МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Тольяттинский государственный университет»

Институт математики, физики и информационных технологий
(наименование института полностью)

Кафедра «Высшая математика и математическое образование»
(наименование)

44.04.01 Педагогическое образование
(код и наименование направления подготовки)

Математическое образование
(направленность (профиль))

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА (МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ)

на тему «Лабораторно-практические работы как средство формирования осознанности знаний обучающихся общеобразовательной школы»

Студент И.Н. Алексанян
(И.О. Фамилия) (личная подпись)

Научный руководитель канд. пед. наук, доцент, И.В. Антонова
(ученая степень, звание, И.О. Фамилия)

Тольятти 2022

Оглавление

Введение

Актуальность и научная значимость настоящего исследования. В соответствии с Федеральным Законом об образовании в РФ, Концепцией развития математического образования в РФ знания школьников являются не целью обучения, а средством их развития, то есть важную роль играют личностные достижения обучающихся. Поэтому процесс обучения математике в общеобразовательной школе должен быть направлен на формирование осознанных и прочных знаний учащихся.

В теории и методике обучения математике выделяют несколько качеств математических знаний: например, полнота, глубина, осознанность, системность и др.; осознанность знаний является одним из ведущих качеств знаний. Так, В.А. Далингер выделяет следующие группы качества знаний: «(предметно-содержательная) - полнота, обобщенность, системность; (содержательно-деятельностная) - прочность, мобильность, действенность; (содержательно-личностная) - устойчивость, гибкость, глубина, осознанность. Единственное качество знаний - осознанность, обусловливает каждое из интегративных качеств: системность, действенность, прочность» [14].

В методике обучения математике осознанность знаний рассматривают в контексте реализации принципа сознательности в обучении (Ю.М. Колягин, С.Е. Ляпин, Н.Л. Стефанова и др.), предусматривающего овладение учащимися знаниями на основе глубоко усвоенного материала и применение их в новых ситуациях [47].

Теоретические аспекты формирования осознанности знаний школьников при обучении математике в общеобразовательной школе рассматривались в работах В.А. Далингера [14]; Ю.М. Колягина [28]; С.Е. Ляпина [24], Г.И. Саранцева [44]; Н.Л. Стефановой, Н.С. Подходовой [46]; А.В. Фаркова [54] и др.

Анализ диссертационных исследований показал, что в них проблема повышения осознанности знаний школьников решена на основе применения в школьном курсе математики: метода варьирования текстовых задач (А.А. Смирнова [45], 2007 г.); электронных образовательных ресурсов в процессе изучения тригонометрического содержания (Б.Б. Молоткова [29], 2014 г.).

Отметим, что проблема формирования осознанных знаний учащихся общеобразовательных школ с помощью лабораторно-практических работ не рассматривалась в диссертационных исследованиях.

В теории и методике обучения математике различные аспекты применения лабораторно-практических работ при обучении математике представлены в работах О.Б. Епишевой [18], Ю.М. Колягина [21], Е.И. Лященко [22], С.Г. Манвелова [25], Н.В. Метельского [26], Г.И. Саранцева [44], А.Я. Цукаря [58] и др.

С.Г. Манвеловым отмечается, что лабораторно-практические работы усиливают практическую направленность обучения, они «не только тесным образом связаны с изученным материалом, но и способствуют прочному, неформальному его усвоению; на практических и лабораторных работах учащиеся самостоятельно упражняются в практическом применении усвоенных теоретических знаний и умений» [25].

Таким образом, актуальность темы исследования обусловлена сложившимися к настоящему времени противоречиями между необходимостью: повышения осознанности знаний у обучающихся и недостаточной разработанностью методики ее формирования при обучении математике в общеобразовательной школе; проведения лабораторно-практических работ по математике для формирования осознанности знаний школьников и недостаточным их использованием в практике работы учителей.

Указанные противоречия позволили сформулировать **проблему диссертационного исследования:** каковы методические особенности формирования осознанности знаний обучающихся общеобразовательной школы с помощью лабораторно-практических работ.

Объект исследования: процесс обучения математике в общеобразовательной школе.

Предмет исследования: лабораторно-практические работы как средство формирования осознанности знаний обучающихся общеобразовательной школы.

Цель исследования заключается в выявлении методических особенностей формирования осознанности знаний обучающихся общеобразовательной школы с помощью лабораторно-практических работ.

Гипотеза исследования основана на предположении о том, что если использовать в процессе обучения математике лабораторно-практические работы, то это будет способствовать формированию осознанности знаний школьников и как следствие ее повышению.

Задачи исследования:

1. Раскрыть понятие осознанности в обучении математике.
2. Описать роль лабораторно-практических работ в формировании осознанности знаний обучающихся общеобразовательной школы.
3. Выявить методические особенности формирования осознанности знаний обучающихся общеобразовательной школы с помощью лабораторно-практических работ.
4. Представить технологию обучения алгоритмам при проведении лабораторно-практических работ на уроках математики в старших классах (на примере изучении темы «Уравнение касательной к графику функции»).
5. Разработать элективный курс по математике «Лабораторный практикум для 10-11 классов по алгебре и началам математического анализа и геометрии».
6. Представить результаты педагогического эксперимента.

Теоретико-методологическую основу данного исследования составили работы В.А. Далингера; Т.А. Ивановой, Ю.М. Колягина; Е.И. Лященко, Г.И. Саранцева; Н.Л. Стефановой, Н.С. Подходовой; А.В. Фаркова.

Базовыми для настоящего исследования явились работы О.Б. Епишевой, Ю.М. Колягина, Е.И. Лященко, С.Г. Манвелова.

Для решения поставленных задач будут применяться следующие **методы исследования:** анализ психолого-педагогической, научной и учебно-методической литературы; изучение, наблюдение, также обобщение школьной практики; анализ собственного опыта работы в школе, проведение педагогического эксперимента.

Основные этапы исследования:

– 1 семестр (2020/21уч.г.): анализ выполненных ранее исследований по теме диссертации, анализ школьных учебников, нормативных документов, анализ опыта работы школы по теме исследования;

– 2 семестр (2020/21 уч.г): определение теоретических основ лабораторно - практических работ по математике как средства формирования осознанности знаний обучающихся общеобразовательной школы;

– 3 семестр (2021/22 уч.г.): определение методических основ лабораторно - практических работ по математике как средства формирования осознанности знаний обучающихся общеобразовательной школы; раскрытие технологии обучения алгоритмам при проведении лабораторно-практических работ на уроках математики в старших классах (на примере изучении темы «Уравнение касательной к графику функции»);

– 4 семестр (2021/22 уч.г.): оформление диссертации, корректировка отдельных глав и аппарата исследования, описание результатов педагогического эксперимента, формулировка выводов.

Опытно-экспериментальная база исследования: МБУ «Школа № 5» г. Тольятти.

Научная новизна исследования заключается в обосновании предложенной технологии обучения алгоритмам при проведении лабораторно-практических работ на уроках математики.

Теоретическая значимость исследования состоит в том, что в нем: раскрыто понятие осознанности в обучении математике; описана роль лабораторно-практических работ в формировании осознанности знаний обучающихся общеобразовательной школы; выявлены методические особенности формирования осознанности знаний обучающихся общеобразовательной школы с помощью лабораторно-практических работ.

Практическая значимость исследования заключается в том, что в нем: представлена технология обучения алгоритмам при проведении лабораторно-практических работ на уроках математики в старших классах (на примере изучении темы «Уравнение касательной к графику функции»); разработан элективный курс по математике «Лабораторный практикум для 10-11 классов по алгебре и началам математического анализа и геометрии».

Достоверность и обоснованность результатов исследования обеспечивались сочетанием теоретических и практических методов исследования и анализом педагогической практики в общеобразовательной школе.

Личное участие автора в организации и проведении исследования состоит в выявлении методических особенностей формирования осознанности знаний обучающихся общеобразовательной школы с помощью лабораторно-практических работ; разработке элективного курса по математике «Лабораторный практикум для 10-11 классов по алгебре и началам математического анализа и геометрии».

Апробация и внедрение результатов работы велись в течение всего исследования. Экспериментальная проверка методических рекомендаций была осуществлена в ходе производственной практики (научно-исследовательской работы) и производственной практики (преддипломной практики) на базе кафедры «Высшая математика и математическое образование» ФГБОУ ВО «Тольяттинский государственный университет», в период прохождения производственной практики (педагогической практики) в МБУ «Школа № 5» г. Тольятти. Результаты исследования докладывались на следующих конференциях:

- всероссийская студенческая научно-практическая междисциплинарная конференция «Молодежь. Наука. Общество» (декабрь 2020 г., диплом за 3 место; декабрь 2021 г.);
- научно-практическая конференция «Студенческие Дни науки в ТГУ» (апрель 2021, диплом за 3 место, 1 этап; диплом за 1 место, 2 этап; 2022 гг.);
- X международная научная конференция «Математика. Образование. Культура» (к 160-летию со дня рождения Давида Гильберта), 27-29 апреля 2022 года.

По теме исследования имеется 4 публикации [1]-[4].

На защиту выносятся:

– технология обучения алгоритмам при проведении лабораторно-практических работ на уроках математики в старших классах (на примере изучении темы «Уравнение касательной к графику функции»);

– элективный курс по математике «Лабораторный практикум для 10-11 классов по алгебре и началам математического анализа и геометрии».

Структура магистерской диссертации. Работа состоит из введения, двух глав и заключения, содержит 31 рисунок, 29 таблиц, список используемой литературы (64 источника). Основной текст работы изложен на 114 страницах.

Глава 1 Теоретические основы лабораторно практических работ по математике как средств формирования осознанности знаний обучающихся общеобразовательной школы

1.1 Понятие осознанности в обучении математике

В педагогике осознанность знаний «выражается в понимании их связей и путей их получения, в умении их доказывать, в понимании принципа действия связей и механизма их становления» (И.Я. Лернер).

Автором выделены признаки осознанности знаний: «а) понимание характера связей между знаниями;

б) различение существенных и несущественных связей;

в) понимание механизма становления и проявления этих связей;

г) понимание оснований усвоенных знаний;

д) понимание способов получения знаний;

е) усвоенность областей и способов применения знаний;

ж) понимание доступных принципов, лежащих в основе этих способов применения» [23, с. 34].

В качестве уровней осознанности определены уровни, которые ее формирование связывают с умением:

– 1-ый уровень - воспроизвести знания по образцу, то есть в стандартной ситуации;

– 2-ой уровень - проводить операцию сравнения, противопоставления, обобщения, умением интерпретировать и доказывать;

– 3-ий уровень - первых двух уровней, а задачи данного уровня осознанности должны содержать преобразование и включение новых знаний в уже имеющиеся структуры.

В методике обучения математике осознанность знаний рассматривают в контексте реализации принципа сознательности в обучении (Ю.М. Колягин, С.Е. Ляпин, Н.Л. Стефанова и др.).

Так, С.Е. Ляпиным [24 с. 55] отмечается важность применения при обучении математике в школе прикладных задач, повышающих осознание школьниками учебного материала.

Ю.М. Колягиным [28] подчеркивается формальное отношение учителей к построению системы задач на уроках, что ведет к низкому уровню осознанности знаний у обучающих.

Имеется ряд диссертаций, в которых: под осознанностью знаний обучающихся понимается: а) умение обосновывать решение задач; причем проверяется сформированность осознанности и прочности знаний по умению школьников решать задачи; выделены уровни осознанности при решении текстовых задач (А.А. Смирнова [45], 2007 г.); б) знание ими связи между моделями представления объектов и правильное ее использование; определены уровни осознанности с учетом применения в учебном процессе электронных образовательных ресурсов, в частности при изучении тригонометрии в общеобразовательной школе (Б.Б. Молоткова, 2014 г.), а именно:

- «1 уровень – знание определения понятий объектов, их свойств и различных представлений (аналитических, графических);
- 2 уровень - умение преобразовывать учебную информацию с помощью знаний связи между различными моделями объектов для конструирования нового объекта;
- 3 уровень - умение применять знания в новой ситуации и умение создавать новые связи, которые могут иметь форму вывода, следствия, гипотезы» [29].

А.В. Фарковым выделены показатели обучаемости школьников, характеризующие осознанность ума:

- «умение переводить на язык слов не только результат, но и сам ход решения;

– умение дать словесную формулировку существенных признаков вновь сформулированного понятия, закономерности и способов, с помощью которых он добыт;

– способность дать себе полный и ясный отчет о том, что и как делаешь;

– умение алгоритмизировать свою деятельность;

– владение математической терминологией;

– умение выявлять ошибочные ходы в решении той или иной задачи;

– умение устанавливать то, как вырабатываются те или иные знания;

– соотношение уровня теоретического обобщения и практических действий» [54].

Таким образом, осознанность мы будем рассматривать в контексте реализации принципа сознательности в обучении.

1.2 Роль лабораторно-практических работ в формировании осознанности знаний обучающихся общеобразовательной школы

В настоящее время особое внимание при обучении математике школьников уделяется вопросу практической направленности. Поэтому на уроках математики рекомендуется применять лабораторно-практические работы, направленные на формирование у обучающихся практических умений и навыков, необходимых не только для изучения математики в общеобразовательной школе, но и для повседневной жизни.

В теории и методике обучения математике различные аспекты применения лабораторно-практических работ рассматривались в работах О.Б. Епишевой [17]; [18], Ю.М. Колягина [21], Е.И. Лященко [22], С.Г. Манвелова [25], Н.В. Метельского [26], Ф.А. Орехова [32], Г.И. Саранцева [44], А.Я. Цукаря [58] и др.

М.И. Башмаков в качестве одной из важнейших целей обучения математике выделяет: «овладение школьниками конкретными математическими знаниями, необходимыми для применения в практической деятельности, для изучения смежных дисциплин, для продолжения образования» [9].

Рассмотрим понятие лабораторно-практических работ при обучении математике.

Под лабораторной работой в научно-методической литературе понимается:

- самостоятельные работы, выполняемые с помощью наблюдений, сравнений с применением измерительно-вычислительных инструментов; составления таблиц, построения графиков функций, исследования формул, чертежей, фигур с целью открытия учащимися неизвестных ранее фактов, теоретических выводов и обобщений, ведущих иногда к доказательству (Н.М. Епифанова [19]);
- метод, форма или средство обучения (Ю.М. Колягин [21]; Н.В. Саяпина [43]);
- метод и средство организации обучения (Т.А. Ширшова, Т.А. Полякова [53]). В качестве метода обучения лабораторные работы используются авторами для развития мышления, активизации и мотивации обучения математике школьников; организации поисковой деятельности, иллюстрации изучаемых понятий; контроля и самоконтроля их знаний; в качестве формы организации обучения – для приобретения навыков практической деятельности в ходе работы с определенными объектами или моделями в школьном курсе математики;
- средство понимающего усвоения школьниками математических понятий (Э.К. Брейтигам, Е.А. Широкова [52]). Авторы применяют лабораторные работы как средство для формирования у обучающихся наглядных динамических образов абстрактных понятий.

В коллективной монографии М.В. Шабановой, Р.П. Овчинниковой, А.В. Ястребовым [59] выделены такие виды лабораторных работ, как:

– лабораторно-иллюстративные работы, необходимые при проведении небольших экспериментов по подтверждению некоторых математических положений в ходе иллюстрации определения понятий, формулировок различных теорем, моделей, схем;

– лабораторно-практические работы, направленные на овладение школьниками практическими навыками по получения объектов; по определению способов действий;

– лабораторно-исследовательские работы, необходимые при выдвижении гипотез;

– обобщающие лабораторные работы, направленные на систематизацию и обобщение изученного материала, осуществление его контроля.

Данные виды лабораторных работ описаны авторами в контексте применения программы «GeoGebra».

Э.К. Брейтигам, Е.А. Широковой выделены типы лабораторных работ с использованием информационно-коммуникационных технологий на понимание усвоения понятий школьниками (в зависимости от самостоятельной активности учеников при их выполнении):

– демонстрационные, на которых учитель показывает учащимся выполнение работы с применением информационно-коммуникационных технологий, они наблюдают за ее выполнением, делают самостоятельно выводы по ее результатам;

– фронтальные - учитель демонстрирует школьникам то, как необходимо выполнять данную работу, после чего учащиеся выполняют ее самостоятельно на основе применения аналогичных моделей, далее в классе организуется обсуждение ее результатов, делаются соответствующие выводы;

– самостоятельные - школьники полностью самостоятельно выполняют данную работу как творческое или зачетное задания; основой проведения этого типа лабораторных работ по математике является метод проектов [52, с. 508-513].

Н.М. Епифанова [19] под практическими работами понимает «самостоятельные работы учащихся, целью выполнения которых является поверка теоретически установленных фактов, соотношений, зависимостей в отдельном конкретном случае, применение теоретических знаний на практике, решение практических задач и т.д.».

В то же время Аммосова Н.В. [5] говорит о практических работах: «В процессе выполнения практических работ учащиеся учатся пользоваться как можно большим числом различных инструментов (масштабной линейкой, транспортиром, штангенциркулем, микрометром, пантографом, рейсшиной, палеткой и др.), применять разнообразные вычислительные средства (таблицы, номограммы, микрокалькуляторы и др.), при этом важно научить учащихся самостоятельно определять, какой инструмент и вычислительное средство надо применить в каждом конкретном случае, а это уже элемент исследования».

Н.В. Аммосова, Б.Б. Коваленко выделяют виды практических работ по геометрии по учебной целевой направленности:

– «ознакомительные, которые проводятся для ознакомления школьников с простейшими приемами работы с оборудованием;
– иллюстративные, в ходе выполнения которых обучающиеся изучают определенные фигуры и их свойства, некоторые факты;
– тренировочно-закрепительные, направленные на закрепление изученных свойств, понятий, фактов, овладение способами доказательств, построения и изображения фигур;
– исследовательские, которые проводятся с целью поиска новых свойств, фактов, требующих обоснования;
– творческие, направленные на конструирование геометрической наглядности, созданием специальных приборов и механизмов на основе изученных свойств фигур;

– обобщающие, направленные на систематизацию и обобщение изученного материала, методов построений, изображений, измерений объектов» [5].

Н.В. Аммосова, Б.Б. Коваленко в своих исследованиях рассматривают роль практических работ, в том числе, по геометрии в развитии исследовательских умений учащихся при обучении математике. Авторы отмечают, что «в процессе их выполнения происходит совершенствование навыков измерения, построения, изображения, моделирования, конструирования, приближенных вычислений; поэтому практические работы направлены на комплексное развитие конструктивных умений и исследовательских навыков учащихся, интереса и положительной мотивации к приобретению знаний» [5, с. 87].

В исследовании В.И Тараник [48] отмечается, что в образовательном процессе применяются различные практические работы по геометрии как по содержанию, так и по их ведущей учебной цели. Автор выделяет установочные; иллюстративные; тренировочные и обобщающие работы, по смыслу близкие с видами практических работ, выделенными Н.В. Аммосовой, Б.Б. Коваленко.

Вместе с этим, отметим, что некоторые авторы понятие лабораторной работы используют как синоним понятия практической работы.

Н.В. Саяпина [43] описывает преимущества лабораторных работ перед практическими работа, разделяя данные понятия:

- их легче проводить на уроке;
- доступнее для понимания учащимися при решении поставленных задач;
- требуют меньше времени при проведении;
- их предварительное проведение перед определенными соответствующими практическими работами способствует активизации мыслительной деятельности учащихся;

– при их проведении удобнее обеспечить самостоятельность выполнения работ всеми обучающимися.

Вместе с этим, С.Г. Манвеловым отмечается, что лабораторно-практические работы усиливают практическую направленность обучения, что безусловно связано с осознанностью знаний школьников; данные работы «способствуют прочному, неформальному усвоению учебного материала; на практических и лабораторных работах учащиеся самостоятельно упражняются в практическом применении усвоенных теоретических знаний и умений» [25].

Кроме того, О.Б. Епишева подчеркивает важность лабораторно-практических работ в реализации одного из главных принципов педагогики – деятельностном подходе. В результате выполнения данных работ обучающиеся овладевают методами экспериментально-практического исследования; у них развиваются творческие и исследовательские умения; происходит расширение возможностей использования полученных ими в общеобразовательной школе теоретических знаний для решения практических задач. При этом автор указывает, что «качество усвоения знаний определяется многообразием и характером видов деятельности, в которых знания могут функционировать» [17, с. 50].

Выполняя лабораторно-практические работы, у обучающихся формируются экспериментальные умения, которые включают в себя как интеллектуальные, так и практические. Вместе с этим, при выполнении лабораторно-практических работ у школьников также развиваются навыки самостоятельности: они учатся пользоваться учебниками, учебными пособиями, таблицами, различной справочной литературой.

Таким образом, применение лабораторно-практических работ при обучении школьников математике способствует усилению практической направленности обучения; прочному, неформальному усвоению ими изученного теоретического материала; овладению методами экспериментально-практического исследования; развитию у них конструктивных умений и исследовательских навыков, интереса и положительной мотивации к приобретению знаний; развитию навыков самостоятельности; также повышению качества знаний, в том числе уровня сформированности у них осознанности знаний.

1.3 Методические особенности формирования осознанности знаний обучающихся общеобразовательной школы с помощью лабораторно-практических работ

Одной из проблем в современном образовании является формирование осознанных знаний учащихся общеобразовательных школ, которые смогут обеспечить не только прочные знания, но и послужат активатором познавательной деятельности в целом. Умение учиться является «существенным фактором повышения эффективности освоения учащимися предметных знаний, умений и формирование компетенций, образа мира и ценностно-смысловых оснований личностного морального выбора» [51, с. 220]. Процесс обучения математике в общеобразовательной школе должен быть направлен на формирование осознанных и прочных знаний учащихся, так как знания школьников являются средством их развития, как было отмечено выше, в соответствии с Федеральным Законом об образовании в РФ, Концепцией развития математического образования в РФ.

Проблема формирования осознанных знаний учащихся общеобразовательных школ с помощью лабораторно-практических работ не рассматривалась в диссертационных исследованиях.

Анализ научно-методической литературы показал, что формирование осознанных знаний у школьников при обучении математике достигается в ходе применения:

- метода варьирования текстовых задач, который сводится к составлению обучающимися из базовой задачи цепочки взаимосвязанных задач (А.А. Смирнова);

− электронных образовательных ресурсов (Б.Б. Молоткова);

− задач с избыточными и недостающими данными (Н.В Аммосова, Б.Б. Коваленко);

− лабораторно-практические работ (С.Г. Манвелов).

С.Е. Ляпин [24, с. 55] отмечается важность применения при обучении математике в школе прикладных задач, которые направлены на повышение осознания школьниками учебного материала, также и мотивации к изучению математики. Автор также рекомендует для формирования осознанности знаний у школьников применять на уроках устные упражнения, «включающие вопросы по теории, вычисления, преобразования и другие «коротенькие» задачи, не требующие письменных выкладок».

Ю.М. Колягиным [28] подчеркивается необходимость применения на уроках систем задач, которые учитель должен заранее составить, так как формальное отношение учителей к построению системы задач на уроках, что ведет к низкому уровню осознанности знаний у обучающих.

Кроме того, для формирования у школьников осознанности знаний В.А. Далингер рекомендует решать специальные рефлексивные задачи, способствующие осознанию учащимися способа их решения, и направленные на «формирование у них умения самостоятельно проводить анализ решения задачи, умения рассматривать способы собственных действий (рефлексии)» [14, с. 52].

О.Ю. Ивановой определено, что для формирования осознанности знаний чаще всего применяются задачи:

− на нахождение ошибок в решении;

− с избыточными и недостающими данными;

− с противоречивыми условиями, например, когда задача не имеет решения;

− на приведение примеров и контрпримеров, например, установление истинности высказываний;

- с элементами исследования, например, задания с параметрами, с уравнения и неравенствами, содержащими переменную под знаком модуля;
- практико-ориентированные задачи [16].

Кроме того, как было отмечено выше, О.Б. Епишева рекомендует применять лабораторно-практические работы в рамках реализации одного из главных принципов педагогики – деятельностном подходе. В результате выполнения данных работ, обучающиеся овладевают методами экспериментально-практического исследования; у них развиваются творческие и исследовательские умения; происходит расширение возможностей использования полученных ими в общеобразовательной школе теоретических знаний для решения практических задач. Для формирования осознанности знаний учителя применяют немало средств и приемов обеспечения осознанности знаний (доказательность, построение схем, определение связей, механизма и процессов, и т.д.).

По мнению А.В. Фаркова, в обучении математике применение алгоритмов является одним из важнейших путей формирования осознанных знаний обучающихся.

Вместе с этим, отметим, что проблема формирования осознанных знаний учащихся общеобразовательных школ с помощью технологии обучения алгоритмам не рассматривалась в различных исследованиях.

В обучении математике, применение алгоритмов является одним из важнейших путей формирования осознанных знаний обучающихся. Использование технологии алгоритмов рассматривались в трудах Н.Л. Стефановой, Т.А. Ивановой, Е.И. Лященко, А.А. Темербековой и др.

Е.И. Лященко при работе с учащимися по овладению алгоритмом включает этапы: «1) введение алгоритма, направленного на актуализацию знаний, необходимых для введения и обоснования алгоритма, а также формулирование алгоритма; 2) усвоение алгоритма, связанный с отработкой операций, входящих в алгоритм, и усвоение их последовательности;

3) применение алгоритма, отработка алгоритма в знакомых (при варьировании исходных данных) и незнакомых ситуациях» [22].

В пособии Н.Л. Стефановой выделены следующие этапы работы с правилами (алгоритмами): «выполнение учителем логико-математического анализа правила; разработка алгоритмического предписания (в случае необходимости); разработка и проведение этапа актуализации знаний, необходимых для обоснования необходимости и введения алгоритма; введение алгоритмического предписания (обучающий этап); этап закрепления (применение введенного алгоритма при решении типовых задач)» [27, с. 58].

Т.А. Ивановой выделены диагностируемые учебные цели при изучении правил (алгоритмов) на уровнях «знание», «понимание» и «применение» (по системе Б. Блума) и описаны критерии их достижения через наблюдаемые действия учащихся. Автором раскрыта технология достижения этих целей, которая спроектирована в контексте деятельностного подхода: психологической структуры учебной организации деятельности (включающей три части: мотивационно-ориентировочную, содержательную или операционно-познавательную, рефлексивно-оценочную), специфики математической деятельности [50, с. 147-163].

В школьном курсе математики используются различные алгоритмы: например, в основной школе: алгоритм решения задачи с помощью уравнений; алгоритм решения квадратного уравнения; в старших классах это, например, алгоритм составления уравнения касательной и др.

Для формирования осознанных знаний учащихся старших классов нами будет взята за основу в дальнейшем работе по теме исследования технология обучения алгоритмам автора Е.И. Лященко, которая будет раскрыта нами в параграфе 2.1. при проведении лабораторно-практических работ на уроках алгебры и начал математического анализа на примере изучения темы «Уравнение касательной к графику функции».

Как было отмечено С.Г. Манвеловым, для формирования осознанности знаний у школьников могут применяться лабораторно-практические работы.

В статье М.Н. Подлевских [34] раскрываются методические аспекты обучения математике на основе системно-деятельностного подхода согласно ФГОС среднего общего образования с помощью лабораторных работ по математике в программе «Geogebra».

Автором отмечается, что использование данных лабораторных работ возможно и на базовом уровне для повышения мотивации к обучению математике, так и на профильном уровне с целью решения обучающимися различных исследовательских задач.

При формировании осознанности знаний в ходе проведения лабораторно-практических работ могут применяться различные методы обучения, известные в теории и методике обучения математике:

- «индуктивно-репродуктивный̆ суть которого в том, что учитель создает такую ситуацию, в которой ученик воспроизводит понятие или теорему в процессе рассмотрения частных случаев;
- дедуктивно-репродуктивный̆ метод, предполагающий воспроизведение частных случаев в процессе решения задач, где используются общие положения;
- обобщенно-репродуктивный̆ метод, при котором цель достигается путем воспроизведения изученных;
- индуктивно-эвристический̆ метод, предполагающий самостоятельное открытие фактов в процессе рассмотрения частных случаев;
- дедуктивно-эвристический̆ метод, предполагающий открытие частностей какого-нибудь факта при рассмотрении общего случая;
- эвристическое обобщение, предполагающее создание ситуации, в которой ученик сам или с небольшой помощью приходит к обобщению;
- индуктивно-исследовательский̆ метод, предполагающий проведение исследования различных феноменов посредством их конкретных проявлений̆;
- дедуктивно-исследовательский̆ метод, предполагающий организацию исследования посредством дедуктивного развития учебного материала;

– обобщенное исследование, предполагающее наличие в учебном материале ситуаций, исследование которых приводит к обобщенному знанию» [44].

А.А. Смирновой отмечается, что необходимо уделить больше времени при обучении математике решению проблемы формирования осознанности и прочности знаний школьников в связи с требованиями ФГОС к результатам обучения, которые направлены зачастую на проверку умения решать задачи, то есть на проверку предметности знания.

Лабораторно-практическое занятие, могут проводится как индивидуально, так и с группой учеников. В работах реализуются следующие основные функции: овладение системой средств и методов экспериментально-практического исследования; развитие творческих и исследовательских умений обучающихся; расширение возможностей использования теоретических знаний для решения практических задач.

О.Б. Епишева указывает, что «качество усвоения знаний определяется многообразием и характером видов деятельности, в которых знания могут функционировать. Учебно-познавательная деятельность вооружает знаниями, умениями, навыками; содействует развитию мировоззрения; развивает познавательные силы – активность. Самостоятельность, познавательный интерес; приобщает к творческой деятельности. Предметно-практическая деятельность помогает уяснить практическую значимость науки; вооружает практическими знаниями, умениями, навыками; развивает политехнический кругозор; готовит психологически и практически к труду; способствует профессиональной ориентации учащихся» [18, с. 50].

Вклад средствами математики в индивидуальное развитие личности, прежде всего в таких направлениях, как точность и ясность мысли, интеллектуальная честность, воля и целеустремленность в поисках и принятии решений, сообразительность, интуиция, развитость пространственных представлений, способность ориентироваться в новых ситуациях, стремление к применению полученных знаний, умение и желание постоянно учиться, воспринимать новое, уважение к значимости научных знаний, творческая активность и самостоятельность, способность воспринимать красоту и гармонию мира.

Отметим, что методические аспекты формирования осознанности знаний школьников с помощью лабораторно-практических работ в общеобразовательной школе описаны и в зарубежной литературе: о целесообразности применения практических работ говорится в исследованиях Ф.О. Хаара [61] и С. Вольфрам [64]; об особенностях проведения лабораторных работ – в исследованиях М.Э. Хайнс, М. Хайнс, Л. Марселла [62] и Дж.Д. Уилкинсон [63]. Вместе с этим, в статье С. Эбеле, М. Эбигейл [60] раскрывается влияние использования лабораторных работ при обучении математике студентов.

Опишем некоторые методические рекомендации при проведении лабораторно-практических работ в старших классах по формированию осознанности знаний школьников, основанные на собственном опыте работы в общеобразовательной школе и анализе научно-методической литературы.

Проведение лабораторно-практических работ в обучении учащихся 10-11 классов общеобразовательных школ являются частью образовательного процесса и имеют большое значение, так как являются связующим звеном между теоретическим и практическим материалом, развивают конструктивные умения, овладевают навыками выполнения чертежей и расчетов, повышают интерес к предмету. По форме различают индивидуальные и групповые работы. В зависимости от цели проведения могут использоваться для актуализации знаний в начале урока, в качестве рефлексии в конце урока, на весь урок или в качестве домашнего задания.

Целями лабораторно-практических работ могут быть:

- систематизировать, закрепить и углубить полученные знания и навыки по пройденным темам;
- формировать умение самостоятельного поиска решения, используя изученные алгоритмы и формулы, справочную литературу;

– выявлять уровень сформированности знаний, умений и навыков по математике.

По содержанию лабораторно-практические работы будем подразделять на виды: тренировочные (закрепление полученных знаний и навыков); исследовательские (выявление свойств и закономерностей); творческие (конструирование и изучение свойств математических объектов); обобщающие (систематизация и обобщение знаний и умений).

Приведем структуру лабораторно-практических работ:

а) сообщение темы лабораторно-практической работы, повторение определений понятий и формул, которые будут использоваться в работе;

б) постановка цели работы, пояснение порядка ее выполнения и требований по оформлению выполнения работы;

в) выполнение и оформление лабораторно-практической работы в тетрадях;

г) подведение итогов и обобщение полученных результатов.

Опишем критерии оценки лабораторно-практических работ: «5» - все задания выполнены верно, есть логическое обоснование решения; «4» - работа выполнена полностью, но допущены незначительные 2-3 ошибки или недостаточно обоснован ход решения задания; «3» - правильно выполнено не меньше половины работы, допущены 2-3 незначительные ошибки; «2» - учащийся не овладел навыками выполнения задания, допущено более 4 существенных ошибок в работе. Незначительными ошибками можно считать: нерациональные способы вычисления, небрежное выполнение записей, схем, чертежей. Грубыми: незнание основных определений, формул, символов, единиц измерения.

Таким образом, использование лабораторно-практических работ в обучении математики улучшает качество математических навыков и умений, что приводит к формированию осознанности знаний обучающихся общеобразовательных школ.

Выводы по первой главе

Раскрыто понятие осознанности в обучении математике. Установлено, что осознанность знаний учащихся является важным компонентом в обучении; осознанность мы будем рассматривать в контексте реализации принципа сознательности в обучении. В методике обучения математике осознанность рассматривается в работах В.А. Далингера, Ю.М. Колягина, С.Е. Ляпина, Г.И. Саранцева, Н.Л. Стефановой и др.

Описана роль лабораторно-практических работ в формировании осознанности знаний обучающихся общеобразовательной школы. Так, применение лабораторно-практических работ при обучении школьников математике способствует усилению практической направленности обучения; прочному, неформальному усвоению ими изученного теоретического материала; овладению методами экспериментально-практического исследования; развитию у них конструктивных умений и исследовательских навыков, интереса и положительной мотивации к приобретению знаний; развитию навыков самостоятельности; также повышению качества знаний, в том числе уровня сформированности у них осознанности знаний.

Выявлены методические особенности формирования осознанности знаний обучающихся общеобразовательной школы с помощью лабораторно-практических работ. Например, определено, что целесообразно применять прикладные задачи, которые направлены на повышение осознания школьниками учебного материала, также и мотивации к изучению математики; системы задач; устные упражнения; специальные рефлексивные задачи, способствующие осознанию учащимися способа их решения; задачи: на нахождение ошибок в решении; с избыточными и недостающими данными; с противоречивыми условиями; на приведение примеров и контрпримеров, например, установление истинности высказываний; с элементами исследования, например, задания с параметрами, с уравнения и неравенствами, содержащими переменную под знаком модуля.

Глава 2 Методические основы разработки лабораторно-практических работ как средства формирования осознанности знаний обучающихся старших классов общеобразовательной школы

2.1 Технология обучения алгоритмам при проведении лабораторно-практических работ на уроках математики

В данном параграфе представим технологию обучения алгоритмам при проведении лабораторно-практических работ на уроках алгебры и начал математического анализа на примере изучения темы «Касательная к графику функции» в старших классах, направленную на формирование осознанности знаний обучающихся.

Материал, рассматриваемый в теме, может быть использован учителя математики в практической деятельности в общеобразовательной школе и при подготовке школьников к ЕГЭ по математике.

Разработанный вариант проекта по изучению темы «Касательная к графику функции» предназначен для математического профиля. Это обусловлено тем, что содержанием данной темы входит в КИМы к ЕГЭ по математике профильного уровня, а также базового уровня [40], развивает логическое мышление учащихся, формирует представление о практическом применении знаний и умений по данной теме.

При проектировании изучения данной темы в школьном курсе математики нами была выбрана технология обучения алгоритмам.

Обоснуем целесообразность выбора данной технологии.

Использование технологии алгоритмов в общеобразовательной школе описывались в работах Н.Л. Стефановой [27], Т.А. Ивановой [50], Ю.М. Колягина [21], Е.И. Лященко [22], А.А. Столяра [47], А.А. Темербековой [49] и др.

В теории и методике обучения математике выделяют два способа обучения алгоритмам:

– применение конкретных (готовых) алгоритмов к решению задач. Так, А.А. Столяр «задачи, для которых имеются разрешающие их алгоритмы, называл типовыми задачами (распределенными на: задачи, решаемые арифметическими средствами; задачи, решаемые геометрическими средствами; задачи, решаемые средствами алгебры и анализа); нетиповыми задачами – задачи, для решения которых таких алгоритмов нет или они неизвестны» [47];
– создание алгоритмов учащимися при решения определенных классов задач. А.А. Темербекова об этом способе обучения алгоритмам пишет, как об одном из вариантов эвристического метода обучения и предполагает реализацию трех этапов изучения материала: выявление отдельных шагов алгоритма; формулировка алгоритма; применение алгоритма.

Ю.М. Колягин указывает, что многие задачи школьного курса математики допускают алгоритмическое решение и ставятся с заранее определенной установкой на определенный способ их решения школьниками; часто для того, чтобы обучить (поупражнять, проиллюстрировать) определенному алгоритму. Не все задачи допускают алгоритмическое решение, в обучении математике полезно решать не только задачи алгоритмического типа.

Е.И. Лященко при работе с учащимися по овладению алгоритмом включает этапы:

– «введение алгоритма, направленного на актуализацию знаний, необходимых для введения и обоснования алгоритма, а также формулирование алгоритма;
– усвоение алгоритма, связанный с отработкой операций, входящих в алгоритм, и усвоение их последовательности;

– применение алгоритма, отработка алгоритма в знакомых (при варьировании исходных данных) и незнакомых ситуациях» [22]. Определены требования к системе задач на усвоение правил (алгоритмов); отмечается, что учителю для организации работы с обучающимися по овладению определенным алгоритмом следует провести его логико-математический анализ; содержание указанной системы задач определяется на основании данного анализа.

В пособии Н.Л. Стефановой приведены следующие этапы работы с правилами (алгоритмами): «выполнение учителем логико-математического анализа правила; разработка алгоритмического предписания (в случае необходимости); разработка и проведение этапа актуализации знаний, необходимых для обоснования необходимости и введения алгоритма; введение алгоритмического предписания (обучающий этап); этап закрепления (применение введенного алгоритма при решении типовых задач)» [27, с. 58].

Т.А. Ивановой выделены диагностируемые учебные цели при изучении правил (алгоритмов) на уровнях «знание», «понимание» и «применение» (по системе Б. Блума) и описаны критерии их достижения через наблюдаемые действия учащихся; раскрыта технология достижения этих целей, которая спроектирована в контексте деятельностного подхода: психологической структуры учебной организации деятельности (включающей три части: мотивационно-ориентировочную, содержательную или операционно-познавательную, рефлексивно-оценочную), специфики математической деятельности [50, с. 147-163].

В школьном курсе математики используются различные алгоритмы: например, в основной школе - алгоритмы на: решение задачи с помощью уравнения; решение квадратного уравнения; приведение дробей к общему знаменателю; построение биссектрисы угла и др.; в старших классах - алгоритмы на: исследование функции и построение ее графика; вычисление площади криволинейной трапеции; составление уравнения касательной к графику функции и др.

В данном проекте по теме «Касательная к графику функции» нами будет взята за основу технология обучения алгоритмам автора Е.И. Лященко. В качестве требований к системе задач на усвоение правил (алгоритмов) автором определены следующие:

- «наличие задач на обоснование необходимости рассмотрения правила (алгоритма);
- наличие задач на актуализацию знаний, необходимых для обоснования правил, и умений, необходимых для выполнения правил (алгоритмов);
- наличие задач на выполнение отдельных операций, входящих в алгоритм (правило);
- наличие задач на применение правил (алгоритмов) в различных ситуациях (знакомых и незнакомых)» [22].

Отметим, что во ФГОС среднего общего образования (профильный уровень) [55] указано, что учащиеся должны:

знать/понимать:

- значение математической науки для решения задач, возникающих в теории и практике; широту и ограниченность применения математических методов к анализу и исследованию процессов и явлений в природе и обществе;
- значение идей, методов и результатов алгебры и математического анализа для построения моделей реальных процессов и ситуаций.

уметь: решать задачи с применением уравнения касательной к графику функции.

В результате изучения темы «Уравнение касательной к графику функции» ученик должен [10]: владеть понятием: касательная к графику функции; уметь применять его при решении задач.

Целью изучения данной темы является ввести определение касательной к произвольной кривой; научить находить угловой коэффициент касательной, используя её определение при решении различных задач; вывести уравнение касательной к графику функции, формировать умение применять его при решении задач.

Задачи:

– сформировать понятие касательной к графику функции;

– сформировать навыки вычисления углового ее коэффициента, нахождения уравнения касательной к графику функции.

Теоретический и практический материал, рассматриваемый в проекте «Касательная к графику функции в курсе алгебры и начал математического анализа (10-11 классы)», способствует формированию умения применять математические методы к анализу и исследованию процессов и явлений в природе и обществе, а также формированию осознанности знаний школьников и тем самым повышению качества математического образования.

Опишем результаты анализа практического опыта учителей по теме «Касательная к графику функции», опубликованного в различных статьях.

В данном пункте проведем анализ практического опыта учителей по теме «Касательная к графику функции», опубликованный в статьях и учебно-методических пособиях.

В статье И.К. Варшавского [12] представлены задания по теме проекта, в том числе на геометрический и физический смысл производной.

В статье И.А. Петренко «О задачах касательной к кривой» [33] рассматриваются различные виды задач на касательную к графику функции и методы их решения. На приведенных задачах показана методика решения отдельных типов задач на нее.

В статье В.Г. Гилеева «Методика введения производной на основе метода обобщения» рассматриваются задачи, приводящие к понятию производной: касательной к кривой и мгновенная скорость изменения функции. Вводится функция обобщения, которая является производной [13].

На сайте Фестиваль педагогических идей «Открытый урок» [57] темы «Касательная к графику функции» и «Геометрический смысл производной» представлены достаточно обширно: конспекты уроков, презентации, тестовые задания по учебнику А.Г. Мордковича.

На сайте «Решу ЕГЭ» [40] представлен материал для подготовки к ЕГЭ по математике. В задании №6 есть более 30 задач на геометрический смысл производной, касательную к графику функции.

В элективном курсе Э.Е. Рясновой «Производная и ее применение» [41] на тему «Физический и геометрический смысл производной. Уравнение касательной к графику» отводится 2 часа. Изучение темы завершается выполнением самостоятельной работы.

В элективном курсе И.П. Саулина «Избранные вопросы по математике» [42] представлен модуль «Начала математического анализа», в котором рассматриваются темы: «Производная функции в точке»; «Физический и геометрический смысл производной». На рассмотрение данных тем выделено 2 часа. Программа рассчитана на решение практико-ориентированных задач и по подготовку к успешной сдаче ЕГЭ.

Таким образом, анализ темы в статьях [12; 13; 33] и опыт изучения темы посредством элективных курсов [41; 42], подготовки школьников к ЕГЭ [40] показывает интерес учителей и исследователей к теме «Касательная к графику функции».

Представим результаты анализа теоретического и практического содержаний по данной теме.

Базовые знания:

- понятие приращения функции, понятие приращение аргумента;
- понятие касательной к произвольной плоской кривой (к графику функции);
- понятие углового коэффициента касательной;
- понятие производной функции; геометрический смысл производной.

Рассматриваемые сведения:

- уравнение касательной к графику функции;

– алгоритм составления уравнения касательной к графику функции;

– примеры задач на составление уравнения касательной к графику функции.

Теоретический материал.

Анализ содержания темы «Касательная к графику функции в курсе алгебры и начал математического анализа (10-11 классы)» в различных учебниках, утвержденных Министерством Просвещения на 2021-2022 годы, рассмотрен в таблице 1. Данная тема в рассматриваемых учебниках профильного уровня изучается в 10-11 классах в объеме от 2 до 5 часов.

Таблица 1 – Содержание темы в учебниках алгебры и начал математического анализа

Автор учебника, класс; кол-во часов (с учетом 4 / 5 часов в неделю)	Содержание изучаемого материала
А.Г. Мордкович (профильный уровень) [30], 10 класс; 2 + 3 / 2 + 3 часа.	Определение касательной к произвольной кривой рассмотрено в теме «Определение производной». Уравнение касательной к графику функции выводится в отдельном параграфе с таким же названием после введения понятия производной, правил их вычисления.
Ю.М. Колягин (базовый и углубленный уровни) [20], 11 класс; 3 / 4 часа	Определение касательной к графику функции в точке рассмотрено в теме «Геометрический смысл производной»; уравнение касательной к графику функции выводится в этом же параграфе.
М.Я. Пратусевич (профильный уровень) [36], 11 класс; 2 / 2 часа	Определение касательной к графику функции в точке и уравнение касательной к графику функции дается в параграфе «Задача о касательной. Уравнение касательной».

В учебнике А.Г. Мордковича перед введением уравнения касательной к графику функции в отдельном параграфе вводится сначала определение касательной к произвольной кривой.

«Дана кривая L (рисунок 1), на ней выбрана точка M. Возьмем еще одну точку на этой кривой – точку P. Проведем секущую MP. Далее будем приближать точку P по кривой L к точке M. Секущая MP будет изменять свое положение (MP, MP_1, MP_2 и т. д.), она как бы поворачивается вокруг точки M. Часто бывает так, что можно обнаружить в этом процессе прямую, представляющую собой некое предельное положение секущей; эту прямую - предельное положение секущей – называют касательной к кривой L в точке M» [30, с. 326].

Далее автор показывает, что угловой коэффициент касательной к графику равен: $k_{кас} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Затем вводит определение производной функции, приходя к выводу, что: $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$.

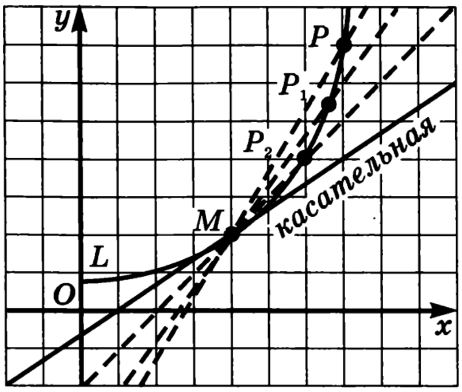


Рисунок 1 – К определению касательной к произвольной кривой

Поясняет геометрический смысл производной: «Если к графику функции $y = f'(x)$ в точке с абсциссой $x = a$ можно провести касательную, непараллельную оси y , то $f'(a)$ выражает угловой коэффициент касательной: $k = f'(x_0)$» [30].

Затем приступает к выводу уравнения касательной к графику функции.

«Пусть даны функция $y = f(x)$ и точка $M(a; f(a))$ на графиге этой функции: пусть известно, что существует $f'(a)$. Составим уравнение касательной к графику заданной функции в заданной. Точке. Это уравнение, как уравнение любой прямой, не параллельно йоси ординат, имеет вид $y = kx + m$, поэтому задача состоит в нахождении коэффициентов k и m.

С угловым коэффициентом k проблем нет: известно, что $k = f'(a)$. Для вычисления значения m воспользуемся тем, что искомая прямая проходит через точку $M(a; f(a))$. Это значит, что если подставить координаты точки M в уравнение прямой, получим верное равенство: $f(a) = ka + m$, т. е. $m = f(a) - ka$.

Осталось подставить найденные значения коэффициентов k и m в уравнение прямой: $y = kx + m$; $y = kx + (f(a)-ka)$; $y = f(a) + k(x-a)$; $y = f(a) + f'(a)(x-a)$» [30].

После этого А.Г. Мордкович указывает, что получено уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $x = a$.

В учебнике Ю.М. Колягина [20] сначала вводится понятие касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $(x_0; f(x_0))$, затем выводится ее уравнение.

«Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 и существует ее производная $f'(x_0)$.

Если A и M (рисунок 2) – точки графика функции с абсциссами x_0 и $x_0 + h$, то угловой коэффициент $k = k(h)$ прямой, проходящей через точки A и M (эту прямую называют секущей), выражается формулой $k(h) = \text{tg}\angle MAC = \frac{MC}{AC} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, где C – точка с координатами $x_0 + h, f(x_0)$, а уравнение секущей AM можно записать в виде: $y - y_0 = k(h)(x - x_0)$.

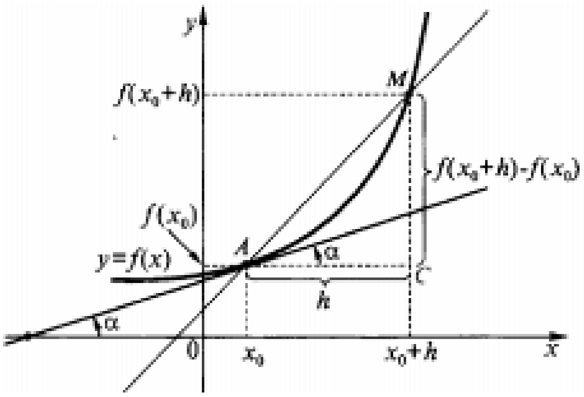


Рисунок 2 – К понятию касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $(x_0; f(x_0))$

Пусть $h \to 0$, тогда точка M, двигаясь по графику, приближается к точке A, то есть существует предельное положение секущей, то прямая

$y - y_0 = k_0(x - x_0)$ уравнение которой получается из уравнения $y - y_0 = k(h)(x - x_0)$ заменой $k(h)$ на k_0, называется касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $(x_0; f(x_0))$.

Таким образом, касательная уравнение которой получается из уравнения $y - y_0 = k(h)(x - x_0)$ заменой $k(h)$ на k_0, называется касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с координатами $\left(x_0; f(x_0)\right)$. Таким образом, касательная к графику функции $y = f(x)$ в точке $(x_0; f(x_0))$ есть предельное положение секущей МА при $h \to 0$. Если существует $f'(x_0)$, то $k = \lim\limits_{h\to 0} k(h) =$ $= \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0)$» [20].

В учебнике М.Я. Пратусевича [36] сначала также вводится понятие касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0, затем выводится ее уравнение.

«Проведём прямую через точки с координатами $A\left(x_0; f(x_0)\right)$и $B(x_0 +$ $+\Delta x; f(x_0 + \Delta x))$ (рисунок 3), такая прямая обычно называется секущей $(\Delta x \neq 0$ значение Δx может быть и отрицательным). Будем устремлять Δx к нулю, и пусть точка В «стремится» к точке А по кривой. Если при этом секущая АВ будет «стремиться» к некоторой прямой, то есть будет стремиться занять некоторое предельное положение, то эта прямая называется касательной к графику функции f в точке x_0. Можно сказать, что касательная – это предельное положение секущей» [36].

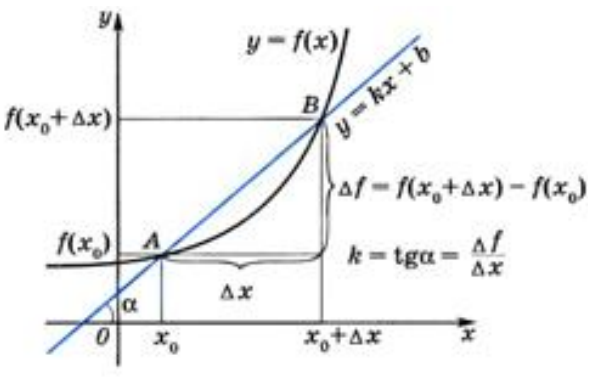


Рисунок 3 – К определению касательной к графику функции в точке

«Пусть функция f имеет производную в точке x_0. Касательной к графику функции f в точке x_0 (рисунок 4) называется прямая с угловым коэффициентом $k = f'(x_0)$, проходящая через точку $(x_0; f(x_0))$» [36].

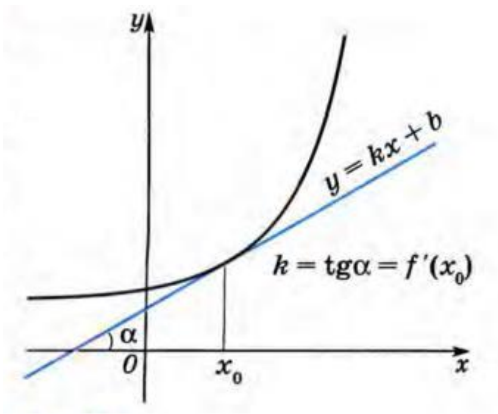


Рисунок 4 – Касательной к графику функции f в точке x_0

М.Я. Пратусевич после введения понятия касательной вводит понятие ее углового коэффициента, указывая, что:

$$k_{кас} = \lim_{\Delta x \to 0} k_{сек} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Затем приступает к выводу уравнения касательной к графику функции.

«Будем искать его в виде $y = kx + b$. По определению $k = f'(x_0)$. Найдем b. Касательная проходит через точку $b = f(x_0) - f'(x_0)x_0$.

Отсюда получим уравнение касательной:

$$y = f'(x_0)x + f(x_0) - f'(x_0)x_0.$$

Часто его записывают в виде:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \tag{1}$$

или

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0). \tag{2}$$

Уравнение (2) можно получить, если воспользоваться уравнение прямой, с угловым коэффициентом k, проходящей через точку $(x_0; y_0)$, записанным в виде $\Delta y = k\Delta x$ или $y - y_0 = k(x - x_0)$ где k – угловой коэффициент этой прямой» [36].

Таким образом, все авторы учебников определяют касательную к произвольной кривой в какой-либо точке как предельное положение секущей. В учебнике Ю.М. Колягина и М.Я. Пратусевича сразу после определения касательной к графику функции в точке выводится уравнение касательной к графику функции. Уравнение касательной к произвольной кривой в учебнике А.Г. Мордковича выводится несколько позже в другом параграфе, описывается более подробно. Вывод уравнения касательной авторами А.Г. Мордковичем, М.Я. Пратусевичем осуществлялся однотипно. С той лишь разницей, что А.Г. Мордковичу необходимо было дополнительно ввести понятие касательной к графику функции (а не к произвольной кривой), в то время как М.Я. Пратусевич эти понятия не разделял. Соответственно, сам непосредственно вывод уравнения касательной от подходов к определению касательной не зависит. Разница в подходах отражается на количестве материала, который необходимо изложить перед выводом данного уравнения. Вывод уравнения касательной не зависит от определения касательной в разных учебниках. Везде используется геометрический смысл производной и уравнение прямой.

Анализ задачного материала. Во всех рассматриваемых учебниках можно выделить типы задач по теме:

- на составление уравнения касательной к графику функции в точке, принадлежащей графику;
- на проведение касательной параллельно заданной прямой;
- на касательную, связанные с ее угловым коэффициентом;
- на нахождение касательной, проходящей через точку, внешнюю по отношению к заданному графику;
- нестандартные задачи, связанные с касательной.

Основным учебником алгебры и начал математического анализа для математического профиля выбран учебник А.Г. Мордковича [30].

Рассматриваемая в данном проекте тема относится к главе «Производная». На тему «Касательная к графику функции» по программе

А.Г. Мордковича отводится 6 часов, где в теме «Определение производной» (3 часа) перед введением понятия производной рассматривается ее геометрический смысл на задаче о касательной к графику функции, далее - определение касательной к произвольной кривой; в теме «Уравнение касательной к графику функции» (3 часа) выводится само уравнение касательной к графику функции после пункта о правилах вычисления производных.

В авторской программе [37] отмечается, что в результате изучения темы учащиеся должны: уметь решать задачи с применением уравнения касательной к графику функции.

Таким образом, выбор учебника А.Г. Мордковича [30] обоснован следующими причинами:

– учебник входит в федеральный перечень учебников, допущенных Министерством Просвещения Российской Федерации, к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ среднего общего образования образовательных учреждений;

– в данном учебнике представлены основные типы задач на понятие касательной к графику функции: на составление уравнение касательной к графику функции в точке, принадлежащей графику; на проведение касательной параллельно заданной прямой; на касательную, связанные с ее угловым коэффициентом; нахождение касательной, проходящей через точку внешнюю по отношению к заданному графику; нестандартные задачи, связанные с касательной;

– геометрический смысл производной и касательная к графику функции являются обязательными элементами содержания федерального компонента государственного образовательного стандарта в примерной основной образовательной программе среднего общего образования для всех уровней обучения;

– в учебнике наиболее полно раскрыто теоретическое и практическое содержание темы «Касательная к графику функции».

Опишем проектирование изучения темы «Касательная к графику функции» на уроках математики в старших классах в рамках выбранной технологии обучения алгоритмам при проведении лабораторно-практических работ. Как было отмечено, на тему «Касательная к графику функции» по программе А.Г. Мордковича отводится 6 часов, где в теме «Определение производной» (3 часа) перед введением понятия производной рассматривается ее геометрический смысл на задаче о касательной к графику функции, далее - определение касательной к произвольной кривой; в теме «Уравнение касательной к графику функции» (3 часа) выводится само уравнение касательной к графику функции после пункта о правилах вычисления производных.

Спроектируем изучение темы «Уравнение касательной к графику функции» в рамках технологии обучения алгоритмам Е.И. Лященко [22] на 3 часа:

Отметим, что изучение темы проекта в соответствии с технологией обучения алгоритмам спланировано следующим образом:

– на 1-м уроке рассматриваются типы задач на: обоснование необходимости рассмотрения алгоритма; актуализацию знаний, необходимых для обоснования алгоритма, и умений, необходимых для его выполнения; выполнение отдельных операций, входящих в алгоритм;

– на 2-м уроке рассматриваются типы задач на: применение алгоритмов в различных ситуациях (знакомых и незнакомых);

– на 3-м уроке проводится итоговый контроль в форме самостоятельной работы.

Урок 1. Тип урока: урок изучения нового материала.

Цель урока: вывести уравнение касательной к графику функции; сформулировать алгоритм составления уравнения касательной к графику функции; рассмотреть примеры задач на составление уравнения касательной к графику функции.

Этап 1. Введения алгоритма составления уравнения касательной к графику функции.

На основе заданий №1-2, приведенных ниже с учащимися может быть проведена на уроке лабораторно-практическая работа № 1.

Цель работы: обоснование необходимости введения алгоритма составления касательной к графику функции.

Способ организации: фронтальная работа (10 минут).

План работы:

а) выполнение заданий №1-2 работы обучающимися совместно с учителем и классом;

б) подведение итогов.

Приведем ниже текст заданий работы и их решение.

Задачи на обоснование необходимости рассмотрения алгоритма

Задача 1. «Строится мост параболической формы, соединяющий пункты А и В, расстояние между которыми равно 200 м (рисунок 5). Въезд на мост и съезд с моста должны быть прямолинейными участками пути, эти участки направлены к горизонту под углом 15^0. Указанные прямые должны быть касательными к параболе. Составьте уравнение профиля моста в заданной системе координат» [31].

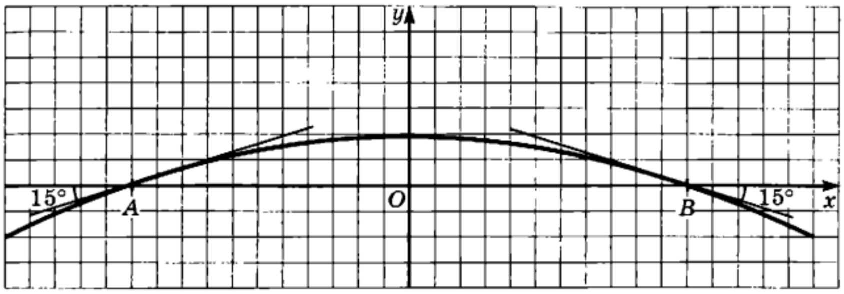


Рисунок 5 – К задаче 1

Решение. Точки А и В равноудалены от начала координат и длина моста составляет 200 м, значит координаты этих точек равны: А(-100; 0) и В (100; 0).

Уравнение профиля моста (параболы) имеет вид: $y = ax^2 + c$.

$$f'(x) = (ax^2 + c)' = 2ax.$$

Известно, что тангенс угла наклона касательной к функции равен производной от функции в данной точке, то есть в точке А:

$$f'(-100) = 2ax = \text{tg}\,15^0.$$

Получим: $2a \cdot (-100) = \text{tg}\,15^0$; $-200 = \text{tg}\,15^0$; $a = -\frac{\text{tg}\,15^0}{200}$.

Найдем значение функции в точке В: $y = ax^2 + c$. Тогда:

$0 = a \cdot 100^2 + c$; $0 = 10000a + c$;   значит: $c = -10000a$.

Получим: $c = -10000a = -10000 \cdot \left(-\frac{\text{tg}\,15^0}{200}\right) = 50 \cdot \text{tg}\,15^0$.

Искомое уравнение будет иметь вид:

$$y = -\frac{\text{tg}\,15^0}{200} + 50 \cdot \text{tg}\,15^0 = \text{tg}\,15^0 \cdot \left(50 - \frac{x^2}{200}\right).$$

Ответ: $y = \text{tg}\,15^0 \cdot \left(50 - \frac{x^2}{200}\right)$.

Задача 2. Составьте уравнение касательной к графику функции $y = 3x^2 + 9x + 3$ с абсциссой в точке $x_0 = -3$ (решение задания основано без использования алгоритма).

Решение. Уравнение касательной, как уравнение любой прямой имеет вид: $y = kx + b$. Найдем сначала угловой коэффициент касательной: $f'(x) = 6x + +9, f'(-3) = -9$. Значит, $k = -9$. Тогда уравнение касательной будем искать в виде: $y = -9x + b$. Найдем b. Для этого воспользуемся тем, что касательная проходит через точку на параболе $y = 3x^2 + 9x + 3$ с абсциссой $x = -3$, то есть через точку (- 3; 3). Имеем: $3 = -9 \cdot (-3) + b$. Значит: $b = -24$. Ответ: $y = -9x - 24$.

2. Задачи на актуализацию знаний, необходимых для обоснования алгоритма, и умений, необходимых для его выполнения.

На основе заданий №3-8, приведенных ниже с учащимися может быть проведена на уроке лабораторно-практическая работа № 2.

Цель работы: повторить материал, необходимый для введения алгоритма составления касательной к графику функции (нахождение значения функции в точке; производной функции; значения производной функции в точке; понятие углового коэффициента касательной; понятие линейной функции).

Способ организации: самостоятельная работа (10 минут).

План работы:

а) самостоятельное решение заданий №3-8 учащимися;

б) подведение итогов.

Приведем ниже текст заданий работы и их решение.

Задача 3. Найдите значение функции $y = \frac{1}{3}x^3 - 4x + 1$ в точке $x_0 = 3$.

Решение: $x_0 = 3$, тогда $f(x_0) = \frac{1}{3}(3)^3 - 4 \cdot 3 + 1 = 9 - 12 + 1 = -2$.

Ответ: $f(x_0) = -2$.

Задача 4. «Найдите производную функции: $f(x) = x^3 - 3x + 2$» [31].

Решение: $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x-1)(x+1)$.

Ответ: $f'(x) = 3x^2 - 3$.

Задача 5. «Дана функция $f(x) = x^3 - 3x + 2$. Найдите значение производной заданной функции в точке $x_0 = -1$» [31].

Решение: $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x-1)(x+1)$.

$f'(x_0) = f'(-1) = 3(-1-1)(-1+1) = 0$. Ответ: 0.

Задача 6. Заполните пропуски: «Угловой коэффициент касательной к графику функции $f(x) = x^2 + 5x - 6$ в точке $x = -1$ равен ……».

Решение: угловой коэффициент касательной равен тангенсу угла наклона и равен производной в точке: $k = f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha$.

$f'(x) = 2x + 5$. Тогда $f'(-1) = 2 \cdot (-1) + 5 = 3$.

Ответ: угловой коэффициент касательной равен 3.

Задача 7. Заполните пропуски: «Уравнение касательной к графику функции в заданной точке – это уравнение, как уравнение _____, непараллельной оси ординат, имеет вид ________».

Ответ: любой прямой; $y = kx + b$.

Задача 8. Запишите уравнение прямой в виде $y = kx + b$, если: $y = -\frac{2(x-3)}{5} + 15$. Ответ: $y = -\frac{2}{5}x + \frac{81}{5}$.

Этап 2. Усвоения данного алгоритма.

Приведем в таблице 2 алгоритм составления уравнения касательной к графику функции по учебнику А.Г. Мордковича [30].

Таблица 2 - Алгоритм действий для нахождения уравнения касательной

Алгоритм	Пример: $f(x) = x^2 - 2x + 3$, $x_0 = 3$
«1. Вычислим $f(x_0)$	$f(x_0) = f(3) = 3^2 - 2 \cdot 3 + 3 = 6$
2. Найдем формулу производной функции $f'(x)$	$f'(x) = (x^2 - 2x + 3)' = 2x - 2$
3. Вычислим $f'(x_0)$	$f'(x_0) = f'(3) = 2 \cdot 3 - 2 = 4$
4. Подставим $x0$, $f(x_0)$ и $f'(x_0)$ в формулу уравнения касательной $y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$» [30].	$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0) = 4(x - 3) + 6 =$ $= 4x - 12 + 6 = 4x - 6$.

Напомним, что уравнение касательной к графику функции $f(x)$ в точке x_0 имеет вид: $y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$.

Задания на выполнение отдельных операций, входящих в алгоритм

На основе заданий №9-13, приведенных ниже с учащимися может быть проведена на уроке лабораторно-практическая работа № 3.

Цель работы: первичное закрепление отдельных операций, входящих в алгоритм составления касательной к графику функции.

Способ организации: фронтальная работа (20 минут).

План работы:

а) выполнение заданий №9-13 работы обучающимися совместно с учителем и классом;

б) подведение итогов.

Приведем ниже текст заданий работы и их решение.

Задача 9. «Найдите тангенс угла наклона касательной, проведенной к графику функции $y = \frac{1}{3}x^3 - 4x + 1$ в точке с абсциссой $x_0 = 3$» [31].

Решение: угловой коэффициент касательной равен тангенсу угла наклона и равен производной в точке. Имеем: $x_0 = 3$ – абсцисса точки касания, $f'(x) = x^2 - 4, \operatorname{tg}\alpha = f'(x_0) = f'(3) = 5$. Ответ: $\operatorname{tg}\alpha = 5$.

Ответ: $\operatorname{tg}\alpha = 5$.

Задача 10. «Определите абсциссы точек, в которых касательная к графику функции y = h (x) образует с положительным направлением оси абсцисс заданный угол $\alpha = 45^0$, h (x) = $x^2 - 3x + 19$» [31].

Решение: $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg} 45^0 = 1$. Так как $\operatorname{tg}\alpha = h'(x_0)$, то:

$h'(x_0) = ({x_0}^2 - 3x_0 + 19)' = 2x_0 - 3$. Тогда $2x_0 - 3 = 1$. Значит $x_0 = 2$.

Ответ: $x_0 = 2$.

Задача 11. «Определите абсциссы точек, в которых угловой коэффициент касательной к графику функции $y = f(x)$ равен k, если: $f(x) = \sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$, $k = -\frac{\sqrt{2}}{4}$» [31].

Решение. Имеем: $f(x) = \sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \cos\frac{x}{2} = \frac{1}{2}\cdot\sin\left(2\cdot\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}\sin x.$

Так как $k = f'(x_0)$, то $k = f'(x_0) = f'\left(\frac{1}{2}\sin x_0\right) = \frac{1}{2}\cos x_0$.

Тогда: $\frac{1}{2}\cos x_0 = -\frac{\sqrt{2}}{4}$. Следовательно: $\cos x_0 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$x_0 = \pm\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2\pi n = \pm\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) + 2\pi n = \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi n, \pi \in Z.$$

Ответ: $x_0 = \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi n, \pi \in Z$.

Задача 12. «Найдите угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой $x = a$, если $f(x) = \sqrt{x-7}$, $a = 8$» [31].

Решение. Найдем производную данной функции: $f'(x) = (x-7)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(x-7) = \frac{1}{2}x - 3{,}5$. Вычисляем значение данной производной при $x = a = 8$. Тогда $k = f'(x) = \frac{1}{2} \cdot 8 - 3{,}5 = \frac{1}{2}$. Ответ: $k = \frac{1}{2}$.

Задача 13. «Из точки (0; 1) провести касательную к графику функции $y = \sqrt{x}$ (точка касания неизвестна).

Решение. (Точка касания неизвестна). «Воспользуемся алгоритмом составления уравнения касательной, учитывая, что в данном примере $f(x) = \sqrt{x}$. Заметим, что и здесь, не указана явно абсцисса точки касания. Тем не менее действуем по алгоритму.

1) $x = a$; $f(a) = \sqrt{a}$; 2) $f'(x) = \left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$; $f'(a) = \frac{1}{2\sqrt{a}}$;

3) подставим найденные значения в формулу уравнения касательной:

$y = \sqrt{a} + \frac{1}{2\sqrt{a}}(x - a)$; $y = \frac{x}{2\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{a}}{2}$. (2)

По условию касательная проходит через точку (0; 1). Подставив в уравнение (2) значения $x = 0$, $y = 1$, получим: $1 = \frac{\sqrt{a}}{2}$; $\sqrt{a} = 2$; $a = 4$.

Подставив значение $a = 4$ в уравнение (2), получим: $y = \frac{x}{4} + 1$.

Ответ: $y = \frac{x}{4} + 1$» [30].

Урок 2. Тип урока: урок закрепления изученного материала.

Цель урока: закрепить умение составления уравнения касательной к графику функции; учить применять понятие касательной к графику функции при решении задач.

Этап 3. Применение рассматриваемого алгоритма, отработки алгоритма в знакомых и незнакомых ситуациях.

Задачи на применение алгоритмов в различных ситуациях

(знакомых и незнакомых)

На основе заданий №14-17, приведенных ниже с учащимися может быть проведена на уроке лабораторно-практическая работа № 4.

Цель работы: закрепление умения по применению алгоритма на составление касательной к графику функции при решении задач.

Способ организации: фронтальная работа (20 минут).

План работы:

а) выполнение заданий №14-17 работы обучающимися совместно с учителем и классом;

б) подведение итогов.

Приведем ниже текст заданий работы и их решение.

Задача 14. «Составьте уравнение касательной к графику функции $y = \frac{1}{3}x^3 - 4x + 1$ в точке с абсциссой $x_0 = 3$» [31].

Решение: $x_0 = 3$ – абсцисса точки касания, $f(x_0) = -2$, $f'(x) = x^2 - 4, f'(3) = 5$.

Подставив в уравнение касательной значения $x = 3$, $f(x_0) = -2$, f'(x) = 5, получим $y = -2 + 5(x - 3)$, то есть $y = 5x - 17$. Это и есть искомое уравнение касательной.

Ответ: $y = 5x - 17$.

Задача 15. «В каких точках касательные к кривой $y = \frac{x^3}{3} - x^2 - x + 1$ параллельны прямой $y = 2x - 1$?» [31] (точки касания неизвестны).

Решение. Так как касательные параллельны прямой $y = 2x - 1$,то их угловые коэффициенты совпадают, т.е. угловой коэффициент касательной в этой точке есть $к = 2$. Находим $y' = x^2 - 2x - 1$; $k = y'(x_0) = x_0^2 - 2x_0 - - 1 = 2$.

Решив уравнение $x_0^2 - 2x_0 - 1 = 2$; $x_0^2 - 2x_0 - 3 = 2$ получим:

$(x_0)_1 = 3$; $(x_0)_2 = -1$, откуда $(y_0)_1 = -2$; $(y_0)_2 = \frac{2}{3}$.

Итак, искомыми точками касания являются A(3; -2) и B(-1;$\frac{2}{3}$).

Ответ: (3; -2) и (-1; $\frac{2}{3}$).

Задача 16. «Проведите касательную к графику функции $f(x) = x^2 + 1$, проходящую через точку A(-1; -2), не принадлежащую этому графику» [31].

Решение. Найдем $f'(x) = 2x$. Обозначим абсциссу точки касания буквой a, тогда $y(a) = a^2 + 1$ и $y'(a) = 2a$. Составим уравнение касательной: $y = a^2 + 1 + 2a(x - a) = a^2 + 1 + 2xa - 2a^2 = 1 + 2xa - a^2$.

Получили уравнение касательной: $y = 1 + 2xa - a^2$.

Так как касательная проходит через точку $A(-1; -2)$, получим: $-2 = 1 + 2a(-1) - a^2; -2 = 1 - 2a - a^2;\ a^2 + 2a - 3 = 0;$

$D = 2^2 + 4 \cdot 3 = 16;\ \ a_1 = \frac{-2-4}{2} = -3$ и $a_2 = \frac{-2+4}{2} = 1$.

Получим уравнения касательных:

$y_1 = 1 + 2 \cdot (-3)x - (-3)^2 = 1 - 6x - 9 = -6x - 8;$

$y_2 = 1 + 2 \cdot 1 \cdot x - 1^2 = 2x;$

Ответ: $y = -6x - 8$ и $y = 2x$.

Задача 17. «Напишите уравнение касательной к графику функции $f(x) = 0{,}5x^2 - 3x + 1$, проходящей под углом 45^0 к прямой $y = 0$» [31].

Решение: $f'(x_0) = x - 3$. Из условия $f'(x_0) = \operatorname{tg} 45^0$ найдем x_0:

x_0-3 = 1, x_0 = 4; x_0 – абсцисса точки касания, тогда:

$f(4) = 8 - 12 + 1 = -3;\quad f'(4) = 4 - 3 = 1;$

$y = -3 + 1(x - 4);\qquad y = x - 7.$

Ответ: $y = x - 7$.

Вместе с этим, на основе заданий №18-19, приведенных ниже с учащимися может быть проведена на уроке лабораторно-практическая работа № 5.

Цель работы: закрепление умения по применению алгоритма на составление касательной к графику функции в незнакомых ситуациях при решении задач.

Способ организации: самостоятельная работа (15 минут).

План работы:

а) самостоятельное решение заданий №18-19 учащимися;

б) подведение итогов.

Приведем ниже текст заданий работы и их решение.

Задача 18. «Найдите точку пересечения касательных к графику функции $y = x^3 + |x - 1|$, проведенных через точки с абсциссами $x = 5$, $x = -5$» [31].

Решение: $y = \begin{cases} x^3 + x - 1, & \text{если } x \geq 1; \\ x^3 - x + 1, & \text{если } x < 1. \end{cases}$

а) $y'(x < 1) = (x^3)' - (x - 1)' = 3x^2 - 1;$

$$y(x_1) = (-5)^3 - (-5) + 1 = -119;$$

$$y'(x_1) = 3(-5)^2 - 1 = 74;$$

$$y = -119 + 74(x + 5) = 74x + 251.$$

б) $y'(x \geq 1) = (x^3)' + (x - 1)' = 3x^2 + 1;$

$$y(x_2) = 5^3 + 5 - 1 = 129;$$

$$y'(x_2) = 3 \cdot 5^2 + 1 = 76;$$

$$y = 129 + 76(x - 5) = -251 + 76x.$$

Точка пересечения касательных: $74x + 251 = -251 + 76x$, $\quad 2x = 502;$ $x = 251;\ \ y = 18825.$

Ответ: (251; 18825).

Задача 19. «Напишите уравнения касательных, проведенных к графику функции $y = 2x^2 - 4x + 3$ в точках пересечения графика с прямой $y = x + 3$» [31].

Решение. Найдем точки пересечения параболы и прямой:

$$2x^2 - 4x + 3 = x + 3; \quad 2x^2 - 4x - x + 3 - 3 = 0;$$

$$2x^2 - 5x = 0;\ \ x(2x - 5) = 0;$$

$$x_1 = 0,\ y_1 = 3;\ x_2 = \frac{5}{2},\ y_2 = \frac{11}{2}.$$

Найдем производную: $f'(x) = 4x - 4 = 4(x - 1)$.

Уравнение касательной $y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$.

$y_1 = 3 + (-4 \cdot x) = 3 - 4x$.

$$y_2 = \frac{11}{2} + 4\left(\frac{5}{2} - \frac{2}{2}\right)\left(x - \frac{5}{2}\right) = \frac{11}{2} + 6\left(x - \frac{5}{2}\right) = \frac{11}{2} + 6x - 15 = 6x - \frac{19}{2}.$$

Ответ: $y = 3 - 4x;\ y = 6x - \frac{19}{2}$.

Кроме того, задачи 3-его этапа (на применение алгоритмов в незнакомых ситуациях) содержат элементы исследования, способствуют осознанию учащимися процесса их решения, тем самым направлены на формирование осознанности знаний школьников.

Отметим, что в конце изучения темы в рамках технологии обучения алгоритмам на 3-ом уроке целесообразно провести итоговый контроль.

Учащимся будет предложена самостоятельная работа из 5 заданий.

Задание №1 – на составление уравнения касательной к графику функции в точке, принадлежащей графику; задание №2 - на проведение касательной параллельно заданной прямой, задание №3 - на касательную, связанные с ее угловым коэффициентом, задание №4 - на нахождение касательной проходящей через точку, внешнюю по отношению к заданному графику, задание №5 - нестандартная задача, связанная с касательной.

Критерии оценивания заданий: за задание №1 – 1 балл; за задание №2 – 2 балла; за задание №3 – 1 балл; за задание №4 – 3 балла; за задание №5 – 3 балла.

Отметка «5» ставится за 9-10 баллов; отметка «4» - за 7-8 баллов; отметка «3» - за 5-6 баллов; отметка «2» - за 0-4 балла.

Ниже представлен примерный вариант самостоятельной работы с решением.

Примерный вариант самостоятельной работы

по теме «Касательная к графику функции»

Задание №1. «Составьте уравнение касательной к графику функции $y = \frac{1}{3}x^3 - 4x + 1$ в точке с абсциссой $x_0 = 3$» [38].

Решение: «$x_0 = 3$ – абсцисса точки касания, $f(x_0) = -2$, $f'(x) = x^2 - 4, f'(3) = 5$

Подставив в уравнение касательной значения $x = 3$, $f(x_0) = -2$, $f'(x) = 5$, получим $y = -2 + 5(x - 3)$, то есть $y = 5x - 17$. Это и есть искомое уравнение касательной.

Ответ: $y = 5x - 17$» [38].

Задание №2. «Найти абсциссу точки, в которой касательная к графику функции $f(x) = 2x - \ln x$, параллельная прямой $y = x$» [38].

Решение. «Пусть x_0 – абсцисса точки касания. Угловой коэффициент касательной в этой точке есть $к = 1$. Находим $f'(x) = 2 - \frac{1}{x}$. Тогда $к = f'(x_0) = 2 - \frac{1}{x_0} = 1$. Решив уравнение $2 - \frac{1}{x_0} = 1$, получим $x_0 = 1$.

Ответ: 1» [38].

Задание №3. «К графику функции $f(x) = 3x^2 + 5x - 15$ в точке с абсциссой $x_0 = \frac{1}{6}$ проведена касательная. Найти тангенс угла наклона касательной к оси $0x$» [38].

Решение: «$f'(x_0)$ является угловым коэффициентом касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0. Угловой коэффициент прямой равен тангенсу угла, образованного этой прямой с положительным направлением оси $0x$. Тогда $к = f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha$, где x_0- абсцисса точки касания, а α – угол наклона касательной к оси $0x$. Имеем: $f'(x_0) = f'\left(\frac{1}{6}\right) = 6; \operatorname{tg} \alpha = 6$.

Ответ: 6» [38].

Задание №4. «Составить уравнения касательных к кривой $y = x^2 - 4x +$ $+ 3$, проходящих через точку M (2; - 5)» [38].

Решение. «При $x = 2$ находим $y = 4 - 8 + 3 = -1 \neq 5$, то есть точка M не лежит на кривой $y = x^2 - 4x + 3$, и не является точкой касания.

Пусть $(x_0; y_0)$ – точка касания. Тогда $y' = 2x - 4, k = 2x_0 - 4$.

Составим уравнение касательной, проходящей через точку M:

$$y_0 = -5 - (2x_0 - 4)(2 - x_0).$$

Поскольку точка $(x_0; y_0)$ лежит на кривой, получим: $y_0 = x_0^2 - 4x_0 + 3$. Решим уравнение:

$$x_0^2 - 4x_0 + 3 = -5 - (2x_0 - 4)(2 - x_0);$$

$$x_0^2 - 4x_0 + 3 = 2x_0^2 - 8x_0 + 3;$$

$$x_0^2 - 4x_0 = 0;$$

$$(x_0)_1 = 0;$$

$$(x_0)_2 = 4.$$

Таким образом, получили две точки касания A(0; 3) и B(4; 3). Итак, существуют две касательные к кривой. Одна из них имеет угловой коэффициент $k_1 = -4$ (при $x_0 = 0$) и уравнение $y = -4x + 3$, а другая – угловой коэффициент $k_2 = 4$ (при $x_0 = 4$) и уравнение $y = 4x - 13$.

Ответ: $y = -4x + 3$ и $y = 4x - 13$» [38].

Задание №5. «Напишите уравнения всех общих касательных к графикам функций $y = x^2 + x + 1$ и $y = 0{,}5(x^2 + 3)$» [31].

Решение.

Пусть a – абсцисса точки касания графика функции $y = x^2 + x + 1$.

Найдем f(a): $f(a) = a^2 + a + 1$.

Найдем производную функции и вычислим значение производной в этой точке: $f'(x) = 2x + 1$; $f'(a) = 2a + 1$.

Уравнение касательной к графику функции $y = x^2 + x + 1$ примет вид:

$y = a^2 + a + 1 + (2a + 1)(x - a), \Rightarrow y = (2a + 1)x - a^2 + 1.$

Пусть c – абсцисса точки касания графика функции $y = 0{,}5(x^2 + 3)$.

Найдем f(c): $f(c) = 0{,}5c^2 + 1{,}5$.

Найдем производную функции и вычислим значение производной в этой точке: $f'(x) = x$; $f'(c) = c$.

Уравнение касательной к графику функции $y = 0{,}5(x^2 + 3)$ примет вид:

$y = 0{,}5c^2 + 1{,}5 + c(x - c), \Rightarrow y = cx - 0{,}5c^2 + 1{,}5.$

Так как касательная общая, то $\begin{cases} 2a+1=c, \\ -a^2+1=-0{,}5c^2+1{,}5 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} c=1, \\ a=0. \end{cases} \\ \begin{cases} c=-3, \\ a=-2. \end{cases} \end{array}\right.$

Имеем: $y=x+1$ и $y=-3x-3$ – общие касательные.

Ответ: $y=x+1$ и $y=-3x-3$.

В таблице 3 к примерному варианту самостоятельной работы приведены ответы к ее заданиям.

Таблица 3 - Ответы к заданиям самостоятельной работы

Задание №1	Задание №2	Задание №3	Задание№4	Задание№5
$y=5x-17$	1	6	$y=-4x+3$; $y=4x-13$	$y=x+1$; $y=-3x-3$.

На основании вышесказанного, можно сказать, что использование алгоритмов на уроках математики способствует формированию осознанных знаний учащихся, осмысленному изучению ими учебного материала.

2.2 Элективный курс по математике «Лабораторный практикум для 10-11 классов по алгебре и началам математического анализа и геометрии»

Программа элективного курса «Лабораторный практикум для 10-11 классов по алгебре и началам математического анализа» предназначена для старшеклассников общеобразовательного и математического профилей. Она направлена на формирование и углубление умений и способов деятельности, которые удовлетворяют познавательным интересам учащихся к математике, а также на усвоение указанных тем, для этого большое внимание уделяется выполнению практических заданий и исследовательской деятельности. Для её реализации достаточно знаний и умений по математике, полученных в основной школе.

Новизна программы состоит в том, что она направлена на расширение и углубление математических знаний, путем систематизации изучаемого материала и рассмотрения его в других разделах математики. Содержание материала, представленного в программе, ранее нигде в курсе математики средней школы не изучалось.

Актуальность предлагаемой программы определяется следующими соображениями:

- учащиеся получают возможность дополнительного практикума для углубления изучения и закрепления знаний по математике, что послужит хорошей мотивацией для развития математической компетенции;
- возможность дополнительной подготовки для успешной сдачи государственной итоговой аттестации;
- реализации программы, основанной на практико-ориентированном подходе и организации проектной деятельности каждого обучающегося.

Педагогическая целесообразность предлагаемой программы объясняется следующими мотивами:

- упорядоченного усвоения материала, основанного на выполнении лабораторных работ, связанных с построением графиков функции, касательной в точке и т.д.;
- овладение конкретными математическими знаниями и умениями для практического применения, изучения смежных предметов, продолжения образования и профориентации.

Цель и задачи программы элективного курса:

- формирование у учащихся знаний и умений, необходимых для практической учебной деятельности;
- ознакомление обучающихся с методами и приемами выполнения заданий, выходящих за рамки школьного учебника по математике;
- отработка с обучающимися навыков решения задач профильного уровня;

– развитие мыслительных, творческих способностей учащихся, логического мышления, пространственного воображения;

– знакомство учащихся с историей развития понятия показательной функции, производной и показ ее роли и т.д.;

– формирование способности к развитию мыслительных и творческих способностей, коммуникации и сотрудничества, самостоятельному поиску информации и приобретению знаний посредством выполнения учебных проектов;

– воспитание отношения к математике как значимого элемента развития научно-технического прогресса.

Отличительные особенности данного элективного курса: программа элективного курса направлена на развитие математической компетентности: использование математических символов и терминов, создание математических моделей; анализ, систематизацию и обобщение информации и применять полученные знания и умения на практике.

Программа элективного курса рассчитана на 17 часов (1 час в неделю) в рамках углубленного изучения или профильной подготовки 10-11 классов.

Форма занятия: лабораторный практикум, защита проектов.

Ожидаемые результаты и способы определения их результативности

В результате изучения программы данного элективного курса учащиеся должны:

– правильно употреблять новые термины, связанные с основными понятиями показательной функции, касательной в точке, производной, углового коэффициента и др.;

– знать основные (простейшие) свойства касательной к графику функции;

– изучить краткую историю и вклад ученых в создание уравнения касательной;

– уметь определять значение производной в точке касания (угловой коэффициент касательной);

- уметь исследовать функцию;
- уметь составлять уравнение касательной к графику функции по заданным условиям;
- овладеть навыками конструирования из бумаги стереометрических фигур, решать задачи на нахождение площади боковой поверхности и объема конусов, определять сечение при пересечении конуса плоскостью.

Основными формами проведения итогов реализации данной образовательной программы являются следующие: проведение уроков-практикумов и защита проектов по выбранным учащимися темам.

Данная программа может быть использована, как в общеобразовательных, так и в классах с естественно-научным углубленным или профильным изучением математики. В таблице 4 приведем учебно-тематическое планирование данного элективного курса.

Таблица 4 - Учебно–тематическое планирование программы

Содержание темы	Кол-во часов	Вид занятий
Вводное занятие. Выбор и распределение тем проектов.	1	Урок систематизации базовых знаний
Лабораторная работа «Уравнение касательной».	4	Урок-практикум
Лабораторная работа «Графические методы решений уравнений касательной к функции».	3	Урок-практикум
Лабораторная работа «Построение графика функции и ее касательной в точке с использованием программы GeoGebra».	2	Урок-практикум с использованием программы
Лабораторная работа по теме «Конус».	3	Урок-практикум
Практическая работа «Построение сечений многогранников».	2	Урок-практикум
Защита проектов: «История появления касательной», «Способы построения сечений многогранников», «Применение конических сечений», «От касательной к…», «Производная в математике и физике».	2	Учебно-исследовательская конференция
Итого	17	

Опишем содержание элективного курса.

Тема 1. Вводное занятие. Определение с темами проектов (1 ч).

Основная цель - повторить и обобщить ранее изученный материал по теме уравнение касательной к графику функции.

При изучении данной темы учащиеся должны уметь формулировать определение касательной, выделить основные свойства, составлять алгоритм нахождения уравнения касательной; ознакомиться с требованиями по оформлению проектов.

Тема 2. Лабораторная работа «Уравнение касательной» (4 ч).

Основная цель - закрепить навыки решения задач на нахождение уравнения касательной к графику функции.

В данной теме рассматриваются пять основных видов задач на нахождение касательной к графику функции. Учащиеся овладевают навыками составления уравнения касательной к графику функции в точке, принадлежащей графику; проведения касательной параллельно заданной прямой; решают задачи на касательную, связанные с ее угловым коэффициентом; нахождения касательной проходящей через точку, внешнюю по отношению к заданному графику; решают нестандартные задачи, связанные с касательной; учатся находить угловой коэффициент, формулировать геометрический смысл производной функции.

Тема 3. Лабораторная работа «Графические методы решений уравнений касательной к графику функции» (3 ч).

Основная цель - закрепить знания и умения решать уравнения касательной с параметром, находить производную.

На лабораторных занятиях учащиеся отрабатывают навыки решения уравнения касательной с параметром, которые встречаются в заданиях ЕГЭ. Учатся анализировать, использовать элементы исследования по применению производных в уравнениях касательной.

Тема 4. Лабораторная работа «Построение графика функции и ее касательной в точке, используя программу Geogebra» (2 ч).

Основная цель - ознакомиться с программой GeoGebra. Овладеть навыками использования данной программы для построения касательной к графику функции.

В данной теме изучаются возможности программы GeoGebra при построении графиков двумя способами: геометрическим (с помощью инструментов и команд) и алгебраическим (путем ввода формулы в командную строку). Использование данной программы позволит обучающимся изучить и увидеть на практике свойства функции, проанализировать изменения в зависимости от коэффициентов.

Тема 5. Лабораторная работа «Конус» (3 ч).

Основная цель – закрепить знания по нахождению площади полной и боковой поверхности конуса, образующей и объема фигуры.

Данная лабораторная работа предусматривает обучение по изготовлению развёртки конуса, для формирования знаний о компонентах фигур вращения, образности мышления. Закрепляются знания и умения вычисления площади полной и боковой поверхности конуса и его усеченной формы; нахождения образующей, радиуса и высоты фигуры по заданным значениям; объема.

Тема 6. Практическая работа «Построение сечений многогранников» (2 ч).

Основная цель - закрепить навыки построения сечений многогранников.

При выполнении данной практической работы отрабатываются навыки построения, учащиеся составляют алгоритм построения сечения к многограннику по заданным значениям, решают задачи на нахождение площади сечения многогранников.

Тема 7. Защита проектов (2 ч).

Основная цель - подведение итогов изучения элективного курса.

На занятии демонстрируются результаты исследовательской деятельности учащихся, в которых раскрываются проблемы проекта, иллюстрируется ход поиска решения, проводится самоанализ его результативности. Для защиты проекта как вида самостоятельной исследовательской деятельности учащиеся предварительно подготавливаются презентации.

Представим содержание занятий и методические рекомендации по их проведению.

Занятие 1. «Вводное занятие. Определение с темами проектов».

План:

а) ознакомление учащихся с содержанием, структурой, целями и задачами элективного курса;

б) повторение и систематизация основных знаний учащихся;

в) распределение тем проектных заданий. ознакомление с требованиями к оформлению работ.

Раскроем содержание занятия.

Ознакомление учащихся с содержанием, структурой, целями и задачами элективного курса

На вводном занятии учитель знакомит с основными целями и задачами элективного курса, содержанием и структурой занятий. Рассказывает о практическим значении изучения курса. Объясняет выполнение итоговых работ, определяет темы проектов для выполнения индивидуально или в группах. Прохождение элективного курса поможет обучающимся закрепить знания по уравнению касательной, которая является одной из сложных тем, так как на ее изучение по школьной программе уделяется мало учебных часов. Поспособствует не только подготовке к успешной сдаче Единого государственного экзамена, но и расширению пространственного воображения, освоению программы для построения графиков функций, осознанному выбору будущей профессии.

Повторение и систематизация основных знаний учащихся

Сформулировать определение касательной, выделить основные свойства, составить алгоритм нахождения уравнения касательной.

Определение: касательная – это прямая, проходящая через точку кривой и совпадающая с ней в этой точке с точностью до первого порядка.

Углом наклона прямой $y = kx + b$ называют угол α, отсчитываемый от положительного направления оси абсцисс до прямой $y = kx + b$ в положительном направлении (против часовой стрелки).

Угловым коэффициентом прямой $y = kx + b$ называют числовой коэффициент k. Угловой коэффициент прямой равен тангенсу угла наклона прямой $k = tg\,\alpha$. Угол наклона прямой равен нулю, когда прямая параллельная оси абсцисс. В этом случае нулю равен и угловой коэффициент, так как тангенс нуля есть нуль. От сюда следует, что уравнение прямой имеет вид $y = b$. Если угол наклона является острым $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ($0^0 < \alpha < 90^0$), то угловой коэффициент k является положительным числом (т.к. $tg > \alpha$) и указывает на возрастание графика прямой. Если прямая перпендикулярна оси абсцисс и задается как $y = d$, где d – любое действительное число. Если угол наклона прямой $y = kx + b$ тупой, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ ($90^0 < \alpha < 180^0$), то коэффициент k является отрицательным и указывает на убывание графика прямой (рисунок 6). Так, $f'(x_0) = k = tg\alpha > 0$.

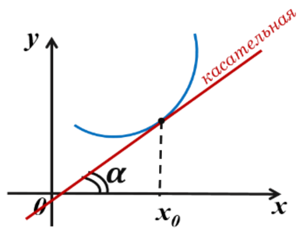


Рисунок 6 - Острый угол наклона касательной

Алгоритм составления уравнения касательной к графику функции:

а) записать уравнение касательной к графику функции y=f(x) (рисунок 7) в точке с абсциссой x_0 в общем виде;

б) найти производную функции у $=f(x)$;

в) вычислить значение производной $y_0 = f'(x_0)$;

г) вычислить значение функции в точке x_0 $y_0 = f'(x_0)$;

д) подставить найденные значения в уравнение касательной $y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$.

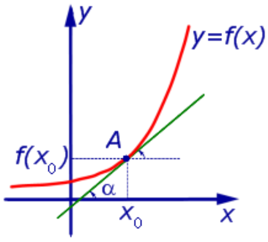


Рисунок 7 - График функции $y = f(x)$

Распределение тем проектных заданий

Для проведение итогового занятия необходимо распределить темы проектов для индивидуальной работы или работы группами. Предлагаемые темы для проектов: «История появления касательной», «Способы построения сечений многогранников», «Применение конических сечений», «История появления касательной», «Способы построения сечений многогранников», «Применение конических сечений», «Производная в математике и физике».

В таблице 5 приведены требования к оформлению проекта.

Таблица 5 - Правила оформления проекта

Структура проекта	Требования к содержанию проекта
Титульный лист	Наименование ОУ, предмет, название, ФИО учащегося(ихся), выполнивших работу
Содержание	Наименование глав или пунктов с указанием страниц
Введение	обосновать актуальность темы, сформулировать цели и задачи, для их достижения (1-2 страницы)
Основная часть	Состоит из глав (разделов), в которых изложен материал проекта (исследовательской работы). Может содержать теоретическую и практическую части. Объем 10-15 страниц.
Заключение	Сформулировать основные выводы по работе, описать достигнуты и цели (1-2 страницы)
Список литературы	
Приложения	

Работа выполняется на бумаге формата А4, шрифт Times New Roman, 14 кегль, нумерация страниц - нижний правый угол.

Опишем проведение занятий 2-5. Лабораторная работа «Уравнение касательной» (4 ч).

План:

а) рассмотрение решения основных типов задач уравнения касательной к графику функции;

б) выполнение тестовых заданий.

Раскроем содержание занятий. Выделены основные типы задач по теме «Уравнение касательной»: задачи на составление уравнения касательной к графику функции в точке, принадлежащей графику; проведение касательной параллельно заданной прямой; задачи на касательную, связанные с ее угловым коэффициентом; нахождение касательной проходящей через точку, внешнюю по отношению к заданному графику; нестандартные задачи, связанные с касательной.

Выполнение заданий осуществляется по алгоритму, используя уравнение касательной $y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$.

Бланк выполнения лабораторно-практической работы №1

для учащихся старших классов:

Лабораторно-практическая работа по теме «Графические методы решений уравнения касательной к функции» обучающегося ____ класса.

Ф.И.: ___________________

Цель работы: закрепление умений и навыков по применению понятия «касательная к графику функции».

План работы:

а) решить задачи с развернутым ответом;

б) выполнить тестовые задания, заполнить таблицу.

Оборудование: не требуется.

Тип задач - на составление уравнение касательной к графику функции в точке, принадлежащей графику:

Задание 1. «Составьте уравнение касательной к графику функции $y = \frac{1}{3}x^3 - 4x + 1$ в точке с абсциссой $x_0 = 3$.

Решение: $x_0 = 3$ – абсцисса точки касания, $f(x_0) = -2$, $f'(x) = x^2 - 4, f'(3) = 5$.

Подставив в уравнение касательной значения $x = 3$, $f(x_0) = -2$, $f'(x) = 5$, получим $y = -2 + 5(x - 3)$, то есть $y = 5x - 17$. Это и есть искомое уравнение касательной.

Ответ: $y = 5x - 17$» [38].

Тест. Найти уравнение касательной к графику функции $f(x)$ в точке с абсциссой x. Обозначьте правильный вариант (таблица 6).

Таблица 6 - Задания теста по вариантам

Уравнение	Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3	Вариант 4
$f(x) = -x^2 - 4x + {}$ $+2, x_0 = -1$	$y = -2x - 3$	$y = 2x - 1$	$y = -2x + 3$	$y = 2x + 3$
$f(x) = -x^2 + 6x + {}$ $+ 8, x_0 = -2$	$y = 2x - 6$	$y = 10x + 12$	$y = 4x + 9$	$y = -10x + 8$
$f(x) = x^3 + 5x + 5,$ $x_0 = -1$	$y = 7x + 8$	$y = 8x + 7$	$y = 9x + 8$	$y = 8x + 6$
$f(x) = 2\cos x,$ $x_0 = \frac{\pi}{2}$	$y = \pi - x$	$y = \pi - 2x$	$y = \frac{\pi}{2} - 2x$	$y = \frac{\pi}{2} - x$
$f(x) = \operatorname{tg} x, x_0 = \pi$	$y = x$	$y = \pi + x$	$y = x - \pi$	$y = x - 1$
$f(x) = 1 - \sin 2x,$ $x_0 = 0$	$y = 1 - 2x$	$y = 2x$	$y = -2x$	$y = 2x + 1$
$f(x) = \frac{1}{x+3},$ $x_0 = -2$	$y = -x + 1$	$y = x + 1$	$y = -x - 1$	$y = -x - 2$

Ответы к данному тесту приведены в таблице 7.

Таблица 7 - Ответы к тесту

Вопрос	1	2	3	4	5	6	7
Вариант ответа	3	2	2	2	3	1	3

Бланк выполнения лабораторно-практической работы №2
для учащихся старших классов:
Лабораторно-практическая работа по теме «Графические методы решений уравнения касательной к функции» обучающегося ____ класса.

Ф.И.: ___________________

Цель работы: закрепление умений и навыков по применению понятия «касательная к графику функции».

План работы:

а) решить задачи с развернутым ответом;

б) выполнить тестовые задания, заполнить таблицу.

Оборудование: не требуется.

Тип задач - проведение касательной параллельно заданной прямой:

Задание 1. В каких точках касательные к кривой $y = \frac{x^3}{3} - x^2 - x + 1$ параллельны прямой $y = 2x - 1$?

Решение. Так как касательные параллельны прямой $y = 2x - 1$,то их угловые коэффициенты совпадают, т.е. угловой коэффициент касательной в этой точке есть $\kappa = 2$. Находим $y' = x^2 - 2x - 1$; $\kappa = y'(x_0) = x_0^2 - 2x_0 - -1 = 2$. Решив уравнение $x_0^2 - 2x_0 - 1 = 2$; $x_0^2 - 2x_0 - 3 = 2$ получим $(x_0)1 = 3$; $(x_0)2 = -1$, откуда $(y_0)1 = -2$; $(y_0)2 = \frac{2}{3}$. Итак, искомыми точками касания являются А(3;-2) и В(-1; $\frac{2}{3}$).

Ответ: (3;-2) и (-1; $\frac{2}{3}$).

Задание 2. «Найти абсциссу точки, в которой касательная к графику функции $f(x) = 2x - \ln x$, параллельная прямой $y = x$» [38].

Решение. «Пусть x_0 – абсцисса точки касания. Угловой коэффициент касательной в этой точке есть $\kappa = 1$. Находим $f'(x) = 2 - \frac{1}{2}\kappa = f'(x_0) = 2 - -(\frac{1}{x_0}) = 1$. Решив уравнение $2 - (\frac{1}{x_0}) = 1$, получим $x_0 = 1$.

Ответ: 1» [38].

Тест. Найти абсциссу точки, в которой касательная к графику функции $f(x)$ параллельна прямой $y = x$. Обозначьте правильный вариант (таблица 8).

Таблица 8 - Задания теста по вариантам

Уравнение	Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3	Вариант 4
$f(x) = x + e^{-2x}$, $y(x) = -x$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1
$f(x) = 2\sqrt{x} + x$, $y(x) = 2x$	1	4	0	$\frac{1}{4}$
$f(x) = x^2 - 5x$, $y(x) = -x$	- 2	3	- 3	2
$f(x) = 2\ln x - x$, $y(x) = 0$	- 2	0	2	1
$f(x) = x + e^{x-2}$, $y(x) = 4 - 2x$	3	2	0	- 2

Ответы к данному тесту приведены в таблице 9.

Таблица 9 - Ответы к тесту

Вопрос	1	2	3	4	5
Вариант ответа	2	1	4	2	2

Бланк выполнения лабораторно-практической работы №3

для учащихся старших классов:

Лабораторно-практическая работа по теме «Графические методы решений уравнения касательной к функции» обучающегося ____ класса.

Ф.И.: ____________________

Цель работы: закрепление умений и навыков по применению понятия «касательная к графику функции».

План работы:

а) решить задачи с развернутым ответом;

б) выполнить тестовые задания, заполнить таблицу.

Оборудование: не требуется.

Тип задач - задачи на касательную, связанные с ее угловым коэффициентом

Задание 1. «К графику функции $f(x) = 3x^2 + 5x - 15$ в точке с абсциссой $x_0 = \frac{1}{6}$ проведена касательная. Найти тангенс угла наклона касательной к оси Ox» [38].

Решение: «$f'(x_0)$ является угловым коэффициентом касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0.

Угловой коэффициент прямой равен тангенсу угла, образованного этой прямой с положительным направлением оси Ox.

$\kappa = f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha,$ где x_0- абсцисса точки касания, а α – угол наклона касательной к оси Ox. Имеем: $f'(x_0) = f'\left(\frac{1}{6}\right) = 6;$ $\operatorname{tg} \alpha = 6.$

Ответ: 6» [38].

Задание 2. Напишите уравнение касательной к графику функции $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 1$, проходящей под углом 45^0к прямой $y = 0$.

Решение: $f'(x_0) = x - 3$. Из условия $f'(x_0) = \operatorname{tg} 45^0$ найдем x_0:

x_0- 3 = 1, x_0 = 4; x_0 – абсцисса точки касания.

$f(4) = 8 - 12 + 1 = -3;$ $f'(4) = 4 - 3 = 1;$ $y = -3 + 1(x - 4);$

$y = x - 7.$

Ответ: $y = x - 7.$

Задание 3. Под каким углом к оси Ox наклонена касательная к графику функции $f(x) = x^2 \ln x$ в точке $x_0 = 1$.

Решение: $\kappa = f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha.$

Находим $f'(x) = 2x \ln x + x^2 \cdot 0{,}5 = 2x \ln x + x = x(2 \ln x + 1)$

При $x_0 = 1$ получим $f'(1) = 1$, откуда $\operatorname{tg} \alpha = 1$ и, значит, $\alpha = \pi/4$.

Ответ: $\pi/4$.

Тест. Обозначьте правильный вариант.

К графику функции $f(x)$ в точке x_0 проведена касательная. Найти тангенс угла наклона касательной к оси Ox если (таблица 10).

Таблица 10 - Задания теста с вариантами ответов

Уравнение	Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3	Вариант 4
$f(x) = 2 + x - 2x^4, \quad x_0 = 1$	-1	-7	3	0
$f(x) = \frac{x^2}{2}, \ \ x_0 = 8$	1	32	8	16
$f(x) = 5x^3 - 3x^2 - 7, x_0 = -1$	21	14	9	-21
$f(x) = 3x^2 - 2\ln x, \ x_0 = 2$	10	8	11	11,5
$f(x) = (\frac{1}{3})x^6 - x + 14, \ x_0 = 1$	-51	-65	63	77

Ответы к данному тесту приведены в таблице 11.

Таблица 11 - Ответы к тесту

Вопрос	1	2	3	4	5
Вариант ответа	2	3	1	3	2

Тест. Обозначьте правильный вариант.

Найти угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции $f(x)$ в точке x_0 (таблица 12).

Таблица 12 - Задания теста с вариантами ответов

Уравнение	Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3	Вариант 4
$f(x) = e^x - x^2$, $x_0 = 1$	$e - 2$	-1	e-1	-2
$f(x) = 2\sin x + 2$, $x_0 = 0$	-2	0	4	2
$f(x) = 4\cos x - 1$, $x_0 = \frac{\pi}{6}$	4	2	-2	1
$f(x) = 2\sqrt{x} + 3$, $x_0 = 4$	3,5	0,5	7	2,5

Ответы к данному тесту приведены в таблице 13.

Таблица 13 - Ответы к тесту

Вопрос	1	2	3	4
Вариант ответа	1	4	3	2

Бланк выполнения лабораторно-практической работы №4

для учащихся старших классов:

Лабораторно-практическая работа по теме «Графические методы решений уравнения касательной к функции» обучающегося ____ класса.

Ф.И.: ___________________

Цель работы: закрепление умений и навыков по применению понятия «касательная к графику функции».

План работы:

а) решить задачи с развернутым ответом;

б) выполнить тестовые задания, заполнить таблицу.

Оборудование: не требуется.

Тип задач - нахождение касательной, проходящей через точку внешнюю по отношению к заданному графику

Задание 1. «Составить уравнения касательных к кривой $y = x^2 - 4x + 3$, проходящих через точку М (2;-5)» [38].

Решение. «При $x = 2$, находим $y = 4 - 8 + 3 = -1 \neq 5$, то есть точка М не лежит на кривой $y = x^2 - 4x + 3,$ и не является точкой касания.

Пусть $(x_0; y_0)$ – точка касания.

$y' = 2x - 4, k = 2x_0 - 4.$

Составим уравнение касательной, проходящей через точку М:

$y_0 = -5 - (2x_0 - 4)(2 - x_0).$

Поскольку точка $(x_0; y_0)$ лежит на кривой, получим:

$y_0 = x_0^2 - 4x_0 + 3.$

Решим уравнение:

$x_0^2 - 4x_0$ +3 = $-5 - (2x_0 - 4)(2 - x_0)$; $x_0^2 - 4x_0$ +3 = $2x_0^2 - 8x_0 + 3$.

$x_0^2 - 4x_0 = 0;\ \ (x_0)1 = 0;\ \ (x_0)2 = 4.$

Таким образом, получили две точки касания A(0;3) и B(4;3). Итак, существуют две касательные к кривой. Одна из них имеет угловой коэффициент $k_1 = -4$ (при $x_0 = 0$) и уравнение $y = -4x + 3$, а другая – угловой коэффициент $k_2 = 4$ (при $x_0 = 4$) и уравнение $y = 4x - 13$» [38].

Тест. Обозначьте правильный вариант.

Через точку M($x; y$) проведены две касательные к графику функции $f(x)$. Найти сумму абсцисс точек касания. Обозначьте правильный вариант (таблица 14).

Таблица 14 - Задания теста с вариантами ответов

Уравнение	Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3	Вариант 4
$f(x) = 4x^4 - 8x - - 2$, M(3;-90)	4	6	5	3
$f(x) = 7x^2 - 2x - - 5$, M(2;-93)	4	6	5	3
$f(x) = 6x^2 - 4x - - 1$, M(1;-23)	1	5	2	3
$f(x) = x^2 - 9x - 5$, M(1,5;-54)	2	4	5	3
$f(x) = 7x^2 - 7x - - 1$, M(-1,5;4,5)	-2	-5	2	-3

Ответы к данному тесту приведены в таблице 15.

Таблица 15 - Ответы к тесту

Вопрос	1	2	3	4	5
Вариант ответа	2	1	3	4	4

Тип задач - нестандартные задачи, связанные с касательной

Задание 1. «Напишите уравнения касательных, проведенных к графику функции $y = 2x^2 - 4x + 3$ в точках пересечения графика с прямой $y = x + 3$.

Ответ: $y = - 4x + 3$, $y = 6x - 9,5$.

Задание 2. При каких значениях а касательная, проведенная к графику функции $y = x^2 - ax$ в точке графика с абсциссой $x_0 = 1$, проходит через точку М (2; 3)? Ответ: $a = 0{,}5$.

Задание 3. При каких значениях р прямая $y = px - 5$ касается кривой $y = 3x^2 - 4x - 2$? Ответ: $p_1 = -10$, $p_2 = 2$.

Задание 4. Найдите все общие точки графика функции $y = 3x - x^3$ и касательной, проведенной к этому графику через точку P(0; 16).

Ответ: A(2; – 2), B(– 4; 52).

Задание 5. На кривой $y = x^2 - x + 1$ найдите точку, в которой касательная к графику параллельна прямой $y - 3x + 1 = 0$. Ответ: М (2; 3)» [38].

Задание 6. «Напишите уравнение касательной к графику функции $y = x^2 + + 2x - | 4x |$, которая касается его в двух точках. Сделайте чертеж.

Ответ: $y = 2x - 4$.

Задание 7. На параболе $y = x^2$ взяты две точки с абсциссами $x_1 = 1$, $x_2 = 3$. Через эти точки проведена секущая. В какой точке параболы касательная к ней будет параллельна проведенной секущей? Напишите уравнения секущей и касательной. Ответ: $y = 4x - 3$ – уравнение секущей; $y = 4x - 4$ – уравнение касательной.

Задание 8. Найдите угол α между касательными к графику функции $y = x^3 - 4x^2 + 3x + 1$, проведенными в точках с абсциссами 0 и 1.

Ответ: $\alpha = 45°$.

Задание 9. Напишите уравнение всех общих касательных к графикам функций $y = x^2 - x + 1$ и $y = 2x^2 - x + 0{,}5$. Ответ: $y = -3x$ и $y = x$.

Задание 10. Определите, под какими углами парабола $y = x^2 + 2x - 8$ пересекает ось абсцисс. Ответ: $\alpha_1 = \mathrm{arctg}\ 6$, $\alpha_2 = \mathrm{arctg}\ (-6)$.

Задание 11. Прямая $y = 2x + 7$ и парабола $y = x^2 - 1$ пересекаются в точках M и N. Найдите точку K пересечения прямых, касающихся параболы в точках M и N. Ответ: K(1; – 9).

Задание 12. При каких значениях b прямая $y = 9x + b$ является касательной к графику функции $y = x^3 - 3x + 15$? Ответ: – 1; 31.

Задание 13. При каких значениях k прямая $y = kx - 10$ имеет только одну общую точку с графиком функции $y = 2x^2 + 3x - 2$? Для найденных значений k определите координаты точки. Ответ: $k_1 = -5$, A (– 2; 0); $k_2 = 11$, B(2; 12).

Задание 14. При каких значениях b касательная, проведенная к графику функции $y = bx^3 - 2x^2 - 4$ в точке с абсциссой $x_0 = 2$, проходит через точку M (1; 8)? Ответ: b = – 3» [38].

Опишем занятие 6-8 Лабораторная работа «Графические методы решений уравнений касательной к функции» 3ч.

План:

а) рассмотрение решения задач уравнения касательной к графику функции с параметром;

б) рассмотрение решения задач на нахождение производной.

Бланк выполнения лабораторно-практической работы №5

для учащихся старших классов:

Лабораторно-практическая работа по теме «Графические методы решений уравнения касательной к функции» обучающегося ____ класса.

Ф.И.: ___________________

Цель работы: закрепление умений и навыков по применению понятия «касательная к графику функции».

План работы:

а) решить задачи с развернутым ответом;

б) выполнить самостоятельно задания, заполнить таблицу.

Оборудование: линейка.

Рассмотрим решение задач на касательную с параметром.

Задача 1. «При каких значениях параметра a касательная $y = x^3 - ax$ к графику функции в точке $x = 1$ проходит через точку (2;3)?» [15].

Решение. «Составим уравнение касательной к графику заданной функции в точке $x = 1$ $y = 1 - a + (3 - a)(x - 1)$. Так как эта прямая проходит через точку (2;3), то имеет место равенство $3 = 1 - a + (3 - a)(2 - 1)$, откуда находим $a = \frac{1}{2}$. Ответ: $a = \frac{1}{2}$» [15].

Задания для самостоятельного выполнения приведены в таблице 16.

Таблица 16 - Задания для самостоятельного выполнения

Задание	Ответ
Прямая $y = -5x + 8$ является касательной к графику функции $y = 28x^2 + bx + 15$. Найдите b, учитывая, что абсцисса точки касания больше 0.	
При каких значениях a касательная, проведенная к графику функции $y = x^2 - ax$ в точке графика с абсциссой $x_0 = 1$ проходит через точку $M(2; 3)$.	
Составить уравнение касательной в точке, соответствующей значению параметра $t = t_0$.	

Бланк выполнения лабораторно-практической работы №6

для учащихся старших классов:

Лабораторно-практическая работа по теме «Графические методы решений уравнения касательной к функции» обучающегося ____ класса.

Ф.И.: ___________________

Цель работы: закрепление умений и навыков по применению понятия «касательная к графику функции».

План работы:

а) решить задачи с развернутым ответом;

б) выполнить самостоятельно задания, заполнить таблицу.

Оборудование: линейка.

Задача 2. «При каких значениях параметра a прямая $y = ax + 1$ является касательной к графику функции у=$\sqrt{4x + 1}$?» [15].

Решение. «Из условия следует, что должно выполняться равенство $f'(b) = a$, где $f(x) = \sqrt{4x+1}$, где b – абсцисса точки касания. Значит, и связаны между собой равенством у = $\frac{2}{\sqrt{4x+1}} = a$.

Составим уравнение касательной к графику заданной функции в точке b:

$y = f(b) + f'(b)(x - b)$; $y = \sqrt{4b+1} + \frac{2}{\sqrt{4b+1}}(x - b)$;

$y = ax + (\sqrt{4b+1} - \frac{2b}{\sqrt{4b+1}})$.

Из условия следует, что должно выполняться равенство $\sqrt{4b+1} - \frac{2b}{\sqrt{4b+1}} = 1$.

Решив это уравнение получим $b = 0$. Тогда из $\sqrt{4b+1} - \frac{2b}{\sqrt{4b+1}} = 1$ получаем, что $a = 2$» [15].

Задания для самостоятельного выполнения приведены в таблице 17.

Таблица 17 - Задания для самостоятельного выполнения

Задание	Ответ
Найдите уравнение касательной к графику функции $f(x) = x^2 + 3x - 8$, если эта касательная параллельна прямой $y = 9x - 1$.	
Прямая пересекает ось абсцисс при $x=4$, касается графика функции $y=f(x)$ в точке $A(1;\ -15)$. Найдите $f'(1)$.	

Бланк выполнения лабораторно-практической работы №7

для учащихся старших классов:

Лабораторно-практическая работа по теме «Графические методы решений уравнения касательной к функции» обучающегося ____ класса.

Ф.И.: ____________________

Цель работы: закрепление умений и навыков по применению понятия «касательная к графику функции».

План работы:

а) решить задачи с развернутым ответом;

б) выполнить самостоятельно задания, заполнить таблицу.

Оборудование: линейка.

Задача 3. При каких значения параметра a уравнение: $|x-2| = a\log_2|x-2|$ имеет ровно 2 решения?

Решение: поскольку логарифмы определены для положительных чисел, $|x-2| > 0$. Это значит, что $x \neq 2$.

Сделаем замену $|x-2| = t, t > 0$. При $t > 0$ каждому значению t соответствует два значения x. Получим уравнение $t = a\log_2 t$.

В левой части уравнения — линейная функция, в правой — логарифмическая. Это функции разных типов. Попробуем графический способ.

Если $a = 0,$ то $t = 0$ и условие $t > 0$ не выполняется. Рассмотрим по отдельности случаи $a < 0$ и $a > 0$.

Пусть $a < 0$.Нарисуем графики функции $y_1 = \frac{t}{a}$ и $y_2 = \log_2 t$ монотонно возрастает при $t > 0$. Функция $y_2 = \log_2 t$ монотонно убывает при $t < 0$. Обозначим $\frac{1}{a} = b, b < 0$. Функция $y_1 = bt$ монотонно убывает при $t > 0$.

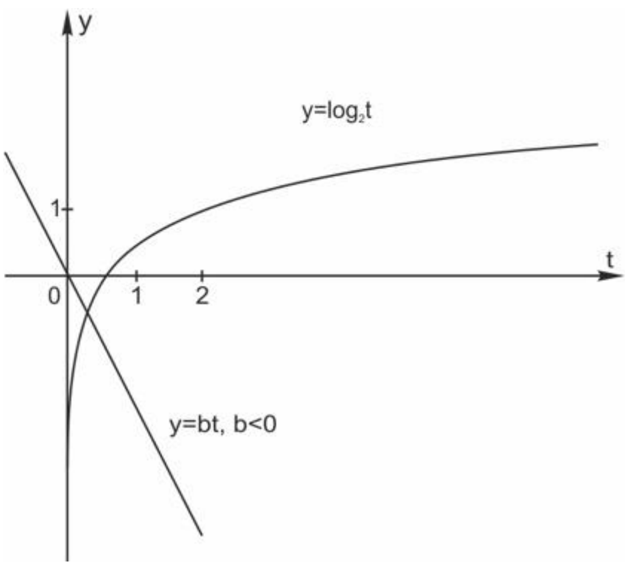


Рисунок 8 – К задаче 3 ($a < 0$)

Докажем, что графики функции $y_1 = bt$ и $y_2 = \log_2 t$ имеют единственную точку пересечения при $t > 0$ и любом $b < 0$ (рисунок 8). Рассмотрим функцию

$z(t) = y_2 - y_1 = \log_2 t - bt$. Функция $z(t)$ является монотонно возрастающей при $b < 0$ (как сумма монотонно возрастающих функций $\log_2 t$ и $-bt$).

Следовательно, каждое свое значение, в том числе и значение $z = 0$, она принимает ровно один раз. Уравнение $\log_2 t - bt = 0$ имеет единственное решение при положительных t и $b < 0$. Значит, при всех $a < 0$ исходное уравнение имеет ровно 2 решения.

Теперь случай $a > 0$. Уравнение $\log_2 t - bt = 0$ имеет единственное решение при положительных t и $b < 0$ (рисунок 9). Значит, при всех $a < 0$ исходное уравнение имеет ровно 2 решения. Теперь $a > 0$. $y = \log_2 t$.

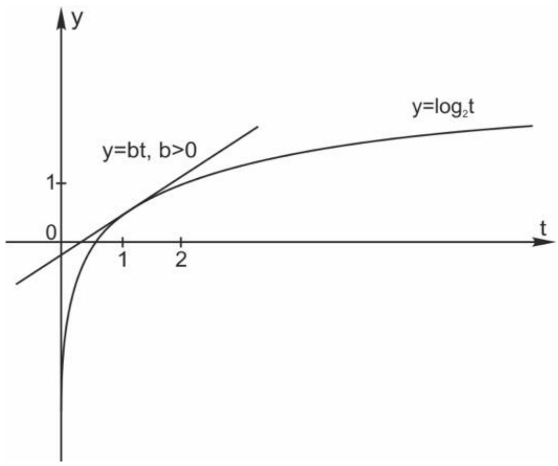


Рисунок 9 - К задаче 3 ($a > 0$)

Уравнение $\log_2 t = bt$ имеет единственное решение, если прямая $y = bt$ касается графика функции $y = \log_2 t$. Мы помним, как записываются условия касания:

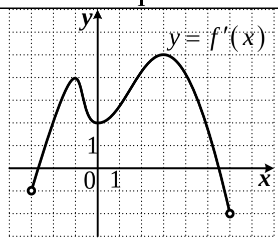
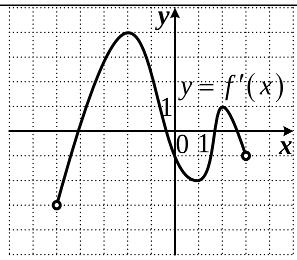
$$\begin{cases} f(x) = kx + b \\ f'(x) = k \end{cases} \text{в нашем случае} \begin{cases} \log_2 t = bt \\ \frac{1}{t ln2} = b \end{cases}$$

Учитывая, что $b = \frac{1}{a}$, получим: $\log_2 e = \log_2 t\,, t = e, a = eln2$. Мы получили, что $t = e$- точка касания. При этом $a = eln2$.

Ответ: $\left[\begin{array}{l} a < 0 \\ a = eln2 \end{array}\right.$

Задания для самостоятельного выполнения приведены в таблице 18.

Таблица 18 - Задания для самостоятельного выполнения

Задание	Чертеж	Ответ
«Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-3;\ 6)$. На рисунке изображен график производной $y = f'(x)$. Определите число касательных к графику функции $y = f(x)$, тангенс угла наклона которых к положительному направлению оси *Ox* равен 3» [31].		
«Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-5; 3)$. Используя изображенный на рисунке график производной $y = f'(x)$, определите количество касательных к графику функции $y = f(x)$, которые составляют угол 45^0 с положительным направлением оси *Ox*» [31].		

Опишем занятие 9-10 Лабораторная работа «Построение графика функции и ее касательной в точке с использованием программы GeoGebra» (2 ч).

План:

а) изучение программы, как инструмент в процессе обучения;

б) рассмотрение построения уравнения касательной к графику функции при помощи программы GeoGebra.

Методические рекомендации по работе с данной программой учитель может изучить по пособию И.С. Бурцева [11].

Рассмотрим содержание занятий.

Бланк выполнения лабораторно-практической работы №8

для учащихся старших классов:

Лабораторно-практическая работа по теме «Конус» обучающегося ____ класса. Ф.И.: ____________________

Цель работы: закрепление умений и навыков по применению понятия «касательная к графику функции», использование программы GeoGebra.

План работы:

а) изучить программу для построения касательной к графику функции GeoGebra;

б) выполнить самостоятельно задания, заполнить таблицу.

Оборудование: компьютер.

Задание 1. Построение графика функции $y = (x - 4)^2 + 2$ и ее касательной в точке в программе GeoGebra.

Шаг 1. Перед непосредственным построением графика проведем предварительную работу. В блоке ПОЛОТНО нажмем на ПАНЕЛЬ СТИЛЯ НАСТРОЙКИ и выберем стиль СЕТКА. Основное тело полотна примет вид (рисунок 10):

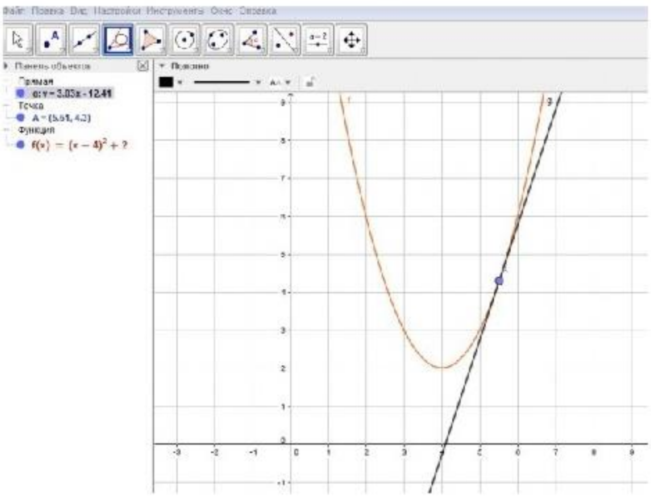


Рисунок 10 - Панель инструментов

Шаг 2. В строке ВВОД без пробелов введем многочлен (x – 4) ^ 2 + 2 и нажмем клавишу Enter. На полотне появится вот такое изображение (рисунок 11):

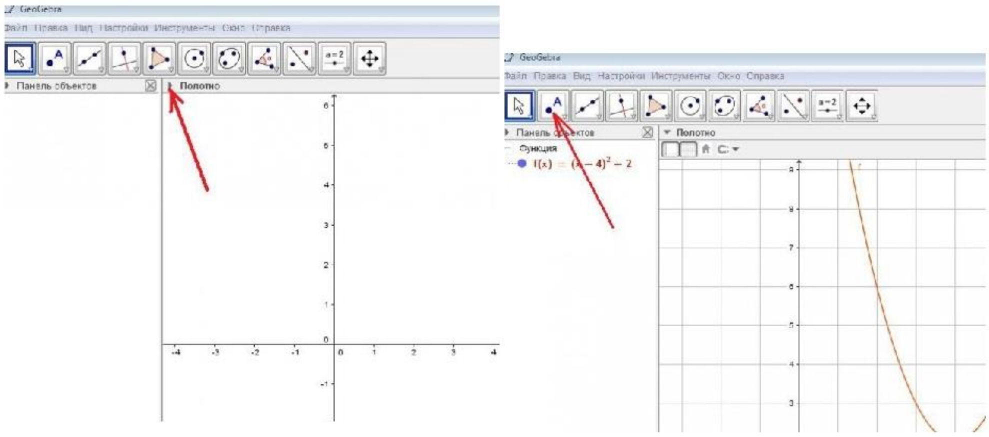


Рисунок 11 - Построение графика функции

Шаг 3. На получившемся графике отметим произвольную точку А. Для этого на главной панели инструментов выберем раздел ТОЧКА и нажмем на него левой кнопкой мыши. После этого в любом месте построенного графика отмечаем точку А нажатием на левую кнопку мыши. Изображение примет вид (рисунок 12):

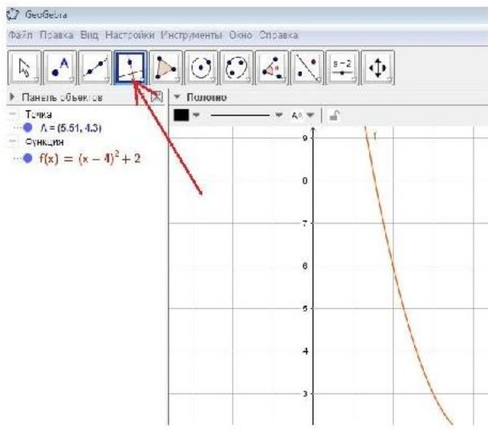


Рисунок 12 - Построение точки касания

Шаг 4. Далее, построим к этому графику касательную, проходящую через данную точку (рисунок 13). В основной панели инструментов выберем четвертый слева по счету раздел. Нажмем на него один раз левой кнопкой мыши. И из выпадающего окна выберем инструмент КАСАТЕЛЬНАЯ, нажав на него левой кнопкой мыши.

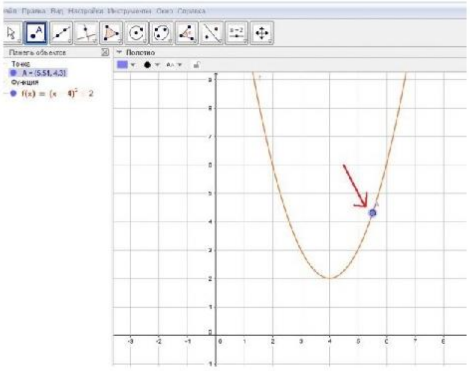


Рисунок 13 - Построение касательной в точке

Шаг 5. Нажимаем левой кнопкой мыши один раз на график (в любом месте), а затем на построенную точку А. Касательная к графику функции построена (рисунок 14).

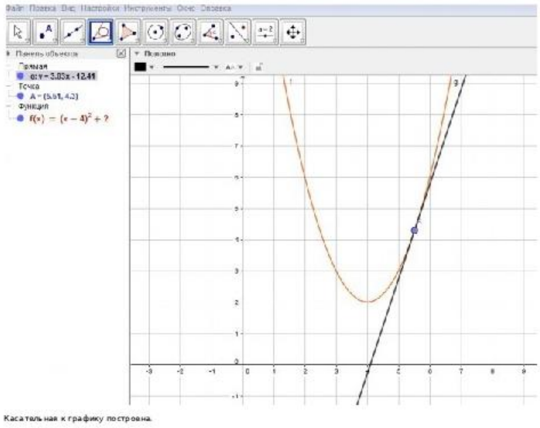


Рисунок 14 - Касательная, проведенная к графику функции

Задание 2. Постройте функцию $f(x) = \sin x$, её производную и касательную к точке на функции, а также треугольник наклона касательной.

Задания для самостоятельного выполнения приведены в таблице 19.

Таблица 19 - Задания для самостоятельного выполнения

Задание	Скриншот
Построение графика функции $y = (x-4)^2 + 2$ и ее касательную в точке	
Постройте функцию $f(x) = \sin x$, её производную и касательную к точке на функции, а также треугольник наклона касательной.	

Опишем занятие 11-13 Лабораторная работа «Конус» 3 ч.

План:

а) рассмотрение одного из тел вращения - конус. Изготовление развертки;

б) рассмотрение решения задач на нахождение производной.

Рассмотрим содержание занятий. В данной теме учащиеся дают определение тел вращения - конуса и усеченного конуса. При изучении этой темы учащиеся знакомятся с определением конуса, усеченного конуса и их компонентов. Овладевают навыками нахождения площади полной и боковой поверхности конуса, его образующей и объема конусов. Учатся делать развертку.

Определения.

«Прямым круговым конусом называется тело, которое образуется при вращении прямоугольного треугольника вокруг прямой, содержащей его катет.

Осью конуса называется отрезок оси вращения, заключённый внутри конуса.

Основанием конуса называется круг, образованный при вращении второго катета. Длина этого катета называется радиусом конуса. Вершина острого угла вращающегося треугольника, лежащая на оси вращения, называется вершиной конуса. На рисунках вершиной конуса является точка P (рисунок 15)» [35].

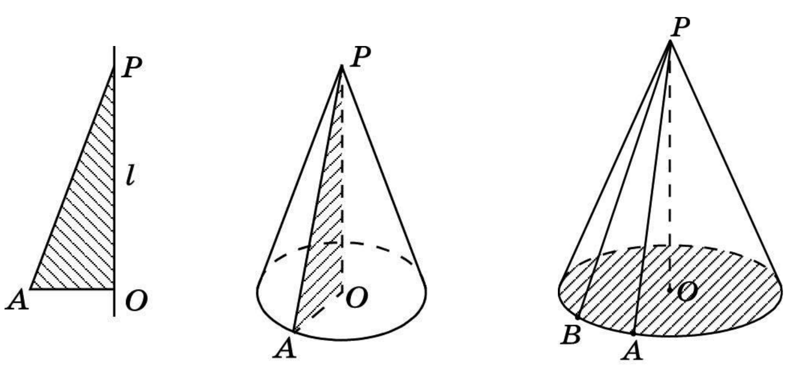


Рисунок 15 - Конус с вершиной P

«Высотой конуса называется отрезок, проведённый из вершины конуса перпендикулярно его основанию. Длину этого перпендикуляра также называют высотой конуса. Высота конуса имеет своим основанием центр круга - основания конуса - и совпадает с осью конуса.

Отрезки, соединяющие вершину конуса с точками окружности его основания, называются образующими конуса. Все образующие конуса равны между собой» [35].

Прямой круговой конус (часто его называют просто конусом) можно получить вращением прямоугольного треугольника вокруг прямой, содержащей катет (эта прямая представляет собой ось конуса).

Часть конуса, лежащая между основанием и плоскостью, параллельной основанию и находящейся между вершиной и основанием, называется усечённым конусом.

Боковая поверхность конуса можно вычислить по формуле (3):

$$S_{\text{бок.пов.}} = \pi R l, \tag{3}$$

где R - радиус основания, l - длина образующей.

Полная поверхность конуса равна сумме площадей боковой поверхности и площади основания, имеем формулу (4):

$$S_{\text{полн.пов.}} = \pi R l + \pi R^2. \tag{4}$$

Площадь боковой поверхности усеченного конуса вычисляется по формуле (5):

$$S_{\text{бок.пов.}} = \pi l (r_1 + r_2), \tag{5}$$

где r_1 – радиус верхнего основания, r_2, - радиус нижнего основания (рисунок 16).

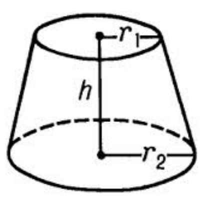


Рисунок 16 – Усеченный конус

Объем конуса находится по следующей формуле (6):

$$V = \frac{1}{3} S_{осн.} h = \frac{1}{3} \pi r^2 h, \qquad (6)$$

где h- высота конуса.

Бланк выполнения лабораторно-практической работы №9

для учащихся старших классов:

Лабораторно-практическая работа по теме «Конус» обучающегося ____ класса. Ф.И.: ____________________

Цель работы: закрепление умений и навыков по применению понятия «конус», построение разверт модели конуса, решение задач.

План работы:

а) заполнить таблицу с данными для изготовления развертки конуса;

б) изготовить конус по развертке.

Оборудование: интерактивная доска, лист бумаги, транспортир, циркуль, линейка, ножницы, клей.

На интерактивной доске демонстрируется образец построения развертки конуса.

Построение развертки конуса.

Поверхность прямого кругового конуса разворачивается в сектор окружности с центром в вершине S конуса. Радиус сектора равен длине l образующей линии конуса; угол $\alpha = 180^0 \cdot \frac{d}{l}$, где d – диаметр основы конуса. Развёртка конуса (рисунок 17) при необходимости дополняется основой – окружностью диаметром d. Для определения точки А на развёртке прямого кругового конуса применяется способ образующей линии. Определяется угол α и строится образующая линия на развёртке, положение которой определяется углом $\beta = \frac{1}{2} \alpha \cdot \frac{d}{l}$. Точка A_0 расположена на расстоянии $S_0 A_0$, равном натуральной величине iS_2A_2' отрезка SA. Задания для самостоятельного выполнения приведены в таблице 20.

Таблица 20 - Задания для самостоятельного выполнения

d	l	$\alpha = 180^0 \cdot \frac{d}{l}$	$\beta = \frac{1}{2}\alpha \cdot \frac{d}{l}$	$S_0A_0,$	SA
8 см	15 см				

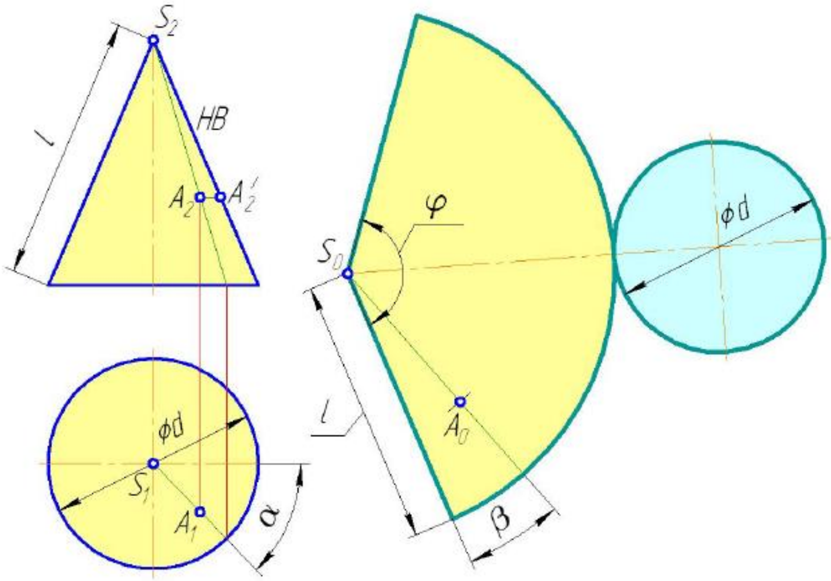


Рисунок 17 – Развертка конуса

Бланк выполнения лабораторно-практической работы №10

для учащихся старших классов:

Лабораторно-практическая работа по теме «Конус» обучающегося ____ класса. Ф.И.: ____________________

Цель работы: закрепление умений и навыков по применению понятия «конус», решение задач на нахождение площади боковой поверхности, объема конуса и его образующую.

План работы:

а) выполнить задачи с развернутым ответом;

б) заполнить таблицу.

Оборудование: транспортир, циркуль, линейка.

Задача 1. Длина окружности основания конуса равна 5 образующая равна 8. Найдите площадь боковой поверхности конуса (рисунок 18).

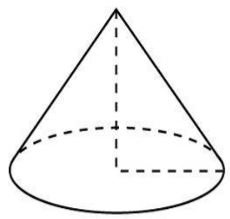


Рисунок 18 - К задаче 1

Решение. Известно, что длина окружности основания равна $2\pi R$ и равна 5, тогда 5 = $2\pi R$, $\pi R = 2{,}5$. Получим:

$$S_{\text{бок.пов.}} = \pi R l = 2{,}5 \cdot 8 = 20.$$

Ответ: 20.

Задача 2. Найдите объем V конуса (рисунок 19), образующая которого равна 3 и наклонена к плоскости основания под углом 30^0 В ответе укажите $\frac{V}{\pi}$.

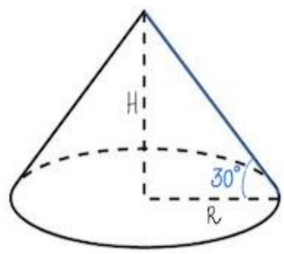


Рисунок 19 - К задаче 2

Решение.

Высота конуса, как катет против угла в 30^0, равна половине гипотенузы длиной 3, то есть равна $\frac{3}{2}$. По теореме Пифагора: $R^2 = 3^2 - (\frac{3}{2})^2 = \frac{27}{4}$. Тогда $V = \frac{1}{3} S_{\text{осн.}} h = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{27}{4} \cdot \frac{3}{2}\right) = 3{,}375$.

Ответ: 3,375

Задания для самостоятельного выполнения приведены в таблице 21.

Таблица 21 - Задания для самостоятельного выполнения

Задание	Ответ
«Площадь полной поверхности конуса равна 12. Параллельно основанию конуса проведено сечение, делящее высоту пополам. Найдите площадь полной поверхности отсеченного конуса» [8].	
«Конусообразная палатка высотой 3,5 м и диаметром основания 4 м покрыта парусиной. Сколько квадратных метров парусины пошло на палатку?» [35].	
«Объём конуса равен 135. Через точку, делящую высоту конуса в отношении 1:3, считая от вершины, проведена плоскость, параллельная основанию. Найдите объём конуса, отсекаемого от данного конуса проведённой плоскостью» [35].	
«Во сколько раз уменьшится объем конуса, если его высоту уменьшить в 3 раза?» [35].	
Во сколько раз увеличится объем конуса, если его радиус основания увеличить в 1,5 раза? [35].	

Бланк выполнения лабораторно-практической работы №11

для учащихся старших классов:

Лабораторно-практическая работа по теме «Конус» обучающегося ____ класса. Ф.И.: ___________________

Цель работы: закрепление умений и навыков по применению понятия «конус», построение разверт модели конуса, решение задач.

План работы:

а) выполнить задачи с развернутым ответом;

б) выполнить самостоятельно задания, заполнить таблицу.

Оборудование: транспортир, циркуль, линейка.

Задача 3. Высота конуса равна 15, а диаметр основания – 16. Найдите образующую конуса (рисунок 20).

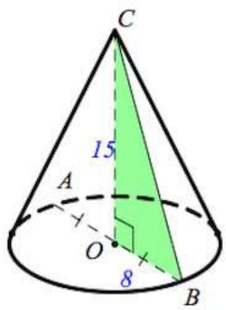


Рисунок 20 – К задаче 3

Решение. Найдем образующую конуса BC из прямоугольного треугольника BCO по теореме Пифагора.

$$BO = R = AB/2 = 8$$

$$BC = \sqrt{OC^2 + OB^2}$$

$$BC = \sqrt{15^2 + 8^2} = 17$$

Ответ: 17.

Задача 4. Площадь боковой поверхности конуса в два раза больше площади основания. Найдите угол между образующей конуса и плоскостью основания (рисунок 21). Ответ дайте в градусах.

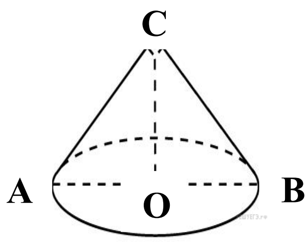


Рисунок 21 – К задаче 4

Решение: $S_{\text{бок.пов.}} = \pi Rl,\ S_{\text{осн.}} = \pi R^2,\ \pi Rl = 2\pi R^2,\ l = 2R.$
$CB = 2OB$, но треугольник COB – прямоугольный, значит, угол OCB равен 30^0, поэтому угол CBO равен 60^0. Ответ: 60^0.

Задания для самостоятельного выполнения приведены в таблице 22.

Таблица 22 - Задания для самостоятельного выполнения

Задание	Ответ
«Высота конуса равна 8, а диаметр основания — 30. Найдите образующую конуса» [35].	
«Высота конуса равна 72, а длина образующей — 90. Найдите диаметр основания конуса» [35].	
«Диаметр основания конуса равен 6, а длина образующей — 5. Найдите высоту конуса» [35].	
«Диаметр основания конуса равен 66, а угол при вершине осевого сечения равен 90^0. вычислите объем конуса, деленный на π» [35].	
«Найдите диаметр и основание конуса, если его образующая равна 6, а угол при вершине составляет 120^0» [35].	

Опишем занятие 14-15 Практическая работа «Построение сечений многогранников» (2 ч).

План:

а) рассмотрение решения задач на нахождение площади сечений многогранников;

б) изучение алгоритма построения сечений многогранников.

Определение:

«Многогранник — это такое тело, поверхность которого состоит из нескольких плоских многоугольников. Многогранник называется выпуклым, если он расположен по одну сторону плоскости каждого плоского многоугольника на его поверхности. Общая часть такой плоскости и поверхности выпуклого многогранника называется гранью. Грани выпуклого многогранника являются плоскими выпуклыми многоугольниками. Стороны граней называются ребрами многогранника, а вершины — вершинами многогранника» [35].

Сечением называется плоская фигура, полученная путем пересечения геометрического тела секущей плоскостью и содержащая точки, принадлежащие поверхности тела и плоскости. Сечение ограничивается замкнутой ломаной линией, если плоскость пересекает гранную поверхность, и замкнутой кривой линией, если плоскость пересекает кривую поверхность.

Бланк выполнения лабораторно-практической работы №12

для учащихся старших классов:

Лабораторно-практическая работа по теме «Построение сечений многогранников» обучающегося ____ класса. Ф.И.: ____________________

Цель работы: закрепление умений и навыков по применению понятия «построение сечений многогранников», решение задач на нахождение площади сечения.

Оборудование: лист бумаги, линейка, карандаши.

План работы:

а) выполнить задачи с развернутым ответом;

б) заполнить таблицу с заданиями на построение.

Задача 1. «Высота конуса равна радиусу R его основания. Через вершину конуса проведена плоскость, отсекающая от окружности основания дугу в 60°. Найти площадь сечения (рисунок 22)» [35].

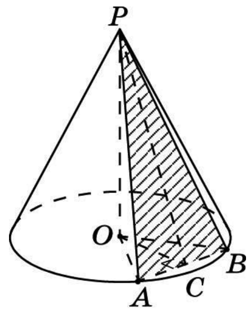


Рисунок 22 – К задаче 1

Решение.

«Пусть плоскость α пересекает поверхность конуса с вершиной P по образующим PA и PB; $\Delta\ ABP$ — искомое сечение.

Найдём площадь этого сечения. Хорда AB окружности основания стягивает дугу в 60°, значит, $\Delta\ AOB$ — правильный и $AB = R$.

Если точка C — середина стороны AB, то отрезок PC — высота треугольника ABP.

Поэтому $S_{\Delta\ ABP} = \frac{1}{2}\ AB \cdot PC$. Имеем: $OP = R$ (по условию).

В $\Delta\ AOB$: $OC = \frac{R\sqrt{3}}{2}$; в $\Delta\ OCP$: $CP = \sqrt{OC^2 + OP^2} = \frac{R\sqrt{7}}{2}$.

Тогда $S_{\Delta\ ABP} = \frac{1}{2} AB \cdot PC = \frac{R^2\sqrt{7}}{4}$» [35].

Ответ: $\frac{R^2\sqrt{7}}{4}$.

Задача 2. «Построить сечение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через точки B_1 и D_1 и середину ребра AD, если ребро куба равно 16. Найти площадь этого сечения (рисунок 23)» [35].

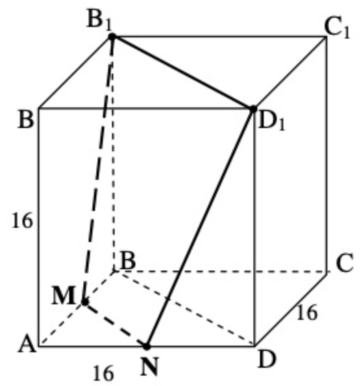


Рисунок 23 – К задаче 2

Решение:

а) соединим точки B_1 и D_1, так как они лежат в одной плоскости;

б) точка N – середина ребра AD, значит $N \in ABD_1D$. Следовательно, можно соединить точки N и D_1;

в) через точку N проведем прямую NM параллельную прямой B_1D_1;

г) соединим точки Mи B_1, лежащие в одной плоскости;

д) получившееся сечение MB_1D_1N является трапецией, так как $MN \parallel B_1D_1$ и $MN = \frac{1}{2}BD$, как средняя линия ΔABD;

е) найдем BD по теореме Пифагора:

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 = 256 + 256 = 512;$$

$$BD = \sqrt{512} = \sqrt{256 \cdot 2} = 16\sqrt{2}; B_1D_1 = 16\sqrt{2} \Rightarrow MN = 8\sqrt{2};$$

ж) Найдем ND_1 по теореме Пифагора из ΔNDD_1:

$$B_1N^2 = ND^2 + D_1D^2 = 64 + 256 = 320;$$

$$D_1N = \sqrt{320} = \sqrt{64 \cdot 5} = 8\sqrt{5}.$$

з) рассмотрим трапецию MB_1D_1N (рисунок 24):

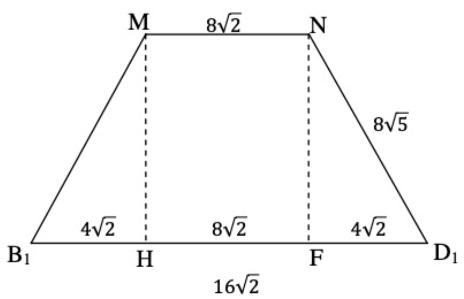


Рисунок 24 - Трапеция MB_1D_1N

$S = \frac{MN + B_1D_1}{2} \cdot NF.$

Найдем высоту NF из ΔD_1NF по теореме Пифагора:

$$NF^2 = D_1N^2 - D_1F^2 = 320 - 3 = 288$$

$$NF = \sqrt{288} = \sqrt{144 \cdot 2} = 12\sqrt{2}$$

$$S = 0{,}5(8\sqrt{2} + 16\sqrt{2}) \cdot 12\sqrt{2} = 12\sqrt{2} \cdot 12\sqrt{2} = 288$$

Ответ: 288.

Задания для самостоятельного выполнения приведены в таблице 23.

Таблица 23 - Задания для самостоятельного выполнения

Текст задания	Чертеж
В треугольной пирамиде $SABC$ провести сечение: а) через середину ребра AC параллельно грани SCB; б) через середину ребра SC параллельно грани SAB.	
Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Постройте сечение куба плоскостью, которая проходит через данные точки: а) C_1, K, D; б) C_1, K, C, где точка K – середина A_1B_1. Определите, какая фигура образуется в сечении.	

Бланк выполнения лабораторно-практической работы №13

для учащихся старших классов:

Лабораторно-практическая работа по теме «Построение сечений многогранников» обучающегося ____ класса. Ф.И.: ____________________

Цель работы: закрепление умений и навыков по применению понятия «построение сечений многогранников», решение задач на нахождение площади сечения.

Оборудование: лист бумаги, линейка, карандаши.

План работы:

а) выполнить задачи с развернутым ответом;

б) заполнить таблицу с заданиями на построение.

Задача 3. «В прямой треугольной призме стороны основания равны 51, 30 и 27, а высота призмы 10. Определить площадь сечения, проведенного через боковое ребро и большую высоту основания (рисунок 25)» [35].

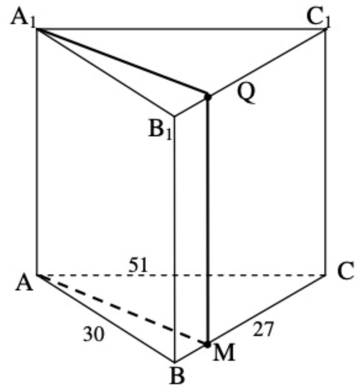


Рисунок 25 – К задаче 3

Решение.

Проведем большую высоту AM к меньшей стороне BC=27. Для построения сечения проведем прямую A_1Q параллельно прямой AM и соединим точки Q и M. В сечении получим прямоугольник MQA_1A, так как $AA_1 \perp AM$ (призма прямая, значит ребра перпендикулярны основаниям), а $MQ \parallel AA_1$, значит $MQ \perp AM$. $S_{MQA_1A} = AM \cdot AA_1$.

Длину высоты AM найдем из ΔAMC по формуле: $h = \frac{2S_\Delta}{a}$ где сторона a - сторона, к которой проведена высота, это сторона $BC = 27$.

Найдем площадь треугольника по формуле Герона:

$$p = \frac{1}{2}(31 + 51 + 27) = 54$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{54(54-30)(54-51)(54-27)} =$$

$$= \sqrt{54 \cdot 24 \cdot 3 \cdot 27} = \sqrt{27 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 27} = \sqrt{27^2 \cdot 4 \cdot 6^2} = 324$$

$$AM = \frac{2 \cdot 324}{27} = 24;$$

$$S_{MQA_1A} = 24 \cdot 10 = 240$$

Ответ: 240.

Задача 4. «Высота MO правильной четырехугольной пирамиды $MABCD$ равна стороне квадрата AB. Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через вершину A перпендикулярно ребру MC (рисунок 26)» [35].

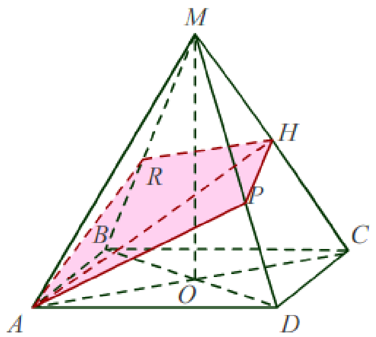


Рисунок 26 – К задаче 4

Решение.

В правильной пирамиде основание высоты находится в центре основания пирамиды, поэтому проекции ее ребер совпадают с отрезками диагоналей квадрата.

В плоскости AMC строим $AH \perp MC$. Из точки H на гранях MDC и MBC восстанавливаем перпендикуляры HP и HR, соответственно. Достроим отрезки AP и AR. Четырехугольник $APHR$ искомое сечение.

Замечание: из условия $MO = AB$можно определить стороны и углы треугольника AMC, чтобы убедиться, что от остроугольный и точка H попадает на отрезок MC, а не на его продолжение. При этом точка H расположена выше середины ребра, что существенно для определения формы сечения.

Задания для самостоятельного выполнения приведены в таблице 24.

Таблица 24 - Задания для самостоятельного выполнения

Текст задания	Чертеж
На ребрах AC, BC и CC_1 призмы $ABCA_1B_1C_1$ заданы соответственно точки Q, R и S . Построить сечения призмы плоскостями, параллельными плоскости QRSи проходящими через точку P , заданную на следующих ребрах: а) CC_1 ; б) BB_1 ; в) A_1B_1.	
Точка X делит ребро AB куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ в отношении AX: XB = 2:3. Постройте сечение этого куба плоскостью, которая параллельна плоскости AA_1C_1 и проходит через точку X. Найдите периметр сечения, если $AB = a$.	

Опишем занятия 16-17. Защита проектов.

Тема. «История появления касательной».

План:

а) проблемы касательной линии;

б) вклад математиков.

Рассказать о математиках, которые занимались этой проблемой, их вклад. Почему возникла необходимость изучения этой темы и создания формулы касательной графику функции.

Тема. «Способы построения сечений многогранников».

План:

а) аксиоматический метод;

б) комбинированный метод;

в) координатный метод;

г) алгоритмы построения сечений.

Рассказать об известных методах построения сечений многогранников. Создание ортогональных проекций. Вклад ученых в развитие математической и других наук. Рассмотреть применение одного из методов.

Тема. «Применение конических сечений».

План:

а) история конических сечений;

б) значение конических сечений в природе и технике.

Рассказать о истории появлении конических сечений. Виды и свойства конических сечений. Способы построения конических сечений. Практическое применение сечений в жизни.

Тема. «Производная в математике и физике».

План:

а) производная в различных областях науки;

б) производная и экономика.

Рассказать о истории возникновения производной. Применение производных в математике, физике, химии, биологии и других науках.

Список литературы для учащихся:

1. Атанасян Л.С. Геометрия, 10–11 классы: учеб. для общеобразоват. учреждений: базовый и профил. уровни. / Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев и др. 18 изд. М.: Просвещение, 2009. 255 с.

2. Бурцев И.С., Методическое пособие по GeoGebra построение графиков, исследование функций [Электронный ресурс] / Режим доступа https: // docplayer.ru / 73261911 - I - s - burcev - metodicheskoe - posobie - po - geogebra - postroenie - grafikov - issledovanie - funkciy.html свободный (дата обращения 21.12.2020).

3. Верещагин Н.К., Шень А. Лекции по математической логике и теории алгоритмов. Часть 1. М.; МЦНМО, 2012. 112 с.

4. Глейзер Г.И. История математики в школе. М.: Просвещение, 1983.

5. Колмогоров, А.Н. Алгебра и начала анализа. 10-11 класс / А.Н. Колмогоров, А.М. Абрамов, Ю.П. Дудницын, и др. М.: Просвещение; Издание 13-е, 2015**.** 384 с.

6. Мордкович А.Г. Алгебра и начала анализа. Профильный уровень. 11 класс. Методическое пособие учителя / А.Г. Мордкович, П.В. Семенов. М.: Мнемозина, 2010. 192 с.

7. Муравин Г.К. Алгебра и начала анализа. 11 класс / Г.К. Муравин, О.В. Муравина. М.: Дрофа, 2010. 253 с. Муравин, Г. К. Алгебра и начала анализа. 11 класс. Методические рекомендации / Г.К. Муравин, О.В. Муравина. М.: Дрофа, 2008. 304 с.

8. Никольский С.М. Алгебра и начала математического анализа. 10—11 классы / С.М. Никольский. М.: Просвещение, 2010. 352 с.

9. Потоскуев Е.В., Звавич Л.И., Геометрия 10 класс, углубленный уровень, М., Просвещение, 2021, 384 с.

10. Прасолов В.В., Геометрия Лобачевского. 3-е изд., испр. И доп. М.; МЦНМО, 2004. 88 с.

11. Силин А.В., Шмакова Н.А. Открываем неевклидову геометрию. Книга для внеклассного чтения учащихся 9-10 классов средней школы. М.: «Просвещение» 1988. 126 с.

12. Стройк Д.Я. «Краткий очерк истории математики». М., «Наука», 2009.

Список литературы для учителей:

1. Александрова Л.А. Алгебра и начала анализа. Самостоятельные работы 10 класс / Л.А. Александрова. М.: Мнемозина, 2008.

2. Атанасян Л.С. Геометрия, 10–11 классы: учеб. для общеобразоват. учреждений: базовый и профил. уровни. / Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев и др. 18 изд. М.: Просвещение, 2009. 255 с.

3. Бурмистрова Т.А. Программы общеобразовательных учреждений. Геометрия. 10–11 классы. М.: Просвещение, 2009. 96 с.

4. Бурцев И.С., Методическое пособие по GeoGebra построение графиков, исследование функций [Электронный ресурс] / Режим доступа https: // docplayer.ru / 73261911 - I - s - burcev - metodicheskoe - posobie - po - geogebra - postroenie - grafikov - issledovanie - funkciy.html свободный (дата обращения 21.12.2020).

5. Гельфанд И.М., Глаголева Е. Г., Шноль Э. Э., Функции и графики (основные приемы). 6-е изд., испр. М.: МЦНМО, 2004. 120 с.

6. Изучение геометрии 10-11кл. Книга для учителя. / С.М. Саакян, В.Ф. Бутузов, М.: Просвещение, 2010.

7. Кочагин В.В. ЕГЭ 2010. Математика: Сборник заданий / В.В. Кочагин, М. Н. Кочагина. М: Эксмо, 2009.

8. Колмогоров, А.Н. Алгебра и начала анализа. 10-11 класс / А.Н. Колмогоров, А.М. Абрамов, Ю.П. Дудницын, и др. М.: Просвещение; Издание 13-е, 2015. 384 с.

9. Мордкович А.Г. Алгебра и начала анализа. Базовый уровень. 10-11 классы. Методическое пособие учителя / А.Г. Мордкович, П.В. Семенов. М.: Мнемозина, 2010. 208 с.

10. Мордкович А.Г. Алгебра и начала анализа. Профильный уровень. 11 класс. Методическое пособие учителя / А.Г. Мордкович, П.В. Семенов. М.: Мнемозина, 2010. 192 с.

11. Никольский С.М. Алгебра и начала математического анализа. 10—11 классы / С.М. Никольский. М.: Просвещение, 2010. 352 с.

12. Муравин Г.К. Алгебра и начала анализа. 11 класс / Г.К. Муравин, О.В. Муравина. М.: Дрофа, 2010. 253 с. Муравин, Г. К. Алгебра и начала анализа. 11 класс. Методические рекомендации / Г.К. Муравин, О.В. Муравина. М.: Дрофа, 2008. 304 с.

13. Рыжик В.И. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы. Контрольные измерительные материалы профильного уровня / В.И. Рыжик. М.: Просвещение, 2009. 192 с.

14. Шабунин М.И. Математика: пособие для поступающих в вузы, 8-е изд., М.: Лаборатория знаний, 2020. – 744 с.

Таким образом, можно сделать вывод о том, что на элективных курсах учащиеся отрабатывают полученные на уроках знания и навыки, овладевают конкретными глубокими математическими знаниями. При выполнении лабораторно-практических работ происходит упорядочение знаний, осознанное понимание материала.

2.3 Педагогический эксперимент и его результаты

В 2021-2022 учебном году нами был проведен педагогический эксперимент на базе МБУ «Школа №5» г.о. Тольятти. В нем участвовало 27 учащихся 10 «Л» класса, обучающихся по программам к учебникам А.Г.

Мордковича, Л.С. Атанасяна. Проведение эксперимента осуществлялось учителем математики школы О.Н. Коробко.

Целью констатирующего эксперимента было выявление уровня сформированности уровня осознанности знаний учащихся.

При проведении данного этапа эксперимента в начале учебного года на основе учебного материала, изученного школьниками в основной школе с ними была проведена самостоятельная работа из 6 заданий.

Примерный вариант самостоятельной работы

Задача 1. «Найти площадь прямоугольного треугольника с катетами 9 см, 40 см и гипотенузой 42 см» [7].

Ответ: задача не имеет решения.

Задача 2. «В параллелограмме стороны 4 см и 5 см, а высота 3 см» [7]. Найти площадь параллелограмма.

Ответ: 12 см^2 или 15 см^2.

Задача 3. «Отрезок BD является биссектрисой Δ ABC. Найдите DC, если AB = 30, AD = 20, BD = 16 и $\angle$ BDC = $\angle$ C» [6].

Ответ: задача не имеет решения.

Задача 4. «Какое из следующих утверждений верно?

1. Боковые стороны любой трапеции равны.
2. Серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в точке, являющейся центром окружности, описанной около треугольника.
3. Если две стороны и угол одного треугольника равны соответственно двум сторонам и углу другого треугольника, то такие треугольники равны» [56].

Ответ: 2.

Задача 5. Вычислить: $\sqrt{27+10\sqrt{2}}+\sqrt{27-10\sqrt{2}}$.

Решение. Заметим, что «$\sqrt{27+10\sqrt{2}}=\sqrt{\left(\sqrt{2}+5\right)^2}$; $\sqrt{27-10\sqrt{2}}=$ $=\sqrt{\left(\sqrt{2}-5\right)^2}$. Тогда имеем: $\sqrt{27+10\sqrt{2}}+\sqrt{27-10\sqrt{2}}=$ $=\sqrt{\left(\sqrt{2}+5\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{2}-5\right)^2}=\left|\sqrt{2}+5\right|+\left|\sqrt{2}-5\right|=\sqrt{2}+5+5-\sqrt{2}=$ $=10$» [39].

Ответ: 10.

Задача 6. Длина тени дерева равна 10,2 м, а длина тени человека, рост которого 1,7 м равна 2,5 м. Найдите высоту дерева» [7, с. 154].

Ответ: 6,936 м.

Отметим, что задания №1 – содержит противоречивое условие (на применение неравенства треугольника и теоремы Пифагора); №2 – содержит противоречивое условие (на понятие высоты параллелограмма, которая может быть проведена к обеим из сторон параллелограмма); №3 – на противоречивость (разные способы решения одной и той же задачи) №4 – на приведение примеров и контрпримеров (установление истинности высказываний); №5 – с элементами исследования: на применение понятия модуля числа; №6 – практико-ориентированная задача: на применение понятия подобия фигур.

По результатам констатирующего этапа эксперимента были сделаны следующие выводы: 20% учащихся испытывали затруднения при решении заданий на противоречивое условие; задание на установление истинности высказываний верно выполнили 17% школьников; 63% у обучающихся недостаточно сформировано понятие осознанности знаний.

На поисковом этапе эксперимента были апробирована технология обучения алгоритмам при проведении лабораторно-практических работ на уроках алгебры и начал математического анализа в данном классе при изучении темы «Касательная к графику функции» и при проведении элективного курса «Лабораторный практикум для 10-11 классов по алгебре и началам математического анализа и геометрии, направленные на формирование осознанности знаний обучающихся, представлены нами в параграфах 2.1 и 2.2 данной работы.

Отметим, что для успешного выполнения ученики должны владеть теоретическими знаниями и умением применениями на практических работах.

Вместе с этим, во время проведения производственной практики (педагогической практики) в этом учебном году был проведен опрос учителей математики, из которого можно сделать вывод о том, что ими уделяется достаточно внимания на формирование осознанности полученных знаний учащихся.

Для проведения контрольного этапа эксперимента в мае 2022 года в 10 «Л» классе также были составлены две лабораторно-практические работы на выявление уровня сформированности осознанности знаний учащихся на уроках математики.

Лабораторно-практическая работа №1

Лабораторно-практическая работа по теме: «Функции y = sin x, y = cos x, их свойства и графики» обучающегося ____ класса.

Ф.И.: ____________________

Цель работы: умение применять понятия тригонометрических функций y = sin x и y = cos x при решении различных задач.

План работы:

а) решить задачи.

Оборудование: макеты числовой окружности на координатной плоскости, таблица значений тригонометрических функций, раздаточный материал: таблицы свойств функций.

Задание №10.4 Не выполняя построения, ответьте, принадлежит ли графику функции $y = \sin x$ точка: а) $\left(-\frac{\pi}{2};\ -1\right)$.

Решение. Подставим значение в функцию $y\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1 \in$ $\in y = \sin x$;

в) (π; 1).

Решение. Подставим значение в функцию $y(\pi) = \sin(\pi) = 0 \neq 1 \notin$ $y = \sin x$.

Задание №10.7 Постройте график функции:

а) $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ (рисунок 27).

x	$f(x)$
$\frac{\pi}{3}$	0
$\frac{5\pi}{6}$	1
$\frac{4\pi}{3}$	0
$\frac{11\pi}{6}$	-1
$\frac{7\pi}{3}$	0

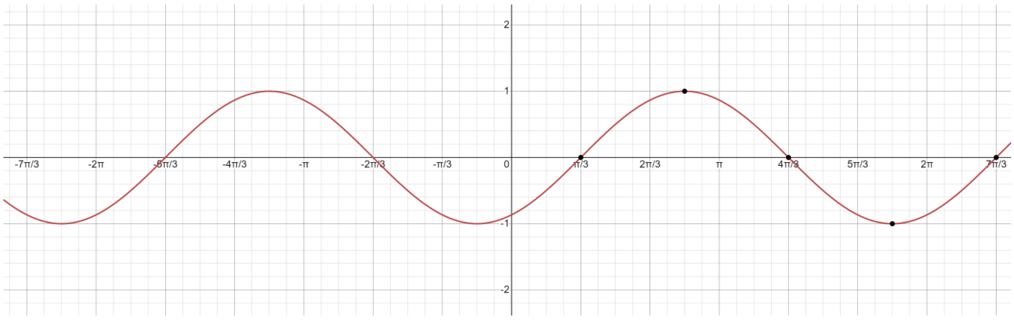


Рисунок 27 – К заданию №10.7а

б) $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

Задание №11.3 Найдите значение функции $y = 2\sin x + \cos x$, если:

а) $x = -\frac{\pi}{2}$ (рисунок 28).

x	$f(x)$
$-\frac{\pi}{4}$	0
$\frac{\pi}{4}$	1
$\frac{3\pi}{4}$	0
$\frac{5\pi}{4}$	-1
$\frac{7\pi}{4}$	0

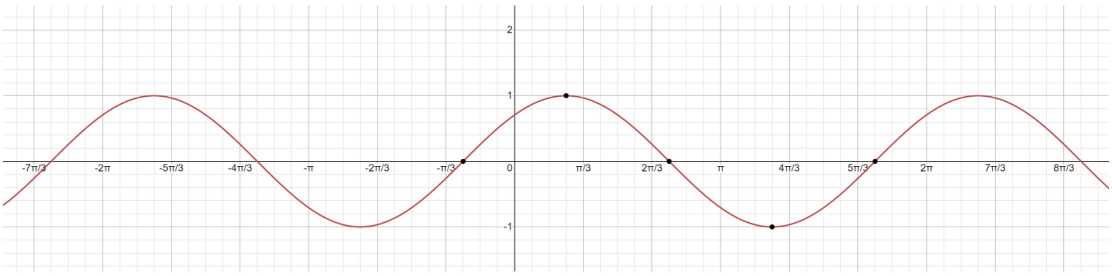
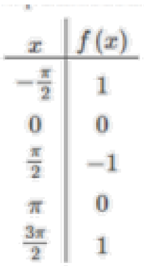


Рисунок 28 – К заданию №11.3а

Решение:

$$y = 2\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos\frac{\pi}{2} = -2 \cdot 1 + 0 = -2.$$

Задание №11.5 Постройте график функции: а) $y = \cos(x + \frac{\pi}{2})$ (рисунок 29).



x	$f(x)$
$-\frac{\pi}{2}$	1
0	0
$\frac{\pi}{2}$	-1
π	0
$\frac{3\pi}{2}$	1

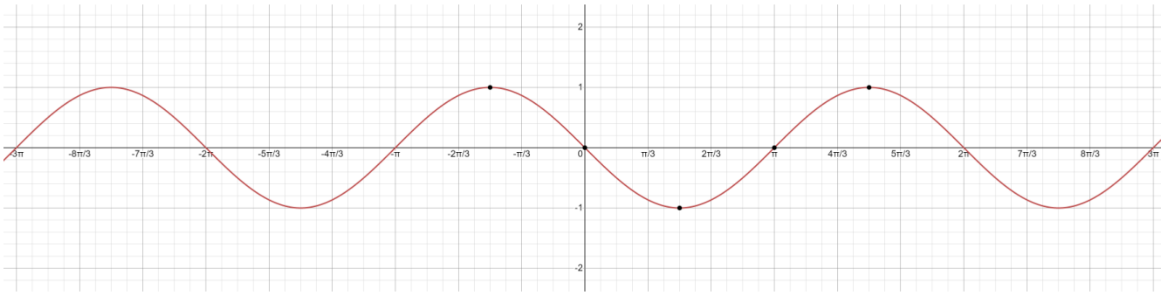


Рисунок 29 – К заданию №11.5а

Количественный анализ выполнения лабораторно-практической работы учащимися представлен в таблицах 25, 26.

Таблица 25 – Результаты выполнения работы (по количеству учащихся выполнивших задания)

Дата: 12.11.2021 Класс: 10Л Тема: «Функции y = sin x, y = cos x, их свойства и графики»	Отметка (оценка)			
	5	4	3	2
Кол-во учащихся, получивших				
% от общего числа учащихся, выполнивших работу	15%	56%	22%	7%
Кол-во учащихся, не выполнявших работу	0			
Общее кол-во учащихся	27			

Таблица 26 – Результаты выполнения работы (по качеству выполнения заданий)

	Номер задания (задачи)			
	1	2	3	4
Правильно и полностью выполнили задание	14	16	11	12
Правильно и частично выполнили задание	11	7	14	12
Неправильно выполнили задание	2	4	2	3
Не приступали к выполнению задания	0	0	0	0

Выполнение данной работы основывалось на знаниях определения понятий математических объектов и их свойств, выполнение заданий по образцу или определенному алгоритму.

Лабораторно-практическая работа №2

Лабораторно-практическая работа по теме «Построение сечений многогранников» обучающегося ____ класса. Ф.И.: ____________________

Цель работы: закрепление умений и навыков по применению понятия «построение сечений многогранников», решение задач на нахождение площади сечения.

Оборудование: лист бумаги, линейка, карандаши.

План работы:

а) выполнить задачи с развернутым ответом;

б) заполнить таблицу с заданиями на построение.

Задача 1. «Построить сечение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью (рисунок 30), проходящей через точки B_1 и D_1 и середину ребра AD, если ребро куба равно 16. Найти площадь этого сечения» [35].

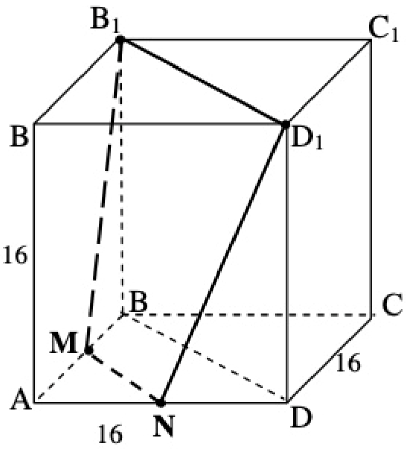


Рисунок 30 – К задаче 1

Решение.

а) соединим точки B_1 и D_1, так как они лежат в одной плоскости;

б) точка N – середина ребра AD, значит $N \in ABD_1D$. Следовательно, можно соединить точки N и D_1;

в) через точку N проведем прямую NM параллельную прямой B_1D_1;

г) соединим точки Mи B_1, лежащие в одной плоскости;

д) получившееся сечение MB_1D_1N является трапецией, так как $MN \parallel B_1D_1$ и $MN = \frac{1}{2}BD$, как средняя линия ΔABD;

е) найдем BD по теореме Пифагора:

$BD^2 = AB^2 + AD^2 = 256 + 256 = 512;\ BD = \sqrt{512} = \sqrt{256 \cdot 2} =$
$= 16\sqrt{2};$

$$B_1D_1 = 16\sqrt{2} \Rightarrow MN = 8\sqrt{2};$$

ж) найдем ND_1 по теореме Пифагора из ΔNDD_1:

$$B_1N^2 = ND^2 + D_1D^2 = 64 + 256 = 320;$$

$$D_1N = \sqrt{320} = \sqrt{64 \cdot 5} = 8\sqrt{5};$$

з) рассмотрим трапецию MB_1D_1N (рисунок 31):

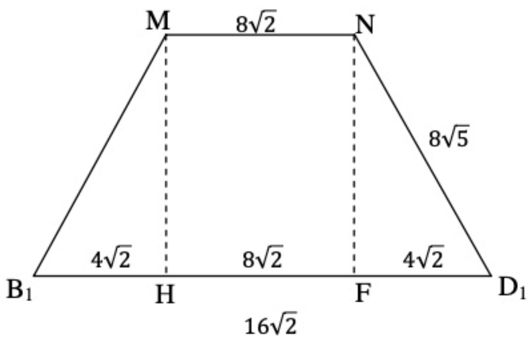


Рисунок 31 - Трапеция MB_1D_1N

$S = \frac{MN + B_1D_1}{2} \cdot NF.$

Найдем высоту NF из ΔD_1NF по теореме Пифагора:

$$NF^2 = D_1N^2 - D_1F^2 = 320 - 3 = 288.$$

$$NF = \sqrt{288} = \sqrt{144 \cdot 2} = 12\sqrt{2}.$$

$$S = \frac{1}{2}(8\sqrt{2} + 16\sqrt{2}) \cdot 12\sqrt{2} = 12\sqrt{2} \cdot 12\sqrt{2} = 288.$$

Ответ: 288.

Задания для самостоятельного выполнения приведены в таблице 27.

Таблица 27 – Задания для самостоятельного выполнения

Текст задания	Чертеж
В треугольной пирамиде SABC провести сечение: а) через середину ребра AC параллельно грани SCB; б) через середину ребра SC параллельно грани SAB.	
Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Постройте сечение куба плоскостью, которая проходит через данные точки: а) C_1, K, D; б) C_1, K, C, где точка K – середина A_1B_1. Определите, какая фигура образуется в сечении.	

Результаты качественного анализа проведенной работы представлены в таблицах 28, 29.

Таблица 28 – Результаты выполнения работы (по количеству учащихся выполнивших задания)

Дата: 27.12.2021 Класс: 10Л Тема: «графические методы решений уравнения касательной к функции»	Отметка (оценка)			
	5	4	3	2
Кол-во учащихся, получивших				
% от общего числа учащихся, выполнивших работу	17%	62%	18%	3%
Кол-во учащихся, не выполнявших работу	0			
Общее кол-во учащихся	27			

Таблица 29 - Результаты выполнения работы (по качеству выполнения заданий)

	Номер задания (задачи)		
	1	2	3
Правильно и полностью выполнили задание	19	17	14
Правильно и частично выполнили задание	7	8	13
Неправильно выполнили задание	1	2	1
Не приступали к выполнению задания	0	0	0

Отметим, что результаты выполнения заданий в работах с развернутым ответом показывают повышение уровня сформированности осознанности знаний учащихся, так как демонстрируют не только знания математических объектов и их свойств, но и их аналитические и графические умения.

Вывод по второй главе

Представлена технология обучения алгоритмам при проведении лабораторно-практических работ на уроках математики в старших классах (на примере изучении темы «Уравнение касательной к графику функции»). Так, Спроектировано данной темы по учебнику 10 класса А.Г. Мордковича (3 часа) в рамках технологии обучения алгоритмам Е.И. Лященко.

Разработан элективный курс по математике «Лабораторный практикум для 10-11 классов по алгебре и началам математического анализа и геометрии». Установлено, что на элективных курсах учащиеся отрабатывают полученные на уроках знания и навыки, овладевают конкретными глубокими математическими знаниями. При выполнении лабораторно-практических работ происходит упорядочение знаний, осознанное понимание материала.

Представлены результаты педагогического эксперимента, который показал повышение уровня сформированности осознанности знаний учащихся на основе технологии обучения алгоритмам при проведении лабораторно-практических работ на уроках математики, при проведении элективных курсов; школьниками продемонстрированы не только знания математических объектов и их свойств, но и их аналитические и графические умения.

Заключение

Раскрыто понятие осознанности в обучении математике. Установлено, что осознанность знаний учащихся является важным компонентом в обучении; осознанность мы рассматриваем в контексте реализации принципа сознательности в обучении, который предусматривает не только глубокое освоение материала, но и его применение в решении задач.

Описана роль лабораторно-практических работ в формировании осознанности знаний обучающихся общеобразовательной школы. Так, применение лабораторно-практических работ при обучении школьников математике способствует усилению практической направленности обучения; прочному, неформальному усвоению ими изученного теоретического материала; овладению методами экспериментально-практического исследования; развитию у них конструктивных умений и исследовательских навыков, интереса и положительной мотивации к приобретению знаний; развитию навыков самостоятельности; также повышению качества знаний, в том числе уровня сформированности у них осознанности знаний.

Выявлены методические особенности формирования осознанности знаний обучающихся общеобразовательной школы с помощью лабораторно-практических работ. Например, определено, что целесообразно применять прикладные задачи, системы задач; устные упражнения; специальные рефлексивные задачи, способствующие осознанию учащимися способа их решения; задачи: на нахождение ошибок в решении; с избыточными и недостающими данными; с противоречивыми условиями, например, когда задача не имеет решения; на приведение примеров и контрпримеров, например, установление истинности высказываний; с элементами исследования, например, задания с параметрами, с уравнения и неравенствами, содержащими переменную под знаком модуля.

Представлена технология обучения алгоритмам при проведении лабораторно-практических работ на уроках математики в старших классах (на примере изучении темы «Уравнение касательной к графику функции»). Применение их на практике стимулирует интерес к учебной деятельности учащихся, вносит разнообразие на уроках, что приводит к формированию прочных и качественных знаний. За основу была взята технология обучения алгоритмам автора Е.И. Лященко.

Разработан элективный курс по математике «Лабораторный практикум для 10-11 классов по алгебре и началам математического анализа и геометрии». При выборе заданий для лабораторно-практических работ были выявлены основные критерии и требования к задачам, формирующие осознанность знаний. Опираясь на них, задачи были сгруппированы по следующим типам: на обоснование необходимости рассмотрения алгоритма; на актуализацию знаний, необходимых для обоснования алгоритма, и умений, необходимых для его выполнения; на выполнение отдельных операций, входящих в алгоритм; на применение алгоритмов в различных ситуациях.

Представлены результаты педагогического эксперимента, который показал повышение уровня сформированности осознанности знаний учащихся на основе технологии обучения алгоритмам при проведении лабораторно-практических работ на уроках математики, при проведении элективных курсов; школьниками продемонстрированы не только знания математических объектов и их свойств, но и их аналитические и графические умения.

Таким образом, цель и задачи исследования достигнуты.

Список используемой литературы

1. Алексанян И.Н. Роль лабораторно-практических работ в обучении математике учащихся общеобразовательной школы // «Молодежь. Наука. Общество-2020»: Всероссийская студенческая научно-практическая междисциплинарная конференция (Тольятти, 25 декабря 2020 года - 29 января 2021 года): электронный сборник студенческих работ / отв. за вып. С.Х. Петерайтис. Тольятти: Изд-во ТГУ, 2021. С. 246-249.
2. Алексанян И.Н. О формировании осознанных знаний учащихся общеобразовательных школ с помощью лабораторно-практических работ // «Студенческие Дни науки в ТГУ – 2021»: научно-практическая конференция (Тольятти, 5-30 апреля 2021 года): сборник студенческих работ /отв. за вып. С.Х. Петерайтис. Тольятти: Изд-во ТГУ, 2021. С. 486-489.
3. Алексанян И.Н. Формирование осознанности знаний обучающихся с помощью технологии обучения алгоритмам на уроках математики в старших классах // «Молодежь. Наука. Общество-2021»: Всероссийская студенческая научно-практическая междисциплинарная конференция (Тольятти, 20-24 декабря 2021 года): электронный сборник студенческих работ/ отв. за вып. С.Х. Петерайтис. Тольятти: Изд-во ТГУ, 2022. (в печати).
4. Антонова И.В., Алексанян И.Н. Технология обучения алгоритмам как средство формирования осознанности знаний обучающихся по математике в общеобразовательной школе // Математика и математическое образование: сборник трудов X Международной научной конференции «Математика. Образование. Культура» (к 160-летию со дня рождения Давида Гильберта), 27-29 апреля 2022 года, Россия, г. Тольятти / под общ. ред. Р.А. Утеевой. Тольятти: Изд-во ТГУ, 2022. (в печати).
5. Аммосова Н.В., Коваленко Б.Б. Практические работы по математике в учебной деятельности школьников // Актуальные проблемы

современного образования 2015 No2 (19) С. 87-92 URL: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=25680358 Последнее обновление 09.01.2020

6. Аммосова Н.В., Коваленко Б.Б. Решение задач по математике с избыточными или противоречивыми данными в общеобразовательной школе // Успехи современного естествознания. 2015. № 5. С. 183-185; URL: https://natural-sciences.ru/ru/article/view?id=35125 (дата обращения: 20.05.2022).

7. Атанасян Л.С. Геометрия. 7-9 классы [Текст]: учеб. для общеобразоват. учреждений / Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев и др. 2-е изд. М.: Просвещение, 2014. 383 с.

8. Атанасян Л.С. Геометрия, 10–11 классы: учеб. для общеобразоват. учреждений: базовый и профил. уровни. / Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев и др. 18 изд. М.: Просвещение, 2009. – 255 с.

9. Башмаков М.И. Ценностные ориентиры математического образования // Математика (приложение к газете «Первое сентября»). 2005. №41.

10. Бурмистрова Т.А. Программы общеобразовательных учреждений. Геометрия. 10–11 классы. М.: Просвещение, 2009. – 96 с.

11. Бурцев И. С., Методическое пособие по GeoGebra построение графиков, исследование функций URL: https: // docplayer.ru / 73261911 - I - s - burcev - metodicheskoe - posobie - po - geogebra - postroenie - grafikov - issledovanie - funkciy.html свободный (дата обращения 21.12.2020).

12. Варшавский И.К. Функция, ее производная и первообразная // Математика в школе. 2005. №8. С. 2-15.

13. Гилеев В.Г. Методика введения производной на основе метода обобщения // Научно-методический электронный журнал «Концепт». 2017. № 4. URL: https://cyberleninka.ru/article/n/metodika-vvedeniya-proizvodnoy-na-osnove-metoda-obobscheniya/viewer. (Дата обращения 06.05.2022).

14. Далингер В.А. Рефлексивные задачи как средство, обеспечивающее понимание учащимися учебного материала по математике //

Проблемы теории и практики обучения математике: сборник работ 65 Герценовских чтений. Спб, 2012. с. 181-185.

15. Далингер В.А. Текстовые сюжетные задачи, их классификация и методические рекомендации по обучению учащихся их решению // Актуальная педагогика. №1. 2016. С. 46-56.

16. Иванова О.Ю. Задачи по математике как средство выявления качеств знаний обучающихся общеобразовательной школы: Научно-квалификационная работа (диссертация) по направлению подготовки 44.06.01 «Образование и педагогические науки». Тольятти, ТГУ, 120 с.

17. Епишева О.Б. Технология обучения математике на основе деятельностного подхода: кн. для учителя [Текст] /О.Б. Епишева. М.: Просвещение, 2003. 224 с.

18. Епишева О.Б. Учить школьников учиться математике: Формирование приемов учебной деятельности: кн. для учителя / О.Б. Епишева, В.И. Крупич. М.: Просвещение, 1990. - 128 с.

19. Епифанова Н.М. Проведение лабораторных и практических работ на уроках математики [Электронный ресурс]. Режим доступа: https://refdb.ru/look/2184712.html (Дата обращения: 02.02.2021)

20. Колягин Ю. М. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс: учеб.для общеобразовательных учреждений : базовый и профил. уровни / Ю.М. Колягин и др. М.: Просвещение, 2010. 336 с.

21. Колягин Ю.М. Задачи в обучении математике. Ч. 1. М.: Просвещение, 1977. 112 с.; Ч. 2. М.: Просвещение, 1977. 144 с.

22. Лабораторные и практические работы по методике преподавания математики: Учеб. пособие для студентов физ.-мат. спец. пед. ин-тов / Е.И. Лященко, К.В. Зобкова, Т.Ф. Кириченко и др.; Под ред. Е.И. Лященко. М.: Просвещение, 1988. 223 с.

23. Лернер И.Я. Качества знаний учащихся. Какими они должны быть? М.: Знание, 1978. 48 с.

24. Ляпин С.Е. Методика преподавания математики / С.Е. Ляпин. Л.: Учпедгиз, Ленингр. отд-ние, 1955. 483 с.

25. Манвелов С.Г. Конструирование современного урока математики: Книга для учителя / С. Г. Манвелов. 2-е изд. М.: Просвещение, 2005. 175 с.

26. Метельский Н.В. Дидактика математики: общая методика и ее проблемы. 2-е изд., перераб. Мн.: Изд-во БГУ, 1982. - 256 с.

27. Методика и технология обучения математике. Лабораторный практикум: учебное пособие для студентов матем. факультетов пед. университетов / [Н.Л. Стефанова и др.]; под научн. ред. В.В. Орлова. М.: Дрофа, 2007. 320 с.

28. Методика преподавания математики в средней школе. Общая методика. Учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. институтов / Ю.М. Колягин, В.А. Оганесян, Г.Л. Луканкин, В.Я. Саннинский. М.: Просвещение, 1975. 462 с.

29. Молоткова Б.Б. Методика использования электронных образовательных ресурсов при изучении тригонометрии как средство повышения уровня осознанности знаний: автореф. дис. канд. пед. наук: 13.00.02/ Российский государственный педагогический университет им. А.И. Герцена. Санкт-Петербург, 2014. 23 с.

30. Мордкович А.Г. Алгебра и начала анализа. 10 класс. В 2 ч. Ч. 1. Учебник для общеобразоват. учреждений (профильный уровень) / [А.Г. Мордкович и др.]; под ред. А.Г. Мордковича. изд. 4-е, испр. М.: Мнемозина, 2009. 424 с.

31. Мордкович А.Г. Алгебра и начала анализа. 10 класс. В 2 ч. Ч. 2. Задачник для общеобразоват. учреждений (профильный уровень) / [А.Г. Мордкович и др.]; под ред. А.Г. Мордковича. - изд. 4-е, испр. М.: Мнемозина, 2009. 343 с.

32. Орехов Ф.А. Графические лабораторные работы по геометрии: пособие для учителей VI-VIII классов. М.: Просвещение, 1964. 112 с.

33. Петренко И.А. О задачах касательной к кривой // Университетская наука. 2021. №11. С. 160-168.

34. Подлевских М. Н. Лабораторные работы по математике в Geogebra / М. Н. Подлевских // Наука и образование: сохраняя прошлое, создаём будущее: сборник статей XI Международной научно-практической конференции, Пенза, 05 сентября 2017 года. Пенза: "Наука и Просвещение" (ИП Гуляев Г.Ю.), 2017. С. 147-150.

35. Потоскуев Е.В., Звавич Л.И. Геометрия 10 класс, углубленный уровень, М., Просвещение, 2021, 384 с.

36. Пратусевич М.Я. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений: профил. уровень / М.Я. Пратусевич. К.М. Столбов, А.Н. Головин. М.: Просвещение, 2010. 463 с.

37. Программы. Математика. 5-6 классы. Алгебра. 7-9 классы. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы» / авт. – сост. И.И. Зубарева, А.Г. Мордкович 3-е изд., стер. М.: Мнемозина, 2011. 63 с.

38. Продан С.В. Тестовые задания по теме «Касательная к графику функции». URL: https://urok.1sept.ru/articles/509146 (дата обращения 02.05.2022).

39. Решение задач по математике. Адаптивный курс для студентов технических вузов: учебное пособие / В.В. Гарбарук, В.И. Родин, И.М. Соловьева, М.А. Шварц. 2-е изд., стер. Санкт-Петербург: Лань, 2018. 688 с.

40. Решу ЕГЭ Образовательный портал для подготовки к экзаменам. – URL: http://math.reshuege.ru/. (Дата обращения 02.05.2022).

41. Ряснова Э.Е. Производная и ее применение. – URL: https://urok.1sept.ru/articles/567419. (Дата обращения 13.05.2022).

42. Саулина И.П. Избранные вопросы по математике. – URL: http://afonino-school.ru/images/doc/obr/Maths_EK_10-11.pdf. (Дата обращения 02.05.2022).

43. Саяпина Н.В. Роль и место лабораторных работ в практике обучения школьников математике // Актуальные проблемы естественнонаучного и математического образования: материалы международной научно-практической конференции. Самара: Издательство: Самарский государственный социально-педагогический университет, 2016. С. 287-294.

44. Саранцев Г.И. Методика обучения математике в средней школе: учеб. пособие для студентов математ. специальностей пед. вузов и ун-тов: учеб. пособие для студентов вузов, обучающихся по специальности 032100 Математика [Текст] /Г.И. Саранцев. М.: Просвещение, 2002. 223 с.

45. Смирнова А.А. Метод варьирования текстовых задач по математике как средство повышения качества знаний учащихся.: автореф. дис. … канд. пед. наук: 13.00.02/ Российский государственный педагогический университет им. А.И. Герцена. Санкт-Петербург, 2007. 21 с.

46. Стефанова Н.Л. Методика и технология обучения математике: курс лекций: учеб. пособие для студ. мат. фак. вузов, обучающихся по направлению 540200 (050200) "Физико-мат. образование" [Текст] / Н. Л. Стефанова [и др.]; [под науч. ред. Н. Л. Стефановой]. Гриф УМО. Москва : Дрофа, 2005. 416 с.

47. Столяр А.А. Педагогика математики (курс лекций). Минск: Вышэйш. школа, 1986. 414 с.

48. Тараник В.И. Практические работы по геометрии как средство развития самостоятельной познавательной деятельности учащихся основной школы : автореф. дис. ... канд. пед. наук: 13.00.02 / Волгогр. гос. пед. ун-т. Волгоград, 2010. 28 с.

49. Темербекова А. А. Методика обучения: учеб.пособие / А. А. Темербекова, И. В. Чугунова, Г. А. Байгонакова. Санкт-Петербург: Лань, 2015. С.47-74.

50. Теория и технология обучения математике в средней школе: учебное пособие для студентов математических специальностей

педагогических вузов / Т.А. Иванова [и др.]; под ред. Т.А. Ивановой. изд. 2-е, испр. и доп. Нижний Новгород: НГПУ, 2009. 353 с.

51. Хафизова Н.Ю. К вопросу формирования умения комплексного применения обучающимися знаний в области естественно-математического образования / Н.Ю. Хафизова // Символ науки. 2016. №5-2. С. 219-221.

52. Широкова Е.А. Лабораторная работа как средство понимающего усвоения старшеклассниками понятий математического анализа [Текст] / Е. А. Широкова // Известия Рос. гос.пед. ун-та им. А.И. Герцена. 2008. № 69. С. 508–513.

53. Ширшова Т.А., Полякова Т.А. Лабораторные работы как средство мотивации и активизации учебной деятельности учащихся [Текст] // Омский научный вестник 2015 №4 С. 188-190.

54. Фарков А.В. Основные показатели обучаемости учащихся математике Сибирский педагогический журнал. 2010. № 3. с. 210-217.

55. Федеральный государственный образовательный стандарт среднего (полного) общего образования: Приказ Мин. образования и науки РФ от 17.05.2012 г. №413. URL: http://минобр-науки.рф/документы/2365 Последнее обновление 07.02.2021

56. Федеральный институт педагогических измерений - URL: https://fipi.ru/ (Дата обращения 12.04.2022)

57. Фестиваль педагогических идей «Открытый урок». – URL: http://festival.1september.ru/.

58. Цукарь А.Я. Дидактические материалы по геометрии с элементами исследования для 7 класса. М.: Просвещение, 1998, 76 с.

59. Экспериментальная математика в школе. Исследовательское обучение: коллективная монография [Текст] / М.В. Шабанова, Р.П. Овчинникова, А.В. Ястребов и др. М.: ИД «Академия Естествознания», 2016. 299 с.

60. Ebele C., Abigail M. Effect of Using Mathematics Laboratory in Teaching Mathematics on the Achievement of Mathematics Students URL: https://eric.ed.gov/?id=EJ893996 (Дата обращения: 14.11.2021)

61. Haara F.O. Unveiling teachers' reasons for choosing practical activities in mathematics teaching URL: https://brage.bibsys.no/xmlui/bitstream/id/113756/40285_Haara_MainThesis.pdf (дата обращения: 11.12.2021).

62. Hynes M.E., Hynes M., Mercella L. Kysilka, Brumbaught D. Mathematics Laboratories: What Does Research Say? URL: http://www.ascd.org/ASCD/pdf/journals/ed_lead/el_197312_hynes.pdf (дата обращения: 04.02.2021).

63. Wilkinson J.D.. A laboratory method to teach geometry in selected sixth grade mathematics classes. URL: https://lib.dr.iastate.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=5808&context=rtd (дата обращения: 08.12.2021).

64. Wolfram C. A Practical Approach to Teaching Maths URL: https://www.heacademy.ac.uk/system/files/msor.4.4p.pdf (дата обращения: 01.12.2021).