

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Тольяттинский государственный университет»

Институт математики, физики и информационных технологий
(наименование института полностью)

Кафедра «Высшая математика и математическое образование»
(наименование)

44.04.01 Педагогическое образование
(код и наименование направления подготовки)

Математическое образование
(направленность (профиль))

**ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
(МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ)**

на тему «Методика обучения теоремам в курсе геометрии
общеобразовательной школы»

Студент

Э.Л. Оркина
(И.О. Фамилия)

(личная подпись)

Научный
руководитель

канд. пед. наук, доцент, И.В. Антонова
(ученая степень, звание, И.О. Фамилия)

Тольятти 2022

Оглавление

Введение.....	3
Глава 1 Теоретические основы обучения теоремам в курсе геометрии общеобразовательной школы.....	8
1.1 Понятие теоремы, методы доказательства теорем	8
1.2 Различные подходы к обучению теоремам в школьном курсе геометрии	17
Глава 2 Методические основы обучения теоремам в курсе геометрии общеобразовательной школы.....	37
2.1 Методические рекомендации по обучению теоремам в курсе геометрии общеобразовательной школы	37
2.2 Проектирование изучения темы «Теорема синусов и теорема косинусов» на основе технологии системно-деятельностного подхода в школьном курсе геометрии.....	43
2.3 Педагогический эксперимент и его результаты	75
Заключение	83
Список используемой литературы	84
Приложение А Диагностическая работа.....	91
Приложение Б Анкета для учителей математики.....	92

Введение

Актуальность и научная значимость настоящего исследования.

Современный период развития математического образования характеризуется пересмотром его приоритетных целей. Ведущее место в этой системе занимает интеллектуальное развитие личности школьника, формирование у него качеств мышления, характерных для математической деятельности и качеств, необходимых для полноценной жизни в обществе. Известно, что еще Г. Галилей отмечал, что «геометрия является самым могущественным средством для изощрения наших умственных способностей и дает нам возможность правильно мыслить и рассуждать» [11]. Изучение геометрии состоит не только в формировании специальных геометрических знаний, но и способствует развитию личности, умению логически мыслить и доказательно обосновывать истинность утверждений в любой сфере деятельности.

Хорошее математическое образование, пространственное воображение и логическое мышление необходимо специалистам многих профессий. А.В. Погорелов, в послесловии к одному из первых изданий своего учебника по геометрии для средней школы писал: «Главная задача преподавания геометрии в школе - научить учащегося логически рассуждать, аргументировать свои утверждения, доказывать. Очень немногие из оканчивающих школу будут математиками, тем более геометрами. Будут и такие, которые в их практической деятельности ни разу не воспользуются теоремой Пифагора. Однако вряд ли найдется хотя бы один, которому не придется рассуждать, анализировать, доказывать» [16].

Теоретические аспекты обучения теоремам описаны в работах В.А. Гусева [16]; Я.И. Груденова [15]; В.А. Далингера [17]; О.Б. Епишевой [19], Т.А. Ивановой [48]; Е.И. Лященко [23]; Н.В. Садовникова [40]; Г.И. Саранцева [41]; [42]; Н.Л. Стефановой, Н.С. Подходовой [45] и др.

Анализ предшествующих диссертационных работ, посвященных вопросам совершенствования процесса обучения теоремам в курсе геометрии, показал, что они были рассмотрены в аспекте:

- «формирования геометрических понятий в средней школе с использованием компьютера» (Л.А. Страбыкина [46], 2002 г.);
- «методики формирования системы базовых знаний по геометрии с использованием компьютерных технологий» (Г.Л. Абдулгалимов [1], 2004 г.);
- «критериев выбора методов обучения доказательству теорем курса геометрии основной школы» (О.Н. Шалина [50], 2012 г.);
- «методики обучения учащихся основной школы доказательству теорем при изучении геометрии с использованием программы GEOGEBRA» (Т.С. Широкова [53], 2016 г.).

Таким образом, актуальность темы исследования обусловлена сложившимися **противоречиями** между: требования ФГОС среднего (полного) образования и недостаточным уровнем развития наглядно-образного и логического мышления у школьников; необходимостью качественного обучения геометрии школьников и недостаточной разработанностью методики организации обучения теоремам в школьном курсе математики.

Данное противоречие позволило сформулировать **проблему диссертационного исследования**: каковы методические особенности обучения теоремам в курсе геометрии общеобразовательной школы?

Объект исследования: процесс обучения геометрии в общеобразовательной школе.

Предмет исследования: методика обучения теоремам на уроках геометрии в общеобразовательной школе.

Цель исследования: выявление методических особенностей обучения теоремам в курсе геометрии общеобразовательной школы.

Гипотеза исследования основана на предположении о том, что качество обучения геометрии школьников достигается, если выявить методические особенности обучения теоремам в курсе геометрии

общеобразовательной школы и с их учетом разработать методику их обучения, основанную на применении системно-деятельностного подхода.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие **задачи:**

1. Раскрыть понятие теоремы, методов доказательства теорем.
2. Выявить различные подходы к обучению теоремам в школьном курсе геометрии.
3. Описать методические рекомендации по обучению теоремам в курсе геометрии общеобразовательной школы.
4. Спроектировать изучение темы «Теорема синусов и теорема косинусов» на основе технологии системно-деятельностного подхода в школьном курсе геометрии.
5. Представить результаты педагогического эксперимента.

Теоретико-методологическую основу данного исследования составили работы таких авторов, как В.А. Гусев; В.А. Далингер; О.Б. Епишева; Е.И. Лященко; Т.А. Иванова, Н.В. Садовников; Г.И. Саранцев; Н.Л. Стефанова, Н.С. Подходова.

Базовыми для настоящего исследования явились работы В.А. Далингера, Е.И. Лященко, Г.И. Саранцева.

Методы исследования: теоретические – анализ научной и учебно-методической литературы, нормативных документов; эмпирические – прямые и косвенные наблюдения, беседы, собеседование с членами администрации школы на базе практики, изучение документации образовательной организации; проведение педагогического эксперимента.

Основные этапы исследования:

- 1 семестр (2020/2021 уч.г.): анализ ранее выполненных исследований по теме диссертации; анализ школьных программ и учебников по математике, нормативных документов; анализ опыта работы школы по теме исследования;

- 2 семестр (2020/2021 уч.г.): определение теоретических основ обучения теоремам в курсе геометрии общеобразовательной школы;
- 3 семестр (2021/2022 уч.г.): определение методических основ обучения теоремам в курсе геометрии общеобразовательной школы; проектирование изучения темы «Теорема синусов и теорема косинусов» на основе технологии системно-деятельностного подхода в школьном курсе геометрии;
- 4 семестр (2021/2022 уч.г.): оформление диссертации, корректировка ранее представленного материалов и аппарата исследования, описание результатов педагогического эксперимента, формулирование выводов по главам.

Опытно-экспериментальная база исследования: ГБОУ «Школа № 1360» г. Москва.

Научная новизна исследования заключается в обосновании предложенных методических рекомендаций по обучению теоремам в школьном курсе геометрии.

Теоретическая значимость исследования состоит в том, что в нем: раскрыто понятие теоремы, видов теорем и методов их доказательства; определены различные подходы к обучению теоремам в школьном курсе геометрии.

Практическая значимость исследования заключается в том, что в нем: описаны методические рекомендации по обучению теоремам в курсе геометрии общеобразовательной школы; представлен один из вариантов проектирования изучения темы «Теорема синусов и теорема косинусов» на основе технологии системно-деятельностного подхода в школьном курсе геометрии.

Достоверность и обоснованность результатов исследования обеспечивались сочетанием теоретических и практических методов исследования и анализом педагогической практики в общеобразовательной школе.

Личное участие автора в организации и проведении исследования состоит в выявлении методических особенностей обучения теоремам на уроках геометрии в общеобразовательной школе; описании методики обучения теореме о внешнем угле треугольника; проектировании изучения темы «Теорема синусов и теорема косинусов» на основе технологии системно-деятельностного подхода в школьном курсе геометрии.

Апробация и внедрение результатов работы велись в течение всего исследования. Экспериментальная проверка методических рекомендаций была осуществлена в ходе производственной практики (научно-исследовательской работы) и производственной практики (преддипломной практики) на базе кафедры «Высшая математика и математическое образование» ФГБОУ ВО «Тольяттинский государственный университет», в период прохождения производственной практики (педагогической практики) в ГБОУ «Школа № 1360» г. Москва. По теме исследования подготовлена публикация [2].

На защиту выносятся:

- методические рекомендации по обучению теоремам на уроках геометрии в общеобразовательной школе;
- методический проект по изучению темы «Теорема синусов и теорема косинусов» в курсе геометрии на основе системно-деятельностного подхода.

Структура магистерской диссертации. Работа состоит из введения, двух глав и заключения, содержит 46 рисунков, 6 таблиц, список используемой литературы (58 источников). Основной текст работы изложен на 90 страницах.

Глава 1 Теоретические основы обучения теоремам в курсе геометрии общеобразовательной школы

1.1 Понятие теоремы, методы доказательства теорем

Понятие теоремы отражено в научно-методических трудах ряда исследователей, в частности, В.А. Гусева [16], В.А. Далингера [17], Т.А. Ивановой [48], Е.И. Лященко [23], Г.И. Саранцева [41]; [42], Н.Л. Стефановой [45], А.А. Темербековой [47] и др.

В частности, В.А. Гусев перед рассмотрением понятия теоремы приводит понятие логического рассуждения на конкретном примере: «...Геометрические предложения логически связаны между собой. Это означает, что одни предложения можно выводить из других, не пользуясь свойствами фигур, взятыми из опыта, наблюдений, «наглядных соображений». Так, из предложений «Диагонали прямоугольника равны» и «Квадрат есть прямоугольник» логически следует предложение «Диагонали квадрата равны». Для получения этого вывода мы не пользовались никакими «наглядными соображениями». Третье предложение есть логическое следствие первых двух. Оно логически доказано на их основании. Процесс получения логических следствий называют рассуждениями или доказательствами. Такой способ доказательства предложений (с помощью логических выводов) является не отдельным примером в курсе геометрии, а продуманной системой» [16].

Далее автор вводит понятие аксиомы, связанное с понятием теоремы, следующим образом: «Всякая теорема в геометрии доказывается с помощью логических рассуждений, получается как логическое следствие ранее известных предложений. Но доказать логически все предложения геометрии невозможно. Действительно, в противном случае цепочка ссылок на предыдущие предложения была бы бесконечной. Поэтому некоторые

предложения геометрии, принимаемые без логического доказательства, называются аксиомами геометрии» [16].

Таким образом, по мнению В.А. Гусева, геометрия строится на предложениях двух видов:

- «аксиомы – предложения, принимаемые без логического доказательства;
- теоремы – предложения, выводимые как логические следствия из аксиом» [16, С. 275-276].

В.А. Далингер, Е.И. Лященко и А.А. Темербекова придерживается схожего мнения о понятии теоремы, понимая по ней: «предложение (утверждение), истинность которого доказывается» [17, с. 47]; «математическое предложение, истинность которого устанавливается посредством доказательства (рассуждения)» [23; 47].

Т.А. Иванова [48, С. 124-125] отмечает, что «теорема является задачей на доказательство, выражающей некоторое важное отношение, свойство».

Также, А.А. Тембербекова указывает, что теорема должна обладать определенной структурой, в частности в ней должно быть ясно указано: «1) при каких условиях рассматривается в ней тот или иной объект (условие теоремы); 2) что об этом объекте утверждается (заключение теоремы)» [47].

В пособии В.А. Далингера определено, что «любая геометрическая теорема состоит из трех частей: разъяснительная часть; условие теоремы; заключение теоремы» [17].

Рассмотрим различные виды теорем, описанные в методической литературе.

А.А. Тембербекова пишет, что «по критерию особенностей формулирования теоремы можно выделить такие виды теорем, как условная и категорическая, причем всегда можно из одного вида формулирования теоремы перейти к другому» [47].

В пособии В.А. Далингера выделены «В школьном курсе математики для словесной формулировки теоремы используются три формы суждения:

категорическая, условная, разделительная» [17]. Приведем некоторые примеры этих форм суждений, указанные автором:

- «Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме (категорическая форма суждения);
- Если в треугольнике два угла равны, то треугольник равнобедренный (условная форма суждения);
- Плоскость и не лежащая на ней прямая либо не пересекаются, либо пересекаются в одной точке (разделительная форма суждения)» [17, с. 15].

Отмечается, что теоремы категорической и разделительной формы можно переформулировать в условную.

Вместе с этим, в пособии В.А. Далингера приведены три вида теорем, связанные с любой теоремой. Автор описывает все четыре вида теорем:

- « $(\forall x \in M) (A(x) \Rightarrow B(x))$ - прямая теорема;
- $(\forall x \in M) (B(x) \Rightarrow A(x))$ - обратная теорема;
- $(\forall x \in M) (A(x) \Rightarrow B(x))$ - противоположная теорема;
- $(\forall x \in M) (B(x) \Rightarrow A(x))$ - обратная к противоположной (контрапозитивная)» [17, с. 20-21].

Примеры этих четырех видов теорем представлены нами в параграфе 2.2 на теореме о внешнем угле треугольника.

Кроме того, в теории и методике обучения математике известны такие типы теорем, как: теоремы - импликации и теоремы -эквиваленции.

Так, в статье Л.В. Детушевой указано, что «теорема - импликация - это теорема, которую можно сформулировать в виде «если условие теоремы, то заключение теоремы». Примером теоремы данного типа является теорема: «В равностороннем треугольнике все углы равны между собой». Перепишем данную теорему в виде: «Если треугольник равносторонний, то все его углы равны между собой». «Треугольник - равносторонний» - это условие или посылка теоремы, «все его углы равны между собой» - это заключение теоремы. Схематично записывается: $A \Rightarrow B$.

Теорема - эквиваленция - это теорема, которую можно сформулировать в виде «утверждение A справедливо тогда и только тогда, когда истинно утверждение B » или « A если и только если B », « A эквивалентно B », «для A необходимо и достаточно B ». Схематично обозначается: $A \Leftrightarrow B$. Заметим, что теоремы-эквиваленции обычно называют критериями. Утверждение $P \Leftrightarrow Q$, то есть « P если и только если Q », эквивалентно утверждению об одновременной истинности высказываний $P \Rightarrow Q$ и $Q \Rightarrow P$, то есть утверждений «если P , то Q » и «если Q , то P ». Поэтому доказательство теоремы-эквиваленции сводится к доказательству двух теорем-импликаций. Примером теоремы-эквиваленции является утверждение: «В равносторонних треугольниках, и только в них, все углы равны между собой».

Если $A \Rightarrow B$ - теорема-импликация, то теорема $B \Rightarrow A$ называется обратной к ней теоремой, при этом исходную теорему называют еще прямой теоремой.

Отметим, что теорема-эквиваленция $A \Leftrightarrow B$ справедлива тогда и только тогда, когда справедливы и теорема-импликация $A \Rightarrow B$, и обратная к ней теорема $B \Rightarrow A$ » [18].

Рассмотрим вопрос о методах доказательства теорем.

В пособии В.А. Далингера в качестве общих методов доказательства теорем в курсе математики основной и старшей школы выделены: «синтетический и аналитический методы, аналитико-синтетический метод; доказательство методом от противного, доказательство методом перебора, доказательство методом исключения, метод бесконечных исключений, метод математической индукции, метод конструирования; в качестве частных методов - метод геометрических преобразований, векторный метод, координатный метод, алгебраический метод и т.д.» [17].

Отметим, что эффективным при этом является такой путь ознакомления учащихся с содержанием метода доказательства и его правилом-ориентиром, когда на примере доказательства одного-двух утверждений (теорем или задач на доказательство) учащиеся под руководством учителя коллективно

выясняют существенные общие шаги в доведении и формулируют соответствующий алгоритм или правило-ориентир.

Опишем некоторые основные методы доказательств теорем.

Аналитический метод. К математике и методике ее обучения исторически вошли два вида аналитических рассуждений. Первый из них вместе с синтетическим описал Евклид в своих «Началах», хотя они были известны еще раньше Платон (428-348 до н.э.) и Аристотелю (384-322 до н. э.). Второй вид ввел Папп (III в.). Суть анализа Евклида можно объяснить так: рассуждения здесь проводятся от того, что надо доказать.

В пособии В.А. Далингера отмечено, что «при аналитическом доказательстве теоремы $\forall x \in M: A(x) \Rightarrow B(x)$ цепочка силлогизмов строится так, что мысль движется от заключения теоремы к ее условию. Различают два вида аналитического метода: восходящий анализ (анализ Паппа), нисходящий анализ (анализ Евклида)» [17].

Хотя мы и получили очевидную верное неравенство, поскольку правильность последствия еще не гарантирует правильности основания. Действительно, с ложной основы правильными рассуждениями можно прийти к правильному результату. Например, $-a = a$, где $a = 0$ - ложное утверждение. Если возвести обе части этого равенства в квадрат, получим: равенство $a^2 = a^2$. Переход от истинности следствия к истинности основания возможен только тогда, когда основа и следствие равносильны, это взаимно обратные суждения. Именно по этой причине анализ Евклида нельзя считать доказательством, и поэтому его называют иногда «несовершенным анализом».

Синтетический метод. Часто анализ Евклида помогает найти синтетический метод доказательства. В синтетическом методе доказательство рассуждения проводятся от условия или от уже известного утверждения в доказываемых. Если условие доказываемых утверждений (или известное утверждение) обозначить буквой A , вывод - буквой B , то схема аналитического метода будет иметь вид: $A \rightarrow A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow \dots \rightarrow A_n \rightarrow B$.

Недостатком синтетического метода приведения в рассматриваемом

примере является невозможность (если не проведен анализ Евклида) догадаться, с чего надо начинать доказательства. В геометрических доказательствах синтетическим методом трудно догадаться о дополнительном построении, которое часто в процессе доказательства надо выполнить.

Синтетический метод вместе с анализом Евклида особенно удобно использовать в случае доказательства неравенств. Анализ Паппа, в отличие от анализа Евклида, соответствует всем требованиям доказательства, и поэтому его называют «совершенным анализом», или аналитическим методом доказательства. Папп так характеризует аналитический метод доказательства так: «в анализе искомое считается найденным, и определяем, откуда оно содержалось бы и дальше, что предшествовало бы этому последнему, пока не дойдем до чего-нибудь известного - того, что могло бы стать исходным пунктом» [52]. Логической основой аналитического метода, как и синтетического, является аксиома: с правильного утверждения всегда следует правильный результат. Схема рассуждений будет при этом такой вид: $B \leftarrow A_n \leftarrow \dots \leftarrow A_2 \leftarrow A_1 \leftarrow A$.

В школьной практике учителя и некоторые авторы методических пособий часто проводят доказательство утверждения аналитическим методом, затем выполняют обратный путь рассуждений, то есть проводят доказательство утверждения синтетическим методом, хотя в нем нет необходимости. При этом такое доказательство безосновательно называют аналитико-синтетическим методом.

Аналитико-синтетический метод. Этот метод заключается в том, что поиск доказательства начинают аналитическим методом, но рассуждения не доводят до конца, а останавливаясь на определенном этапе, начинают рассуждать в обратном направлении, то есть по развертыванию условия. Итак, далее доказательство выполняют синтетическим методом. Движение с противоположных концов в общем случае проводится до тех пор, пока рассуждения не встретятся на совместном утверждении или на противоречивых выводах. Этот метод особенно удобен тогда, когда

осуществляются преобразования только условия или только вывод теоремы (задачи) не приводит к цели.

Метод от противного. Для противоположных утверждения подтверждаются законом исключенного третьего: из двух противоположных утверждений одно всегда правильное, второе - нет, а третьего быть не может. Поэтому вместо непосредственного доказательства данного утверждения можно показать, что противоположное ему утверждение неверно. С этого вытекать справедливость данного. При этом относительно противоположного утверждения проводят анализ Евклида, из него выводят последствия. Некоторые авторы метод от противного еще называют косвенным, сведением к абсурду. Доказывая методом от противного утверждение: «Если P , то Q » (1) мы сначала заменяем его новым утверждением, обратным обратному: «Если Q , то P » (2) и доказываем это новое утверждение, потому, что эти два утверждения всегда равносильны, из этого доказательства следует также справедливость данного утверждения (1). Иногда из предположения выводят следствие, не противоречащее этому самому предположению или некоторому уже обоснованному утверждению или аксиоме.

В пособии Н.Л. Стефановой, Н.С. Подходовой, В.В. Орлова и др. приводится памятка по доказательству методом от противного:

«1. Делаем предположение: строим отрицание того, что требуется доказать.

2. Присоединяем к предположению условие и делаем выводы.

3. Ищем противоречие с известным утверждением, условием задачи, ... (два высказывания, которые являются отрицаниями друг друга).

4. Делаем вывод, что наше предположение не верно, а верно его отрицание, то есть верно то, что требуется доказать» [25, с. 70].

Метод геометрических преобразований. Изучив центральную и осевую симметрии уже можно составить с учащимися правило - ориентир метода движения, которое в дальнейшем изучении учебного материала полностью подтвердит себя как правило - ориентир метода геометрических

преобразований:

- провести синтетический анализ доказательства теоремы (задачи);
- определить, какие объекты или части объектов, рассматриваемых в доказательстве, могли образоваться с помощью метода геометрических преобразований;
- применить основные свойства геометрических преобразований;
- сделать вывод.

Координатный метод. Метод в курсе геометрии начинает применяться в 8 классе. Его преимущество перед синтетическим методом, при котором непосредственно рассматриваются фигуры и каждая задача требует особого подхода, в алгоритмичности. Действительно, с помощью методов координат какая-либо задача сводится к алгебраической, алгебраические задачи легче алгоритмизируются. Метод координат упрощает решение многих геометрических задач, доказательства теорем, дает возможность упростить изложение теоретического материала, касающегося векторов, тригонометрических функций.

В классах с углубленным изучением математики, на занятиях математического кружка, в обычных классах целесообразно ознакомить учащихся с решениями геометрических задач (доказательством теорем) методом координат. В связи с этим следует на примерах решить по крайней мере две задачи, выделить правило - ориентир метода координат:

- выделить условия и требования задачи (теоремы); выбрать систему координат, относительно которой перевести требования на язык координат и составить равенства с переменными;
- используя условия задачи (теоремы), преобразовать равенства с переменными и прийти к результату на языке координат;
- полученный результат перевести на язык геометрии.

Векторный метод. С векторным методом доказательства геометрических утверждений и соответствующим правилом - ориентиром целесообразно познакомить учащихся на примерах доказательства двух

утверждений, первое из которых ученики умеют доказывать и без применения векторов. Вследствие выделения существенного общего в обоих доказательствах ученики коллективно под руководством учителя могут прийти к правилу - ориентиру векторного метода доказательства утверждений.

- выделить в формулировке теоремы (задачи) условие и требования, выполнить рисунок; сформулировать требования на языке векторов и, учитывая их, обозначить векторы на рисунке;
- учитывая условия и требования, составить вспомогательные векторные равенства. Для этого выразить, если это нужно, векторы в виде суммы или разности других векторов, или в виде произведения вектора на число. Преобразовать полученные равенства и прийти к нужной записи;
- переложить полученную равенство на язык геометрии.

Метод полной индукции. В пособии Н.Л. Стефановой, Н.С. Подходовой, В.В. Орлова и др. указано, что данный метод используется в школьном курсе геометрии (например, по Л.С. Атанасян и др.) при доказательстве теорем: «о признаке равенства треугольников по трем сторонам и об измерении величины угла, вписанного в окружность» [25, с. 70-71].

Таким образом, в соответствии с позицией В.А. Далингера [17], под теоремой в данной работе мы будем понимать «математическое предложение, истинность которого устанавливается посредством доказательства»; для словесной формулировки теоремы использовать три формы суждения: «категорическую, условную, разделительную»; в качестве общих методов доказательства теорем применять: «синтетический и аналитический методы, аналитико-синтетический метод; доказательство методом от противного, доказательство методом перебора, доказательство методом исключения, метод бесконечных исключений, метод математической индукции, метод конструирования; в качестве частных методов - метод геометрических преобразований, векторный метод, координатный метод, алгебраический метод».

1.2 Различные подходы к обучению теоремам в школьном курсе геометрии

Согласно Н.Л. Стефановой [45], работа с теоремой должна начинаться с проведения учителем логико-математического анализа теоремы, а именно – «установления формы формулировки теоремы; перевода формулировки, если необходимо, в имплицативную форму; записи структуры, то есть вычленения разъяснительной части, условия, заключения с выделением простых высказываний и содержания структурных элементов; определения ее вида (простая или сложная); формулирования утверждений обратного данному, противоположного данному и обратного противоположному (определения их истинности или ложности)».

В пособии Е.И. Лященко идет речь о так называемом логическом анализе теорем - необходимом учителю при обучении теоремам в школьном курсе математики и дающим ему возможность выделять единые подходы в методике обучения разных по содержанию, но одинаковых по логической структуре теорем. В ходе данного анализа учителю необходимо также «раскрыть структуру теоремы (разъяснительную часть, условие и заключение); необходимые и достаточные условия для получения заключения теоремы; условия получения обратной и противоположной теорем; логическую связь между прямой, обратной и противоположной теоремами; структуру теоремы существования. Термины «формула», «теорема», «признак», «свойство», «следствие», «лемма» выражают с логической точки зрения один и тот же смысл – истинное утверждение (в силу его доказуемости) и выражающее то или иное свойство объекта (геометрического, арифметического или алгебраического) или связь между различными свойствами» [23, с. 107].

Автором подчеркивается, что при логическом анализе также важен анализ методов доказательства математических утверждений, в результате

которого необходимо выяснить, «на чем основано доказательство; когда при доказательстве используется цепочка силлогизмов, когда используется метод от противного, когда метод альтернатив, когда метод математической индукции. ... Главным в изучении теорем является не механическое заучивание их формулировок и доказательств, а открытие самими учащимися содержания теоремы, способа доказательства, умение применения теоремы в различных ситуациях, установление связей теоремы с другими теоремами» [23].

В.А. Гусевым описаны требования к проведению доказательств математических утверждений:

- «необходима ясность в том, что дано и что требуется доказать;
- наличие наглядного чертежа, сопровождающего весь ход доказательства. При этом важно сопровождение в динамике, а не полная картина доказательства на одном чертеже - одновременно сразу все;
- постоянное формирование потребности у учащихся в проведении доказательств, общая стратегия доказательства и любого его этапа должны быть смотивированы, обсуждены, самостоятельно осмыслены, только после этого есть смысл в проведении этих доказательств – это одно из главнейших условий;
- нумерация всех базовых этапов доказательства, при этом, во-первых, их удобно видеть, а во-вторых, на них удобно ссылаться;
- очень важно, что в конце каждого пункта доказательства в скобках даны основания сделанных выводов. К ним относятся: определения, доказанные ранее теоремы, ссылки на предыдущие этапы доказательства» [16, с. 284-285].

А.А. Темербекова в качестве требований к проведению доказательств теорем выделяет:

«1. Применение ряда приемов с целью закрепления доказательства теоремы:

- выделение плана доказательства теоремы;

- выделение всех аргументов, используемых в доказательстве теоремы;
- заполнение пропусков в доказательстве, предложенном учителем;
- исправление ошибок в этом доказательстве и др.

2. Задания на закрепление доказательства теоремы могут предлагаться учащимся как сразу после доказательства теоремы, так и в виде домашнего задания» [47].

Вместе с этим, в методике обучения теоремам имеют место два подхода, отличающиеся познавательной активностью обучающихся.

Первый подход (Ю.М. Колягин [29] и др.), в котором активная роль отводится учителю. По мнению Н.В. Садовникова, О.Г. Шакирзяновой [40], этот подход целесообразен и полезен при изучении или простых, очевидных, хорошо знакомых или сложных и абстрактных утверждений, также при изучении геометрии методом укрупнения дидактических единиц. При организации работы с теоремой формулирует и доказывает теорему учитель, учащиеся запоминают ее и применяют при решении задач.

При втором подходе (О.Б. Епишева [19], Т.А. Иванова [48], Г.И. Саранцев [41] и др.), главенствующим в современном образовании, учитываются требования к активизации познавательной деятельности школьников, интереса к обучению, как одного из условий организации обучения при системно-деятельностном подходе. Учащиеся под руководством учителя открывают содержание теоремы, формулируют ее (в форме гипотезы), составляют план доказательства, вместе с ним доказывают, формулируют выводы. Данный подход требует больших затрат времени и усилий; при организации работы над теоремой формируются познавательные, регулятивные и коммуникативные универсальные учебные действия. От учителя требуется знание как методов активизации познавательной деятельности, так и эвристических приемов работы над теоремой и умение осуществлять обучения доказательству.

В соответствии со вторым подходом к обучению теоремам, с точки зрения Т.А. Ивановой необходимо придерживаться следующих аспектов:

«1) так как теорема – это новый материал, подлежащий изучению, то при ее изучении (как и в изучении любого математического факта) можно выделить следующие этапы:

- подготовка к изучению нового (пропедевтика);
- мотивация изучения нового материала;
- введение нового факта (желательно через самостоятельное открытие);
- организация его восприятия, понимания;
- закрепление;
- применение;

2) так как теорема - это задача на доказательство, то на методику ее изучения распространяются рекомендации, относящиеся к различным этапам решения задач: обучение поиску закономерности, идеи доказательства, обучение анализу условия и исследованию полученного решения» [48, с. 124-125].

Кроме того, при обучении теоремам Г.И. Саранцевым выделяются этапы: «1) мотивация; 2) ознакомление с теоремой; 3) формулировка теоремы; 4) усвоение содержания теоремы; 5) запоминание теоремы; 6) ознакомление со способом доказательства; 7) доказательство; 8) применение теоремы; 9) установление связей теоремы с изученными ранее» [41].

Рассмотрим данные этапы более подробно.

Мотивация введения новой теоремы. Приемами работы на этом этапе могут быть: обращение к субъектному опыту учащихся, постановка проблемы, которая решается с помощью новой теоремы, решение проблемной задачи с затруднением и необходимостью введения новой теоремы, анализ и сравнение результатов лабораторных, практических работ, рассказы учителя об истории открытия теоремы, об интересных фактах о теореме, анализ ситуаций окружающей действительности, кинофильмов, а также повторение понятий и теорем, на которые опирается доказательство новой теоремы. Результатом

работы на этом этапе является возникшая у школьников потребность в необходимости введения новой теоремы и ее математическом обосновании.

Ознакомление с фактом, отраженным в теореме. На уроке математики этот этап чаще включает упражнения: на измерение величин, на оперирование моделями фигур, с практическим содержанием, наглядное моделирование, коллективное анализирующее наблюдение нового факта (пока непонятого учениками), являющегося содержанием новой теоремы. Также на этом этапе учитель может предложить упражнения: на применение ранее изученных теорем и понятий, но с ситуацией затруднения, выводящей на изучение новой теоремы. Результатом работы на этом этапе является выявленная закономерность о свойствах изучаемой фигуры, сформулированная как гипотеза.

Формулировка теоремы и выяснение смысла каждого слова в ней. Обязательное условие этого этапа - дать возможность учащимся самостоятельно сформулировать теорему в виде гипотезы, оперируя понятными и известными ученикам понятиями, формулировка утверждения теоремы с помощью разных понятий.

Усвоение содержания теоремы. Приемы работы на этом этапе: упражнения на: выделение условия и заключения теоремы, формулировку теоремы в имплицитивной, категоричной формах; иллюстрацию теоремы.

Запоминание формулировки теоремы. Для ее запоминания полезны приемы: простое воспроизведение формулировки теоремы, формулировка теоремы другими словами, составление трех утверждений к теореме (обратной, противоположной, обратной к противоположной). Результатом работы на этом этапе является понимание логических связей в теореме, области ее применения, сущности теоремы (признак, свойство).

Открытие или ознакомление со способом доказательства. Полезны на этом этапе также организационные приемы: упражнения на ознакомление с методом доказательства, краткий рассказ доказательства с вопросами к классу, самостоятельное изучение теоремы учащимися по учебнику и

воспроизведение у доски, подготовка вопросов по ходу доказательства. Результатом работы на этом этапе является составленный план, понимание сущности доказательства, полноты аргументации, умение оперировать дедуктивным методом доказательства. Самым распространенным является метод восходящего и нисходящего анализа.

Доказательство теоремы. Как правило, оно «проводится с использованием анализа, оформляется в тетради и на доске по пунктам, отражая все последующие шаги доказательства, или с выделением двух колонок: утверждения и обоснования. Для усвоения доказательства применяются приемы: повторение доказательства теоремы с опорой на чертеж, по измененному чертежу; доказательство с восстановлением пропусков, по деформированному тексту, восстановление пропусков в доказательстве; перечисление всех понятий, теорем, входящих в доказательство и связей между ними; изучение доказательства в домашней работе; составление плана доказательства, а также выполнение упражнений, моделирующих способ доказательства, на проверку правильности использования символики, на выделение в доказательствах недостающих утверждений и обоснований. Результатом работы на этом этапе является владение дедуктивным методом доказательств, умение выделять идею, анализировать, самостоятельно проводить доказательство» [41].

Применение (усвоение) теоремы предполагает умение решать задачи с ее помощью. «В учебниках и дидактических материалах к учебникам предлагаются серии разноуровневых задач на формирование опорных, элементарных действий, на использование аналогии, обобщения и формирование других умений, связанных с усвоением теорем» [41]. Система задач включает следующие виды (в логике закономерности усвоения нового):

- задачи на прямое применение (одно-, двухшаговое) теоремы. Это задачи с аналогичным теореме содержанием, но на другом чертеже, с другими обозначениями, могут быть с лишними данными. Задачи этого

вида предлагаются с целью запоминания формулировки теоремы, видения стандартных ситуаций, в которых теорема применима;

– задачи на применение теоремы в знакомой (известной) ситуации. К ним относятся задачи: на доказательство с применением теоремы, на вычисление с многошаговым решением, на объяснение фактов. Такие задачи решаются с целью формирования у школьников умения видеть объекты теоремы на чертеже, умения обосновать, выделить в элементах геометрических фигур объекты изученной теоремы;

– задачи на применение теоремы в комбинированной ситуации. К ним относятся задачи: на преобразования условия, требования, поиска противоречивых данных, умения связать новую теорему с ранее изученными. В ходе их решения у школьников формируется понимание логической структуры, связей внутри теоремы, области применимости данной теоремы;

– задачи на применение в новой (нестандартной) ситуации. К таким задачам относятся: нестандартные задачи, задачи практического содержания, задачи с недостающими данными, обобщенного характера. С помощью таких задач формируется обобщенное понимание теоремы, ее структуры, логических связей теоремы внутри одной темы или нескольких тем;

– исследовательские задачи направлены на формирование умения видеть область применимости теоремы, объяснять факты, связанные с жизнью, с помощью данной теоремы.

Установление связей теоремы с ранее изученными теоремами проводится через упражнения на выделение в доказательствах недостающих утверждений и обоснований, на систематизацию теорем и т.д.

Кроме того, ряд авторов диссертационных исследований описывают некоторые методические аспекты обучения теоремам:

– формирование геометрических понятий в общеобразовательной школе с использованием компьютера (Л.А. Страбыкина, 2002 г.).

Автором «разработана электронная форма для записи доказательства теорем и специальная программа «Конструктор доказательств теорем». Разработаны методические рекомендации по формированию понятий с помощью компьютера на этапе применения понятия. Поскольку порядок расположения утверждений в электронной форме не имеет значения, ученик при доказательстве теорем может использовать как синтетический (прямой), так и аналитический (обратный) методы доказательств, а так же их сочетания. В качестве одного из основных способов доказательства теорем предполагается использовать подведение под понятие» [46];

– «методика формирования системы базовых знаний по геометрии с использованием компьютерных технологий» [1] (Г.Л. Абдулгалимов, 2004 г.);

– «методика обучения учащихся основной школы доказательству теорем при изучении геометрии с использованием программы GEOGEBRA» [53] (Т.С. Ширикова, 2014 г.).

Отметим, что выделенные нами выше этапы работы над теоремой соответствуют деятельностному подходу в обучении, особенностям математического знания и его усвоения.

Рассмотрим перечисленные этапы при изучении теоремы о внешнем угле треугольника.

Теорема о внешнем угле треугольника представлена во всех линиях УМК 7 класса общеобразовательной школы; является следствием теоремы о сумме углов треугольника; рассматривается после изучения вертикальных и смежных углов; признаков равенства треугольников. Формулировка теоремы: «Внешний угол треугольника равен сумме двух углов треугольника, не смежных с ним» [4, с. 70].

Логический анализ теоремы показывает, что она представлена в категоричной форме суждения.

Для работы на уроке будет необходима переформулировка теоремы в условной форме: «Если угол треугольника является внешним, то он равен сумме двух его углов, не смежных с ним».

Структура теоремы: разъяснительная часть - множество углов треугольника (внутренних и внешних); условие - угол треугольника является внешним; заключение - внешний угол треугольника равен сумме двух его углов, не смежных с ним.

Приведем утверждения, которые можно сформулировать для данной теоремы:

- «Если угол треугольника равен сумме двух других углов, не смежных с ним, то этот угол внешний» (обратное утверждение; ложное);
- «Если угол треугольника не внешний, то он не равен сумме двух его углов, не смежных с ним» (противоположное утверждение; ложное);
- «Если угол треугольника не равен сумме двух других углов, не смежных с ним, то этот угол не внешний» (противоположное к обратному утверждение; верное).

В формулировке теоремы рассматриваются понятия: внешний угол; треугольник; смежный угол; внутренний угол треугольника; сумма углов; отношения «быть равным»; «быть смежным» (в неявном виде, как видовое отличие внешнего угла), «быть не смежным».

На теореме о внешнем угле треугольника основано доказательство теоремы о соотношениях между сторонами и углами треугольника.

Анализ доказательства теоремы показывает, что для обучающихся 7 класса приводится синтетический метод - метод преобразования условия теоремы.

Теоретическую базу, на которую опирается доказательство теоремы составляют понятия внешнего угла, смежного угла, свойство смежных углов, теорема о сумме углов треугольника.

Опишем этапы работы над теоремой и приемы организации учебной деятельности обучающихся.

Этап 1. Мотивация и подготовка к изучению теоремы.

Задания на актуализацию опорных знаний

В качестве заданий на актуализацию опорных знаний могут быть предложены задания на повторение теоремы о сумме углов треугольника; понятия смежных углов; обобщение понятия внешнего угла треугольника.

Повторение теоремы о сумме углов треугольника

- Сформулируйте теорему о сумме углов треугольника.
- Найдите неизвестный угол треугольника, если два его угла равны 30° и 70° .
- Найдите третий угол треугольника по данным чертежа (рисунок 1).

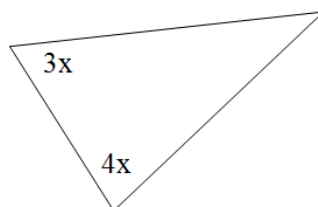


Рисунок 1 – К повторению теоремы о сумме углов треугольника.

- Найдите угол между боковыми сторонами равнобедренного треугольника, если угол при основании равен 36° .
- Сделайте вывод. Как найти третий угол треугольника, если два угла известны?

Повторение понятий смежных и несмежных углов

- Какие углы называются смежными?
- Найдите пары смежных углов на чертеже (рисунок 2).

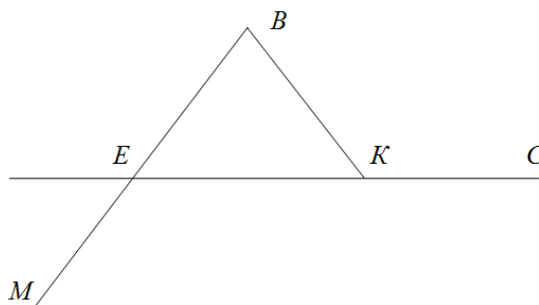
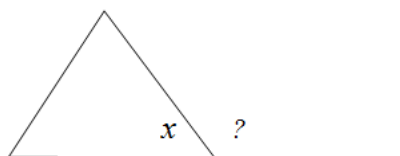
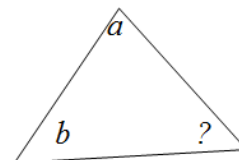


Рисунок 2 – К повторению понятий смежных и несмежных углов.

- С какими углами не смежны углы ЕКВ и МКС?
- Каким свойством обладают смежные углы?
- Найдите углы, смежные с углами в 260, 480, 1230, 5у.
- Сделайте вывод. Как найти величину угла, смежного с данным известным углом.
- Обобщение. Чем похожи решения этих двух задач (рисунок 3)?



Как найти угол, смежный
с данным углом?



Как найти неизвестный угол
треугольника, если два его угла
известны?

Рисунок 3 – К обобщению рассматриваемых задач

Обобщение понятия внешнего угла треугольника

- Вставьте пропущенные слова: Внешним углом треугольника приданной вершине называется с углом треугольника при вершине.
- На каких чертежах построены смежные углы?
- Назовите пары (внутренний и смежный угол) по чертежу на рис.3.
- Постройте предложения вида: «Если внешний угол, то внутренний» используя названия видов углов (острый, тупой, прямой).

Задание на мотивацию к изучению теоремы

Для организации этапа мотивации к изучению теоремы нами предлагается практическая работа.

Учитель дает школьникам чертежи с разными треугольниками (рисунок 4), но с одинаковыми обозначениями углов, план работы. Ребята измеряют углы в парах, наносят данные в таблицу (таблица 1) на доске.

Таблица 1 - Рабочая таблица для сравнения углов

№ треугольника	Величина $\angle MBC$	Величины углов, несмежных с $\angle MBC$	Результат сравнения $\angle MBC$ и суммы углов, несмежных с ним

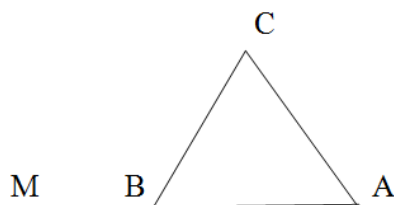


Рисунок 4 – К Задаче на этапе мотивации к изучению теоремы

План практической работы:

- измерьте с помощью транспортира $\angle MBC$. Запишите $\angle MBC$;
- отметьте углы $\triangle ABC$, не смежные с $\angle MBC$;
- измерьте эти углы ($\angle A$ и $\angle C$);
- найдите сумму углов, не смежных с $\angle MBC$;
- сравните $\angle MBC$ и сумму углов, не смежных с ним.

Этап 2. Ознакомление с теоремой. Этап 3. Формулировка теоремы.

Этап 4. Усвоение содержания теоремы. Этап 5. Запоминание теоремы.

Изучение содержания и структуры теоремы

- Наблюдение за результатами практической работы.

Беседа. Какие получились ответы? Какие были треугольники? Почему для разных треугольников получились одинаковые (исключая маленькую погрешность) ответы?

- Выдвижение гипотезы $\angle MBC = \angle A + \angle C$.

- Формулировка теоремы в виде гипотезы: обобщение на основе неполной индукции.

Для наших двенадцати треугольников внешний угол равен сумме двух других углов треугольника, не смежных с ним.

- На каком множестве мы нашли закономерность? (На множестве внешних углов треугольников.)
- Что известно? Какое условие в нашем предположении? (Угол треугольника является внешним).
- Какое заключение? Какое утверждение нужно доказать? (Внешний угол равен сумме двух углов треугольника, не смежных с ним).

4. Предположение о необходимости проверки результата с помощью доказательства.

Утверждение выполняется для наблюдаемых внешних углов двенадцати треугольников, мы не можем проверить соотношение между внешним углом и суммой двух внутренних углов всех треугольников, поэтому необходимо доказательство.

5. Вывод.

Нужно доказать утверждение: «Если угол треугольника является внешним, то он равен сумме двух его углов, не смежных с ним».

Этап 6. Ознакомление со способом доказательства.

Организация поиска доказательства теоремы.

Приемы, с помощью которых обучающиеся приходят к доказательству теоремы и обучающий диалог по чертежу (рисунок 5) представлены ниже (таблица 2).

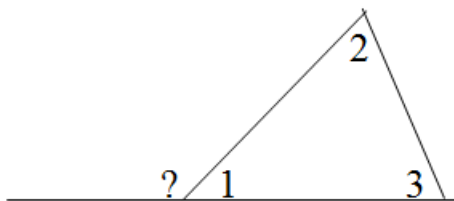


Рисунок 5 – К организации поиска доказательства теоремы

Таблица 2 - Приемы, с помощью которых обучающиеся приходят к доказательству теоремы

Приемы	Обучающий диалог
Абстрагирование, выделение существенного признака в задаче практической работы.	Обозначим углы числами. - Найдите величину неизвестного угла двумя способами. - $\angle 4 = 180^\circ - (\angle 2 + \angle 3)$. Обоснуйте: - $\angle 4 = 180^\circ - \angle 1$. Обоснуйте.
Составление плана доказательства.	- Сформулируйте полученные равенства, называя вместо символов углы треугольника - внутренний, внешний. - Составьте план доказательства: а) выразить внешний угол как разность 180° и смежного с ним угла; б) выразить сумму двух внутренних углов треугольника как разность 180° и третьего угла треугольника; в) сравнить полученные равенства; г) сделать вывод.

Этап 7. Доказательство теоремы.

Учебный диалог. Запись на доске и в тетрадях (рисунок 6).

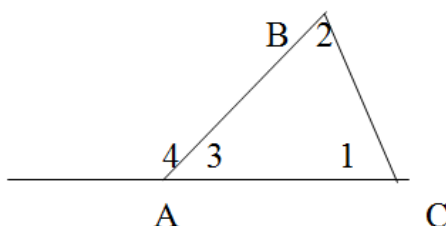


Рисунок 6 – К доказательству теоремы о внешнем угле треугольника

Дано: $\triangle ABC$ – треугольник; $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$ – внутренние углы $\triangle ABC$; $\angle 4$ – внешний угол $\triangle ABC$, смежный с $\angle 3$.

Доказать: $\angle 4 = \angle 1 + \angle 2$.

Доказательство.

- $\angle 4 = 180^\circ - \angle 3$, т.к. $\angle 4$ и $\angle 3$ – смежные по условию.
- $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ - \angle 3$, т.к. сумма внутренних углов $\triangle ABC = 180^\circ$.
- Правые части равенств (1) и (2) равны, следовательно, равны и левые части, т.е. $\angle 4 = \angle 1 + \angle 2$. Что и требовалось доказать.

Второй способ оформления доказательства представлен в таблице 3.

Таблица 3 – Вариант оформления доказательства теоремы

Утверждение	Обоснование
1) $\angle 4 = 180^\circ - \angle 3$,	По свойству смежных углов.
2) $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$	Свойство суммы внутренних углов треугольника .
3) $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ - \angle 3$	По правилу нахождения неизвестного слагаемого в сумме.
4) $\angle 4 = \angle 1 + \angle 2$.	По доказанному в п.1 и п.3.
Что и требовалось доказать.	

Доказательство теоремы достаточно простое, понятное, поэтому можно предложить этот способ записи доказательства на этапе закрепления доказательства с деформированным текстом или с пропусками обоснований или логических шагов доказательства. Для более подготовленных учеников возможно доказательство на другом чертеже.

Для запоминания формулировки теоремы школьникам могут быть предложены задания:

Задание 1. Выберите из следующих предложений те, которые соответствуют теореме о внешнем угле треугольника:

- «Внешний угол треугольника равен сумме его двух внутренних углов».
- «Чтобы найти внешний угол треугольника, достаточно найти сумму двух внутренних углов этого треугольника, не смежных с ним».
- «Сумма двух внутренних углов треугольника равна внешнему углу, смежному с третьим внутренним углом этого треугольника».
- «Любой внешний угол равноугольного треугольника равен 120° ».

Задание 2. Теорему о внешнем угле зашифровали знаками ®, £, з, ¥. Получились равенства: А. $\textcircled{R} = \textcircled{L} + \textcircled{z}$. Каким знаком обозначен внутренний угол треугольника, смежный с внешним углом? Ответ поясните. Б. $\textcircled{R} = 1800 - (1800 - (\textcircled{L} + \textcircled{z}))$. Какими знаками обозначены углы внутренние углы, не смежные с внешним углом треугольника.

Для закрепления доказательства теоремы школьникам могут быть предложены следующие задания:

- Докажите теорему по чертежам с другими обозначениями углов (рисунок 7).

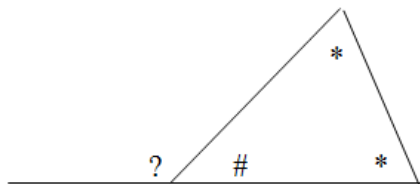


Рисунок 7 – К закреплению доказательства теоремы

- Докажите теорему по другим чертежам (рисунки 8-9):

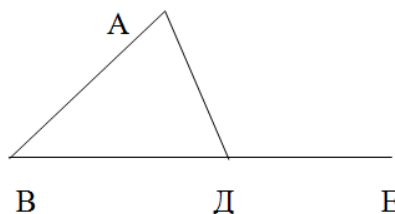


Рисунок 8 – Вариант 1 для доказательства теоремы о внешнем угле треугольника

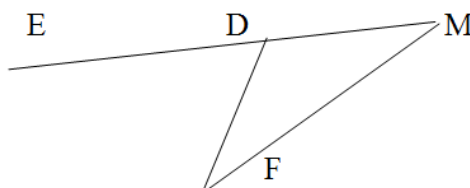


Рисунок 9 – Вариант 2 для доказательства теоремы о внешнем угле треугольника

- Расставьте стрелки логического следования в схеме доказательства теоремы по чертежу к нему (рисунок 10).
- Пронумеруйте последовательность доказательства по схеме.

Углы смежные

$$\angle 4 = 180^\circ - \angle 3$$

$$\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ - \angle 3$$

$$\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ - \angle 3$$

Сумма углов
треугольника равна 180°

$$\angle 4 = \angle 1 + \angle 2.$$

Рисунок 10 – Задание на схему доказательства к данной теореме

Этап 8. Применение теоремы при решении задач.

Задачи на применение теоремы:

Задача 1. Треугольник ABC – равнобедренный и угол C = 40° .

Найдите:

а) угол ABD;

б) все углы при вершине B треугольника CAB (рисунок 11).

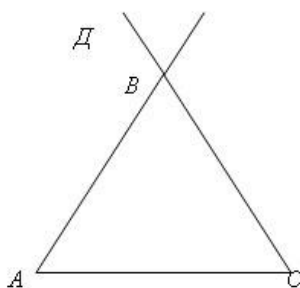


Рисунок 11 – К задаче 1

Задача 2. Найдите внутренние и внешний угол $\angle CDF$ треугольника KCD по чертежу, если известно, что треугольник KCD - равнобедренный (рисунок 12).

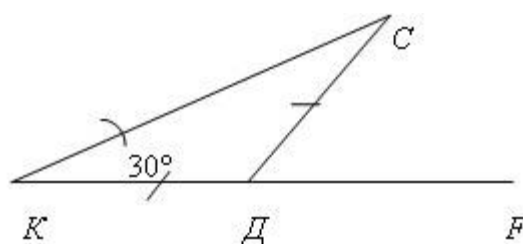


Рисунок 12 – К задаче 2

Задача 3. Известно, что треугольник ABC – равнобедренный. Один из его углов равен 25° . Найдите углы, обозначенные на чертеже (рисунок 13).

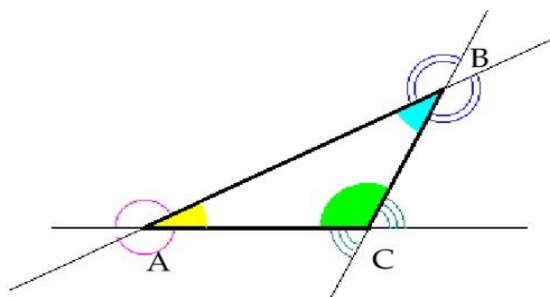


Рисунок 13 – К задаче 3

Этап 9. Установление связей данной теоремы с изученными темами

На этом этапе работы с теоремой учащиеся могут решать задачи на: нахождение внешнего угла в равнобедренном треугольнике; применение свойства внешнего угла треугольника для решения задач на доказательство; вычисление углов равнобедренного треугольника и угла, образованного биссектрисой треугольника; применение теоремы о сумме углов треугольника, свойств и признаков равнобедренного треугольника. Также им можно предложить задачи повышенной сложности по данной теме.

Задача 1. Углы треугольника относятся как $2 : 3 : 4$. Найдите отношение внешних углов треугольника [4].

Задача 2. Угол треугольника равен сумме двух других его углов. Докажите, что треугольник прямоугольный [4].

Задача 3. На плоскости расположены четыре прямые (рисунок 14). Известны углы между некоторыми из них: $\alpha = 110^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $\gamma = 80^\circ$. Найдите углы между остальными парами прямых [4].

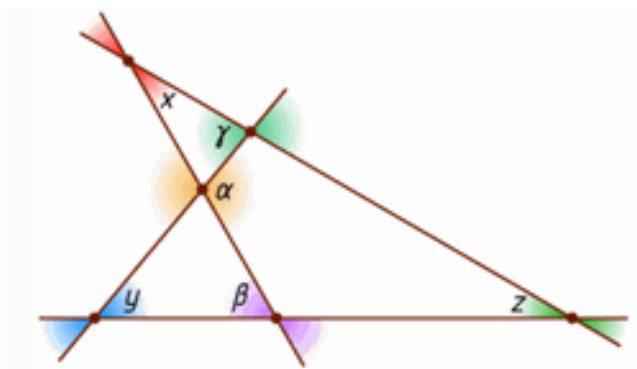


Рисунок 14 – К задаче 3 на установление связей теоремы о внешнем угле треугольника с другими теоремами

Задача 4. ABC – равнобедренный треугольник с основанием AC , CD – биссектриса угла C , $\angle ADC = 150^\circ$. Найдите $\angle B$ [4].

Задача 5. Точки M и N лежат на стороне AC треугольника ABC , причём $\angle ABM = \angle C$ и $\angle CBN = \angle A$. Докажите, что треугольник BMN равнобедренный [4].

Задача 6. Прямая, проходящая через вершину A треугольника ABC , пересекает сторону BC в точке M . При этом $BM = AB$, $\angle BAM = 35^\circ$, $\angle CAM = 15^\circ$. Найдите углы треугольника ABC [4].

Задача 7. Прямая, проходящая через вершину A треугольника ABC , пересекает сторону BC в точке M , причём $BM = AB$ [4]. Найдите разность углов BAM и CAM , если $\angle C = 25^\circ$.

Задача 8. BK – биссектриса треугольника ABC , $\angle AKB : \angle SKB = 4 : 5$. Найдите разность углов A и C треугольника ABC [4].

Таким образом, «теоремы и их доказательства развивают пространственные представления школьников и их воображение, учат различным методам доказательства, способствуют осознанию идеи аксиоматического построения математики. Доказательство теорем позволяет учащимся усвоить эвристические приемы умственной деятельности, формируют положительные качества их личности, в частности, обоснованность суждений, краткость, четкость выражения мысли» [43].

Выводы по первой главе

Раскрыто понятие теоремы, методы доказательства теорем. Определено, что под теоремой мы понимаем математическое предложение, истинность которого устанавливается посредством доказательства; для словесной формулировки теоремы используем три формы суждения: категорическую, условную, разделительную. Теоремы и их доказательства учат различным методам доказательства, способствуют осознанию идеи аксиоматического построения математики.

Выявлены различные подходы к обучению теоремам в школьном курсе геометрии:

- первый подход, в котором активная роль отводится учителю. При организации работы с теоремой формулирует и доказывает теорему учитель, учащиеся запоминают ее и применяют при решении задач;
- второй подход, главенствующий в современном образовании, где учитываются требования к активизации познавательной деятельности школьников, интереса к обучению, как одного из условий организации обучения в системно-деятельностном подходе. Учащиеся под руководством учителя открывают содержание теоремы, формулируют ее (в форме гипотезы), составляют план доказательства, вместе доказывают, формулируют выводы. Данный подход требует больших затрат времени и усилий; при организации работы над теоремой у обучающихся формируются познавательные, регулятивные и коммуникативные универсальные учебные действия.

Глава 2 Методические основы обучения теоремам в курсе геометрии общеобразовательной школы

2.1 Методические рекомендации по обучению теоремам в курсе геометрии общеобразовательной школы

Отметим, что на основе программного материала [36] к планируемым результатам освоения геометрии в 7-9 классах в отношении обучения теоремам относятся следующие требования к умениям обучающихся: на базовом уровне - «умение выбирать подходящий изученный метод для решения задачи, приводить примеры математических закономерностей в природе и жизни; оперировать понятиями: теорема, доказательство» [34]; на углубленном уровне - «умение свободно оперировать понятиями: теорема, доказательство, равносильные формулировки утверждений, обратное и противоположное утверждение; выбирать подходящий метод для решения задачи, приводить примеры математических закономерностей в природе и общественной жизни; исследовать возможность применения теорем для решения задач; выводить формулы и приводить доказательства, в том числе методом «от противного» и методом математической индукции» [34].

Выпускник общеобразовательной школы после окончания 11 класса «на базовом уровне получит возможность научиться: доказывать геометрические утверждения; использовать основные методы доказательства, проводить доказательство и выполнять опровержение; на углубленном уровне - применять при решении задач и доказательстве теорем векторный метод и метод координат; уметь формулировать и доказывать геометрические утверждения» [33].

Вместе с этим, отметим, что теоретический материал по обучению геометрии в колледжах и вузах, взаимосвязанный с материалом, изученным школьниками в общеобразовательной школе, в том числе по обучению различным теоремам, описан в зарубежной литературе [54]; [56]-[58].

В данном параграфе рассмотрим методические рекомендации по обучению теоремам в курсе школьном курсе.

Ученые и практики развитых стран в начале 90-х годов XX века обратились к вопросам компетентностного подхода в образовании, который активно исследуется в Европе на основе широкого международного сотрудничества. Тенденцией развития образования в мире является внедрение в педагогическую практику зарубежных стран компетентно-ориентированного образования, способствующего приобретению учащимися компетенций, необходимых в жизни. Компетентный подход к обучению включает, кроме знаний, умений и навыков, гуманистические, культурные, эстетические и мотивационные компоненты.

Понятие математической компетентности связано с практико-ориентированным подходом и вопросами математической (функциональной) грамотности.

Установлено, что «необычная формулировка практико-ориентированных задач позволяет повышать познавательный интерес учащихся, способствует развитию любознательности, творческой активности. Однако, как показывает анализ школьных учебников математики, практико-ориентированные задачи крайне редко включаются в их содержание. Все сказанное обуславливает необходимость использования таких задач в обучении математике, в частности, при изучении теорем школьного курса геометрии» [43].

Изучение теорем, согласно деятельностной концепции, предложенной Г.И. Саранцевым, должно проходить ряд этапов: «мотивация изучения теоремы; ознакомление с теоремой; усвоение содержания теоремы; запоминание формулировки теоремы; ознакомление со способом доказательства; доказательство теоремы; применение теоремы; установление связей теоремы с теоремами, изученными ранее» [41, с. 102].

В статье Ж.А. Сарвановой и Т.А. Куприяновой описано «эффективное использование практико-ориентированных задач на этапах мотивации и

ознакомления с фактом, отраженным в теореме, когда необходимо активизировать познавательную деятельность учащихся, акцентировать их внимание на ситуации, отражающей условие теоремы, организовать «открытие» заключения теоремы» [43]. Авторами отмечается важность использования задач, способ решения которых подсказывает учащимся идею доказательства.

Ж.А. Сарвановой и Т.А. Куприяновой приводится описание этапа ознакомления со способом доказательства теоремы Пифагора в процессе решения следующей задачи: «В квадратную комнату со стороной 7 м решили постелить ковер квадратной формы, так, чтобы угол ковра делил сторону комнаты на две не равные части 3 м и 4 м, но так чтобы соответственные части на разных сторонах были равны. Какой длины должна быть сторона такого ковра?». Авторы подчеркивают, что «учитель, задавая вопросы учащимся, может подвести их к построению одного квадрата внутри другого (рисунок 15).

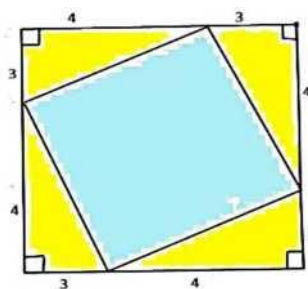


Рисунок 15 – Взаимное расположение квадратов

Решение задачи основано на нахождении площади малого квадрата как разности площадей большого квадрата и суммы площадей четырех прямоугольных треугольников. Данный способ решения задачи аналогичен одному из способов доказательства теоремы Пифагора. Более того, полученная конфигурация квадратов подскажет учащимся способ достраивания квадрата на гипотенузе прямоугольного треугольника при осуществлении доказательства теоремы» [43].

В статье Ж.А. Сарвановой и Т.А. Куприяновой описывается также вопрос применения практико-ориентированных задач *на этапе применения* изученных теорем. В качестве примера приводится одна из задач, «которую можно предложить учащимся при применении теоремы Пифагора: «На вершинах двух елок сидят две вороны. Высота елок равна 4 м и 6 м. Расстояние между ними равно 10 м. На каком расстоянии от меньшей ели нужно положить сыр для этих ворон, чтобы они находились на равных расстояниях от сыра?». Моделью данной задачной ситуации выступают два прямоугольных треугольника (рисунок 16)» [43].

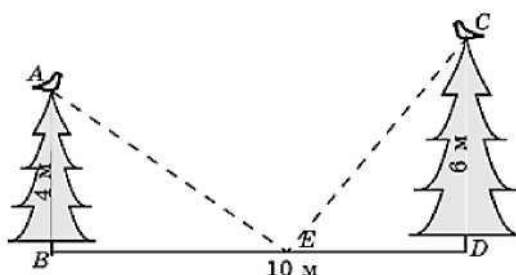


Рисунок 16 – Модель задачной ситуации

Итак, авторами отмечается, что «решение практико-ориентированных задач вызывает у учащихся ассоциации с конкретными действиями, ситуациями, что позволяет им открывать новые знания, лучше запоминать информацию, развивает логические, эвристические, ассоциативные составляющие мышления» [43].

В пособии для учителей Я.И. Груденова [15] рекомендуется при изучении доказательства теоремы использовать составление его плана.

Е.С. Ветошкиной [9] при проведении доказательств на уроках геометрии рекомендуется: четко формулировать посылки и заключения математических утверждений; выделять все шаги доказательства и осуществлять их мотивирование, выявлять общую стратегию проведения самого доказательства; аргументировать все шаги доказательства, ссылаясь на необходимые определения, аксиомы, теоремы, ранее решенные задачи;

применять не один чертеж в ходе доказательства в соответствии с определенными его шагами.

В статье А.С. Великих и У.Б. Капшен указано, что умения и навыки, полученные школьниками 7-9 классов при изучении теорем закрепляются при решении задач. Авторы предлагают перед обучением теоремам знакомить их с понятием «высказывание»; ими составлен набор заданий для изучения необходимых и достаточных условий, который помимо задач содержит и необходимый теоретический материал. Отмечается, что «систематическое изучение необходимых и достаточных условий способствует формированию таких универсальных логических действий, как анализ объектов с целью выделения признаков (существенных, несущественных); выбор оснований и критериев для сравнения, классификации объектов; подведение под понятия, выведение следствий; установление причинно-следственных связей; построение логической цепи рассуждений; доказательство; выдвижение гипотез и их обоснование» [8].

Приведем примеры некоторых задач при изучении планиметрии.

Задание 5. «Теорема – это высказывание, истинность которого установлена при помощи цепочки логических рассуждений, основанных на аксиомах или на других, уже доказанных положениях. Установление истинности теоремы называют ее доказательством. Выделите условие и заключение в следующих теоремах.

1. Углы при основании равнобедренного треугольника равны.
2. Медиана равнобедренного треугольника, проведенная к основанию, является биссектрисой и высотой.
3. Треугольник, у которого два угла равны, равнобедренный» [8].

Задание 6. «Выделите в следующих теоремах условие и заключение и представьте теорему в условной форме.

1. Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних, не смежных с ним, углов.
2. Сумма внутренних углов выпуклого n -угольника равна $180^\circ (n-2)$.

3. Углы со взаимно перпендикулярными сторонами равны, если они оба острые или оба тупые» [8].

В статье Л.В. Детушевой описаны методические аспекты обучения школьников доказательству теорем на основе технологии компрессивного обучения автора В.П. Добрица, в соответствии с которой усвоение учебного материала должно осуществляться по определенному алгоритму:

- «1) быстрое прочитывание нового материала;
- 2) выделение в нем смысловых единиц, понятий и отношений;
- 3) анализ текста на «энтропийность», то есть разбиение встречающихся понятий на уже «известные» и «новые» для обучающихся;
- 4) установление взаимосвязей между новыми и известными понятиями;
- 5) повторение ранее усвоенных понятий, необходимых для осознания новых понятий;
- 6) определение отношений между новыми понятиями, построение иерархии новых понятий;
- 7) оценка возможной значимости новых понятий;
- 8) формулировка целей запоминания» [18].

Автор видит эффективность в овладении приемами и методами доказательства теорем на уроках геометрии при использовании данной технологии. Так, например, на этапе работы с теоремами - «выяснение понимания смысла каждого слова в формулировке теоремы» рекомендуется текст теоремы разбить на «новые» и «известные» факты (анализ текста на «энтропийность»), выделяя ее разъяснительную часть, условие и заключение.

Вместе с этим, отметим, что отдельные аспекты организации обучения школьников, в том числе связанные с обучением теоремам, отражены в зарубежной литературе, например, в статье С. Шато, С. Трифу [55].

В статье Г.И. Ковалевой, О.А. Масловой выделены методические умения по работе с теоремой, разделенные на две группы.

К первой группе авторы относят методические умения по работе со структурой теоремы:

- «выполнять логический анализ формулировки теоремы;
- записывать формулировку теоремы на языке математической логики;
- преобразовывать логическую структуру формулировки теоремы, в том числе с целью перевода в имплицативную форму;
- проверять формулировку теоремы на соответствие требованиям корректности к ней;
- выделять необходимые и достаточные условия теоремы;
- формулировать утверждения: обратное, противоположное и обратное противоположному (определять их истинностное значение).

Вторую группу составляют умения, относящиеся к организации процесса изучения теоремы, от есть умения подбирать или составлять задачи в соответствии с целями этапов изучения теоремы: работа по открытию факта, о котором идет речь в теореме, формулировка теоремы, поиск доказательства и пр.» [21].

Таким образом, в данном параграфе нами определены некоторые методические рекомендации по обучению теоремам в школьном курсе геометрии.

2.2 Проектирование изучения темы «Теорема синусов и теорема косинусов» на основе технологии системно-деятельностного подхода в школьном курсе геометрии

Теорема синусов и теорема косинусов в треугольнике представлены во всех линиях УМК 9 класса общеобразовательной школы. Это теоремы, которые устанавливают зависимость: стороны треугольника - противолежащие им углы.

Формулировка теоремы синусов: «Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов» [4, с. 252].

Формулировка теоремы косинусов: «Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон минус удвоенное произведение этих сторон на косинус угла между ними» [4, с. 253].

Логический анализ теоремы синусов и теоремы косинусов показывает, что теоремы представлены в категоричной форме суждения.

Приведем в качестве примера структуру теоремы синусов:

- разъяснительная часть – существуют стороны треугольника и углы, противолежащие им, для которых можно найти синус угла;
- условие - стороны треугольника можно соотнести с синусами противолежащих углов;
- заключение - стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов.

В формулировке теоремы синусов рассматриваются *понятия*: произвольный треугольник; углы треугольника, синусы противолежащих углов треугольника; стороны треугольника; отношения «быть пропорциональным». На теореме синусов, наряду с теоремой косинусов, основано так называемое решение треугольника.

Анализ доказательства теоремы синусов показывает, что для 9 класса приводится аналитический метод ее доказательства. Теоретическую базу, на которую опирается доказательство данной теоремы составляют понятие треугольника и соотношение его стороны и угла. Также при изучении следствия из данной теоремы предполагается дополнительное построение – треугольник, вписанный в окружность.

Опишем этапы работы над рассматриваемыми теоремами и приемы организации учебной деятельности с обучающимися.

Материал, рассматриваемый в данной теме, может быть использован учителя математики в практической деятельности в основной школе и при подготовке школьников к ОГЭ и ЕГЭ по математике.

Разработанный вариант проекта по изучению темы «Теорема синусов и теорема косинусов» предназначен для математического профиля. Это

обусловлено содержанием темы в школьном курсе геометрии в рамках действующих нормативных документов: ФГОС основного общего образования; Примерной основной образовательной программы основного общего образования, а также тем, что данная тема изучается в 8-9 классах основной школы на базовом и углубленном уровнях.

При проектировании изучения темы «Теорема синусов и теорема косинусов» в школьном курсе геометрии нами была выбрана *технология* системно-деятельностного подхода.

Обоснуем целесообразность выбора данной технологии.

В методике обучения теоремам имеют место два подхода, отличающиеся познавательной активностью обучающихся.

В первом подходе (Ю.М. Колягин [29] и др.) активная роль отводится учителю. При организации работы с теоремой формулирует и доказывает ее учитель, учащиеся запоминают ее и применяют при решении задач. По мнению Н.В. Садовникова, О.Г. Шакирзяновой [40] такой подход более эффективен в 10-11 классах, а также при изучении теорем методом укрупнения дидактических единиц.

При системно-деятельностном подходе учащиеся под руководством учителя открывают содержание теоремы, формулируют её (в форме гипотезы), составляют план доказательства и совместно с учителем доказывают теорему, формулируют выводы. Этот подход является главенствующим в современном образовании, учитывает требования Федерального государственного образовательного стандарта к активизации познавательной деятельности обучающихся, развитию интереса к обучению, а также по организации обучения на его основе. Второй подход требует больших от учителя затрат времени и усилий, при работе над теоремой у школьников формируются познавательные, регулятивные и коммуникативные универсальные учебные действия, ими достигаются метапредметные результаты.

В соответствии со второй концепцией обучения теоремам Г.И. Саранцевым выделены этапы работы с теоремой: «1) мотивация; 2) ознакомление с теоремой; 3) формулировка теоремы; 4) усвоение содержания теоремы; 5) запоминание теоремы; 6) ознакомление с доказательством; 7) доказательство; 8) применение теоремы; 9) установление связей теоремы с изученными ранее» [41].

Во ФГОС основного общего образования в качестве предметных результатов по математике в соответствии с проектируемой темой на углубленном уровне указаны следующие умения:

- «свободно оперировать понятиями: теорема, доказательство, равносильные формулировки утверждений, обратное и противоположное утверждение; приводить примеры и контрпримеры; выводить формулы и приводить доказательства, в том числе методом «от противного» и методом математической индукции» [34];
- «свободно оперировать понятиями: треугольник, равнобедренный треугольник, равносторонний (правильный) треугольник, прямоугольный треугольник, угол треугольника, внешний угол треугольника, медиана, высота, биссектриса треугольника, окружность и круг, центральный угол, вписанный угол, вписанная в многоугольник окружность, описанная около многоугольника окружность, касательная к окружности; умение свободно оперировать понятиями: равные фигуры, равные отрезки, равные углы, равные треугольники» [34];
- «свободно оперировать понятиями: длина линии, величина угла, тригонометрические функции углов треугольника, площадь фигуры; выводить и использовать формулы для нахождения длин, площадей и величин углов; свободно оперировать формулами, выражающими свойства изученных фигур; использовать свойства равновеликих и равноставленных фигур, теорему Пифагора, теоремы косинусов и синусов, теорему о вписанном угле, свойства касательных и секущих к окружности, формулы площади треугольника, суммы углов

многоугольника при решении задач; выполнять измерения, вычисления и сравнения длин, расстояний, углов, площадей; оценивать размеры объектов в окружающем мире» [34].

В Примерной программе по математике указано, что выпускник научится: «находить значения длин линейных элементов фигур и их отношения, градусную меру углов от 0 до 180° , применяя определения, свойства и признаки фигур и их элементов, отношения фигур; оперировать с начальными понятиями тригонометрии и выполнять элементарные операции над функциями углов; решать задачи на доказательство, опираясь на изученные свойства фигур и отношений между ними и применяя изученные методы доказательств» [35].

В учебном пособии к учебнику геометрии «Методические рекомендации. 9 класс» Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, Ю.А. Глазков и др. [4] указано, что в результате изучения данной темы учащиеся должны уметь:

- формулировать и доказывать теоремы синусов и косинусов;
- усвоить следствие из теоремы синусов об удвоенном радиусе (диаметре) описанной окружности, равном отношению стороны треугольника к синусу противолежащего угла;
- решать задачи на применение данных теорем.

Целью изучения данной темы является доказать теоремы синусов, косинусов и познакомить учащихся с методами их доказательства и измерительными работами, основанными на использовании этих теорем.

Задачи:

- сформулировать теорему синусов и доказать ее через формулу площади произвольного треугольника;
- доказать следствие из теоремы синусов об удвоенном радиусе (диаметре) описанной окружности, равном отношению стороны треугольника к синусу противолежащего угла;
- сформулировать теорему косинусов и доказать ее координатным методом;

- показать, что в теореме косинусов содержится как частный случай теоремы Пифагора и она является обобщенной теоремой Пифагора;
- рассмотреть применение теоремы синусов при проведении различных измерительных работ: измерение расстояния до недоступной точки.

Учебный материал, рассматриваемый в данной теме, способствует формированию у школьников логического мышления; умения записывать данные теоремы в виде равенств относительного заданного треугольника, применять их при решении задач на вычисление и доказательство; формирует у них потребности в проведении доказательств различными способами.

Опишем результаты анализа практического опыта учителей по теме «Теорема синусов и теорема косинусов, опубликованного в статьях.

В статье Т.С. Пиголкиной [31] показано применение данных теорем при доказательстве других теорем и решении задач. Так, автор приводит доказательство теоремы об одном из свойств параллелограмма: «В параллелограмме сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов всех его сторон», основанное на теореме косинусов.

В разработке Е.Н. Осипчук «План-конспект урока по геометрии на тему «Теорема косинусов» (9 класс) [30] упор делается на практическую составляющую данной теоремы, о чем говорит цель урока на языке учащегося: «К концу урока я научусь находить расстояния и углы на местности с использованием плана местности и теоремы косинусов».

На сайте «Фестиваль педагогических идей «Открытый урок» [49] представлено большое количество конспектов уроков как по теме «Теорема косинусов» (например, конспект учителя Е.В. Рингельман [39]), так и по теме «Теорема синусов» (например, конспект учителя Л.Б. Боевец [5]) по учебнику Л.С. Атанасяна.

На сайте учебно-методических комплексов по геометрии для 5-11 классов В.А. Смирнова и И.М. Смирновой [44] представлен ряд презентаций по теме «Теорема синусов и косинусов».

На сайтах «Решу ОГЭ» [37] и «Решу ЕГЭ» [38] представлен материал для подготовки школьников к итоговой аттестации по математике. В них содержатся задачи на применение данных теорем.

В элективном курсе О.А. Воеводиной «Методы решения математических задач» для учащихся 10-11 классов [10] 2 часа отводится на повторение теоремы косинусов и ее применение к решению задач.

В элективном курсе Л.Г. Костюк «Подготовка к ЕГЭ по математике» для 11 классов [22] 1 час отводится на повторение теорем синусов и косинусов и их применение к решению задач.

Таким образом, анализ темы в статьях [30; 31] и опыт изучения темы посредством элективных курсов [10; 22] показывает интерес учителей и исследователей к теме «Теорема синусов и косинусов».

Представим результаты анализа теоретического и практического содержаний по данной теме.

Базовые знания:

- понятие прямоугольного треугольника и его элементов;
- Теорема Пифагора;
- понятие синуса и косинуса угла;
- понятие площади;
- формула площади треугольника через основание и высоту;
- формула площади треугольника по двум сторонам и углу между ними;
- понятие абсциссы и ординаты точки на координатной плоскости;
- формула для вычисления координаты точки на плоскости;
- формула расстояния между двумя точками на плоскости;
- основное тригонометрическое тождество;
- формулы приведения.

Рассматриваемые сведения:

- теорема косинусов (обобщенная теорема Пифагора);

- доказательство теоремы косинусов методом координат, векторным методом; на основе понятий синуса и косинуса угла и применения теоремы Пифагора;
- следствия из теоремы косинусов: о знаке $\pm$ у удвоенного произведения сторон; об определении вида треугольника в зависимости от того, будет ли величина $b^2 + c^2 - a^2$ больше нуля, равна нулю или меньше нуля, если a - наибольшая сторона треугольника;
- теорема синусов;
- доказательство теоремы синусов на основе: формулы площади треугольника; свойств высоты и понятия синуса в прямоугольном треугольнике; через свойства вписанных углов, опирающихся на хорду, в том числе являющуюся диаметром;
- следствие из теоремы синусов об удвоенном радиусе (диаметре) описанной окружности, равном отношению стороны треугольника к синусу противолежащего угла.

Теоретический материал. Анализ содержания данной темы в различных учебниках, утвержденных Министерством Просвещения на 2021-2022 годы, рассмотрен в Таблицах 1-2.

Указанная тема в рассмотренных учебниках [3; 24; 32; 51] и пособиях к ним [7; 13; 27; 28] изучается в 8–9 классах в объеме от 3–х до 7–и часов на углубленном уровне (таблица 4).

Таблица 4 – Последовательность изучения темы и количество часов на ее изучение

Учебник, класс	Кол-во часов всего / на каждую теорему	Последовательность изучения теорем
Атанасян Л.С. [3], 9 класс	4 / 2 + 2	Теорема синусов, теорема косинусов
Погорелов А.В. [32], 9 класс	4 / 2 + 2	Теорема косинусов, теорема синусов
Мерзляк А.Г. [24], 9 класс	7 / 4 + 3	
Шарыгина И.Ф. [51], 8 класс	3	

В таблице 5 приведены различные методы и способы доказательства теорем косинусов и синусов, следствия их данных теорем.

Таблица 5 – Различные методы и способы доказательства теорем косинусов и синусов, следствия их данных теорем

Учебник	Атанасян Л.С. [3]	Погорелов А.В. [32]	Мерзляк А.Г. [24]	Шарыгина И.Ф. [51]
Теорема синусов				
Методы / способы доказатель ства	через формулу площади треугольника	на основе свойств высоты и понятия синуса в прямоугольном треугольнике	через свойства вписанных углов, опирающихся на хорду, в том числе являющуюся диаметром	
Следствия из теорем	следствие об удвоенном радиусе (диаметре) описанной окружности, равном отношению стороны треугольника к синусу противолежащего угла.			
Теорема косинусов				
Методы / способы доказатель ства	методом координат	векторный метод	на основе понятий синуса и косинуса угла и применения теоремы Пифагора.	
Следствия из теорем	-	о знаке $\pm$ у удвоенного произведения сторон	следствие об определении вида треугольника в зависимости от того, будет ли величина $b^2 + c^2 - a^2$ больше нуля, равна нулю или меньше нуля, если a - наибольшая сторона треугольника.	

Отметим, что во всех четырех учебниках изучается следствие из теоремы синусов об удвоенном радиусе (диаметре) описанной окружности, равном отношению стороны треугольника к синусу противолежащего угла. В учебниках А.Г. Мерзляка [24] и И.Ф. Шарыгина [51] данная теорема доказывается через свойства вписанных углов, опирающихся на хорду, в том числе являющуюся диаметром. В учебнике А.В. Погорелова [32] доказательство теоремы синусов основывается на свойстве высоты и понятия синуса в прямоугольном треугольнике, в учебнике Л.С. Атанасяна [3] – на применении формулы площади треугольника по двум сторонам и углу между ними.

Приведем доказательство теоремы синусов по учебнику Л.С. Атанасяна [3].

Формулировка теоремы: «Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов» [3]. Дано: треугольник ABC (рисунок 17).

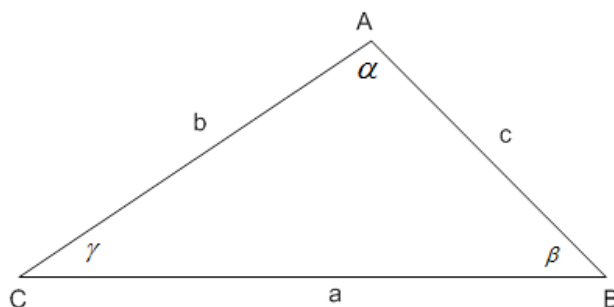


Рисунок 17 – К доказательству теоремы синусов по учебнику Л.С. Атанасяна

Доказать: $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$.

Доказательство.

Докажем данную теорему с помощью формулы площади треугольника по двум сторонам и углу между ними.

$$S = \frac{1}{2}ab \sin \gamma = \frac{1}{2}bc \sin \alpha = \frac{1}{2}ca \sin \beta.$$

Из этой формулы мы получаем два соотношения:

$$1. \quad \frac{1}{2}ab \sin \gamma = \frac{1}{2}bc \sin \alpha.$$

Умножив обе части равенства на $\frac{2}{b}$, получим: $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{c}{\sin \gamma}$

$$2. \quad \text{Аналогично преобразуем равенство } \frac{1}{2}bc \sin \alpha = \frac{1}{2}ca \sin \beta.$$

Получим: $\frac{b}{\sin \beta} = \frac{a}{\sin \alpha}.$

$$3. \quad \text{Из этих двух соотношений получаем: } \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}.$$

Теорема доказана.

Приведем доказательство теоремы синусов по учебнику А.В. Погорелова [32].

Дано: треугольник ABC (рис. 18). Доказать: $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$.

Доказательство.

«Опустим из вершины С высоту СД.

Из прямоугольного треугольника АСD, если угол α острый, получаем $CD = b \sin \alpha$ (рисунок 18, а).

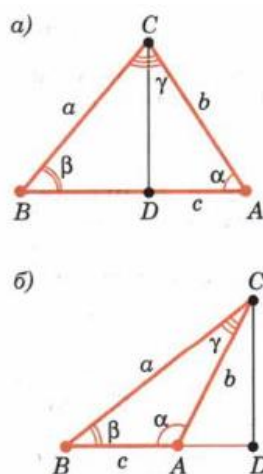


Рисунок 18 – К доказательству теоремы синусов по учебнику А.В. Погорелова

Если угол α тупой, то $CD = b \sin (180^\circ - \alpha) = b \sin \alpha$ (рис. 18, б).

Аналогично из треугольника ВСD получаем $CD = a \sin \beta$.

Итак, $a \sin \beta = b \sin \alpha$.

Отсюда $\frac{b}{\sin \beta} = \frac{a}{\sin \alpha}$.

Аналогично доказывается равенство $\frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$. Для доказательства нужно провести высоту треугольника из вершины. Теорема доказана» [32].

Следствие из данной теоремы об удвоенном радиусе (диаметре) описанной окружности, равном отношению стороны треугольника к синусу противолежащего угла доказывается в данном учебнике в решенной задаче 13:

«Докажите, что в теореме синусов каждое из трех отношений:

$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$ равно $2R$, где R – радиус окружности, описанной около треугольника» [32, с. 175].

Решение. «Проведем диаметр BD (рисунок 19).

По свойству углов, вписанных в окружность, угол при вершине D прямоугольного треугольника BCD равен либо α , если точки A и D лежат по одну сторону от прямой BC (рисунок 19, а), либо $180^\circ - \alpha$, если они лежат по разные стороны от прямой BC (рисунок 19, б).

В первом случае:

$BC = BD \sin \alpha$. Во втором: $BC = BD \sin (180^\circ - \alpha)$.

Так как $\sin (180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$, то в любом случае $a = 2R \sin \alpha$.

Следовательно, $\frac{a}{\sin \alpha} = 2R$, что и требовалось доказать» [32].

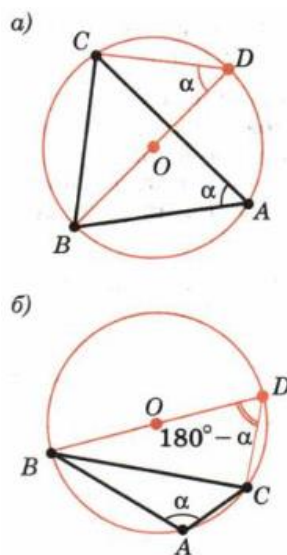


Рисунок 19 – К следствию из теоремы синусов
по учебнику А.В. Погорелова

Анализ доказательства теоремы косинусов в рассматриваемых учебниках геометрии показал, что в учебниках А.Г. Мерзляка [24] и И.Ф. Шарыгина [51] данная теорема доказывается на основе понятий синуса и косинуса угла и применения теоремы Пифагора. Также в них рассматривается следствие из нее об определении вида треугольника в зависимости от того, будет ли величина $b^2 + c^2 - a^2$ больше нуля, равна нулю или меньше нуля, если a - наибольшая сторона треугольника.

Л.С. Атанасян [3] рассматривает доказательство этой теоремы через метод координат, в то время как А.В. Погорелов [32] – с помощью векторного метода.

Приведем доказательство теоремы косинусов по учебнику Л.С. Атанасяна [3].

Формулировка теоремы: «Квадрат любой стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон минус удвоенное произведение этих сторон на косинус угла между ними» [3].

Дано: треугольник ABC. Доказать: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$.

Доказательство (рисунок 20).

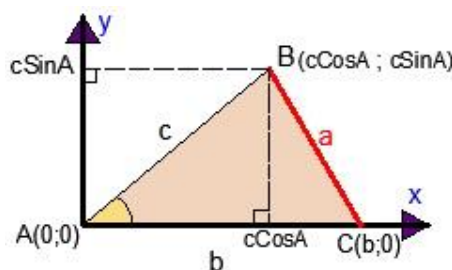


Рисунок 20 – Треугольник ABC в системе координат с началом в точке A

«Докажем равенство для стороны a и угла A . Для этого введем систему координат как показано на рисунке 20 (ось Ox направляется вдоль стороны AC). Точка B при этом получит координаты $B(c \cos A; c \sin A)$.

По формуле расстояния между двумя точками получим:

$$BC^2 = (c\cos A - b)^2 + (c\sin A - 0)^2$$

Применим формулу сокращенного умножения к квадратам суммы:

$$a^2 = c^2\cos^2 A - 2cb\cos A + b^2 + c^2\sin^2 A$$

$$\text{Вынесем } c^2 \text{ за скобку: } a^2 = c^2(\cos^2 A + \sin^2 A) + b^2 - 2cb\cos A.$$

Используем основное тригонометрическое тождество и получаем:

$$a^2 = c^2 \cdot 1 - 2cb\cos A + b^2.$$

и в итоге $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ » [3].

Автор отмечает, что данная теорема является обобщенной теоремой Пифагора и поясняет данное утверждение.

Приведем доказательство теоремы косинусов по учебнику А.В.Погорелова [32].

Формулировка теоремы:

«Квадрат любой стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон без удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними» [32].

Дано: треугольник ABC.

Доказать: $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A$.

Доказательство. «Имеем векторное равенство: $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$. Возводя это равенство скалярно в квадрат, получим:

$$\overrightarrow{BC}^2 = \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AC}^2 - \overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \text{ или } BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A.$$

Теорема доказана.

Автор далее обращает внимание на то, что $AC \cdot \cos A$ равно по абсолютной величине проекции AD стороны AC на сторону AB (рисунок 21, а) или ее продолжение (рисунок 21, б).

Знак $AC \cdot \cos A$ зависит от угла A: «+» - если угол A – острый, «-» - если угол A – тупой» [32].

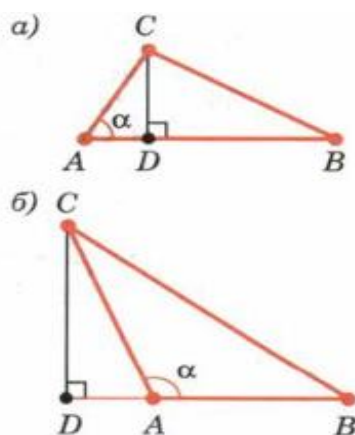


Рисунок 21 – К доказательству теоремы косинусов по учебнику А.В. Погорелова

Отсюда получается следствие о знаке $\pm$ у удвоенного произведения сторон:

«Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон $\pm$ удвоенное произведение одной из них на проекцию другой. Знак «+» надо брать, когда противолежащий угол тупой, а знак «-», когда угол острый» [32, с. 173].

Анализ задачного материала в учебниках геометрии 7-9 классов показал, что по данной теме материал довольно обширный и представлен различными типами задач; можно выделить следующие основные типы задач по теме «Теорема синусов и косинусов»:

Задачи на вычисления

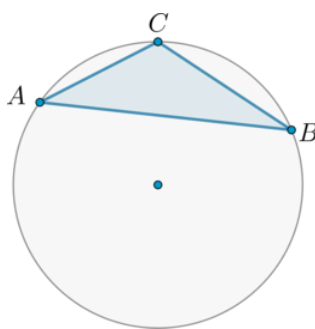


Рисунок 22 – К задаче 4

Задача 1. «Для треугольника ABC , в котором $AB = \sqrt{2}$ и $\angle ACB = 45^\circ$, найдите длину радиуса описанной окружности» [3].

Задача 2. «Задан треугольник ABC , в котором $AB = 2\sqrt{3}$ и $\angle ACB = 60^\circ$. Найдите длину радиуса описанной окружности» [32].

Задача 3. «Задан треугольник ABC $\sin B = 0,55$, радиус описанной около ABC окружности равен 5. Найдите AC » [3].

Задача 4. «Найдите хорду (рисунок 22), на которую опирается угол 120° , вписанный в окружность радиуса $\sqrt{3}$ » [32].

Задачи на доказательство

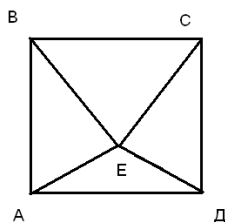


Рисунок 23 – К задаче 1 на доказательство

Задача 1. «Дан квадрат ABCD (рисунок 23), через вершины A и D проведены прямые, образующие угол в 15° со стороной AD. Эти прямые пересекаются в точке E. Доказать, что треугольник BEC – равносторонний» [3].

Решение.

1. Из треугольника ADE находим AE.

Пусть $AB = a$. В треугольнике AED: $\angle DAE = 15^\circ = \angle ADE$, $\angle AED = 150^\circ$.

Применим теорему синусов к треугольнику AED:

$$\frac{AE}{\sin 15^\circ} = \frac{AD}{\sin 150^\circ}. \quad AE = 2a \sin 15^\circ.$$

2. Из треугольника ABE находим BE.

Применим теорему косинусов к треугольнику ABE. Получаем:

$$BE = \sqrt{AB^2 + AE^2 - 2 \cdot AB \cdot AE \cdot \cos 75^\circ} = \sqrt{a^2 + 4a^2 \sin^2 15^\circ - 4a^2 \sin 15^\circ \cos 75^\circ}.$$

3. Сравним BE с AB. Так как $\cos 75^\circ = \sin 15^\circ$, получаем:

$$BE = \sqrt{a^2 + 4a^2 \sin^2 15^\circ - 4a^2 \sin^2 15^\circ} = a.$$

Аналогично доказывается, что $CE = a$. Утверждение доказано.

Практико-ориентированные задачи (на измерительные работы)

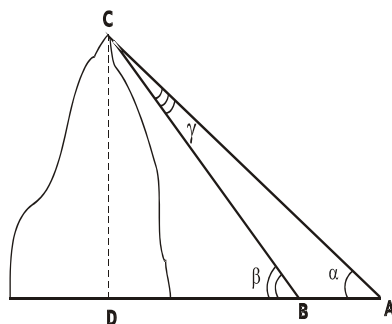


Рисунок 24 – К практико-ориентированной задаче 1

Приведем пример задачи на теорему синусов (на определение недоступных расстояний).

Задача 1. «Вершина горы видна из точки А под углом $38^{\circ}42'$ (рисунок 24), а при приближении к горе на 200 м вершина стала видна под углом 42° . Найдите высоту горы» [3].

Дано: $AB = 200$ м, $\angle CAB = \alpha = 38^{\circ}42'$, $\angle CBD = \alpha = 42^{\circ}$, $CD \perp DA$.

Найти CD .

Решение.

1. Из $\triangle CBA$ по теореме синусов имеем равенство: $\frac{CB}{\sin \alpha} = \frac{AB}{\sin \gamma}$.

2. Угол β – внешний $\angle ABC$, поэтому $\beta = \alpha + \gamma$, откуда $\gamma = \beta - \alpha$.

$$CB = \frac{200 \cdot \sin \alpha}{\sin(\beta - \alpha)}.$$

3. Из $\triangle CBD$ находим: $CD = CB \sin \beta = \frac{200 \cdot \sin \alpha \sin \beta}{\sin(\beta - \alpha)} \approx 14325$ (м)

Ответ: $CD \approx 14325$ м.

Основным учебником геометрии для математического профиля при проектировании данной темы выбран учебник геометрии для 7-9 классов Л.С. Атанасяна [3].

Рассматриваемая в данном проекте тема относится к Главе XI «Соотношения между сторонами и углами треугольника. Скалярное произведение векторов».

Тема вводится в параграфе §2 «Соотношения между сторонами и углами треугольника», в котором рассматриваются базовые теоремы, касающиеся решения треугольников.

В авторской программе [6] отмечается, что в результате изучения темы учащиеся должны:

- приводить формулировку теоремы синусов;
- доказывать теорему синусов;
- приводить формулировку теоремы косинусов;

- доказывать теорему косинусов;
- применять теорему синусов и теорему косинусов в различных практических ситуациях и задачах на вычисление;
- уметь переводить практико-ориентированные задачи на язык математики, строить чертежи к задачам.

Для углубленного изучения математики на тему «Теорема синусов и теорема косинусов» по программе Л.С. Атанасяна отводится 4 часа: по 2 часа на каждую теорему.

Таким образом, выбор учебника Л.С. Атанасяна [3] обоснован следующими причинами:

- учебник входит в федеральный перечень учебников, допущенных Министерством Просвещения Российской Федерации, к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ общего образования образовательных учреждений;
- в учебнике наиболее полно раскрыто теоретическое и практическое содержание темы «Теорема синусов и косинусов»;
- в данном учебнике представлены основные типы задач, реализующие этапы работы с теоремами.

Опишем проектирование изучения темы «Теорема синусов и теорема косинусов» в рамках выбранной технологии системно-деятельностного подхода.

Изучение темы спланировано нами следующим образом:

- на первых двух уроках (1.1 и 1.2) рассматривается теорема синусов;
- на следующих двух уроках (2.1 и 2.2) рассматривается теорема косинусов.

Остановимся подробнее на уроках по изучению теоремы косинусов (2.1 и 2.2).

Выделим последовательно этапы работы над теоремами и приёмы организации учебной деятельности обучающихся.

В описании уроков нами соблюдены этапы работы с теоремой Г.И. Саранцева:

УРОК (2.1): «1) мотивация; 2) ознакомление с теоремой; 3) формулировка теоремы; 4) усвоение содержания теоремы; 5) запоминание теоремы; 6) ознакомление с доказательством; 7) доказательство» [41].

Цель: знакомство с теоремой косинусов и разными способами ее доказательства.

Этап 1. Мотивация и подготовка к изучению теоремы косинусов.

Задания для актуализации опорных знаний

Выполнение устных упражнений:

Задание 1. «Если катеты прямоугольного треугольника равны 5 см и 12 см, то гипотенуза равна...» [7].

Задание 2. «Если две большие стороны прямоугольного треугольника равны 17 и 15, то третья сторона равна...» [7].

Задание 3. «Как найти гипотенузу прямоугольного треугольника, если известны катет и острый угол?» [7].

Задание 4. Выразите (рисунок 25, слайд 1):

а) NM через NK и $\angle K$;

б) MK через NK и $\angle K$.

Слайд 1



Рисунок 25 – Мотивационная задача 1

Решите прямоугольный треугольник ADC (рисунок 26, слайд 2).

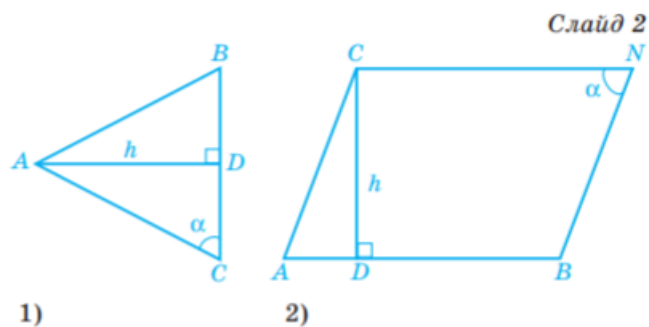


Рисунок 26 – Мотивационная задача 2

Задание 5. В треугольнике ABC $\cos \alpha = 0,6$ (рисунок 27, слайд 3).
Найдите: $\sin \alpha$; $\sin \angle BCD$.

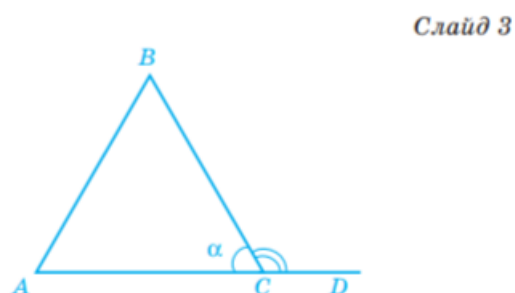


Рисунок 27 – Мотивационная задача 3

Этап 2. Ознакомление с теоремой.

Коллективная работа. Учитель. При проведении измерительных работ на местности часто требуется найти расстояние между двумя недоступными пунктами (рисунок 28, слайд 4).

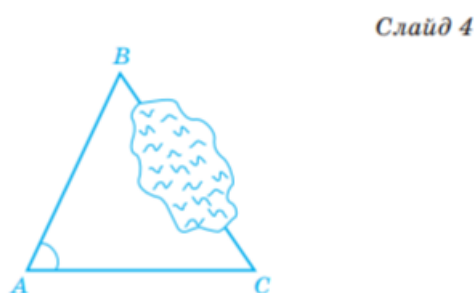
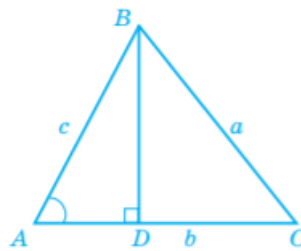


Рисунок 28 – Подводящая задача 1

Решим задачу (совместная работа учителя и учащихся).

Задача 1. В треугольнике ABC известны стороны $AB = c$, $AC = b$ и угол ($\angle A < 90^\circ$). Найдите BC^2 .

Решение. Проведём $BD \perp AC$ (рисунок 29, слайд 5). Из прямоугольного треугольника ABD:



Слайд 5

Рисунок 29 – Подводящая задача 2

$$BD = c \cdot \sin A, AD = c \cdot \cos A; \quad DC = AC - AD, DC = b - c \cdot \cos A.$$

Из прямоугольного треугольника CBD по теореме Пифагора:

$$BC^2 = DC^2 + BD^2; \quad a^2 = (b - c \cdot \cos A)^2 + (c \cdot \sin A)^2;$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A.$$

Учащиеся замечают, что получили формулу, зная которую раньше могли бы значительно быстрее решить задачу.

Учитель подчёркивает, что решение задачи, которое основано на построении высоты треугольника, является нерациональным. Подобные задачи можно решать проще, если знать теорему, которую называют теоремой косинусов. «Теорема косинусов была, по существу, доказана ещё в «Началах» Евклида - в ней выведены формулы, выражающие квадрат стороны, лежащей против острого или тупого угла треугольника.

В современной записи это положение эквивалентно теореме косинусов:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A; \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B; \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C.$$

Учёные Греции, Индии, стран Ближнего и Среднего Востока, европейские математики пользовались формулами, близкими к формулам, приведённым Евклидом, но впервые теорема косинусов была явно

сформулирована только в XVI в. французским математиком Франсуа Виетом» [14, с. 94].

Этап 3. Формулировка теоремы.

Далее учитель предлагает учащимся сформулировать теорему косинусов.

Учитель. Можно ли сказать, что решение задачи 1 является полным доказательством теоремы косинусов? (Учащиеся замечают, что теорема доказана только для квадрата стороны, лежащей против острого угла треугольника).

Этап 4. Усвоение содержания теоремы. Этап 5. Запоминание теоремы.

Учитель предлагает обсудить доказательство для случая:

$90^\circ < \angle A < 180^\circ$ (рисунок 30, слайд 6) и $\angle A = 90^\circ$ (рисунок 31, слайд 7).

Учащиеся приходят к выводу, что доказательство в данном случае аналогично рассмотренному ранее (слайд 6).

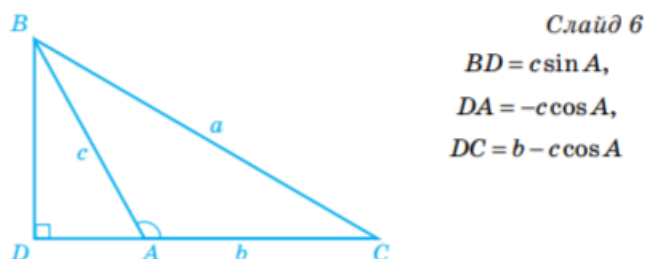
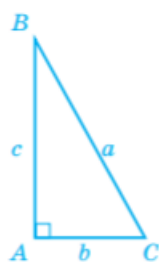


Рисунок 30 – К обсуждению доказательства теоремы, случай 1

Учитель. Теорему косинусов иногда называют обобщённой теоремой Пифагора. Такое название объясняется тем, что в теореме косинусов содержится как частный случай теорема Пифагора (слайд 7).



Слайд 7

$$\angle A = 90^\circ, \cos 90^\circ = 0,$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Рисунок 31 – К обсуждению доказательства теоремы, случай 2

Этап 6. Ознакомление со способом доказательства.

Организация поиска доказательства теоремы: работа в группах.

Учащиеся распределяются на три группы. Учитель предлагает им рассмотреть разные способы доказательства теоремы косинусов. Каждая группа получает карточку с ее доказательством определённым способом (рисунки 32, 33). Требуется изучить приведённое доказательство, затем ознакомить с ним учащихся других групп. В таблице 6 приведены приемы, подводящие учащихся к доказательству теоремы.

Таблица 6 - Приемы, с помощью которых обучающиеся приходят к доказательству теоремы

Приемы	Обучающий диалог
Абстрагирование, выделение существенного признака в задаче практической работы.	Сделаем чертеж.
Составление плана доказательства.	Введем систему координат и найдем координаты необходимых нам точек для прямоугольного треугольника. 1. Согласно теореме Пифагора запишем: $a^2 = c^2 - b^2$. 2. В правой части равенства прибавим и отнимем квадрат второго катета. 3. Имеем формулу для катетов в этом треугольнике. Заметили, что связь между стороной a и косинусом противолежащего угла справедлива и для произвольного треугольника, которую покажем на теореме косинусов. 4. Применим в доказательстве теоремы косинусов формулу расстояния между двумя точками на плоскости. 5. При упрощении правой части равенства используем основное тригонометрическое тождество. 6. Теорема косинусов доказана.

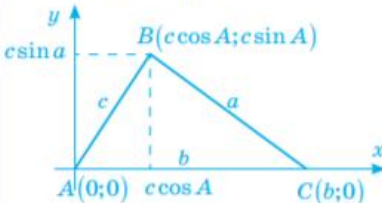
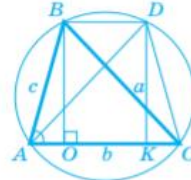
Карточка для группы 1	Карточка для группы 2
Доказательство теоремы косинусов с использованием метода координат Дано: $\triangle ABC$, $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$. Доказать: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$. Доказательство Введём прямоугольную систему координат так, как показано на рисунке, и найдём координаты вершин треугольника ABC.  По формуле расстояния между двумя точками: $a^2 = BC^2 = (b - c \cos A)^2 + (0 - c \sin A)^2,$ откуда получаем (объясните!): $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A,$ что и требовалось доказать	Доказательство теоремы косинусов с использованием теоремы Птолемея Дано: $\triangle ABC$, $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$. Доказать: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$. Доказательство  - Опишем около треугольника ABC окружность. - Проведём $BD \parallel AC$. $ABDC$ — равнобедренная трапеция (объясните!). - Проведём $BO \perp AC$ и $DK \perp AC$. Тогда $AO = CK = c \cos A$, $OK = AC - 2AO = b - 2c \cos A$, $BD = OK = b - 2c \cos A$. - Проведём AD и воспользуемся теоремой Птолемея (произведение длин диагоналей вписанного в круг четырёхугольника равно сумме произведений длин его противоположных сторон): $AD \cdot BC = BD \cdot AC + AB \cdot CD$. $a \cdot a = (b - 2c \cos A)b + c \cdot c$, $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$, что и требовалось доказать

Рисунок 32 – Карточки для первой и второй групп

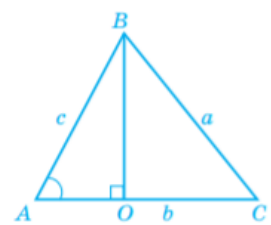
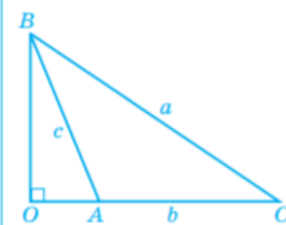
Карточка для группы 3		
Доказательство теоремы косинусов с использованием тригонометрических соотношений и алгебраических преобразований Дано: $\triangle ABC$, $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$. Доказать: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$. Доказательство 1) Угол A — острый.  Проведём из вершины B высоту BO. Из прямоугольного треугольника ABO: $AO = c \cos A$. 2) Угол A — тупой.  Проведём из вершины B высоту BO. Из прямоугольного треугольника BOC: $CO = a \cos C$.		Из прямоугольного треугольника CBO: $CO = a \cos C$. $AC = CO + AO$, или $b = c \cos A + a \cos C$. (1) Из прямоугольного треугольника BOA: $AO = c \cos(180^\circ - A) = -c \cos A$. $AC = CO - AO$, или $b = c \cos A + a \cos C$. (1) Видим, что в обоих случаях получили одно и то же равенство (не зависит от вида треугольника). Запишем аналогичные равенства для сторон c и a (объясните!): $c = a \cos B + b \cos A, \quad (2)$ $a = c \cos B + b \cos C. \quad (3)$ Умножим обе части равенства (1) на b, (2) — на c, (3) — на $-a$. Получим: $b^2 = bc \cos A + ba \cos C,$ $c^2 = ca \cos B + cb \cos A,$ $-a^2 = -ac \cos B - ab \cos C.$ Почленно сложим последние три равенства, получим: $b^2 + c^2 - a^2 = 2bc \cos A, \text{ или } a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A,$ что и требовалось доказать

Рисунок 33 – Карточки для третьей группы

Этап 7. Доказательство теоремы.

Рассмотрим прямоугольный треугольник. По теореме Пифагора имеем:
 $a^2 = c^2 - b^2$ (рисунок 34).

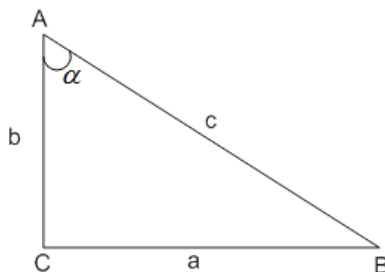


Рисунок 34 – К теореме Пифагора

В правой части равенства прибавим и отнимем квадрат второго катета:
 $a^2 = c^2 + b^2 - b^2 - b^2$; $a^2 = c^2 + b^2 - 2b \cdot b$.

Мы знаем, что $b = c \cos \alpha$, тогда $a^2 = c^2 + b^2 - 2bc \cos \alpha$.

Имеем формулу для катетов в прямоугольном треугольнике.

Отметим, что связь между стороной a и косинусом противолежащего угла справедлива и для произвольного треугольника, которую покажем на теореме косинусов. Ее формулировка: «Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других его сторон минус удвоенное произведение этих сторон на косинус угла между ними» [3]. Докажем данную теорему:
 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$.

Пусть имеем произвольный треугольник ABC (рисунок 35).

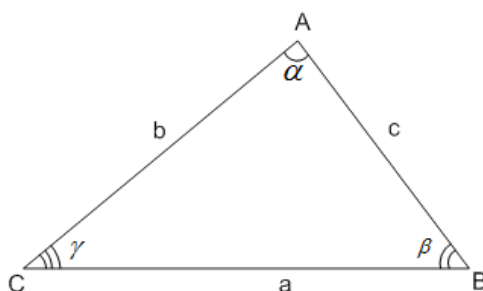


Рисунок 35 – К доказательству теоремы

Применим в доказательстве теоремы косинусов формулу расстояния между двумя точками на плоскости (рисунки 36-37):
 $BC^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$.

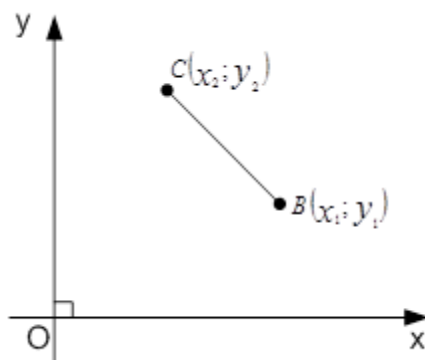


Рисунок 36 – К доказательству теоремы

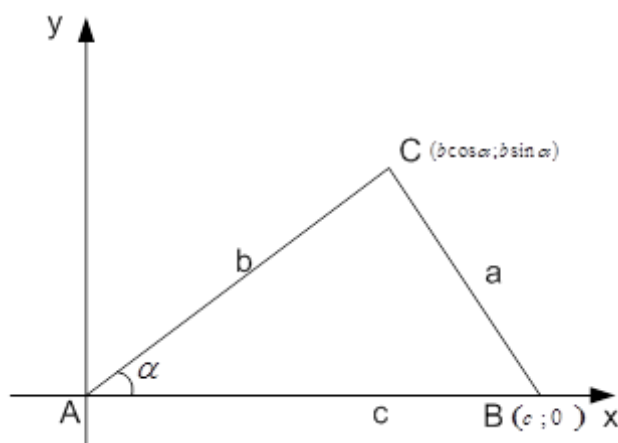


Рисунок 37 – ΔABC в системе координат

Так, $BC = a$. Введем систему координат (рисунок 37). Точка В имеет координаты $(c; 0)$, точка С – $(b \cos \alpha; b \sin \alpha)$, где $\alpha \in (0^\circ; 180^\circ)$.

Тогда получим:

$$BC^2 = a^2 = (b \cos \alpha - c)^2 + b^2 \sin^2 \alpha = b^2 \cos^2 \alpha + b^2 \sin^2 \alpha - 2bc \cos \alpha + c^2 = b^2 (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) - 2bc \cos \alpha + c^2$$

Применим основное тригонометрическое тождество: $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$.

Тогда:

$$BC^2 = b^2(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) - 2bc \cos \alpha + c^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha.$$

Что и требовалось доказать.

Методические рекомендации. Доказательство достаточно простое, понятное, поэтому можно предложить этот способ записи доказательства на этапе закрепления доказательства с деформированным текстом или с пропусками обоснований или логических шагов доказательства. Для более подготовленных учеников возможно доказательство на другом чертеже.

Подведение итогов.

Домашнее задание.

Задача 1. В $\triangle ABC$ сторона $AB = 7$ см, $\angle B = 45^\circ$, $BC = 5$ см. Найдите сторону AC .

Задача 2. Гипотенуза AB (рисунок 38) прямоугольного треугольника ABC равна 18, катет $BC = 6$. На гипотенузе взята точка M такая, что $AM : MB = 1 : 2$. Найдите CM .

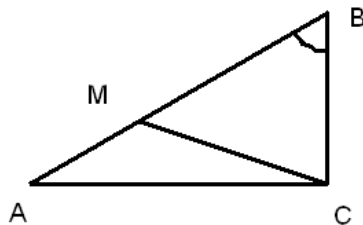


Рисунок 38 – К задаче №2 для домашней работы

УРОК (2.2).

Этапы работы с теоремой: «8) применение теоремы; 9) установление связей теоремы с изученными ранее» [41].

Цель: изучение практического применения теоремы.

Этап 8. Применение теоремы.

Решение задач:

Задача 1. «Найдите неизвестную сторону треугольника, если две его стороны и угол между ними равны соответственно $3\sqrt{3}$ см, 11 см и 30° » [3].
Ответ: 7 см.

Задача 2. «Сторона треугольника равна 28 см, а две другие стороны образуют угол 60° и относятся как 8 : 3. Найдите периметр треугольника» [3].
Ответ: 36 см.

Задача 3. Найдите стороны параллелограмма, если его диагонали длиной $6\sqrt{2}$ см и 14 см пересекаются под углом 45° . Найдите меньшую сторону параллелограмма.

Ответ: 5 см.

Задача 4. Найдите x для каждого из данных треугольников (рисунок 39, слайд 9).

Ответ: 1) $x = 4$; 2) $x \approx 49,773^\circ$.

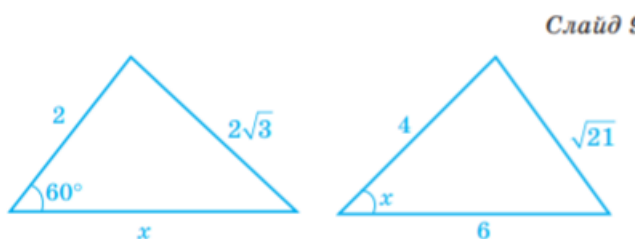


Рисунок 39 – К задаче 4

Этап 9. Установление связей теоремы с изученными ранее.

Методические рекомендации. На этом этапе работы с теоремой учащиеся решают задачи на решение треугольника; на применение теоремы о соотношениях между сторонами и углами треугольника; на применение теоремы о сумме углов треугольника, свойств и признаков равнобедренного треугольника и другие, также можно предложить школьникам задачи повышенной сложности. Приведем некоторые из них:

Задача 1. Стороны треугольника 11, $8\sqrt{3}$ и $\sqrt{577}$ см. Найдите наибольший угол этого треугольника.

Решение. По теореме о соотношениях между сторонами и углами треугольника («В треугольнике против большей стороны лежит больший угол» [3]) имеем: наибольший угол, лежащий напротив стороны $\sqrt{577}$. Запишем теорему косинусов для данной стороны:

$$(\sqrt{577})^2 = 11^2 + (8\sqrt{3})^2 - 2 \cdot 8\sqrt{3} \cdot 11 \cdot \cos A; 577 = 121 + 192 - 176\sqrt{3} \cdot \cos A.$$

$$\text{Тогда } \cos A = \frac{192+121-577}{176\sqrt{3}} = \frac{-264}{176\sqrt{3}} = -\frac{3}{2\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}. \text{ Значит } A = 150^\circ.$$

Ответ: 150° .

Задача 2. В параллелограмме ABCD диагональ AC = 16. Площадь параллелограмма $80\sqrt{3}$, $\angle CAD = 60^\circ$. Найдите длину стороны AB (рисунок 40).

Решение. Пусть $AD = x$, $S_{\triangle ADC} = 40\sqrt{3}$, $S_{\triangle ADC} = \frac{1}{2}AD \cdot AC \cdot \sin \angle DAC$, тогда: $\frac{1}{2} \cdot x \cdot 16 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 40\sqrt{3}$. Значит: $x = 10$. Из того же $\triangle ADC$ найдём DC по теореме косинусов: $DC^2 = AD^2 + AC^2 - 2 \cdot AD \cdot AC \cdot \cos \angle DAC$.

$$DC^2 = 100 + 256 - 2 \cdot 10 \cdot 16 \cdot \frac{1}{2} = 196, \text{ тогда } DC = 14. \text{ Имеем: } DC = AB = 14.$$

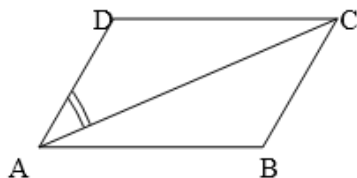


Рисунок 40 – К задаче 2

Ответ: 14.

На этапе закрепление данного урока учитель может предложить учащимся ответить на следующие вопросы:

Итак, для треугольника ABC справедливо равенство $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$.

- Что можно сказать о величине угла A этого треугольника?
- Что можно сказать о величине угла B треугольника ABC, если выполняется равенство $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B$.

– Найдите x для каждого из данных треугольников (рисунок 41, слайд 8). Ответ: 1) $x = \sqrt{7}$; 2) $x = \sqrt{19}$.

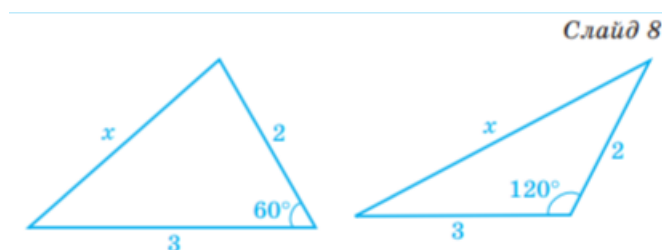


Рисунок 41 – К этапу закрепления урока

Подведение итогов. Домашнее задание.

Задача 1. Известны стороны треугольника ABC (рисунок 42): $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$. Найти длину медианы треугольника, проведенную к стороне BC.

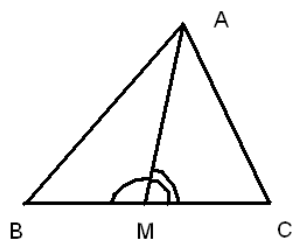


Рисунок 42 – К задаче №1 для домашней работы.

Задача 2. Четырехугольник ABCD вписан в окружность (рисунок 43). Известно, что $AB = 3$, $BC = 4$, $CD = 5$ и $AD = 2$. Найти диагональ AC.

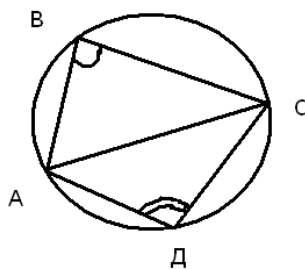


Рисунок 43 – К задаче №2 для домашней работы 2.

Задача 3. Выяснить вид треугольника, если длины его сторон равны 23, 17 и 19 см.

Таким образом, на данных двух уроках представлена технология системно-деятельностного подхода, реализованная при изучении теоремы косинусов.

Отметим, что на тему «Теорема синусов и теорема косинусов» отводится 4 часа. На последнем из уроков целесообразно провести итоговый контроль в форме самостоятельной работы.

Задания самостоятельной работы направлены на выявление умений решать задания по данной теме.

Примерный вариант заданий самостоятельной работы:

Задание 1 (на использование теоремы синусов). В $\triangle ABC$ сторона $AB = 8$ см, $\angle B = 45^\circ$, $\angle C = 60^\circ$. Найдите сторону AC .

Задание 2 (на использование теоремы косинусов). «Одна из сторон треугольника равна 28 см, а угол, противолежащий этой стороне, равен 60° . Найдите неизвестные стороны треугольника, если их разность равна 20 см» [3].

Задание 3. (на использование обеих теорем). В равнобедренном треугольнике ABC угол при вершине B равен 120° , $AC = 2\sqrt{21}$ см. Найдите длину медианы AM .

Решение заданий самостоятельной работы:

Задание 1. По теореме синусов найдем AC :

$$\frac{8}{\sin 60^\circ} = \frac{AC}{\sin 45^\circ}. \quad \text{Тогда } AC = \frac{2 \cdot 8 \cdot \sqrt{2}}{2\sqrt{3}} = 8\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

$$\text{Ответ: } AC = 8\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Задание 2. Одна из сторон треугольника равна 28 см, а угол, противолежащий этой стороне, равен 60° . Найдите неизвестные стороны треугольника, если их разность равна 20 см.

Решение. Пусть $c = 28$, тогда $\angle C = 60^\circ$. Если $a = x$, тогда $b = x + 20$.

По теореме косинусов получим: $28^2 = x^2 + (x + 20)^2 - 2x(x + 20) \cdot \cos 60^\circ$. Тогда:

$$784 = 2x^2 + 40x + 400 - x^2 - 20x; \quad x^2 + 20x - 384 = 0;$$

$$x_1 = 12; x_2 = -32. \text{ Следовательно, } a = 12, b = 32.$$

Ответ: 12 и 32 см.

Задание 3. В равнобедренном треугольнике ABC угол при вершине B равен 120° , $AC = 2\sqrt{21}$ см. Найдите длину медианы AM.

Решение. Так как треугольник ABC – равнобедренный, то $\angle C = \angle A = 30^\circ$. Точка M принадлежит стороне BC, по условию $BM = MC$. По теореме синусов найдем BC:

$$\frac{2\sqrt{21}}{\sin 120^\circ} = \frac{BC}{\sin 30^\circ}. \text{ Тогда } BC = \frac{0,5 \cdot 2\sqrt{21}}{\sin(180^\circ - 60^\circ)} = \frac{\sqrt{21}}{\sin 60^\circ} = \frac{2\sqrt{21}}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{7}.$$

$$\text{Тогда } BM = MC = \sqrt{7}.$$

Далее по теореме косинусов найдем медиану AM из треугольника AMC.

$$AM^2 = (2\sqrt{21})^2 + (\sqrt{7})^2 - 2 \cdot 2\sqrt{21} \cdot \sqrt{7} \cdot \cos 30^\circ = 84 + 7 - 28\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 49.$$

$$\text{Значит } AM = 7.$$

Ответ: 7 см.

Критерии оценки: задание №1 – 1 балл; задание №2 – 2 балла; задание №3 – 3 балла.

Задание 1 направлена на применение теоремы синусов; задание 2 – на применение теоремы косинусов, решается аналитическим способом; задание 3 – на применение обеих теорем.

Отметка «5» ставится за 6 баллов; отметка «4» – за 5 баллов; отметка «3» – за 3-4 балла; отметка «2» – за 0-2 балла.

Таким образом, использование технология системно-деятельностного подхода при изучении темы «Теорема синусов и теорема косинусов» способствует формированию у обучающихся 8-9 классов познавательных, регулятивных и коммуникативных универсальных учебных действий, ими достигаются метапредметные результаты обучения.

2.3 Педагогический эксперимент и его результаты

Педагогический эксперимент был проведен в 2021-2022 учебном году при прохождении производственной практики (педагогической практики) на базе ГБОУ «Школа № 1360» г. Москва в апреле – мае 2022 г.

В эксперименте приняли участие 40 учащихся 7 классов (2 класса по 20 человек) и 10 учителей математики данной школы.

Апробация результатов исследования осуществлялась учителем математики ГБОУ «Школа № 1360» г. Москва К.С. Павловой.

Отметим, что в контрольном классе (7А) обучение математике осуществлялось по традиционной методике; в экспериментальном классе (7Б) - на основе технологии системно-деятельностного подхода, предусматривающего вовлеченность учащихся в активную мыслительную деятельность на всех этапах изучения теорем.

Цель констатирующего этапа эксперимента: выявить уровень сформированности у учащихся 7 класса умения формулировать и доказывать теоремы; применять их при решению задач.

Задачи:

- выявить сформированность логических умений, образующих умение видеть содержание теоремы и выполнять восходящий и нисходящий анализ теоремы;
- выявить умение на основе анализа теоремы составлять план доказательства и доказывать теорему;
- выяснить, какие трудности испытывают обучающиеся 7 класса при изучении теорем.

Методы исследования:

- наблюдение за учащимися 7 класса в процессе решения задач на применение теорем с целью определения умения использовать их в процессе решения метрических задач и задач на доказательство;

- анализ диагностической работы учащихся 7 класса с целью установления уровня сформированности логических умений, связанных с использованием теорем при решении геометрических задач;
- анкетирование учителей математики с целью выявления трудностей обучающихся при изучении теорем.

Приведем текст диагностической работы.

Диагностическая работа.

Учащимся предлагается геометрическая задача:

Два отрезка AB и CK пересекаются в точке O , которая является серединой обоих отрезков. Точки A и C , B и K соединены отрезками. Докажите что отрезки AC и BK равны.

Блок 1 (содержание задачи).

Цель диагностики: установление уровня сформированности умения учащихся понимать содержательный компонент задачи на доказательство.

Вопросы для учащихся.

- Какие геометрические объекты даны в задаче?
- Что о них известно?
- Что можно сказать о точке O ?
- Что можно сказать о длинах отрезков AB и CK ?
- Определите отношения между данными в задаче.
- Что можно утверждать об отрезках AC и BK ?
- Каково требование задачи?
- Сделайте чертёж к задаче.
- Какие дополнительные построения нужны к задаче?
- Выполните дополнительные построения на чертеже.

В определения уровня сформированности умения учащихся понимать содержательный компонент задачи на доказательство на констатирующем этапе эксперимента нами была использована соответствующая таблица А.1, бланк которой представлен в Приложении А.

Блок 2 (восходящий анализ задачи: от требования к условию).

Цель диагностики: установление уровня сформированности умения выполнять восходящий анализ задачи, составлять план доказательства.

Вопросы для учащихся.

- Что нужно доказать, чтобы утверждать, что отрезки BK и AC равны?
- Какое дополнительное построение нужно для этого выполнить?
- Как можно установить равенство треугольников OAC и OBK ?
- Какая теорема - признак равенства треугольников подходит для доказательства?
- Равенство каких элементов треугольников нужно доказать?
- Как можно установить равенство отрезков OA и OB ?
- Как можно установить равенство отрезков OC и OK ?
- Как можно установить равенство углов AOC и BOK ?
- Выберите необходимые для доказательства условия и следствия из них.
- Составьте план доказательства на основе ответов на вопросы.
- Запишите доказательство.

Блок 3 (нисходящий анализ задачи: от условия к требованию).

Цель диагностики: установление сформированности умения выполнять нисходящий анализ задачи в ходе поиска способа доказательства задачи.

Вопросы для учащихся.

- Какие следствия можно вывести из того, что отрезки AB и CK пересекаются в точке O ?
- Какие следствия можно вывести из того, точка O является серединой отрезков AB и CK ?
- Какие треугольники получатся, если построить отрезки CA и BK ?
- Равенство каких элементов треугольников можно установить по выведенным следствиям из условия и дополнительного построения?
- Под какую теорему - признак равенства треугольников можно подвести задачу?

- Какие следствия можно вывести из равенства треугольников?
- Назовите следствия, не нужные для решения задачи.
- Назовите следствия, на основе которых будет построено доказательство.
- Расположите отобранные следствия в нужном порядке.
- Составьте план доказательства.
- Запишите доказательство.

Приведем результаты констатирующего этапа эксперимента (рисунок 44) по обучающимся.

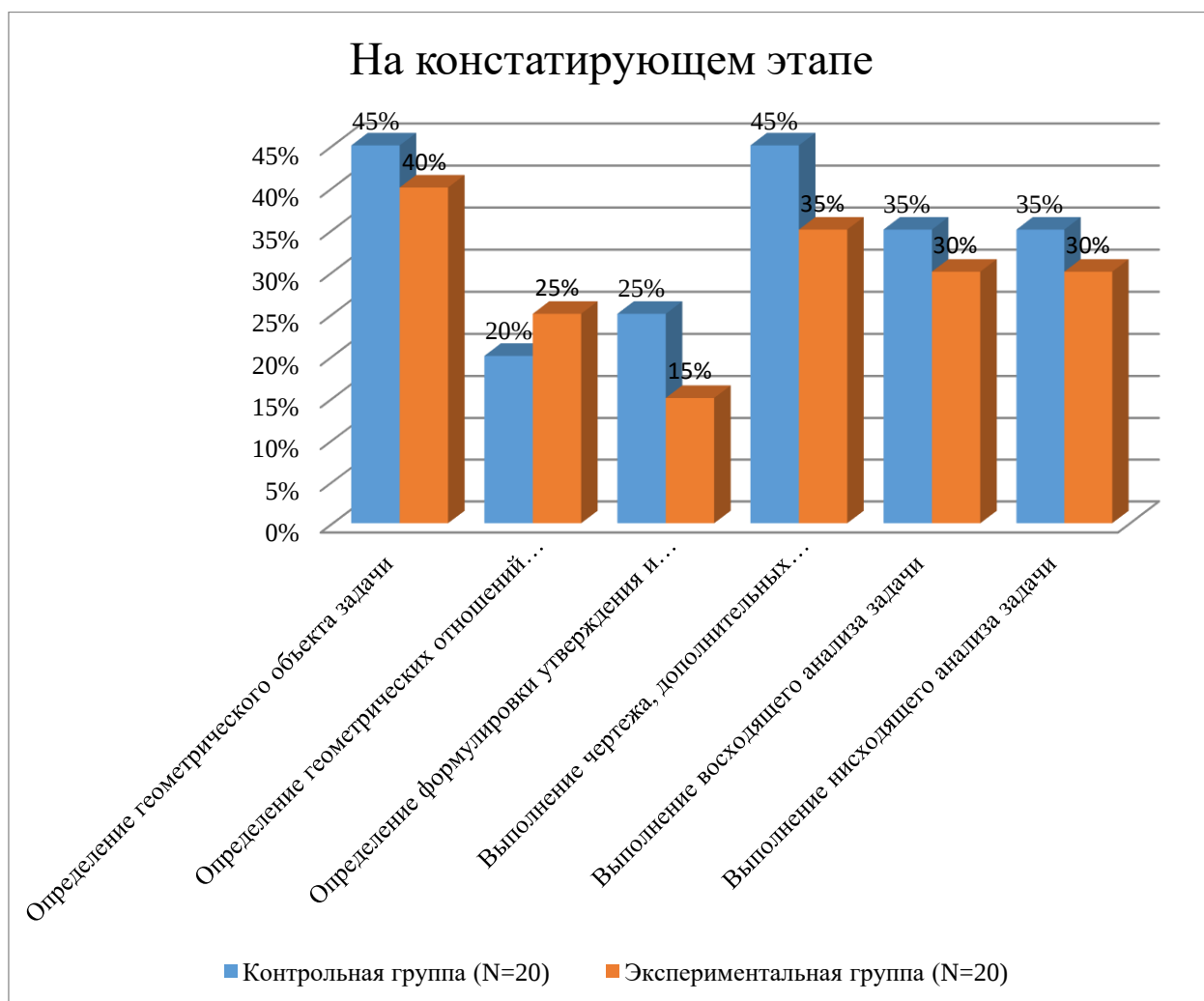


Рисунок 44 - Диаграмма результатов обучающихся на констатирующем этапе эксперимента

По результатам констатирующего этапа эксперимента были сделаны следующие выводы: основные показатели умения учащихся понимать содержательный компонент задачи на доказательство различаются в контрольном и экспериментальном классе незначительно; у обучающихся недостаточно сформировано умение выполнять восходящий анализ задачи, составлять план доказательства; недостаточно сформировано умение выполнять нисходящий анализ задачи в ходе поиска способа ее доказательства.

Кроме того, на констатирующем этапе эксперимента в контрольном и экспериментальном классах нами было проведено анкетирование учителей математики с целью выявления трудностей обучающихся 7 класса при изучении теорем. Текст анкеты представлен нами в таблице Б.1 Приложения Б. Цель анкетирования учителей: выявить трудности учащихся при обучении теоремам и их доказательствам.

Интерпретация результатов. В анкету для учителя включены логические умения, составляющие учебное действие - умение доказывать теорему и применять ее при решении задач.

Значения баллов:

- 0 баллов - умение не сформировано;
- 1 балл - ученики несамостоятельны в применении данного умения, допускают логические ошибки;
- 2 балла - ученики показывают сформированность умения на уровне наводящих вопросов;
- 3 балла - ученики допускают ошибки в применении умения к доказательству теорем, связанные с выбором последовательности логических шагов, обоснованием, выводом следствий, применением понятий;
- 4 балла - ученики допускают ошибки в применении умения к доказательству теорем, связанные с выбором последовательности логических шагов, негрубые терминологические ошибки.

– 5 баллов - у учеников сформировано исследуемое умение.

На каждый из 15 вопросов учителям было предложено выставить в качестве ответа показатель от 0 до 5 баллов, характеризующих уровень сформированности каждого из 15 предложенных для оценки умений (рисунок 45).

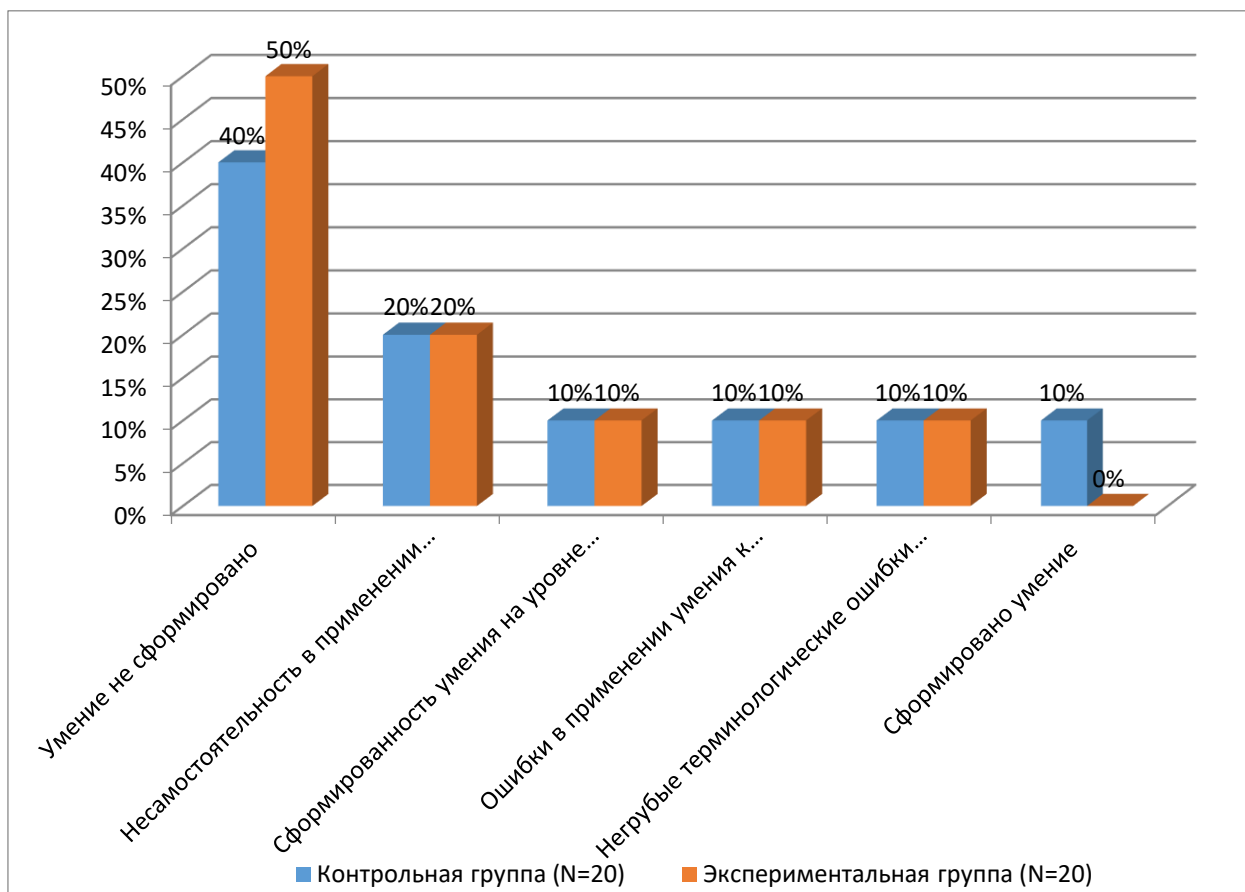


Рисунок 45 - Результаты анкетирования учителей на констатирующем этапе (в % выражены ответы учителей по отношению к каждой группе)

Результаты анкетирования учителей показали, что умение доказывать теорему и применять ее при решении задач не сформированно у 40% учащихся контрольной группы и 50% учащихся экспериментальной группы. Так, 20% педагогов как в отношении контрольной, так и в отношении экспериментальной групп выразили мнение о несамостоятельности учеников в применении данного умения, их склонность к логическим ошибкам. По одному учителю поставили 2, 3 и 4 балла соответственно по отношению к

каждой группе. Если в контрольной группе один учитель оценил наличие сформированного умения у учащихся, то в для экспериментальной группы такого мнения не высказал ни один из респондентов.

После констатирующего этапа эксперимента с апреля 2022 г. осуществлялась апробация методических рекомендаций по обучению теоремам в курсе школьной геометрии на основе применения технологии системно-деятельностного подхода в рамках поискового этапа эксперимента.

В конце мая 2022 г. был проведен контрольный этап эксперимента, где учащимся была предложена задача, близкая по цели диагностики задаче на констатирующем этапе.

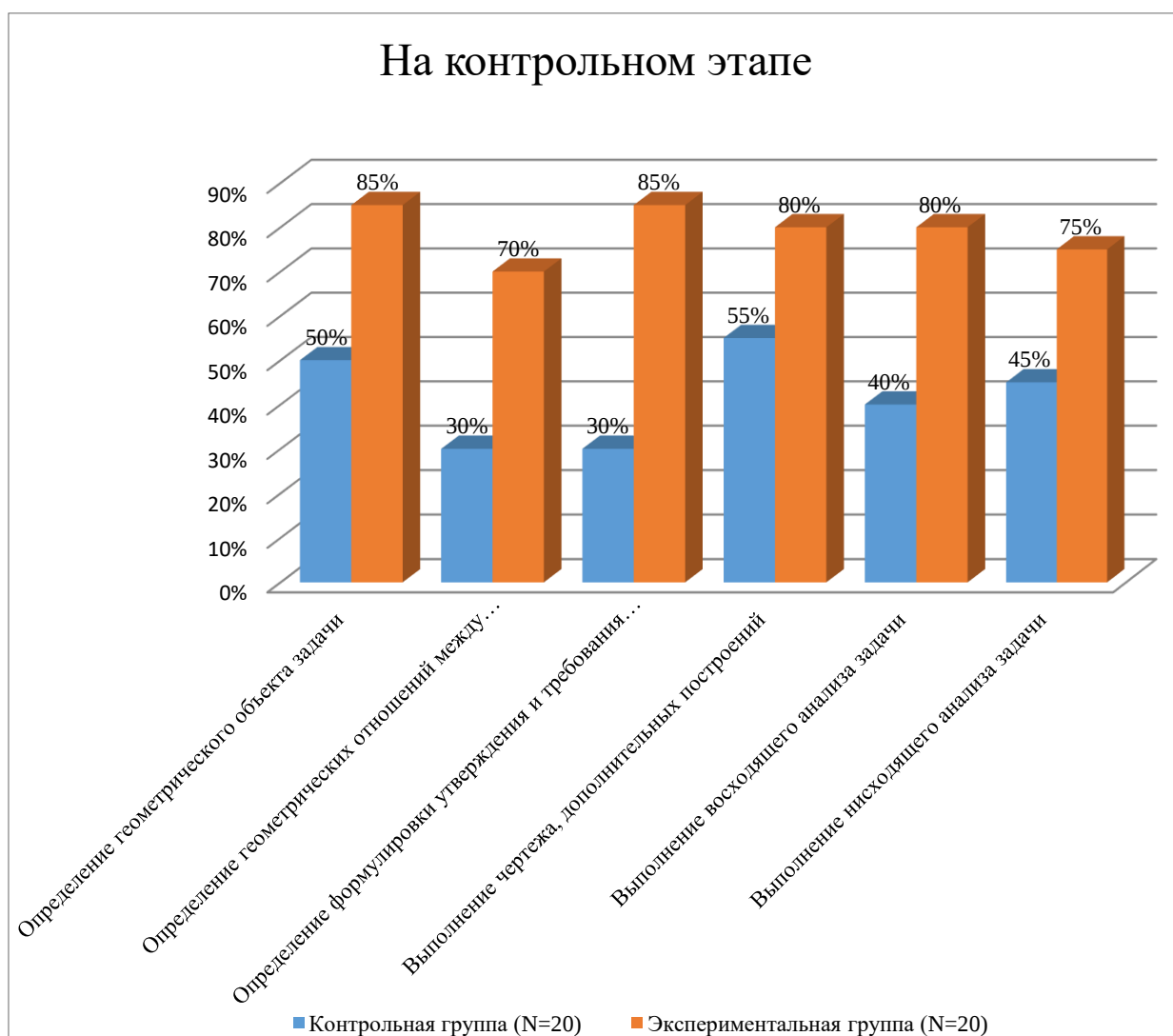


Рисунок 46 - Диаграмма результатов обучающихся на контрольном этапе педагогического эксперимента

Контрольный этап эксперимента показал (рисунок 46), что в экспериментальной группе у обучающихся основные показатели умения учащихся понимать содержательный компонент задачи на доказательство; уровня сформированности умения выполнять восходящий анализ задачи, составлять план доказательства и уровня сформированности умения выполнять нисходящий анализ задачи в ходе поиска способа ее доказательства более значительные. Диагностика среди учителей на контрольном этапе не проводилась.

Таким образом, полученные результаты свидетельствуют об эффективности использования технологии системно-деятельностного подхода с целью повышения уровня сформированности у обучающихся умения формулировать и доказывать теоремы; применять их при решении задач.

Выводы по второй главе

Описаны методические рекомендации по обучению теоремам в курсе геометрии общеобразовательной школы.

Спроектировано изучение темы «Теорема синусов и теорема косинусов» на основе технологии системно-деятельностного подхода в школьном курсе геометрии (по Г.И. Саранцеву).

Представлены результаты педагогического эксперимента, проведенного в 2021-2022 учебном году при прохождении производственной практики (педагогической практики) на базе ГБОУ «Школа № 1360» г. Москва в апреле – мае 2022 г.

Заключение

Основные выводы и полученные результаты данного исследования:

1. Раскрыто понятие теоремы, методы доказательства теорем. Определено, что теоремы и их доказательства развивают пространственные представления школьников и их воображение, учат различным методам доказательства, способствуют осознанию идеи аксиоматического построения математики.

2. Выявлены различные подходы к обучению теоремам в школьном курсе геометрии.

3. Описаны методические рекомендации по обучению теоремам в курсе геометрии общеобразовательной школы.

Так, рекомендуется:

- использовать практико-ориентированных задачи с целью повышения познавательного интереса школьников к изучению геометрии;
- перед обучением теоремам знакомить их с понятием «высказывание»;
- применять определенный набор заданий для изучения необходимых и достаточных условий, который помимо задач должен содержать и необходимый теоретический материал;
- применять технологию компрессивного обучения;
- при изучении доказательства использовать составление его плана.

4. Спроектировано изучение темы «Теорема синусов и теорема косинусов» на основе технологии системно-деятельностного подхода в школьном курсе геометрии (по Г.И. Саранцеву) на основе учебника Л.С. Атанасяна.

5. Представлены результаты педагогического эксперимента, которые свидетельствуют об эффективности использования технологии системно-деятельностного подхода с целью повышения уровня сформированности у обучающихся умения формулировать и доказывать теоремы; применять их при решении задач.

Таким образом, цель и задачи исследования достигнуты.

Список используемой литературы

1. Абдулгалимов Г.Л. Методика формирования системы базовых знаний по геометрии с использованием компьютерных технологий как основы обучения решению задач: автореф. дис. ... канд. пед. наук: 13.00.02 / Дагестан. гос. пед. ун-т. Махачкала, 2004. 16 с.

2. Антонова И.В., Оркина Э.Л. Некоторые методические особенности организации обучения теоремам на уроках геометрии в общеобразовательной школе / И.В. Антонова, Э.Л. Оркина // Теоретико-методологические аспекты преподавания математики в современных условиях: материалы V Международной научно-практической конференции, 04-05 мая 2022 г., г. Луганск. Луганск: ГОУ ВО ЛНР «Луганский государственный педагогический университет», 2022 (в печати).

3. Атанасян, Л.С. Геометрия. 7-9 классы [Текст]: учеб. для общеобразоват. учреждений / Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев и др. 2-е изд. М.: Просвещение, 2014. 383 с.

4. Атанасян Л.С. Геометрия. Методические рекомендации. 7 класс. [Текст]: учеб. для общеобразоват. организаций / Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, Ю.А. Глазков и др. М.: Просвещение, 2015 95 с.

5. Боевец Л.Б. Урок геометрии на тему «Теорема синусов». 9-й класс [Электронный ресурс]. URL: <https://urok.1sept.ru/articles/639424> (дата обращения 01.05.2022).

6. Бурмистрова Т.А. Геометрия. Сборник рабочих программ. 7-9 классы [Текст]: пособие для учителей общеобразоват. учреждений / Т.А. Бурмистрова. М.: Просвещение, 2014. 95 с.

7. Буцко Е.В. Геометрия: 9 класс: методическое пособие / Е.В. Буцко, А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонский, М.С. Якир. М.: Вентана-Граф, 2018. 176 с. (Российский учебник: Алгоритм успеха).

8. Великих А.С. Обучение учащихся основной школы необходимым и достаточным условиям на уроках планиметрии [Электронный ресурс] /

А.С. Великих, У.Б. Капшен // Актуальные проблемы современной науки, техники и образования. 2016. Т.2. № 1. С. 319-322. URL: https://elibrary.ru/download/elibrary_26737390_45241067.pdf (дата обращения 10.05.2022).

9. Ветошкина Е.С. Обучение учащихся проведению доказательств на уроках геометрии в основной школе: автореф. дис. ... канд. пед. наук: 13.00.02 / Моск. пед. гос. ун-т. М., 2004. 16 с.

10. Воеводина О.А. Программа элективного курса «Методы решения математических задач» [Электронный ресурс]. URL: <https://nsportal.ru/shkola/algebra/library/2013/01/11/programma-elektivnogo-kursa-metody-resheniya-matematicheskikh> (дата обращения 22.04.2022).

11. Галилей Г. Избранные произведения в двух томах. М.: Наука, 1964. Т. 2. С. 221.

12. Геометрия. Сборник примерных рабочих программ. 10-11 классы : учеб. пособие для общеобразоват. организаций : базовый и углубл. уровни / [сост. Т. А. Бурмистрова]. 4-е изд. М.: Просвещение, 2020. 159 с.

13. Геометрия. Методические рекомендации. 9 класс: учеб. пособие для общеобразоват. организаций / [Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, Ю.А. Глазков и др.]. М.: Просвещение, 2015. 96 с.

14. Глейзер Г.И. История математики в школе VII-VIII кл.: пособие для учителей. М.: Просвещение, 1982. 240 с.

15. Груденов Я.И. Изучение определений, аксиом, теорем: пособие для учителей / Я.И. Груденов. М.: Просвещение, 1981. 95 с.

16. Гусев В.А., Орлов В.В., Панчишина В.А. Методика обучения геометрии: Учеб. пособие для студ. высш. пед. учеб. заведений / В.А. Гусев, В.В. Орлов, В.А. Панчишина и др.; Под ред. М.: Издательский центр «Академия». 368 с.

17. Далингер В.А. Обучение учащихся доказательству теорем: учебное пособие [Электронный ресурс] / В. А. Далингер. Омск: Издательство ОмГПУ, 2002. 419 с. URL:

<http://lib.omgpu.ru/FullText/%D0%94%D0%B0%D0%BB%D0%B8%D0%BD%D0%B3%D0%B5%D1%8016.pdf> (дата обращения: 06.02.2022).

18. Детушева Л.В. Методика обучения учащихся доказательству теорем в контексте компрессивного обучения // Ученые записки. Электронный научный журнал Курского государственного университета. 2015. № 1(33). С. 160-164.

19. Епишева О.Б. Технология обучения математике на основе деятельного подхода: Кн. для учителя / О.Б. Епишева. М.: Просвещение, 2003. 222 с.

20. Жохов В.И. Поурочные разработки. 7-9 классы (по учебнику А.В. Погорелова): учеб. пособие для общеобразоват. организаций / В.И. Жохов, Г.Д. Карташева, Л.Б. Крайнева. 5-е изд. М.: Просвещение, 2017. 240 с.

21. Ковалева Г.И., Маслова О.А. Системы задач как средство формирования умений работать с теоремами у бакалавров педагогического образования по профилю «математика» на занятиях по математической логике // Современные проблемы науки и образования. 2013. № 6. С. 371.

22. Костюк Л.Г. Элективный курс «Подготовка к ЕГЭ по математике». [Электронный ресурс]. URL: https://xn--j1ahfl.xn--p1ai/library/elektivnij_kurs_podgotovka_k_ege_po_matematike_081140.html (дата обращения: 06.05.2022).

23. Лященко Е.И. Лабораторные и практические работы по методике преподавания математике [Текст]: учеб. пособие для студентов физ. -мат. спец. пед. ин-тов / Е. И. Лященко. М.: Просвещение, 1988. 223 с.

24. Мерзляк А.Г., Поляков В.М. Геометрия: учебник, 9 класс: углубленный уровень / А.Г. Мерзляк, В.М. Поляков. Под ред. В.Е. Подольского. М.: Издательский центр «Вентана-Граф», 2019. 306 с.

25. Методика и технология обучения математике. Лабораторный практикум: учебное пособие для студентов матем. факультетов пед. университетов / [Н.Л. Стефанова и др.]; под научн. ред. В.В. Орлова. М.: Дрофа, 2007. 320 с.

26. Мищенко Т.М. Дидактические материалы и методические рекомендации для учителя по геометрии: 9 класс [Текст]: к учебнику Л.С. Атанасяна и др. «Геометрия. 7-9 классы». ФГОС (к новому учебнику) / Т.М. Мищенко. М.: Издательство «Экзамен», 2017. 142 с.

27. Мищенко Т.М. Дидактические материалы и методические рекомендации для учителя по геометрии: 9 класс [Текст]: к учебнику А.В. Погорелова «Геометрия. 7-9 классы». / Т.М. Мищенко. М.: Издательство «Экзамен», 2015. 160 с.

28. Муравина О.В. Геометрия. 7–9 классы. Методическое пособие к учебнику И. Ф. Шарыгина. М.: Дрофа. Серия: Вертикаль, 2013. 365 с.

29. Оганесян В.А., Колягин Ю.М., Луканкин Г.Л., Саннинский В.Я. Методика преподавания математики в средней школе: Общая методика. М., 1975. 462 с.

30. Осипчук Е.Н. План-конспект урока по геометрии на тему «Теорема косинусов» (9 класс) [Электронный ресурс]. URL: http://www.academy.edu.by/files/sem-konf%202019/mr_Osipchuk.pdf (дата обращения: 06.05.2022).

31. Пиголкина Т.С. Теорема синусов и косинусов [Электронный ресурс]. URL: <https://zftsh.online/articles/4669> (дата обращения: 02.05.2022).

32. Погорелов, А. В. Геометрия. 7-9 классы [Текст]: учеб. для общеобразоват. организаций / А. В. Погорелов. - 2-е изд. М.: Просвещение, 2014. 240 с.

33. Приказ Минобрнауки России от 17.05.2012 N 413 (ред. от 11.12.2020) «Об утверждении федерального государственного образовательного стандарта среднего общего образования» (Зарегистрировано в Минюсте России 07.06.2012 N 24480) // Российская газета. N 139. 21.06.2012.

34. Приказ Минпросвещения России от 31.05.2021 N 287 «Об утверждении федерального государственного образовательного стандарта основного общего образования» (Зарегистрировано в Минюсте России

05.07.2021 N 64101) // Официальный интернет-портал правовой информации
<http://pravo.gov.ru>. 05.07.2021.

35. Примерная основная образовательная программа основного общего образования. Одобрена решением федерального учебно - методического объединения по общему образованию / М-во образования и науки РФ. М.: Просвещение, 2015. 560 с. [Электронный ресурс]. URL: <http://fgosreestr.ru/wp-content/uploads/2017/03/primernaja-osnovnaja-obrazovatel'naja-programma-osnovogo-obshchego-obrazovanija.pdf> (дата обращения 20.04.2022).

36. Программы общеобразовательных организаций. Геометрия. 7-9 класс. Сост. Т.А. Бурмистрова. М.: Просвещение, 2019. 136 с.

37. Решу ОГЭ. Образовательный портал для подготовки к экзаменам [Электронный ресурс]. URL: <https://oge.sdamgia.ru/> (дата обращения 12.05.2022).

38. Решу ЕГЭ. Образовательный портал для подготовки к экзаменам [Электронный ресурс]. URL: <https://math-ege.sdamgia.ru/> (дата обращения 10.05.2022).

39. Рингельман Е.В. Изучение темы «Теорема косинусов» в 9-м классе [Электронный ресурс]. URL: <https://urok.1sept.ru/articles/514356> (дата обращения 12.05.2022).

40. Садовников Н.В., Шакирзянова О.Г. Методические основы обучения теоремам в школьном курсе математики [Электронный ресурс] // IN SITU. 2015. №4. С 112-115.

41. Саранцев Г.И. Методика обучения математике в средней школе: учеб. пособие для ст-тов мат. спец. пед. вузов и ун-тов. М.: Просвещение, 2002. 224 с.

42. Саранцев Г.И. Обучение математическим доказательствам в школе: пос. для учителя. М.: Просвещение, 2000. 176 с.

43. Сарванова Ж.А., Куприянова Т.А. Использование прикладных задач для изучения теорем школьного курса геометрии // Актуальные

проблемы математики и методики её преподавания: материалы Международной научно-практической конференции «54-е Евсевьевские чтения», Саранск, 28–29 марта 2018 года. Изд-во: Мордовский государственный педагогический институт имени М.Е. Евсевьева (Саранск), 2018. С. 73-77.

44. Смирнова И.М. Сайт учебно-методических комплексов по геометрии для 5-11 классов [Электронный ресурс] / И.М. Смирнова, В.А. Смирнов. URL: <http://www.geometry2006.narod.ru/> (дата обращения 17.04.2022).

45. Стефанова Н.Л. Методика и технология обучения математике [Текст]: курс лекций, пособие для вузов / под научн. ред. Н.Л. Стефановой, Н.С. Подходовой. М.: Дрофа, 2005. 416 с.

46. Страбыкина Л.А. Формирование геометрических понятий в средней школе с использованием компьютера: дис. ... канд. пед. наук: 13.00.02. Киров, 2002. 166 с.

47. Темербекова А.А. Методика обучения математике [Текст]: учебное пособие / А.А. Темербекова, И.В. Чугунова, Г.А. Байгонакова. СПб.: Издательство «Лань», 2015. 512 с.

48. Теория и технология обучения математике в средней школе: Учеб. пособие для студентов математических специальностей педагогических вузов / Т.А. Иванова [и др.]. Под ред. Т.А. Ивановой. 2-е изд., испр. и доп. Н. Новгород: НГПУ, 2009. 355 с.

49. Фестиваль педагогических идей «Открытый урок» [Электронный ресурс]. URL: <https://urok.1sept.ru/> (дата обращения 16.05.2022).

50. Шалина О.Н. Критерии выбора методов обучения доказательству теорем курса геометрии основной школы: автореф. дис. ... канд. пед. наук: 13.00.02 / Морд. гос. пед. ин-т им. М.Е. Евсевьева. Саранск, 2012. 23 с.

51. Шарыгин И.Ф. Геометрия. 7-9 кл. [Текст]: учеб. для общеобразоват. учреждений / И.Ф. Шарыгин. М.: Дрофа, 2012. 462 с.

52. Шереметевский В.П. Очерки по истории математики. Под ред. и с

предисл. А.П. Юшкевича. 3-е изд. М.: URSS, 2007. 178 с.

53. Ширикова Т.С. Методика обучения учащихся основной школы доказательству теорем при изучении геометрии с использованием GeoGebra: автореферат дис. ... канд. пед. наук: 13.00.02 / Ярослав. гос. пед. ун-т им. К.Д. Ушинского. Ярославль, 2014. 24 с.

54. Alexander D. Elementary geometry for college students. 5th ed. / Daniel C. Alexander, GERALYN M. KOEBERLEIN. Belmont: Brooks/Cole, Cengage learning, 2011. 605 p.

55. Chiteu C., Trifu S. Organizational forms in didactic activity [Text] / C. Chiteu, S. Trifu // Procedia - Social and Behavioral Sciences, 2014. PP. 299-304.

56. David A. Brannan, Matthew, F. Esplen, Jeremy, J. Gray Geometry: second edition / A. Brannan David, F. Esplen Matthew, J. Gray Jeremy. New York: Cambridge university Press, 2012. 587 pp.

57. Lang S. Geometry. 2nd ed. / Serge Lang, Gene Murrow. - New York: Springer-Verlag New York, Inc., 1988. 391 p.

58. Libeskind S. Euclidean and Transformational Geometry: A Deductive Inquiry. - Jones & Bartlett Publishers, 2007. 371 p.

Приложение А

Диагностическая работа

Таблица А.1 – Бланк теста для интерпретации результатов блока 1 диагностической работы

Выявленное умение	Номера вопросов и заданий	Количество правильных ответов	Процент правильных ответов
Определение геометрического объекта задачи.	1-2		
Определение геометрических отношений между объектами задачи.	3-5		
Определение формулировки утверждения и требования задачи.	6-7		
Выполнение чертежа, дополнительных построений.	8-10		

Приложение Б

Анкета для учителей математики

Текст анкеты и соответствующие баллы для обработки ее результатов приведены в таблице Б.1.

Таблица Б.1 - Обработка результатов анкетирования учителей математики

Вопросы анкеты	Баллы
1. У учащихся сформирована потребность в доказательстве теорем, школьники понимают необходимость доказательства.	Баллы от 0 до 5 к каждому утверждению в следующей градации: – 0 баллов - умение не сформировано; – 1 балл - ученики несамостоятельны в применении данного умения, допускают логические ошибки; – 2 балла - ученики показывают сформированность умения на уровне наводящих вопросов; – 3 балла - ученики допускают ошибки в применении умения к доказательству теорем, связанные с выбором последовательности логических шагов, обоснования, выводом следствий, применения понятий; – 4 балла - ученики допускают ошибки в применении умения к доказательству теорем, связанные с выбором последовательности логических шагов, негрубые терминологические ошибки. – 5 баллов – у учеников сформировано исследуемое умение.
2. Ученики умеют анализировать условие.	
3. Ученики точно формулируют теорему, не искажают её смысл.	
4. Школьники умеют выделять условие и заключение теоремы, связывать эти части с помощью логической связки «если..., то...».	
5. У обучающихся сформировано умение записывать условие и заключение теоремы в краткой символической форме.	
6. Ученики умеют построить чертёж к доказываемой теореме.	
7. Ученики легко воспроизводят доказательство теоремы на знакомом готовом чертеже.	
8. Ученики строят доказательство последовательно, по плану.	
9. Рассуждения учеников построены на дедуктивных умозаклчениях.	
10. Ученики умеют выводить логические следствия из используемых в доказательстве определений понятий и их свойств.	
11. Ученики умеют строить геометрические чертежи и читать их.	
12. Ученики умеют обобщать и формулировать выводы при доказательстве теорем.	
13. Ученики видят область применения теоремы при решении задач.	
14. Учащиеся умеют применять логические следствия из теоремы при решении метрической задачи.	
15. Ученики применяют теорему для обоснования шагов решения задачи на доказательство.	