bx + c = 0$ необходимо построить на координатной плоскости окружность с центром в точке К с координатами $(-\frac{b}{2a};\frac{c+a}{2a})$ радиуса КА.

Далее стоит рассмотреть три случая, в которых показывается зависимость корней квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$от радиуса окружности с центром в точке с координатами $(-\frac{b}{2a};\frac{c+a}{2a})$ (таблица 9).

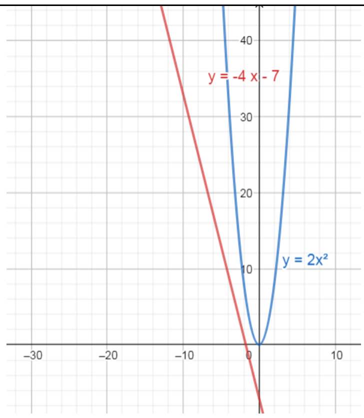
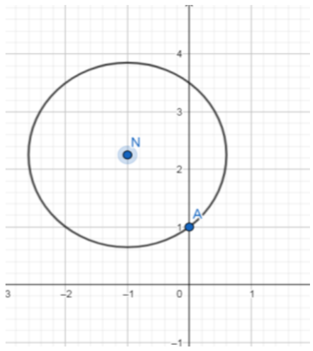
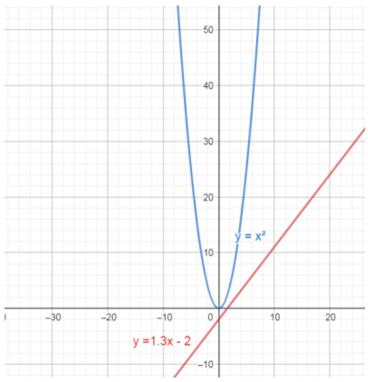
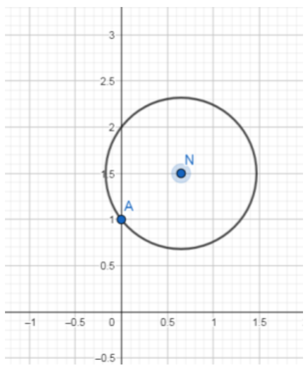
Таблица 9 - Сравнительная характеристика зависимости количества корней квадратного уравнения от радиуса окружности

I случай	II случай	III случай
Радиус окружности больше ординаты центра	Радиус окружности равен ординате центра, окружность касается оси Охв точке $B(x_1;0)$	Радиус окружности меньше ординаты центра окружности, окружность не имеет общих точек с осью Ох
		
(Решение приведено выше)	В данном случае уравнение имеет два равных корня – это абсциссы точки касания окружности с осью Ох $x_{1,2} = -\frac{b}{2a}$.	Уравнение не имеет корней в действительных числах.

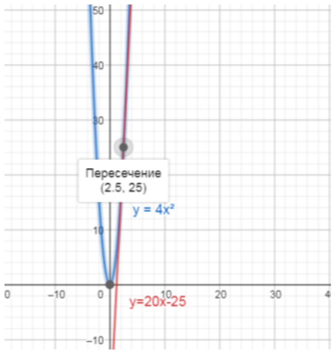
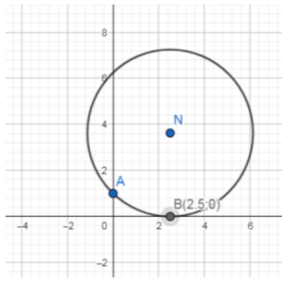
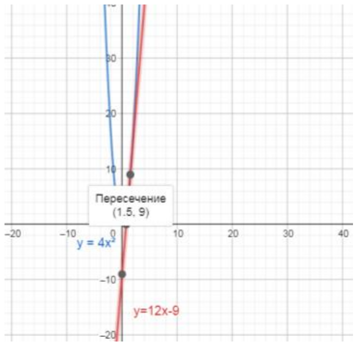
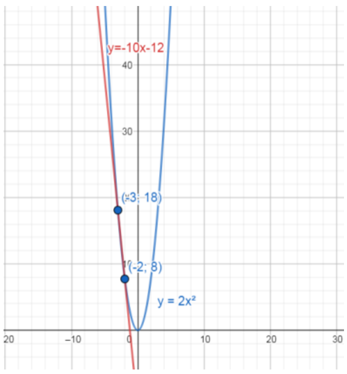
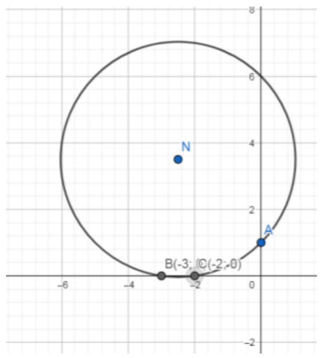
Задача. Найти корни квадратных уравнений по формуле корней; графическим методом и с помощью циркуля и линейки.

Решение (таблица 10).

Таблица 10 – Нахождение корней квадратных уравнений с помощью дополнительных средств измерений и построений

I. Нахождение корней через дискриминант:	II. Решение традиционным графическим способом	III. Решение с помощью циркуля и линейки
	$2x^2 + 4x + 7 = 0$	
$D = 4^2 - 4 \cdot 2 \cdot 7 = -40$ Ответ: корней нет, т.к. $D < 0$	 $y = 2x^2$ $y = -4x - 7$ Ответ: корней нет, так как парабола и прямая не пересекаются.	 N ($-\frac{4}{2 \cdot 2}$; $\frac{7+2}{2 \cdot 2}$) =>N (-1; 2,25) и A (0;1) Ответ: корней нет, т.к. нет общих точек пересечения окружности с осьюX.
	$x^2 - 1{,}3x + 2 = 0$	
$D = 1{,}3^2 - 4 \cdot 2 = -6{,}31$ Ответ: корней нет, т.к. .$D < 0$	 $y = x^2$ и $y = 1{,}3x - 2$ Ответ: корней нет, так как парабола и прямая не пересекаются	 N ($-\frac{-1{,}3}{2}$; $\frac{1+2}{2}$) =>N (0,65; 1,5) и A (0;1) Ответ: корней нет, т.к. нет общих точек пересечения окружности с осьюX.

Продолжение таблицы 10

I. Нахождение корней через дискриминант:	II. Решение традиционным графическим способом	III. Решение с помощью циркуля и линейки
	$4x^2 - 20x + 25 = 0$	
$x_1 =$ $= -\frac{-20-\sqrt{(-20)^2-4\cdot4\cdot25}}{2\cdot4}$ $= 2{,}5$ $x_2 =$ $= -\frac{-20+\sqrt{(-20)^2-4\cdot4\cdot25}}{2\cdot4}$ $= 2{,}5$ Ответ: $x_1 = x_2 = 2{,}5$	 $y = 4x^2$ и $y = 20x - 25$ Ответ: $x_1 = x_2 = 2{,}5$	 N ($-\frac{-20}{8}$; $\frac{25+4}{8}$) => N(2,5; 3,625) и A (0;1) Ответ: $x_1 = x_2 = 2{,}5$
	$4x^2 - 12x + 9 = 0$	
x_1 $= -\frac{-12-\sqrt{(-12)^2-4\cdot4\cdot9}}{2*4}$ $= 1{,}5$ x_2 $= -\frac{-12+\sqrt{(-12)^2-4\cdot4\cdot9}}{2*4}$ $= 1{,}5$ Ответ: $x_1 = x_2 = 1{,}5$	 $y = 4x^2$ и $y = 12x - 9$ Ответ: $x_1 = x_2 = 1{,}5$	 N ($-\frac{-12}{8}$; $\frac{9+4}{8}$) => N (1,5; 1,625) и A(0;1) Ответ: $x_1 = x_2 = 1{,}5$
	$2x^2 + 10x + 12 = 0$	
$x_1 = \frac{-10-\sqrt{10^2-4\cdot2\cdot12}}{2\cdot2} =$ $= \frac{-10-\sqrt{4}}{4} =$ $= \frac{-10-2}{4} = \frac{-12}{4}$ $= -3$ $x_2 = \frac{-10+\sqrt{10^2-4\cdot2\cdot12}}{2\cdot2} =$ $= \frac{-10+\sqrt{4}}{4}$ $= \frac{-8}{4} = -2$ Ответ: $x_1 = -3;\ x_2 = -2$.	 $y = 2x^2$ и $y = -10x - 12$ Ответ: $x_1 = -3;\ x_2 = -2$	 N ($-\frac{10}{4}$; $\frac{12+2}{4}$) =>N (-2,5; 3,5) и A (0;1). Ответ: $x_1 = -3;\ x_2 = -2$

Занятие по теме «Рецепт» нахождения корней кубического уравнения дель Ферро. Способ Тартальи».

Период конца XV, началаXVIвеков ознаменовался бурным развитием математики в Италии. В этот период времени очень большую популярность имели математические поединки, на которых необходимо было решать задачи, предлагаемые математиками друг другу. В 1500 году профессор математики, Сципиондель Ферро (1456-1526) вывел формулу решений уравнений вида:

$$x^3 + px = q \quad (1)$$

Формула решения данного уравнения выглядела следующим образом

$$x = A + B, \text{ где } A = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \text{ и } B = \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \quad (2)$$

Данной формулой незадолго до смерти дель Ферро поделился со своим учеником Марио Фиоре, впоследствии вызвавшим на математический поединок Никколо Тарталью [78].

Никколо Тарталья был сыном почтальона Фонтане. В детстве он был ранен и разговаривал с трудом, за что и получил прозвище Тарталья («заика»).Очень рано Тарталья вынужден был бросить школу, так как отец его был беден. Несмотря на это, Тарталья много занимался самостоятельно и стал «магистром абака» (учитель арифметики в частном коммерческом училище). В 1537 году Тарталья публикует книгу «Новая наука», а в 1546 году ее продолжение «Проблемы и различные изобретения». Обе книги были написаны Тартальей на итальянском языке в форме диалога. В книгах Тартальи рассказывается о «новых изобретениях, ни краденных ни у Платона, ни у Плотина, ни у какого иного грека и латинянина, а полученные лишь искусством, измерением и разумом» [18], [21].

Математический поединок был назначен на 12 февраля 1535 года. Каждый участник предлагал своему противнику решить 30 задач [76]. Зная, что Фиоре уже владеет формулой корней кубических уравнений, выведенной дель Ферро, Тарталье ничего не оставалось делать, как самому вывести свою формулу до начала поединка. Итогом поединка было решение всех предложенных задач Тартальей и ни одной Фиоре [27].

Тарталья никогда не писал о том, каким путем он решил уравнение, однако итальянскому историку математики Бортолотти удалось восстановить ход мыслей Тартальи:

Пусть дано уравнение $x^3 + px^2 = r$ (3)

тогда мы можем предположить, что его корнем будет $x = \sqrt{b} - a$

Возведем обе части уравнения сначала в квадрат, а затем в куб, получим

$$x^2 = b - 2a\sqrt{b} + a^2 \quad (4)$$

$$x^3 = \left(\sqrt{b} - a\right)^3 = b\sqrt{b} - 3ab + 3a^2\sqrt{b} - a^3$$

$$x^3 = -(a^3 + 3ab) + (3a^2 + b)\sqrt{b} \quad (5)$$

Умножим обе части (4) на$3a^2 + b$, а обе части (5) на $2a$, получим

$$3a^2x^2 + bx^2 = 3a^2b - 6a^3\sqrt{b} + 3a^4 + b^2 - 2ab\sqrt{b} + a^2b$$

$$2ax^3 = -2a^4 - 6a^2b + 6a^3\sqrt{b} + 2ab\sqrt{b}$$

Выполним сложение (4.1) и (5.1), получим

$$2ax^3 + (3a^2 + b)x^2 = a^4 - 2a^2b + b^2$$

$$2ax^3 + (3a^2 + b)x^2 = (a^2 - b)^2 \quad (6)$$

Теперь разделим обе части равенства (6) на $2a$:

$$x^3 + \frac{3a^2+b}{2a}x^2 = \frac{(a^2-b)^2}{2a} \quad (7)$$

Из уравнений (3) и (7) делается вывод о том, что

$$p = \frac{3a^2+b}{2a} \quad (8)$$

а $r = \frac{(a^2-b)^2}{2a}$ (9)

Выразим b, $b = 2ap - 3a^2$и подставим его в (9), получим

$$r = \frac{(a^2-2ap+3a^2)^2}{2a} = \frac{(4a^2-2ap)^2}{2a} = \frac{(2a(2a-p))^2}{2a} = 2a(2a - p)^2 (10)$$

Отсюда можно сделать вывод, что если постоянный член уравнения (3) определяется выражением (9), то одним из его корней будет

$$x = \sqrt{2ap - 3a^2} - a.$$

Итак, подводя итог открытию, сделанному Тартальей, можно сделать вывод, что Тарталья смог обнаружить только один из возможных корней уравнения вида $x^3 + px^2 = r$, то есть рассмотрел один из важных частных случаев. Кроме того, ему удалось открыть способ составления кубического уравнения по заданному корню $x = \sqrt{b} - a$. Общую формулу корней кубического уравнения Тарталья так и не смог открыть [28], [87].

Следующим достижением Тартальи было решение уравнения вида

$$x^3 + qx = r \tag{11}$$

Скорее всего Тарталья попытался найти решение в форме какого-то иррационального выражения, и путем рассуждений пришел к следующему двучлену:

$$x = x = \sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v} \tag{12}$$

Умножим обе части (12) на $3\sqrt[3]{uv}$

$$3\sqrt[3]{uv} \cdot x = 3\sqrt[3]{u^2v} - 3\sqrt[3]{uv^2} \tag{13}$$

Возведем в куб данное выражение, получим

$$x^3 = u - 3\sqrt[3]{u^2v} + 3\sqrt[3]{uv^2} - v \tag{14}$$

Выполним почленное сложение (13) и (14)

$$x^3 + 3\sqrt[3]{uv} \cdot x = u - v \tag{15}$$

Не сложно заметить из (11) и (15), что

$q = 3\sqrt[3]{uv}$, тогда $v = \left(\frac{q}{3}\right)^3 \cdot \frac{1}{u}$а $r = u - v$следовательно $v = u - r$(16)

Подставим $v = \left(\frac{q}{3}\right)^3 \cdot \frac{1}{u}$ в (16), получим

$\left(\frac{q}{3}\right)^3 \cdot \frac{1}{u} = u - r$, далее приходим к уравнению

$$u^2 - ur - \left(\frac{q}{3}\right)^3 = 0 \tag{17}$$

Затем, путем несложных рассуждений получаем

$$x = \sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v} = \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{r}{2}\right)^2 + \left(\frac{q}{3}\right)^3} + \frac{r}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{r}{2}\right)^2 + \left(\frac{q}{3}\right)^3} - \frac{r}{2}} \tag{18}$$

Вот мы и получили формулу, выведенную Тартальей перед поединком с Фиоре и так похожую на формулу дель Ферро. Однако во всех учебниках математики эта формула носит имя Кардано [35], [44].

Рассуждая аналогично, Тарталья получил решение уравнения вида

$$x^3 = qx + r \qquad (19),$$

отталкиваясь от выражения $x = \sqrt[3]{u} + \sqrt[3]{v}$

Оставалось еще третье уравнение вида

$$x^3 + r = qx \qquad (20)$$

В данном случае Тарталья ограничился следующим замечанием: «Третье выражение…разрешается вторым ввиду того, что по природе своей они почти совпадают».

Каким же образом формула, выведенная Тартальей, попала оказалась у Кардано? Давайте разберемся в хронике событий.

Существует мнение, что Тарталья открыл свою формулу еще одному известному итальянскому ученому, врачу и талантливому инженеру Джироламо Кардано, который первым опубликовал ее в своей книге «Великое искусство». Поэтому впоследствии формула корней кубического уравнения (1), открытая Тартальей, стала носить имя Кардано [42], [46].

Занятие по теме «Формула Кардано».

Джироламо Кардано родился 24 сентября 1501 года в Павии. Он был сыном известного в те времена юриста Фацио Кардано. После окончания университета Кардано решает заняться медициной. В 1539 году Кардано принимают в коллегию врачей Милана. В это время он становится одним из самых известных врачей. Помимо медицины Кардано занимался составлением гороскопов для живых и мертвых, написал несколько книг и энциклопедий («О тонких материях», «О разнообразии вещей») а также много времени посвящал занятиям математикой. В 1539 году закончил свою первую книгу по математике «Практика общей арифметики».

Узнав об открытии Тартальи, Кардано решает уговорить Тарталью передать ему решение уравнения для того, чтобы опубликовать в книге илидержать в секрете. После долгих уговоров Тарталья соглашается и передает Кардано способ решения уравнения без каких-либо доказательств [8], [9].

Что же получает Кардано от Тартальи в мае 1539 года? Тарталья передает Кардано следующую информацию:

– Правила решения уравнения (11) и (19).

– Пример, рассматривающий применение правила решения уравнения (11).

– Некоторые указания на то, как геометрически доказать формулу.

Долгие годы Кардано потратил на то, чтобы проверить и найти обоснование для решения. Стоит обратить особое внимание на то, что в XV-XVIвеках, формулы и обозначения, каковыми мы пользуемся сейчас, записывать не умели. Например, для записи выражения $\sqrt{7+\sqrt{14}}$ Кардано пользовался следующими обозначениями:

R.V.7p:R14, где символ Vуказывает на то, что все, что следует за ним, находится под знаком корня [70].

Выводы, сделанные Кардано при окончательном изучении кубического уравнения общего вида $x^3+ax^2+bx+c=0$:

«– Если выполнить подстановку $x=y-\frac{a}{3}$, то уничтожается член с x^2.

–При нахождении корней квадратного уравнения, полученного путем преобразований из кубического, можно прийти к решению в комплексных числах (их Кардано называл «поистине софистическими»), но, следуя в дальнейшем всем необходимым правилам, в кубическом уравнении удастся получить верные значения вещественных корней.

– Кубическое уравнение $x^3+ax^2+bx+c=0$ может иметь три вещественных корня, тогда их сумма будет равна –a.

– Если в уравнении с положительными коэффициентами все члены, находящиеся в его левой части имеют большую степень, чем все члены, находящиеся в правой его части, то уравнение имеет единственный положительный корень» [68].

Давайте рассмотрим вывод формулы корней кубического уравнения и ее применение на практике.

Пусть дано уравнение $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$.

Произведем замену $x = y - \frac{a}{3}$, получим

$\left(y - \frac{a}{3}\right)^3 + a\left(y - \frac{a}{3}\right)^2 + b\left(y - \frac{a}{3}\right) + c = 0$

$$y^3 - 3\frac{a}{3}y^2 + 3(\frac{a}{3})^2 y - \left(\frac{a}{3}\right)^3 + ay^2 - 2a\frac{a}{3}y + a\left(\frac{a}{3}\right)^2 + by - \frac{ab}{3} + c = 0$$

$y^3 - ay^2 + \frac{a^2}{3}y - \frac{a^3}{27} + ay^2 - \frac{2a^2}{3}y + \frac{a^3}{9} + by - \frac{ab}{3} + c = 0$

$y^3 + \left(b - \frac{a^2}{3}\right)y + (\frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c) = 0$ [75].

Таким образом, мы получили уравнение вида $y^3 + py + q = 0$, где

$$p = b - \frac{a^2}{3}\ ,\text{а}\quad q = \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c$$

Далее необходимо сделать еще одну подстановку $y = z - \frac{p}{3z}$, получим

$(z - \frac{p}{3z})^3 + p(\mathrm{z} - \frac{\mathrm{p}}{3\mathrm{z}}) + q = 0$

$$\mathrm{z}^3 - 3\mathrm{z}^2\frac{\mathrm{p}}{3\mathrm{z}} + 3\left(\frac{p}{3z}\right)^2 z - \left(\frac{p}{3z}\right)^3 + pz - \frac{p^2}{3z} + q = 0$$

$$\mathrm{z}^3 - pz + \frac{p^2}{3z} - \frac{p^3}{27z^3} + pz - \frac{p^2}{3z} + q = 0$$

$\mathrm{z}^3 - \frac{p^3}{27z^3} + q = 0$, следовательно

$27z^6 - p^3 + 27qz^3 = 0$, разделим обе части на 27, получим

$$z^6 + qz^3 - \frac{p^3}{27} = 0$$

Если произвести замену $u = z^3$, получим квадратное уравнение

$$u^2 + qu - \frac{p^3}{27} = 0.$$

Занятие по теме «Дискриминант кубического уравнения».

Необходимо рассмотреть три случая:

I. Дискриминант данного уравнения больше нуля, то есть D=$\left(\frac{q}{2}\right)^2$ + + $\left(\frac{p}{3}\right)^3$>0, тогда:

$z^3{}_1 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$ а $z^3{}_2 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$.

Уравнение вида $z^3 = a$, где $a > 0$ будет иметь один вещественный и два комплексных корня.

II. D = $\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0.$

В этом случае уравнение имеет три вещественных корня: один простой и два кратных.

III. D = $\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 < 0$, уравнение имеет три простых вещественных корня [30].

Занятие по теме «Решение кубических уравнений».

Примеры решений уравнений по формуле Кардано:

Рассмотрим уравнение вида $x^3 + px + q = 0$, тогда

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Задание 1. Решите уравнение $x^3 + 9x + 26 = 0$.

$$x = \sqrt[3]{-13 + \sqrt{\frac{26^2}{4} + \frac{9^3}{27}}} + \sqrt[3]{-13 - \sqrt{\frac{26^2}{4} + \frac{9^3}{27}}} =$$

$$= \sqrt[3]{-13 + \sqrt{169 + 27}} + \sqrt[3]{-13 - \sqrt{169 + 27}} =$$

$$= \sqrt[3]{-13 + 14} + \sqrt[3]{-13 - 14} = \sqrt[3]{1} + \sqrt[3]{-27} = 1 - 3 = -2$$

Задание 2. Найдите корни уравнения $x^3 + 3x - 4 = 0$.

$$D = \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} = \sqrt{\frac{(-4)^2}{4} + \frac{3^3}{27}} = \sqrt{5};$$

$$x = \sqrt[3]{-42 + \sqrt{5}} + \sqrt[3]{-42 - \sqrt{5}} = \sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}}.$$

Для проверки правильности нахождения корня, подставим его в первоначальное уравнение. Предварительно проделаем вспомогательные вычисления:

$$\left(\sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}}\right)^3 =$$

$$= 2 + \sqrt{5} + 3\sqrt[3]{\left(2 + \sqrt{5}\right)^2 (2 - \sqrt{5})} + 3\sqrt[3]{\left(2 - \sqrt{5}\right)^2 (2 + \sqrt{5})} + 2 - \sqrt{5}$$

$$= 4 - 3\sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} - 3\sqrt[3]{2 - \sqrt{5}}.$$

Теперь можно подставить полученные данные в исходное уравнение:

$$\left(\sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}}\right)^3 + 3\left(\sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}}\right) - 4 = 0$$

Раскроем скобки

$$4 - 3\sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} - 3\sqrt[3]{2 - \sqrt{5}} + 3\sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} + 3\sqrt[3]{2 - \sqrt{5}} - 4 = 0.$$

0 = 0, следовательно, тождество верно, тогда

$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}}$ является корнем уравнения$x^3 + 3x - 4 = 0.$

Однако, стоит отметить, что, если искать корни данного уравнения среди делителей свободного члена, то получим, что единственным вещественным корнем данного уравнения является корень $x = 1$.

Тогда получается, что $\sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}} = 1$ [3].

Задание 3. Найдите действительные корни многочлена $x^2 + 2x - 3$.

$D = \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{8}{27}} = \sqrt{\frac{825}{324}} > 0$, следовательно, уравнение имеет один вещественный и два комплексных корня. Находить комплексные корни целесообразно только в том случае, если обучающиеся уже освоили комплексные числа. Найдем вещественный корень.

$$x=\sqrt[3]{\frac{3}{2}+\sqrt{\frac{825}{324}}}+\sqrt[3]{\frac{3}{2}-\sqrt{\frac{825}{324}}}=\sqrt[3]{\frac{3}{2}+\frac{5\sqrt{33}}{18}}+\sqrt[3]{\frac{3}{2}-\frac{5\sqrt{33}}{18}}=$$

$$=\sqrt[3]{\frac{27+5\sqrt{33}}{18}}+\sqrt[3]{\frac{27-5\sqrt{33}}{18}}$$

Из многочлена x^2+2x-3 нетрудно определить, что его корнем тоже будет $x=1$.

Докажем это. Избавимся от иррациональности в знаменателе первой дроби.

$$\sqrt[3]{\frac{27+5\sqrt{33}}{18}}=\sqrt[3]{\frac{(27+5\sqrt{33})\cdot 12}{216}}=\sqrt[3]{\frac{324+60\sqrt{33}}{216}}=\frac{\sqrt[3]{324+60\sqrt{33}}}{6}=$$

$$=\frac{\sqrt[3]{3^3+3\cdot 3^2\cdot\sqrt{33}+3\cdot 3\cdot 33+33\sqrt{33}}}{6}=\frac{\sqrt[3]{(3+\sqrt{33})^3}}{6}=\frac{3+\sqrt{33}}{6}$$

Аналогично получим, что:

$$\sqrt[3]{\frac{27-5\sqrt{33}}{18}}=\frac{3-\sqrt{33}}{6}.$$

Тогда $\sqrt[3]{\frac{27+5\sqrt{33}}{18}}+\sqrt[3]{\frac{27-5\sqrt{33}}{18}}=\frac{3+\sqrt{33}}{6}+\frac{3-\sqrt{33}}{6}=1.$

Что и требовалось доказать [1], [14].

Таким образом, можно сделать вывод, что корни кубического уравнения, полученные по формуле Кардано, имеют «непривычный вид», что может ввести в заблуждение по поводу правильности их нахождения. Ведь проверить, тот ли корень мы нашли, можно лишь, подставив его в исходное уравнение [51].

Занятие по теме «Решение уравнений четвертой степени методом Феррари».

В своей книге «Великое искусство» Джироламо Кардано привел в качестве примера решение уравнений четвертой степени, используя тот же прием, что и для уравнений третьей степени. Однако, дальше этого продвинуться в своих исследованиях он так и не смог [26].

В 1540 году ученику Кардано Лодовико Феррари была предложена следующая задача «Разделить число 10 на три части, так, чтобы они составляли геометрическую прогрессию, причем произведение первых двух частей равнялось 6» [64].

Тогда, если обозначить за xсреднюю часть, получим

$$\frac{6}{x} + x + \frac{x^3}{6} = 10$$

$$36 + 6x^2 + x^4 = 60x$$

$$x^4 + 6x^2 + 36 = 60x$$

Также, как и Кардано, Феррари предлагает в этом случае прибавить к обеим частям $6x^2$ для того, чтобы в левой части можно было выделить полный квадрат. Получим уравнение

$$x^4 + 12x^2 + 36 = 60x + 6x^2$$

$$(x^2 + 6)^2 = 60x + 6x^2 \qquad (20)$$

Для дальнейшего продвижения в решении, очевидно необходимо выполнить некоторые преобразования, чтобы и в левой и в правой части равенства можно было выделить полный квадрат. Введем новую переменную y.В левой части получим $(x^2 + 6 + y)^2$. Раскроем скобки, тогда

$$(x^2 + 6 + y)^2 = x^4 + 12x^2 + 36 + 2(x^2 + 6)y + y^2$$

Но $(x^2 + 6)^2 = x^4 + 12x^2 + 36$, поэтому, чтобы получить верное равенство, преобразовывая (20), нужно в правую его часть добавить $2(x^2 + 6)y + y^2$. Итак, приходим к уравнению

$$(x^2 + 6 + y)^2 = 60x + 6x^2 + 2(x^2 + 6)y + y^2$$

$$(x^2 + 6 + y)^2 = (6 + 2y)x^2 + 60x + (12y + y^2)$$

Учитывая, что нашей задачей было выделить полный квадрат в правой части, можно сделать вывод, что

$\sqrt{6+2y} \cdot \sqrt{12y+y^2} = 30$, тогда

$$(6+2y)\cdot(12y+y^2) = 30^2$$

$$72y + 24y^2 + 6y^2 + 2y^3 = 900$$

$$2y^3 + 30y^2 + 72y = 900$$

$$y^3 + 15y^2 + 36y = 450$$

Найдем y.

$$(x^2+6+y)^2 = \left(\sqrt{6+2y}\cdot x + \frac{30}{\sqrt{6+2y}}\right)^2$$

Извлечем корень и получим

$$x^2+6+y = \sqrt{6+2y}\cdot x + \frac{30}{\sqrt{6+2y}}.$$

Подставим найденный y и решимквадратное уравнение относительно х.

Метод решения уравнений четвертой степени, предложенный Феррари, Кардано также описал в своей книге «Великое искусство» [33].

Суть метода состоит в следующем:

для того, чтобы решить уравнение вида $x^4 + ax^2 + bx + c = 0$(21), необходимо ввести вспомогательную переменную, например z. Тогда уравнение (21) перепишется в следующем виде

$$(x^2 + \frac{a}{2} + z)^2 = 2zx^2 - bx + (z^2 + az - c + \frac{a^2}{4}) \qquad (22)$$

В правой части (22) выделим полный квадрат. Другими словами, подберем такое значение параметра z, чтобы квадратный трехчлен (относительно x имел два одинаковых корня. Тогда дискриминант этого квадратного трехчлена будет равен 0:

$$b^2 - 4\cdot 2z\left(z^2 + az - c + \frac{a^2}{4}\right) = 0.$$

У нас получается вспомогательное кубическое уравнение относительно z. Находим его корень z_0 с помощью формулы Кардано. Тогда уравнение (22) можно переписать в виде

$$(x^2 + \frac{a}{2} + z)^2 = 2z_0(x - \frac{b}{4z_0})^2. \quad (23)$$

Уравнение (23) распадается на пару квадратных уравнений, дающих 4 искомых корня.

Кардано рассмотрел геометрическое доказательство метода Феррари и показал, что с помощью данного метода можно решать не только уравнения вида $x^4 + ax^2 + bx + c = 0$, но и уравнения вида $x^4 + ax^3 + bx^2 + c = 0$, сводящиеся к уравнениям первого типа путем подстановки $x = \frac{k}{y}$.

Стоит отметить, что ни Кардано ни Феррари не обратили внимание на тот факт, что аналогичным способом можно решить и полное уравнение четвертой степени$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + m = 0$, так как подстановка $x = y - \frac{a}{4}$ приводит это уравнение к уравнению без кубического слагаемого [65].

Подводя итог, необходимо сделать акцент на том, что уравнения степени выше четвертой нельзя решить с помощью аналогичных преобразований в квадратное уравнение.

2.2 Тематическая площадка интерактивного музея по теме «Решение задач экспериментальной математики»

В основу заданий, представленных на данной площадке, могут быть положены различные открытые задачи, задачи, посвященные научным изобретениям, задачи практического содержания и другие.

Приведем примеры занятий, на которых данные задачи могут быть рассмотрены.

Занятие по теме «Кривые второго порядка и их свойства. Касательные к гиперболе».

Основная цель - экспериментальным путем доказать, что ортоцентр треугольника, вписанного в кривые второго порядка, расположен непосредственно на данной кривой.

Задача 1. Можно ли вписать треугольник в кривые второго порядка? Какими свойствами обладает такой треугольник?

Перед тем, как обучающиеся приступят к решению, необходимо актуализировать их знания по теме «Гипербола и ее свойства»:

Гиперболой называется график функции, называемой обратной пропорциональностью и заданный уравнением $y = \frac{k}{x}$, где $k \neq 0$.

Данный график имеет две асимптоты, горизонтальную $y = 0$ и вертикальную $x = 0$.

Центром симметрии графика является точка с координатами (0;0).

График имеет две оси симметрии $y = -x$ и $y = x$.

Далее, по отношению к гиперболе, а также по отношению к окружности вводится понятие «кривая второго порядка – линия, задаваемая уравнением

$$ax^2 + by^2 + cx + dy + k = 0.$$

Затем учитель просит перенести известные свойства окружности на гиперболу, например, какими свойствами обладает треугольник, который можно вписать в окружность?

Для ответа на этот вопрос обучающимся предлагается провести компьютерный эксперимент, используя динамическую среду GeoGebra.

Обучающиеся строят динамический чертеж в GeoGebra графика функции $y = \frac{k}{x}$, где $k \neq 0$. Коэффициент k выбирается при этом плавающим с помощью бегунка (рисунок 6). Далее необходимо отметить на гиперболе три произвольные точки и соединить их. Получим треугольник, вписанный в гиперболу.

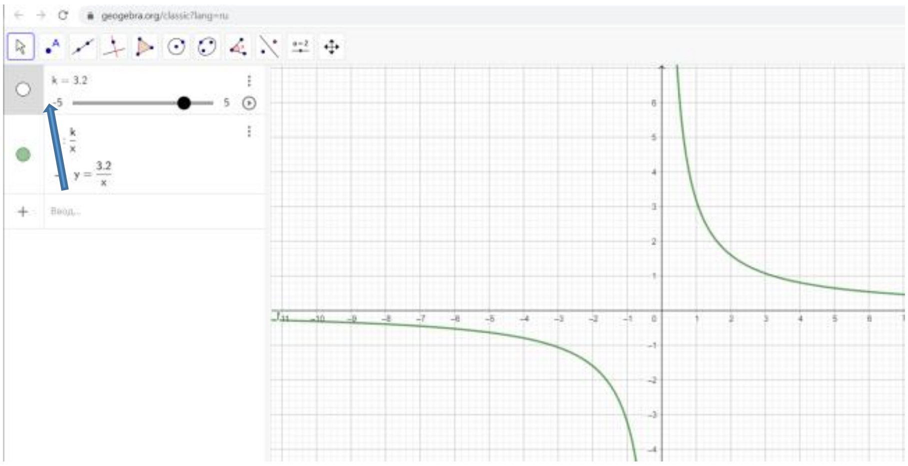


Рисунок 6 – Построение гиперболы в GeoGebra

Зная о том, что ортоцентр треугольника лежит на пересечении его высот или их продолжений, воспользуемся инструментом «Перпендикулярная прямая» и найдем ортоцентр нашего треугольника. Искомый ортоцентр будет также принадлежать гиперболе. Преимуществом использования при проведении эксперимента программы GeoGebra является то, что можно менять исходные данные и проводить эксперимент столько раз, сколько позволяет отведенное на это время.

В конце эксперимента обучающиеся делают вывод о том, что не зависимо от того, каким уравнением задана гипербола и от того какие выбраны координаты вершин треугольника, ортоцентр треугольника будет принадлежать гиперболе (рисунок 7).

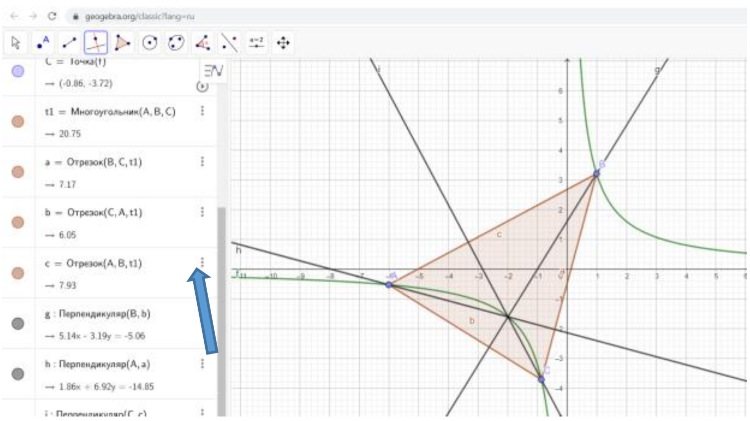


Рисунок 7 – Ортоцентр треугольника, вписанного в кривую второго порядка

Далее обучающимся предлагается доказать справедливость выдвинутой гипотезы. Для этого им потребуется знание того, как можно задать формулой прямую, проходящую через две точки, как составить уравнение прямой, перпендикулярной данной и проходящей через заданную точку, знание того, как найти координату точки пересечения двух прямых и умение решать задачи на принадлежность точки кривой.

Занятие по теме «Зависимость площади треугольника, образованного пересечением касательной к гиперболе с координатными осями от коэффициента k».

Основная цель – путем применения компьютерного эксперимента показать, что площадь треугольника, образованного пересечением касательной к гиперболе с координатными осями равна удвоенному коэффициенту k, где k принадлежит уравнению $y = \frac{k}{x}$.

Задача 2. Выразить через коэффициент k площадь треугольников, образуемых пересечением касательной к гиперболе с осями координат.

Необходимо построить касательные к гиперболе в нескольких произвольных точках. Находя площади треугольников, одной из вершин которого является начало координат, а две другие являются точками пересечения касательной с осями координат, обучающиеся смогут сделать вывод, что площади всех этих треугольников равны |2k| (рисунки 8, 9).

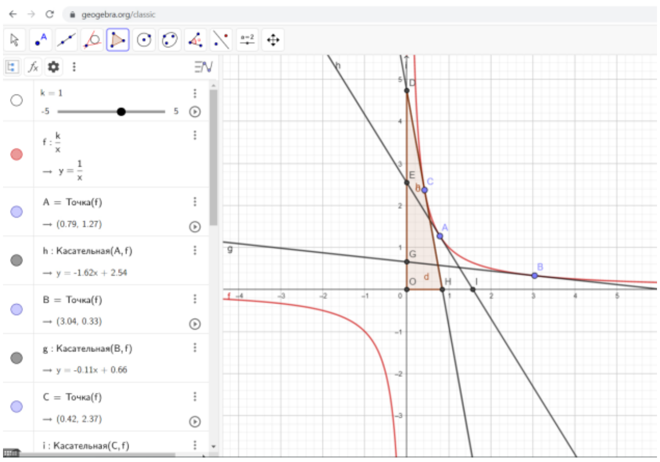


Рисунок 8 – Треугольник, образованный пересечением касательной к гиперболе с осями координат

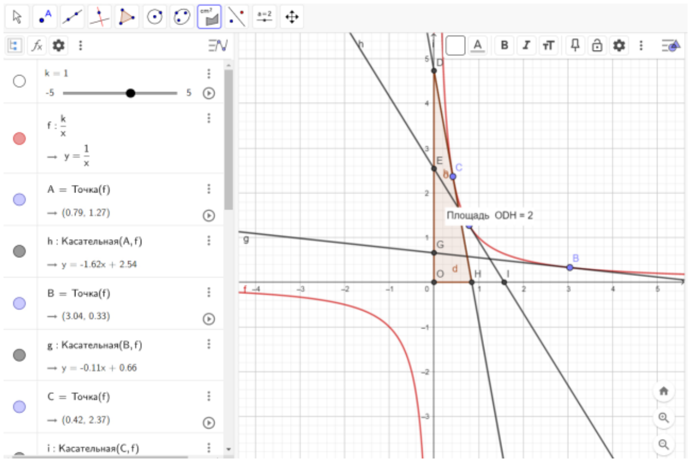


Рисунок 9 – Зависимость площади треугольника, образованного пересечением касательной к гиперболе с координатными осями от коэффициента k

Задача 3. Найти способ построения касательной в любой точке гиперболы без нахождения уравнения касательной.

Компьютерный эксперимент проводится также в программе GeoGebra. На гиперболе берется произвольная точка. Из этой точки строится окружность, радиус которой равен расстоянию от выбранной точки до начала координат. Далее находятся точки пересечения данной окружности с осями координат. Искомой касательной будет являться прямая, проходящая через эти точки (рисунок 10).

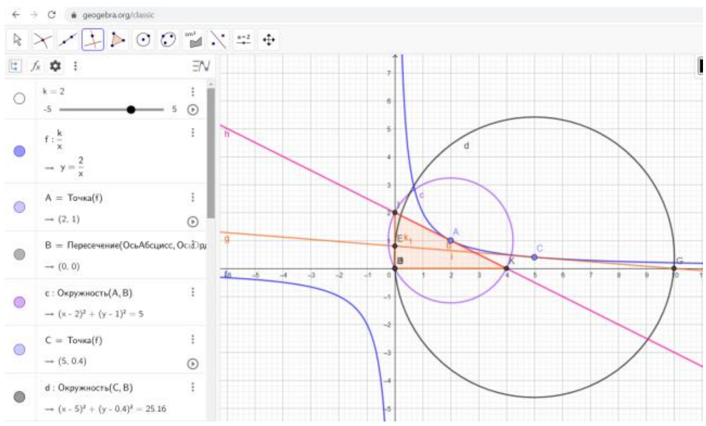


Рисунок 10 – Построение касательной к гиперболе без нахождения уравнения касательной

Используя выводы, полученные из двух предыдущих задач, а именно, что касательная, построенная в любой точке гиперболы, отсекает прямоугольные треугольники одинаковой площади, то она является огибающей прямых, включающих в себя гипотенузы данных треугольников.

Способы построения касательных, а также свойства гиперболы, «открытые» обучающимися самостоятельно, могут в дальнейшем использоваться для поиска уравнений касательных.

Занятие по теме «Трапецеидальные числа».

Основная цель - путем эксперимента определить зависимость количества трапецеидальных представлений целого положительного числа от самого числа выразить это формулой; сделать выводы о том, что трапецеидальное представление числа зависит от нечетных делителей самого этого числа, а количество делителей влияет на число рядов трапецеидального разложения.

Задача 4. Познакомьтесь с понятием «n-ноготреугольного числа». Сформулируйте понятие «n-ного трапецеидального числа». Проведите эксперимент с целыми положительными числами от 1 до 110. Найдите зависимость a(n), количества трапецеидальных представлений от исходного целого положительного числа n [62].

Введем понятие n-го треугольного числа. N-ное треугольное число, представляет собой равносторонний треугольник, каждая сторона которого состоит из одинаковых кругов, касающихся между собой внешним образом. Каждый круг, не лежащий на краю фигуры, касается шести таких кругов [63]. Количество кругов, из которых состоит данная фигура и будет определять число n (рисунок 11).

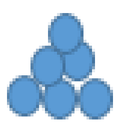
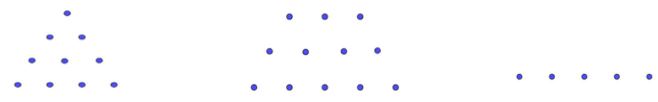


Рисунок 11 – Макет треугольного представления числа

Далее предлагается обучающимся выразить n-е треугольное число через n:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n = \frac{1+n}{2}n = \frac{n(n+1)}{2}$$



а) б) в)

Рисунок 12 – Треугольные и трапецеидальные числа

Аналогично числу, представленному на рисунке 12 (а), число на рисунке 12 (б) можно назвать «n-ным трапецеидальным числом». Пример: 3+4+5 =12. Если бы мы рассматривали предельные случаи, то и числа, представленные на рисунках 12(а) и 12(в) нам бы нужно было рассматривать, как «трапецеидальные».

Предположим, что a(n) –количество трапецеидальных представлений целого положительного числа, то есть a(n) обозначает количество представлений этого целого положительного числа в виде суммы последовательных положительных целых чисел.

Проведем эксперимент, разложим на сумму последовательных простых чисел целые положительные числа от 1 до 105 с помощью калькулятора суммы последовательных чисел https://bbf.ru/calculators/ (недостаток данной программы в том, что там представлено единственное разложение, остальные возможные варианты просчитаем вручную).

Раскладывая целые положительные числа на сумму последовательных целых положительных чисел, будем параллельно выписывать все делители этих чисел и полученный результат оформлять в сравнительную таблицу (таблица 11).

Таблица 11 – Сравнительный анализ зависимости разложения целых положительных чисел на сумму последовательных положительных чисел от их множителей

Способы разложения целых положительных чисел на сумму последовательных целых положительных чисел	Множители целых положительных чисел
1=1	1: 1
2=2	2: 1;2
3=1+2	3: 1;3
…	…
9=4+5=2+3+4	9: 1;3;9
10=1+2+3+4	10: 1;2;5;10
…	…
15=7+8=4+5+6=1+2+3+4+5	15: 1;3;5;15
…	…
34=7+8+9+10	34: 1;2;17;34
…	…
60=4+5+6+7+8+9+10+11=19+20+21=…	60: 1;2;3;4;5;6;10;12;15;20;30;60
…	…
81=5+6+7+8+9+10+11+12+13=…	81: 1;3;9;27;81
…	…
105=1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12+13+14=…	105: 1;3;5;7;15;21;105

Поиск возможных делителей может быть предложен учителем как вспомогательное действие в том случае, если на эксперимент отводится недостаточно времени или в эксперименте принимает участие группа обучающихся, имеющая небольшой опыт в экспериментально-исследовательской деятельности или имеющая недостаточные теоретические знания. В противном случае, учащиеся должны прийти к тому, что необходимо провести подобные вычисления, самостоятельно.

Результатом эксперимента являются следующие выводы.

Если n=1 или n представляет собой степень двойки, то a(n)=1.

Если n простое нечетное число, то a(n)=2.

Число a(n) равно числу нечетных делителей числа n.

После получения первых результатов эксперимента и сделанных выводов обучающимся предлагается провести еще один эксперимент, на координатной плоскости построить точки с координатами (n; t), где n – целое положительное число, а t – количество слагаемых, входящих в разложение данного положительного числа на сумму последовательно идущих целых положительных чисел. Будем называть представление числа n в виде

$n = x + (x+1) + (x+2) + \cdots + (x+t-1)$, где x-наименьшее целое число, участвующее в разложении n, t-рядным трапецеидальным представлением числа n. Используя выводы, сделанные выше, стоит отметить, что если a(n) = 1, то n = 1.

При построении чисел с координатами (n; t) на координатной плоскости можно использовать как стандартные способы, то есть строить на бумаге, так и прибегая к использованию различных компьютерных программ и динамических сред.

В результате проделанной работы обучающимися могут быть сделаны следующие выводы:

– Трапецеидальное представление, представленное на рисунке 13, может быть представлено в виде равенства $n = \frac{t(t+2x-1)}{2}$.

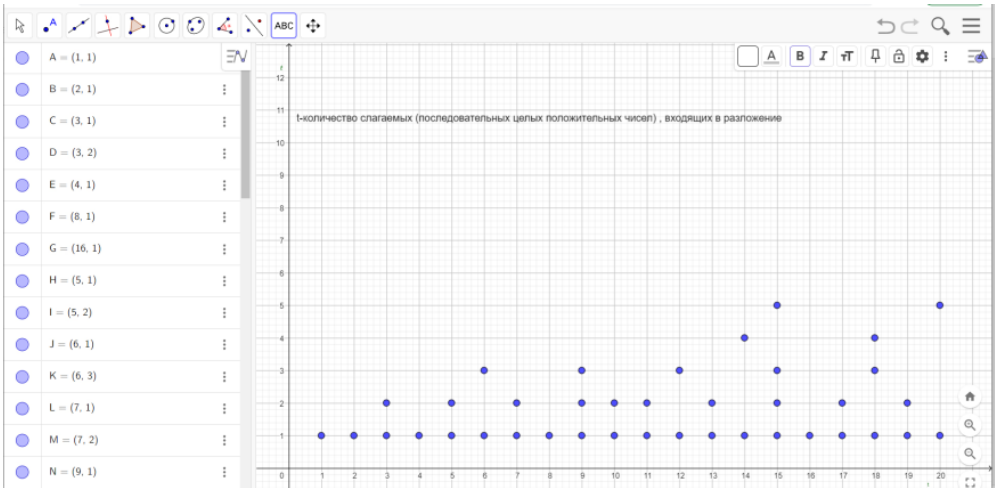


Рисунок 13 - Трапецеидальное представление числа n с помощью t рядов.

– Из двух сомножителей t и $(t + 2x - 1)$ один является четным, а другой - нечетным, причем нечетный сомножитель – это делитель числа n.

– Меньший из двух сомножителей равен числу рядов t.

– Если n и t заданы, то значение хопределяется единственным образом.

2.3 Педагогический эксперимент и его результаты

На констатирующем этапе эксперимента с обучающимися МБУ «Гимназия №38» была проведена экскурсия в «Парк чудес Галилео», расположенный в г. Самара, который представляет собой интерактивный музей с уникальными экспонатами и конструкциями. Работа экспонатов музея основана на законах математики и физики. Каждый экспонат музея интерактивен. Обучающиеся смогли на собственном опыте проверить тот или иной математический или физический закон.

После посещения музея на основании практических знаний, полученных обучающимися при взаимодействии с музейными экспонатами, было проведено анкетирование на тему «Влияние интерактивных музеев математики на популяризацию научных идей и открытий».

Вопросы анкетирования:

– При посещении технического музея, и в частности, музея математики, является ли для вас значимой возможность интерактивного взаимодействия с экспонатами музея?

– Помогла ли вам возможность изучения экспериментальным путем работы различных механизмов лучше понять принцип их работы?

– Хотели бы вы принять участие в разработке экспонатов виртуального музея математики? В случае отрицательного ответа укажите причину.

В опросе приняло участие 24 человека.

Результаты опроса представлены на рисунках 14–16.

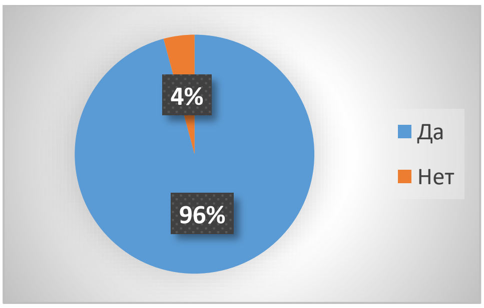


Рисунок 14 – Результаты ответа на первый вопрос анкетирования

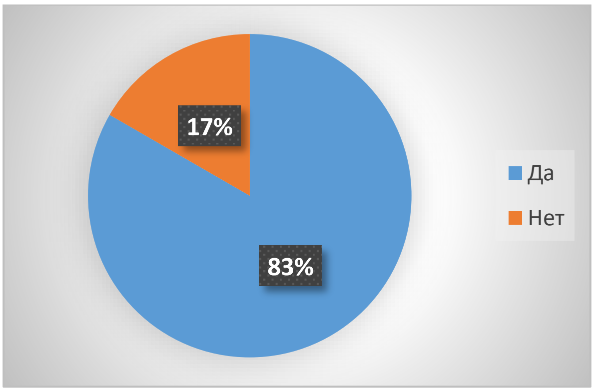


Рисунок 15 – Результаты ответа на второй вопрос анкетирования

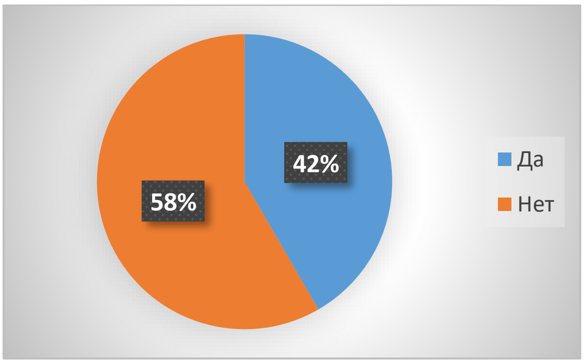


Рисунок 16 – Результаты ответа на третий вопрос анкетирования

Таким образом, результаты анкетирования показали, что обучающиеся проявляют особый интерес к интерактивным экспонатам, они заинтересованы в возможности «потрогать руками» экспонаты, поэтому использование в процессе обучения эксперимента играет важную роль. Однако анкетирование также показало, что многие обучающиеся не готовы принять участие в разработке экспонатов виртуального музея математики. В качестве причин были указаны такие, как недостаточный уровень владения теоретическими знаниями по математике (на взгляд участников анкетирования), незнание программ, с помощью которых можно создавать виртуальные экспонаты музея или недостаточное владение возможностями той или иной программой или динамической средой. Все эти данные свидетельствуют о том, что в целом экспериментальная работа интересна обучающимся, но необходимо уделять больше внимания индивидуальному подходу в процессе обучения математике, а также совершенствовать и развивать универсальные учебные действия обучающихся, направленные на формировании их знаний и умений в области информационных технологий.

На поисковом и обучающем этапе эксперимента проводилась апробация тематической площадки «Решение алгебраических уравнений. Научные идеи и открытия» на занятиях математической школы при ТГУ с обучающимися 9 классов (9 слушателей).

По завершению тематической площадки была проведена итоговая диагностическая работа на определение уровня усвоения пройденного материала.

Задания базового уровня (каждое оценивается в 2 балла)

Решите квадратное уравнение с помощью окружности Карлейля и графического калькулятора GeoGebra. Сделайте проверку, выполнив графическое решение с помощью параболы и прямой.

Задание 1. $3x^2 + 8x - 11 = 0$.

Решение (таблица 12):

Задание 2. Найдите корни уравнения, используя формулу Кардано

$$x^3 + 6x - 2 = 0.$$

Ответ: $\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}$.

Задания продвинутого уровня (каждое оценивается в 4 балла)

Задание 3. Докажите, что $\sqrt[3]{1+\sqrt{\frac{26}{27}}} + \sqrt[3]{1-\sqrt{\frac{26}{27}}} = 1$.

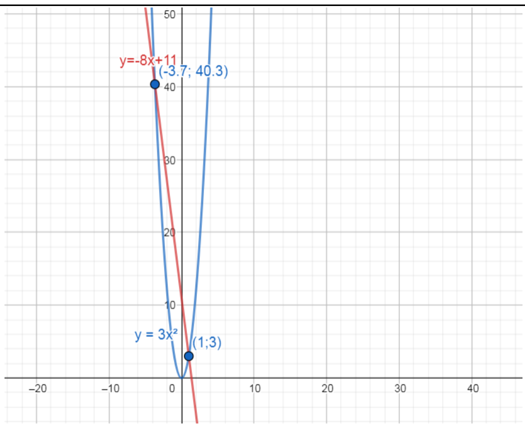
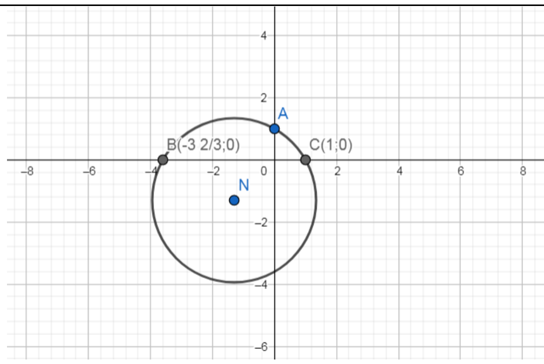
Задания высокого уровня (каждое оценивается в 5 баллов)

Задание 4. Найти корни многочлена методом Феррари

$$4x^4 + 80x^3 + 540x^2 + 1496x + 1465.$$

Решение:

Таблица 12 – Графическое решение квадратного уравнения (два способа) с использованием возможностей среды GeoGebra

 $y = 3x^2$ и $y = 11 - 8x$ Ответ: $x_1 = -3\frac{2}{3}$; $x_2 = 1$.	 N $(-\frac{8}{6}; \frac{3-11}{6})$ =>N (-1,3; -1,3)и A (0;1) Ответ: $x_1 = -3\frac{2}{3}$; $x_2 = 1$.

$$4x^4 + 80x^3 + 540x^2 + 1496x + 1465 = 0;$$

$$x^4 + 20x^3 + 135x^2 + 374x + \frac{1465}{4} = 0.$$

Далее необходимо сделать подстановку $x = y - 5$.

Тогда уравнение будет иметь вид: $y^4 - 15y^2 + 24y - \frac{15}{4} = 0$.

Далее решаем, применяя формулу Феррари.

Ответ:

$$x_1 = \frac{\sqrt{6}}{2} - 2\sqrt{6 - 2\sqrt{6}};\ x_2 = \frac{\sqrt{6}}{2} + 2\sqrt{6 - 2\sqrt{6}};$$

$$x_3 = -\frac{\sqrt{6}}{2} - 2\sqrt{6 + 2\sqrt{6}};\ x_4 = -\frac{\sqrt{6}}{2} + 2\sqrt{6 + 2\sqrt{6}}$$

Результаты работы свидетельствуют о том, что знакомство с научными идеями и открытиями ученых, внесших вклад в развитие алгебры на примере решения алгебраических уравнений, выполнение заданий по тематике площадки вызвало интерес у всех обучающихся.

Все девятиклассники, участвовавшие в эксперименте по данной площадке справились с предложенными заданиями.

В период преддипломной практики в рамках программы дополнительного образования «3D моделирование в среде «Живая геометрия»» структурного подразделения МБУ «Гимназия №38» клуба «Юниор» был проведен эксперимент. Обучающимся 8 класса было предложено, используя компьютерные программы разработать алгоритм того, как графически найти корни квадратного уравнения. В результате эксперимента, большинством участников были представлены два способа решения: нахождение точек пересечения параболы с осью абсцисс и нахождение точек пересечения прямой и параболы. Эти способы описаны в теоретической части учебника по алгебре для 8 класса.

На втором этапе эксперимента предлагалось принять участие только желающим. В связи с тем, что гимназия является лингвистической, из 12 человек продолжила экспериментально-исследовательскую деятельность одна обучающаяся. Ей было предложено решить задачу 2, познакомиться с решением квадратных уравнений с помощью окружности Карлейля. На основании сделанных открытий и выводов была выполнена сравнительная характеристика всех способов решения квадратных уравнений и результаты эксперимента и исследования оформлены в научно-исследовательскую работу по теме «Геометрическая алгебра или как решать квадратные уравнения с помощью циркуля и линейки?». Итогом защиты данной работы стал диплом 1 степени городской НПК «Первые шаги в науку», г. Тольятти, диплом 1 степени во Всероссийском конкурсе научных работ «Юность науки», г. Обнинск, диплом 2 степени во Всероссийской конференции учащихся «Шаги в науку», г. Обнинск (рисунки А.1-А.4 Приложения А).

Результат эксперимента свидетельствует о том, что экспериментально-исследовательская деятельность на уроках математики способствует лучшему усвоению пройденной темы и популяризирует математику среди обучающихся. Особенно это касается компьютерного эксперимента, так как современные дети и подростки, находясь в тесном взаимодействии с компьютером зачастую не имеют представления о возможностях, которые существуют при использовании компьютера в процессе обучения.

Выводы по второй главе

Во второй главе представлены разработки заданий для тематических площадок интерактивного музей математики по темам «Решение алгебраических уравнений. Научные идеи и открытия» и «Решение экспериментальных задач по математике». Работа площадок может быть организована как очно, так и в виртуальном пространстве.

Площадка по теме «Решение алгебраических уравнений. Научные идеи и открытия» отражает исторический аспект развития научных идей и открытий в области изучения алгебраических уравнений высших степеней. Наполнение данной площадки представлено в виде тематических занятий, идущих в хронологическом порядке. Особая значимость разработки площадки на данную тему состоит в том, что задания, представленные здесь в качестве учебного материала, не входят в обязательную программу по математике.

Площадка по теме «Решение экспериментальных задач» представлена как пример наполнения площадки интерактивных музеев математики возможными заданиями. Данная площадка может быть доработана и расширена в плане тематической составляющей, а также заданий, предложенных для развития экспериментальной, творческой и исследовательской деятельности обучающихся.

В заключение второй главы приводится педагогический эксперимент, проведенный на базе НИЛ «Школа математического развития и образования -5+» Тольяттинского государственного университета, структурного подразделения МБУ «Гимназия №38» клуба «Юниор», МБУ «Гимназия №38».

Заключение

В ходе проведенного исследования были получены следующие результаты:

1. Сформулированы основные цели и задачи интерактивных музеев математики. Проведен предварительный анализ существующих интерактивных музеев и интерактивных виртуальных площадок.

2. Раскрыта роль интерактивных музеев математики в популяризации у обучающихся научных идей и открытий, определена актуальность в современном мире, а также их значимость в образовательной деятельности.

3. Проведен анализ работы основных интерактивных музеев математики, представленных в мировом сообществе, описан принцип их работы, технологии создания, указаны основные направления, цели и задачи создания подобных музеев. Сделан акцент на особой значимости интерактивных музеев математики для развития экспериментальной математики.

4. Раскрыта технология проектирования интерактивного музея математики на основе задач экспериментальной математики. Рассмотрены цели и задачи экспериментальной математики. Рассмотрены виды компьютерного эксперимента.

5. Описаны критерии, определяющие уровни математической подготовки обучающихся с точки зрения развития математика – экспериментатора. Приведены основные этапы эволюции методологических знаний, характеризующие формы познания в школьном курсе математики, предложенные М.В. Шабановой.

6. Разработаны задания для тематической площадки интерактивного музея «Решение алгебраических уравнений. Научные идеи и открытия». Приведен возможный план работы по реализации программы данной

площадки при организации дополнительного образования школьников старших классов.

7. Разработаны примеры заданий для тематической площадки «Решение экспериментальных задач».

8. Проведен педагогический эксперимент, результатом которого стало написание научной работы обучающейся гимназии 38.

Педагогический эксперимент показал, что тематические площадки интерактивного музея математики, содержание которых основано на истории математических идей и открытий, а также на задачах экспериментальной математики, способствуют достижению поставленной цели исследования: выявление теоретических и методических основ проектирования интерактивного музея математики как средства популяризации научных идей и открытий. Гипотеза исследования нашла подтверждение.

Перспективы дальнейших исследований могут быть связаны с реализацией полученных результатов на практике. В частности, создания на базе школы или университета виртуального (интерактивного) музея математики, сайта музея, наполнения его определенным содержанием. Это потребует дополнительных средств и взаимодействия не только учителей математики, но также учителей и специалистов по информатике, а также администрации по постоянной поддержке сайта и организации работы тематических площадок.

Список используемой литературы и используемых источников

1. Абрамов А.М., Виленкин Н.Я., Дорофеев Г.В. и др. Избранные вопросы математики: 10 кл. Факультативный курс / А.М.Абрамов, Н.Я. Виленкин, Г.В. Дорофеев и др.: Сост. С.И. Шварцбурд. М: Просвещение, 1980. 191с.

2. Андреева Н.Н., Мамий Д.К. Математический парк / Андреева Н.Н., Мамий Д.К. // Успехи математических наук. -2018.- Т.73- №4(442). С. 188-191.

3. Антонов Ю.С. К истории решения уравнений третьей и четвертой степени //Наука и техника в Якутии. 2015. №2 (29). С.108-110.

4. Арнольд В.И. «Жесткие» и «мягкие» математические модели. М.: МЦНМО, 2000. 32с.

5. Арнольд В.И. Математическое понимание природы: Очерки удивительных физических явлений и их понимания математиками (с рисунками автора). 3-е изд., стереотип. М.:МЦНМО, 2011. 144 с.

6. Арнольд В.И. Экспериментальная математика.М.ФАЗИС, 2005. 63 с.

7. Ахметшина Р.Р., Галямова Э.Х. Виртуальный музей «История математики в лицах» как средство формирования познавательного интереса обчающихся основной школы / Ахметшина Р.Р., Галямова Э.Х. //В сборнике: Проблемы и перспективы информатизации физико-математического образования, материалы Всероссийской научно-практической конференции. 2016. С.25-26.

8. Башмаков М.И. Уравнения и неравенства. / М.И. Башмаков. Уравнения и неравенства. М.: Издательство «Наука», 1976. С.

9. Белый Е.К., Дорофеева Ю.А. Алгебраические уравнения: учебное пособие для абитуриентов и студентов первого курса / Петрозаводск: Издательство ПетрГУ, 2015. 240с.

10. Близнюкова О.В. Исторический аспект научных идей и открытий формулы Кардано // Качество обучения как проблема контроля и оценки

образовательной деятельности образовательных организаций (учреждений): сборник II международной научно-практической конференции. Луганск, ЛНУ. 2022.

11. Близнюкова О.В. Обзор интерактивных музеев математики и основные цели их создания //Молодежь. Наука. Общество – 2020: Всероссийская студенческая научно-практическая междисциплинарная конференция (Тольятти, 25 декабря 2020 – 29 января 2021 года) : сборник студенческих работ / отв. за вып. С.Х. Петерайтис. – Тольятти : Изд-во ТГУ, 2021. – 1 оптический диск. С. 249-253.

12. Близнюкова О.В. Элективный курс «Решение алгебраических уравнений. Научные идеи и открытия» для старшеклассников // Молодежь. Наука. Общество – 2021: Всероссийская студенческая научно-практическая междисциплинарная конференция (Тольятти, 20 декабря 2021 – 16 января 2022 года): сборник студенческих работ / отв. за вып. С.Х. Петерайтис. – Тольятти: Изд-во ТГУ, 2022. 1 оптический диск.

13. Блох А.Я. Школьный курс алгебры: метод.разраб. для слушателей ФПК. М.: МПГУ, 1985. 90 с.

14. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике. – Изд.7-е, стереотипное. М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы. 1967. С. 138-139

15. Брутер К., Козлов Д. Математический парк// Математика в школе. 2014. №6. С.42-50.

16. Бунимович Е.А Математика в музеях – трогать руками разрешается/ Е.А. Бунимович // Математика в школе. 2014. № 6. С. 50-52

17. Бунимович Е.А Математика, которую можно почувствовать, потрогать, понять, полюбить/ Е.А Бунимович // Математика в школе. 2014. №2. С. 2.

18. Вилейтнер Г. История математики от Декарта до середины XIX столетия / Пер. с нем. под ред. А.П. Юшкевича. М.: Физматлит, 1960. 468 с.

19. Виленкин, Н. Я. За страницами учебника математики / Н. Я. Виленкин, Л. П. Шибасов, Э. Ф. Шибасова. М.: Просвещение: АО «Учебная литература», 1996. 320 с.

20. Гиндикин С. Великое искусство // Квант. 1976. №9. С. 2–10.

21. Гиндикин С.Г. Рассказы о физиках и математиках. / 4-е изд., исправленное. М.: МЦНМО, 2006. 464 с.

22. Глейзер Г.И. История математики в школе / Г.И. Глейзер. М.: Просвещение, 1964. С. 157-242.

23. Глейзер Г.И. История математики в школе. VII-VIII классы. Пособие для учителей. М.: Просвещение, 1982. 240 с

24. Глушанок Т.М., Хуусконен Н.М. Музеи как структурные подразделения образовательных учреждений // Педагогические науки. 2017. №4 (85). С. 7-10.

25. Горшкова Ю.В. Интерактивные музеи – современный подход к развитию детского туризма/ Горшкова Ю.В. // «Туризм и музеи: синергетический эффект взаимодействия». Сборник статей. М., 2020.

26. Гутер Р.С., Полунов Ю.Л., Джироламо Кардано / Серия "Творцы науки и техники". М.: Знание, 1980. 193 с.

27. Даан-Дальмедико А., Пейффер Ж. Пути и лабиринты: очерки по истории математики. М.: Мир, 1986. 433 с.

28. Далингер В.А. Элективный курс «Решение уравнений высших степеней» // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. 2014.№10-1. С. 143-147. URL: https://applied-research.ru/ru/article/view?id=5972 (дата обращения: 02.01.2022)

29. Дзюба Д.Н. Виртуальный музей в контексте цифровой культуры: автореферат дис. … канд. культурологии. Саранск, 2019. 24 с.

30. Дружинин Б.Л. Как решить кубическое уравнение // Математика для школьников.2014. №3. С. 34-39

31. Журавлев А.Н. Из опыта обучения математике с использованием фондов школьного музея // Математика и информатика в образовании и

бизнесе. Сборник материалов научно-практической конференции. МГПУ. 2020. С. 190-195.

32. Кипяткова О.С. Экспериментальная математика как способ реализации принципа фундаментальности в обучении // Герценовские чтения. Начальное образование. СПб, 2019. Т. 10. № 1. С. 297-304.

33. Клачкова Ю.С. Конкурс «История математических идей и открытий» // Эвристика и дидактика математики: Материалы X Международной научно-методической дистанционной конференции-конкурса молодых ученых ,аспирантов и студентов. Донецк, 2021. С. 95-97.

34. Клуб экспериментальной математики [Электронный ресурс]: URL: [https://mccme.ru/circles/cem /](https://mccme.ru/circles/cem/) (дата обращения 12.02.2022)

35. Клумова И., Фукс Д. Формула существует, но…//Квант. 1976. №9 С. 11-16.

36. Кноп К. Окружности Карлейля или как решать квадратные уравнения циркулем и линейкой // Квант. 2020. №7. С.11-15.

37. Колягин Ю.М. Задачи в обучении математике: Ч1: Математические задачи как средство обучения и развития учащихся. М.: Просвещение, 1977. 111с.

38. Колягин, Ю.М. Профильная дифференциация обучения математике / Ю.М. Колягин // Математика в школе. 1990. №4. С. 21–27.

39. Кондаурова И.К., Захарюта Ю.Д. Интерактивный музей математики // Балтийский гуманитарный журнал .2020. Т. 9. № 3(32). С.98-107.

40. Константинова Ю.К. К вопросу о формировании культуры математического мышления на основе компьютерного эксперимента // Актуальные вопросы математического образования: состояние, проблемы и перспективы развития: Электронный сборник статей по материалам Всероссийской научно-практической конференции. Отв. редактор Н.В. Суханова, редколлегия: А.В. Иванова [и др.]. Сургут. Изд-во СГПУ. 2020. С.196–201.

41. Концепция развития математического образования в Российской Федерации (С изменениями, внесенными распоряжением Правительства Российской Федерации от 8 октября 2020 года N 2604-р). [Электронный ресурс]. URL: https://docs.edu.gov.ru/id1787 (дата обращения 30.05.2022).

42. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 2003. 832 с.

43. Котельникова А.Н., Красовский Н.Н. Одна школьная задача как элемент обучения экспериментальной математике //Вестник Челябинского государственного университета. 2003. Т. 3. № 2 (8). С. 50-131.

44. Краснодемская А. Решение кубических уравнений // Квант. 1976. №9. С. 18-19.

45. Красовский Н.Н. Размышления о математическом образовании / Н.Н. Красовский // Известия Уральского университета. 2003. №27. Серия «Проблемы образования, науки и культуры». Вып. 14. С. 5-12.

46. Курош А.Г. Алгебраические уравнения произвольных степеней / Алгебраические уравнения произвольных степеней. М.: Наука, 1975. 32 с.

47. Леонов А.В. Виртуальное 3D-моделирование в истории науки и техники. Автореферат диссертации д-ра техн. наук. М., 2017. 42 с.

48. Лернер И.Я. Дидактические основы методов обучения. М.: Педагогика, 1981. 186с.

49. Лощагин О.В. Применение компьютерной программы BLUFFTITLER при организации виртуального математического музея / Лощагин О.В. // Человек и образование.2015. №4 (45). С. 124-127

50. Ляпунова Н.А., Казаков В.Г., Пищик Б.Н., Федотов А.М., Фет Я.И. Создание виртуального музея Алексея Андреевича Ляпунова как типичная задача публикации научно-образовательных коллекций в интернете/ Ляпунова Н.А., Казаков В.Г., Пищик Б.Н., Федотов А.М., Фет Я.И.// Вестник Новосибирского государственного университета. Серия: Информационные технологии. 2008. Т.6. С.15-24.

51. Марков С.Н. Курс истории математики / Учеб. пособие. Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та, 1995. 248 с.

52. Математика – основа компетенций цифровой эры: Материалы XXXIX Международного научного семинара преподавателей математики и информатики университетов и педагогических вузов (01-02 октября 2020 года); под ред. Мордковича А.Г., Гриншкуна В.В., Семеняченко Ю.А. М.: ГАОУ ВО МГПУ, 2020. 396 с.

53. Мостовая А. Научные музеи будущего // В мире науки. 2010. №3. С. 89.

54. Мугаллимова С.Р., Малышева К.В. Возможности компьютерного эксперимента по математике для формирования познавательных универсальных учебных действий у обучающихся 7 класса // Актуальные вопросы математического образования: состояние, проблемы и перспективы развития: Материалы Всероссийской научно-практической конференции. Отв. ред. Н.В. Суханова. Сургут: Изд.–во СГПУ. 2019. С. 219-231.

55. Научные лаборатории Политехнического музея [Электронный ресурс]. URL: https://polymus.ru/ru/education/ science_labs/ (дата обращения: 01.11.2021).

56. Ожегов С. И., Шведова Н. Ю. Толковый словарь русского языка / Российская академия наук. Институт русского языка имени В. В. Виноградова. 4-е изд., доп. М.: Азбуковник, 1997. 944 с.

57. Павлова М.А. Использование онлайн-сервисов для организации сетевого наставничества над учащимися при реализации проекта «Музей занимательной математики» // Continuum. Математика. Информатика. Образование. 2021. № 4 (24). С. 51-59.

58. Павлова М.А., Лукина В.С., Шабанова М.В. Интерактивная экспозиция «Эксперименты в математике для музея занимательных наук»// Университеты в системе поиска и поддержки математически одаренных детей и молодежи: материалы II Всероссийской научно-практической конференции. Адыгейский государственный университет. 2018. С.58-66.

59. Павлова М.А., Шабанова М.В. Турнир по экспериментальной математике: опыт подготовки и проведения // Информационные технологии в математике и математическом образовании: Материалы IV Всероссийской научно-методической конференции с международным участием / В.Р. Майер (отв. ред.). Красноярск: Краснояр. гос. пед. ун-т им. В.П. Астафьева. 2015. С. 83-88.

60. Панина Е.А. Популяризация науки в условиях современной социокультурной ситуации // Вестник Майкопского государственного технологического университета. 2019. Вып. 4(43). С. 172-181

61. Поварова И.Ф., Давыдова Л.А. «Кванториум» - территория творчества, изобретательства, сотрудничества//Дети Ярославии. 2018. №1. С.27-31.

62. Пойа Д. Как решать задачу: пособие для учителей / пер. с англ. [В. Г. Звонаревой и Д. Н. Белла]; под ред. Ю. М. Гайдука. М.: Учпедгиз, 1959. 208 с.

63. Пойа Д. Математическое открытие. Решение задач: основные понятия, изучение и преподавание/ пер. с англ. [В.С. Бермана] ; под ред. И.М. Ягмола. М.: Наука, 1976. 448 с.

64. Прасолов В.В. История математики. Часть 1 (математика до конца 17 века). М., 2015. 364 с.

65. Пресман А.А. Решение квадратных уравнений с помощью циркуля и линейки // Квант.1972. №4. С. 34-35.

66. Примерная основная образовательная программа основного общего образования /В редакции протокола № 3/15 от 28.10.2015 федерального учебно-методического объединения по общему образованию [Электронный ресурс]. URL: https://fgosreestr.ru/uploads/files/cc97b4bae8197c99801f34b5bc9a1afd.pdf (дата обращения 21.03.2022)

67. Прокудина Д.А. Современные подходы к работе музея с детьми и подростками: интерактивность, соавторство, сотворчество // Вестник РМАТ. 2017. №3. С.112-117.

68. Резников А. Формула Кардано и геометрия // Квант. 1976. №9. С. 17.

69. Рожков А.В. Экспериментальная математика в КУБГУ–первые результаты // Наука. Информатизация. Технологии. Образование: Материалы XIV международной научно-практической конференции. г. Екатеринбург, 1–5 марта 2021 г. Екатеринбург: Издательство РГППУ, 2021. С. 163-172.

70. Рыбников К.А. История математики. М.: Издательство МГУ, Ленинские горы; Том 1. 1960. 191 с.

71. Сгибнев А.И. Исследовательские задачи для начинающих. 2-е изд., испр. и доп. М.:МЦНМО, 2015. 136 с.

72. Сгибнев А.И. Экспериментальная математика // Математика. 2007. №3. С.2.

73. Сенькина Г.Е., Ишутина И.А. Применение музейных и проектных технологий в обучении школьной математике // Вестник Университете Российской академии образования. 2021. №3. С.24-33.

74. Сечин А.Г. Интегрирующая роль музейной педагогики в контексте компетентностного подхода в высшем педагогическом образовании// Вестник Герценского университета. 2011. №8 (94). С.45-50

75. Симонова, И.М. Профильная модель обучения математике// Математика в школе. 1997. №1. С. 32–36.

76. Стиллвелл Дж. Математика и ее история. М.: ИКИ, 2004. 530 с.

77. Строганова Т. А. Работа мозга [Электронный ресурс]: стенограмма выступления на передаче «Наука 2.0» от 25.07.2011. URL: http://polit.ru/article/2011/07/26/stroganova/ (дата обращения: 04.06.2014).

78. Табачников С.Л., Д.Б. Фукс. Математический дивертисмент. М: Издательство МЦНМО, 2011. 512 с.

79. Удовенко Л., Шабанова М., Ниматулиев М. Экспериментальная математика как область подготовки учащихся к исследовательской деятельности в формате “Science 2.0”// Математика и информатика. 2019. Т. 62. № 2. С. 168-179.

80. Утеева Р.А. Научные идеи и открытия К.Ф. Гаусса и их применение в математическом образовании// Математика и математическое образование. сборник трудов по материалам VIII международной научной конференции "Математика. Образование. Культура" (к 240-летию Карла Фридриха Гаусса). 2017. С.27-31.

81. Ушаков Д.Н. Толковый словарь русского языка для учащихся. 90000 слов и словосочетаний. М.: ООО «Хит-книга», 2021. 768 с.

82. Филякова А.К. Неформальные методы популяризации научного знания в технических музеях // Исторические, философские, политические и юридические науки, культурология и искусствоведение. Вопросы теории и практики; Тамбов: Грамота, 2015. №3(53): в 3-х ч. Ч.1. С.188-191.

83. Фомина Н.И. Компьютерный лабораторный практикум по алгебре и началам математического анализа // Информационные технологии в математике и математическом образовании. материалы IV Всероссийской научно-методической конференции с международным участием. В.Р. Майер (отв. ред.); Красноярск. Изд-во: Краснояр. гос. пед. ун-т им. В.П. Астафьева. 2015. С. 115-121.

84. Шабанова М.В., Овчинникова Р.П., Ястребов А.В. и др. Экспериментальная математика в школе. Исследовательское обучение: коллективная монография / [М.В. Шабанова, Р.П. Овчинникова, А. В. Ястребов и др.]; Рос. акад. естествознания. М.: Издат. дом Акад. естествознания, 2016. 300 с.

85. Шабанова М.В., Павлова М.А. Коллекция педагогических сценариев использования интерактивных творческих сред для дополнительных занятий по математике // Информатика и образование. 2016. №7. С. 27-36.

86. Шабанова М.В., Ястребов А.В., Безумова О.Л., Котова С.Н. Экспериментальная математика как содержательно-методическая линия школьного курса математики // Образование, наука и экономика в вузах и школах. Интеграция в международное образовательное пространство. Труды

международной научной конференции. Горис (Армения), 28 сентября – 02 октября 2015 года. М.: Российский университет дружбы народов (РУДН). 2015. С. 395– 400.

87. Шарыгин И.Ф. Факультативный курс по математике: Решение задач: учебное пособие для учащихся. М.: Просвещение, 1991. 352 с.

88. Шеламова Т.В. Автоматизированная система управления виртуальной музейно-образовательной средой: автореферат дис… канд. тех. наук. СПб. 2010. 19 с.

89. Юшкевич А.П. История математики в средние века. М.: ГИФМЛ, 1961. 448 с.

90. Arithmeum [Электронный ресурс]: [сайт]. URL: https://www. arithmeum.uni-bonn.de/arithmeum.html(дата обращения: 18.01.2021). Загл. с экрана. Яз. англ.

91. Banchi H., Bell R., The Many Levels of Inquiry. Science and Children. 46(2). 2008. P.24-26

92. Burgard W., Cremers A.B., Fox D., Hahnel D., Lakemeyer G., Schulz D., Steiner W., Thrun S. Experiences with an interactive museum tour-guide robot / Burgard W., Cremers A.B., Fox D., Hahnel D., Lakemeyer G., Schulz D., Steiner W., Thrun S. // Artificial Intelligence. 1999.T. 114.C.3-55

93. Guilbeau, Lucye (1930), The History of the Solution of the Cubic Equation, Mathematics News Letter T. 5 (4): 8–12

94. Heather C. Hill, Merrie L. Blunk, Charalambos Y. Charalambous, Jennifer M. Lewis, Geoffrey C. Phelps, Laurie Sleep & Deborah Loewenberg Ball. Mathematical Knowledge for Teaching and the Mathematical Quality of Instruction: An Exploratory Study COGNITION AND INSTRUCTION, 2008. P. 430–511

95. IIGiardinodiArchimede [Электронный ресурс]: [сайт]. URL: http://web.math.unifi.it/archimede / (дата обращения: 15.05.2022)

96. KnipferK. Demonstration of a Discussion Terminal for Knowledge Acquisition and Opinion Formation in Science Museums // Proceedings of the 7th

Computer Supported Collaborative Learning Conference. New Brunswick – N. J.: International Society of the Learning Sciences, 2007. P. 376-378

97. Maarten Van Dyck, Koen Vermeir / Varieties of wonder: John Wilkins' mathematical magic and the perpetuity of invention //2014, Hifiloml Malhemafica 41, P. 463-489.

98. Mathematikum [Электронный ресурс]: [сайт]. URL: http:// www.mathematikum.de / (дата обращения: 18.04.2022)

99. Roberto Ivo Fernandes, Paula Odete Fernandes, Ana Cecília Rocha Veiga. Interactive Technologies in Museums: How Digital Installations and Media Are Enhancing the Visitors' Experience/ In book: Handbook of Research on Technological Developments for Cultural Heritage and eTourism Applications, 2018. P. 30-53.

100. Storksdieck M., Falk J. H. Evaluating Public Understanding of Research Projects and Initiatives // Creating Connections: Museums and the Public Understanding of Current Research. U. K.: AltaMira Press, 2004.

Приложение А

Результаты участия обучающейся в эксперименте

Рисунок А.1 – Результат участия Красновой В.Д., обучающейся МБУ «Гимназия №38» в городской НПК «Первые шаги в науку»

Рисунок А.2 – Результат участия Красновой В.Д., обучающейся МБУ «Гимназия №38» в городском конкурсе общественного признания (организатор ГЦИР г. Тольятти)

Продолжение Приложения А

Рисунок А.3 – Результат участия Красновой В.Д., обучающейся МБУ «Гимназия №38» во Всероссийском конкурсе «Шаги в науку»

Рисунок А.4 – Результат участия Красновой В.Д., обучающейся МБУ «Гимназия №38» во Всероссийской конференции «Шаги в науку»