МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Тольяттинский государственный университет»

Институт математики, физики и информационных технологий
(наименование института полностью)

Кафедра «Высшая математика и математическое образование»
(наименование)

44.04.01 Педагогическое образование
(код и наименование направления подготовки)

Математическое образование
(направленность (профиль))

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА (МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ)

на тему «Задачи на исследование свойств и признаков геометрических объектов как средство личностно-ориентированного обучения математике в общеобразовательной школе»

Обучающийся С.А. Харламова
(И.О. Фамилия) (личная подпись)

Научный руководитель канд. пед. наук О.А. Кузнецова
(ученая степень, звание, И.О. Фамилия)

Тольятти 2022

Оглавление

Введение

Актуальность и научная значимость настоящего исследования. Современный этап развития системы образования РФ характеризуется ориентацией обучения на личность учащегося, что является системообразующим началом образовательного процесса. Меняются цели и задачи образования, основное внимание переносится на формирование образовательных компетенций.

Для реализации приоритетных направлений важное значение имеет предметная область, на которой будет организован этот процесс. «Геометрия», как учебная дисциплина, дает все возможности для формирования необходимых качеств и компетенций современного выпускника общеобразовательной школы. Изучение геометрии способствует целенаправленному развитию аналитического и алгоритмического мышления, воображения и интуиции, творческих и исследовательских способностей. При изучении геометрии учащиеся в той или иной степени (в соответствии со своими способностями и уровнем обученности) овладевают общенаучными методами познания (анализ, синтез, индукция и дедукция, сравнение и аналогия и т.д.).

Поэтому на всех уроках геометрии нужно исходить из того, что изучение этого предмета направлено не только на достижение предметных целей – знакомство с различными геометрическими объектами и их свойствами, но и на решение более важных задач, определяемых Федеральным государственным образовательным стандартом, – «…формирование личности учащегося, развитие его логического мышления, умения ясно, точно и компетентно излагать свои мысли, аргументировать высказанные утверждения, всестороннее развитие творческих способностей учащегося» [75].

Включение учащегося в активный процесс познания мира, развитие умения самостоятельно конструировать свои знания в интенсивном информационном потоке, умение увидеть проблему, ставить цель, выдвигать гипотезу, искать и находить пути ее решения возможно только при ориентировании школьного образования на личностно-ориентированный подход, при обучении через активные и интерактивные методы, а также поощрение учащихся к исследовательской деятельности посредством решения задач исследовательского характера, что в свою очередь способствует формированию геометрической культуры личности.

Одним из средств реализации личностно-ориентированного обучения и развития геометрической культуры на уроках геометрии в общеобразовательной школе является решение задач на исследование свойств и признаков геометрических объектов, которое способствует достижению учащимися предметных, личностных и метапредметных результатов обучения в соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом основного общего образования.

При решении задач на исследование свойств и признаков геометрических объектов у учащихся формируется такие умения как: анализ жизненных ситуаций, оценка возможных альтернатив, выбор оптимального варианта и составлять план его осуществления. В связи с этим увеличивается роль функциональной математической грамотности в формировании геометрической культуры, как одной из составляющих компонентов личности учащихся.

В Российской Федерации установлено несколько форм контроля качества усвоения учебных программ учащимися: всероссийская проверочная работа (ВПР), основной государственный экзамен (ОГЭ) и единый государственный экзамен (ЕГЭ). При оценке качества по математике на всех уровнях контроля присутствуют геометрические задания, соответствующие восьми навыкам XXI века, добавленным в Концепцию развития математического образования в РФ (критическое мышление; креативность; исследование и изучение и т. д.) [38].

В связи с этим актуальной является задача исследования возможностей формирования навыков XXI века посредством задач на исследование свойств и признаков геометрических объектов в контексте личностно-ориентированного обучения.

Таким образом, значимость исследования обусловлена необходимостью разработки методической системы формирования геометрической культуры и математической грамотности учащихся. Актуальность исследования обусловлена сложившимся к настоящему времени **противоречием** между необходимостью повышения качества знаний учащихся в рамках перехода к новым стандартам, технологиям обучения, методам оценивания результатов обучения и недостаточной разработанностью методических основ использования задач на исследование свойств и признаков геометрических объектов как средства повышения качества усвоения учебного материала в рамках реализации личностно-ориентированного обучения математике в общеобразовательной школе.

Данное противоречие позволило сформулировать **проблему исследования**: каковы методические основы эффективного процесса обучения решению задач на исследование свойств и признаков геометрических объектов в контексте личностно-ориентированного обучения.

Объект исследования: процесс обучения учащихся геометрии в общеобразовательной школе.

Предмет исследования: методика обучения школьников решению задач на исследование свойств и признаков геометрических объектов в курсе геометрии общеобразовательной школы.

Цель исследования: определить методические основы и разработать методические материалы обучения школьников решению задач на исследование свойств и признаков геометрических объектов в курсе геометрии в общеобразовательной школе.

Гипотеза исследования основана на том, что процесс обучения решению задач на исследование свойств и признаков геометрических объектов будет эффективным, если:

– выявить методические особенности обучения решению задач на исследование свойств и признаков геометрических объектов на основе личностно-ориентированного подхода;

– разработать систему разноуровневых заданий на исследование свойств и признаков трапеции и пирамиды, решение которых способствует формированию обучающих компетенций и личностных качеств учащихся.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие **задачи:**

1. Определить понятие геометрического объекта, описать этапы выявления свойств и признаков геометрических объектов.
2. Выделить приемы и методы решения задач на исследование свойств и признаков геометрических объектов.
3. Раскрыть особенности формирования исследовательских умений при решении геометрических задач в рамках личностно-ориентированного обучения.
4. Разработать методическую систему по обучению учащихся решению задач на исследование свойств и признаков геометрических объектов в контексте личностно-ориентированного обучения.
5. Разработать системы разноуровневых задач на исследование свойств и признаков трапеции и пирамиды.
6. Провести апробацию методических материалов и представить результаты педагогического эксперимента.

Теоретико-методологическую основу исследования составили основные положения теории формирования математических понятий В.А. Гусева [21], Н.С. Подходовой [47], Д. Пойя [49], Г.И. Саранцева [58], а также концепции личностно-ориентированного и дифференцированного обучения математике Н.А. Алексеева [3], В.В. Серикова [61], Р.А. Утеевой [74] и И.С. Якиманской [88].

Базовыми для настоящего исследования явились также работы Е.В. Барановой [8], В.В. Гузеева [20], Н.П. Гузик [21], В.А. Далингера [26] и А.А. Окунева [44].

Методы исследования: изучение и анализ работ по методике преподавания математике, научной и учебно-методической литературы, ФГОС, школьных программ, учебников, учебных пособий, изучение и обобщение школьной практики, опыта работы учителей математики; анализ собственного опыта работы в школе; проведение педагогического эксперимента по проверке основных положений исследования.

Основные этапы исследования:

– 1 семестр (2020/2021 уч. г.): анализ ранее выполненных исследований по теме диссертации, анализ школьных учебников, нормативных документов, анализ опыта работы школы по теме исследования;

– 2 семестр (2020/2021 уч. г.): определение теоретических и методических аспектов исследования по теме диссертации;

– 3 семестр (2021/22 уч. г.): разработка дифференцированных заданий на исследование свойств и признаков «трапеции» и пирамиды в курсе геометрии общеобразовательной школы;

– 4 семестр (2021/2022 уч. г.): оформление диссертации, корректировка ранее представленных результатов, уточнение аппарата исследования, описания результатов экспериментальной работы, формулирование выводов по главам.

Опытно-экспериментальная база исследования КГУ «Общеобразовательная школа № 4» отдела образования города Балхаш управления образования Карагандинской области (Республика Казахстан).

Научная новизна исследования заключается в предложенной методической системе обучения решению задач на исследование свойств и признаков геометрических объектов в курсе геометрии общеобразовательной школы в контексте личностно-ориентированного обучения.

Теоретическая значимость исследования заключается в определении принципов личностно-ориентированного подхода, приемов и методов обучения решению планиметрических и стереометрических задач на исследование свойств и признаков геометрических объектов в курсе геометрии общеобразовательной школы.

Практическую значимость исследования заключается в разработанных системах задач на исследование свойств и признаков трапеции и пирамиды, которые могут быть использованы учителями математики общеобразовательной школы и студентами педагогических направлений подготовки.

Достоверность и обоснованность результатов исследования обеспечивались сочетанием теоретических и практических методов исследования, анализом педагогической практики и личным опытом работы в общеобразовательной школе.

Личное участие автора в организации и проведении исследования состоит в определении методических особенностей и рекомендаций по обучению учащихся решению задач на исследование свойств и признаков геометрических объектов в контексте личностно-ориентированного обучения, разработке систем задач на исследование свойств и признаков трапеции и пирамиды, в описании результатов экспериментальной работы.

Апробация и внедрение результатов работы велись в течение всего исследования во время прохождения практик (производственная и преддипломная) на базе кафедры «Высшая математика и математическое образование» ФГБОУ ВО «Тольяттинский государственный университет». Основные результаты исследования докладывались на научно-практической конференции «Студенческие дни науки ТГУ» (март 2022 год) [81] и отражены в 5 публикациях [78, 79, 80, 81, 82].

На защиту выносятся:

– методические рекомендации по обучению учащихся решению задач на исследование свойств и признаков геометрических объектов в курсе геометрии общеобразовательной школы в контексте личностно-ориентированного обучения;

– системы задач на исследование свойств и признаков трапеции и пирамиды для учащихся общеобразовательной школы.

Структура магистерской диссертации. Работа состоит из введения, двух глав, заключения, содержит 43 рисунка, 12 таблиц, список используемой литературы (94 источника), 4 приложения. Основной текст работы изложен на 130 страницах.

Глава 1 Теоретические основы личностно-ориентированного обучения школьников решению задач на исследование свойств и признаков геометрических объектов

1.1 Понятие геометрического объекта, этапы выявления свойств и признаков геометрических объектов

Описание пространства и материальных объектов способствовало зарождению понятия геометрических объектов.

Под геометрическим объектом понимается «…конечное множество базовых геометрических фигур, связанных между собой определенными соотношениями.

Базовая геометрическая фигура – это фигура, рассматриваемая для данного геометрического объекта как неделимая составная часть с известными геометрическими параметрами. Любая базовая геометрическая фигура изображается с помощью точек, прямых, отрезков прямой, многоугольников, отрезков кривых и объемных фигур произвольных форм. Для отображения разнообразных свойств объектов (размеры, форма, положение в пространстве и др.) применяются разнообразные геометрические модели» [58].

А.Н. Колмогоров считает, что «… геометрическая фигура есть любое множество точек» [36, с. 5].

Понятие – это форма мышления о совокупности существенных и несущественных свойств геометрических объектов.

Любая теория строится на некоторых базовых понятиях, которые интуитивно понятны и свойства которых описываются аксиомами. Основными неопределяемыми понятиями геометрии в различных системах аксиом могут быть точка, прямая, плоскость, объём, пространство.

Для понятий и терминов можно говорить о толковании геометрических объектов и получении знаний о признаках, которыми обладает геометрический объект. Иначе говоря, чтобы получить знания о геометрическом объекте, необходимо провести классификацию в некотором выработанном множестве понятий.

Классификация геометрических объектов – это «…разделение этих самых объектов на группы или классы, имеющие общие свойства (рисунок 1).

Рисунок 1 – Классификация геометрических объектов

Классификация – особый случай применения логической операции деления объёма понятия, представляющий собой некоторую совокупность делений» [28, с. 371].

Как видно из классификации геометрия изучает большое количество различных геометрических объектов, которые обладают точным описанием, определением, свойствами и признаками. Определения геометрическим объектам (фигурам, телам) даются для умения их классифицировать и изучать.

Такие понятия как «признак» и «свойство» являются одними из фундаментальных в геометрии.

Рассмотрим различные формулировки термина «свойство», которые имеются в методической литературе.

В справочнике [34] написано: «Свойство – это то, что присуще предметам, что отличает их от других предметов или делает их похожими на другие предметы (например, твердость, шероховатость, упругость, теплопроводность и т.д.). Каждый предмет обладает бесчисленным множеством свойств... Свойства делятся на существенные, без которых предмет существовать не может, и несущественные... В практике различают также свойства общие и специфические, необходимые и случайные, внутренние и внешние, совместимые и несовместимые и т. д.» [34, с. 524].

Для геометрии важную роль играют существенные и несущественные свойства геометрических объектов (фигур, тел). Можно представить также некоторые общие и специфические свойства: общим свойством у шара и куба является то, что они представляют собой множество точек – являются геометрическими объектами, кроме того, обе эти фигуры являются частью пространства. Специфических свойств у них также много, например, у шара есть радиус, а у куба – нет.

В учебнике [71] «Свойство – это то, что каким-то образом характеризует вещь и не требует для своего описания больше одной вещи» [71, с. 111]. Существенными свойствами геометрического объекта являются те, без которых данный объект не существует. При их помощи выделяется и обобщается геометрический объект из интересующего множества. Существенным свойством геометрического объекта считают каждый из которых, взятый отдельно, необходим, а взятые в совокупности достаточны для отделения данного объекта от остальных. Например, существенные свойства квадрата: «является четырехугольником, иметь равные противоположные стороны, иметь все равные стороны, диагонали в точке пересечения делятся пополам, быть параллелограммом (частный случай) и т.д.» [88, с. 24].

Естественно, что таких свойств у геометрического объекта (фигуры) может быть достаточно много, поэтому, довольно часто, обращаются к достаточному набору свойств. Достаточные свойства или, иначе, достаточный набор существенных свойств позволяют однозначно выделить необходимое множество геометрических объектов из всех остальных. Так, например, для квадрата достаточный набор свойств могут образовать следующие свойства: «иметь все равные стороны и быть параллелограммом» или, другой набор достаточных свойств: «быть параллелограммом и иметь равные диагонали» [87, с. 24]. Как видно из приведенных примеров, наборов достаточных свойств может быть несколько, и они образуют определение понятия или признаки.

Кроме того, свойством объекта в геометрии принято считать одно из следствий определений или теорем, которое является, по существу, некоторым утверждением о геометрическом объекте. Иначе, свойство трактуется, как утверждение, которое обязательно должно выполняться для данного множества объектов. Например: «Основания призмы равны; у параллелепипеда все грани – параллелограммы; у правильной пирамиды боковые ребра равны, одинаково наклонены к плоскости основания» [51, с. 51, 54, 59].

Перейдем к описанию термина «признак» в методической литературе. Приведем цитату из [50], в которой дается следующее описание: «Признак – это все то, в чем предметы, явления сходны друг с другом или в чем они отличаются друг от друга... По своему значению для предмета все признаки делятся на существенные и несущественные. Признаки, принадлежащие многим предметам, называются неотличительными. Например, прямоугольность есть признак, присущий и квадрату, и прямоугольнику. Но квадрат отличается от прямоугольника тем, что у квадрата все стороны равны. Признаки, присущие только данному предмету, называются отличительными. Значение того или иного признака определяется в зависимости от того, с какими предметами сравнивается исследуемый предмет. Один и тот же признак может выступать то общим, то отличительным… Признаки бывают простые и сложные, положительные и отрицательные» [50, с. 477].

Часто термины «свойство» и «признак» используются как синонимы.

В теории обучения математике это не так:

– любой признак объекта является его свойством;

– далеко не каждое свойство объекта является его признаком;

– словосочетание «существенный признак» в теории обучения математике не имеет смысла, так как некоторое свойство объекта либо является признаком, либо нет;

– словосочетание основное (существенное) свойство обозначает признак объекта, более того – это необходимое и достаточное условие существования геометрического объекта.

Л.М. Фридман приводит следующую трактовку: «Признак – это свойство объектов понятия, по которому их отличают от объектов других понятий» [77, с. 112].

У Н.В. Метельского [42] написано: «Существенные признаки (свойства!) необходимо принадлежат элементам данного множества и отличают их от элементов других множеств. Несущественные признаки (свойства!) не дают возможности познать эти элементы, отличить их от элементов других множеств. В понятии находят отражение лишь существенные в каком-либо отношении его признаки (свойства!), называемые признаками понятия» [42, с. 58]. В этой цитате между понятиями «свойство» и «признак» просматривается некоторая разница, но путаница остается.

Ю.М. Колягин отмечает, что «важной особенностью математики как дедуктивной системы является то, что все понятия, за исключением основных, вводятся посредством определений. В определениях указываются некоторые специфические свойства понятий, называемые часто их признаками, по которым можно определить, принадлежит ли данный объект или отношение к объему этого понятия. Остальные свойства определяемых понятий устанавливаются в рассматриваемых о них теоремах» [37, с. 66]. Соотношения между этими понятиями представлены на рисунке 2.

Данная трактовка термина «признак» в геометрическом образовании – первая удовлетворяющая с присутствием термина «определение понятия».

Анализируя представленный материал о признаках, следует отметить, что он мало чем отличается от материала, посвященного свойствам. Вместе с тем, должна быть полная ясность относительно отличия признака объекта от его свойств.

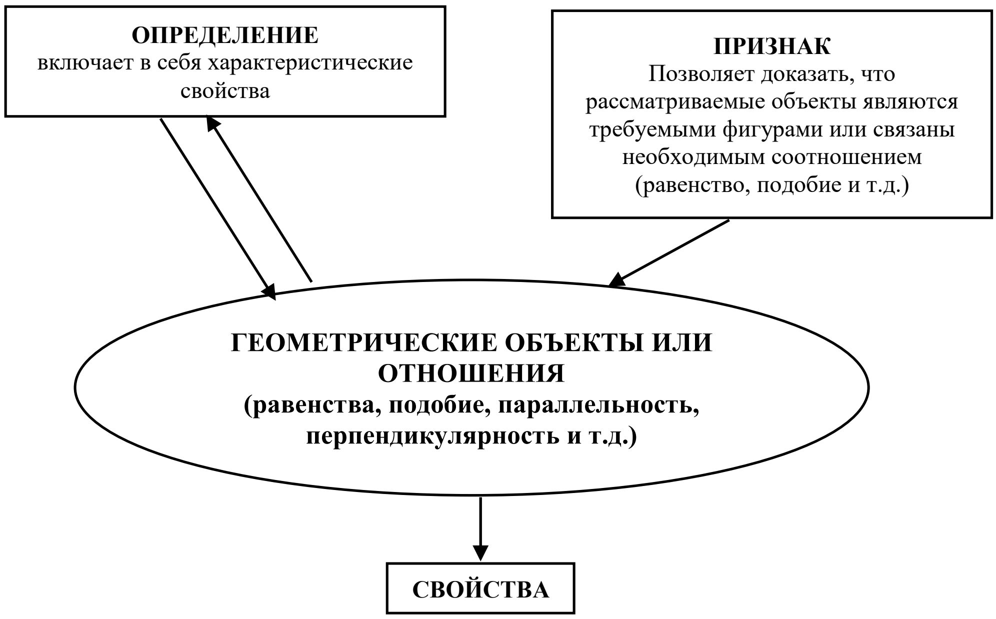


Рисунок 2 – Соотношения понятий (геометрические фигуры, определение, свойство, признак)

Вывод: всякий признак объекта является его свойством, но не всякое свойство объекта является его признаком. И если всевозможные свойства объектов находить не очень сложно, то получать признак объекта дело непростое, которое и составляет суть математической деятельности.

Признаки и свойства бывают эквивалентны. Такие утверждения называют необходимым и достаточным условием.

Из всего выше сказанного можно сделать вывод о том, что аксиомы и теоремы устанавливают свойства и признаки геометрических объектов (понятий).

Проанализируем опыт по обучению выявлению свойств и признаков геометрических объектов таких авторов как: Н.С. Подходова [47], Д. Пойя [49], Г.И. Саранцев [58], С.Н. Скарбич [62], З.И. Слепкань [63], Н.Ф. Талызина [72].

Понятием называют некоторую форму обобщенного научного мышления или результат обобщения свойств геометрических объектов по определенной совокупности общих для объектов этого множества отличительных признаков. Для того чтобы иметь представление о каком-либо геометрическом объекте, необходимо знать его существенные свойства. Отсюда следует, что понятие – это целостная совокупность суждений о существенных свойствах соответствующего объекта. Совокупность свойств называют содержанием понятия об этом геометрическом объекте.

Здесь необходимо заметить, что когда речь идет о геометрическом объекте, то обычно имеют ввиду все множество геометрических объектов, объединенных одним названием (термином) (рисунок 1).

Все определения выводятся на определенной ступени образования: начальное, среднее, основное.

Если на начальном уровне (1-4 классы) учащиеся знакомятся с понятиями геометрического объекта путем визуальных примеров или практического манипулирования ими, например, вырезание из бумаги (при этом, учитель делает упор на жизненный опыт обучающихся), то в среднем звене (5-9 классы) и старшем (10-11 классы) знакомство с определением геометрического объекта расширяется введением новых планиметрических и стереометрических понятий.

Формирование понятий – это довольно сложный процесс, который начинается, обычно, с простейших форм познаний (ощущений), протекающий в определенном порядке (рисунок 3).

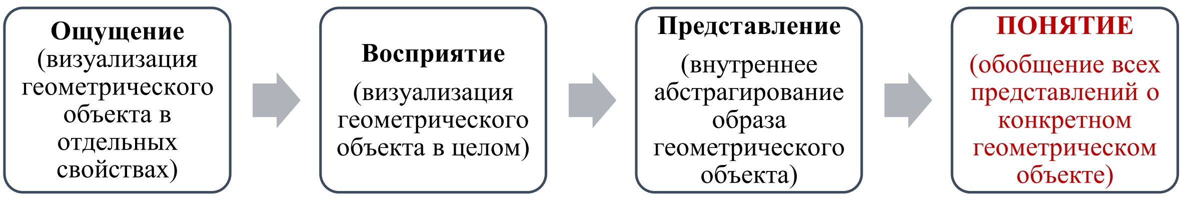


Рисунок 3 – Процесс формирования понятий

Основными характеристиками понятия являются: содержание (совокупность характеристических свойств геометрического объекта) и объем (множество всех геометрических объектов, объединенных одним и тем же термином).

Исходя из вышеизложенного можно утверждать, что этапы формирования понятий геометрического объекта, есть не что иное как этапы выявления свойств и признаков геометрических объектов.

Для выявления свойств и признаков геометрических объектов (введения понятия) существует несколько способов, которые целесообразно применять на различных ступенях образования:

– конкретно-индуктивный (на основе рассмотрения частных задач-примеров обеспечивает подготовку обучающихся к самостоятельному формулированию определений, то есть к выявлению существенных и несущественных признаков одного понятия и рассмотрения особых случаев при введении нового термина);

– абстрактно-дедуктивный (обеспечивает установление истины и исследование связей между геометрическими объектами с помощью логических операций: дизъюнкция, конъюнкция);

– метод целесообразных задач (обеспечивает ясность понимания и легкость восприятия с помощью задач, в которых на первый план выносятся наиболее существенные признаки нового понятия или свойства).

При этом, учащиеся должны уметь: видеть и распознавать существенные и несущественные свойства среди всех выявленных; определять необходимые и достаточные признаки; формулировать определения; приводить примеры и контрпримеры; решать задачи, включающие выявленные свойства и признаки геометрического объекта.

Достичь это можно через выполнение следующих требований:

– наличие конкретного логического приема (действия), направленного на существенные свойства;

– знание об используемом логическом приеме (действии) (сравнение и изменение свойств, подведение под понятие, выведение следствий, приемы доказательства, классификация, распознавание и др.);

– материализация приема (действия) (выписать полученные свойства и признаки; сделать графические модели; составить схему и т.п.);

– пооперационное формирование и развитие введенного приема (действия) (раскрытие назначения действия; проверка всей системы свойств и признаков; рассмотрение возможности получения различных результатов на материальных геометрических объектах);

– поэтапный контроль, обеспечивающий контроль за каждым приемом (действием) учащегося (содержание и форма выполняемой работы).

Реализация обучения выявлению свойств и признаков геометрических объектов обязательно должна поддерживаться выполнением соответствующих заданий каждым учащимся в соответствии с этапами, представленными на рисунке 4.

Рассмотрим на примерах применение конкретно-индуктивного и абстрактно дедуктивный методы.

Конкретно-индуктивный метод рекомендуется использовать при обучении выявлению свойств и признаков геометрических объектов в 7-9 классах. Данный метод реализовывается по схеме, представленной на рисунке 5, его основными составляющими являются:

– примеры для выделения существенных и несущественных признаков рассматриваемого геометрического объекта;

– справка о происхождении рассматриваемого геометрического объекта, введение соответствующего термина на базе выявленных свойств и признаков;

– начальная формулировка определения нового геометрического объекта;

– коррекция выявленного определения для его четкой формулировки.

Рисунок 4 – Этапы выявления свойств и признаков геометрических объектов

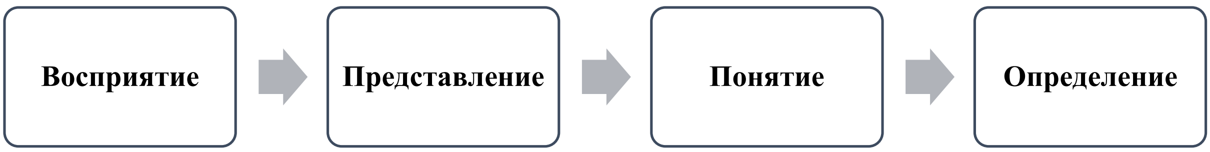


Рисунок 5 – Схема выявления свойств и признаков геометрического объекта конкретно-индуктивным методом

Пример деятельности учителя и учащихся представлен в таблице 1.

Таблица 1 – Конкретно-индуктивный способ выявления свойств и признаков трапеции

Этап	Деятельность учителя	Деятельность ученика
Восприятие	Постройте несколько вариантов четырехугольника, у которого только две противолежащие стороны параллельны.	Строят четырехугольники
Представление	Исследуйте и запишите свои наблюдения.	Исследуют построенные четырехугольники и записывают свои наблюдения: – боковые стороны равны, – есть прямой угол, – разные стороны.
Понятие	Вы получили три вида трапеции. Исходя из сформулированных вами свойств, определим виды трапеций. Выявите свойства у каждого вида трапеции. Выявите признаки.	Равнобедренная (равнобокая) трапеция. Прямоугольная трапеция. Произвольная (разносторонняя) трапеция. Выявляют свойства и признаки в соответствии со своими чертежами.
Определение	Попытайтесь сформулировать общее определение трапеции и каждого ее вида.	Трапеция – это четырехугольник, у которого только две противоположные стороны параллельны. Равнобокой (равнобедренной) называется трапеция, у которой боковые стороны равны. Прямоугольной, называется трапеция, у которой одна из боковых сторон перпендикулярна основанию. Разносторонней (произвольной) называется трапеция, у которой все стороны имеют разную длину.

В зависимости от типа и темы урока, данная схема может быть расширена учителем за счет дополнительных заданий, например, учитель может:

– дать задание отметить углы и определить свойства и признаки в соответствии с видом трапеции;

– провести диагонали и сделать соответствующие выводы;

– вписать в трапецию окружность, при этом учащиеся самостоятельно определят условие, при котором это возможно;

– вписать трапецию в окружность, при этом самостоятельно учащиеся не только определят условие, но и определят сумму противолежащих углов, а также найдут равенство односторонних углов в равнобедренной трапеции;

– исследовать определение трапеции, сравнить с определениями параллелограмма, ромба, квадрата, прямоугольника и сделать выводы, при этом учащиеся заметят, что все эти геометрические фигуры являются частными видами трапеции имея при этом свои названия.

Абстрактно-дедуктивный метод рекомендуется применять тогда, когда учащиеся уже владеют некоторым количеством определений и геометрической терминологией, то есть в 10-11 классах. Данный метод реализовывается по схеме, представленной на рисунке 6.

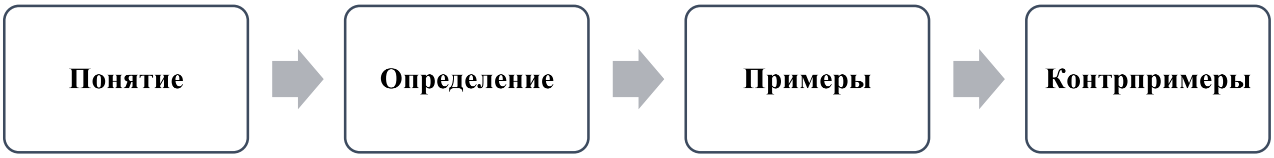
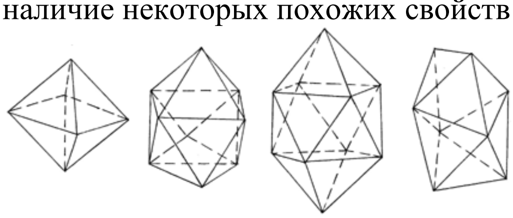


Рисунок 6 – Схема выявления свойств и признаков геометрического объекта абстрактно-дедуктивным методом

Данная схема иллюстрирует факт выявления свойств и признаков геометрических объектов без предварительной подготовки, то есть сразу, без дополнительных разъяснений с использованием конкретных примеров и образцов. Пример деятельности учителя и учащихся представлен в таблице 2.

Контрпримером можно называть любую задачу с противоречивым или неполным условием, которые провоцируют учащихся на допущение ошибок, поэтому, вместо изображений геометрических объектов, рекомендуется использовать соответствующие задания, например, существует ли пирамида, у которой все грани: а) различные; б) подобные треугольники? Может ли основание пирамиды быть трапецией, если три из четырех ребер равны 2, 12 и 22 см.? Даны две пирамиды. Известно, что одна из них находится внутри другой. Может ли сумма внешней пирамиды быть меньше, чем такая же сумма внутренней? Существует ли пирамида, которую можно разрезать по ребрам так, чтобы развертка имела форму: а) египетского треугольника; б) пятиугольника; в) квадрата?

Таблица 2 – Абстрактно-дедуктивный способ выявления свойств и признаков пирамиды

Этап	Деятельность учителя	Деятельность ученика
Понятие	С древних времен, в различных обществах различных эпох, этот вид многогранника являлся символом поклонения и изучения. Этот объект относится к классу полиэдров. Как вы считаете, о каком многограннике идет речь?	Ответ: Пирамида
Определение	Полиэдры – это геометрические объекты, имеющие прямые ребра и плоские грани. Пирамида – это полиэдр, состоящий из простого многогранника и треугольников, соединяющихся в одной общей точке. Как вы понимаете данные определения? Сформулируйте названия основных элементов пирамиды.	Отвечают на поставленный вопрос и выдвигают гипотезы.
Примеры	Приводит изображения пирамид:	Определяют, виды пирамид и корректируют название элементов.
Контрпримеры	Рассматриваются примеры многогранников, которые не являются пирамидами (рисунок 7), несмотря на наличие некоторых похожих свойств:  Рисунок 7 – Контрпримеры	Выявляют свойства, не соответствующие пирамиде

В набор «Великий геометр» входит несколько плоских граней. «Великий геометр» Станислав распределил все грани на две части. Может ли так случиться, что из каждой части также можно собрать пирамиду?

Как видно из примеров, у каждого метода существуют свои особенности, которые представлены в таблице 3.

Таблица 3 – Особенности методов выявления свойств и признаков геометрических объектов

Конкретно-индуктивный	Абстрактно-дедуктивный
Необходима специально подготовленная система задач для выявления существенных признаков и свойств	Необходима специальная подборка готовых примеров с учетом возможного варьирования несущественных признаков, свойств и контрпримеров
Способствует самостоятельному «открытию» новых знаний учащимися	Экономит урочное время, способствуя усвоению и закреплению новых знаний
Не экономит урочное время (требует дополнительное время)	

Необходимо заметить, что метод выявления свойств и признаков геометрического объекта обусловлен степенью сложности и абстрактности самого свойства или признака, или вводимого понятия, уровнем обученности учащихся, а также их возрастными особенностями.

1.2 Приемы и методы решения задач на исследование свойств и признаков геометрических объектов

Обучение математике идентично развитию способности решать проблемы [92], которые на самом деле влияют на знания и механизмы принятия решений [93]. Более того, обучение математике также связано с понятиями, находящихся в определенных отношениях друг с другом, разработанными дедуктивно, системно, логически и аналитически [91]. Это указывает на особый вид деятельности – учебу, целью которого является процесс приобретения и совершенствования навыков решения геометрических задач учащимися, посредством выполнения мыслительных операций, неразрывно связанных с рядом психических действий.

Для решения геометрических задач принято использовать три основных метода: геометрический, алгебраический, комбинированный.

«Процесс решения задачи представляет собой поиск выхода из затруднения или пути обхода препятствия – это процесс достижения цели, которая первоначально не кажется сразу доступной. Решение задач является специфической особенностью интеллекта, а интеллект – это особый дар человека; поэтому решение задач может рассматриваться как одно из самых характерных проявлений человеческой деятельности» [16, с. 13].

Поиск ответа для задач на исследование свойств и признаков геометрических объектов, – это довольно трудоемкий и многогранный мыслительный процесс, который неразрывно связан с рядом психических действий.

С позиции В.М. Тихомирова, «… любая психическая деятельность (восприятие, память, аффект), а не только мышление, связана с решением задач. …Тренировать мышление можно лишь на конкретных, частных задачах, а не на общих принципах…» [29, с. 3]. При этом становится очевидно, что необходим объем начальных теоретических сведений и систематизация знаний. Очевидно, что основной характеристикой математического мышления является учение четкому формулированию поставленных проблем, задач и заданий.

Согласно мнению С.Л. Рубинштейна «…в мыслительном процессе синтез непрерывно переходит в анализ и наоборот, при этом сравнение можно охарактеризовать как анализ, который проходит посредством синтеза и ведёт к некоторому обобщению – к новому синтезу» [56, с. 165].

О.П. Зеленяк убедительно показывает, что «На поиск пути решения задачи в первую очередь направлен анализ. Но в большинстве случаев его применение осуществляется в сочетании с синтезом, то есть после проведения анализа синтетическое рассуждение проводится заново, чтобы изложить найденное решение. Не менее важно, что подобный анализ, позволяет показать, как можно самому догадаться решить задачу, формируя при этом интуицию и геометрическое мышление» [29, с.147].

Анализ и синтез – это методы научного исследования, являющиеся главными элементами любого метода поиска решения задач.

Анализ (разложение) – это «метод научного исследования, состоящий в расчленении целого на составные элементы; разбор, рассмотрение чего-либо. Синтез (соединение, сочетание) – это метод исследования какого-либо явления в его единстве и взаимной связи частей, обобщение, сведение в единое целое данных, добытых анализом» [12, с. 147].

В каждой геометрической задаче полезен всесторонний анализ первого решения. Рассмотрим этот важный аспект на примере решения задачи.

Задача 1. «Прямая, параллельная основаниям прямоугольной трапеции, рассекает ее на две трапеции, в каждую из которых можно вписать окружность. Найти основания исходной трапеции, если ее боковые стороны равны c и d, причем c<d» [29, с. 148].

Решение:

«Допустим, что в трапеции ABCD ∠ A = 90º, AD = c, BC = d, MN || AB. Проведем высоту BH, для искомых величин введем обозначения
AB = a, DC = b (рисунок 8).

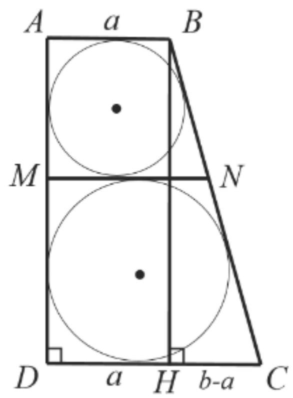


Рисунок 8 – Трапеция ABCD

Из ΔBCH: $\mathrm{CH} = \sqrt{\mathrm{CB}^2 - \mathrm{BH}^2}$, но CH = CD – DH= CD – AB = b – a. Отсюда $\mathrm{b} - \mathrm{a} = \sqrt{\mathrm{d}^2 - \mathrm{c}^2}$ (1). Полученное уравнение, связывает данные и искомые величины, следовательно, необходимо найти еще одно уравнение связи, для определения из системы уравнений неизвестных величин a и b. Во-первых, учтем, что трапеции ABNM и DCNM – описанные, поэтому

$$AB + NM = AM + BN, CD + NM = DM + CN.$$

Складывая эти равенства, получим: AB + CD + 2NM = AD + BC (*). Во-вторых, полученные трапеции подобны. Значит,

$MN^2 = AB{\cdot}CD, MN^2 = ab, NM = \sqrt{ab}$ или $2MN = 2\sqrt{ab}$.

Имеем:

$b + a + 2\sqrt{ab} = c + d, (\sqrt{b} + \sqrt{a})^2 = c + d, \sqrt{b} + \sqrt{a} = \sqrt{c + d}$ (2).

После преобразований (деления уравнений (1) и (2)), получим

$\sqrt{b} - \sqrt{a} = \sqrt{d - c}$ (3). Далее, из системы уравнений (2) и (3) способом сложения определяем $\sqrt{b}$ и $\sqrt{a}$, а затем a и b:

$\sqrt{a} = \frac{\sqrt{d+c}-\sqrt{d-c}}{2}, \sqrt{b} = \frac{\sqrt{d+c}+\sqrt{d-c}}{2}.$

Ответ: $\frac{\sqrt{d+c}-\sqrt{d-c}}{2}, \frac{\sqrt{d+c}+\sqrt{d-c}}{2}.$

Анализ. Проведя анализ полученных выражений, замечаем, что a + b = d (!). Как получить данное соотношение? Используя это соотношение в системе вместе с уравнением (1) сможет ее упростить. Известно, что для радиуса r вписанной в прямоугольную трапецию окружности верно соотношение: r = ab/(a + b), где a и b – основания трапеции.

Получим: $AM = \frac{2a{\cdot}MN}{a+MN}, DM = \frac{2b{\cdot}MN}{b+MN}.$

Сумма левых частей равенств очевидно равна c·(AM + DM = AD), а правых – 2MN, т.к. $2MN\left(\frac{a}{a+MN} + \frac{b}{b+MN}\right) = 2MN\frac{2ab+MN(a+b)}{ab+MN^2+MN(a+b)} = 2MN$ (числитель и знаменатель дроби равны, потому что MN^2 = ab). Следовательно, 2MN = c и равенство (*) примет вид: a + b + c = c + d. Отсюда a + b = d и соотношение доказано.

Продолжение анализа. Нельзя ли без вспомогательного соотношения вывести равенство a + b = d? Обратим внимание на то, что в приведенных решениях существенную роль играет равенство (*), которое следует из свойства описанного четырехугольника. Затем вспомним, что при доказательстве указанного свойства рассматриваются пары равных отрезков касательных, проведенных к окружности из одной точки. Изучим в нашей задаче отрезки, которые проведены к окружностям из вершин трапеций (рисунок 9).

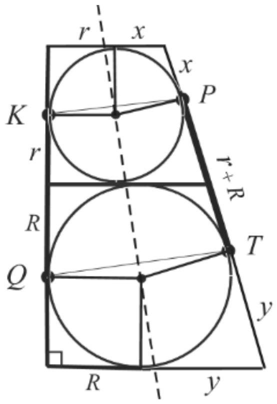


Рисунок 9 – Трапеции с вписанными окружностями

$a + b = x + r + y + R = (x + y) + (r + R);$

$d = (x + y) + PT.$

В соответствии с этим нам требуется представить доказательства того, что PT = r + R. В действительности, в виду симметрии относительно линии центров PT = KQ = r + R (KPTQ – равнобедренная трапеция). Поэтому, имеются основания, для того чтобы сделать вывод, согласно которому интересующее нас соотношение мы смогли получить только путем производства всестороннего анализа, но при этом, не используя для достижения поставленной цели, сложное свойство анализируемой конфигурации фигур (в том числе, подобия). Здесь также надлежит отметить, что детальная схема, которая может применяться для производства такого рода анализов решений, еще не создана. Типы решений и схема производства могут применяться также в процессе решения анализируемого нами типа задач. По этой причине имеются основания, для рассмотрения гомотетии (центр в точке пересечения прямой MN и линии центров окружностей). Используя, в качестве основы известные свойства гомотетии, получим следствия: MN = r + R или 2MN = c.

Синтез. Вариант наиболее рационального решения. Для того чтобы обеспечить ведение в структуру единого целого данных, которые мы предварительно получили по итогам производство анализа, представим данное единство в сокращённом виде:

Из ΔBCH: $\sqrt{CB^2 - BH^2} = CH = CD - DH = CD - AB = b - a$.

Таким образом, мы можем получить $b - a = \sqrt{d^2 - c^2}$ (1).

$$a + b = (x + y) + (r + R);\ d = (x + y) + PT.$$

В силу того, что PT = r + R (симметрия относительно линии центров)

$$PT = KQ = r + R, \text{ то } a + b = d\ (2).$$

Получить необходимый ответ сможем, решая систему из первого и второго уравнений.

Обобщение. Результаты, полученные в ходе анализа задачи, могут способствовать составлению подобных задач» [32, с. 148-150].

Существует достаточное количество всевозможных эвристических (способ открытия нового) методов, общематематических (работа с геометрическими понятиями, суждениями, умозаключениями) и специальных (построение геометрических объектов, выполнение по условию задачи чертежа и его чтение) приемов, которые используются в процессе поиска возможных решений задач на исследование свойств и признаков геометрических объектов (фигур, тел). Краткая характеристика существующих приемов и методов представлена в таблице 4.

Решение задач на исследование свойств и признаков геометрических объектов подразумевает под собой использование комбинированного метода, так процесс решения такого задания разбивается на подзадачи, и каждая подзадача может быть решена своим, более подходящим методом или приемом (метод геометрических преобразований; тригонометрические функции; аналогии; координатный и векторный методы; метод вспомогательных сечений).

Таблица 4 – Эвристические и общематематические приемы решения задач на исследование свойств и признаков геометрических объектов

Наименование приема	Характеристика
Эвристические	
Аналогия	На ней основывается процесс обобщения, который является одним из самых важных средств самообучения и углубления имеющихся знаний.
Неполная индукция	Рассуждение, основанное на повторяемости свойств или признаков у некоторых геометрических объектов определенного класса, в результате которого делается вывод о принадлежности этих свойств или признаков всему классу объектов.
Принцип парадигмы	«Переформулировка данного утверждения с целью выбора из возможных похожих форм, той, которая связывает все искомые величины с условиями в ходе решения задачи или доказательства» [29, с. 159].
Общематематические	
Преобразование задачи	Трактуется, как модификация задачи в тождественную, но более знакомую и простую.
Кодирование задачи	«…переход от геометрической задачи к алгебраической с помощью соответствующих методов» [29, с. 159].
Сведение задачи к подзадачам	Носит характер поэтапного сведения суммарной (основной) задачи к набору подзадач.

Начнем более подробное рассмотрение вышеперечисленных методов и приемов с метода «введение вспомогательных величин» [1].

«Вспомогательные величины – это величины, которые вводятся при решении задачи помимо заданных в условии» [1, с. 116]. Обычно это любые геометрические объекты, отрезки, углы, объем, площадь, периметр.

Задача 2. «Дана трапеция EFGZ. Углы при основании EZ соответственно равны 60º и 30º. Точка N лежит на основании FG, причем FN:NC = 2. Точка M лежит на основании EZ, прямая MN перпендикулярна основаниям трапеции и делит ее площадь пополам. Найдите отношение EM: MZ» [1, с. 117].

Решение:

Шаг 1. EP<FP и ZK>GK в 3 раза. Так как FP = MN и GK = MN, следовательно, ZK = 3EP (1).

Шаг 2. EFNM и MNGZ – равновеликие трапеции (рисунок 10), высота MN – общая, поэтому, из формул для площадей трапеций EFNM и MNGZ, получим: EM + FN = MZ + NG.

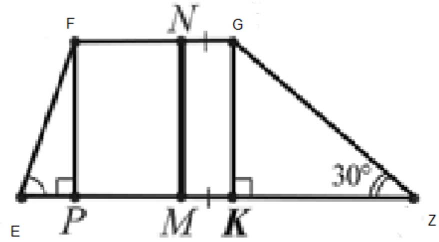


Рисунок 10 – Равновеликие трапецииEFNM и MNGZ

Исходя из условия FN = 2NG и NG = MK, получаем: EM = MZ – NG, EM = Z (2). Из выражений (1) и (2): $\mathrm{EM} = 3\mathrm{EP}$. Отсюда,

$\mathrm{PM} = 2\mathrm{EP}, \mathrm{MK} = \frac{1}{2}\mathrm{PM} = \mathrm{EP}.$

Имеем:$\frac{\mathrm{EM}}{\mathrm{MZ}} = \frac{\mathrm{EP+PM}}{\mathrm{MK+KZ}} = \frac{\mathrm{EP+2EP}}{\mathrm{EP+3EP}} = \frac{3}{4}$.

Ответ: 3:4.

Основой данного метода является свойство суммы площадей простых геометрических объектов: $S=S_1+S_2+\ldots+S_n$ [1, с. 120].

Наиболее привлекательным, действенным и продуктивным методом для отыскания зависимостей между элементами геометрических объектов считается метод введения вспомогательной окружности. Достоинством данного метода является краткость рассуждений. Применение этого метода позволяет учащимся выявлять новые признаки, а также не только закреплять ранее изученные теоремы, но и самостоятельно увеличить их число за счет учебно-поисковой деятельности.

Данный метод можно использовать при решении задач с применением теоремы о вписанном угле, а также задач С4 единого государственного экзамена, так как он позволяет сэкономить время.

Задача 3. «Около окружности радиуса R описана трапеция. Хорда, соединяющая точки касания окружности с боковыми сторонами трапеции, параллельна основаниям трапеции. Длина этой хорды равна b. Найти площадь трапеции» [27].

Решение:

«E, F, G, Z - вершины трапеции, EF и GZ – боковые стороны, отрезок EZ – большее основание (рисунок 11). K, L, M и N – точки касания сторон трапеции с окружностью. Из условия: LN || EZ.

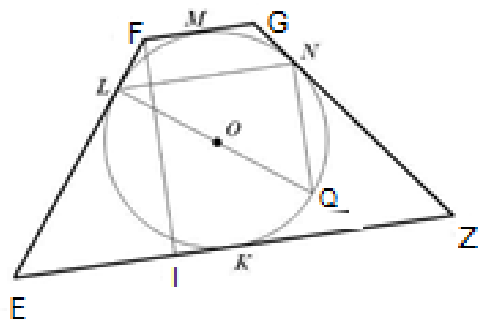


Рисунок 11 – Трапеция EFGZ

Найдем площадь трапеции EFGZ: $S = \frac{EZ+FZ}{2} \cdot h$, где h – высота трапеции. Поскольку четырехугольник EFGZ описан вокруг окружности, то $EZ + FG = EF + GZ$, и потому $S = \frac{EF+GZ}{2} \cdot h$.

Если O – центр окружности, то OM⊥FG и OK⊥EZ (радиус, проведенный в точку касания, перпендикулярен касательной). Поскольку EZ || FG, то OK⊥FG. Так как к FG через точку O можно провести только один перпендикуляр, то это значит, что точки O, M, K лежат на одной прямой и MK = 2R, и, MK – высота трапеции. Таким образом, h = 2R.

Опустим из точки F перпендикуляр FI на EZ, а через точку L проведем диаметр LQ. Тогда LQ⊥EF и LN⊥FI (так как EZ⊥FI и EZ⊥LN). Отсюда следует, что ∠EFI=∠QLN (как углы со взаимно перпендикулярными сторонами) и, значит, прямоугольные треугольники EFI и QLN подобны.

Из подобия следует, что

$\frac{EF}{FI} = \frac{LQ}{LN}$, или $\frac{EF}{2R} = \frac{2R}{b}$. Таким образом

$EF = \frac{4R^2}{b}$. Аналогично доказывается, что $GZ = \frac{4R^2}{b}$

Подставляя найденные значения EF, GZ и h в равенство

$S = \frac{EF+GZ}{2} \cdot h$, находим, что $S = \frac{4R^2}{b} \cdot 2R = \frac{8R^3}{b}$.

Ответ: $S = \frac{8R^3}{b}$» [27].

Для получения дополнительных свойств или новых конфигураций применяют метод геометрических преобразований (введение вспомогательных фигур): «симметрия, поворот (очень эффективен, но редко встречается), гомотетия, параллельный перенос» [29, с. 128].

Задача 4. «На плоскости даны две подобные и одинаково ориентированные фигуры F_1 и F_2. Каждая точка P_1, фигуры F_1, соединяется отрезком прямой с соответствующей. Точкой P_2 фигуры F_2. Векторы P_1P_2 переносятся в произвольную точку O: $OP = P_1P_2$. Доказать, что геометрическое место точек P есть фигура F_3, подобная и одинаково ориентированная с данными фигурами» [16, с. 93].

Доказательство:

«Очевидно, в задаче следовало оговорить один тривиальный случай, когда фигура F_2 получается из фигуры F_1 параллельным переносом (рисунок 12). В этом случает все точки P совпадают, и фигура F_3 стягивается в точку. Это лишь означает, что в вырожденном случае коэффициент подобия фигур F_3 и F_1 равен нулю, что, конечно, по определению преобразования и подобия исключается.

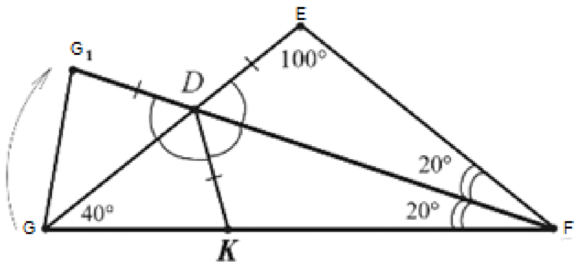


Рисунок 12 – Параллельный перенос фигур F_2 и F_1

Во всех остальных случаях, как известно, фигура F_2 может быть получена из фигуры F_1 поворотом около вполне определенного центра с последующей гомотетией, около того же самого центра.

Если этот центр M принять за нулевую точку плоскости комплексного переменного, то преобразование, переводящее фигуру F_1 в фигуру F_2 имеет вид $W=\alpha Z$, где $\arg(\alpha)$ – угол поворота, а $|\alpha|$ - коэффициент гомотетии. Если вектор P_1P_2 перенести в точку M, то получим вектор MP', концу которого соответствует комплексное число $W - Z \equiv (a - 1)Z$.

Отсюда следует, что геометрическое место точек P' есть фигура F'_3, подобная и одинаково ориентированная с данными фигурами (угол поворота равен $\arg(\alpha\text{-}1)$, а коэффициент гомотетии равен $|\alpha\text{-}1|$).

Очевидно, что фигура F_3 получается из фигуры F'_3 параллельным переносом на вектор MO, и поэтому она подобна и одинаково ориентирована с данными фигурами» [23, с. 93].

В геометрии для выражения соотношения между элементами прямоугольного треугольника принято использовать тригонометрические функции. Гибкость и универсальность методу «применение тригонометрии» придает интеграция формул геометрии и тригонометрии.

«Отсюда и разнообразие форм его применения: использование теорем косинусов, синусов. Нередко средства тригонометрии заменяют подобие.

Обоснованное применение они находят при решении вычислительных задач, в которых среди данных и искомых элементов фигуры нет углов.

При использовании данного метода задача сводится к применению формул, решению уравнений, доказательству тождеств» [12, с. 132].

Задача 5. «Найдите радиус R описанной вокруг треугольника с углами 40° и 80° окружности, если расстояние между центрами вписанной в треугольник окружности и окружности, описанной вокруг этого треугольника, d = 4» [26, с. 8].

Решение:

«По формуле Эйлера $d^2 = R^2 - 2Rr$, где r – радиус вписанной окружности. Свяжем радиусы R и r тригонометрическими формулами, ввиду наличия в условии задачи величин углов ΔABC (рисунок 13).

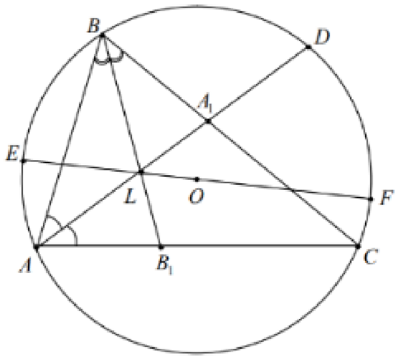


Рисунок 13 – Связь радиусов вписанной и описанной окружностей

Получим: $r = \frac{S}{P} = \frac{absinC}{a+b+c} = \frac{(2R)^2 sinAsinBsinC}{2R(sinA+sinB+sinC)} = \frac{2RsinAsinBsin(A+B)}{sinA+sinB+sin(A+B)} =$

$$= \frac{2RsinAsinB \cdot 2sin\frac{A+B}{2}cos\frac{A+B}{2}}{2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)+2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)} = \frac{2RsinAsinBcos\left(\frac{A+B}{2}\right)}{cos\left(\frac{A-B}{2}\right)+cos(\frac{A+B}{2})} =$$

$$= \frac{2RsinAsinBsin\frac{C}{2}}{2cos\frac{A}{2}cos\frac{B}{2}} = \frac{R*2sin\frac{A}{2}cos\frac{A}{2}*2sin\frac{B}{2}cos\frac{B}{2}sin\frac{C}{2}}{cos\frac{A}{2}cos\frac{B}{2}} = 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

Подставим величины из условия задачи:

$$r = 4Rsin20°sin40°sin30° = 2Rsin20°sin40° = R(cos20° - cos60°) =$$

$$= R(cos20° - \frac{1}{2}).$$

Применим формулу Эйлера: $16 = R^2 - 2R^2 \cdot \left(cos20° - \frac{1}{2}\right)$.

Проведем преобразование и получим: $R = \frac{2}{sin10°}$.

Ответ: $R = \frac{2}{sin10°}$.» [18, с. 8].

В процессе решения задач на исследование свойств и признаков геометрических объектов рассуждения принято проводить от данного к искомому. Но возможна, и обратная схема, которая «...основана на одном из логических приемов – аналогии, когда несостоятельность какого-либо утверждения доказывается таким образом, что в нем самом, или же в следствиях, вытекающих из него, происходит открытие противоречий. При решении задач возможны модификации данного метода» [1, с. 141].

Такой подход вызывает ассоциативную память, внутри которой хранятся решения подобных задач или способы их решений, что дает возможность сфокусировать свое внимание не на поиске решения, а на существенных «тонкостях» задачи, а также способствует открытию свойств и признаков геометрических объектов.

Приведем пример доказательств первого и второго признаков равенства треугольников используя метод аналогий. В существующих теоремах структура «две стороны треугольника и угол между ними» аналогична структуре «два угла треугольника и прилежащая к ним сторона». «Если заменить элементы доказательства первого признака их аналогиями по доказательству второго признака, то получим доказательство второго признака» [59, с. 42].

Принцип Дирихле – одна из форм метода аналогии – «это логический метод рассуждения, одна из форм метода доказательства от противного: в каждой совокупности из n множеств, в которой общее число элементов больше n, существует по крайней мере одно множество, содержащее не меньше двух элементов или если в k клетках больше nk кроликов, то хотя бы в одной клетке больше n кроликов (традиционная формулировка обобщенного принципа Дирихле в популярной литературе)» [1, с. 144].

В геометрии используют его различные измененные формулировки такие как: «…если на отрезке длины 1 расположено несколько отрезков с суммой длин больше 1, то по крайней мере два из них имеют общую точку; если на окружности радиуса 1 расположено несколько дуг с суммой длин больше 2π, то по крайней мере две из них имеют общую точку; если внутри фигуры площадью 1 расположено несколько фигур с суммой площадей больше 1, то по крайней мере две из них имеют общую точку» [12, с. 144].

Задача 6. «Доказать, что прямая l, проходящая через плоскость треугольника EFG, не может пересекать три его стороны так как она не пересекает ни одну из вершин заданного треугольника.

Доказательство:

Представим, как прямая l разбивает ΔEFG на две плоскости, назовем их α_1 и α_2. Будем считать, что α_1 и α_2 не содержат прямую l (открытые).

Применим принцип Дирихле. Задачи с решениями могут показать, что под «кроликами» и «ячейками» в современных условиях подразумеваются разнообразные геометрические объекты. Так, вместо «кроликов» мы подставим вершины треугольника, а вместо «ячеек» – полуплоскости. Поскольку проведенная прямая l не пересекает ни одну из вершин ΔEFG, то каждая из них находится в той или иной плоскости. Поскольку вершин у треугольника три, а плоскости у нас всего две (α_1 и α_2), то одна из них будет содержать две вершины.

Предположим, что это вершины E и F, и находятся они в полуплоскости α_2 (то есть лежат по одну сторону от l). В таком случае отрезок EF не пересекает прямую l. То есть в ΔEFG есть сторона, которую прямая l не пересекает.

Что и требовалось доказать» [18, с. 2].

Задачи по стереометрии на исследование свойств и признаков геометрических объектов – это прекрасное средство не только для определения уровня обученности учащихся, но и обобщения, а также систематизации теоретического материала за курс планиметрии, ввиду того что решение стереометрических задач, как правило, сводится к решению планиметрических.

В качестве следующей эвристики рассмотрим методы для решения стереометрических задач на исследование свойств и признаков геометрических объектов.

Координатно-векторный метод считается самым универсальным методом геометрии и характеризуется возможностью применения «мощного аппарата» векторной алгебры. Координатно-векторный метод – «…это универсальный метод, обеспечивающий связь между алгеброй и геометрией, применение которого избавляет от необходимости прибегать к наглядному представлению геометрического объекта (пространственного тела) при этом решение задач во многом алгоритмизировано, что в большинстве случаев упрощает поиск и само решение задачи» [1, с. 22].

Выделяются несколько типов задач для решения координатно-векторным методом:

– на вычисление углов и расстояний;

– на зависимости межу элементами геометрического объекта;

– на доказательство параллельности и перпендикулярности прямых;

– на геометрические тождества и неравенства;

– на составление уравнения геометрического объекта (если известны свойства точек данного объекта).

Задача 7. Найти зависимость между числами b, q, c и d, если основанием пирамиды SEFGZ является параллелограмм, плоскость, пересекающая боковые ребра пирамиды соответственно в точках B, Q, C, D таких, что

$SB = \frac{1}{b}SE, SQ = \frac{1}{q}SF, SC = \frac{1}{c}SG, SD = \frac{1}{d}SZ$ (рисунок 14).

Решение:

В соответствии с условием принадлежности четырех точек B, Q, C, Dодной плоскости имеем: $\overrightarrow{CD} = a\overrightarrow{CB} + \beta\overrightarrow{CQ}$.

Представим вектора, входящие в данное неравенство, в виде разности двух векторов с общим началом в точке S:

$$\overrightarrow{SD} - \overrightarrow{SC} = a(\overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SC}) + \beta(\overrightarrow{SQ} - \overrightarrow{SC}).$$

Получим: $\overrightarrow{SD} = a\overrightarrow{SB} + \beta\overrightarrow{SQ} + \gamma\overrightarrow{SC})$ (1), где $\gamma = 1 - a - \beta$.

С учетом условия задачи, перепишем неравенство (1):

$$\frac{1}{d}\overrightarrow{SZ} = \frac{a}{b}\overrightarrow{SE} + \frac{\beta}{q}\overrightarrow{SF} + \frac{\gamma}{c}\overrightarrow{SG}.$$

Точка O – точка пересечений диагоналей параллелограмма EFGZ и середина диагоналей FZ и EG (рисунок 14). Следовательно:

$\overrightarrow{SE} + \overrightarrow{SG} = \overrightarrow{SF} + \overrightarrow{SZ} = 2\overrightarrow{SO}.$

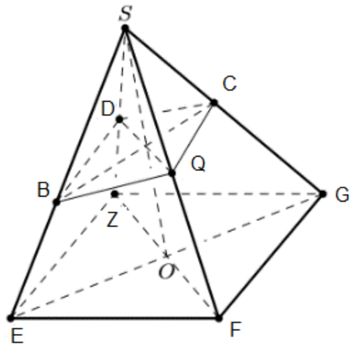


Рисунок 14 – Пирамида SEFGZ

Значит, $\frac{1}{d}\overrightarrow{SZ} = \frac{1}{d}(\overrightarrow{SE} - \overrightarrow{SF} + \overrightarrow{SG})$. Таким образом, вектор $\frac{1}{d}\overrightarrow{SZ}$ выражен двумя способами через некомпланарные векторы $\overrightarrow{SE}, \overrightarrow{SF}$ и $\overrightarrow{SG}$.

В силу единственности разложения вектора получаем следующие числовые равенства: $\frac{a}{b} = \frac{1}{d}, \frac{\beta}{q} = -\frac{1}{d}, \frac{\gamma}{c} = \frac{1}{d}$. Отсюда, учитывая $\gamma + a + \beta = 1$, находим:$\frac{b}{d} - \frac{q}{d} + \frac{c}{d} = 1$, или $b + c = q + d$.

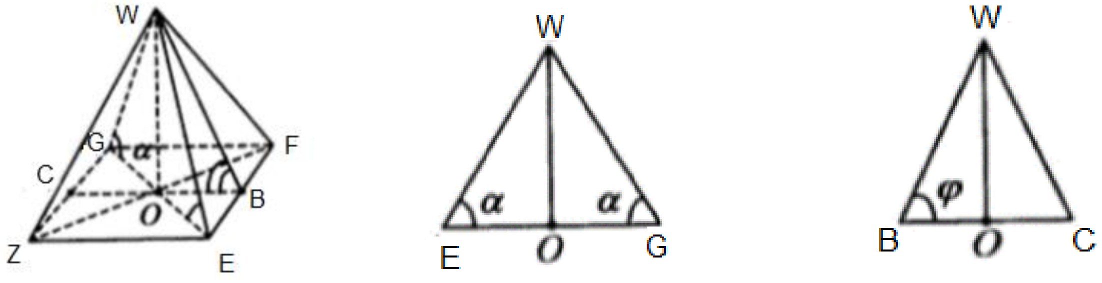
Ответ: $b + c = q + d$.

Для пространственных тел (пирамид, конусов и т.д.) в качестве метода для нахождения радиусов вписанных и описанных шаров, целесообразно рассмотреть «метод сечений», так как именно этот метод является универсальным и имеет массу преимуществ от метода «следов». Этот метод применяют в качестве вспомогательного графического приема, который облегчает поиск решения задачи или само решение.

Задача 8. «Найдите двугранные углы при основании правильной четырехугольной пирамиды, если ее ребра наклонены к плоскости основания под углом a.

Решение.

Дана пирамида WEFGZ, ∠WGE=∠WEG=a. Найти ∠WBC, где B – середина ребра EF (рисунок 15 а). Для этого рассмотрим осевые сечения WEG и WBC (рисунок 15 б, 15 в).



а б в

Рисунок 15 – Чертеж к решению задачи 8

Из ΔWEG найдем высоту пирамиды WEFGZ: $\mathrm{WO} = \mathrm{OGtg}\,a$. Так как в основании WEFGZ лежит квадрат, то $\mathrm{OG} = \sqrt{2}\mathrm{OC}$. Следовательно,

WG= $\sqrt{2}\mathrm{OCtga}$. Из ΔWBC находим высоту: $\mathrm{WO} = \mathrm{OCtg}\,\varphi$.

Сравним правые части равенств и найдем искомый двугранный угол:

$$\varphi = \angle \mathrm{WBC};\ \varphi = \mathrm{arctg}\ (\sqrt{2}\mathrm{tga}).$$

Ответ: $\varphi = \mathrm{arctg}\ (\sqrt{2}\mathrm{tga})$» [24, с. 55-64].

Для сведения стереометрических задач к планиметрическим рекомендуется использовать метод развертки.

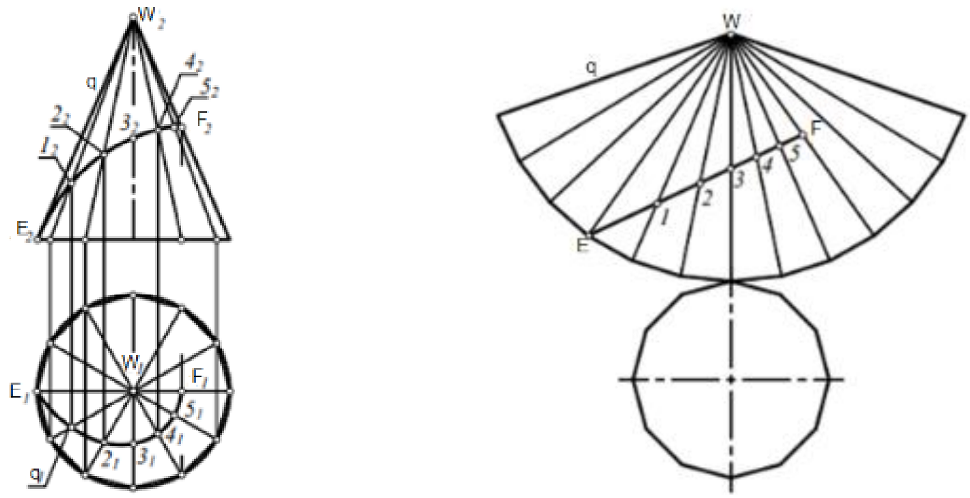
Этот метод предполагает дополнительное построение плоских чертежей и сечений для детального рассмотрения, что, в свою очередь, играет не маловажную роль в нахождении взаимосвязей между свойствами и признаками геометрических объектов (плоских и объемных).

Задача 9. Построить на поверхности конуса геодезическую линию (кратчайший путь) между точками E и F.

Решение.

Построение геодезической линии EFна поверхности выполняется с помощью развертки. Прямой линии на развертке соответствует кратчайший путь на поверхности. Перенесем точки E, F с чертежа конуса (рисунок 16 а) на развертку (рисунок 16 б) и соединим точки E и F отрезком прямой.

Далее, на отрезке EF отмечаем промежуточные точки 1, 2, 3, 4, 5 и «возвращаем» эти точки на чертеж конуса.



а б

Рисунок 16 – Чертеж к задаче 9

Соединив плавной кривой фронтальные проекции точек E, 1, 2, 3, 4, 5, F, получим фронтальную проекцию геодезической линии EF.

Соединив плавной кривой горизонтальные проекции точек E, 1, 2, 3, 4, 5, F, получим горизонтальную проекцию геодезической линии EF.

Таким образом, при решении задач на исследование свойств и признаков геометрических объектов (фигур, тел) используются различные приемы и методы, которые в полной мере способствуют углублению знаний, их систематизации и обобщению, позволяют установить новые связи и отношения между ними, а также повышению интереса к предмету «Геометрия» и развитию пространственного мышления.

1.3 Личностно-ориентированное обучение школьников как основа формирования исследовательских умений при решении геометрических задач

Сегодня, в соответствии с новыми требованиями Федерального государственного образовательного стандарта, активизация деятельности каждого учащегося сталкивается с внедрения в обучение творческой составляющей. Это объясняется тем, что личность ученика ставится на первое место, где основными требованиями выступают умения:

– творчески подходить к решению задач различной направленности (учебных, общественных);
– самостоятельно мыслить;
– формировать и отстаивать свою точку зрения;
– непрерывно, с помощью самообразования, восполнять и пополнять предметные знания;
– совершенствовать и творчески применять имеющиеся знания в нестандартных жизненных ситуациях.

Для того, чтобы с успехом реализовать эти требования необходимо формировать и развивать у учащихся исследовательские умения посредством решения геометрических задач, так как учебная дисциплина «Геометрия» имеет возможность создать положительные условия для формирования указанных навыков с помощью решения нестандартных задач практического содержания, где происходит сравнение, сопоставление и исследование фактов, их обобщение, формулировка определение вводимых понятий и теорем, что способствует развитию вышеперечисленных умений в соответствии с личностными качествами и интересами каждого учащегося.

В последние годы об ориентации учебно-воспитательного процесса на личность учащегося написано не мало научных статей. Сегодня уже никого не нужно убеждать в необходимости построения обучения с ориентацией на личностные качества обучающихся [69], но основная масса учебной литературы и учебных программ не предполагают личностно-ориентированного подхода. При оценивании качества обучения ведущую роль занимает объективность, например, ОГЭ – основной государственный экзамен, ЕГЭ – единый государственный экзамен. Отказ от субъективного оценивания, а значит, и от личностного начала, «дистанцирует» учащихся от школы, и как следствие, от образования, которое по «силам» и проверяется без учета его индивидуальных способностей.

Целью модернизации современного образования является личностно-ориентированный (компетентностный) подход, применение которого, в свою очередь, способно запустить в любом обучающемся механизмы самовоспитания, самозащиты, саморегуляции, адаптации, саморазвития, самореализации и множество других, необходимых для становления самобытного личностного образа и умеющего задавать вопросы, строить диалог и сотрудничать.

Существует много трактовок личностно-ориентированное обучения, но в данной работе будем использовать определение Н.А. Алексеева «Личностно-ориентированное обучение – это специфическая педагогическая деятельность по созданию учащимся оптимальных условий для развития их способностей, духовного начала, формирования самостоятельности, стремления к самообразованию, самореализации» [3, с. 3].

Личностно-ориентированный подход – это такой тип учебно-воспитательного процесса, в котором личности учителя и учащегося выступают в роли равных субъектов. Цель обучения – развитие неповторимых и индивидуальных качеств учащегося. При этом роль ученика меняется с «пассивной» на «активную», и он становится полноправным участником процесса обучения на различных уровнях (но не ниже начального), в зависимости от способностей и личных предпочтений.

Ключевую роль в совершенствовании личностно-ориентированного подхода к обучению исполнили гуманистические концепции К. Роджерса [90, 94], А. Маслоу [89]. Концепции обоих авторов утверждают, что «… при обучении должны учитываться интересы, индивидуальные особенности также необходимо бережное отношение к личности учащегося. К. Роджерс видит в ученике личность, способную делать выбор, принимать решения и нести за них ответственность, способную вырабатывать собственные ценности в процессе учебной и другой деятельности. Согласно К. Роджерсу, задача учителя не диктовать готовое знание, а разбудить его собственную познавательную активность, которая выразится в выборе целей, методов работы и поведения. Учитель стимулирует и облегчает самостоятельную деятельность учащихся» [62, с. 48].

В авторских концепциях И.С. Якиманской [88] и В.В. Серикова [61] четко определены важные для понимания личностно-ориентированного обучения позиции, которые должен учитывать каждый учитель математики при проектировании и реализации личностно-ориентированного подхода. Основными являются:

– обеспечение развития и саморазвития личности учащегося в соответствии с выявленными индивидуальными особенностями;

– предоставлять каждому ученику реализовать себя в процессе обучения в соответствии с его способностями, склонностями, интересами, ценностными ориентирами и собственным опытом;

– подбирать средства и методы обучения так, чтобы имелась возможность выбора к предметному материалу со стороны учащихся;

– критерии оценивания при реализации личностно – ориентированного обучения должны учитывать, кроме уровня обученности, сформированность определенного интеллекта;

– обучение, в соответствии с требованиями современного образования, должно быть направлено на становление духовных и интеллектуальных качеств ученика;

– строить обучение на принципе вариативности.

Обучение курсу «Геометрия» в средней и старшей школе, в соответствии с принципами личностно-ориентированного обучения, выносит на рассмотрение ряд проблемных вопросов, решение которых возможно с помощью интеграции требований научной строгости и педагогических принципов, которые выступают в роли моста, соединяющего теоретические основы личностно-ориентированного подхода с педагогической практикой.

Характерные цели организации учебного процесса в рамках личностно-деятельностного подхода требуют от каждого учителя математики внедрения в свою практику не только основных, но и частных принципов, отражающих требования к практической составляющей учебного процесса, ориентированного на формирование и развитие исследовательских компетенций на уроках геометрии: проблемность, осознанность, дифференциация, систематичность.

Рассмотрим возможность применения этих принципов на уроках геометрии.

Проблемность. Понятие «проблемное обучение» в современной педагогике отечественными и зарубежными авторами трактуется как основной метод самостоятельного изучения задачи (проблемы) и поиска оптимальных решений, в некоторых случаях открытий, учащимися.

«Цель проблемного обучения – усвоение не только результатов научного познания, системы знаний, но и самого пути, процесса получения этих результатов, формирование познавательной самостоятельности ученика и развитие его творческих способностей» [48, с. 47]. Из этого следует вывод о том, что в основу формирования исследовательских умений при решении геометрических задач (задач на исследование свойств и признаков геометрических объектов) целесообразно положить проблемное обучение, так как данный вид обучения, по мнению М.И. Махмутова [41], является безупречным сочетанием творческий и репродуктивной деятельности учащихся по усвоению геометрических знаний, способов мышления и действий с ориентацией на личность.

Согласно [17] «…при проблемном обучении имеет место:

– целенаправленная организация системы проблемных ситуаций;

– систематическое включение учащихся в процесс выявления проблемных ситуаций и постановки проблем;

– открытие и усвоение учащимися знаний, в том числе о способах действий, происходит в процессе решения задач, который имитирует творческий научный поиск;

– забота о повышении уровня самостоятельности обучаемых при разрешении проблемных ситуаций;

– создание и поддержание познавательного интереса через мотивацию учебной деятельности» [17, с. 154].

– Специфика проблемного обучения создает благоприятные условия для:

– мотивации учащихся к исследовательской деятельности в процессе решения задач на исследование свойств и признаков геометрических объектов;

– усвоения знаний каждым учеником и включению его в самостоятельную поисковую деятельность.

В современной дидактике «проблемные ситуации» систематизируют как: первичная (нет осознания видимого противоречия) – необходимо самостоятельно сформулировать и поставить проблему; вторичная (видимая проблема осознана и сформулирована) – найти и осуществить решение поставленной проблемы.

Отметим дидактические условия, приводящие к «проблемной ситуации»:

– нехватка информации (недостаточно теоретических и практических знаний);

– ситуация выбора (из имеющихся теоретических знаний);

– новые условия (из имеющихся практических знаний).

Проблемные ситуации вида «нет осознания видимого противоречия» можно создавать на уроках любого типа. Например, на уроке изучения нового по теме «Теорема Пифагора» можно предложить учащимся «опережающую» задачу практического (занимательного) содержания: Скрещенные ножки гладильной доски образуют треугольники (рисунок 17). В соответствии с рисунком и теоремой Пифагора определить соотношение и вычислить длины отрезков на основе двух других.

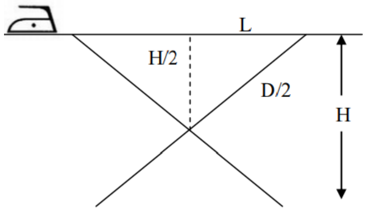


Рисунок 17 – Теорема Пифагора и гладильная доска

Создавать проблемные ситуации на уроках решения задач, можно с помощью:

– нестандартных (задачи практического содержания, занимательные), неполных или переопределенных задач;
– варьирование задачи;
– диагностика сознательно допущенных ошибок;
– креативных заданий на составление задач.

Вторичный вид возникает в момент поиска других способов решения задачи при исследовании уже полученного. Например, при решении задачи: основание высоты, равной 2 м., совпадает с точкой пересечения диагоналей ромба, равных 7 м. и 9 м., являющегося основанием пирамиды, можно дать такие задания как: найти углы наклона ребер к плоскости основания, найти апофему, площади боковой и полной поверхностей.

Итак, следуя известным концепциям, отметим, что применение проблемного обучения для решения геометрических задач: способствует развитию и поддержанию устойчивого интереса к геометрии, выявляя математические способности отдельных учащихся, расширению кругозора; стимулирует умственную активность; создает необходимую атмосферу для формирования и развития исследовательских умений в соответствии с возрастными и индивидуальными способностями и уровнем геометрической подготовки учащихся.

Осознанность. В отличие от проблемности, осознанность характеризуется не только глубоким осмыслением учебного материала, но и умением применять его на практике, превращая знания в убеждения.

А.Я. Блох и Е.С. Канин, выделяют следующие атрибуты осознанности знаний:

– «понимание учащимися характера связей между знаниями;
– понимание механизма становления и проявления связей;
– умение обосновать знания;
– понимание способов получения знаний и сферы их применения» [13, с. 28].

Одним из особо значимых мотивов учения является осознанность, реализующаяся через развитие познавательного интереса. Создание, развитие и, самое сложное – поддержание этого интереса – важнейшая задача каждого учителя математики. Отсюда следует, что учителю необходимо постоянно сопровождать учебный процесс, прошедший этап мотивации, активными методами и сильными эмоциями, что является процедурой активизации учебно-познавательной деятельности. Данную процедуру, в свою очередь, условно можно разделить на два этапа: «побуждение и развитие интереса как средства побуждения к деятельности; управление этой пробудившейся деятельностью» [33, с. 20].

Поэтому, для развития и поддержания познавательного интереса на уроках геометрии рекомендуется применять различные виды задач: нестандартные (занимательные, логические, практические), которые не подразумевают наличия глубоких предметных знаний у всех учащихся.

Например, использовать задачи, которые являются вопросами устного характера. При закреплении темы «Элементы стереометрии» возможны следующие задачи-вопросы: «Могут ли две пересекающиеся плоскости иметь общую точку, которая не принадлежит линии их пересечения? Как могут быть расположены две прямые относительно друг друга в пространстве? Верно ли, что если: а) один и тот же треугольник лежит в двух плоскостях, то они совпадают; б) прямая имеет с окружностью только одну общую точку, то она является касательной к окружности?» и т.п.

Пробуждение интереса и «оживление» учащихся происходит из-за отсутствия необходимости производить затратное по времени решение, но предлагая такие упражнения необходимо учитывать и возможность достижения практической цели. Ситуация успеха – это мотив к самоутверждению, которую необходимо создать для каждого участника образовательного процесса. Чтобы снять чувство неуверенности и закомплексованности отдельных учащихся, учитель должен создать благоприятный микроклимат в классе. Формирование исследовательских навыков и развитие мышления тесно связаны. Развивающиеся исследовательские навыки активизируют мыслительную деятельность, развивают интеллект. И наоборот, развитие мышления один из основных факторов развития исследовательских навыков.

Рассмотрим пример на основе следующей задачи.

«Плоскость сечения проходит через середину ребра правильного тетраэдра, перпендикулярно этому ребру. Найдите площадь сечения, если ребро тетраэдра 8 см? (рисунок 18)» [24]. Изменив условие задачи, можно получить задачу исследовательского характера: «Плоскость сечения проходит через сторону основания и противолежащее ребро правильного тетраэдра. Когда площадь сечения будет наименьшей, если ребро тетраэдра равно 8 см.?» [6, с. 53]

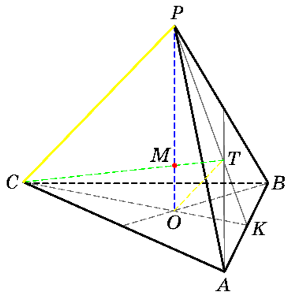


Рисунок 18 – Правильный тетраэдр

Рассмотрим пример решения еще одной задачи на отыскание зависимостей между элементами геометрических объектов: «В правильной треугольной пирамиде SABC плоский угол при вершине a, а кратчайшее расстояние между боковым ребром и противоположной стороной основания равно d. Найти объем этой пирамиды» [10, с. 54].

Решение. Произведем дополнительное построение: через ребро SA, точку N и основание перпендикуляра AN к отрезку BC проведем плоскость. NM – высота перпендикуляра треугольника ASN. Перпендикулярный к AS отрезок NM равен d. Пусть a – сторона основания (рисунок 19).

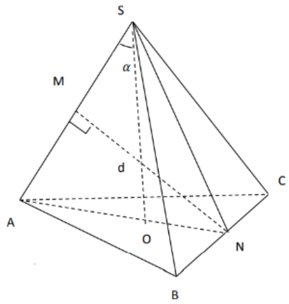


Рисунок 19 – Правильная треугольная пирамида SABC
с дополнительными построениями

Тогда, $\mathrm{AS} = \frac{a}{2\sin\frac{a}{2}}$,

$\mathrm{SO} = \sqrt{\mathrm{AS}^2 - \mathrm{AS}} = \frac{a}{6\sin\frac{a}{2}}\sqrt{9 - 12\sin^2\frac{a}{2}}$. Так как $\mathrm{AN} \cdot \mathrm{SO} = \mathrm{AS} \cdot \mathrm{d}$, то

$a = \frac{6d}{\sqrt{3}\sqrt{9-12\sin^2\frac{a}{2}}}$. В результате: $V = \frac{1}{3}\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{d^3}{3\left(3-4\sin^2\frac{a}{2}\right)\sin\frac{a}{2}}$.

Для формирования исследовательских умений учащимся можно предложить провести самостоятельное исследование некоторых случаев (изменить числовые данные, добавить градусную меру угла и т.п.) и сделать соответствующие выводы (провести анализ полученного результата).

Дифференциация. Дифференциация – это разделение некоторого целого на части в соответствии с какими-либо существенными признаками.

По утверждению Г.К. Селевко «дифференцированное обучение – это:

- форма организации учебного процесса, при которой учитель работает с группой учащихся, составленной с учетом наличия у них каких-либо значимых для учебного процесса общих качеств (гомогенная группа);
- часть общей дидактической системы, которая обеспечивает специализацию учебного процесса для различных групп обучаемых» [60, с. 193].

Если рассматривать процесс дифференциации с точки зрения дидактики, то можно заметить, что он применяется педагогами в рамках класса и разделение происходит в соответствии с уровнем обученности, при этом важно учитывать степень влияния познавательного интереса на личность учащегося. Принимая во внимание результаты различных исследований и опыт педагогов по организации дифференцированного обучения к рассмотрению приняты три различные группы адаптированные к особенностям развития, уровню подготовки и учетом области интересов: I уровень – начальный (достигает каждый); II уровень – базовый (достигает большинство); III уровень – профильный (достигают некоторые). Все группы имеют сменный состав.

Реализация дифференциации в данном исследовании предполагает:

- использование разноуровневых заданий, развивающих исследовательские умения;
- консультации, дополнительное время при затруднениях отдельных учащихся во время учебного процесса;

– требования при оценивании результатов обучения ученика в соответствии с его способностями и возможностями.

Проведя анализ российской и казахстанской учебной литературы для учащихся 7-11 классов по геометрии на предмет наличия уровневой системы задач, сделано следующее предположение: казахстанские авторы А.Н. Шныбеков и Д.А. Шыныбеков на всех ступенях образования применяют трехуровневую систему по Н.П. Гузик [21], которая направлена на реализацию дифференцированного подхода в обучении геометрии, задач повышенной сложности и творческого характера очень мало. В российской учебной литературе для школьников по курсу геометрия (авторы Е.В. Потоскуев, Л.И. Звавич), уровневая система задач отсутствует, упражнения обязательного минимума и повышенной трудности отмечены специальными символами и представлены в достаточном количестве. В любом случае, необходима дополнительная работа для преобразования задач в исследовательские.

Рассмотрим задачу для 11 класса по теме «Объемы многогранников. Определение призмы. Виды призм». В качестве базовой, возьмем задачу обязательного минимума № 2.022: «В прямой треугольной призме стороны основания равны 10, 17 и 21, а высота 18. Найдите площадь сечения, проведенного через боковое ребро и меньшую высоту основания» [50, с. 33].

Допустим варьирование задачи и предложим задания исследовательского характера, тем самым создадим ситуацию выбора по способностям.

Уровень I. В прямой треугольной призме стороны основания равны 10, 17 и 21, а высота 18. Найдите площадь сечения? Какую форму имеет сечение? Как расположено это сечение.

Уровень II. В прямой треугольной призме стороны основания равны 10, 17 и 21, а высота 18. Определите, какое значение будет иметь площадь сечения плоскостью под углом 30°, 45°, 60° к основанию? Сравните с решением ключевой задачи.

Уровень III. В прямой треугольной призме стороны основания равны 10, 17 и 21, а высота 18. Сечение под каким углом к основанию призмы, будет наименьшим? Сравните с решением базовой задачи и сформулируйте выводы.

Такой подход дает возможность работы по ликвидации пробелов у «слабых» и способствует развитию исследовательских умений в соответствии с потребностями каждого учащегося.

Систематичность. Процесс формирования и развития навыков исследования довольно сложный и понимается как практически применимая динамическая система. Системность обусловлена двумя составляющими – это логическое построение самого курса геометрии и особенностями потребности учащихся к приобретению знаний. «Принцип систематичности ориентирует учителя на достижение системности знаний в сознании учащихся путем установления тесной связи между элементами изучаемого материала, раскрытия единства элемента и структуры, части и целого. Следовательно, смысл принципа систематичности заключается в том, что учащиеся осознают приобретенные знания как элементы целостной, единой системы» [13, с. 30]. Следовательно, систематическая организация решения исследовательских геометрических задач, реализует потребность учащихся в развитии личностных качеств, таких как: самооценка, самоконтроль и критическое мышление, а также обеспечивает формирование умений и навыков исследования. Поэтому систематичность можно представить как совокупность системного подхода и реализации вышеуказанных принципов.

В заключении хочется подчеркнуть большое значение личностно-ориентированного обучения. Его методы и приемы создают условия для активной деятельности учащихся в процессе внимательного наблюдения геометрических объектов, направляют мысль, намечают путь в ходе умозаключений и выводов, при этом ученики учатся не столько со слов учителя, сколько руководствуясь собственными размышлениями в поисках решения поставленной проблемы.

Выводы по первой главе

В работе рассмотрены различные подходы к определению понятия «геометрический объект», классификация геометрических объектов, их свойства и признаки. Выделены существенные и несущественные признаки геометрического объекта, а также выделено основное отличие признака от свойства объекта: всякий признак объекта является его свойством, однако, далеко не всякое свойство объекта является его признаком. Описаны основные этапы выявления свойств и признаков геометрических объектов конкретно-индуктивным и абстрактно-дедуктивным методами. Приведены примеры.

Определены и описаны приемы и методы решения задач на исследование свойств и признаков геометрических объектов. Выделены эвристические и общематематические приемы. Отдельно описаны методы для решения задач на исследование свойств и признаков геометрических фигур в планиметрии и стереометрии.

Проведен анализ различных взглядов на личностно-ориентированное обучение, определены требования данного подхода к обучению и организации учебной деятельности, представлена модель процесса формирования исследовательских умений учащихся при обучении решению геометрических задач основанная на принципах личностно-ориентированно обучения при решении геометрических задач: проблемность, осознанность, дифференциация, систематичность.

Глава 2 Методические аспекты обучения школьников задачам на исследование свойств и признаков геометрических объектов

2.1 Методические аспекты обучения школьников решению задач на исследование свойств и признаков геометрических объектов в контексте личностно-ориентированного обучения

Особая роль в системе учебных предметов принадлежит геометрии. Ни что так не «оживляет» урок, как решение задач исследовательского характера. Это самый «интеллектуальный» этап урока, который дает возможность учащимся, не зависимо от уровня обученности, проявить себя и почувствовать себя успешным.

Под исследовательской задачей будем понимать «систему логически связанных учебных проблем, позволяющих в совокупности с эвристическими вопросами, указаниями и минимумом учебной информации открыть новые знания об объекте исследования, способе, приеме или средстве исследовательской деятельности» [26, с. 35].

В параграфе 1.3 первой главы нами были сформулированы принципы формирования исследовательских умений при решении задач на исследование свойств и признаков геометрических объектов в контексте личностно-ориентированного подхода, а также определены следующие уровни обученности: начальный; базовый; профильный.

Для эффективной реализации обучения учащихся решению геометрических задач исследовательского характера, учитель обязан придерживаться некоторых принципов для отбора задачного материала в соответствии с уровнями обученности. К ним относятся:

– задача удовлетворяет степени самостоятельности при решении: соответствовать подготовке обучающихся; конкретного класса; особенностей профиля обучения (базовый или профильный)

– задача соответствует определенному структурному элементу (этапу) урока.

Рассмотрим реализацию данных критериев более подробно.

Критерий 1

На I уровне (начальном) учитель обязан:

– обучить учащихся логическим основам получения новых знаний, при этом четко выделяя основные этапы: обработка геометрического материала полученного с помощью наблюдения или эксперимента (эмпирические данные); обработка полученной информации и применение ее в теории с помощью логики (дизъюнкция, конъюнкция);

– научить использовать логические приемы: индукция, дедукция, сравнение, аналогия, анализ, синтез и другие.

Заметим, что при этом, задачи, содержащие подобные требования, направлены на выполнение исследований по готовому образцу, где от учащихся не требуется серьезных «умственных затрат» или способностей (репродуктивный уровень обучения).

Например, для закрепления темы «Параллельные прямая и плоскость», к рассмотрению можно предложить следующую задачу:

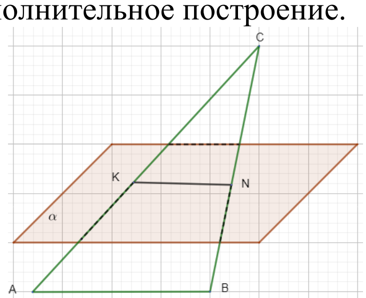
«Дан треугольник ABC, через середины двух его сторон проведена плоскость α, не совпадающая с плоскостью этого треугольника. Определите, параллельна ли эта плоскость третьей стороне треугольника (рисунок 20)» [68, с. 31].

При поддержке учителя учащиеся проводят анализ условия задачи. Пример представлен в таблице 5.

Далее, учителем предлагается задача для самостоятельного решения: «Могут ли основания трапеции ABCD быть параллельны плоскости, пересекающей ее по средней линии?» [87, с. 28].

Так как решение этой задачи аналогично, то учащиеся справятся самостоятельно, без особого труда.

Таблица 5 – Деятельность учителя и учащихся при проведении анализа условия задачи

Деятельность учителя	Деятельность учащихся
Постройте треугольник ABC и проведите плоскость α.	Строят чертеж по условию задачи
Достаточно ли данных на вашем чертеже, для решения задачи? Ответ обоснуйте. Проведите дополнительное построение	Отвечают на вопрос. Возможный ответ: нет, необходимо указать точки, через которые проходит плоскость α. Проводят дополнительное построение.  Рисунок 20 – Треугольник ABC
Как могут располагаться прямые в пространстве?	Дают ответ на поставленный вопрос. Возможный ответ: пересекаются, скрещиваются или могут быть параллельны
Какой из перечисленных способов расположения имеет место в данной задаче?	Возможный ответ: KN ‖ AB
Сформулируйте проблему для решения	Возможный ответ: определить, как проходит плоскость через точки K и N
Озвучьте свои гипотезы и предположения	Возможные ответы: отрезок KN – средняя линия треугольника ABC и параллелен стороне AB.
Обоснуйте свой ответ	Возможные ответы: точки K и N – середины сторон треугольника; плоскость α проходит через данные точки и не совпадает с плоскостью треугольника ABC. Рассмотрев отрезок KN, сделаем вывод о том, что он является средней линией данного треугольника, следовательно, KN‖AB. Отсюда, по признаку параллельности прямой и плоскости, плоскость α параллельная прямой AB.

Решение задачи.

Известно, что средняя линия трапеции KN параллельна ее основаниям AB и CD. По условию: $KN \in \alpha$, $AB \notin \alpha$, $CD \notin \alpha$ (рисунок 21). Согласно теореме о параллельности плоскости и некоторой прямой, лежащей в этой плоскости (теорема 3), имеем, что если прямая параллельна какой-либо прямой, лежащей в плоскости: AB||KN, CD||KN. Следовательно, AB||α и CD||α.

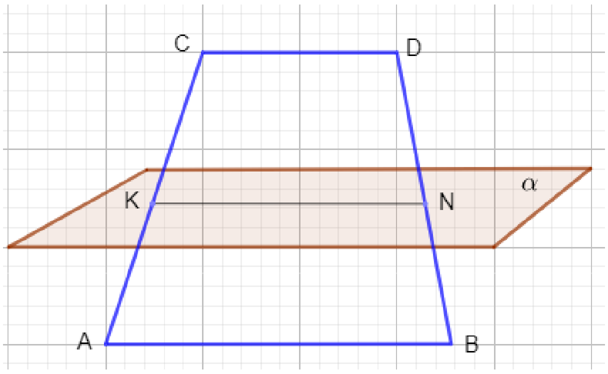


Рисунок 21 – Трапеция ABCD

Ответ: да, могут.

На II уровне (базовый), преподаватель обязан обучить учащихся ситуативному анализу (получение информации о текущем состоянии объекта, основанной на установлении основных факторов), то есть проводить исследование для какой-либо одной разновидности геометрического объекта.

На данном уровне не рекомендуется использовать одноступенчатые задачи. Лучшего результата можно добиться, используя многоступенчатый переход к итоговому решению. Так, решив одну из проблем од руководством учителя, учащиеся смогут перейти к решению следующей проблемы, опираясь на ранее полученный результат. Например, рассмотрим задачу на определение расстояния от точки до прямой: «Определите расстояние от вершины A до прямой SC в шестиугольной пирамиде SABCDEF, стороны которой равны 1 м., а боковые ребра – 2 м.» [68, с. 64]. Рекомендация учителя: задачу лучше решать пошагово.

Решение задачи.

Проведем анализ условия: самое короткое расстояние от точки A до прямой SC – это длина перпендикуляра, опущенного на прямую SC из точки A.

Сформулируем проблему: определить треугольник, являющийся основанием этого перпендикуляра и найти его длину (рисунок 22).

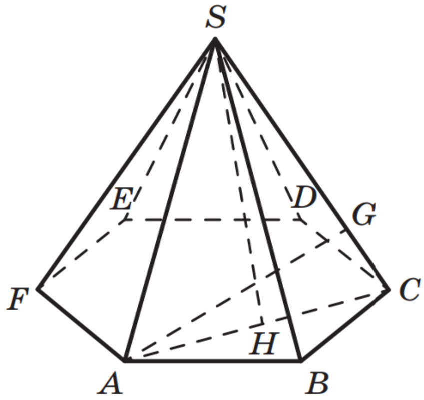


Рисунок 22 – Шестиугольная пирамида SABCDEF

Определим шаги решения задачи.

Шаг 1. Определим вид треугольника ASC и обоснуем факт равносторонности.

Шаг 2. Найдем высоту пирамиды SO: $\mathrm{SO} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$.

Шаг 3. Проведем медиану к стороне AC. Так как рассматриваемый треугольник равносторонний, то медиана SH, опущенная из вершины S будет являться высотой треугольника ASC (по свойству медиан в равнобедренном треугольнике) при этом искомый перпендикуляр и высота совпадут.

Шаг 4. Опустим высоту AG на сторону SC и определим, что искомое значение – это длина отрезка AG.

Шаг 5. Найдем SH, по теореме Пифагора, т.к. это гипотенуза треугольника SOH, получим: $\mathrm{SH} = \sqrt{(\sqrt{3}^2 + (\frac{1}{2})^2)} = \frac{\sqrt{13}}{2}$.

Шаг 6. Найдем длину отрезка AG: $\mathrm{AG} = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{13}}{2 \cdot 2} = \frac{\sqrt{39}}{4}$.

Шаг 7. Запишем ответ: $\mathrm{AG} = \frac{\sqrt{39}}{4}$ м.

В этом случае учителю рекомендуется оказать помощь учащимся при определении этапов решения задачи и показать весь процесс решения, но затем предложить решить аналогичную задачу самостоятельно. При таком подходе уровень саморегуляции и самостоятельности значительно повышается.

На III уровне (профильном) учитель обязан не только показать связь учебной задачи с другими разделами геометрии или междисциплинарную связь, но и многоэтапность возможного решения, а также возможность получения неочевидного результата, предполагаемого изначально. При этом необходимо строго придерживаться правила, которое гласит, что учащиеся самостоятельно должны применять свои знания, умения и навыки к новым условиям и без дополнительной поддержки, со стороны учителя, раскрывать какие-либо новые свойства и стороны изучаемого объекта или учебного материала.

Для данного уровня можно предложить к рассмотрению задачи следующего содержания: «В правильной четырехугольной пирамиде SABCD сторона основания равна 8, а боковое ребро – 10. На ребрах AB и SB отмечены точки L и M соответственно, причем известно, что AM:MB=SL:LB=1:7. Плоскость α содержит прямую LM и параллельна прямой AD. Исследуйте расположение прямых SA и LM и определите расстояние между ними» [43].

В результате анализа условия задачи учащиеся самостоятельно должны установить, что расстояние между прямыми SA и LM равно расстоянию между параллельными плоскостями α и SCB, а в качестве проблемы – нахождение расстояния между параллельными плоскостями α и SCB. Действительность показывает, что не все учащиеся, а только 15% от класса, могут сразу увидеть ситуацию в пространстве. Трудность у учащихся вызывает наличие чертежа (рисунок 23), от которого учащиеся не могут отвлечься и представить расположение данных плоскостей.

Этап поиска решения предполагает обоснованное видение общего перпендикуляра HT. Так как AM:MB=SL:LB=1:7, то плоскость сечения делит высоту HT, считая от точки T, в том же соотношении. Следовательно, искомое расстояние – это одна восьмая от высоты HT. Ответом станет искомое расстояние, равное $\frac{\sqrt{357}}{21}$.

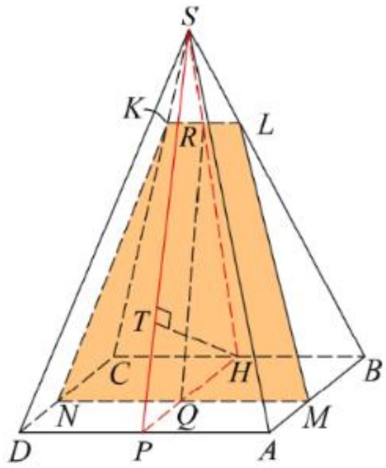


Рисунок 23 – Пирамида SABCD

Критерий 2. Целью обучения решению задач на исследование свойств и признаков геометрических объектов, в первую очередь, является мотивация к изучению геометрии, развитие творческих способностей и мыслительной деятельности. Поэтому так необходимо использовать задачи исследовательского характера для реализации педагогических целей, таких как, выявление свойств и признаков геометрических объектов, обнаружение новых взаимосвязей и фактов, обобщение и систематизация понятий и многих других. Такой подход объединяет развивающие и обучающие функции, его нужно осуществлять регулярно, на различных структурных элементах урока.

Рассмотрим критерии отбора задач отдельно для каждого этапа урока.

Этап мотивации к изучению новой темы. На этом этапе целесообразно заинтересовать учащихся с помощью задач-вопросов. Например, при изучении темы «Ромб» можно использовать следующие задачи – вопросы: 1) При каком условии, диагонали ромба равны его сторонам? 2) Возможно ли, что сторона ромба вдвое меньше его диагонали? 3) Если высота ромба равна его высоте, то о каком ромбе идет речь? 4) Могут ли неравные ромбы иметь равные: а) периметры; б) площади?

Если использовать при этом активные методы обучения и организовать данный этап в виде некоторого «соревнования», то это повысит рабочий тонус, вызовет у учащихся желание к самосовершенствованию и будет способствовать «ситуации успеха» для каждого учащегося.

Этап объяснения новой темы. Правильно подобранные задачи дают возможность разрешения проблемного вопроса на базе имеющихся знаний учащимися самостоятельно. Например, для вывода формулы площади боковой поверхности прямой призмы рекомендуется задача следующего содержания: «Зимой для детей построили ледяную горку. Определите площадь, которую нужно покрыть льдом, если ее размеры: длина – 4 м., ширина – 5 м., высота – 2 м.» [85, с. 25]. Обобщив полученные результаты, учащиеся смогут получить формулу площади боковой грани для любой прямой призмы: $S_{бок} = h \cdot p$. Далее, используя наводящие вопросы или задачу: «Башни «Ворота в Европу» имеют форму наклонной призмы высотой 114 м. под углом в 15°, шириной – 60 м., длиной – 80 м. Определите площадь внешней боковой грани, которую необходимо покрыть стеклом», учащихся можно сподвигнуть на «открытие» формулы площади боковой поверхности наклонной призмы: $S_{бок} = P_{сеч} \cdot l$.

Таким образом, на данном этапе самостоятельное исследование может начаться как с подведения учащихся к постановке проблемного вопроса, так и созданием проблемной ситуации учителем. Чувство «первооткрывателя» возникает в результате самостоятельного обнаружения проблемы, что является стимулятором к изучению нового учебного материала.

Этап закрепления новых знаний предполагает наличие условий создания проблемной ситуации непосредственно перед объяснением, разрешение которой возможно лишь после изучения новой темы. Например, перед новой темой «Тела вращения» была предложена задача: Самое большое здание в мире, имеющее форму сферы – это здание «Нүр – Әлем» в Казахстане, имеющее диаметр 80 м. и высотой в восемь этажей. Найти площадь сечения седьмого этажа. Конечно, учащиеся понимают, что для решения этой задачи необходимо получить новый объем знаний и действий. После объяснения новой темы задача легко решается учащимися самостоятельно, без поддержки учителя.

На этапе закрепления изученного, также рекомендуется использовать задачи исследовательского характера. Например, при закреплении темы «Площадь сектора и сегмента» в 9 классе перед учащимися ставится устная задача-исследование: «Можно ли найти площадь сегмента круга, не используя стандартные формулы, а только с помощью высоты (h) и длины хорды (c)?» [14]. Для решения этой задачи-исследования учащимся необходимо использовать весь свой багаж знаний о сегменте и окружности, имеющийся опыт и умения анализа, синтеза и рассуждений. В результате, учащиеся получают формулу для нахождения площади сегмента круга только с помощью высоты и длины хорды: $S_{\text{сег}} = \frac{hc}{2}$.

На этапе проверки знаний рекомендуется представить задачу в виде геометрического парадокса, когда учащиеся должны применить новые знания. Например, при опросе учащихся после изучения темы «Пирамида и ее свойства» перед учащимися ставится проблема: «Возможно ли существование шестиугольной пирамиды, у которой три противоположные грани перпендикулярны плоскости основания?». Как правило, все учащиеся будут говорить, что такой пирамиды не существует, т.к. если противоположные грани шестиугольной пирамиды перпендикулярны к плоскости основания, то они параллельны и не имеют общей точки. Они не подумали о пирамиде, у которой основание не является выпуклым многоугольником (рисунок 24).

После того, как учащиеся убедятся в противном, у них формируется более широкий взгляд на рассматриваемые геометрические объекты. Подобные задания активизируют учащихся на мыслительную деятельность, требуя нестандартного, исследовательского мышления.

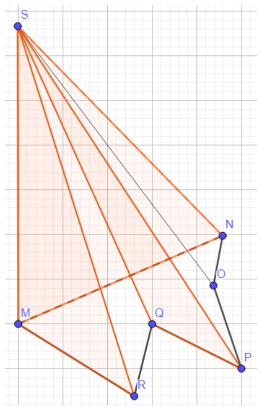


Рисунок 24 – Пирамида, в основании которой невыпуклый многоугольник

Для организации процесса решения задач на исследование свойств и признаков геометрических объектов важной составляющей является педагогически правильная организация процесса ее решения. Как говорилось ранее, прежде всего необходима психологическая готовность и мотивация учащихся к решению задач на исследование свойств и признаков геометрических объектов. Прежде всего, при организации решения исследовательских задач, учителю надлежит ознакомить учеников с системой способов и методов, которая позволит самостоятельно приобретать необходимые знания и делать «открытия».

При проведении урока с элементами исследования, значительно повышается уровень сложности подготовки самого учителя, так как приходится учитывать множество факторов организационного и методологического характера, которые бы позволили сэкономить время на уроке. К таким фактором относим:

– возможность проведения «спаренных» уроков (при проведении таких уроков учащиеся свободно выделяют признаки объекта, рассуждают о событии и выявляют причинно-следственные связи между ними, устанавливают противоречия, дают оценку объективную оценку решению задачи);

– повторение ранее изученного материала, необходимого для проведения исследования геометрических объектов при решении задач, посредством нестандартного и дифференцированного домашнего задания;

– использование средств информационно-коммуникационных технологий и мультимедийного оборудования в качестве дидактического и учебного материалов.

Ежеурочно, на каждом этапе урока, должны использоваться такие средства и методы как:

– на этапе изучения нового материала: задачи-вопросы на экспериментирование и несложные открытые задачи в качестве устных упражнений;

– на этапе объяснения нового материала: использовать технологию проблемного обучения при изложении учебного материала, задания для коллективного выявления новых свойств и признаков изучаемого объекта;

– на этапе закрепления изученного: организация групповой или коллективной работы по решению задач на составление плана решения, по выдвижению предположений, гипотез и выявлению ключевых идей, а также на овладение методами познания (анализ, синтез, аналогия, обобщение и т.д.);

– на этапе домашнее задание: организация дифференцированной домашней работы по карточкам с включением задач на исследование свойств и признаков геометрических объектов.

При непосредственном проведении урока, обязательно необходимо сочетание различных форм работы учащихся – это индивидуальная, парная, групповая и коллективная. Конечно, на начальном этапе, предпочтение отдается коллективной форме работе, так как по одной и той же проблеме работает весь класс, задача при этом анализируется и обсуждается всеми участниками, что в свою очередь, упрощает процесс выдвижения гипотезы, а при возникновении спорных ситуаций учитель выступает в роли консультанта, используя «вопросы-подсказки».

В целях организации личностно-ориентированного подхода (дифференциации) класс распределяется на группы в соответствии с трехуровневой системой, рассмотренной ранее (начальный, базовый, профильный). Функциональность групп носит временный характер ввиду того, что по достижении соответствующего результата учащиеся могут перегруппироваться.

Задания для последующей перегруппировки могут быть трех видов:

– для последующей перегруппировки, всем группам выдаются одинаковые задачи и устанавливается временной промежуток для решения. Затем полученные результаты сравниваются и после этого происходит переход учащихся из одной группы в другую в соответствии с его геометрической подготовкой;

– для создания «ситуации успеха» и самоутверждения группам учащихся предлагаются задачи различного уровня сложности (при подборе задач применяется дифференцированный подход). Последующая перегруппировка основана на уровневой дифференциации;

– для «смешанных» групп подбираются задачи, решение которых является начальным шагом для решения следующей, то есть каждая группа учащихся решает часть одной общей проблемы.

Рассмотрим пример задачи для организации дифференциации.

Учащимся 11-го класса была предложена задача – установить, что «площадь боковой поверхности прямой призмы равна произведению ее высоты и периметра основания, а наклонной – произведению периметра перпендикулярного сечения на боковое ребро» [85, с. 20]. Задания для групп определены следующие:

– I уровень – исследовать данные зависимости для правильной треугольной призмы;

– II уровень – исследовать эти зависимости для прямой четырехугольной призмы;

– III уровень – исследовать прямую и наклонную шестиугольную призму, обобщить результаты и сделать выводы.

После проведенного исследования и обсуждения результатов, учащиеся делают общий вывод о том, что площадь боковой поверхности прямой и наклонной призмы, не зависимо от количества углов, вычисляются по формулам: прямая – $S_{бок.пов} = h \cdot p_{осн}$, где h – высота призмы, $p_{осн}$ – периметр основания; наклонная – $S_{бок.пов} = p_{сеч} \cdot l$, где l – длина бокового ребра, $p_{сеч}$ – периметр перпендикулярного сечения.

Для достижения максимального эффекта от коллективной работы, учащимся можно предоставить возможность общаться между группами посредством активных методов обучения, например, используя метод «Посланник». Такой подход будет способствовать сотрудничеству и формированию навыков совместного обсуждения и решения возникших проблем, то есть развивать коммуникативную компетентность.

При организации индивидуальной работы при решении задач исследовательского характера важно для каждого учащегося подобрать задание в соответствии с его уровнем обученности и знанием геометрического материала, по возможности, и с учетом его интересов. В данном случае возможно одно общее задание для всех, которое учитель может усложнить при индивидуальной работе с отдельно взятым учеником. При этом значимость учителя на уроке сводится к консультативной помощи, а все действия по выявлению новых закономерностей и фактов учащимися осуществляются самостоятельно.

В качестве индивидуальных исследований геометрических объектов выступает также и домашняя работа, задания которой также должны носить творческий и/или исследовательский характер. По мнению Т.В. Рогозиной необходимо отойти от простого указания на домашнюю работу, а пользоваться «…более гибкими способами управления, основанными на согласовании смыслов, целей и содержания домашней работы. К ним относятся: расширение выбора заданий, использование дифференцированных и индивидуальных заданий, основанных на определении необходимого и достаточного учебного материала, инициативных домашних заданий» [55, с. 9]. Она считает, что домашняя работа – это основной ресурс индивидуального образовательного маршрута и решает задачи, связанные с формированием исследовательских навыков и развитием самостоятельности и творческих способностей.

Таким образом, кроме обязательных, в качестве домашнего задания, рекомендуются следующие виды упражнений на исследование свойств и признаков геометрических объектов: индивидуальные и групповые проекты; дифференцированные домашние задания; необязательные домашние задания по выбору.

Теоретическому осмыслению и обоснованию решения задач на исследование свойств и признаков геометрических объектов способствует понимание их сущности, возможных путей решений, а также знание общих методов и подходов.

Несмотря на то, что установленных правил для решения задач на исследование свойств и признаков геометрических объектов не существует, то можно прислушаться к мнению Е.Н. Фридмана, который утверждает, что «…процесс решения любой нестандартной задачи состоит в последовательном применении двух основных операций:

– сведение (путем варьирования) нестандартной задачи к другой, ей эквивалентной, но уже стандартной задаче;

– разбиение нестандартной задачи на несколько стандартных подзадач» [76, с. 48].

Решение планиметрических и стереометрических задач состоит из определенных этапов (рисунок 25), которые применимы к задачам исследовательского характера.

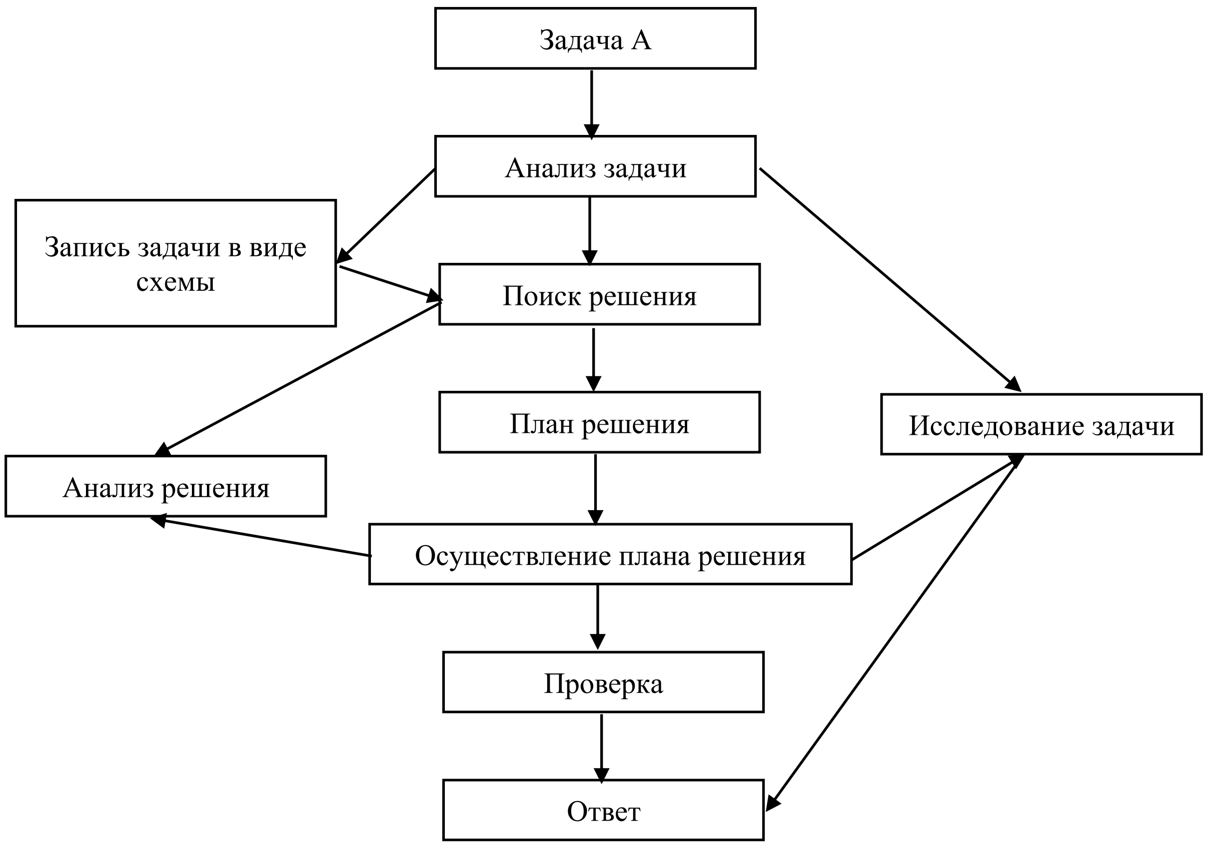


Рисунок 25 – Схема «Этапы решения геометрической задачи»

Самым эффективным методом для нахождения ключа к решению задачи является организация дискуссии посредством «мозгового штурма» в процессе которой учащимися выдвигаются различные идеи с их критическим анализом. Также, определению стратегии и тактике решения, способствуют эвристические методы (логические приемы и методические правила учебного исследования).

На заключительном этапе решения задачи обязательно проводится обобщение всех полученных результатов, включая: а) рассмотрение и сопоставление иных способов и приемов решения задачи; б) рассмотрение частных и предельных случаев.

Большинство задач на исследование свойств и признаков геометрических объектов нуждаются в моделях исследуемых объектов (плоских фигур и объемных тел). Модели на уроках геометрии способствуют развитию пространственного видения и интуиции, что способствует достижению максимального результата при обучении решению исследовательских задач.

Так как геометрия – это источник функциональных зависимостей, то при осуществлении анализа и изучения, возможно создание новых экстремальных задач, исследование которых требует от учащихся интегрированных знаний из областей математики, информатики и геометрии. Сегодня, в век информационных технологий, уже недостаточно представить модель изучаемого объекта на доске, в виде каркасной или плоской модели, в виде развертки. На уроке, чтобы завладеть вниманием учащихся и привлечь к некоторому геометрическому объекту, необходимо использовать технологии 3D – моделирования и возможности мультимедийного оборудования. Из опыта работы в общеобразовательной школе можем утверждать, что уроки геометрии, проводимые в IT-кабинете, проходят гораздо активнее. Если при объяснении нового материала использовать технологии виртуальной и дополненной реальности, то познавательный интерес не исчезает даже у самых «слабых» и длится в течение всего урочного времени.

Такие уроки можно проводить, используя следующее программное обеспечение, которое в своем арсенале имеет большой инструментарий для построения, моделирования и вращения геометрических объектов: «GeoGebra», «Живая математика», «ArloonGeometru», «Cabri 3D» и т.п.

Методическая эффективность использования средств ИКТ доказана многими исследованиями. На первый план выносится возможность задействовать каждого ученика, с разным уровнем геометрической подготовки: «начальный» уровень – видят знакомые фрагменты и принимают посильное участие в общем решении; «базовый» уровень – способны воспринять отдельные звенья общей цепи рассуждений и постепенно приходят к полному пониманию; «профильный» уровень – воспринимают задачу целиком и видят полную картину логических рассуждений для решения задачи.

Рассмотрим применение динамической системы GeoGebra для решения планиметрических и стереометрических задач на исследование свойств и признаков геометрических объектов, в которых основная трудность – это технически сложное представление чертежа. Так как решение задач с использованием динамических систем является компьютерным экспериментом, то необходимо изменить этапы решения:

– формализация условия (представление условия задачи в виде математической модели);

– построение конструкции модели (поэтапное построение модели задачи с пошаговым выявлением скрытых связей между элементами);

– компьютерный эксперимент (выдвижение гипотезы с помощью выполнения определенных действий с моделью изучаемого объекта);

– тестирование доказательства (проверка решения и доказательство того, что полученный результат является верным).

Пример 1. По какой траектории движется отрезок AN, если этот отрезок имеет постоянную длину и при движении по плоскости его концы скользят по сторонам прямого угла CAB (рисунок 26).

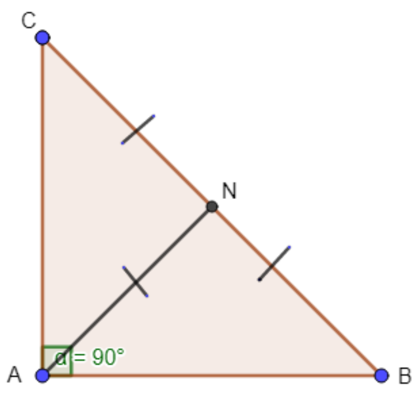


Рисунок 26 – Треугольник CAB

Решение.

Треугольник CAB – прямоугольный, так как угол CAB=90°. Если N – середина CB, тогда $\mathrm{AN} = \mathrm{CN} = \mathrm{BN} = \frac{1}{2}\mathrm{CB} = \mathrm{conct}$. Это значит, что искомые точки N удалены от точки A на фиксированное расстояние и принадлежат окружности с центром в точке A. Радиус окружности равен $R = \frac{1}{2}CB$ – половине гипотенузы. Исходя из этого, четверть построенной окружности, находящаяся внутри угла CAB, является искомым геометрическим местом точек (ГМТ). По свойству прямоугольника, основания перпендикуляров задают отрезок заданной длины, поэтому любая точка построенной дуги принадлежит искомому ГМТ. Для визуализации данного утверждения на продолжении радиуса AN отложим отрезок $NK = NC$ и опустим из точки K перпендикуляры на стороны угла.

Построение конструкции модели:

– построим угол равный 90°;

– на одной из сторон угла отметим точку N;

– построим окружность с центром в точке N и заданного радиуса так, чтобы окружность пересекала вторую сторону угла;

– отметим точкой L точку пересечения окружности со второй стороной угла;

– соединим точки N и L (построим отрезок);

– построим середину отрезка и зададим свойство «оставлять след»;

– модель готова, проведем эксперимент (рисунок 27).

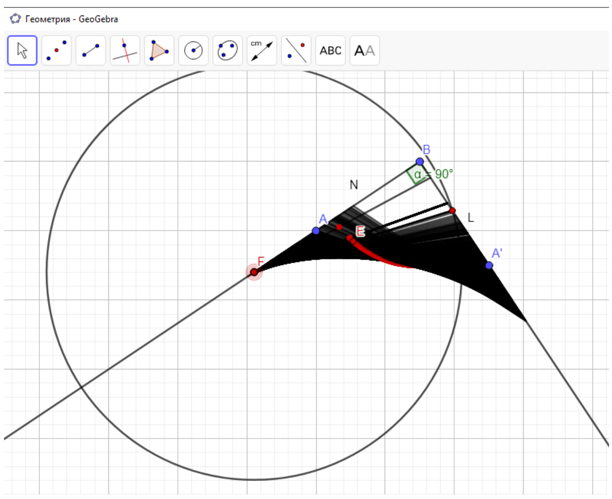


Рисунок 27 – Компьютерный эксперимент

Пример 2. «На сторонах треугольника ABC, углы которого меньше 120°, построили равносторонние треугольники. Покажите, что окружности, описанные около этих треугольников, пересекаются в одной точке. Она называется точкой Торричелли. Из неё стороны треугольника видны под углом 120°» [64, с. 92].

Решение.

Построение конструкции модели:

– построим треугольник ABC, углы которого меньше 120°;

– на его сторонах треугольника построим равносторонние треугольники;

– опишем около построенных треугольников окружности;

– отметим точку их пересечения;

– найдём величины углов, под которыми видны стороны треугольника из этой точки;

– скроем обозначения построенных линий;

– проведем необходимые изменения;

– модель готова - проведем эксперимент (рисунок 28).

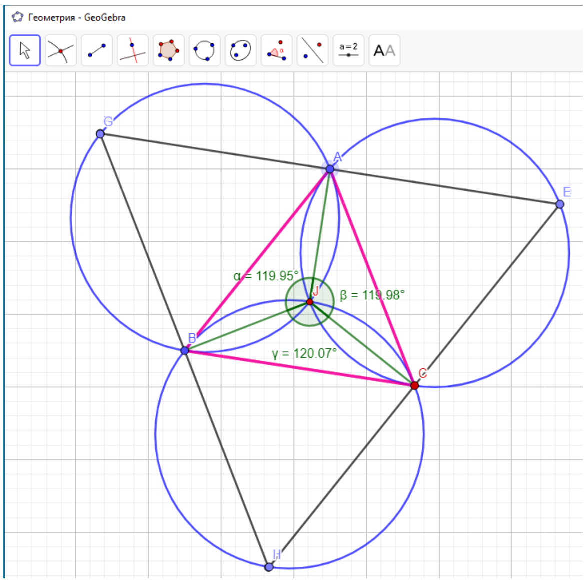


Рисунок 28 – Результат решения задачи

Наиболее интересными для исследования с помощью сред динамического моделирования являются многовариантные задачи. Рассмотрим пример решения такой задачи.

Пример 3. «Исследуйте трапецию AGFC с основанием равным 16 м. и 8 м., боковая сторона которой равна $4\sqrt{7}$, а угол ACF=60°. Известно, что через вершину C проведена прямая β, делящая трапецию на два многоугольника, площади которых равны. Определите площадь трапеции и длину отрезка прямой β, заключенного внутри трапеции. Ответ предоставьте для всех случаев» [5, с. 127]. В учебнике дается только один вариант ответа относительно боковой стороны GF (ответ: $4\sqrt{16-3\sqrt{7}}$), но в условии задачи не определено какая из боковых сторон равна $4\sqrt{7}$, поэтому считаем эту задачу многовариантной. Выявим подзадачу: «В трапеции AGFC с основание AC=16 м. и GF=8 м. Через вершину F проведите прямую β, делящую трапецию на два многоугольника, площади которых равны» [9, с. 101].

Решение.

Построение конструкции модели:

– построим основание трапеции AGFC = 16: прямая β; окружность радиусом 16 и центром в точке A; отметим точку C – точка пересечения окружности с прямой β;
– создадим ползунок для изменения угла трапеции от 0 до 180° (α=60°);
– проведем угол заданной величины с вершиной в точке C и луч CA’;
– отметим на луче точку F;
– построим основание трапеции GF: b||β; окружность радиуса 8 с центром в точке F; точка G – точка пересечения прямой b с окружностью;
– соединим точки A, G, F, C и построим трапецию;
– отметим на основании AC точку H;
– построим многоугольники AGFH и HFC;
– измерим площадь этих многоугольников;

– измерим расстояние от точки H до точек A и C;

– модель готова;

– проведем компьютерный эксперимент (рисунок 29).

Передвигая точку H вдоль отрезка AC, можем наблюдать изменение площадей многоугольников, при этом находим положение точки H, при котором их площади становятся равными.

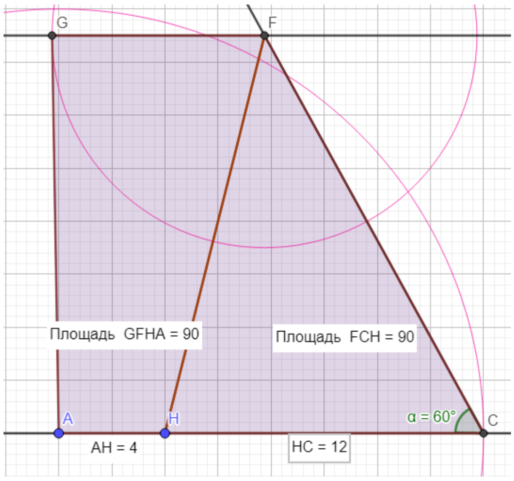


Рисунок 29 – Компьютерный эксперимент для решения задачи

Изменяя величину угла ACF и длину боковой стороны трапеции FC, наблюдаем, не смотря на изменения построенной нами трапеции, что отрезок HF делит ее площадь пополам. Объясняется это тем, что основания трапеции AGFH и треугольника HFC остаются неизменными, не зависимо от изменения их высот, которые равны друг другу (по свойству трапеции).

Вывод: площади многоугольников равны при

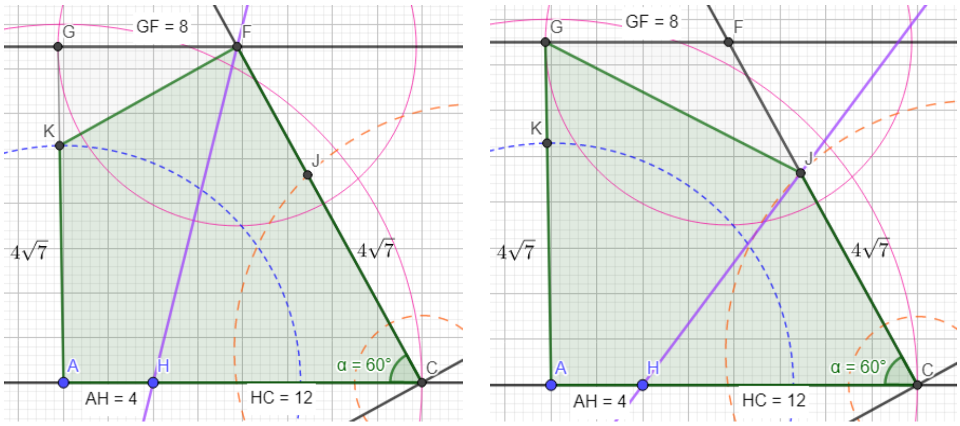
$HC + AH = HC \implies 8 + AH = 16 - AH, 2AH = 16 - 8, AH = 4.$

Вернемся к исходной задаче и построим еще два чертежа:

1 чертеж – CB = $4\sqrt{7}$, 2 чертеж – AB = $4\sqrt{7}$. Обратим внимание на то, что $(4\sqrt{7})^2 = 112=121\text{-}9=11^2 - 3^2$.

К стороне FC через точку C проведем перпендикуляр. Построим две окружности, одну с центром в точке C и радиусом равным 3; вторую – с центром в точке I и радиусом равным 11. Построим отрезок JC=$4\sqrt{7}$, проведем окружность с центром в точке A и R=JC, перемещая точку C_1 по лучу CB, получим два варианта трапеции: AKJC и AGFC.

На рисунке 30 а и 30 б представлены альтернативные чертежи к условию основной задачи.



а) б)

Рисунок 30 – Альтернативные чертежи

При организации урочной деятельности с использованием динамических систем целесообразно использовать интегральную технологию В.В. Гузеева [20] или технологию творческих мастерских А.А. Окунева [44]. Интегральная технология позволяет обеспечивать учащимся развитие личности на базе хорошо усвоенного предметного теоретического материала через объединение дидактоцентрического подхода с личностно-деятельностным.

Таким образом обучение решению задач на исследование свойств и признаков геометрических объектов в контексте личностно-ориентированного обучения на уроках геометрии будет эффективным при выполнении следующих условий:

– формирование исследовательских умений и реализация дидактических целей;

– постановка учащегося в активную позицию, вовлекая из в процесс решения задач посредством активных методов обучения;

– создание обучающей среды, основанной на выборе самим учащимся заданий соответствующего уровня сложности в зависимости от личностно-значимого для него содержания;

– осуществление дифференцированного подхода в соответствии с уровнем обученности;

– применение средств информационно-коммуникационных технологий в качестве геометрических лабораторий и тренажеров.

2.2 Система задач на исследование свойств и признаков трапеции

На уроках геометрии необходимо стремиться к тому, чтобы учащиеся посредством решения задач развивали логическое мышление и творческие способности. Для этого каждому учителю математики необходимо иметь специальный инструментарий – систему задач исследовательского характера в соответствии с изучаемой темой.

Система геометрических задач по изучаемой теме – это совокупность специально подобранных задач и упражнений, которая должна удовлетворять следующим требованиям:

– полнота,

– наличие ключевых задач,

– связность,

– возрастающий уровень сложности,

– ориентация на достижение цели,

– достаточность,

– ориентация на уровень обученности учащихся и их способности.

Задачи на исследование свойств и признаков геометрических объектов можно использовать для закрепления и углубления знаний по изучаемой теме, а также для ознакомления учащихся с новыми, не изучаемыми в теоретическом курсе планиметрии, методами и приемами решения.

В соответствии с Государственным образовательным стандартом основного общего образования [75] главным принципом построения системы задач является ориентация на способности и уровень обученности учащегося. Поэтому, проектируемая система задач ориентирована на трехуровневую внутрипредметную дифференциацию по Н.П. Гузик [21], включающую в себя три уровня сложности: начальный, базовый, профильный.

Спроектируем систему задач.

Группа I. Задачи на сравнение. В задачах этого типа необходимо сравнивать различные величины (углы, отрезки, площади и т.д.).

Первый уровень – начальный

Задача 1. Сколько прямых углов может иметь трапеция? Какая сторона такой трапеции будет вместе с тем и высотой? Проведите исследование и постройте чертеж этой трапеции.

Задача 2. Боковая сторона равнобедренной трапеции равна ее меньшему основанию. Каким должен быть угол при большем основании трапеции, чтобы ее площадь была наибольшей? (Ответ: 60°).

Задача 3. «В трапеции ABCD с основаниями $\mathrm{BC} = \mathrm{a}$ и $\mathrm{AD} = \mathrm{b}$ проведен отрезок $\mathrm{LN} = \sqrt{\mathrm{ab}}$c концами на боковых сторонах. Исследуйте стороны трапеции и сделайте вывод» [39, с. 54]. (Ответ: отрезок делит трапецию на две подобных).

Второй уровень – базовый

Задача 4. «В трапеции сумма углов при одном из оснований равна 90°. Определите длину отрезка, соединяющего середины оснований, если длина отрезка, соединяющего середины диагоналей, равна d» [4, с. 38]. (Ответ: d).

Задача 5. «Длина одного основания равнобедренной трапеции втрое больше длины другого основания. Из середины большего основания меньшее видно под углом, в два раза меньшим, чем угол, под которым большее основание видно из середины меньшего основания. Определите и сравните величины этих углов» [67, с. 45]. (Ответ: 60°, 120°).

Задача 6. «Диагонали трапеции рассекают ее на 4 треугольника. Исследуйте примыкающие к боковым сторонам треугольники, которые имеют равную площадь и определите площадь трапеции, если площади треугольников, примыкающих к основаниям, равным S_1 и S_2» [4, с. 39]. (Ответ: $(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2})^2$).

Третий уровень – профильный

Задача 7. «В трапеции ABCD с боковыми сторонами AB = 9 и CD = 5 биссектриса угла D пересекает биссектрисы углов A и C в точках M и N соответственно, а биссектриса угла B пересекает те же две биссектрисы в точках L и K, причем точка K лежит на основании AD. В каком отношении прямая LN делит сторону AB, а прямая MK – сторону BC? Определите отношение MN : KL, если LM : KN = 3 : 7. Ответ обоснуйте» [4, с. 39]. (Ответ: 1:1; 9:5; 5:21).

Задача 8. Трапеция АБВГ, высота которой 2 см, а параллельные стороны АГ = 5 см. и БВ = 3 см., превращена в равновеликий треугольник АБЕ, имеющий ту же высоту. Объясните как это сделано и почему трапеция АБВГ и треугольник АБЕ равновелики.

Задача 9. Две одинаковые трапеции АБВГ и ГВДЕ приложили друг к другу так, что они образовали параллелограмм. Сравните удвоенную среднюю линию трапеции МК с суммой параллельных сторон трапеции. Как велика средняя линия трапеции сравнительно с суммой ее параллельных сторон? Что можно сказать о направлении средней линии трапеции?

Группа II. Задачи на определение взаиморасположения геометрических объектов. В задачах данного вида необходимо установить взаиморасположение геометрических фигур (отрезков, дуг, точек, окружностей).

Первый уровень – начальный

Задача 10. «AB и BC – соответственно боковая сторона и меньшее основание трапеции ABCD. Какой из отрезков пересекает биссектриса угла A

– основание BC или боковую сторону CD, если известно, что сторона AB равна 2,6, а сторона BC равна 2,5» [67, с. 48].

Задача 11. Параллелен ли отрезок, соединяющий точки пересечения середины оснований трапеции, соединенных прямыми с ее вершинами?

Задача 12. Концы одной стороны четырехугольника соединены с серединой противоположной стороны. При этом получили треугольник, площадь которого оказалась равной половине площади данного четырехугольника. Определите вид данного четырехугольника. Ответ обоснуйте.

Второй уровень – базовый

Задача 13. На продолжении диагонали AC трапеции ABCD за точку C взята произвольная точка P. Прямые, проходящие через точку P и середины оснований трапеции, пересекают боковые стороны AB и CD соответственно в точках M и N. Исследуйте положение отрезка MN относительно сторон трапеции.

Задача 14. Основания трапеции равны 2,4 м. и 3 м. Внутри этой трапеции проведена между боковыми сторонами прямая, параллельная основаниям, которая равна 2,8 м. Одинаково ли удалена эта прямая от обоих оснований и если нет, то к какому основанию она ближе?

Задача 15. «Через центр окружности, вписанной в трапецию, проведена прямая, параллельная основаниям. Исследуйте отрезок прямой, заключенный между боковыми сторонами, и определите, чему он равен. Ответ обоснуйте» [84, с. 22]. **(**Ответ: отрезок равен $\frac{1}{4}\mathrm{P}_{\text{тр}}$).

Третий уровень – профильный

Задача 16. «По одну сторону отрезка AB, длина которого равна a, построили два квадрата APQS и SMNB. Какая фигура является геометрическим местом точек середин отрезков (точек D), соединяющих центры всех возможных квадратов APQS и SMNB? Ответ обоснуйте. Сделайте вывод» [87, с. 41].

Задача 17. «Определить среднюю линию трапеции, если одним из оснований ее служит диаметр круга, равный 6 см., а второе основание равно боковой стороне» [73, с. 41]. (Ответ: 4,5 см.)

Задача 18. «При построении канала, в целях уменьшения стоимости, выгодно уменьшить его поперечные размеры. В большинстве случаев форма живого сечения канала представляет равнобедренную трапецию с данным углом откоса φ. Часть сечения, по которой вода при своем движении соприкасается с дном и стенками, называется смоченным периметром (подводным периметром). Определите, при каком угле откоса φ, при заданной глубине канала hи площади живого сечения F, смоченный периметр (U) имеет наименьшее значение и какое именно?» [11, с. 59]. (Ответ: $\geq \sqrt{3}$).

Группа III. Задачи на отыскание зависимостей. При решении данного вида задач необходимо отыскать зависимость между элементами геометрических объектов (между сторонами и радиусом вписанной или описанной окружности).

Первый уровень – начальный

Задача 28. В каком отношении параллельная основаниям трапеции прямая, проведенная через точку пересечения диагоналей, делит ее площадь, если известно, что основания трапеции относятся как 1:5? (Ответ: 0,08).

Задача 29. В равнобедренную трапецию с большим основанием 18, вписана окружность с радиусом 6. В каком отношении находится площадь треугольника, полученного в результате отсечения прямой, проходящей через центр окружности и вершину тупого угла трапеции, к площади заданной трапеции? (Ответ: 0,5)

Задача 30. Подоконник имеет вид трапеции. Одна из параллельных сторон имеет длину 1 м. 9 см., другая 1 м. 7 см., ширина подоконника 12 см. Сколько будет стоить покраска подоконника, если стоимость покраски одного $см^2$ равна 30 рублей?

Второй уровень – базовый

Задача 31. «Профиль русла реки имеет форму равнобедренной трапеции, основания которой равны 10 м и 6 м, а высота – 2 м. Скорость течения равна 1 м/сек. Какой объем воды проходит через этот профиль за 1 мин? Ответ дайте в кубических метрах» [66, с. 64]. (Ответ: площадь профиля – 16 м^2, объем воды – 960 см^3).

Задача 32. «В трапеции ABCD на боковых сторонах AB и CD расположены соответственно точки M и N так, что AM : MB = 3 : 1, а прямые AN и MC параллельны. Известно, что площадь трапеции AMCN составляет 65% от площади трапеции ABCD. Каково отношение CN : ND?» [30, с. 59]. (Ответ: $\frac{3}{2}$).

Задача 33. Дана трапеция ABCD разделенная на три трапеции прямыми, параллельными основаниям. Известно, что радиус вписанной в среднюю трапеции окружности равен $\sqrt{\mathrm{Rr}}$. Определите радиусы двух оставшихся окружностей. (Ответ: R и r).

Третий уровень – профильный

Задача 34. «Пусть трапеция ABCD (AD||BC) описана около окружности с центром O. Определите: 1) чему равна средняя линия трапеции; 3) могут ли боковые стороны быть видны из центра O под прямым углом. Ответ обоснуйте. Сделайте вывод.» [4, с. 40]. (Ответ: 1) средняя линия трапеции равна полусумме оснований; 2) да, могут).

Задача 35. «В равнобедренной трапеции с острым углом α при основании окружность, построенная на боковой стороне как на диаметре, качается другой боковой стороны. В каком отношении она делит большее основание трапеции? Ответ обоснуйте. Сделайте вывод.» [84, с. 71]. (Ответ: $\sin 2\alpha$).

Задача 36. «Диагонали трапеции с основаниями AD и BC пересекаются в точке O: 1) постройте чертеж; 2) могут ли окружности, описанные около треугольников касаться друг друга? Ответ обоснуйте. Сделайте вывод» [83, с. 236].

Спроектированная система задач на исследование свойств и признаков трапеции может служить средством формирования исследовательских умений. Это обеспечивается наличием в системе следующих видов задач: на сравнение, на определение взаиморасположения геометрических объектов и задачи на отыскание зависимостей. Таким образом, учащиеся приходят к выводу, что перед тем, как решать задачу, необходимо провести качественный анализ условия задачи и определить все данные, выяснить их непротиворечивость и определить цель задачи. Кроме того, формируется понимание того, что задача может быть вариативной, то есть иметь не одно, а несколько различных решений.

2.3 Задачи на исследование свойств и признаков пирамиды

В изучении курса стереометрии важную роль играют задачи. Предполагается, что новые понятия, их свойства, признаки, способы рассуждений должны усваиваться учащимися в процессе решения задач. Поэтому при изучении темы «Пирамида» следует делать акцент на ее исследование в задачах, так как такой подход является важнейшим средством обучения, воспитания и активизации у учащихся качеств, присущих творческой личности.

Для решения задач на исследование свойств и признаков пирамиды учащиеся должны обладать следующими базовыми знаниями:

– понятие и свойства выпуклых и невыпуклых многогранников;

– определение и общие свойства пирамиды;

– виды пирамид (произвольная, правильная, усеченная, прямая);

– элементы пирамиды (вершина, боковое ребро, боковая грань, основание, ребро основания);

– формулы объема и площади пирамиды.

В качестве рассматриваемых новых сведений предлагаются следующие:

– свойства сечений пирамиды; свойства усеченной пирамиды;

– свойства ортоцентрического и равногранного тетраэдров;

– свойства параллельных и диагональных сечений пирамиды;

– свойства и параметры золотой пирамиды;

– свойства высоты пирамиды;

– свойства апофемы;

– свойства пирамиды, вписанной в сферу и описанной вокруг сферы.

Анализ содержания темы «Пирамида» в различных учебниках, рекомендованных Минобрнауки РФ, рассмотрен в таблице 6.

Таблица 6 – Содержание учебного материала по теме «Пирамида»

Автор	Содержание учебного материала	Часы
А.Д. Александров	Введение. II. О пространственных фигурах (первое знакомство с понятием пирамида). Глава 4 § 2 Пирамида (п. 22.1 – 22.2). Пирамида – частный случай конуса. Правильная пирамида.	6-10
Л.С. Атанасян	Глава 3 Многогранники § 2 Пирамида (п. 32 - 34). Пирамида. Правильная пирамида. Усеченная пирамида. Площадь поверхности пирамиды.	4-8
А.В. Погорелов	§ 5 Многогранники (п. 47 - 50): Пирамида. Построение пирамиды и ее плоских сечений. Усеченная пирамида. Правильная пирамида.	7
Е.В. Потоскуев	Глава 2 § 14 (14.1 – 14.9): Определение пирамиды и ее элементов. Некоторые виды пирамид. Правильная пирамида. Площадь боковой и полной поверхностей пирамиды. Свойства параллельных сечений пирамиды. Усеченная пирамида. Объем пирамиды. Об объеме тетраэдра. Объем усеченной пирамиды.	8
И.М. Смирнова	Глава 1 § 3 Пространственные фигуры (определение пирамиды и ее элементов, правильная пирамида). § 4 Моделирование многогранников (моделирование пирамиды, развертка пирамиды). Глава 2 § 15 Сечения многогранников (сечение пирамиды плоскостью). Глава 4 Многогранники § 26 Теорема Эйлера (свойства выпуклых многогранников на примере пирамид). § 27 Правильные многогранники (рассматривается правильная пирамиды и ее свойства). § 32 Многогранники, вписанные в сферу (вписанные пирамиды). § 33 Многогранники, описанные около сферы (описанные пирамиды). Глава 6 Объем и площадь поверхности. § 45 Объем пирамиды.	6

Так как определение пирамиды дается почти во всех учебниках через понятие многогранника, то целесообразно рассмотреть определение пирамиды в каждом учебнике.

В учебнике А.Д. Александрова [2] понятие пирамиды вводится в 10 классе следующим образом: «… многогранник, у которого одна грань – какой-либо многоугольник, а остальные грани – треугольники с общей вершиной» [2, с. 8], в 11 классе определение дается в следующем виде: «… частный случай конуса» [2, с. 157].

В учебнике Л.С. Атанасяна [6] определение пирамиды дается в 11 классе следующим образом: «…многогранник, составленный из n-угольника $A_1A_2…A_3$ и n треугольников PA_1A_2, PA_2A_3, …, PA_nA_1» [6, с. 69].

В учебнике А.В. Погорелова [46] определение пирамиды также дается в 11 классе: «… многогранник, который состоит из плоского многоугольника – основания пирамиды, точки, не лежащей в плоскости основания, - вершины пирамиды и всех отрезков, соединяющих вершину пирамиды с точками основания» [46, с 76].

В учебнике Е.В. Потоскуева [51] определение пирамиды также дается в 11 классе: «… многогранник, у которого одна грань – многоугольник, а остальные грани – треугольники с общей вершиной» [51, с. 109].

В учебнике И.М. Смирновой [65] определение пирамиды дается в 10 классе: «… многогранник, поверхность которого состоит из многоугольника, называемого основанием пирамиды, и треугольников с общей вершиной, называемых боковыми гранями пирамиды» [65, с. 13].

Последовательность изложения теоретического материала по теме «Пирамида» в учебниках [2, 6, 46, 51] имеют схожую структуру. Изучение темы «Пирамида» начинается с изучения основного определения, далее происходит знакомство учащихся с ее элементами, с некоторыми видами и их свойствами, приводятся доказательства прямых утверждений. Обратные утверждения предлагается доказать самостоятельно. На следующем этапе изучения темы вводится понятие правильной пирамиды, ее свойств с доказательствами и подробным алгоритмом построения правильных пирамид. Свойства параллельных сечений пирамиды приводятся после изучения темы «Площади боковой и полной поверхностей пирамиды». Далее осуществляется знакомство с усеченной пирамидой и ее свойствами, вводится понятие полной поверхности усеченной пирамиды.

Изложение темы «Пирамида» в учебнике [65], не выделена в отдельную главу, но данный многогранник, его элементы и свойства являются неотъемлемой частью разных разделов, например, понятие пирамиды вводится на начальном этапе изучения стереометрии в 10 классе в § 3 «Пространственные фигуры», § 4 «Моделирование многогранников», дальнейшее изучение происходит уже во второй главе «Параллельность в пространстве», четвертой главе «Многогранники» и пятой главе «Круглые тела» (как многогранник вписанный в сферу и описанный около нее), объем пирамиды изучается в шестой главе «Объем и площадь поверхности».

Анализ задачного материала по теме «Пирамида», в выше указанных учебниках, показал недостаточное количество задач исследовательского характера, в основном преобладают задачи на практическое закрепление базовых знаний, например:

Задача 1. «Нарисуйте правильную треугольную пирамиду PABC: а) из вершины P проведите медианы боковых граней. Докажите, что они равны; б) в гранях PAC и PBC из точек A и B проведите высоты. Докажите, что они попадут в одну точку ребра; в) нарисуйте точку Q – центр основания ABC, соедините ее отрезками с точками P, A, B, C. Укажите на полученном рисунке все пары равных треугольников» [6, с. 26].

Задача 2. «Основанием пирамиды является правильный треугольник; одна из боковых граней перпендикулярна основанию, а две другие наклонены к нему под углом α. Как наклонены к плоскости основания боковые ребра?» [46, с. 86].

Задача 3. «Выпуклый семигранник $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого грань $ABCD$ – прямоугольник со сторонами 6 см. и 8 см., а ребра AA_1, BB_1, CC_1 и DD_1 перпендикулярны плоскости основания и AA_1=3 см., BB_1=4 см., CC_1=7 см. и DD_1=5 см.» [50, с. 82].

На рассматриваемые сведения:

Задача 1. На свойства высоты пирамиды: «MABCDKP – правильная шестиугольная пирамида с вершиной М и основанием ABCDKP. Сечение, проходящее через точки М, А и D – равносторонний треугольник со стороной 6. Найдите боковое ребро и высоту пирамиды» [50, с. 64].

Задача 2. На свойства усеченной пирамиды: «Стороны оснований правильной усеченной треугольной пирамиды равны а и 0,5а, апофема боковой грани равна а. Найти объем усеченной пирамиды» [6, с. 173].

Задача 3. На свойства пирамиды, вписанной в сферу: «На рисунке изображена пирамида ABCD, у которой угол ACB прямой. AC=CB=CD=AD=a. Найдите высоту пирамиды и центр сферы, описанной около нее» [65, с. 109].

Данная система задач предназначена для математического профиля с углубленным изучением математики. Это обусловлено тем, что изучение математики на профильном уровне предполагает существенное увеличение доли самостоятельной познавательной деятельности, использования активных методов обучения, практической деятельности учащихся, особое место в которой принадлежит исследовательской деятельности и направлено на реализацию личностно-ориентированного учебного процесса, который создает условия на развитие личности школьника, на его самоопределение, самореализацию и социальную адаптацию.

Ввиду того, что задачи по теме «Пирамида» являются неотъемлемой частью ЕГЭ, то за курс обучения учащиеся должны приобрести не только прочные теоретические знания, но и практические навыки решения задач любой сложности.

В качестве основного учебника для математического профиля в данном исследовании выбран УМК Е.В. Потоскуева и Л.И. Звавича [50], [51].

Рассматриваемая в системе задач тема относится ко 2 Главе «Многогранники». Тема вводится после параграфа §13 «Трехгранные и многогранные углы», в котором рассматривается понятие о многогранном угле и вводится понятие трехгранный угол, а также приводится доказательство теорем синусов и косинусов для трехгранного угла.

В авторской программе Е.В. Потоскуева [52] отмечается, что в «результате изучения темы учащиеся должны:

– формулировать определения всех видов пирамид и доказывать их свойства; ортоцентрического и равногранного тетраэдров; двугранного угла при ребре пирамиды;

– формулировать и доказывать свойства сечений пирамиды; признаки правильной пирамиды;

– со всеми видами пирамид решать задачи на изученные свойства планиметрических и стереометрических фигур и отношений между ними, применяя алгебраический и тригонометрический аппарат, сопровождая решение каждой задачи корректной аргументацией» [52, с. 55-58].

Для профильного уровня изучения математики на тему «Пирамида» по программе [52, с. 55] отводится 8 часов, в течение которых рассматриваются определение пирамиды и ее элементов, некоторые виды частных пирамид и их свойства, формулы вычисления площадей боковой и полной поверхностей, правильная пирамида и ее свойства, апофема правильной пирамиды, формулы вычисления боковой и полной поверхностей правильной пирамиды.

Таким образом, выбор УМК [50, 51] обоснован следующими причинами:

– УМК входит в федеральный перечень учебников, рекомендованных Министерством образования и науки Российской Федерации к использованию в образовательном процессе в имеющих государственную аккредитацию и реализующих образовательные программы общего образования образовательных учреждений;

– в данном УМК представлены следующие классы задач на исследование пирамиды: на нахождение искомого (вычислительные); на объяснение или доказательство; на преобразование или построение;

– в УМК наиболее полно раскрыто теоретическое и практическое содержание темы «Пирамида».

Цель предлагаемой системы задач – сформировать навыки решения исследовательских задач по выявлению свойств и признаков пирамиды с помощью средств GeoGebra.

Задачи:

– формирование навыков построения наглядного изображения пирамиды и ее элементов с помощью средств GeoGebra;

– формирование исследовательских умений, аналитических и логических способностей, умений самоконтроля и взаимоконтроля;

– развитие самостоятельности в решении исследовательских задач, аналитических и коммуникативных способностей;

– воспитание чувства ответственности, толерантности, способности работать в команде.

Теоретический и практический материал, рассматриваемый в данной системе задач, способствует формированию исследовательских умений, познавательного интереса и мотивации к изучению математики, развитию творческих способностей учащихся, формированию навыков работы с учебной литературой; повышает качество математических знаний, тем самым повышает предметные математические компетенции.

В результате изучения темы «Задачи на исследование свойств и признаков пирамиды» ученик должен:

знать/понимать:

– определение пирамиды; свойства и признаки пирамиды; виды пирамид; способы построения изображений пирамиды и ее элементов;

– признаки и свойства, связывающие пирамиду с другими геометрическими объектами (фигурами, телами) и их элементами;

уметь:

– находить связь между теоретическими знаниями и практическими навыками при решении задач;

– самостоятельно выполнять практические задания и делать грамотные выводы; строить качественный и наглядный чертеж, выбирая оптимальное положение изображаемого объекта (фигуры, тела); определять на чертежах и моделях пирамиды: виды, элементы, свойства;

– применять полученные знания при решении задач на исследование свойств и признаков пирамиды, оформлять задания.

Применение технологии творческих мастерских А.А. Окунева [44] позволяет организовать новый способ познавательной деятельности обучающихся на уроках математики и сделать знания не просто осознанными, но и личностными.

Мастерская – это форма обучения, с помощью которой создаются необходимые условия для стремления каждого ученика к новому знанию и опыту путем самостоятельного или коллективного «открытия», посредством рефлексивной формы личностно-деятельностной организации учебного процесса. При этом позиция учителя меняется на позицию партнера (мастера), способного направить процесс обучения на «погружение» участников в процесс поиска, познания и самопознания.

Актуальность технологии творческих мастерских обусловлена возможностью использования ее методов не только при организации закрепления и повторения, но и при изучении нового материала.

При организации классно-урочной деятельности на основе творческих мастерских обязательно сочетается индивидуальная, групповая и коллективная работа учащихся, при этом происходит поэтапный переход от одной формы к другой.

Выделяется три типа мастерских: 1) мастерская построения знаний (поиск); 2) мастерская письма (исследование несовместимого); 3) педагогическая мастерская (частный случай (1)) [44, с. 69-70]. Однако, существуют и другие вариации, например, мастерская разрешения противоречий.

По утверждению группы авторов методического пособия [70, с. 245] мастерская состоит из системы заданий, которая:

– позволяет учителю уйти от непосредственной передачи учебного материала;

– включает учащихся в творческий процесс открытия знаний на основе имеющихся теоретической базы и практических навыков;

– предоставляет учащимся самостоятельный выбор пути исследования, выбор методов для решения задач, выбор уровня сложности и т. д.

Правильно организованная мастерская позволяет достичь результата, который можно описать такими словами как «сделал, открыл, понял, почувствовал, помог, выстроил, создал, задумался, понаблюдал, проанализировал и т.п.» [44, с. 58].

Таким образом, предлагаемая технология обучения призвана сделать урок современным, интересным и полезным. Она предусматривает: ориентацию обучения не на конкретный учебник, а на результаты обучения; повышение мотивации и интереса школьников к изучению геометрии; привлечение учащихся к исследовательской и проектной деятельностям; проведение текущего и рубежного контролей за результатами обучения.

В соответствии с методическим пособием к УМК [53], на изучение темы «Пирамида» выделяется 8 часов, из них три часа на уроки решения задач.

С учетом выбранной технологии творческих мастерских А.А. Окунева [44] спроектируем систему задач на исследование свойств и признаков пирамиды для двух уроков. Содержание мастерских позволит: сформировать практический аппарат исследования темы; продолжить формирование умений работать с геометрической задачей; осуществлять контроль за ходом учебного процесса. В систему положены следующие типы задач: на исследование частных и предельных случаев; на демонстрацию логики и метода поиска решения задачи; на сравнение.

Мастерская 1. «Экспериментальные открытия»

Цель: сформировать аппарат исследования темы (понятие площади боковой и полной поверхности пирамиды; виды пирамид с целью выделения частных случаев построения, позволяющих упростить вычисление площади боковой и полной поверхности) и развивать пространственное и логическое мышление.

Образовательная задача: ввести понятие сечения пирамиды; площадь боковой и полной поверхности; методы построений сечений.

Развивающая задача: развивать самостоятельность, умение работы в группах.

Воспитательная задача: повышать интерес к изучению предмета, формировать логическое мышление и исследовательские умения.

Ожидаемые результаты: свободно оперирует понятиями площади боковой и полно поверхности пирамиды, сечение; осознает, что площадь боковой поверхности некоторых пирамид можно вычислить проще, зная их особенности.

Ход мастерской (45 минут):

Этап 1. Организационный момент и ознакомление с планом мастерской (2 мин.)

Этап 2. Индивидуальная работа – 10 мин.

Задание 1. Используя динамическую систему «GeoGebra» постройте чертеж пирамиды, ответьте на вопрос. Назовите вид сечения и его свойства. Обсудите ответы в паре.

Задача 1. В треугольной пирамиде провели сечение, подобное основанию. Значит ли это, что оно параллельно основанию?

Задача 2. В пятиугольной пирамиде проведено сечение через вершину и диагональ основания. Значит ли это, что оно перпендикулярно основанию?

В результате выполнения задания 1 учащиеся должны построить сечения пирамиды и получить следующие ответы:

Решение задачи 1. Вид сечения – параллельное. Да, так как по свойству параллельных сечений многоугольник сечения подобен основанию пирамиды.

Решение задачи 2. Вид сечения – диагональное. Да, так как диагональное сечение разбивает пирамиду на две пирамиды.

Этап 3. Коллективная работа – 3 мин.

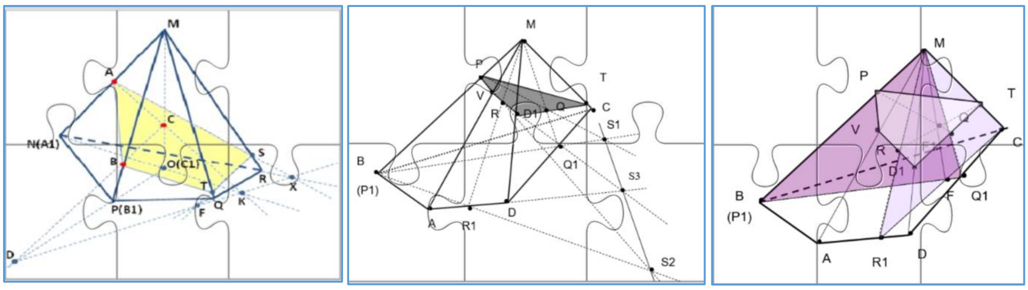
Учитель комментирует ответы учащихся:

При решении 1-й и 2-й задачи мы воспользовались алгоритмом построения сечений пирамиды, провели анализ полученного чертежа и выявили свойства полученного сечения. Из чего сделали вывод о том, что в первом случае – это параллельное сечение, а во втором – диагональное.

Вопрос учащимся: Каковы основные отличия данных сечений? (Ответ: в расположении и получаемом при этом многоугольнике).

Этап 4. Тайм-аут для деления на группы – (3 мин).

Учитель: сейчас вы выберите из корзинки фрагменты пазла. Ваша задача собрать три пазла (рисунок 31) и определить метод построения сечений. Таким образом произойдет формирование группы (шестерки) для дальнейшей работы. В процессе выполнения задания учащиеся определяют следующие методы: 1) метод внутреннего проектирования; 2) метод следов; 3) метод вспомогательных сечений.



1 группа 2 группа 3 группа

Рисунок 31 – Пазлы для формирования смешанных групп (шестерки)

Обсудите полученный результат в образовавшейся группе и выделите особенности характеризующие методы построения сечений пирамиды.

Предполагаемые ответы учащихся: 1) метод сечений применяется только для многогранников; 2) часто используются при решении задач на построение; 3) результатом построения сечения является плоскость.

Этап 5. Групповая работа – 15 мин.

Сегодня мы рассмотрим некоторые теоремы планиметрии и стереометрии для решения задач. Для решения данной задачи поэтапно выясним ответы на вопросы, приведенные ниже.

Существует ли связь между площадью сечения и площадью ортогональной поверхности?

Удобно ли использовать данный подход при вычислении площади боковой поверхности пирамиды?

Какие теоремы планиметрии используются при решении задач на пирамиды?

Ответы на эти вопросы запишите в тетрадь после решения задачи. Сделайте вывод.

Задание 2. (каждая группа получает отдельное задание в виде задачи).

Задача 1. «Стороны основания треугольной пирамиды равны 6 см, 10 см и 14 см. Каждый двугранный угол при её основании равен 30°. Постройте чертеж и определите площадь боковой поверхности пирамиды» [7, с. 9].

Задача 2. «В правильной усечённой четырёхугольной пирамиде стороны нижнего и верхнего оснований равны соответственно a и b ($a > b$). Постройте чертеж и определите площадь полной поверхности усечённой пирамиды, если её боковые грани наклонены к плоскости основания под углом α» [7, с. 10].

Задача 3. «Дана правильная четырехугольная пирамида, площадь каждой боковой грани которой равна 1. Какое значение примет площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через середину высоты пирамиды параллельно её боковой грани» [7, с. 14].

В результате выполнения задания 2 учащиеся должны получить следующие решения:

Решение задачи 1 группы.

Построим пирамиду ABCE с вершиной в точке E. Обозначим двугранные углы (рисунок 32).

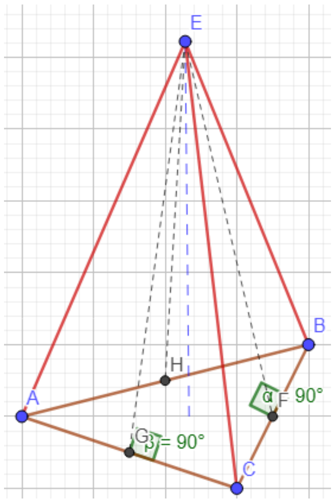


Рисунок 32 – Пирамида ABCD

Решить данную задачу можно двумя способами: 1) используя теорему о площади ортогональной проекции многоугольника ($S_{бок} = \frac{S_{осн}}{\cos\varphi}$); 2) методом вспомогательной окружности. Решим задачу первым способом. Так как полупериметр основания равен 15 см., то площадь основания пирамиды ABCD найдем с помощью формулы Герона., получим:

$$S_{осн} = \sqrt{15 \cdot (15-6) \cdot (15-10) \cdot (14-14)} = 15\sqrt{3}\ (см^2).$$

Подставим полученные значения в $S_{бок} = \frac{S_{осн}}{\cos\varphi}$, получим:

$$S_{бок} = \frac{S_{осн}}{\cos 30°} = 15\sqrt{3} : \frac{\sqrt{3}}{2} = 30\ (см^2).$$

Ответ: 30 $см^2$.

Решение задачи 2 группы. Построим правильную четырехугольную усеченную пирамиду со сторонами a и b. Опустим перпендикуляры на нижнее основание и увидим, что ортогональная проекция боковой поверхности на нижнее основание – это квадрат со стороной a, из которого «вырезали» квадрат со стороной b. При этом стороны нижнего основания параллельны сторонам «вырезанного» квадрата (рисунок 33), а сумма их площадей равна $a^2 + b^2$.

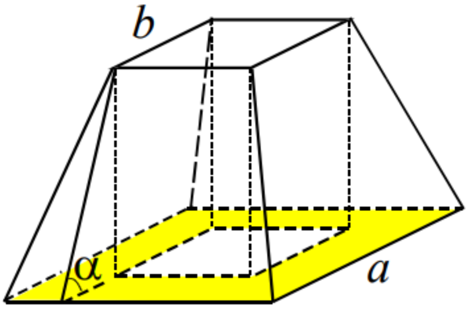


Рисунок 33 – Правильная четырехугольная усеченная пирамида

Из условия задачи известно, что боковые грани наклонены к плоскости основания под одинаковым углом α, поэтому площадь ее боковой поверхности равна: $S_{бок} = \frac{S_{пр}}{\cos\alpha} = \frac{a^2+b^2}{\cos\alpha} \Rightarrow S_{полн} = a^2 + b^2 + \frac{a^2+b^2}{\cos\varphi}$.

Ответ: $a^2 + b^2 + \frac{a^2+b^2}{\cos\varphi}$.

Решение задачи 3 группы.

Построим пирамиду SABCD с вершиной в точке S. Проведем дополнительное построение сечения, проходящего через середину высоты пирамиды SO и параллельного боковой грани CDG (рисунок 34).

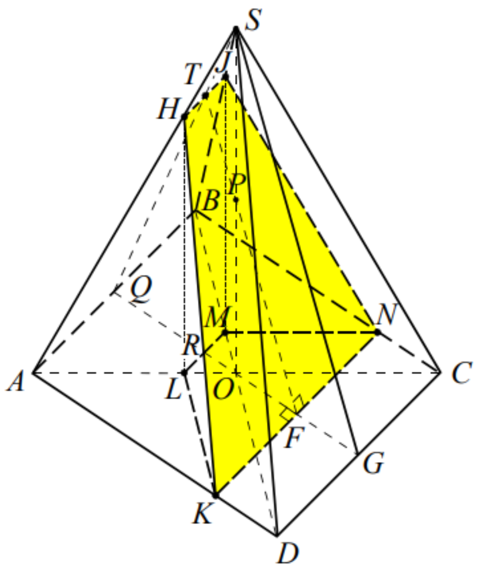


Рисунок 34 – Пирамида SABCD

В результате дополнительного построения получим четырехугольник KHJN, являющийся трапецией и сечением пирамиды. При этом KN параллельна плоскости ASB (по признаку параллельности прямой и плоскости), так как KN||AB. Из этого следует, что секущая плоскость пересекает грань ASB по прямой HJ, где HJ||KN (по теореме о линии пересечения).

Построим ортогональную проекцию трапеции KHJN на плоскость ABC – четырехугольник KLMN. По теореме о линии пересечения линия пересечения LM плоскостей ABC и HLM параллельна HJ. Следовательно, четырехугольник KLMN – трапеция.

Если считать, что боковые грани пирамиды наклонены к основанию под углом φ, то секущая плоскость HKN также будет наклонена к основанию пирамиды под углом φ (на чертеже ∠OFP=φ).

Возьмем за величину стороны основания пирамиды a, тогда:

1) $S_{осн} = a^2$; 2) $S_{осн} = S_{бок} \cdot \cos\varphi = 4\cos\varphi$. Отсюда $a^2 = 4\cos\varphi$.

Выразим площадь ортогональной проекции KLMN через a. Так как OP=PS, то $OF = FG = \frac{a}{4}$. Поэтому $QF = QG - FG = \frac{3a}{4}$ (по теореме Фалеса).

При рассмотрении ∠SQO заметим, что стороны QS и QO пересекаются прямыми SO и TR (R – точка проекции точки T). Так как $QT:TS = 3:1$, то $QR:RO = 3:1$ (по теореме Фалеса) ⇒$RO = \frac{QO}{4} = \frac{a}{8}$⇒ высота трапеции KLMN равна $FR = OF + RO = \frac{3a}{8}$.

Рассмотрим подобные треугольники AOB и LOM, с коэффициентом подобия $k = 4$⇒$LM = \frac{AB}{4} = \frac{a}{4}$⇒ площадь трапеции KLMN равна:

$$S_{KLMN} = \frac{KN+LM}{2} \cdot FR = \frac{a+\frac{a}{4}}{2} \cdot \frac{3a}{8} = \frac{15a^2}{64}.$$

В соответствии с теоремой о площади ортогональной проекции многоугольника имеем: $S_{KHJN} = \frac{S_{KLMN}}{\cos\varphi}$, откуда с учетом $a^2 = 4\cos\varphi$, получаем: $S_{KHJN} = \frac{15}{16}$.

Ответ: $S_{KHJN} = \frac{15}{16}$.

Этап 6. Комментарий учителя – 5 мин.

Каждая группа демонстрирует свое решение, дает пояснения и озвучивает вывод.

Учитель, комментирует представленные учащимися решения и, если задача решена неверно или есть ошибки в решении и рассуждениях, демонстрирует готовый вариант и дает пояснение:

При решении задачи 1-й группы использовались формула Герона и теорема ортогональной проекции многоугольника.

При решении задачи 2-й использовались: теорема ортогональной проекции многоугольника и формула площади боковой поверхности пирамиды, свойства двугранного угла.

При решении задачи 3-й группы использовались: теорема Фалеса, теорема о линии пересечения, свойства трапеции, признаки параллельности прямой и плоскости, формула площади ортогональной проекции.

Группы, при необходимости, сверяют полученные ответы с образцом и вносят корректировки в свои решения.

Этап 7. Обсуждение мастерской – 3 мин.

Сегодня мы обобщили и актуализировали свои знания по теме «Площади боковой и полной поверхности пирамиды» посредством решения задач.

Этап 8. Рефлексия – 2 мин. (Учащиеся подводят итог своей работы с помощью техники «Групповой обмен впечатлениями»: учащиеся определяют на сколько они удовлетворены тем, что получили в ходе урока-мастерской).

Этап 9. Домашнее задание – 2 мин. (Дифференцированное домашнее задание (Задачник [50, с. 70]): № 2.254, № 2.259, № 2.256).

В ходе данной мастерской учащимися были «открыты» следующие свойства и признаки: 1) Теорема о площади ортогональной проекции - «площадь ортогональной проекции многоугольника на плоскость равна произведению его площади, умноженной на косинус угла φ между плоскостью многоугольника и плоскостью проекции: $S_{пр} = S_{мн} \cdot \cos\varphi$» [7, с. 1]; 2) любое диагональное сечение разбивает пирамиду на две пирамиды; 3) свойства параллельных сечений: боковые ребра и высота пирамиды делятся этой плоскостью на пропорциональные части; в сечении получается многоугольник, подобный основанию; площади сечения и снования относятся, как квадраты их расстояний от вершины; 4) свойства правильной усеченной пирамиды: 1) каждая боковая грань правильной усеченной пирамиды является равнобокими трапециями одной величины; 2) основания усеченной пирамиды – это подобные многоугольники.

Мастерская 2. «Золотое сечение» и деление объема пирамиды

Цель: расширить понятие объема пирамиды; «открыть» свойства «золотой пирамиды»; сформировать умения: выдвигать гипотезы; актуализировать необходимые для изучения новой темы знания; учить применять теоретические знания в практике решения задач.

Образовательная задача: ввести определения понятия «золотой пирамиды» и ее элементов; «открыть» некоторые свойства и признаки; формировать умения решать задачи.

Развивающая задача: развивать самостоятельность, умение работы в группах.

Воспитательная задача: повышать интерес к изучению предмета, формировать логическое мышление и исследовательские умения.

Ожидаемые результаты: знание формулы объема пирамиды, умение применять ее в практике решения задач. Учащиеся должны знать о том, что если задача сложна, то ее можно решить, предварительно разбив на подзадачи.

Ход мастерской (45 минут):

Этап 1. Организационный момент и ознакомление с планом мастерской (2 мин.)

Этап 2. Индивидуальная работа – 10 мин.

Какие знания вам потребуются? Для этого выполните задание 1 и сформулируйте проблемы этой темы, которые вы бы хотели решить. Выполните корректировку своих записей после обсуждения в паре.

Задание 1. Выберите один QR-код (рисунок 35) и расшифруйте закодированное понятие и используя статьи Грачева А.Н. «Исследование золотых фигур», Василенко С.Л. «Золотые пирамиды и золотой конус Кеплера», запишите в тетрадь: 1) свойства; 2) признаки; 3) определения; 4) формулы; 5) кто ввел понятие о золотом сечении в математику.

1 QR-код 2 QR-код 3 QR-код

Рисунок 35 – QR-коды для индивидуальной работы учащихся

Предполагаемые ответы учащихся:

Первый QR-код «Золотое сечение». Это соотношение двух величин равное ≈1,618; вычисляется по формуле:

$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$; свойства: 1) $\frac{a+b}{b} = \frac{b}{a}$; 2) $\frac{\text{целое}}{\text{большее}} = \frac{\text{большее}}{\text{меньшее}}$; 3) $\text{целое} = \frac{\text{большее}^2}{\text{меньшее}}$; Пифагор.

Второй QR-код «Золотой треугольник». Это равнобедренный треугольник, у которого отношение боковой стороны к основанию равно ≈1,618; признаки: 1) два угла при основании – острые и равны 72°; 2) при вершине острый угол равен 36°; формула: $\varphi = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BC}}$; свойства: записываются уравнением

$\mathrm{x}^2 - \mathrm{x} - 1 = 0$; Пифагор.

Третий QR-код «Золотая пирамида». Если каждая грань пирамиды является золотым треугольником, то такая пирамида называется золотой; исходный элемент – прямоугольный треугольник в осевом сечении; формулы:

$V = \frac{1}{3}\varphi S_{бок}$ или $V = \frac{1}{3}S_{осн} \cdot h$.

Этап 3. Коллективная работа – 3 мин.

Учитель помогает учащимся обобщить все ответы и сделать вывод с помощью проблемного вопроса: «Как эту информацию можно использовать при решении задач по теме «Объем пирамиды»?

Предполагаемый ответ учащихся: для нахождения объемов, элементов, радиусов вписанных и описанных сфер, для нахождения двугранных углов и углов между скрещивающимися ребрами в золотой пирамиде. Учащиеся дополняют свои записи.

Этап 4. Тайм-аут для деления на группы – (3 мин).

Учитель: Давайте посмотрим, где мы можем применить наши знания с помощью решения практической задачи и разделимся на 3 группы для дальнейшей работы. Например, из курса физики нам известно, что плотность золота составляет 20 гр/см^3. Определите, сможем ли мы сдвинуть золотую пирамиду с размером ребра при основании и высотой в свой рост? Иначе, представьте, что перед вами пирамида с ребром при основании и высотой 1,7 м. Как вы думаете, сколько она будет весить? Выберите один вариант: 1) 25887 т.; 2) 30214 т.; 3) 32753 т. В зависимости от выбранного ответа объединитесь в группы (1 группа – до 26000 кг; 2 группа – от 27000 до 31000 т.; 3 группа – от 32 до 33 т.). Озвучивает правильный ответ – 32753 т.

Этап 5. Групповая работа – 15 мин.

Поведите совместный анализ задачи и определите этапы ее решения. Произведите самостоятельное решение задачи и сверьте полученные ответы внутри своей группы, сделайте выводы.

Задание 2. (каждая группа получает отдельное задание в виде задачи).

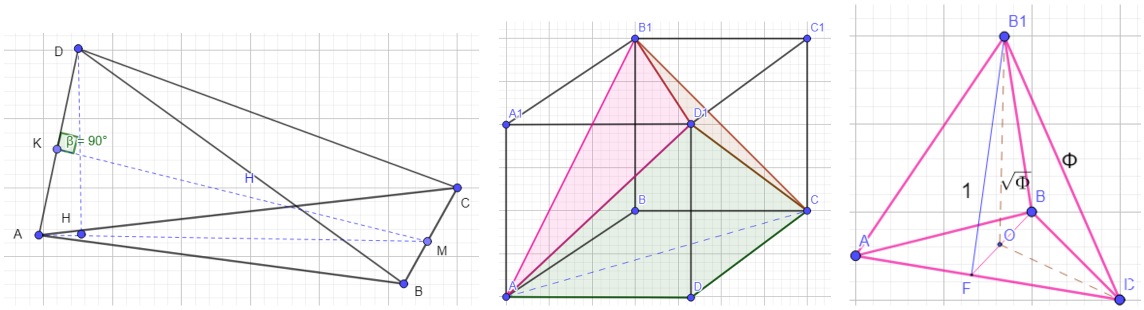
Задача 1. «Исследуйте золотую пирамиду с ребром равным 1. Выведите формулу объема» [31, с. 26].

Задача 2. Исследуйте пирамиду Хеопса и найдите ее объем, если известно, что высота равна 146,6 м., длина стороны основания – 230,4 м. При решении использовать свойства золотого сечения.

Задача 3. Исследуйте правильную треугольную пирамиду MABC со стороной основания равной 1, в которой боковые грани являются золотыми треугольниками. Известно, что в боковых гранях проведены левые трисектрисы. Определите объем пирамиды MTKE, преобразуя формулу объема, используя свойства золотой пирамиды.

В результате выполнения задания 2 учащиеся должны получить следующие решения:

Решение задачи 1 группы. Объем золотой пирамиды (рисунок 36 а) – это объем прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ минус объем четырех пирамид $ADCD_1$, $B_1D_1CC_1$, $AA_1B_1D_1$ и $ABCB_1$ с попарно перпендикулярными сторонами (рисунок 36 б) длиной $\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}$ и $\frac{\varphi\sqrt{\varphi}}{2}$ (рисунок 36 в).



а) б) в)

Рисунок 36 – Золотая пирамида

Значит:

$$V = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\varphi\sqrt{\varphi}}{2} - 4 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\varphi\sqrt{\varphi}}{2} = \frac{\varphi\sqrt{\varphi}}{6\sqrt{2}}.$$

Ответ: $\frac{\varphi\sqrt{\varphi}}{6\sqrt{2}}$.

Решение задачи 2 группы. При решении использовались свойства золотого сечения, в соответствии с чертежом (рисунок 37).

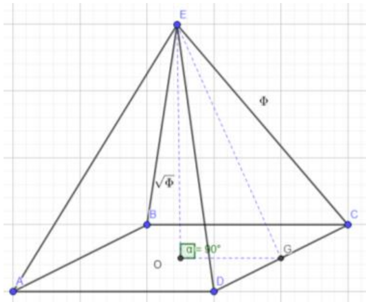


Рисунок 37 – Золотое сечение в пирамиде Хеопса

Рассмотрим пирамиду EBCD. Обозначим отношения сторон в соответствии с золотым сечением, получим следующие соотношения:

$$\frac{EO}{OG} = \frac{OG}{EO} = \sqrt{\varphi};\ \frac{EG}{OG} = \varphi;\ \frac{2EO}{AD} = \sqrt{\varphi};\ \frac{2AD}{EO} = \pi;\ \frac{4}{\pi} = \sqrt{\varphi}.$$

Пусть $DC = AD = AB = BC = a;\ EC = ED = EA = EB = b;\ DG = GC = \frac{a}{2}.$

Найдем апофему EG: $EG = \sqrt{EC^2 - \left(\frac{1}{2}DC\right)^2} = \sqrt{b^2 - (\frac{a}{2})^2} = \frac{\sqrt{4b^2-a^2}}{4}.$

Найдем OG:

$$OG = \sqrt{EG^2 - EO^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{4b^2-a^2}}{4}\right)^2 - \left(\sqrt{\varphi}\right)^2} = \sqrt{\frac{4b^2-a^2}{16} - \varphi} = \frac{\sqrt{4b^2-a^2-16\varphi}}{4}.$$

Найдем объем пирамиды по формуле $V = \frac{1}{3} \cdot h \cdot S_{осн} \Leftrightarrow V = \frac{1}{3} \cdot \varphi \cdot S_{бок}.$

$S_{бок} = \frac{1}{2} \cdot P_{осн} \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 4a \cdot \sqrt{\varphi} = 2a\sqrt{\varphi}.$

$S_{осн} = \varphi \cdot S_{бок} = \varphi \cdot 2a\sqrt{\varphi} = 2a\varphi\sqrt{\varphi}.$

$V = \frac{1}{3} \cdot \varphi \cdot 2a\sqrt{\varphi} = \frac{2a\varphi\sqrt{\varphi}}{3} \Leftrightarrow V = \frac{1}{3} \cdot \varphi \cdot 2a\sqrt{\varphi} = \frac{2a\varphi\sqrt{\varphi}}{3}.$

Ответ: $\frac{2a\varphi\sqrt{\varphi}}{3}.$

Решение задачи 3 группы. Из условия задачи известно, что боковые грани пирамиды MABC – это золотые треугольники и в них MT, MK, ME – трисектрисы углов при вершине M (рисунок 38), при этом

$AB = BC = AC = 1$, то $BT = CK = AE = \varphi$,

а $AT = BK = CE = \varphi^2$ (по свойству золотого сечения). По теореме косинусов из треугольника TBK найдем TK^2:

$TK^2 = \varphi^2 + \varphi^4 - 2\varphi\varphi^2\cos 60° = 2\varphi^4.$

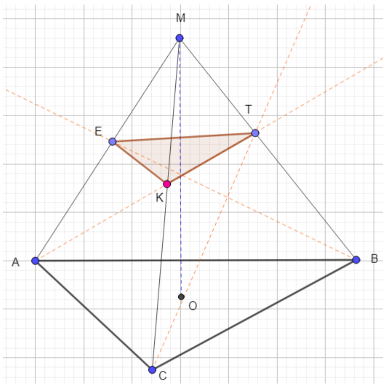


Рисунок 38 – Пирамида MABC и трисектрисы углов

Найдем площадь основания пирамиды MTKE. Для этого вычислим высоту пирамиды MO из прямоугольного треугольника MOB, получим $MO^2 = MB^2 - OB^2 = \varphi^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2$, т.к. $MB = \varphi$ (как боковая сторона золотого тупоугольного треугольника с единичным основанием), а $BO = \sqrt{3}$.

$$\frac{MO_1{}^2}{MO^2} = \frac{S_{TKE}}{S_{ABC}} = \frac{\varphi^2 * \frac{\sqrt{3}}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{4}} = \varphi^2 \text{ . } MO_1{}^2 = \varphi^2 \cdot \left(\varphi^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2\right) = \varphi^4 - 3\varphi^2.$$

Найдем объем пирамиды MTKE. Так как

$V_{MTKE} = \frac{1}{3} \cdot S_{TKE} \cdot MO_1 = \frac{1}{3} \cdot \varphi^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (\varphi^4 - 3\varphi^2) = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (\frac{1}{3}\varphi^6 - \varphi^4).$

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (\frac{1}{3}\varphi^6 - \varphi^4)$.

Этап 6. Комментарий учителя – 5 мин.

Учитель демонстрирует готовые решения и дает пояснение к решению.

При решении данных задач необходимо было воспользоваться свойствами золотого сечения и параметрами n-угольной золотой пирамиды Кеплера с единичной высотой. Основными формулами для решения задач стали: формулы объемов геометрических фигур и пирамид, теорема косинусов, теорема Пифагора, теорема Морли (точки пересечения смежных трисектрис углов произвольного треугольника являются вершинами равностороннего (правильного) треугольника).

Группы сверяют полученные ответы с образцом и, при необходимости, вносят корректировки в свои решения.

Этап 7. Обсуждение мастерской – 3 мин.

Сегодня мы обобщили и актуализировали свои знания по теме «Объем пирамиды» посредством решения задач, а также «открыли» свойства и признаки золотых пирамид.

Этап 8. Рефлексия – 2 мин. (Учащиеся подводят итог своей работы на уроке с помощью приема «Продолжи фразу»: сегодня я: 1) сделал …; 2) открыл …; 3) понял …; 4) понаблюдал …; 5) проанализировал…Выражение благодарности за активное сотрудничество).

Этап 9. Домашнее задание – 2 мин. (1. Провести расчет объема с учетом числовых данных задачи 2. 2. Творческое задание: придумать и решить задачу на комбинацию золотой пирамиды и вписанного в нее шара, найти объем этой пирамиды).

В ходе данной мастерской учащимися были сформулированы определения: 1) если каждая грань пирамиды является золотым треугольником, то такая пирамида называется золотой; 2) исходный элемент золотой пирамиды – прямоугольный треугольник в осевом сечении. «Открыты» следующие свойства и признаки: 1) апофема золотой пирамиды есть кратчайшее расстояние от вершины до точки касания грани с вписанным шаром; 2) площади золотой пирамиды образуют золотую пропорцию $\frac{EG}{OG} = \varphi$; 3) выведена формула нахождения объема золотой пирамиды $V = \frac{1}{3} \cdot \varphi \cdot S_{бок}$.

Контроль по теме «Задачи на исследование свойств и признаков пирамиды» должен быть максимально полным и охватывать все этапы решения задач. Диагностическая работа проводится в конце седьмого урока, перед итоговой контрольной работой по теме «Пирамида» и должна показать уровни: а) освоения теоретического материала по изучаемой теме; б) сформированности исследовательских навыков учащихся при решении задач. Для проведения контроля учитель выделяет три типа учащихся относительно уровня освоения учебного материала по теме: 1) начальный – достигшие минимального уровня; 2) базовый – достигшие общего уровня; 3) профильный – вышедшие на высокий творческий уровень.

Приведем вариант диагностической работы, направленной на контроль за результатом обучения. Диагностическая работа состоит из трех вариантов (начальный, базовый, профильный). В каждом варианте по три задачи:

- задача 1 – на исследование частных и предельных случаев;
- задача 2 – на демонстрацию логики и метода поиска решения задачи;
- задача 3 – на сравнение.

За решение каждой задачи учащийся может получить от 0 до 7 баллов (таблица 7).

Перевод баллов в оценку за выполнение диагностической работы представлен в таблице 8.

Таблица 7 – Критерии оценивания решения одной задачи диагностической работы

Критерии оценивания	Количество баллов
Запись краткого условия задачи	1
Чертеж (при необходимости) соответствует условию задачи	1
Верное решение задачи (порядок действий без ошибок)	2
Наличие пояснений	1
Записан ответ	1
Качество записи	1
Ответ неверный	0
Итого:	7

Таблица 8 – Перевод баллов в оценку

Количество баллов	% выполнения	Оценка
0 - 8	0% – 39%	2
9 - 13	40% - 64%	3
14 - 17	65%-84%	4
18 - 21	85% - 100%	5

Первый вариант – начальный уровень

Задача 1. Могут ли ребра при основании треугольной пирамиды иметь длины 20 см., 40 см. и 85 см.?

Задача 2. «Дана пирамида SABC со следующими свойствами: 1) ABC – прямоугольный треугольник ($\angle C=90°$); 2) все боковые ребра равны. Какие другие свойства пирамиды следуют из данных (перечислите и постройте чертеж)?» [45, с. 27].

Задача 3. «Исследуйте пирамиду с вершиной S в основании которой лежит шестиугольник. Известно, что ее боковое ребро вдвое больше стороны основания: 1) может ли, плоскость, проходящая через середины ребер SA и SD, а также вершину C, делить апофему грани ASB в отношении 1:2, считая от S; 2) определите, в каком отношении плоскость, проходящая через середины ребер SA и SD, а также вершину C, делит ребро SF, считая от вершины S» [27].

Второй вариант – базовый уровень

Задача 1. Сколько плоскостей в шестигранной пирамиде можно провести через точку G лежащую на высоте пирамиды, если они пересекают плоскость основания под углом 75°?

Задача 2. «Исследуйте пирамиду в основании которой лежит прямоугольник. Ее вершина проектируется в точку пересечения диагоналей основания: 1) какие свойства этой пирамиды аналогичны свойствам правильной пирамиды; 2) ответьте на эти же вопросы относительно пирамиды, в основании которой лежит ромб» [15, с. 31].

Задача 3. «Основание четырехугольной пирамиды SABCD служит параллелограмм ABCD. Точки K, L, M принадлежат ребрам SA, SB, SC соответственно и длят эти ребра в отношениях 2:1, 1:2, 3:1, считая от вершины S пирамиды. Пересекает ли плоскость KLM ребро SD? Если да, то в каком соотношении она делит это ребро?» [32, с. 44].

Третий вариант – профильный уровень

Задача 1. «Три ребра треугольной пирамиды равны 1, а три ребра равны а. Ни одна из граней пирамиды не является правильным треугольником. В каких пределах может меняться а?» [35, с. 69].

Задача 2. «Сфера радиуса R делит каждое из ребер SA, SC, AB и CB треугольной пирамиды SABC на три равные части и проходит через середины ребер AC и SB. Определите длину высоты пирамиды, проведенной из вершины S» [19, с. 50]

Задача 3. «На ребрах AD, AB, BC пирамиды DABC отмечены точки M, K, L соответственно так, что AM=MD, AK:KB=1:2, BL:LK=6:1. Каково отношение объемов, в котором плоскость MKL делит объем пирамиды, если отношение меньше 1?» [57, с. 455].

Решения задач диагностической работы представлены в приложении А.

2.4 Результаты педагогического эксперимента

Педагогический эксперимент осуществлялся в три этапа: констатирующий, поисковый, формирующий.

Цель констатирующего этапа – это выявить:

– умения решать задачи на исследование свойств и признаков геометрических объектов;

– отношение учителей математики к необходимости формирования исследовательских умений в процессе обучения геометрии;

– эффективность методики обучения решению задач на исследование свойств и признаков геометрических объектов в 10-11-х классах естественно-математического направления по темам «Трапеция» и «Пирамида и ее свойства».

В ходе констатирующего этапа были решены следующие задачи:

– определить проблемы обучения планиметрии и стереометрии, по формированию навыков решения задач на исследование свойств и признаков геометрических объектов;

– выявить уровень исследовательских компетенций в условиях классно-урочной системы обучения с применением традиционных методов и личностно-ориентированного подхода;

– сформулировать гипотезу исследования.

В начале эксперимента было проведено анкетирование учителей математики КГУ «Общеобразовательная школа № 4» отдела образования города Балхаш управления образования Карагандинской области – 4 человека (Приложение Б). В анкетировании приняли участие четыре учителя: два учителя, имеющих квалификационную категорию «педагог-модератор» – Г.А. Левчик и Ж.К. Садыкова; два учителя с квалификационной категорией «педагог» – А.О. Омарова и Г.В. Когай. Анализ результатов анкетирования показал:

– два учителя (50,0%) считают важным условием формирование исследовательских навыков на уроках геометрии, но относят его ко второстепенной задаче;

– один учитель (25,0%) ведет систематическую и целенаправленную работу в данном направлении;

– один учитель (25,0%) убежден в том, что соответствующая организация обучения геометрии в 5-11 классах, формирование исследовательских умений и навыков будет эффективным, так как курсы планиметрии и стереометрии имеют большие возможности для осуществления этой задачи;

– все учителя математики (100,0%) связывают трудности в организации исследовательской работы в урочное время с недостаточным количеством часов (времени), отсутствием соответствующих систем задач исследовательской направленности и недостаточным уровнем обученности учащихся;

– необходимость формирования исследовательских умений у учащихся посредством решения задач на исследование свойств и признаков геометрических объектов не зависимо от уровня обученности, признают два учителя (50,00 %);

– испытывают трудности в подборе задач на исследование свойств и признаков геометрических объектов 100,00 % учителей;

– личностно-ориентированный подход при организации учебного процесса считают обязательным 75,00 % учителей (три учителя).

Исходя из проведенного анкетирования, можно утверждать, что 75,00 % учителей считают важной составляющей обучения геометрии личностно-ориентированного подхода для формирования исследовательских умений посредством решения планиметрических и стереометрических задач на исследование свойств и признаков геометрических объектов.

Эксперимент проводился в 11 «А» и 11 «Б» классах КГУ «Общеобразовательная школа № 4» отдела образования города Балхаш управления образования Карагандинской области в период прохождения преддипломной практики (с 09.02. 2022 г. по 17.05.2022 г.) при изучении темы «Пирамида и ее элементы». Обучение осуществляется по учебнику В.А. Гусева [23]. Всего в эксперименте приняли участие 33 ученика.

Для выявления умений решения задач на исследование свойств и признаков геометрических объектов использовались следующая методика: В начале эксперимента была проведена входная «срезовая» контрольная работа (Приложение В), содержащая пять вариаций исследовательских задач (по три задачи различного уровня сложности в каждом варианте), следовательно, из общего количества задач учащиеся должны были выбрать пять. Для решения задач I уровня (начальный – 1 балл) предлагались указания и комментарии, задачи II уровня (базовый – 2 балла) предполагали элементы исследований, задача III уровня (профильный – 3 балла) – исследовательская с необходимостью применения новых знаний в новых условиях. Максимальное количество баллов – 15. Расчет баллов производился по формуле $\mathrm{O}_{\max} = 3 \cdot 5$.

Цели работы:

– выявить, насколько ученик способен разобраться в учебном тексте и выбрать из него необходимую информацию;

– оценить уровень интеллектуальных и познавательных умений и навыков;

– оценить способность самостоятельно приобретать знания и выбирать способы деятельности;

– сформировать познавательный интерес к предмету через развитие исследовательской компетенции.

Работа была направлена на закрепление базовых знаний учащихся и их развитие посредством исследовательской работы и решения стереометрических задач по теме «Пирамида и ее свойства». Особое внимание было уделено проверке понимания смысла важнейших понятий и их свойств.

При выполнении заданий учащиеся должны были продемонстрировать определенную систему знаний, умение пользоваться разными математическими языками и переходить с одного из них на другой, распознавать стандартные задачи в разнообразных формулировках, выявлять основные свойства и элементы пирамиды, решать задачи на исследование свойств и признаков пирамиды наиболее рациональным способом.

Взяв за основу труды М.И. Грабарь [25] и Э.М. Мамбетакунова [40] выявим уровень умений решения задач на исследование свойств и признаков геометрических объектов используя формулу $U = \frac{\sum_{k=1}^{N} n}{O_{max} N}$, где N – количество учащихся, n – сумма баллов за выполненные задания.

U – характеризует уровень следующих умений:

– определять цель;

– проводить анализ условия задачи;

– выдвигать и формулировать гипотезы;

– составлять план решения задачи;

– проводить анализ решения задачи.

Для определения уровня владения каждым видом умения воспользуемся формулой $I = \frac{n}{mk}$, где k – число учеников, m – максимальное количество баллов за задание ($m=3$).

В таблице 9 представлены результаты входной контрольной «срезовой» работы.

Таким образом, анализ контрольного «среза» показал, что учащиеся 11-х классов испытывали существенные сложности при решении задач на исследование свойств и признаков геометрических объектов.

Таблица 9 – Уровень умений решения задач на исследование свойств и признаков геометрических объектов

Исследовательские умения	Определяет цель	Проводит анализ условия задачи	Выдвигает и формулирует гипотезу	Планирует решение задачи	Проводит анализ решения задачи	U
Уровни	Количество учащихся					
I уровень(начальный)	27	23	26	25	28	0,4
II уровень(базовый)	4	7	5	4	5	
III уровень(профильный)	2	3	2	4	0	
I	0,39	0,42	0,4	0,41	0,38	

Как показывают данные (таблица 9) учащиеся в основном выбирали задания «низкого» и «базового» уровней, что, в свою очередь, демонстрирует незначительную степень сформированности исследовательских навыков, читательской и математической грамотности, показывает неспособность обосновывать собственные предположения, что выражается в:

– недостаточном уровне несформированности логического мышления;
– отсутствии определенной системы знаний;
– в текстах задач и на чертежах;
– неумение представлять информацию с использованием символьной записи, чертежей, при помощи математического моделирования;

–

– неумении пользоваться разными математическими языками и переходить с одного из них на другой;

– неумении распознавать стандартные задачи в разнообразных формулировках;

– неумение решать стереометрические задачи по предложенной теме.

Исходя из этого можно сделать вывод о необходимости развития всех вышеперечисленных знаний, умений и навыков с помощью индивидуального подхода к учащимся на основе личностно-ориентированного обучения и включения в постоянную практику проектную деятельность по геометрии в учебный процесс.

Задачами поискового этапа были определены:

– разработка методических рекомендаций обучения школьников решению задач на исследование свойств и признаков геометрических объектов в контексте личностно-ориентированного обучения;

– разработка необходимых дидактических материалов для обучения решению задач на исследование свойств и признаков геометрических объектов в рамках эксперимента.

Для проведения эксперимента выбран 11 «Б» класс (17 учащихся), в котором обучение осуществлялось с применением методов личностно-ориентированного обучения, в частности, дифференцированный подход. 11 «А» класс (16 учащихся) – контрольный, обучение традиционное. Характеристики процесса обучения в рамках эксперимента отражены в таблице 10.

Для получения объективных результатов эксперимента проводились дополнительные контрольные мероприятия – ежеурочное формативное оценивание и суммативное оценивание по разделу. Также осуществлялся мониторинг не только уровня навыков решения задач на исследование свойств и признаков геометрических объектов, но и сформированности исследовательских умений в соответствии с развиваемыми предметными компетенциями. Результаты контрольного оценивания (наблюдение, ФО, СОР, анкетирование, тестирование, срезовые работы) показывают положительную динамику процесса обучения решению задач на исследование свойств и признаков геометрических объектов, а также, как следствие, формирование исследовательских компетенций.

Таблица 10 – Характеристики процесса обучения в рамках эксперимента

Характеристика процесса обучения	Контрольная группа Класс 11 «А»	Экспериментальная группа Класс 11 «Б»
Целевая установка	Формирование определенных ЗУН	Формирование исследовательских умений, развитие личностных качеств
Роль учащегося на уроке	«Пассивный объект»	«Активный объект» + «Активный субъект»
Система получаемых знаний	Четко определенный учебной программой материал	Четко определенный учебной программой материал, обогащенный задачами исследовательского характера
Методы обучения	Традиционные (рассказ, лекция, работа с учебником и т.д.)	Инновационные (методы: проблемного обучения; личностно-ориентированного обучения; развивающего обучения)
Формы обучения	Фронтальная, индивидуальная	Индивидуальная, групповая, коллективная
Средства обучения	Традиционные (учебники, учебные пособия)	Инновационные (мультимедийное оборудование, IT-кабинет, контролирующие программы для проверки знаний учащихся, медиапродукты и т.п.)
Оценивание и контроль	Учителем проверяются только соответствующие ЗУН	Самоконтроль, взаимоконтроль, проверка учителем ЗУН и уровень сформированности исследовательских навыков
Внеклассная работа	Только домашняя работа	Задания в виде учебных поисково-исследовательских проектов с последующей защитой, дифференцированные домашние работы.

В ходе реализации педагогического эксперимента у большинства учащихся 11 «Б» класса исчез страх перед задачами исследовательского характера и появилась уверенность в своих знаниях и способностях. Количество учащихся, мотивированных на результат и изучение предмета «Геометрия», возросло. Учащиеся, входящие в «слабую» уровневую группу, преодолели психологический барьер и проявили интерес к задачам исследовательского характера практического содержания.

Итоговая «срезовая» работа (Приложение Г) показала повышение уровня умений решения задач на исследование свойств и признаков геометрических объектов (таблица 11, 12).

Таблица 11 – Уровень умений решения задач на исследование свойств и признаков геометрических объектов (итоговый «срез» 11 «А»)

Умений решения задач на исследование свойств и признаков геометрических объектов (итоговый «срез» 11 «А»)						
Исследовательские умения	Определяет цель	Проводит анализ условия задачи	Выдвигает и формулирует гипотезу	Планирует решение задачи	Проводит анализ решения задачи	U
Уровни	Количество учащихся					
I уровень(начальный)	9	7	7	7	8	0,47
II уровень(базовый)	5	7	6	6	5	
III уровень(профильный)	2	2	3	3	3	
I	0,47	0,48	0,48	0,47	0,46	

Таблица 12 – Уровень умений решения задач на исследование свойств и признаков геометрических объектов (итоговый «срез» 11 «Б»)

Исследовательские умения	Определяет цель	Проводит анализ условия задачи	Выдвигает и формулирует гипотезу	Планирует решение задачи	Проводит анализ решения задачи	U
Уровни	Количество учащихся					
I уровень(начальный)	6	5	4	4	5	0,6
II уровень(базовый)	7	7	7	9	7	
III уровень(профильный)	4	5	6	4	5	
I	0,59	0,6	0,62	0,6	0,59	

Из таблиц видно, что уровень умений решения задач на исследование свойств и признаков геометрических объектов увеличился, то есть количество учащихся, выбравших и решивших задания «базового» и «профильного» уровней, увеличилось.

Основные затруднения вызвали задачи на определение цели и анализ решения задачи.

Сравнительные результаты педагогического эксперимента представлены на рисунках 39-43.

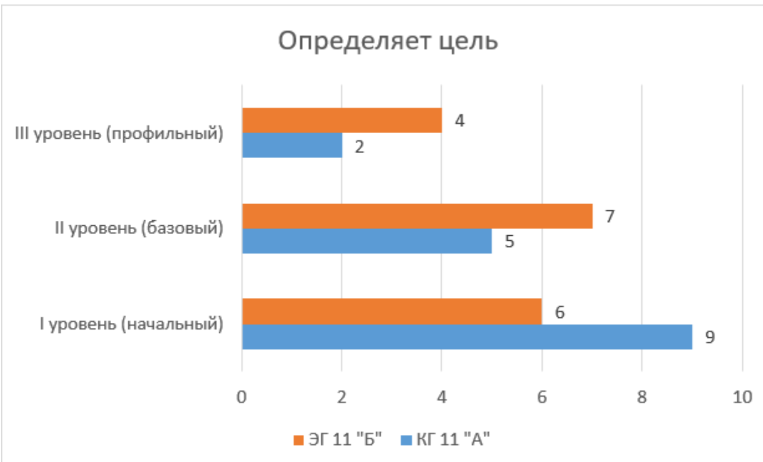


Рисунок 39 – Гистограмма сформированности умений решения задач на исследование свойств и признаков геометрических объектов «Определяет цель»

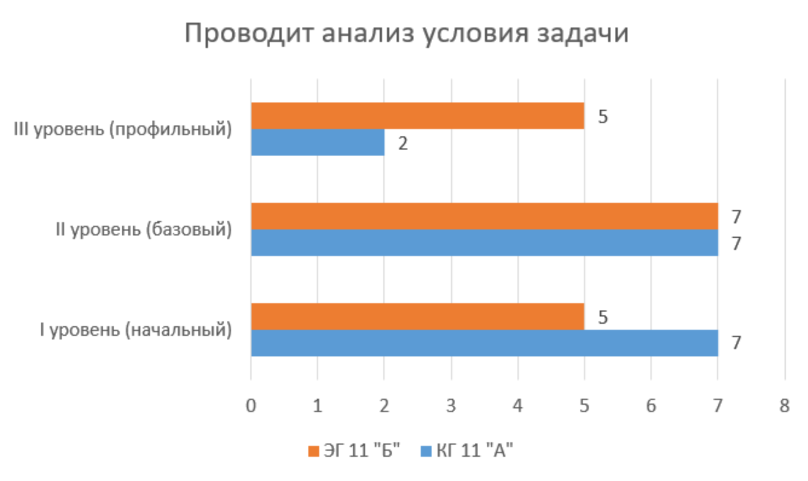


Рисунок 40 – Гистограмма сформированности умений решения задач на исследование свойств и признаков геометрических объектов «Проводит анализ условия задачи»

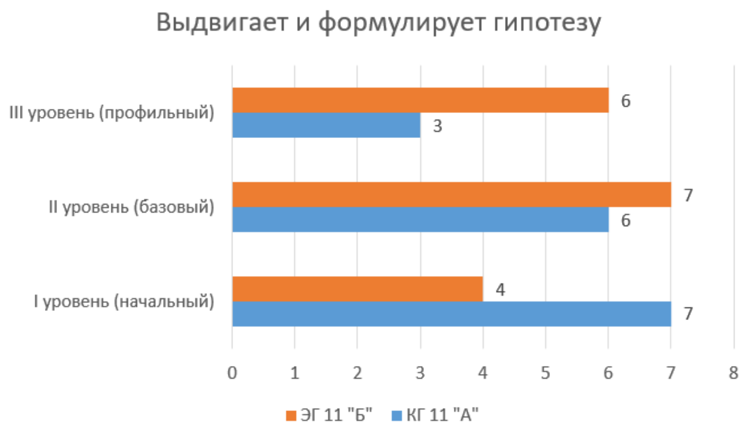


Рисунок 41 – Гистограмма сформированности умений решения задач на исследование свойств и признаков геометрических объектов «Выдвигает и формулирует гипотезу»

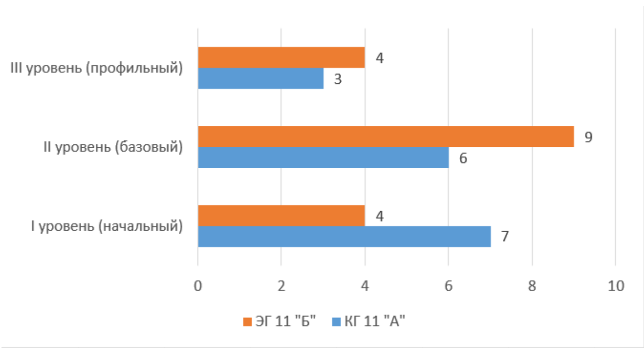


Рисунок 42 – Гистограмма сформированности умений решения задач на исследование свойств и признаков геометрических объектов «Планирует решение задачи»

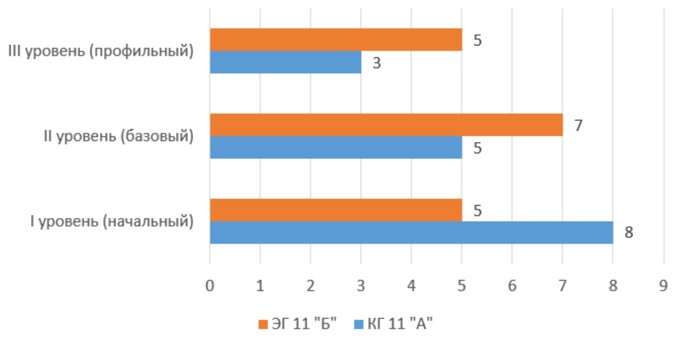


Рисунок 43 – Гистограмма сформированности умений решения задач на исследование свойств и признаков геометрических объектов «Проводит анализ решения задачи»

Вывод педагогического эксперимента:

– методика обучения решению задач на исследование свойств и признаков геометрических объектов, реализующая личностно-ориентированное обучение, эффективна – результативность 40,00 %;

– использование инновационных форм, методов и средств обучения является основным мотиватором для учащихся и усиливает эффект методики обучения решению задач на исследование свойств и признаков геометрических объектов;

– учащиеся, в ходе решения задач исследовательского характера: формируют исследовательские навыки; развивают логическое мышление, творческие способности; имеют возможность применить полученные знания на практике, «увидеть» взаимосвязь различных предметных областей.

Выводы по второй главе

Рассмотрены подходы к определению «исследовательская задача». Определены принципы для отбора задачного материала в соответствии с уровнями обученности учащихся: 1) задача удовлетворяет степени самостоятельности при решении; 2) задача соответствует определенному этапу (структурному элементу) урока. Приведены примеры реализации данных принципов. Выделены следующие типы задач для реализации педагогических целей: на выявление свойств и признаков геометрических объектов; обнаружение новых зависимостей и фактов; обобщение и систематизация понятий. Приведены примеры использования данных типов задач на каждом этапе урока. Обосновано применение активных методов обучения таких как «Посланник» и «Мозговой штурм». Рассмотрена методическая эффективность использования динамических сред для решения задач на исследование свойств и признаков геометрических объектов.

Разработана система задач на исследование свойств и признаков трапеции в рамках технологии дифференцированного обучения Н.П. Гузик [21], которые включают в себя задачи на сравнение, на отыскание зависимостей между элементами и на определение взаимоположения геометрических объектов. Спроектирована система задач на исследование свойств и признаков пирамиды в рамках технологии творческих мастерских А.А. Окунева [44], которые включают в себя задачи следующего вида: на исследование частных и предельных случаев; на демонстрацию логики и метода поиска решения задачи; на сравнение. Представлены результаты педагогического эксперимента, который проводился на базе КГУ «ОШ № 4» ОО г. Балхаш УО Карагандинской области (Республика Казахстан) и состоял их трех этапов: констатирующий, поисковый, формирующий. Выделены специальные группы задач: на определение цели задачи; проведение анализа условия задачи; выдвижение и формулирование гипотезы; составление плана решения задачи; проведение анализа решения задач.

Заключение

В ходе проведения теоретического и экспериментального диссертационных исследований, целью которых был анализ возможностей применения личностно-ориентированного обучения на уроках геометрии в общеобразовательной школе при решении задач на исследование свойств и признаков геометрических объектов, получены следующие результаты:

Установлено, что в методической литературе личностно-ориентированное обучение определено как «специфическая педагогическая деятельность по созданию учащимся оптимальных условий для развития их способностей, духовного начала, формирования самостоятельности, стремления к самообразованию, самореализации».

Выделены принципы личностно-ориентированно обучения при формировании исследовательских умений при решении геометрических задач: систематичность, проблемность, уровневая дифференциация (начальный, базовый, профильный), осознанность.

Определены особенности обучения учащихся решению задач на исследование свойств и признаков геометрических объектов. Установлено, что при обучении решению исследовательских задач необходимо придерживаться определенного алгоритма (мотивация, выделение существенных и несущественных свойств и признаков, синтез и формулировка понятия, осмысление, усвоение, запоминание, применение) на основе правильно подобранных задач для реализации каждого этапа (практико-ориентированные; задачи на построение, удовлетворяющие указанным свойствам и признакам; задачи с развертками; задачи на распознавание геометрических объектов, принадлежащих всему объему понятия; задачи на распознавание известных свойств и выявление новых; задачи на определение родовой принадлежности; задачи на применение в различных жизненных ситуациях; задачи на систематизацию понятия). Для усиления эффекта заинтересованности и мотивации учащихся к предмету в процессе обучения следует применять информационно-коммуникационные технологии, например, динамические системы и технологии AR, VR – реальности.

Раскрыты методические аспекты по обучению учащихся решению задач на исследование свойств и признаков геометрических объектов в контексте личностно-ориентированного обучения. Определено, что при обучении учащихся решению исследовательских задач следует уделять внимание на развитие таких умений как: определять цель задачи; проводить анализ условия задачи; выдвигать и формулировать гипотезу; составлять план решения задачи; проводить анализ решения задачи.

Разработана система задач на исследование свойств и признаков трапеции в рамках технологии дифференцированного обучения Н.П. Гузик «Внутриклассная (внутрипредметная) дифференциация», которые включают в себя задачи на сравнение, на отыскание зависимостей между элементами и на определение взаимоположения геометрических объектов.

Спроектирована система задач на исследование свойств и признаков пирамиды в рамках технологии творческих мастерских А.А. Окунева.

Проведен педагогический эксперимент, состоящий из трех этапов (констатирующий, поисковый, формирующий), который выявил недостаточный уровень умения решать задачи на исследование свойств и признаков геометрических объектов.

Система задач на исследование свойств и признаков пирамиды апробирована на поисковом этапе педагогического эксперимента, результаты которого показывают положительную динамику в сформированности обучающих компетенций и личностных качеств учащихся экспериментального класса.

Вышеперечисленные результаты диссертационного исследования позволяют сделать вывод, что поставленные задачи решены и цель достигнута.

Список используемой литературы

1. Автономова Т.В. Основные понятия и методы школьного курса геометрии: книга для учителя. М.: Просвещение, 1988. 127 с.

2. Александров А.Д.,Вернер В.И., Рыжик А.Л. Геометрия для 10-11 классов: учеб. для общеобразоват. организаций: базовый и углубл. уровни. М.: Просвещение, 2014. 255 с.

3. Алексеев Н.А. Личностно-ориентированное обучение: вопросы теории и практики: монография. Тюмень: Изд-во Тюменского государственного университета, 1996. 216 с.

4. Алексеев В. Задачи на трапеции // Квант. – 2000. – № 6. С. 37-41.

5. Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф., Кадомцев С.Б. и др. Геометрия, 7-9: учеб. для общеобразоват. учреждений. 2-е изд. М.: Просвещение, 2014. 383 с.

6. Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф., Кадомцев С.Б. и др. Геометрия. 10-11 классы: учеб. для общеобразоват. учреждений: базовый и профил. уровни. 22-е изд. М.: Просвещение, 2013. 255 с.

7. Бадрушкин В.В. Применение теоремы о площади ортогональной проекции многогранника при решении стереометрических задач.URL: https://irina-litsey27.ucoz.ru/pr.pdf (дата обращения 28.05.2022 года).

8. Баранова Е.В. Методические основы использования учебных исследований при обучении геометрии в основной школе: дисс. … канд. пед. наук: 13.00.02/Е.В. Баранова. – Саранск,1999.163 с.

9. Безумова О.Л., Овчинникова Р.П., Троицкая О.П. и др. Обучение геометрии с использованием возможностей GeoGebra: учебно-методическое пособие; отв. ред. О.Л. Безумова. Архангельск: КИРА, 2011. 140 с.

10. Бакитжанова Ш.А. Формирование элементов исследовательских компетенций старшеклассников на уроках математики (на примере стереометрии): дисс. …канд. пед. наук:13.00.02/ Ш.А. Бакитжанова.-Бишкек, 2017. 148 с.

11. Бериштейн С.М. Об элементах политехнизма на уроках тригонометрии // Математика в школе. 1955. № 1. С. 57-60.

12. Болтянский В.Г., Савин М. Беседы о математике. Книга 1. Дискретные объекты. М.: ФИМА, МЦНМО, 2002. 368 с.

13. Блох А.Я., Каник А.Я. и др. Методика преподавания математики в средней школе. Общая методика. М.: Просвещение, 1985. 336 с.

14. Большой вопрос. Категория «Наука и техника».URL: http://www.bolshoyvopros.ru/questions/3080422-mozhno-li-najti-ploschad-segmenta-kruga-ne-ispolzuja-ugla-sektora-i-radiusa.html (дата обращения 09.05.2022 г.).

15. Васильков В.И., Биктуганова Г.Т., Заикиана Е.С. Исследовательские задачи в курсе «Геометрия-11» А.Д. Александрова: учебное пособие. Челябинск: Изд-во Челяб. гос. пед. ун-та, 2015. 152 с.

16. Виноградов И.М. Математическая энциклопедия: справочник по математике/ гл. ред. Виноградов И.М., т-3 Коо – Од – М.: «Советская энциклопедия», 1982. 1184 с.

17. Виноградова Л.В. Методика преподавания математики в средней школе: учебное пособие для студентов.Ростов-на-Дону: Феникс, 2005.252 с.

18. Волович М.Б. Как обеспечить эффективное усвоение определений // Математика: Еженед. учебно-методич. прил. к газете «Первое сентября». 1997. № 8. С. 1-2.

19. Вступительные экзамены в ВУЗы // Математика в школе. 1993. № 6. С. 50.

20. Гузеев В.В. Системные основания интегральной образовательной технологии: дис. на соискание ученой степени д-ра пед. наук. М.: 1998. 390 с.

21. Гузик Н.П. Учись учиться. URL: https://search.rsl.ru/ru/search#q=Гузик%20Н.П.%20Учись%20учиться (дата обращения 07.06.2022).

22. Гусев В.А., Орлов В.В., Панчищина В.А. и др. Методика обучения геометрии: учеб. пособие для студ. высш. пед. учеб. заведений; под ред. В. А. Гусева. М.: Издательский центр «Академия». 2004. 368 с.

23. Гусев В. Геометрия: учебник для 11 кл. естеств.-мат. направления общеобразоват. шк./В. Гусев, Ж. Кайдасов, А. Кагазбаева. – 3-е изд., перераб., доп. Алматы: Мектеп, 2015. 104 с.

24. Гусев В., Бекбоев И., Кайдасов Ж., Абдиев А. Геометрия: учебник для 10 кл. естеств. -мат. направления общеобразоват. шк. Алматы: Мектеп, 2010. 104 с.

25. Грабарь М.И., Краснянская К.А. Применение математической статистики в педагогических исследованиях. Непараметрические методы: книга для работников в области педагогики. М.: Педагогика, 1977. 136 с.

26. Далингер В.А. Поисково-исследовательская деятельность учащихся по математике: учебное пособие. Омск: Изд-во ОмГПУ, 2005. 456 с.

27. Задачи по алгебре и геометрии на экзаменах ЕГЭ по математике профильного уровня. URL: https://egeprof.ru (дата обращения 15.02.2022).

28. Ивин А.А. Философия: Энциклопедический словарь: сборник статей. М.: Гардарики, 2004. 1072 с.

29. Зеленяк О. П. Решение задач по планиметрии. Технология алгоритмического подхода на основе задач-теорем. Моделирование в среде Turbo Pascal: пособие для учащихся, абитуриентов, студентов педвузов, учителей. Киев, Москва: ДиаСофтЮП, ДМК Пресс, 2008. 336 с.

30. Как научиться решать задачи по планиметрии // Математика. 2016. № 7-8. С. 55 – 59.

31. Карчевский В.Е. Золотое сечение в геометрических задачах. // Математика в школе. 2011. № 6 (36). С. 26.

32. Клековкин Г.А. Решение задач векторным методом: учебное пособие для учащихся 10 – 11 классов. Самара: СФ ГАОУ ВО МГПУ, 2016. 180 с.

33. Кожабаев К.Г. Научно-методические основы реализации воспитательно-развивающих функций школьного курса математики и подготовка к ней будущего учителя: автореф. дисс. … д-ра. пед. наук:13.00.02. /К.Г. Кожабаев. -Алматы, 2006. 40 с.

34. Кондаков Н.И. Логический словарь-справочник: сборник статей. М.: Книга по требованию, 2012. – 721 с

35. Конкурсные задачи // Математика в школе. 1994. № 2. С. 69.

36. Колмогоров А.Н. Геометрия 6 класс. URL: https://www.mathedu.ru/text/kolmogorov_i_dr_geometriya_6_klass_1977/p0/ (дата обращения 11.10.2021).

37. Колягин Ю.М., Оганесян Ю.М. и др. Методика преподавания математики в средней школе. Общая методика:учебноепособие для студентов физ.-мат. фак. пед. ин-тов / под ред. Ю.М. Колягина. М.: Просвещение, 1975. 462 с.

38. Концепция развития математического образования в Российской Федерации (с изменениями на 08.10.2020 год). URL: https://docs.cntd.ru/document/499067348?marker=6540IN (дата обращения 05.06.2022).

39. Кружок по геометрии // Математика. – 2018. № 01. С. 54.

40. Мамбетакунов Э.М. Методология и методы педагогических исследований: методическое пособие. Бишкек: Текмок ББ, 2015.128 с.

41. Махмутов М.И. Организация проблемного обучения: монография. М.: Просвещение, 1977. 240 с.

42. Метельский Н.В. Дидактика математики: лекции по общим вопросам.URL: https://www.mathedu.ru(дата обращения 07.01.2022).

43. Образовательный портал для подготовки к экзаменам. Математика профильного уровня. URL: https://ege.sdamgia.ru/problem (дата обращения 09.05.2022 г.).

44. Окунев А.А. Урок? Мастерская? Или …: книга для учителя. СПб.: филиал изд-ва «Просвещение», 2001.304 с.

45. Орлов Л.Э. Открытые и замкнутые задачи // Математика в школе. – 1993. № 4. С. 27.

46. Погорелов А.В. Геометрия. 10-11 классы: учеб. для общеобразоват. Организаций: базовый и профил. уровни. 13-е изд. М.: «Просвещение», 2014. 175 с.

47. Подходова Н.С. Теоретические основы построения курса геометрии 1-6 классов: диссертация ... доктора педагогических наук: 13.00.02. / Российский государственный педагогический университет им. А.И. Герцена.СПб 1999. 395 с.

48. Позднякова Е.В. Формирование исследовательских умений учащихся основной школы в процессе обучения геометрии: дисс. …канд. пед. наук: 13.00.02/ Новокузнецк, 2004. 157 с.

49. Пойа Д. Математическое открытие. Решение задач: основные понятия, изучение и преподавание: пособие для учителя. М.: Издательство «Наука» 1976. 448 с.

50. Потоскует Е.В., Звавич Л.И. Геометрия. 11 кл.: задачник для общеобразовательных учреждений с углуб. и профильным изучением математики. 2-е изд., стереотип.М.: Дрофа, 2004. 240 с.

51. Потоскуев Е. В., Звавич Л.И. Геометрия. 11 кл.: учебник для общеобразовательных учреждений с углубленным и профильным изучением математики. М.: Дрофа, 2012. 234 с.

52. Потоскуев Е.В., Звавич Л.И. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия. углубленный уровень. 10-11 классы Рабочая программа к линии УМК Е.В. Потоскуева, Л.И. Звавича: учебно-методическое пособие. М.: Дрофа, 2017. С. 68.

53. Потоскуев Е. В., Звавич Л. И., Шляпочник Л. Я. Геометрия. 11 кл.: методическое пособие к учебнику Е. В. Потоскуева, Л. И. Звавича «Геометрия. 11 класс». М.: Дрофа, 2010. 213 с.

54. Разумова О.В. Задачи повышенной трудности по геометрии. Часть II: учебно-методическое пособие. Казань: Казан. ун-т, 2012. 112 с.

55. Рогозина Т.В. Изменения в домашней учебной работе школьников в условиях перехода на ФГОС нового поколения: учеб. – метод. СПб.: изд-во ЛОИРО, 2011. 60 с.

56. Рубинштейн С.Л. Основы общей психологии: учебник по общей психологии. СПб.: Питер, 2000. 705 с.

57. Рязановский А.Р., Мирошин В.В. ЕГЭ 2015. Математика: решение задач: Сдаем без проблем!: пособие для учащихся. М.: Эксмо, 2014. 496 с.

58. Саранцев Г.И. Методика обучения математике в средней школе: учеб. пособие для студентов, мат. спец. пед. вузов и ун-тов. М.: Просвещение, 2002. 224 с.

59. Саранцев Г.И. Методика работы с теоремой в контексте деятельностного подхода// Математика в школе. 2016. № 3. С. 42.

60. Селевко Г.К. Энциклопедия образовательных технологий: в 2т.М.: НИИ школьных технологий.2006. 468 с.

61. Сериков В.В. Образование и личность. Теория и практика педагогических систем: учеб. пособ. для студентов вузов с углубленной педагогической подготовкой. М.: Издательская корпорация «Логос», 1999. 272 с.

62. Скарбич С.Н. Формирование исследовательских компетенций учащихся в процессе обучения решению планиметрических задач: учебное пособие; науч. ред. д-р пед. наук, проф. В.А. Далингер. 3-е изд., стереотип. М.: ФЛИНТА, 2016. 194 с.

63. Слепкань З.И. Психолого-педагогические основы обучения математике: методическое пособие. Киев.: Рад. школа, 1983. 192 с.

64. Смирнов В.А., Смирнова И.М. Геометрия с GeoGebra. Планиметрия: методическое пособие для учителя. М.: «Прометей», 2018. 206 с.

65. Смирнова И.М., Смирнов В.А. Геометрия. 10-11 кл.: учебн. для общеобразовательных учреждений (базовый и профильный уровни). 5-е изд., испр. и доп. М.: Мнемозина, 2008. 288 с.

66. Смирнова И.М., Смирнов В.А. Геометрические задачи с практическим содержанием: учебное пособие. 2-е изд., доп. М.: МЦНМО. 2015. 216 с.

67. Смирнова Е. С. Планиметрия: виды задач и методы их решений: Элективный курс для учащихся 9-11 классов. М.: МЦНМО, 2016. 416 с.

68. Смирнов В. А., Смирнова И.М. Геометрия. Базовый и углубленный уровни. 10 класс: методическое пособие для учителя. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2020. 112 с.

69. Степанов Е.Н. Личностно ориентированный подход в педагогической деятельности//Воспитание школьников. 2003. №2. С. 2-5.

70. Стефанова Н.Л., Подходова Н.С., Орлов В.В.и др. Методика и технология обучения математике. Лабораторный практикум: учеб. пособие для студентов математ. факультетов пед. университетов: под науч. ред. В.В. Орлова. М.: Дрофа, 2007. 320 с.

71. Столяр А.А. Педагогика математики: учебное пособие/ А.А. Столяр. – Минск.: Высшая школа, 1974. 368 с.

72. Талызина Н.Ф. Педагогическая психология: учебное пособие для студентов. М.: «Академия», 1998. 288 с.

73. Уметский В.А. О методике проверки и учета знаний учащихся // Математика в школе. 1959. - № 01. С. 86-89.

74. Утеева Р.А. Теоретические основы организации учебной деятельности учащихся при дифференцированном обучении математике в средней школе: дис. ... канд. пед. наук. … д-ра пед. наук. наук. М, 1998. 363 с.

75. Федеральный государственный образовательный стандарт среднего (полного) общего образования (утвержден приказом Минобрнауки от 17 мая 2012 г. № 413). URL: https://fgos.ru (дата обращения 21.05.22).

76. Фридман Л.М., Турецкий Е.Н. Как научиться решать задачи: книга для учащихся. М.: Просвещение, 1984. 175 с.

77. Фридман Л.М. Учитесь учиться математике: книга для учащихся. М.: Просвещение, 1985. 112 с.

78. Харламова С.А. Геометрические задачи как основа обучения школьников выделению существенных признаков геометрических объектов //Молодой ученый. 2019. № 47 (285). С. 58-61.

79. Харламова С.А. Методика проведения диагностики обучающихся для выделения специализированных групп личностно-ориентированной подготовки по математике //Вестник магистратуры. 2019. № 12 (99). С. 69-72.

80. Харламова С.А. Методические особенности изучения темы «Задачи на исследование свойств и признаков пирамиды» в школьном курсе математики на основе интегральной технологии // Вестник магистратуры. 2020. № 3 (102). С. 98-104.

81. Харламова С.А. Принципы личностно-ориентированно обучения при формировании исследовательских умений по // «Студенческие Дни науки в ТГУ – 2022»: научно-практическая конференция (Тольятти, 4-29 апреля 2022 года): сборник студенческих работ / отв. за вып. С.Х. Петерайтис. – Тольятти: Изд-во ТГУ, 2022.

82. Харламова С.А., Кузнецова О.А. Применение динамической системы «GeoGebra» для решения планиметрических задач на исследование свойств и признаков геометрических объектов Теоретико-методологические аспекты преподавания математики в современных условиях: материалы V Международной научно-практической конференции, 04-05 мая 2022 г., г. Луганск. ГОУ ВОЛНР «Луганский государственный педагогический университет». – Луганск, 2022.

83. Чупрова О.С. Решение стереометрических задач по теме «Пирамида». URL: https://textarchive.ru/c-1630401.html (обращение 28.04.2022).

84. Шарыгин И.Ф., Гордин Р.К. Сборник задач по геометрии. 500 задач с ответами: пособие для учащихся.М.: ООО «Издательство Астрель»: ООО «Издательство АСТ». 2001. 400 с.

85. Шыныбеков А.Н., Шыныбеков Д.А., Жумабаев Р.Н., Маделханов С.С. Геометрия: учебник для 11 класса общеобразоват. шк. ест.-мат. направления. Алматы: Атамұра. 2020. 192 с.

86. Шыныбеков А.Н., Шыныбеков Д.А., Жумабаев Р.Н. Геометрия: учебник для 10 класса общеобразоват. шк.Алматы: Атамұра. 2019. 112 с.

87. Шыныбеков А.Н. Геометрия: учебник для 8 класса общеобразоват. шк. 4-е изд. Алматы: Атамұра. 2016.136 с.

88. Якиманская И.С. Личностно-ориентированное обучение в современной школе: книга для учителя.М.: Сентябрь, 1996. 96 с.

89. Maslow A. H. (1943). A theory of human motivation**.** Psychological Review. 50(4), pp. 370-396.

90. Rogers C. (1951). Client-centered therapy: Its current practice, implications and theory. London: Constable.

91. Michael KM and Marc S2013 ‗The Area of a Triangle is 1800 C '– An Analysis of Learners' Idiosyncratic Geometry Responses through the Lenses of Vygotsky's Theory of Concept Formation A frican Journal of Research in Mathematics, Science and Technology Education, 17 (1-2) pp. 83-93.

92. McLeod S. A. (2014). Carl Rogers. Retrieved from https://www.simplypsychology.org/maslow.html.

93. Schoenfeld A H 2013 Reflection on Problem Solving Theory and Practice the Mathematic Enthusiast 10 (1) pp. 9-34.

94. Van de Walle J A, Karp K S and Bay-William J M 2013Elementary and Middle School Mathematics: Teaching Developmentally (New Jersey: Pearson Education Inc).

Приложение А

Решение задач диагностической работы

Первый вариант – начальный уровень

Задача 1. Нет, так как по свойству сторон треугольника: $(\mathrm{a}+\mathrm{b})>c$.

Задача 2.

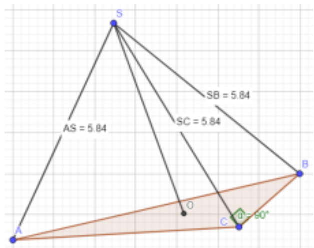


Рисунок А1 – Пирамида SABC

Дано:

SABC – пирамида (рисунок А1)

ABC– прямоугольный треугольник

∠C=90°

AS=SB=SC

Решение:

- проекции боковых ребер на плоскости основания равны;
- высота пирамиды проходит через центр окружности, описанной около треугольника ABC;
- высота пирамиды проходит через середину гипотенузы стороны AB;
- ASB⊥ABC;
- ΔSAO=ΔSBO=ΔSCO, т.к. точка O середина гипотенузы AB, то эти треугольники прямоугольные;
- все боковые ребра наклонены к плоскости основания под одним углом.

Задача 3.

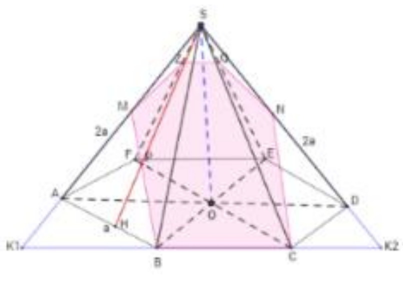


Рисунок А2 – пирамида SABCDEF

Дано:

SABCDEF – правильная шестиугольная пирамида (рисунок А2), AS=2AB.

Доказать: SP:PH=2:1.

Найти: $SZ:ZF=?$

Решение:

Выполним дополнительное построение (рисунок А3):

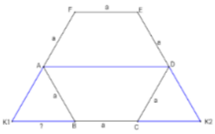


Рисунок А3 – трапеция K_1FEK_2

a) MN – средняя линия ΔASD, следовательно MN || AD || BC.

Секущая плоскость пересекает основание по прямой CB [BM]; [CN].

Секущая плоскость пересекает SN (апофему грани ASB в точку P).

b) SA и BM – медианы ΔASB, следовательно SP:PH=2:1.

Что и требовалось доказать.

Выполним дополнительное построение: Продолжим BC за точку B и точку C. $BC\cap FA=K_1$, $BC\cap DE=K_2$. $K_1M\cap SF=Z$, $K_2\cap SE=Q$. Сечение пересекает грань FSE по ZQ. Искомое сечение (α) есть шестиугольник MZQNCB.

Найдем отношение $SZ:ZF$ по теореме Менелая: $\frac{AM}{MS}\cdot\frac{SZ}{ZF}\cdot\frac{FA}{FK_1}=1$;

$\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{a}}\cdot\frac{\mathbf{SZ}}{\mathbf{ZF}}\cdot\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{2a}}=1 \Rightarrow \frac{ZF}{SZ}=\frac{a}{a}\cdot\frac{a}{2a} \Rightarrow \frac{ZF}{SZ}=\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{SZ}{ZF}=\frac{2}{1}$.

Ответ: $SZ:ZF=2:1$.

Второй вариант – базовый уровень

Задача 1. Множество, которые образуют конус с плоскостью основания 75°.

Задача 2. Случай 1:

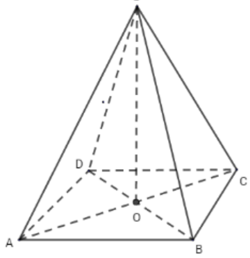


Рисунок А4 – Пирамида SABCD

Дано:

SABCD – пирамида (рисунок А4)

ABCD – прямоугольник

SO⊥(ABCD)

O=AC∩BD

Решение:

– так как $\Delta SOA = \Delta SOB = \Delta SOC = \Delta SOD$ (прямоугольные, SO – общий катет, OA = OB = OC = OD), поэтому, как и у правильной пирамиды, боковые ребра равны (SA = SB = SC = SD);
– так как $\Delta ASB = \Delta CSD$, то AB = CD, AS = CS, BS=DS;
– аналогично (2), так как $\Delta BSC = \Delta DSA$, то BC = DA, BS = DS, CS=AS, другими словами, противоположные боковые грани равны (у правильной пирамиды все боковые грани равны);
– следовательно, как и у правильной пирамиды, точка O – центр основания;
– у данной пирамиды в основании прямоугольник, у правильной пирамиды в основании – квадрат;
– как и у правильной пирамиды, у данной пирамиды SABCD$\angle SAO = \angle SBO = \angle SCO = \angle SDO$.

2. Случай:

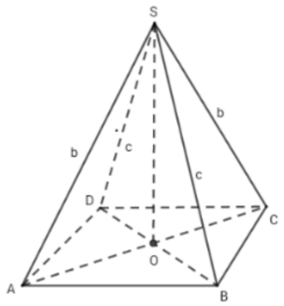


Рисунок А5 – Пирамида SABCD

Дано:

SABCD – пирамида рисунок А5)

ABCD – ромб

$SO \perp (ABCD)$

$O = AC \cap BD$

Решение:

– так как $\Delta SAO = \Delta SCO$ (SO – общий катет, AO = CO, $\angle SOA = \angle SOC = 90°$), поэтому, SA = SC;
– так как $\Delta SBO = \Delta SDO$, то SB = SD. Следовательно, также, как и правильной пирамиды, противоположные боковые ребра равны;
– как и у правильной пирамиды (O – точка симметрии квадрата) точка O является центром симметрии ромба;

– $\Delta ASB = \Delta CSB = \Delta CSD = \Delta ASD$ (AB = CB = CD = AD = a; AS = CS = CS = AS; BS = BS = DS = DS), то есть, как и у правильной пирамиды, все боковые грани равны не смотря на то, что не являются равнобедренными треугольниками.

Задача 3.

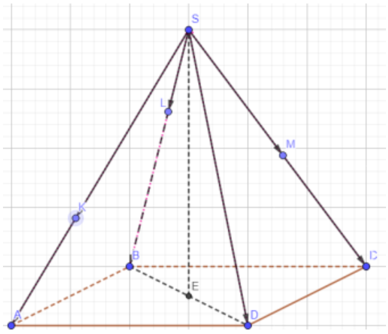


Рисунок А6 – Пирамида SABCD

Дано:

SABCD – пирамида рисунок А6)

ABCD – прямоугольник

K, L, M$\in$SA, SB, SC

SK:KA=2:1

SL:LB=1:2

SM:MC=3:1

Найти:

KLM$\cap$SD - ?

SN:ND=?

Решение:

Рассмотрим пирамиду SABCD. Из чертежа видно, что точки S, A, B, C не лежат в одной плоскости. $\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SC}$ – не компланарны.

Из условия задачи: $\overrightarrow{SK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{SA};\ \overrightarrow{SL} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SB};\ \overrightarrow{SM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SC}.$

$$\overrightarrow{SD} = \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{SB} + \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}\right) = \overrightarrow{SB} + \left(\overrightarrow{SA} - \overrightarrow{SB}\right) + \left(\overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SB}\right) =$$

$= \overrightarrow{SA} - \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC}$(по определению суммы и разности векторов).

Если плоскость KLM$\cap$SD в точке N, то: $\overrightarrow{SN} = \lambda\overrightarrow{SD} \Longrightarrow \overrightarrow{SN} =$

$= \lambda(\overrightarrow{SA} - \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC}).$

Заменим неколлинеарные векторы коллинеарными, получим:

$\overrightarrow{SN} = \frac{2a}{3}\overrightarrow{SK} + \frac{\beta}{3}\overrightarrow{SL} + \frac{3\gamma}{4}\overrightarrow{SM}$, где $\alpha + \beta + \gamma = 1.$

Заключаем: $\frac{2\alpha}{3} = -\frac{\beta}{3} = \frac{3\gamma}{4} = \lambda$ (единственное разложение $\overrightarrow{SN}$ по векторам $\overrightarrow{SK}$, $\overrightarrow{SL}, \overrightarrow{SM}$) $\Rightarrow \alpha = \frac{3}{2}\lambda$; $\beta = -3\lambda$; $\gamma = \frac{4}{3}\lambda$.

Так как $\alpha + \beta + \gamma = 1$, то $\frac{3}{2}\lambda - 3\lambda + \frac{4}{3}\lambda = 1 \Rightarrow \lambda = -6$.

Точка N делит отрезок SD внешним образом, следовательно, KLM не пересекает SD.

Ответ: 1) внешним образом; 2) не пересекает.

Третий вариант – профильный уровень

Задача 1.

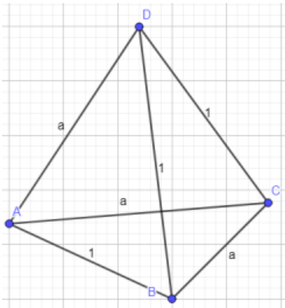


Рисунок А7 – пирамида ABCD

Дано:

ABCD –пирамида (рисунок А7)

AD, AB, BC – ребра пирамиды

Найти:

? <a< ?

Решение:

Рассмотрим пирамиду ABCD. По условию:

$AB = BD = DC = 2$ и $AD = DB = BC = a$ (рисунок А7). Необходимого условия существования треугольников равных граням AD, DB, BC является $\frac{1}{2} < a < 2$ недостаточно для существования пирамиды.

Пусть $a > 1$, тогда $\angle DBC = \alpha, \angle ABC = \beta, \angle ABD = \gamma$. Для существования трехгранного угла с соответствующими плоскими углами, необходимо выполнение неравенства $\alpha + \beta > \gamma$.

Получим: $cos\alpha = 1 - \frac{1}{2a^2}; cos\beta = \frac{a}{2}; cos\gamma = \frac{1}{2a};$

$$\sin\alpha = \sqrt{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{4a^2}}; \sin\beta = \frac{a}{2}; \cos\gamma = \sqrt{1 - \frac{a^2}{4}}.$$

Так как $\alpha+\beta<\pi$, то $\alpha+\beta>\gamma \cong \cos(\alpha+\beta)<\cos\gamma$ или $\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta<\cos\gamma$, $\left(1-\frac{1}{2a^2}\right)\cdot\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{1}{a^2}-\frac{1}{4a^2}}\sqrt{1-\frac{a^2}{4}}<\frac{1}{2a}$,

$2a^3-3a<\sqrt{(4a^2-1)(4-a^2)}$.

Данное неравенство выполняется, если $a^2\leq\frac{3}{2}$, иначе, если $a^2>\frac{3}{2}$, после возведения в квадрат и преобразований получим:

$$a^6-2a^4-2a^2+1<0 \Longrightarrow (a^2+1)(a^4-3a^2+1)<0,$$

поскольку $a^2>0$, то $1<a^2<\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ или $1<a<\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Так как другие неравенства между плоскими углами не дают никаких ограничений на a, то указанная пирамида существует, если

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2}<a<\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \text{где } a\neq 1.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{5}-1}{2}<a<\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, где $a\neq 1$.

Задача 2.

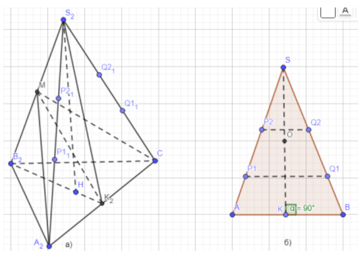


Рисунок А8 – пирамида ABCD

Дано:

ABCD –пирамида (рисунок А8 а)

AD, AB, BC – ребра пирамиды

Найти: ? <a< ?

Решение: Рассмотрим грань ASC (рисунок А8 б).

Сфера пересекает соответствующие ребра пирамиды в точках K, P_1, P_2, Q_1, Q_2 по условию $AP_1=P_1P_2=P_2S$; $CQ_1=Q_1Q_2=Q_2S$; $AK=KC$.

Так как $P_1Q_1||P_2Q_2$, то серединные перпендикуляры к ним совпадают. Отсюда следует, что $P_1P_2Q_2Q_1$ – равнобедренная трапеция (противоположные стороны равны); $AS=SC \Longrightarrow \Delta ASC$ – равнобедренный. Исходя из того, что ΔABC, $\Delta BAS, \Delta BCS$ подобны, то $AS=SC=AB=BC$.

SK – медиана и высота ΔASC, на которой лежит точка O_1, поэтому AC – касательная к окружности и сфере, $O_1K \perp AC$. $BK \perp AC$, следовательно центр сферы О лежит в плоскости BKS.

Если точка M – середина SB, то точно также можем вывести утверждение, что SB касается сферы в точке M и центр сферы лежит в плоскости AMS. Далее получаем, что центр сферы O лежит на прямой MK, линии пересечения плоскостей BKSAMC.Так как точки M и K лежат на сфере, то $MK = 2R$ – диаметр сферы.

Найдем высоту пирамиды. Из равенства ΔASC и $\Delta ABC \Longrightarrow$ $BK = SK$ и $KM \perp BS, \Delta BKS$ – равнобедренный. SH – высота ΔBKS и пирамиды (искомая). Находим высоту из равенства $SH = 2R \cdot \left(\frac{BS}{BK}\right)$.

Найдем отношение $\frac{BS}{BK}$. По теореме о квадрате касательной $AK^2 = AP_1 \cdot AP_2$, то есть $AK = SM$ и $AC = BS$, следовательно

$$\frac{BS}{BK} = \frac{AC}{SK} = \frac{2AK}{SK} = \frac{2\sqrt{AP_1 \cdot AP_2}}{\sqrt{AS^2 - AK^2}} = \frac{2\sqrt{2}AP_1}{\sqrt{9{AP_1}^2 - 2A}} = 2\sqrt{\frac{2}{7}}, SH = 2R \cdot 2\sqrt{\frac{2}{7}} = \frac{4}{7}\sqrt{14}R.$$

Ответ: $\frac{4}{7}\sqrt{14}$R.

Задача 3.

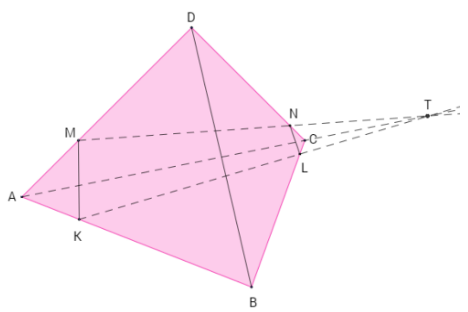


Рисунок А9– Пирамида DABC

Дано:

DABC –пирамида (рисунок А9)

AD, AB, BC – ребра пирамиды

M, K, L – точки на ребрах

AM=MD

AK:KB=1:2

BL:LC=6:1

MKL – плоскость,

$V_1:V_2<1$

Найти:$V_1:V_2$- ?

Решение:

Сначала построим сечение пирамиды плоскостью MKL (рисунок А9). Поскольку $\frac{BK}{KA} \neq \frac{BL}{LC}$, то прямые KL и AC пересекаются.

Пусть точки M и T лежат в плоскостях MKL и ACD. Следовательно, линия пересечения этих плоскостей есть прямая MT, которая пересекает ребро DC в точке N. Аналогично, прямая NL есть линия пересечения плоскостей MKL и BCD. Получили сечение – четырехугольник MKLN.

Найдем, в каком отношении точка N делит ребро DC. При решении необходимо дважды использовать теорему Менелая:

1) в ΔABC, который пересекает прямая KL. Имеем:

$$\frac{AT}{TC} \cdot \frac{CL}{LB} \cdot \frac{BK}{KA} = 1.$$

Так как из условия AK:KB=1:2, BL:LC=6:1, то: $\frac{AT}{TC} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{1} = 1$, откуда: $\frac{AT}{TC} = 3$.

2) в ΔADC, который пересекает прямая MT. Имеем: $\frac{DN}{NC} \cdot \frac{CT}{TA} \cdot \frac{AM}{MD} = 1$.

Откуда получаем: $\frac{DN}{NC} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 = 1 \Leftrightarrow \frac{DN}{NC} = 3$.

Пусть объем пирамиды ABCD равен V. Пирамиды ABCD и AKMT имеют общий трехгранный угол с вершиной A, следовательно, по доказанной теореме:

$$\frac{V_{AKMT}}{V_{ABCD}} = \frac{AK}{AB} \cdot \frac{AT}{AC} \cdot \frac{AM}{AD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4},$$

откуда следует, что: $V_{AKTM} = \frac{1}{4}V$.

Аналогично, пирамиды ABCD и CLNT имеют «смежные» трехгранные углы с общей вершиной C. Следовательно, согласно замечанию к теореме об отношении объемов получаем:

$$\frac{V_{CLNT}}{V_{ABCD}} = \frac{CL}{CB} \cdot \frac{CN}{CD} \cdot \frac{CT}{CF} = \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{56},$$

откуда следует, что: $V_{CLNT} = \frac{1}{56}V$.

Объем V_1 многогранника AMKLNC равен разности:

$V_1 = V_{AKTM} - V_{CLNT} = \frac{1}{4}V - \frac{1}{56}V = \frac{13}{56}V$.

Следовательно, объем V_2 многогранника, дополняющего многогранник AMKLNC до данной пирамиды, равен:

$V_2 = V - V_1 = 1 - \frac{13}{56} = \frac{43}{56}V$.

Поэтому искомое соотношение: $V_1 : V_2 = 13 : 43$

Ответ:$V_1 : V_2 = 13 : 43$.

Приложение Б

Анкета для учителей математики

1. Верно ли утверждение, что проблема формирования умений обучения решению задач на исследование свойств и признаков геометрических объектов на уроках геометрии в контексте личностно – ориентированного обучения, важная задача?

a) да, решение этой задачи обязательно;
b) нет, решение этой задачи не существенно и не скажется на уровне обученности учащихся.

2. Необходимо ли вести целенаправленную работу по формированию исследовательских умений в урочное время?

a) да, тщательно анализируя и систематизируя ошибки учащихся;
b) да, выстроив при этом определенную систему;
c) нет, можно вести эпизодически;
d) нет, достаточно вести в некоторых случаях и с отдельной категорией учащихся, например, с «отличниками» или при подготовке учебного проекта.

3. Имеет ли предметная область «Геометрия» преимущества для формирования исследовательских умений в контексте личностно-ориентированного обучения?

a) да, школьный курс «Геометрия» имеет большие преимущества перед другими предметными областями;
b) да, при правильной организации урочной и внеурочной деятельности;
c) нет, ввиду сложности учебного материала.

4. С какими трудностями при организации учебного процесса, ориентрованного на формирование умений решения задач исследовательского характера, приходится сталкиваться учителям математики?

a) частая смена учебников;
b) отсутствие уровневой (дифференцированной) системы задач исследовательского характера;
c) отсутствие задач на исследование свойств и признаков геометрических объектов с практическим содержанием;
d) отсутствие необходимого методического обеспечения.

5. Верно ли, что формирование исследовательских умений посредством решения задач на исследование свойств и признаков геометрических объектов в контексте личностно – ориентированного обучения неотъемлемая часть образовательного процесса при обучении «Геометрии»?

a) да; b) нет.

6. С каким уровнем обученности необходимо формировать исследовательские умения посредством решения исследовательских задач?

a) «профильный»; b) «базовый»; c) «низкий».

7. Испытывает ли учитель математики трудности при подборе задач к уроку?

a) да; b) нет.

8. Есть ли необходимость осуществлять дифференцированный подход, при формировании исследовательских навыков посредством решения задач на исследование свойств и признаков геометрических объектов?

a) да, только в среднем звене;
b) да, только в профильных классах;
c) да, на протяжении всего курса обучения «Геометрии», не зависимо от уровня (базовый или профильный);
d) нет;
e) сомневаюсь в ответе.

Приложение В

Срезовая контрольныяя работа (входная)

Первая группа задач

Определите цель задачи.

Задача 1. Могут ли ребра при основании треугольной пирамиды иметь длины 20 см., 40 см. и 85 см.?

Задача 2. Существует ли прямоугольная пирамида, у которой площади боковых граней равны 23 $см^2$, 33 $см^2$, 63 $см^2$ и 83 $см^2$?

Задача 3. Ларец изготовлен в виде пирамиды, в основании которой лежит правильный пятиугольник со стороной 5 см. и углом 108°. Высота – 15 см. Можно ли в ларец поместить заколку длиной 25 см.?

Вторая группа задач

Проведите анализ условия задачи.

Задача 1. На какой глубине в пирамиде Хеопса находится недостроенная усыпальница, если ее Большая галерея длиной 105 метров наклонена к основанию под углом 23°?

Задача 2. Определите угол между двумя ребрами произвольной пирамиды, которые являются скрещивающимися, если одно из них перпендикулярно некоторой плоскости, а другое пересекает эту плоскость под углом β.

Задача 3. Шесть стержней, длиной 2,2 м. и толщиной 0,3 м., приварены друг к другу так, что образуют равные равнобедренные треугольники. Можно ли в такой «объект» поместить идеально круглый валун диаметром 2,8 м.?

Третья группа задач

Выдвините и сформулируйте гипотезу:

Задача 1. Сколько плоскостей в шестигранной пирамиде можно провести через точку G, если они пересекают данную плоскость под углом 75°?

Задача 2. Можно ли через боковое ребро пирамиды, перпендикулярное плоскости основания β, провести плоскость, не перпендикулярную плоскости основания β?

Задача 2. Высота тетраэдра h. На каком расстоянии от вершины необходимо провести плоскость параллельную основанию, чтобы площадь сечения была в шесть раз меньше площади основания?

Четвертая группа задач

Составьте план решения задачи:

Задача 1. Прямые a и b расположены по разные стороны от плоскости α и параллельны прямой с, лежащей в этой плоскости. Каким будет расстояние между прямыми а и b, если они удалены от прямой с?

Задача 2. Как соотносятся объем пирамиды, которую отсекает от золотой пирамиды плоскость, проходящая через середины трех ее ребер с объемом золотой пирамиды.

Задача 3. Сколько квадратных метров жести уйдет на покрытие шатровой (пирамидальной) формы крыши дома длиной (карниз А) 8 м., шириной (карниз В) 10 м., углом наклона в 40°, если на «нахлест» обрезки прибавляют 5% поверхности крыши?

5 группа задач

Проведите анализ решения задачи (обоснуйте полученный ответ):

Задача 1. Боковое ребро правильной четырехугольной пирамиды SABCD составляет с плоскостью основания угол α. Через вершину В проведена плоскость, перпендикулярная ребру SD. Какую часть объема данной пирамиды составляет объем четырехугольной пирамиды, отсекаемой сечением?

Задача 2. Середины противоположных ребер золотой пирамиды соединены отрезками. Как расположены эти отрезки между собой и по отношению к ребрам пирамиды.

Задача 3. Дана правильная шестиугольная пирамида SABCDEF с вершиной S. Известно, что боковое ребро вдвое больше стороны основания. Исследуйте, как плоскость, проходящая через середины рёбер SA и SD и вершину C, делит апофему грани ASB считая от вершины. В каком отношении плоскость, проходящая через середины рёбер SA и SD и вершину C, делит ребро SF, считая от вершины S.

Приложение Г

Срезовая контрольныяя работа (итоговая)

Первая группа задач

Определите цель задачи.

Задача 1. Дана произвольная n-угольная пирамида. Могут ли ее ребра при основании иметь длины 5 см., 10 см. и 15 см.?

Задача 2. Существует ли n-угольная пирамида, у которой площади боковых граней равны 14 см^2, 24 см^2, 34 см^2 и 54 см^2?

Задача 3. «Красочница» изготовлена в виде n-угольной пирамиды, в основании которой лежит невыпуклый многоугольник со сторонами 20 см., 26 см., 15 см., 5 см. и 16 см. и углом α равным 90°. Высота – 46 см. Можно ли в «красочницу» поместить гребень площадью 36 см^2?

Вторая группа задач

Проведите анализ условия задачи.

Задача 1. «Можно ли найти боковые ребра пирамиды, если известно, что в основании пирамиды лежит прямоугольник вершина которой проецируется в вершину основания и два боковых ребра пирамиды равны d1 и d2 (d2>d1)?» [15, с. 30].

Задача 2. «Исследуйте, лежат ли точки P, Q, N и L в одной плоскости, если в пирамиде $ABCA_1B_1C_1 \angle ABC = 90°$, точки P, Q и L середины боковых ребер, а точка N делит ребро B_1C_1 в соотношении 1:5 (от вершины B_1)» [54, с. 60].

Задача 3. Дан выпуклый многогранник. К одной из его граней пристраивается пирамида. Она имеет в пересечении с данным многогранником только эту грань, которая является ее основанием. В результате такого пристраивания получается новый многогранник. Как изменяется (в самом общем случае) число вершин, граней и ребер у построенного многогранника по сравнению с исходным?

Выполняется ли для построенного многогранника формула из теоремы Эйлера? Какие возможны частные случаи при таком построении?

Третья группа задач

Выдвините и сформулируйте гипотезу.

Задача 1. Могут ли точки A, D, C, D лежать в одной плоскости, если точка K – середина отрезка DA, а точка F лежит на отрезке DB так, что BF:FD=3:2?

Задача 2. Можно ли через боковое ребро четырехугольной пирамиды, разделенной на четыре равные части провести четыре плоскости, каждая из которых будет параллельная плоскости основания, если известно, что площадь одного из сечений равна 2 $м^2$?

Задача 3. В серединах трех ребер здания Дверец мира и согласия в Нур-Сутане сидели голуби. Исследуйте, находились ли они в одной плоскости, проходящей через любые две из этих точек – R, T, L?

Четвертая группа задач

Составьте план решения задачи.

Задача 1. Основанием неправильной пирамиды TUBS является треугольник UBS. UB – гипотенуза, равная 20 см., US – катет, равный 16 см. Определить углы, образованные боковыми ребрами пирамиды с высотой, если объем пирамиды равен 320 $см^3$.?

Задача 2. Определите высоту и величину угла между скрещивающимися ребрами золотой пирамиды.

Задача 3. «Сколько высот тетраэдра могут пересекаться в одной и той же точке (рассмотреть три случая)?» [15, с. 23].

Пятая группа задач

Проведите анализ решения задачи (обоснуйте полученный ответ).

Задача 1. Какие свойства шестигранной пирамиды аналогичны свойствам правильной пирамиды, если ее вершина проектируется в точку пересечения диагоналей основания?

Задача 2. «Определить расстояние от центра шара, описанного около правильной четырехугольной пирамиды, до боковой грани, если известно, что радиус шара равен 24 мм., расстояние до бокового ребра равно $4\sqrt{2}$?» [82].

Задача 3. Дана правильная шестиугольная пирамида SABCDEF с вершиной S. Известно, что ее боковые ребра равны.

Докажите, что сумма площадей боковых граней этой пирамиды равна отношению площади ее основания к косинусу двугранного угла при ребре основания пирамиды.

Учащийся 11 класса составил задачу «В пятиугольной пирамиде основание правильный пятиугольник, площадь которого равна 13 см^2. Все боковые грани этой пирамиды – равнобедренные треугольники, площади которых равны 1,5 см^2. Определите угол наклона боковой грани пирамиды к плоскости ее основания». Имеет ли решение эта задача?