МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Тольяттинский государственный университет»

Институт математики, физики и информационных технологий
(наименование института полностью)

Кафедра «Высшая математика и математическое образование»
(наименование)

44.04.01 Педагогическое образование
(код и наименование направления подготовки)

Математическое образование
(направленность (профиль))

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА (МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ)

на тему «Проблемно-поисковые задачи как средство организации коллективной формы учебной деятельности при обучении математике в общеобразовательной школе»

Студент А.А. Кузнецова
(И.О. Фамилия) (личная подпись)

Научный руководитель д-р пед. наук, профессор, Р.А. Утеева
(ученая степень, звание, И.О. Фамилия)

Тольятти 2022

Оглавление

Введение

Актуальность и научная значимость настоящего исследования. Целями современного образования являются формирование ценностно-смысловых установок, развитие интереса, целенаправленное формирование и развитие познавательных потребностей и способностей обучающихся средствами различных предметов, овладение системой учебных действий (универсальных и специфических для данного учебного предмета: личностных, регулятивных, коммуникативных, познавательных), учебным материалом, и прежде всего с опорным учебным материалом, служащим основой для последующего обучения» [44, с.5].

Целями математического образования являются [1, с. 27]:

–формирование представлений о математике как универсальном языке науки, средстве моделирования явлений и процессов, об идеях и методах математики;

–развитие логического мышления, пространственного воображения, алгоритмической культуры, критичности мышления на уровне, необходимом для будущей профессиональной деятельности, а также последующего обучения в высшей школе;

–овладение математическими знаниями и умениями, необходимыми в повседневной жизни, для изучения школьных естественнонаучных дисциплин на базовом уровне, для получения образования в областях, не требующих углубленной математической подготовки;

–воспитание средствами математики культуры личности, понимания значимости математики для научно-технического прогресса, отношение к математике как к части общечеловеческой культуры через знакомство с историей развития математики, эволюцией математических идей.

«Содержанием современного образования является ответ на вопрос, что обучающийся должен знать (запомнить, воспроизвести), формирование универсальных учебных действий в личностных, коммуникативных, познавательных, регулятивных сферах, обеспечивающих способность к организации самостоятельной учебной деятельности, характеристика обобщённых способов действий с учебным материалом, определение в программах содержания тех знаний, умений и способов деятельности, которые являются над предметными» [44, с.12].

«Содержанием математического образования является:

– предмет и метод математики, ее ведущие идеи и понятия, математический язык, связь с другими науками и практикой, математическое моделирование;

– процесс познания в математике;

– специфика творческой математической деятельности как сплав интуиции и логики;

– методы научного познания (как общие эвристические и логические, так и специфические способы, и приемы);

– эстетика математики;

– культура мышления;

–история математики;

–эмоционально-ценностное отношение к математике и математической деятельности;

–информационный компонент» [14, с.29].

В настоящее время возрастает потребность общества в людях, способных творчески подходить к любым изменениям, нетрадиционно и качественно решать существующие проблемы, способных работать в команде. Особую значимость данная тема приобретает в современном обществе, связано это с развитием новых технологий, науки и социально-экономических преобразований в стране.

Совместно с важными социальными и психолого-педагогическими задачами современное общество рассматривает проблему творчества, нетрадиционных способов решения задач и коммуникативного потенциала учащихся. Это связано с тем, что для дальнейшего развития государства и общества, а также для решения творческих задач требуются подготовленные, талантливые молодые люди, умеющие работать в команде.

В настоящее время педагоги нацелены на поиск эффективных педагогических технологий, что является важной и актуальной проблемой в методике преподавания математики и других дисциплин.

«Проблемное обучение – это совокупность таких действий как организация проблемных ситуаций, формулирование проблем, оказание ученикам необходимой помощи в решении проблем, проверка этих решений и, наконец, руководство процессом систематизации и закрепления приобретенных знаний» [33, с.51].

В научно-методической литературе исследователи по-разному трактуют понятие проблемного изложения.

Согласно И.Я. Лернеру [31, с. 43] и М.Н. Скаткину [48, с.48], при использовании проблемного изложения, учитель сам формулирует проблему и находит ее решение. Тем самым предоставляя учащимся не только новые знания, но и способ создания противоречий в процессе решения задач.

Другие авторы, например, Н.Г. Дайри [8, с.36], М.И. Кругляк [24], отмечают, что при использовании метода проблемного изложения, учитель сообщает учащимся материал не полностью, а только его часть, остальную часть (законы, правила, теории) выводится учащимися самостоятельно.

Одним из эффективных средств обучения с точки зрения организации коллективной учебной деятельности учащихся на уроках математики, как показывает практика, являются проблемно-поисковые задачи [58].

А.С. Курбакова выделяет следующие признаки проблемной задачи:

«– проблемная задача должна способствовать возникновению удивления и ощущения трудности у обучающихся, а также желанию данную трудность преодолеть;

–все элементы задачи должны находится в противоречии между собой и с теми знаниями, какими обладает обучающийся;

–задачи должны порождать проблемные ситуации и необходимость в открытии новых знаний;

–все способы решения обучающимся необходимо отыскать самостоятельно»;

– задача должна быть интересной и нестандартной, предполагать наличие элементов исследования; содержать новые знания, новые методы, новую информацию» [26].

В теории и методике обучения математике выделяют четыре формы организации учебной деятельности учащихся: фронтальную, коллективную, групповую и индивидуальную [58].

Коллективная форма деятельности являлась предметом исследований многих ученых, например, Ю.К. Бабанского [3], В.В. Котова [23], В.А. Петровского [40], И.Б. Первина [41], М.Н. Скаткина [50] И.М. Чередова [64] и других.

Основу данного исследования составляет концепция Р.А. Утеевой к определению понятия «форма учебной деятельности учащихся», согласно которой «коллективной формой учебной деятельности учащихся на уроке называется такой способ организации учебной деятельности класса, если:

– пред всеми учащимися одновременно поставлена цель, как общая цель для всех;

– учащиеся выполняют одинаковые задания;

– в основе формы лежит коллективная деятельность учащихся класса, реализующая отношение «действия учителя – действия класса – действия ученика»;

– учащимся оказывается одинаковая помощь со стороны учителя и взаимопомощь со стороны друг друга;

– руководство по выполнению задания осуществляет учитель и частично сами учащиеся;

– подводятся итоги деятельности учащихся класса, как общий достигнутый результат всех учащихся» [59, с. 33].

Констатирующий этап педагогического эксперимента, анализ практики работы учителей математики, свидетельствует о том, что проблемно-поисковые задачи как средство организации коллективной формы учебной деятельности при обучении математике в общеобразовательной школе используются недостаточно широко.

Причину этого факта, мы видим в том, что большинство учителей сталкиваются с трудностями при постановке проблемно-поисковых задач, недостаточно их количество в современных школьных учебниках и не всегда достаточно времени на организацию коллективной формы деятельности на уроках математики.

Возникает **противоречие** между необходимостью формирования коммуникативных умений обучающихся и недостаточным использованием возможностей проблемно-поисковых задач, как средств организации коллективной формы учебной деятельности при обучении математике в общеобразовательной школе.

Все выше сказанное определяет актуальность **проблемы исследования:** обоснование методикиорганизацииколлективной формы учебной деятельности при обучении математике в общеобразовательной школе с использованием проблемно-поисковых задач.

Объект исследования: процесс обучения математике в общеобразовательной школе.

Предмет исследования: методика организации коллективной формы учебной деятельности при обучении математике в общеобразовательной школе на основе проблемно-поисковых задач.

Цель исследования: разработать методику организации коллективной формы учебной деятельности обучающихся на основе спроектированной системы проблемно-поисковых задач при обучении математике в 8-9 классах общеобразовательной школы.

Гипотеза исследования: методика организации коллективной формы учебной деятельности при обучении математике в общеобразовательной школе на основе проблемно-поисковых задач позволит сформировать коммуникативные умения обучающихся и достижение каждым из них базового уровня знаний и умений, если:

– будет спроектирована система проблемно-поисковых задач, согласно концепции Ю.М. Колягина [20], [21];

– её реализация будет основана на сочетании на уроке коллективной формы учебной деятельности с фронтальной и индивидуальной, согласно концепции Р.А. Утеевой [61].

Для достижения поставленной цели и в соответствии с выдвинутой гипотезой были сформулированы следующие **задачи** исследования:

1. Выявить теоретические основы проблемно-поисковых задач при обучении математике в общеобразовательной школе.
2. Разработать и обосновать систему проблемно-поисковых задач как средства организации коллективной формы учебной деятельности при обучении математике в общеобразовательной школе(на примере тем «Четырехугольники» и «Прогрессия»).
3. Раскрыть методические условия использования проблемно-поисковых задач как средства организации коллективной формы учебной деятельности при обучении математике в общеобразовательной школе.
4. Экспериментально проверить эффективность разработанной методики организации коллективной деятельности обучающихся на основе системы проблемно-поисковых задач при обучении математике в общеобразовательной школе.

Теоретико-методологическую основу данного исследования составили работы Ю.М. Колягина [20], [21] и Р.А. Утеевой [60], [61].

Базовыми для настоящего исследования явились также работы Н.А. Демченковой [11], И.Я. Лернера [31], А.М. Матюшкина [33], М.И. Махмутова [34].

Методы исследования:

– теоретические: анализ и обобщение научно-методической психолого-педагогической и учебной литературы по проблеме исследования;

–эмпирические: наблюдение, педагогический эксперимент, диагностирование, беседа с учителями, проведение контрольных срезов, анкетирование.

Основные этапы исследования:

– 1семестр (2020/2021 уч.г.): анализ ранее выполненных исследований по теме диссертации; анализ школьных программ и учебников по математике, нормативных документов; анализ опыта работы школы по организации коллективной формы учебной деятельности обучающихся на уроках математики.

– 2 семестр (2020/2021 уч.г.): определение теоретических основ проблемно-поисковых задач при обучении математике в общеобразовательной школе.

– 3 семестр (2021/2022 уч.г.): проектирование системы проблемно-поисковых задач как средства организации коллективной формы учебной деятельности при обучении математике в общеобразовательной школе по темам «Четырехугольники» и «Прогрессии».

– 4 семестр (2021/2022 уч.г.): оформление диссертации, корректировка ранее представленного материала, уточнение аппарата исследования, описание результатов экспериментальной работы, формулирование выводов по главам и заключения.

Опытно-экспериментальная база исследования: МБОУ Вачская СОШ, р.п. Вача, Вачского района Нижегородской области.

Научная новизна исследования заключается в том, что в нём проблема исследования рассмотрена во взаимосвязи содержательного (задачи) и организационного (формы учебной деятельности) компонентов методической системы обучения математике в общеобразовательной школе.

Теоретическая значимость исследования заключается в предложенной методике организации коллективной формы учебной деятельности обучающихся на основе проблемно-поисковых задач при обучении математике в общеобразовательной школе.

Практическая значимость исследования заключается в проектировании и апробации на практике системы проблемно-поисковых задач по темам «Четырехугольники» и «Прогрессии».

Достоверность и обоснованность результатов исследования обеспечивались сочетанием теоретических и практических методов исследования, анализом педагогической практики и личным опытом работы в общеобразовательной школе.

Личное участие автора в организации и проведении исследования состоит в самостоятельной постановке задач исследования и выбора примеров тем «Четырехугольники» и «Прогрессии» для разработки системы проблемно-поисковых задач; проведении педагогического эксперимента; апробации и представлении результатов исследования; самостоятельном изложении диссертации и формулировании основных результатов проведенного исследования.

Апробация и внедрение результатов работы велись в течение всего исследования.

Его результаты докладывались на следующих конференциях:

– научно-практической конференции «Студенческие дни науки ТГУ» (Тольятти, апрель, 2021г.);

– всероссийской научно-практической междисциплинарной конференции «Молодежь. Наука. Общество» (Тольятти, январь, 2022 г.).

По теме исследования имеются 2 публикации [28], [29].

На защиту выносятся:

– методика организации коллективной формы учебной деятельности на уроках математики на основе системы проблемно-поисковых задач;

– система проблемно-поисковых задач по теме «Четырехугольники» для обучающихся 8 класса;

– система проблемно-поисковых задач по теме «Прогрессии» для обучающихся 9 классов.

Структура магистерской диссертации. Работа состоит из введения, двух глав, заключения, содержит 17 рисунков, 17 таблиц, список используемой литературы (72 источников). Основной текст работы изложен на 73 страницах.

Глава 1. Теоретические основы проблемно-поисковых задач при обучении математике в общеобразовательной школе

1.1 Понятие и типы проблемно-поисковой задачи

Для того чтобы определить какие задачи можно считать проблемно-поисковыми, нужно выделить основные термины «Задача», которые применяются в различных предметных областях.

Под задачей можно понимать проблему, которую необходимо решить, или проблемную ситуацию.

Л.М. Фридман пишет, что: «Задачи, которые ставит перед собой человек, и задачи, которые перед ним ставят люди, обстоятельства жизни, направляют всю его деятельность, его жизнь» [61, с. 15].

Если рассматривать задачу в рамках математической науки, то с ней можно связать такие понятия как определение, алгоритм, теорема и т.д. Все теоретические знания усваиваются посредством решения задач, поэтому задачи занимают в ней особое место. Рассматривая содержания учебного предмета математика, то можно смело сказать, что задачи являются одним из главных целей обучения, а также средством обучения. Именно поэтому нужно с особым вниманием подойти к определению понятия задачи [68].

Существуют разные подходы к определению задачи.

Л.Л. Гурова отмечает, что «под задачей понимает объект мыслительной деятельности человека, связанной с требованием практического преобразования, либо ответа на некоторые теоретические вопросы с помощью поиска условий, способствующих раскрытию связи между известными и неизвестными её элементами» [7, с. 12].

Л.М. Фридман под задачей понимает процесс моделирования проблемной ситуации, в которую попадает субъект в ходе своей деятельности. Саму же задачу автор рассматривает как некую модель проблемной ситуации [60].

А.С. Кубракова пишет, что «задача по своей структуре представляет объективно заданное и сформулированное (представленное) в словесной или знаковой форме отношение между определенными «условиями», характеризуемыми как «известное», и тем, что требуется найти, характеризуемым как «искомое»» [27].

Задача должна быть построена таким образом, чтобы обучающиеся могли сознательно и самостоятельно найти средства для ее решения.

В.И. Крупич рассматривает задачу как «сложный объект, систему, которая существует в материальной форме независимо от субъекта и характеризуется внешним и внутренним строением [26].

Ю.М. Колягин трактует задачу как «система «человек - заданная ситуация», где на втором месте множество взаимосвязанных свойств и отношений элементов» [21].

Главным условием проблемных задач является постановка ученика в ситуацию, которая влияет на возникновения ощущения трудности и усиленности. Задачей ученика становится преодоление данной трудности. Второе условие проблемных задач – наличие противоречий между учеником и имеющихся у него знаний. Не малую роль играют такие условия как: создание проблемной ситуации в сознании ученика; требования задач в открытие новых знаний. Самое важное, что обучающиеся должны самостоятельно найти решения данной задачи [71].

Проблемную задачу можно считать одним из важных инструментов проблемного обучения. Но не каждая задача может считаться проблемной, а только та, которая обладает следующими характеристиками:

– она должно вызывать интерес у обучающихся своей уникальностью;

– должна иметь определенную трудность в процессе решения;

– предполагать определённые элементы исследования;

– должна предоставлять новые знания и методы их нахождения.

О.Л. Голицына выделяет три типа проблемных заданий, исходя из их характера и степени сложности:

«К задачам первого типа можно отнести нахождение объекта, когда известно, что он существует. Знания обучающегося об искомом объекте полные, цель поиска - найти его документальное представление. Поисковая модель может быть представлена как поиск по логическому выражению над "именами понятий, задаваемыми терминами или их комбинациями.

Второй тип задач – подбор информации по данной теме. Ученик, уже обладая знаниями, определяет место задачи, ищет документы, содержащие материал, с необходимой полнотой раскрывающий новую для него тему, или дающий возможность построения метода решения задачи. Поисковая модель в этом случае – поиск по части известного понятия с использованием накопленных ранее результатов.

Третий тип задач представляет собой проблемный поиск, который, по сути, является основной составляющей творческого процесса определения путей решения профессиональной задачи пользователя. Здесь изначально отсутствует четкость структуры знания: пользователь располагает отдельными фактами, возможно, не имеющими между собой доказанных связей. Логическая поисковая модель - поиск «похожих» документов, содержание которых ассоциируется с задачей пользователя» [5].

А.М. Матюшин отмечает, что «процесс решения проблемы зависит от ее постановления и трудности путей ее решения, сопоставлением неизвестного и известного в проблеме. С помощью педагогических средств можно научить обучающихся использовать проблемно-поисковые методы решения проблемных ситуаций.

К таким можно отнести:

– анализ прежнего опыта, имеющихся знаний по данной проблематике;

– выявление несоответствия проблемы и имеющихся знаний;

– анализ различных (часто противоположных) мнений и способов решения проблемы;

– расчленение общей проблемы на частные проблемы и поиск их решения;

– анализ нестандартных ситуаций, в которых нет возможности использовать имеющиеся теоретические или практические знания;

– прогнозирование развития ситуации при использовании разных подходов к ее решению;

– выдвижение гипотез, их опытная проверка, формулирование выводов» [33, с. 69].

При использовании проблемно-поисковых задач на уроках математики важно связать их с мотивационной сферой деятельности. Что непременно будет способствовать повышению активности и интереса у обучающихся [72].

Согласно подходу Ю.М. Колягина, в любой задаче можно выделить следующие компоненты:

«1. Характеристика проблемности системы – условие задачи (данные элементы и связи между ними).

2. Заключение или цели задачи (неизвестные элементы или связи между ними).

3. Один из возможных способов перехода из начального состояния ситуации к конечному (способ преобразования условия задачи для нахождения требуемого заключения).

4. Базис решения (обоснования решения)» [20, с. 51].

Автор вводит обозначения неизвестных компонентов буквами X, Y, Z.., тогда поисковые задачи будут иметь вид:

II тип – неизвестны два компонента:

а) A**XY**B; б) **X**CR**Y**; в) **XY**RB; г) AC**XY**; д) A**X**R**Y**; е) **X**C**Y**B.

Проблемные задачи соответственно:

III тип – неизвестны два компонента:

а) **XYZ**B; б) A**XYZ**; в) **X**C**YZ**; г) **XY**R**Z**.

Примером задачи второго типа (поисковая)могут быть олимпиадные задачи, в которых четко определено условие и цель задачи, но неизвестны решение и базис решения.

Примером задачи третьего типа (проблемная) является задача, в которой определена только цель, остальные компоненты неизвестны. Например, если дать определение ромба, как частного случая параллелограмма, то задание «исследовать ромб» будет проблемной.

Таким образом, в дальнейшем будем согласно указанной выше трактовке структуры задачи Ю.М. Колягина, считать задачу, включающую в себя два любых неизвестных компонента, поисковой.

Если задача, включает в себя три любых неизвестных компонента, то будем называть ее проблемной.

Понятно, что проблемность задачи зависит от субъективных данных решающих ее обучающихся, то есть от возрастных особенностей и того, на каком этапе обучения эта задача дается для решения (которая на следующем этапе может стать обучающей задачей).

1.2 Роль проблемно-поисковых задач в организации учебной деятельности учащихся на уроках математики

Согласно Федеральному государственному образовательному стандарту, основной целью математического образования является овладение обучающимися системой математических знаний и умений, применяемых в практической деятельности [55].

В современной школе учителю приходится проделывать огромную работу по сообщению знаний обучающимся, которая не всегда является эффективной. Поэтому возрастает роль проблемно-поисковых задач, которые будут способствовать повышению интереса и успеха обучающихся на уроках математики [69].

Остановимся кратко на теории проблемного обучения, так как проблемно-поисковые задачи, проблемная ситуация являются основными понятиями этой теории.

Теория проблемного обучения была разработана в середине 1970-х годов такими учеными, как В. Оконь [39], М.И. Махмутов [34]. Она построена на деятельностном подходе и исходит из того, что мышление носит проблемный характер, возникновение каждой мысли происходит в проблемной ситуации [57, с.128].

«Проблемное обучение – это совокупность таких действий как организация проблемных ситуаций, формулирование проблем, оказание ученикам необходимой помощи в решении проблем, проверка этих решений и, наконец, руководство процессом систематизации и закрепления приобретенных знаний» [33, с.51].

А.М. Матюшкин пишет: «...проблемное обучение относится к начальному этапу становления действия, на котором происходит усвоение (открытие) его принципа. Когда человек сталкивается с новыми условиями, в которых он не может выполнить известного ему действия прежними способами, когда он должен найти новый способ действия. Такие ситуации называются проблемными» [33]. По мнению М.И. Махмутова, основная идея проблемного обучения заключается в том, что «знания в значительной части не передаются в готовом виде учащимся, а приобретаются ими в процессе самостоятельной деятельности в условиях проблемной ситуации» [34].

В педагогической теории считается, что продуктивную познавательную деятельность учащегося в условиях проблемной ситуации и, соответственно, процесс проблемного обучения можно свести к следующим основным характерным этапам [34]:

– возникновение (постановка) проблемной ситуации;

– осознание сущности затруднения (противоречия) и постановка проблемы (формулировка проблемной задачи);

– поиск способа решения проблемной задачи путем итерации догадок, гипотез и т.п. с попыткой соответствующего обоснования;

– доказательство гипотезы;

– проверка правильности решения проблемной задачи

Способы создания проблемных ситуаций [15]:

– проблемная ситуация возникает, когда педагог преднамеренно сталкивает жизненные представления детей с научными фактами, объяснить которые они не могут – не хватает знаний, жизненного опыта;

– проблемная ситуация возникает при преднамеренном побуждении детей к решению новых задач старыми способами;

– проблемную ситуацию педагог может создавать, побуждая детей выдвигать гипотезы, делать предварительные выводы и обобщения. Противоречие в данном случае возникает в результате столкновения различных мнений, выдвинутого предположения и результатов его опытной проверки.

К выдвигаемой проблеме нужно предъявить несколько требований, если хоть одно из них не выполнить, то проблемная ситуация не будет создана [36].

Проблемная ситуация должна:

– содержать в себе определенную познавательную трудность, связанную с объективными противоречиями, свойственными изучаемому объекту;

– вытекать из логики познавательного процесса;

– содержать возможность последовательного ее членения, развертывания в вопросы, каждый из которых может являться ступенью в решении проблемы;

– направлять учащихся на актуализацию тех знаний, которые необходимы для ее решения;

– побуждать их к активному познавательному поиску, вызывать эмоциональное отношение к процессу поиска истины;

– быть посильной для учащихся;

– немалую роль играет естественность постановки проблемы. Если учеников специально предупредить, что будет решаться проблемная задача, то это может не вызвать у них интереса при мысли, что предстоит что-то трудное.

Н.А. Демченкова отмечает, что: «Вопрос о функциях задач в работах по дидактике и методике обучения математике рассматривается, начиная с 70-х годов. К.И. Нешков, А.Д. Семушкин выделяют дидактические, познавательные и развивающие функции задач. Задачи с дидактическими функциями нацелены на облегчения усвоения уже изученных теоретических сведений. Задачи с познавательными функциями ориентированы на усвоение основного содержания курса математики. Задачи с развивающими функциями призваны развивать мышление учащихся» [38].

Е.И. Лященко отмечает, что «дидактические функции включают в себя: раскрытие основных свойств изучаемых понятий и простейших связей между ними; нахождение алгоритмов действий и методов решения задач; умение пользоваться логическими операциями при изучении теоретического материала и решении задач. Познавательные функции включают: рассмотрение отдельных аспектов формируемого понятия; осуществление переноса знаний; умение увидеть новую задачу в традиционном материале. Развивающие функции – применение знаний в иной ситуации; умение с помощью задач применять знания по предмету» [10].

Ю.М. Колягин выделяет важную роль проблемно-поисковых задач в формировании математического мышления, в подготовленности учащихся к самостоятельной деятельности, в развитии у них многих исследовательских умений. Автор рассматривает такие функции задач как: обучающие, воспитывающие, развивающие.

«К обучающим относятся функции, направленные на формирование системы математических знаний, умений и навыков.

К развивающим относятся функции, направленные на развитие мышления учащихся, на формирование качеств, присущих научному мышлению, на овладение приемами эффективной умственной деятельности.

К воспитывающим функциям автор относит функции, направленные на формирование мировоззрения школьников, положительного отношения к учебной деятельности, умений рационально планировать свою деятельность; воспитание трудолюбия, творческой инициативы, дисциплинированности, организованности, патриотизма, высоких нравственных качеств» [19].

Роль проблемно-поисковых задач, по мнению И.Я. Лернера, М.Н. Скаткина, «…состоит в том, что наличия знаний для ее творческого решения недостаточно. Необходима развитость определенных интеллектуальных черт, которые формируются, закрепляются и развиваются в ходе решения таких задач» [47, с. 150]. Авторы говорят, что научить решать проблемно-поисковые задачи возможно только путем постепенного привития поисковых навыков обучающимся.

М.Н. Скаткиным и В.И. Крупичем установлено, что «важным компонентом проблемного обучения являются именно проблемно-поисковые задачи, в процессе решения которых развивается исследовательская активность, формируются творческие умения учащихся» [25], [48].

С.А. Конакпаева отмечает, что «любую математическую задачу можно рассматривать как проблему, но не каждая задача наталкивает учащихся на проблемно-поисковую деятельность. Лишь те задания, которые сформулированы особым образом, то есть в проблемно-поисковом контексте, очень эффективны в развитии нестандартного мышления учащихся, так как при решении таких задач, необходимо сначала найти проблему, затем выполнить поиск и предложить варианты её решения, обосновывая свой ответ» [21].

Автор приводит примеры таких задач.

Задача 1. «36 солдат, находящихся на полевых сборах, размещены в палатке (рисунок 1). На каждого солдата приходится $11 м^3$воздуха в палатке.

Найдите размеры палатки, если кровать каждого солдата занимает площадь $4\ \text{м}^2$. Какой можно сделать вывод об условиях размещения солдат? Ответ обоснуйте» [22].

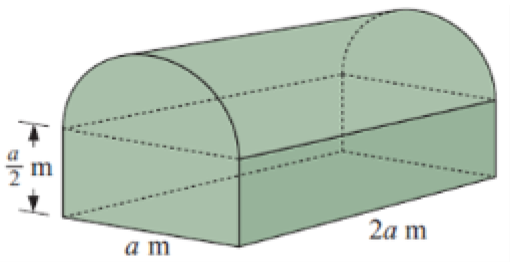

Рисунок 1 – Геометрическая форма палатки

Предлагаемое задание направлено на осознание проблемы, перенос знаний и умений в новую ситуацию, сочетание известных способов решения, в ходе которых обучающийся должен «открыть» новые знания и освоить действия. В этом случае ответ на задачу школьникам будет особенно неожиданным, так как они сделают вывод, что солдаты размещены в палатке с двухъярусными кроватями.

Задача 2. «У Вани есть 6 учебников по разным предметам, один из которых учебник алгебры. Он наугад кладет в портфель два учебника. Какова вероятность того, что один из них окажется учебником алгебры?» [22].

Школьник предложил такое решение: «Если Ваня положит в портфель только один учебник, то вероятность того, что это будет учебник алгебры, равна $\frac{1}{6}$. А так как он кладет два учебника, то вероятность удваивается, следовательно, она равна $\frac{1}{3}$.

Разгорелся спор. Одни считали предложенное решение, в целом, верным, хотя и недостаточно обоснованным.

Другие утверждали, что решение ошибочно, хотя и приводит к верному ответу. На чьей Вы стороне и почему? Приведите еще пару примеров задач по комбинаторике или теории вероятностей, в которых верный ответ получается путем неверных или неполных рассуждений. Объясните, из каких соображений можно либо опровергнуть каждое из приведенных Вами «решений», либо довести его до верного» [2].

С.А. Конакпаева утверждает, что «решение таких задач в формате повторного открытия, а не простой передачи готовых знаний, приносят радость открытия, веру в себя, дает возможность детям работать на самом высоком уровне» [22].

Исходя из этого, можно говорить о том, что основной целью учителя является содействие развитию мыслительной деятельности и познавательной активности у обучающихся. Основным инструментом для достижения поставленной цели может служить проблемно-поисковая задача, именно она позволяет обучающимся усвоить структуру исследования и имеющуюся информация исследовательскими или экспериментальными методами [69].

1.3 Определение коллективной формы организации учебной деятельности учащихся и особенности её организации на различных этапах урока математики

В данном параграфе будет проанализирована литература с целью обобщения представлений о коллективной форме деятельности при организации урока математики в общеобразовательной школе.

В.К. Дьяченко дает такое определение: «Коллективное обучение – это только такое обучение, при котором коллектив обучает каждого своего члена, и каждый член коллектива активно участвует в обучении своих товарищей по совместной учебной работе» [12].

А.В. Золотова пишет, что «виды коллективной работы позволяют учителю сделать урок интереснее, оживленнее, а также позволяет воспитать у обучающихся сознательное отношение к учебной деятельности, активизировать мыслительный процесс. По ее мнению, коллективная работа может помочь педагогу объяснять и контролировать процесс усвоения знаний, умений и навыков у школьников при минимальной затрате времени учителя» [13].

Г.А. Цукерман утверждает, что «основой подготовительной работы является сочетание между общеклассной и индивидуальной формой работы, где минусом может послужить то, что педагог не всегда сможет учесть уровень подготовленности и индивидуальные особенности каждого обучающегося. Исходя из этого, данная форма работы может быть осуществлена только при помощи дифференцированных заданий. Применяя на уроке дифференцированные задания, учитель тем самым выводит класс на коллективную форму обучения» [63].

Используя коллективную форму нужно учитывать, что такие занятия нельзя проводить без подготовки обучающихся, которые должны обладать навыками как самостоятельной работы, так и работы в коллективе. Также коллективная форма работы требует качественной и серьезной подготовки не только со стороны учеников, но и со стороны педагога. Учитель должен четко уметь формулировать основные и дополнительные задания коллективам обучающихся, на которые разбивается класс; тщательно продумать организацию такой формы деятельности; учитывать возможности возникновения неполадок в процессе обучения; а также уметь определять свою роль при организации коллективной формы учебной деятельности.

Коллективная форма деятельности на уроке учит учеников помогать тем, кто плохо справляется с поставленной задачей. Школьники стараются в процессе обучения разъяснить своему товарищу то, что ему непонятно, также заставляют повторять несколько раз правило. Работая вместе, обучающиеся помогая друг другу, тем самым добиваются большего, чем работая порознь. Коллективная форма работы на уроке не только повышает общую производительность, а также позволяет увеличить общий результат и индивидуальные результаты работы.

Р.А. Утеева описывает следующий план необходимый для организации коллективной деятельности учащихся:

«1. Постановка перед учащимися задания для самостоятельного коллективного выполнения.

2. Первичное обсуждение задания, инструктаж учителя.

3. Организация коллективной деятельности учащихся класса по выполнению задания (взаимодействие учащихся друг с другом), составление учащимися плана решения задач под наблюдением учителя.

4. Объединение полученных результатов, формирование учащимися нового знания как общего результата деятельности всех.

5. Оценка учителем выполнения задания. Подведение окончательных итогов.

6. Применение полученных результатов к решению других задач» [59].

Р.А. Утеева также описывает методические приемы организации коллективной работы «на этапе изучения нового материала: проблемная беседа, опыт, эксперимент, лабораторно-практическая работа, решение проблемно-поисковых задач» [60].

Для организации коллективной деятельности обучающихся, по мнению автора, рационально разбивать обучающихся на четыре типологические группы:

Группа А – где все участники имеют прочные знания основных математических фактов за весь пройденный курс обучения. Могут оперировать понятиями и приводить собственные примеры. Используют рациональные способы и приемы решения задач.

Группа В – все участники имеют хорошие знания основных математических фактов за весь пройденный курс обучения. Могут оперировать понятиями, но не всегда могут их доказать и обосновать. При решении задач повышенной сложности (творческой и проблемной направленности) не могут обойтись без помощи учителя.

Группа С – все участники обладают минимальными знания основных математических фактов за весь пройденный курс обучения. Могут отвечать на вопросы, не требующие сложных и длительных рассуждений. Не обладают навыками рационального решения задач.

Группа D – учащиеся данной группы с трудом усваивают математические факты и понятия, а также способы решения задач. Они не всегда понимают смысл условия задачи и не могут применить известные правила при ее решении.

Разделение обучающихся на данные группы по мнению Р.А. Утеевой позволит учителю выстроить образовательных процесс на уроке таким образом, чтобы при использовании коллективной работы на уроке в каждую рабочую группу входили ученики из каждой типологической группы.

Работа в группах, составленных таким образом, позволит всем участникам добиться повышению эффективности математических знаний в целом.

Рассмотрим приемы использования коллективной формы деятельности на уроках математики в общеобразовательной школе.

«Взаимные опросы – это самый простой способ организации коллективной формы учебных занятий.

Его особенность в том, что ученики по очереди работают в парах с разными партнерами и выполняют функции как обучающего, так и обучаемого.

Например, в 10 классе, можно использовать данный метод как способ закрепления таблицы тригонометрических функций, а в 11 классе при закреплении темы «Первообразные и производные функций»» [53].

Смена заданий в четверках – характерной особенностью данного способа является то, что всех учеников класса объединяют по четверкам и между ними происходит обмен карточками с заданиями, после чего происходит взаимопроверка результатов.

Например, данный метод можно использовать при решении тригонометрических уравнений, приведенных в таблице 1.

Таблица 1 – Примеры заданий для коллективной формы деятельности

Группа 1	Группа 2	Группа 3	Группа 4
$\sin\frac{2}{3}x=\frac{1}{2}$ $\cos(2-3x)=\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sin\frac{3\pi}{\sqrt{x}3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\cos 3x=\sqrt{1,1}$	$\sin 2x=\frac{\pi}{4}$ $\cos\frac{5}{6}x=\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sin\sqrt{\frac{\pi}{x}}=0$ $\cos(3x-2)=\frac{\sqrt{2}}{2}$

Проблемно-поисковые задачи.

С.С. Варданян описывает проблемно-поисковою задачу, которую можно использовать при организации групповой формы деятельности учащихся на уроке математика. «При изучении темы «Сумма углов треугольника» - Геометрия, 7класс. «Как измерить изображенный на доске угол, часть которого вместе с вершиной случайно стерли?» Обыграть, что учитель растерян, ему требуется помощь. Учащиеся, разбиваясь на группы, с помощью решения данной задачи самостоятельно приходят к теореме о сумме углов треугольника» [4].

Рассмотренные методы организации коллективной работы могут быть применены на определённых уроках. Но лучше всего их использовать на уроках по обобщению и закреплению знаний, при этом прибегать к коллективной форме организации на протяжении всего занятия.

1.4 Принципы проектирования системы проблемно-поисковых задач как средства организации коллективной формы учебной деятельности учащихся на уроках математики

Прежде чем описать основные принципы проектирования системы проблемно-поисковых задач как средства организации коллективной формы учебной деятельности учащихся на уроках математики, рассмотрим методики, которые отображают способы организации и решения проблемно-поисковых задач.

Анализируя работы Я.И. Груденова [6], В.А. Далингера [9], Ю.М. Колягина [19], М.Р. Леонтьевой [30], Г.И. Саранцева [46], С.Б. Суворовой [50] и других можно сказать, что ученые описывают требования к системе проблемно-поисковых задач. Почти все авторы говорят о том, что «система заданий должна удовлетворять ряду принципов: принципу полноты, принципу сравнения, доступности, постепенному нарастанию сложности, разнообразию, непрерывному повторению».

Я.И. Груденов делает акцент, что в процессе создания системы задач учитель должен уделять внимание основным дидактическим принципам [6]. В.А. Далингер ставит методологические принципы в приоритете при построении дидактической системы задач. Это такие принципы как: целостность, многоуровневость, многофункциональность и множественность [9]. С.Б. Суворова перечисляет основные принципы(полноты, сравнения, доступности, постепенного нарастания сложности, разнообразия и непрерывного повторения)построения системы упражнений, направленных на усвоение понятий, теорем, приемов решения задач» [50].

За основу в данной работе взят подход Ю.М. Колягина, согласно которому, как было отмечено ранее, под проблемно-поисковой задачей будем понимать такую задачу, в информационной структуре которой неизвестны два или три ее компонента.

Приведем пример поисковой задачи.

Задача. «Коля нарисовал у себя в тетради выпуклый четырехугольник и соединил середины соседних сторон (рисунок 2). Определите, какой четырехугольник образуют проведенные отрезки? Найдите отношение площади этого четырехугольника к площади исходного» [16].

Дано: KLMN– выпуклый четырехугольник

LB=BM, MC=CN, ND=DK, KA=AL

Найти: $\frac{S_{ABCD}}{S_{KLMN}}$ =?ABCD–?

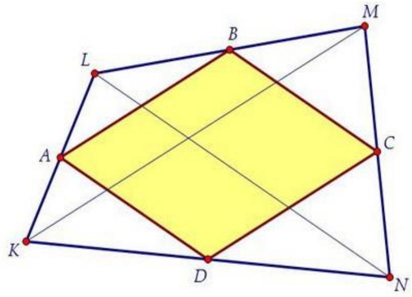

Рисунок 2 – Построение выпуклого четырёхугольника

В данной задаче неизвестны два компонента: заключение (непонятен вид образованного четырехугольника) и способ решения.

Замечание: если учащиеся знакомы с теоремой Вариньона (середины сторон произвольного выпуклого четырёхугольника всегда являются вершинами параллелограмма), которая не входит в содержание базового уровня по геометрии в 7-9 классах, то тогда заключение становится известным, т.е. задача превращается в обучающую.

Также в работах Ю.М. Колягина [19] выделяются требования к построению системы задач:

«– способствовать мотивации введения понятия;

– в системе задач должна предусматриваться работа, направленная на формирование наглядных образов и конкретных представлений, на основе которых может быть введено новое понятие;

– выявлять существенные свойства понятия и способствовать их усвоению;

– способствовать усвоению терминологии, символики, определения понятия, созданию правильного соотношения между внутренним содержанием понятия и его внешним выражением;

– вырабатывать у учащихся правильное представление об объеме понятия;

– формировать осознанное применение понятия в простейших, достаточно характерных ситуациях;

– включать понятия в различные связи и логические отношения с другими понятиями;

– формировать умения применять понятия в нестандартных ситуациях» [19].

Н.А. Демченкова в диссертационной работе отмечает, что под «принципами построения системы проблемно-поисковых задач, ориентированной на формирование исследовательских умений, понимаются определенные требования к подбору задач и к организации деятельности обучаемых» [10].

В качестве основных принципов, она в соответствии с концепцией Р.А. Утеевой выделяет:

– «принцип целенаправленности и активности обучаемых;

– принцип проблемности (содержания, методов и форм организации учебной деятельности обучаемых);

–принцип постепенного возрастания степени самостоятельности каждого обучаемого;

– принцип дифференциации обучения» [11].

По мнению Д. Пойа основным принципом преподавания является принцип активного изучения. «Вы должны уяснить себе, что в процессе изучения этот принцип занимает центральное место. Лучший способ изучить – это открыть самому» [42, с.307]. Принцип активности в настоящее время является одним из основных принципов дидактики.

«Целенаправленное обучение – это выделение специфических целей по формированию умений школьников, связанных с проблемным обучением математике. Такими целями могут быть: формирование умений решать проблемно-поисковые задачи по математике; формирование умений, связанных с проблемным обучением; формирование учебно-исследовательской деятельности» [10].

Принцип проблемности представляет собой создание и разрешение проблемных ситуаций на занятии. М.И. Махмутов говорит, что «задачи, решаемые учащимися на уровне творческого мышления, имеют проблемное содержание, сконструированы на основе принципа проблемности» [34, с. 22]. «Проблемность присутствует, как правило, там, где есть какой-либо уровень теоретического обобщения понятий; чем он выше, тем выше, как правило, уровень проблемности содержания (учебного материала)» [34, с. 23].

«Принцип постепенного повышения степени самостоятельности учащихся определяется постепенным переходом от несамостоятельной совместной деятельности учителя и ученика к деятельности коллективной, а затем к самостоятельной индивидуальной деятельности каждого ученика в классе» [60].

Под принципом дифференциации обучения будем понимать «создание соответствующих условий для формирования исследовательских умений учащихся различных типологических групп (А, В, С, Д согласно типологии Р.А. Утеевой)» [60].

«Дифференцированный подход к учащимся – это целенаправленное отношение учителя к учащимся с учетом их типологических особенностей, проявляющееся в дифференциации заданий на различных этапах урока, при организации домашней и внеклассной работы по математике» [60].

Данные принципы построения системы проблемно-поисковых задач на уроках математики позволят наиболее продуктивно организовать коллективную форму учебной деятельности учащихся. Использование данных принципов позволит учитывать цели создания системы, и особенности каждого обучающегося включенного в коллективную деятельность на уроках математики.

Проанализировав выше обозначенные требования можно выделить, основные, которые можно считать существенными для системы задач:

– перед системой задач стоит вполне определенная цель;

– система задач должна обеспечивать получение ожидаемого результата;

– задачи включаются в систему с учетом их взаимодействия друг с другом, а вне этой системы каждая конкретная задача может не отвечать поставленным целям;

– задачи в системе строго упорядочены.

Так как в данном исследовании мы рассматриваем принципы проектирования проблемно-поисковых задачи как средства организации коллективной деятельности обучающихся, то обратимся к дополнительным требованиям:

– задачи должны быть объединены единой целью, которая ставится перед всеми обучающимися на различных этапах урока;

– задачи должны быть рассчитаны на коллективную деятельность, чтобы каждый обучающийся имел возможность внести свой вклад в решение поставленных задач. При решении задач должно быть реализовано отношение «действия учителя – действия класса – действия ученика»;

– задачи должна способствовать возникновению проблемной (поисковой) ситуации.

– руководство по решению задач осуществляется частично учителем, и самими учащимися.

В работах Р. А. Утеевой показано, что применение коллективной формы деятельности на уроках математики будет эффективно только на этапах изучения новых знаний, на этапах обобщения и систематизации понятий, теорем или методов решения задач, так как именно на этих этапах возможно создание проблемной ситуации и её разрешение.

С учетом указанных требований во второй главе будет спроектирована система проблемно-поисковых задач по темам «Четырехугольники» и «Прогрессии».

Выводы по первой главе

Обобщение и анализ психолого-педагогической и методической литературы, передового педагогического опыта по проблеме использования проблемно-поисковых задач как средств организации коллективной формы деятельности, учащихся на уроках математики, позволили сделать следующие выводы.

Существуют различные подходы к трактовке понятия «проблемно-поисковая задача», основанные на определенных концепциях проблемного обучения (И.Я. Лернер, А.М. Матюшкин, М.И. Махмутов и другие).

В данном исследовании за основу взят подход Ю.М. Колягина.

Роль проблемно-поисковых задач в организации коллективной формы учебной деятельности учащихся на уроке математики состоит в том, они способствуют созданию на определенном этапе урока проблемной ситуации. Разрешение затруднения (проблемной ситуации) и приводит к обсуждению различных подходов к решению поставленной задачи в мини-группах или со всем классом по схеме «деятельность учителя – деятельность отдельных учащихся – деятельность всего коллектива».

Определены и проанализированы принципы проектирования системы проблемно-поисковых задач, предлагаемых разными учеными.

За основу построения системы проблемно-поисковых задач были выбраны такие принципы: целенаправленности и активности обучаемых; проблемности; постепенного возрастания степени самостоятельности каждого обучаемого; дифференциации обучения (Р.А. Утеева).

При проектировании системы проблемно-поисковых задач будем включать в систему такие задачи, которые способствуют обобщению и систематизации знаний о понятии или его свойствах; направлены на получение новых способов решения задачи.

Глава 2. Проектирование системы проблемно-поисковых задач как средства организации коллективной формы учебной деятельности при обучении математике в общеобразовательной школе

2.1 Система проблемно-поисковых задач по теме «Четырехугольники»

Прежде, чем представить разработанную нами систему задач по теме «Четырехугольники» выполним анализ теоретического и задачного материала (таблицы 2-8) учебников по геометрии 7-9 классов, которые включены в Федеральный перечень и рекомендованы Министерством просвещения РФ [62].

Таблица 2 – Анализ теоретического материала по теме «Четырехугольники»

Название учебника	Учебник геометрии 7-9 классы: Л.С. Атанасян и др. [2]	Учебник геометрии 7-9 классы: И.М. Смирнова и В.А. Смирнов [49]	Учебник геометрии 7-9 классы: И.Ф. Шарыгин [66]
Общие сведения	изучается в 8 классе в главеV.Вводится через понятие многоугольника: «каждый четырехугольник имеет четыре вершины, четыре стороны и две диагонали» [2, с.99].	Изучается в 8 классе в главеI «Четырехугольники» Определение четырехугольника приводится в 7 классе через многоугольник	Изучается в 8 классе в главе 6 «Подобие».
Содержание главы	Многоугольники Параллелограмм и трапеция Прямоугольник, ромб, квадрат.	Параллелограмм и его свойства. Признаки параллелограмма. Прямоугольник Ромб. Средняя линия треугольника. Трапеция Средняя линия трапеции Теорема Фалеса	Параллелограмм, прямоугольник, ромб, квадрат. Теорема Фалеса и следствия из нее Подобные треугольники. Признаки подобия треугольников.
Свойства четырехугольников	«Сумма углов выпуклого четырехугольника равна 360°		
	[2, с. 99]. Приводится с доказательством.	[49, с. 122]. Приводится с доказательством.	

Таблица 3 – Анализ теоретического материала по теме «Параллелограмм»

Название учебника	Учебник геометрии 7-9 классы: Л.С. Атанасян и др. [2]	Учебник геометрии 7-9 классы: И.М. Смирнова и В.А. Смирнов [49]	Учебник геометрии 7-9 классы: И.Ф. Шарыгин [66]
Определение параллелограмма	«Параллелограммом называется четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны»		
	[2, с.100]	[49, с.124]	[66, с.188]
Свойства параллелограмма приводятся во всех учебниках с доказательствами	«В параллелограмме противоположные стороны равны и противоположные углы равны». «Диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам».		
	[2, с. 100-101].	3.«Сумма углов параллелограмма, прилежащих к одной стороне, равна 180^0» [49, с. 124-125].	[66, с. 188-189].
Признаки параллелограмма Приводятся с доказательством	«Если в четырехугольнике две стороны равны и параллельны, то этот четырехугольник – параллелограмм».		«Если четырехугольник имеет любое из трех перечисленных свойств, то этот четырехугольник – параллелограмм».
	«Если в четырехугольнике противоположные стороны попарно равны, то этот четырехугольник – параллелограмм. Если в четырехугольнике диагонали пересекаются и точкой пересечения делятся пополам, то этот четырехугольник – параллелограмм».		
	[2, с. 101-102].	[49, с. 127-128].	[66, с. 188].

Таблица 4 – Анализ теоретического материала по теме «Прямоугольник»

Название учебника	Учебник геометрии 7-9 классы: Л.С. Атанасян и др. [2]	Учебник геометрии 7-9 классы: И.М. Смирнова и В.А. Смирнов [49]	Учебник геометрии 7-9 классы: И.Ф. Шарыгин [66]
Определение прямоугольника	«Прямоугольником называется параллелограмм, у которого все углы равны»		
Свойства прямоугольника	«Диагонали прямоугольника равны»		
Приводятся с доказательством	[2, с. 108].	[49, с. 131].	[66, с. 190-131].
Признаки Прямоугольника	«Если в параллелограмме диагонали равны, то этот параллелограмм – прямоугольник»		

Таблица 5 – Анализ теоретического материала по теме «Трапеция»

<table>
<tr><td>Название учебника</td><td>Учебник геометрии 7-9 классы:
Л.С. Атанасян и др. [2]</td><td>Учебник геометрии 7-9 классы:
И.М. Смирнова и В.А. Смирнов [49]</td><td>Учебник геометрии 7-9 классы: И.Ф. Шарыгин [66]</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Определение трапеции</td><td colspan="3">«Трапецией называется четырехугольник, у которого две стороны параллельны, а две другие стороны не параллельны»</td></tr>
<tr><td>[2, с.103]</td><td>[49, с.137]</td><td>[66, с.200]</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Свойства трапеции
Приводятся с доказательством</td><td rowspan="2"></td><td colspan="2">Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.</td></tr>
<tr><td>Прямая, проходящая через середину боковой стороны трапеции и параллельна основаниям, делит вторую боковую сторону пополам.
[49, с. 137].</td><td>[65, с. 201].</td></tr>
</table>

Таблица 6 – Анализ теоретического материала по теме «Ромб»

<table>
<tr><td>Название учебника</td><td>Учебник геометрии 7-9 классы:
Л.С. Атанасян и др. [2]</td><td>Учебник геометрии 7-9 классы:
И.М. Смирнова и В.А. Смирнов [49]</td><td>Учебник геометрии 7-9 классы: И.Ф. Шарыгин [66]</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Определение ромба</td><td colspan="3">«Ромбом называется параллелограмм, у которого все стороны равны»</td></tr>
<tr><td>[2, с.109]</td><td>[49, с.131]</td><td>[66, с.191]</td></tr>
<tr><td>Свойства ромба. Приводятся с доказательством</td><td>«Диагонали ромба взаимно перпендикулярны и делят его углы пополам» [2, с. 109]..</td><td></td><td>«Ромб является параллелограммом. Диагонали ромба перпендикулярны, а каждая из диагоналей является биссектрисой соответствующих углов ромба». [66, с. 191].</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Признаки ромба Приводятся с доказательством</td><td rowspan="2"></td><td colspan="2">«Если в параллелограмме диагонали перпендикулярны, то этот параллелограмм является ромбом»</td></tr>
<tr><td>[49, с. 131-132].</td><td>Если в параллелограмме одна из диагоналей делит пополам каждый из углов, через которые она проходит, то этот параллелограмм – ромб» [66, с. 191-192].</td></tr>
</table>

Таблица 7 – Анализ теоретического материала по теме «Квадрат»

Название учебника	Учебник геометрии 7-9 классы: Л.С. Атанасян и др. [2]	Учебник геометрии 7-9 классы: И.М. Смирнова и В.А. Смирнов [49]	Учебник геометрии 7-9 классы: И.Ф. Шарыгин [66]
Определение квадрата	«Квадратом называется прямоугольник, у которого все стороны равны»		
	[2, с.109]	[49, с.132]	[66, с.192]
Свойства квадрата	«Все углы квадрата прямые Диагонали квадрата равны, взаимно перпендикулярны, точкой пересечения делятся пополам и делят углы квадрата пополам» [2, с. 109].		

Таблица 8 – Анализ задачного материала по теме «Четырехугольники»

Типы и виды задач	Учебник геометрии 7-9 классы: Л.С. Атанасян и др. [2].	Учебник геометрии 7-9 классы: И.М. Смирнова и В.А. Смирнов [49].	Учебник геометрии 7-9 классы: И.Ф. Шарыгин [66].
Задачи на вычисление длин сторон и величин и углов, диагоналей и периметра	№ 364-365, 368, 370, 366, 367,3 2-377, 387, 390, 392, 401, 403.	№29.3, 29.4, 29.7-29.11, 29.16-29.17, 31.12-31.15 №31.19-31.20, №31.22-31.23, 33.9-33.13, 33.18-33.21, 29.15, 31.2, №31.8-31.11	№ 655-658, 661, 665, 667, 675-679, 681, 683, 686, 696-697 659, 664 ,672, 674
Задачи на построение	Параллелограмма		
	№ 393-395.	№29.1, 29.2, 29.21, 29.22, №30.18	№688-689
	Ромба		
	№ 414	№31.21	№ 690-691, 693
	Прямоугольника № 413 Квадрата №415 Трапеции №397, 398		Прямоугольника № 694 Квадрата №692
Задачи на доказательство свойств и признаков	№ 371, 378-383 (№384, 385 №386, 388, 389 № 399, 400, 402, 404	№ 29.6 ,29.14, 30.7, 30.9, 30.10, 30.11, 30.13-30.15, 29.20	№652, 660 , 653 654 662-663, 668-669
Практические задачи	№ 391 № 416-418, 422-423	№ 29.5, №30.1-30.2, 30.3. №31.1, №32.2, №33.1-№33.5,№ 29.12, 29.13, № 30.17. . №30.3.	№649, 650, 651, 666, 667, 670, 671, 680, №699.

Анализ учебников позволяет сделать следующие выводы: в рассмотренных учебниках имеются задачи, которые можно использовать для организации коллективной деятельности учащихся на этапах обобщения и систематизации свойств и признаков четырехугольников.

С учетом ранее определенных принципов построения системы проблемно-поисковых задач, а также выделенных выше видов задач, спроектируем такую систему по теме «Четырехугольники», включающую в себя:

– задачи на доказательство новых свойств четырехугольников;

– задачи на свойства вписанных в окружность (описанных около окружностей) четырехугольников;

– задачи на построение четырехугольников;

– практические задачи.

Задачи на доказательство свойств четырехугольников

Задача 1. Витя и Маша нарисовали по одному выпуклому четырехугольнику (рисунок 3), таким образом, что диагонали четырехугольников соответственно равны и пересекаются под равными углами. После этого Маша стала доказывать, что их четырёхугольники равновеликие, а Витя с ней не соглашался. Определите, кто из ребят был прав? [2]

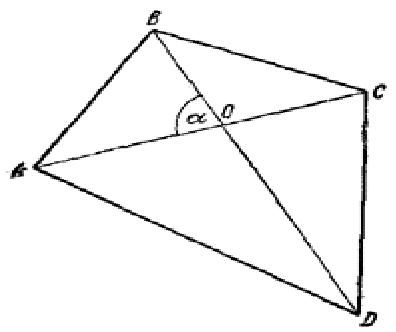

Рисунок 3–Построение четырехугольника ABCD

Дано: ABCD и $A_1B_1C_1D_1$ – выпуклые четырехугольники

$AC=A_1C_1$, $BD=B_1D_1$

$\angle BOA = \angle B_1O_1A_1 = \alpha$

Доказать: ABCD и $A_1B_1C_1D_1$ - равновеликие

Доказательство:

Найдем выражение для площади четырехугольника *ABCD* через диагонали и угол между диагоналями. Пусть O – точка пересечения диагоналей четырехугольника ABCD и ∠BOA = **α**

Тогда площадь данного четырехугольника равна

$$S_{ABCD} = S_{AOB} + S_{COD} + S_{BOC} + S_{AOD} = \frac{1}{2}AO \cdot OB \cdot \sin\alpha + \frac{1}{2}OC \cdot OD \cdot \sin\alpha + \frac{1}{2}BO \cdot OC \cdot \sin\alpha + \frac{1}{2}AO \cdot \cdot OD \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2}BD \cdot AC \sin\alpha$$

Найдем выражение для площади четырехугольника $A_1B_1C_1D_1$ через диагонали и угол между диагоналями. Пусть O_1– точка пересечения диагоналей четырехугольника $A_1B_1C_1D_1$ и $\angle B_1O_1A_1 = \alpha$

Тогда площадь данного четырехугольника равна

$$S_{A_1B_1C_1D_1} = S_{A_1O_1B_1} + S_{C_1O_1D_1} + S_{B_1O_1C_1} + S_{A_1O_1D_1} = \frac{1}{2}A_1O_1 \cdot O_1B_1 \cdot \sin\alpha + \frac{1}{2}O_1C_1 \cdot O_1D_1 \cdot \sin\alpha + \frac{1}{2}B_1O_1 \cdot O_1C_1 \cdot \cdot \sin\alpha + \frac{1}{2}A_1O_1 \cdot O_1D_1 \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2}B_1D_1 \cdot A_1C_1 \sin\alpha$$

Так как $AC=A_1C_1$; $BD=B_1D_1$ *и* $\angle BOA = \angle B_1O_1A_1 = \alpha$ (по условию),

то $S_{ABCD} = S_{A_1B_1C_1D_1}$.

Следовательно, ABCD и $A_1B_1C_1D_1$ – равновеликие

В данной задаче неизвестны два компонента: заключение (непонятен равновеликие четырехугольники или нет) и способ решения.

Задача 2. «Отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции, (рисунок 4) лежит на средней линии трапеции и равен полу-разности оснований трапеции» [17].

Дано: ABCD — трапеция, AD||BC,

F — середина AC, K — середина BD,

MN — средняя линия трапеции

Доказать: FK∈MN, $FK = \frac{AD-BC}{2}$

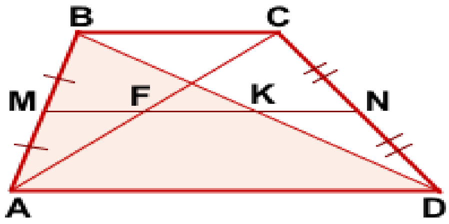

Рисунок 4 – Построение трапеции ABCD

Доказательство:

Так MN – средняя линия трапеции ABCD, то M – середина AB, N – середина CD, и MN||AD, MN||BC.

Рассмотрим угол ABD.

Так как AM=BM и MN||AD, то по теореме Фалеса, отрезки, на которые прямая MN делит BD, также равны, то есть MN пересекает отрезок BD в его середине, то есть в точке K.

Аналогично, для угла BAC:

AM=BM, MN||AD, следовательно, по теореме Фалеса прямая MN пересекает отрезок AC в его середине, то есть в точке F.

Таким образом, отрезок, соединяющий середины диагонали трапеции, параллелен основаниям трапеции и лежит на её средней линии.

MK – средняя линия треугольника ABD. Поэтому$MK = \frac{1}{2}AD$

MF – средняя линия треугольника ABC. Поэтому$MF = \frac{1}{2}BC$

$$FK = MK - MF = \frac{1}{2}AD - \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}(AD - BC)$$

Что и требовалось доказать.

Если использовать обозначения AD=a, BC=b, то формула длины отрезка, соединяющего середины диагоналей трапеции, примет вид $FK = \frac{a-b}{2}$

В данной задаче неизвестны два компонента: заключение (непонятно как связан построенный отрезок с средней линией трапеции) и способ решения.

Задача 3. «Высота равнобедренной трапеции, опущенная из вершины на большее основание, делит его на два отрезка (рисунок 5), один из которых равен полусумме оснований, а другой — полуразности оснований» [17].

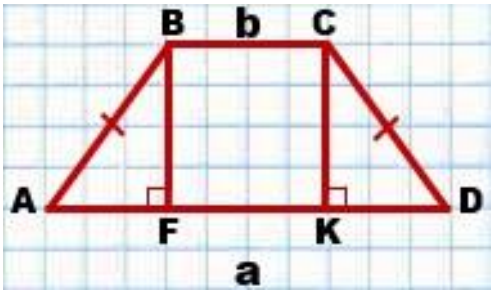

Рисунок 5 – Построение трапеции ABCD

Дано: ABCD — трапеция,

AD || BC, AB=CD, AD>BC,

AD=a, BC=b,

$BF \perp AD$

Доказать:

$$AF = \frac{a-b}{2}$$

$$DF = \frac{a+b}{2}$$

Доказательство:

Шаг 1. Проведем высоту CK:

$CK \perp AD, CK \perp BC.$

Шаг 2. Четырехугольник ABCD — прямоугольник (так как у него все углы прямые). Следовательно, его противоположные стороны равны: FK=BC=b.

Шаг 3. Рассмотрим треугольники ABF и DCK.

∠AFB=90º, ∠DKC=90º (так как BF и CK — высоты трапеции).

AB=CD (по условию),

BF=CK (как высоты трапеции).

Следовательно, треугольники ABF и DCK равны (по катету и гипотенузе).

Из равенства треугольников следует равенство соответствующих сторон:

$$AF = KD = \frac{AD - FK}{2} = \frac{a-b}{2}.$$

$$FD = FK + KD = b^{\backslash 2} + \frac{a-b}{2} =$$

$$= \frac{2b + a - b}{2} = \frac{a+b}{2}.$$

В данной задаче неизвестны два компонента: заключение (непонятно какой вид четырехугольника нужно рассмотреть) и способ решения.

Задача 4. «Докажите, что из одинаковых плиток, имеющих форму произвольного четырехугольника, можно сделать паркет, полностью покрывающий любую часть плоскости (рисунок 6)» [2].

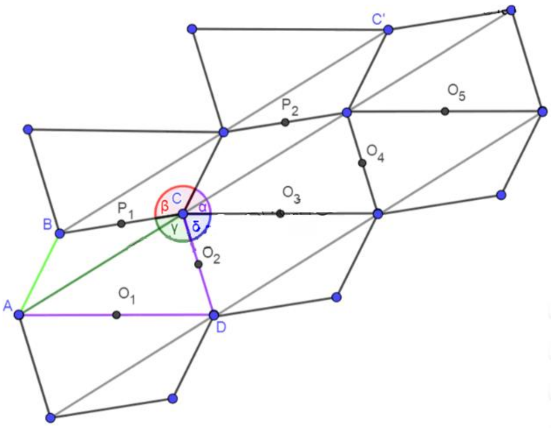

Рисунок 6 – Построение плоскости с помощью четырехугольников

Дано: ABCD– выпуклый четырехугольник

Доказать:

С помощью ABCD можно замостит любую часть плоскости

Доказательство:

Шаг 1. Любую плоскость можно замостить треугольниками, из которых легко построить параллелограммы. Из последних же можно сделать полосы. Значит, если разделить данный четырехугольник на треугольники, то сможем сделать полосы.

Шаг 2. К стороне AD прикладывает плитку паркета (стороной A_1D_1). Получится отображение относительно стороны AD, а точка O_1 будет центром симметрии.

Шаг 3. Повторим пункт 2 для стороны CD и т.д.

Шаг 4. В итоге получается полоса из треугольников, равных треугольнику ACD; а зубцы будут равны треугольнику ABC

Шаг 5. Продолжаем достраивать треугольники, при этом выбираем центром симметрии точку P_1 (середина стороны BC). В итоге получится полоса из треугольников равных треугольнику ABC.

Шаг 6. Так как данные треугольник составляют четырёхугольники, то плоскость можно покрыть четырехугольниками.

Шаг 7. В полученной полосе $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta, \angle C = \gamma$, $\angle D = \delta$, сумма которых равна 360^0, то зазора между плитами не будет. Следовательно, любая часть плоскости будет полностью покрыта [16].

В данной задаче неизвестны два компонента: заключение (непонятен можно ли с помощью произвольного четырехугольника полностью покрыть любую часть плоскости) и способ решения.

Задачи на свойства вписанной и описанной окружностей

Задача 5. «Боковая сторона равнобедренной трапеции равна ее меньшему основанию, угол при основании равен 60°, большее основание равно 12. Найдите радиус описанной окружности этой трапеции» (рисунок 7) [53].

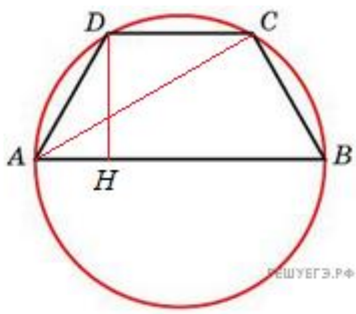

Рисунок 7 – Построение трапецииABCD вписанной в окружность

Решение: Окружность, описанная вокруг трапеции, описана и вокруг треугольника ADC. Это треугольник равнобедренный, угол при вершине равен 120°, углы при основании равны 30°. Найдем его боковую сторону:

$AD = AB - 2AH = AB - 2AD\cos 60^0 = 12 - AD$, откуда AD=6. Тогда по теореме синусов:$R = \frac{AD}{2\sin\angle DCA} = \frac{6}{2\sin 30^0} = 6$

Ответ: 6.

В данной задаче неизвестны два компонента: заключение (непонятно как связаны угол при основании трапеции и радиус окружности) и способ решения.

Задача 6. Около окружности описана трапеция, периметр которой равен 40 (рисунок 8). Найдите ее среднюю линию [54].

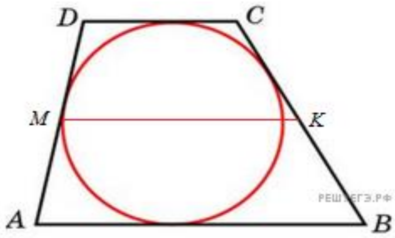

Рисунок 8 – Построение трапеции ABCD описанной около окружности

Решение:

В выпуклый четырехугольник можно вписать окружность тогда и только тогда, когда AB+CD=BC+AD.

$$MK = \frac{DC + AB}{2} = \frac{P_{ABCD}}{2} = 10$$

Ответ: 10.

В данной задаче неизвестны два компонента: заключение (непонятно как связана средняя линия и периметр трапеции) и способ решения.

Задачи на построение четырехугольников

Задача 7. «Построить трапецию, ели даны два ее основания и две боковые стороны» [66].

Решение: «Пусть даны отрезки a, b, c, d, такие, что в трапеции ABCD с основаниями AD и BC, AD = a; BC = b; $AB = c; DC = d (AD > BC)$ (рисунок 9).

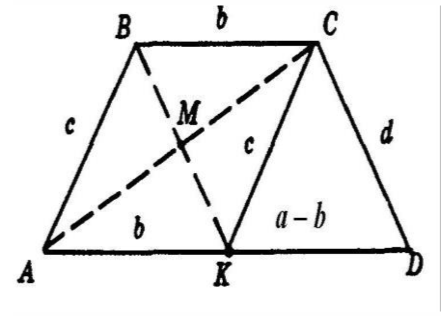

Рисунок 9 – Построение трапеции ABCD

Пусть есть трапеция ABCD, удовлетворяющая таким условиям.

Проведем в трапеции ABCD прямую $CK \parallel AB$, пересекающую AD в точке К. Получим параллелограмм АВСК, в котором

$$CK = AB = c; AK = BC = b.$$

Далее рассмотрим ΔKCD:KC=c; CD=d; KD=a–b.

Данный треугольник можно построить по трем известным сторонам. Тогда построим трапецию ABCD по плану:

Шаг 1. На произвольной прямой от точки А отложим отрезокAD=a, на этом отрезке от точки А отложим отрезокAK=b.

Шаг 2. Построим ΔKCDсо сторонамиKD=a-b, KC=c; CD=d.

Шаг 3. Построим параллелограмм AKCB, для этого проведем через точки А и С прямые параллельные прямым СК и АК и пересекающиеся в точке В. Докажем, что получившийся четырехугольник ABCD – искомая трапеция. AD = a (по построению).$BC \parallel AK, BC \parallel AD$, так как АВСК –параллелограмм по построению. BC = b (по построению). Если $BC \parallel AD$, BC=b; AD=a, то ABCD– трапеция с основаниямиAD=a, BC=b, удовлетворяющими условию задачи.

CD=d; CK=c (по построению). АВ = СК = с, так как АВСК – параллелограмм.

Боковые стороны CD и АВ удовлетворяют условию задачи. Итак, ABCD — искомая трапеция. Заметим, что задача имеет решения, только если можно построить ΔKCDсо сторонамиd, c, a–b.

Это возможно тогда и только тогда, когда одна сторона меньше суммы двух других, но больше разности двух других, то есть, при условиях:

$$\begin{cases} d < c + a - b \\ d > c - (a - b) \end{cases}$$

$$\begin{cases} d < c + a - b \\ d > c + b - a) \end{cases}$$

$$\begin{cases} d + b < c + a \\ d + a > b + c \end{cases}$$

Так как в данной полуплоскости относительно KD можно построить только один ΔKCDс заданными сторонами, то решение, то есть искомая трапеция, будет единственным» [66].

В данной задаче неизвестны два компонента: заключение (непонятно как нужно выбрать основания и боковые стороны трапеции) и способ построения.

Практические задачи

Задача 8. Известно, что пол комнаты имеет форму равнобедренной трапеции, основания которой 3 м и 9 м, а один из углов между боковой стороной и основанием равен 45°. Сколько потребуется прямоугольных дощечек со сторонами 10 см и 25 см, чтобы покрыть пол паркетом?

Решение:

Для решения задачи необходимо вспомнить формулы площади трапеции и площади прямоугольника.

Площадь трапеции – $\mathrm{S} = \frac{\mathrm{a+b}}{2}\mathrm{h}$. Площадь прямоугольника – $\mathrm{S} = \mathrm{ab}$.

Сделаем чертеж по условию задачи (рисунок 10)

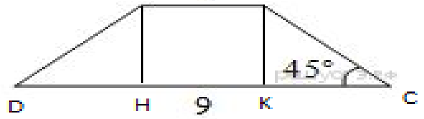

Рисунок 10 – Построение трапеции ABCD

Так как пол имеет форму трапеции, а паркет форму прямоугольника, то необходимо найти их площадь и определить, какое целое число дощечек поместится на полу данной формы. Составим следующие выражения:

Площадь трапеции – $\mathrm{S} = \frac{\mathrm{DC+AB}}{2}\mathrm{BK}$

Площадь прямоугольника – $\mathrm{S} = \mathrm{ab}$

Нахождение площади трапеции:

Так как для нахождения площади трапеции необходимо найти высоту ВК, то начнем решение задачи с рассмотрения треугольника ΔBKC. Треугольник ΔBKC- прямоугольный и равнобедренный (т.к. ∠KBC=$180^0 - 45^0 - 90^0 = 45^0, \Rightarrow\ \angle\mathrm{KBC} = \angle\mathrm{KCB}$) ⇒KC=KB (по определению равнобедренного треугольника). ABHK – прямоугольник ⇒AB=HK=3 м. Треугольник ΔKBC=ΔADH (по признаку равенства прямоугольных треугольников - т.к. AH=BK, AD=BC) ⇒DH=KC. Отсюда $KC = \frac{DC-HK}{2} = \frac{9-3}{2} = 3$. Следовательно, KB=3 м ⇒ $\mathrm{S_{ABCD}} = \frac{\mathrm{DC+AB}}{2}\mathrm{BK} = \frac{9+3}{2} \cdot 3 = 18.$

Нахождение площади дощечки:

Так как дощечка имеет стороны, выраженные в см, то их нужно перевести сначала в метры. 10см=0,1м, 25см=0,25м. Найдем теперь площадь одной дощечки $\mathrm{S} = 0{,}1 \cdot 0{,}25 = 0{,}025$

Чтобы узнать сколько дощечек потребуется необходимо поделить площадь трапеции на площадь одной дощечки. $N = \frac{18}{0.025} = 720$ шт.

Ответ: 720 шт.

В данной задаче неизвестны два компонента: заключение (непонятно сколько прямоугольников уместится в равнобедренной трапеции) и способ решения.

Задача 9. Участок имеет форму трапеции с основаниями 4 и 10. Найдите больший из отрезков, на которые делит среднюю линию этой трапеции одна из её диагоналей (рисунок 11).

Решение: Введём обозначения как показано на рисунке. MN— средняя линия, поэтому, AM=MB, откуда по теореме Фалеса BK=KD. Рассмотрим треугольник ABDMK— средняя линия, следовательно, $MK = \frac{AD}{2} = \frac{10}{2} = 5$. Ответ: 5.

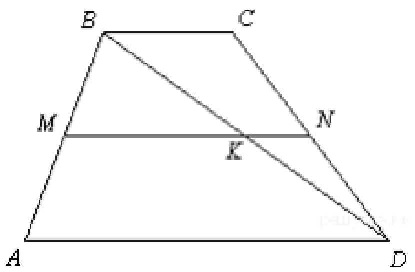

Рисунок 11 – Построение трапеции ABCD

В данной задаче неизвестны два компонента: заключение (непонятно какой отрезок нужно взять) и способ решения.

Задача 10. «Клумба имеет форму равнобедренной трапеции (рисунок 12), расстояния от точки пересечения диагоналей до середин её сторон равны 2 см, 1 см и 2 см соответственно. Найдите радиус окружности, описанной около данной клумбы» [65].

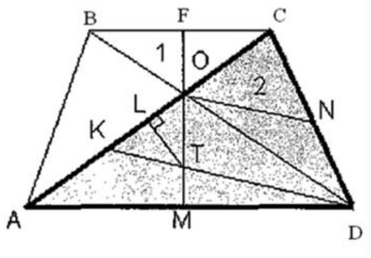

Рисунок 12 – Построение равнобедренной трапеции ABCD

Решение: «Радиус окружности, описанной около трапеции, найдём как радиус окружности, описанной около треугольника ACD. Точки F, N, M - середины отрезков BC, CD, AD соответственно.

Тогда по условию, FO=1, ON=OM=2. Треугольники BOC и AOD подобны, а потому, AO=2OC.

Построим DK // ON, тогда AK = KO = OC и KD = 4. KD - медиана ДAOD, OM - серединный перпендикуляр к AD и медиана ДAOD. Точка T - точка пересечения медиан ДACD делит медиану DK на отрезки: 8/3 и 4/3, делит медиану OM на отрезки: 4/3 и 2/3.

Пусть L - середина OK, тогда L - середина AC. Треугольник KTO - равнобедренный, т. к. OT = KT =4/3 и LT - является серединным перпендикуляром к отрезку AC. Следовательно, точка T является центром окружности, описанной около треугольника ACD, радиус которой равен 8/3» [65].

В данной задаче неизвестны два компонента: заключение (непонятно как нужно построить окружность) и способ решения.

Задача 11. «Противоположные стороны четырехугольной плитки паркета параллельны и равны (рисунок 13). Как, пользуясь линейкой, выяснить, имеет ли плитка форму прямоугольника?» [45]

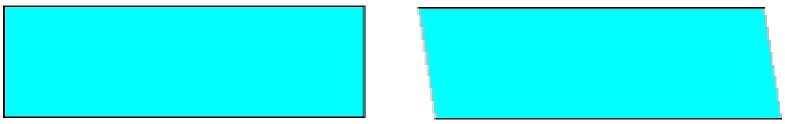

Рисунок 13 – Форма плитки

Решение: «Измерить диагонали, если они будут равными, то плитка будет иметь форму прямоугольника» [45].

В данной задаче неизвестны два компонента: заключение (непонятен вид образованного четырехугольника) и способ решения.

Задача 12. «Деревни A, B, C, D, расположены в вершинах прямоугольника (рисунок 14). В каком месте следует построить мост через реку, чтобы он был одинаково удален от всех деревень?» [44]

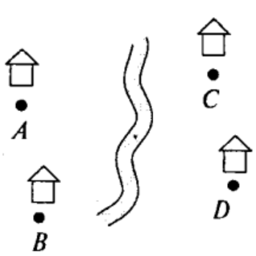

Рисунок 14 – Расположение домиков в деревни

Решение: Построить точку пересечения диагоналей прямоугольника. Использовать свойства диагоналей: они равны и точкой пересечения делятся пополам.

В данной задаче неизвестны два компонента: заключение (непонятно какие точки необходимо соединить и как) и способ решения.

Задание 13. «Из медной проволоки, длиной 30 см, изготовить параллелограмм, стороны которого относятся как 2 : 3» [45].

Решение:

«1. (2+3) ·2 = 10 (частей) составляет длина всей проволоки

2. 30 : 10 = 3 (см) приходится на 1 часть

3. 3 · 2 = 6 (см) длина меньшей стороны

4. 3 · 3 = 9 (см) длина большей стороны

(Можно решить уравнением: (2х + 3х) ·2 = 30; х = 3; 2х = 6 и 3х = 9)

Ответ: 6 см и 9 см – стороны параллелограмма» [45].

В данной задаче неизвестны два компонента: заключение (непонятен какой длины нужно взять стороны параллелограмма) и способ решения.

Задача 14. «В центре площади расположен фонтан (рисунок 15), около которого надо разбить 4 одинаковые клумбы с розами. Как рассадить 36 кустов роз - по 10 кустов на каждой клумбе - с таким расчетом, чтобы фонтан был одинаково удален от всех клумб»? [4]

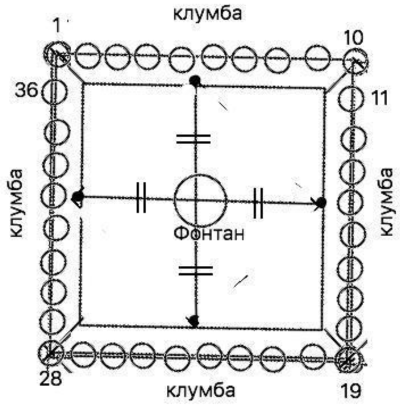

Рисунок 15 – Расположение клумб и фонтана

Решение: «На соседних клумбах должно быть по одной общей розе. Тогда на каждой клумбе будет по 10 роз, хотя всего вокруг фонтана будут расти 36 роз» [4].

В данной задаче неизвестны два компонента: заключение (непонятен вид образованного четырехугольника и расположение роз) и способ решения.

Задача 15. «Коля нарисовал у себя в тетради выпуклый четырехугольник и соединил середины соседних сторон(рисунок 16). Определите какой четырехугольник образуют проведенные отрезки? Найдите отношение площади этого четырехугольника к площади исходного» [16].

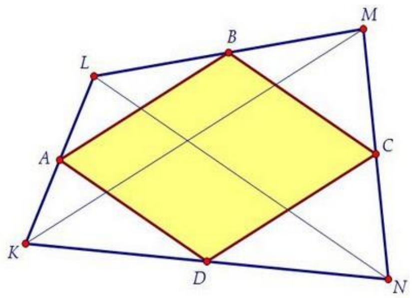

Рисунок 16 – Построение выпуклого четырёхугольника

Дано: KLMN – выпуклый четырехугольник

LB=BM, MC=CN, ND=DK, KA=AL

Найти: $\frac{S_{ABCD}}{S_{KLMN}} =?$

Решение. По теореме Вариньона следует, что середины сторон произвольного выпуклого четырёхугольника всегда являются вершинами параллелограмма. Следовательно, *ABCD – параллелограмм.* Также исходя из теоремы Вариньона следует, что стороны параллелограмма *ABCD*параллельны диагоналям четырехугольника *KLMN,* а их длины равны половинам длин диагоналей.

Следствие из теоремы Вариньона говорит о том, что площадь параллелограмма Вариньона равна половине площади исходного четырёхугольника.

Докажем данное утверждение.

Пусть диагональ LN проходит внутри четырёхугольника. Тогда площадь треугольника LNK равна $\frac{LN*h_k}{2}$, где h_k высота треугольника LNK, проведённая из вершины K. Аналогично, площадь треугольника LMN равна $\frac{LN*h_M}{2}$. Тогда площадь всего четырёхугольника равна $\frac{LN*h_k}{2}+\frac{LN*h_M}{2}=\frac{LN(h_M+h_k)}{2}$. Но $\frac{h_M+h_k}{2}=\frac{h_M}{2}+\frac{h_k}{2}$ — это сумма расстояний до прямой LN от точек B и A, то есть в точности высота параллелограмма ABCD. А поскольку сторона AD параллелограмма вдвое меньше LN, то и площадь параллелограмма равна половине площади ABCD.

Можно сделать вывод, что $\frac{S_{ABCD}}{S_{KLMN}}=\frac{1}{2}$.

В данной задаче неизвестны два компонента: заключение (непонятен вид образованного четырехугольника) и способ решения.

Задача 16. «Все стороны выпуклого четырехугольника площади 1 разделены на 2n равных частей, а затем точки деления на противоположных сторонах соединены так, чтобы получилась «косоугольная шахматная доска», состоящая из белых и черных «клеток» (рисунок 17, n = 2). Доказать, что сумма площадей всех белых «клеток» равна сумме площадей всех черных «клеток»» [16].

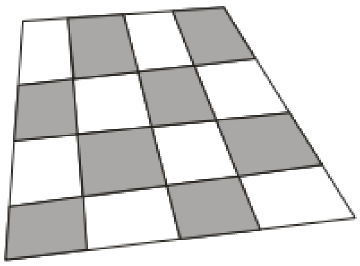

Рисунок 17 – Расположение белых и черных клеток

Решение. «Из следствия 2 следует, что точки пересечения отрезков на этой доске делят каждый на равные части. Тогда в любом «маленьком» четырехугольнике, куда входят ровно две белые и две черные клетки, выполняются условия теоремы о бабочках. Нужное равенство установлено» [16].

В данной задаче неизвестны два компонента: заключение (непонятен вид образовавшихся четырехугольников) и способ решения.

2.2 Система проблемно-поисковых задач по теме «Прогрессии»

Прежде, чем представить разработанную нами систему задач по теме «Прогрессии», выполним анализ теоретического и задачного материала (таблицы 9-12) учебников по алгебре 7-9 классов, которые включены в Федеральный перечень, рекомендованных Министерством просвещения РФ [62].

Таблица 9 – Анализ теоретического материала по теме «Прогрессии»

Название учебника	Учебник алгебры 9 класса: А.Г. Мерзляк и др. [35].	Учебник алгебры 9 класса: Макарычев Ю.Н. и др. [32].	Учебник алгебры 9 класса: Ю.М. Колягин [18].
Общие сведения	изучается в 9 классе в главеIV«Числовые последовательности»	Изучается в 9 классе в главе IV«Последовательности».	изучается в 9 классе в главе IV «Прогрессии»
Содержание главы	Числовые последовательности Арифметическая прогрессия Сумма ппервых членов арифметической прогрессии Геометрическая прогрессия Сумма ппервых членов геометрической прогрессии Сумма бесконечной геометрической прогрессии	Свойства последовательностей Арифметическая прогрессия Геометрическая прогрессия Сходящиеся последовательности	Числовые последовательности Арифметическая прогрессия Сумма ппервых членов арифметической прогрессии Геометрическая прогрессия Сумма ппервых членов геометрической прогрессии

Таблица 10 – Анализ теоретического материала по теме «Арифметическая прогрессия»

Название Учебника	Учебник алгебры 9 класса: А.Г. Мерзляк и др. [35].	Учебник алгебры 9 класса: Макарычев Ю.Н. и др. [32].	Учебник алгебры 9 класса: Ю.М. Колягин [18].
Определение арифметической прогрессия	«Арифметической прогрессией называют последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему члену, сложенному с одним и тем же числом» $a_{n+1} = a_n + d$		«Числовая последовательность $a_{1,} a_{2,} a_3 \dots a_n$, называется арифметической прогрессией, если для всех натуральных n выполняется следующее равенство» $a_{n+1} = a_n + d$
	[35, с.213].	[32, с.141].	[18, с.85].
Формула n-го члена арифметической прогрессии	«Общий член арифметической прогрессии a_nравен первому ее члену a_1, сложенному с произведением разности прогрессии d на число членов, предшествующих определяемому, т.е. $a_n = a_1 + (n-1)d$»		
	[35, с.214]	[32, с.142].	[18, с.86]
Свойства арифметической прогрессии	«Всякий член арифметической прогрессии, начиная со второго, есть среднее арифметическое предыдущего и последующего членов», т.е. $a_k = \frac{a_{k-1}+a_{k+1}}{2}$, $k =$ 2,3,4,5 ...[35, с.214]	«Всякий член арифметической прогрессии, начиная со второго, есть среднее арифметическое предыдущего и последующего членов» [32, с.142] $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$ «Если в последовательности каждый член начиная со второго, равен среднему арифметическому предыдущего и последующего членов, то такая последовательности называется арифметической прогрессией»[32, с.143]	«Каждый член арифметической прогрессии, начиная со второго, равен среднему арифметическому предыдущего и последующего членов». [18, с.86]
Сумма первых n членов арифметической прогрессии	«Сумма n первых членов арифметической прогрессии равна произведению полусуммы крайних членов на число членов»: $S_n = \frac{a_1+a_n}{2} * n$ $(S_n = \frac{2a_1+ d(n-1)}{2} * n)$		
	[35, с.220]	[32, с.148]	[18, с.91]

Таблица 11 – Анализ теоретического материала по теме «Геометрическая прогрессия»

Название Учебника	Учебник алгебры 9 класса: А.Г. Мерзляк и др. [35].	Учебник алгебры 9 класса: Макарычев Ю.Н. и др. [32].	Учебник алгебры 9 класса: Ю.М. Колягин [18].
Определение геометрической прогрессии	«Геометрической прогрессией называется последовательность с отличным от нуля первым членом, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему члену, умноженному на одно и тоже число отличное от нуля». $b_n = b_{n-1}q$		«Числовая последовательность $b_{1,}b_{2,}b_3 \dots b_n \dots$называется геометрической прогрессией, если для всех натуральных n выполняется следующее равенство $b_n = b_{n-1}q$"
	[35, с.225].	[32, с.153].	[18, с.97].
Формула n-го члена геометрической прогрессии	«Общий член геометрической прогрессии равен первому ее члену, умноженному на знаменатель прогрессии в степени, показатель которой равен числу членов, предшествующих определяемому, т.е». $b_n = b_1q^{n-1}$		
	[35, с.226]	[32, с.154].	[18, с.98]
Свойства геометрической прогрессии	«Всякий член геометрической прогрессии, начиная со второго, по абсолютной величине равен среднему геометрическому двух соседних с ним членов: $\lvert b_k \rvert =$ $= \sqrt{b_{k-1} * b_{k+1}}$, $k = 2,3,4 \dots$» [35, с.227]	«Квадрат любого члена геометрической прогрессии, начиная со второго равен произведению последующего и предыдущего с ним членов» [30, с.156]. $b^2{}_n = b_{n-1} * b_{n+1}$ «Если в последовательности чисел отличных от нуля квадрат каждого члена, начиная со второго равен произведению последующего и предыдущего с ним членов, то такая последовательности называется геометрической прогрессии» [32, с.156]	«Если все члены геометрической прогрессии положительны, то $b_n = \sqrt{b_{n-1}b_{n+1}}$ т.е. каждый член прогрессии, начиная со второго, равен среднему геометрическому двух соседних с ним членов». [18, с.98]
Сумма первых n членов геометрической прогрессии	«Сумма *n* первых членов геометрической прогрессии со знаменателем $q \neq 1$ определяется по формуле»: $S_n = \frac{b_1(q^n-1)}{q-1}$		
	[35, с.235]	[32, с.160]	[18, с.105]

Таблица 12 – Анализ задачного материала по теме «Прогрессии»

Название Учебника	Учебник алгебры 9 класса: А.Г. Мерзляк и др. [35].	Учебник алгебры 9 класса: Макарычев Ю.Н. и др. [32].	Учебник алгебры 9 класса: Ю.М. Колягин [18].
Задачи на определение арифметической прогрессии	№713, №714, №720, №721, №731, №743, №744, №745, №746, №747, №748, №749, №1017, №1024, №1027	№575, №576	№173, №174, 175
Задачи на определение геометрической прогрессии	№817, №818, №819, №820, №821, №822, №823, №824, №825, №850, №883	№ 623, 63,	№208-210
Задачи на формулы n-го члена арифметической и геометрической прогрессии	№715, №716, №717, №718, №722-725, №735-739, № 729-730, №719, №726, №732-734, №1026, №826-828, №833-835, №851, №852, №1037, №836-838,№841, №855-856, №829, №830, №853, №854, №1039, №843-847, №857-858, №1025, №1019, №1018, №1020, №1021 №1031, №1034.	№577, 578, 579, 580, №585, 586, 587, 588, №589, 590, №591-598, №624-628, 633, №630, 632, №631	№176, 177, 184-187, №178-180, №181-182, №183, №211-212, 215-217, №213, №214.
Задачи на сумму первых n членов арифметической и геометрической прогрессии	№763-764, №769-770, №773, №780, №777, №782, №805(1), №806(1), №1032, №1031(4), №765-768, №771, №781, №1029, №1035, №790-791, №795, №801-802, №792-793, №796-797, №1022, №800, №807, №1031(5), №870-871, №884, №879, №1038, №878	№ 603-613, № 648-656, №657	№192-200, №201, №202-203, №222-223, 227, 228-229, №224, №225, 226, №230-232
Смешанные задачи	№778, №798-799, №810, №1033, №1036, №772, №774-776, №779, №783, №784, №788-789, №803-804, №1023, №1030, №785-787, №794, №805(2), №806(2), №839-840, №860–864, №872-873, №876-877, №880, №882, №887-889, №874-875, №1037(3,4), №885, №886	№581, 582, 583, №614-618, №629, 634-644,	№188-191, №204-207, №218-221

Анализ учебников позволяет сделать следующие выводы: в рассмотренных учебниках выделяются в основном обучающие задачи по типологии Ю.М. Колягина, поэтому необходимо дополнить их системой проблемно-поисковых задач. Покажем, как можно использовать их на различных этапах урока алгебры в 9 классах.

Этап изучения нового материала на уроке по теме «Определение арифметической и геометрической прогрессий»

Для организации коллективной формы учебной деятельности обучающиеся класса разбиваются на группы по 3-4 человека или пары.

Каждая группа получает задачу на определенное время. После решения задач все учащиеся класса привлекаются к их обсуждению.

Задача 1. «Улитка ползет по дереву. За первую минуту она проползла 30 см, а за каждую следующую минуту — на 5 см больше, чем за предыдущую. Сколько проползает улитка каждую минуту, составьте последовательность» [51].

Задача 2. «Бактерия, попав в живой организм, к концу 20-й минуты делится на две бактерии, каждая из них к концу следующих 20 минут делится опять на две и т.д. Сколько бактерий, образуются каждый 20 минут, составьте последовательность» [51].

Этап изучения нового материала на уроке по теме «Характеристические свойства прогрессий»

Задача 3. «Грузовик перевозит партию щебня, ежедневно увеличивая норму перевозки на одно и то же число тонн. Известно, что за первый день было перевезено 2 тонны щебня, за третий день 16 тонны щебня. Определите, сколько тонн щебня было перевезено за второй день» [51].

Задача 4. «Васе каждый день читает книгу. Ежедневно он увеличивает количество прочитанных страниц в одно и то же число страниц по сравнению с предыдущим днем. Известно, что за четвертый день Вася прочитал 8 страниц. Определите, сколько страниц прочитает Вася на пятый день, если в шестой день он прочитал 32 страницы» [51].

Задача 5. «Мощности пяти электромоторов составляют возрастающую геометрическую прогрессию. Мощность первого 5 кВт, а третьего 9,8 кВт. Рассчитать мощности остальных электромоторов (ответ дать в кВт)» [51].

Этап изучения нового материала на уроке по теме «Формулы суммы n первых членов арифметической и геометрической прогрессий»

Задача 6. «В огороде 30 грядок, каждая длиной 16 метров и шириной 2,5 метра. Поливая грядки, огородник приносит ведра с водой из колодца, расположенного в 14 м от края огорода, и обходит грядки по меже, причем воды, приносимой за один раз, достаточно для поливки только одной грядки. Какой длины путь должен пройти огородник, поливая весь огород? Путь начинается и заканчивается возле колодца» [51].

Задача 7. «Два товарища поспорили о том, что река должна покрыться льдом не ранее 20 декабря. Они условились, что если река покроется ледяным покровом раньше, то первый из них платит, а если позже, то получает за первый день 1 рубль, а за каждый последующий день в 1,5 раза больше. Река покрылась льдом 12 декабря. Сколько заплатит первый? (ответ дайте в рублях, округлив до единиц)» [51].

Задача 8. «Бригада маляров красит забор длиной 750 метров, ежедневно увеличивая норму покраски на одно и то же число метров. Известно, что за первый и последний день в сумме бригада покрасила 150 метров забора. Определите, сколько дней бригада маляров красила весь забор» [51].

Также при изучении теоретического материала можно создать проблемные ситуации с помощью примеров из жизни. Например, для решения некоторых задач по физике, геометрии, биологии, химии, экономике, строительному делу используются формулы арифметической и геометрической прогрессий.

а) «Химия. При повышении температуры по арифметической прогрессии скорость химических реакций растет по геометрической прогрессии.

b) Геометрия. Вписанные друг в друга правильные треугольники образуют геометрическую прогрессию.

c) Физика. И в физических процессах встречается эта закономерность. Нейтрон, ударяя по ядру урана, раскалывает его на две части. Получаются два нейтрона. Затем два нейтрона, ударяя по двум ядрам, раскалывает их еще на 4 части и т.д. – это геометрическая прогрессия.

d) Биология. Микроорганизмы размножаются делением пополам, поэтому при благоприятных условиях, через одинаковый промежуток времени их число удваивается.

i) Экономика. Вклады в банках увеличиваются по схемам сложных и простых процентов. Простые проценты – увеличение первоначального вклада в арифметической прогрессии, сложные проценты – увеличение в геометрической прогрессии» [51].

Методические рекомендации:

Для того чтобы успешно использовать метод проблемного изложения при организации коллективной формы деятельности обучающихся на уроках математики учитель должен выполнить следующие действия:

– провести анализ материала учебника (проанализировать теоретический и задачный материал),

– выбрать задачи, которые можно считать проблемными, и которые можно использовать в качестве заданий для групповой работы,

– подобрать материал для создания проблемной ситуации и коллективной формы деятельности (проблемные задачи, примеры из жизни и т.д.),

– продумать, как и чем можно дополнить информативный материал учебника для создания проблемной ситуации при организации коллективной формы деятельности обучающихся,

– продумать на каком этапе урока целесообразно использовать коллективную форму деятельности с использованием метода проблемного изложения,

– создать группу обучающихся и проблемную ситуацию для каждой группы на уроке,

– разрешить проблемную ситуацию.

Например, на этапе мотивация при изучении темы «Сумма n-первых членов арифметической прогрессии» обучающимся может быть предложено следующее задание.

Задача 1. «Примерно 200 лет тому назад в одной из школ Германии на уроке математики учитель предложил ученикам найти сумму первых 100 натуральных чисел. Все принялись подряд складывать числа, а один ученик почти сразу же дал правильный ответ. Имя этого ученика Карл Фридрих Гаусс. В последствие он стал великим математиком. Как удалось Гауссу так быстро подсчитать эту сумму?» [51] (ученики высказывают свои предположения)

– Гаусс нашел какое-то правило (формулу) для быстрого подсчёта суммы первых 100 натуральных чисел.

Учитель может использовать на этом этапе метод «Командный штурм». Для использования данного метода рекомендуемое количество обучающихся в группах от 4 до 6 человек. Длительность до 15 минут. Весь материал идей передается группе экспертов, которые тщательно изучают высказывания участников и из предложенных идей отбирают и развивают наилучшие.

Далее учащимся по группам дается задание, приведенное в таблице 13

Таблица 13 – Задания для групп

Группа 1	Группа 2	Группа
найти сумму двадцати последовательных натуральных чисел, начиная с единицы. (*S = 210)*	найти сумму восемнадцати последовательных натуральных чисел, начиная с единицы. (*S = 173)*	найти сумму двадцати двух последовательных натуральных чисел, начиная с единицы. (*S = 253)*

2.3 Постановка эксперимента и его результаты

Опытная проверка осуществлялась в условиях обучения математике в 9 «А» классе в III четверти на базе МБОУ Вачская СОШ р.п. Вача, Вачского района Нижегородской области. В экспериментальном классе (9 «Б») обучается 23 человек. В контрольном классе (9 «А») обучается 18 человек. Уровень обучаемости до начала эксперимента по результатам входной контрольной работы (таблица14)

Таблица 14 – Результаты контрольной работы у 9 «А» и 9 «Б» до постановки эксперимента

	9 «А» (23 ученик)	9 «Б» (18 учеников)
«5»	5	5
«4»	8	3
«3»	7	5
«2»	3	5
Качество знаний	56%	44%

Опытная работа включала в себя три этапа: констатирующий, обучающий и контролирующий.

План проведения эксперимента:

– составление анкеты для учителей математики, цель которой выявить, используют ли учителя математики проблемно-поисковые задачи как средство организации коллективной формы учебной деятельности при обучении математике в общеобразовательной школе;

– сбор результатов предыдущих итоговых контролей в 9 «А» и 9 «Б» классе;

– составление конспектов уроков, в которых будут учтены все методические рекомендации по применению проблемно-поисковых задач как средства организации коллективной формы учебной деятельности при обучении математике в общеобразовательной школе;

– проведение уроков по составленным конспектам;

– составление итогового контроля по теме «Прогрессии» для учащихся 9-х классов;

– проведение итогового контроля;

– подведение итогов.

Констатирующий этап

Перед началом постановки эксперимента было проведено анкетирования учителей математики по анкете (таблица 15).

Таблица 15 – Анкета для учителей математики

Вопрос	Ответ:
Какую задачу на Ваш взгляд, можно считать проблемно-поисковой задачей?	
Применяете ли проблемно-поисковые задачи на практике? Если нет, то с чем это связано	
Используете или вы в своей практике коллективную форму учебной деятельности	
Приведите примеры применения проблемно-поисковых задач как средства организации коллективной формы учебной деятельности на уроках математике.	

В результате анкетирования выяснилось, что большинство учителей имеют представления о том, какие задачи школьного курса математики считать проблемно-поисковыми. К ним относят задачи на поиск доказательства, задачи на построение, задачи на исследование.

Коллективную форму учебной деятельности учащихся учителя используют крайне редко, объясняя это такими причинами: не достаточно времени на ее организацию на уроках, неумение обучающихся плодотворно работать в группах. Иногда учителя используют парную или групповую работу.

Обучающий этап эксперимента был проведен в 9 «Б» классе при изучении темы: «Прогрессия». На уроках алгебры была реализована спроектированная нами система проблемно-поисковых задач и организована коллективная деятельность учащихся при решении таких задач.

Так, например, на этапе обобщения и систематизации по теме «Арифметическая и геометрическая прогрессия» учащимся для коллективной работы в группах были предложены проблемные задания.

Задача 1. Уравнение $x^2+ax+в=0$ имеет корни x_1 и x_2, а уравнение $y^2+3ay+2в+2=0$ имеет корни y_1 и y_2. Числа x_1 y_1, x_2 и y_2 - последовательные члены арифметической прогрессии. Найти а, в, с.

Задача 2. Решить уравнение: $(x-1)/x + (x-2)/x + (x-3)/x + \ldots + 1/x = 3$, где x - целое положительное число.

Задача 3. Корни уравнения $x^4 - 10x^2 + a = 0$ составляют арифметическую прогрессию. Найти а.

Задача 4. Найти сумму всех четных двузначных чисел.

В контрольном классе тема изучалась без применения этих задач и организации коллективных форм деятельности обучающихся (использовались традиционные фронтальная и индивидуальная формы деятельности).

Контролирующий этап эксперимента

Для получения объективной оценки уровня усвоении тем «Арифметическая прогрессия», «Сумма n-первых членов арифметической прогрессии», «Геометрическая прогрессия» и «Сумма n-первых членов геометрической прогрессии» была проведена заключительная диагностика в форме контрольной работы.

Вариант контрольной работы по алгебре на тему: «Прогрессии»

№ 1. Найдите первый положительный член арифметической прогрессии -8,1; -7,9; -7,7; … .

№ 2. Первый и шестой члены геометрической прогрессии соответственно равны 2 и -64. Найдите сумму десяти первых членов этой прогрессии.

№ 3. При каком значении x значения выражений $x+1$, $x+5$ и $2x+4$ будут последовательными членами геометрической прогрессии? Найдите члены этой прогрессии.

№ 4. Сумма бесконечной геометрической прогрессии равна 27, а сумма трех ее первых членов равна 35. Найдите первый член и знаменатель прогрессии.

№ 5. Найдите сумму всех натуральных чисел, кратных 8, которые больше 50 и меньше 180.

Задание 1 – проверяет усвоение знаний по теме «Арифметическая прогрессия» (знание формулы n-го члена арифметической прогрессии).

Задание 2 – проверяет усвоение знаний по теме «Геометрическая прогрессия» и «Сумма n-первых членов геометрической прогрессии» (знание формулы n-го члена геометрической прогрессии и формулу суммы n-первых членов геометрической прогрессии).

Задание 3 – проверяет усвоение знаний по теме «Геометрическая прогрессия» (знание характеристического свойства геометрической прогрессии).

Задание 4 – проверяет усвоение знаний по теме «Сумма бесконечной геометрической прогрессии» (знание формулы суммы бесконечной геометрической прогрессии и формулу суммы n-первых членов геометрической прогрессии).

Задание 5 – проверяет усвоение знаний по теме «Арифметическая прогрессия» (знание формулы n-го члена арифметической прогрессии и формулу суммы n-первых членов арифметической прогрессии).

Установление оценки за контрольные работы идет с использованием следующей формулы:

$$K = \frac{\textit{сумма верных ответов (баллов)}}{\textit{число вопросов}}$$

Далее устанавливается примерная шкала оценок:

– если К изменяется от 1 до 0,9 – оценка 5,

– если от 0,9 до 0,75 – оценка 4,

– если от 0,75 до 0,7 – оценка 3,

– если К ниже 0,7 – усвоение материала неудовлетворительное.

Результаты контрольной работы у 9 «А» и 9 «Б» после проведения эксперимента в 9 «Б» классе, представлены в таблице 17.

Таблица 17 – Результаты контрольной работы

9 «А» (23 ученик)		9 «Б» (18 учеников)	
«5»	7	«5»	4
«4»	8	«4»	5
«3»	6	«3»	6
«2»	2	«2»	3
Качество знаний	65%	Качество знаний	50%

Можно сделать вывод о том, что методика организации коллективной формы учебной деятельности при обучении математике в общеобразовательной школе на основе проблемно-поисковых задач позволяет сформировать коммуникативные умения обучающихся и достижение каждым из них базового уровня знаний и умений.

Эта методика была основана на спроектированной системе проблемно-поисковых задач и сочетании на уроке коллективной формы учебной деятельности с фронтальной и индивидуальной.

Выводы по второй главе

Основным результатом второй главы является спроектированная система проблемно-поисковых задач по теме «Четырехугольники» и по теме «Прогрессии».

Апробация системы была проведена в 9 классе при изучении арифметической и геометрической прогрессий.

Заключение

На основе выполненного исследования в рамках магистерской диссертации:

1. Установлено наличие различных подходов к трактовке понятия «проблемно-поисковая задача» можно объяснить тем, что они основаны на различных концепциях проблемного обучения (И.Я. Лернер, А.М. Матюшкин, М.И. Махмутов и другие).

2. Выявлена теоретическая основа проблемно-поисковых задач при обучении математике в общеобразовательной школе, которую составила концепция Ю.М. Колягина о типологии задач на основе неизвестных компонентов в её структуре.

3. Проблема исследования рассмотрена во взаимосвязи содержательного(задачи) и организационного (формы учебной деятельности) компонентов методической системы обучения математике в общеобразовательной школе.

4. Содержательный компонент включает в себя проектирование системы проблемно-поисковых задач по математике. Его разработка предусматривала определение проблемно-поисковых задач, выявление роли таких задач в развитии исследовательских умений и способов решения задач; в обосновании принципов отбора задач и в подборе самих задач по темам Четырехугольники» и «Прогрессии».

5. Организационный компонент включает в себя основные формы организации коллективной деятельности обучающихся класса: коллективную форму и групповую форму. В диссертации подробно проанализирована сущность коллективной формы учебной деятельности и приведены примеры её организации на этапах изучения нового материала, этапах обобщения и систематизации знаний и умений. Теоретическую основу организационного компонента составила концепция форм учебной деятельности обучающихся на уроках математики Р.А. Утеевой.

6. Показано, что именно проблемно-поисковые задачи могут служить одним из эффективных средств организации коллективной формы учебной деятельности при обучении математике в общеобразовательной школе.

7. Сформулированы методические рекомендации по использованию проблемно-поисковых задач и организации на их основе коллективного обсуждения различных способов решения.

8. Экспериментально проверена эффективность разработанной методики организации коллективной деятельности обучающихся на основе системы проблемно-поисковых задач при обучении математике в общеобразовательной школе.

Таким образом, все поставленные задачи решены, цель исследования достигнута.

Дальнейшего исследования требует дополнение системы проблемно-поисковых задач по темам «Четырехугольники» и «Прогрессии» проблемными задачами, то есть задачами, в структуре которой неизвестны три компонента. Такие задачи могут быть предложены тем учащимся, которые проявляют интерес к исследовательской деятельности, а также при организации их проектной или научно-исследовательской деятельности.

Список используемой литературы и используемых источников

1. Аркадьев А.Г., Днепров Э.Д. Сборник нормативных документов. Математика. М. : Дрофа, 2007. 128 с.

2. Атанасян Л. С. Геометрия [Текст]: учеб. для 7-9 кл. общеобразоват. учреждений / Л. С. Атанасян. и др. М.: Просвещение, 2010. 384 с.

3. Бабанский Ю.К. Педагогика. М.: Просвещение, 1983. 360 с.

4. Варданян С.С. Задачи по планиметрии с практическим содержанием: Книга для учащихся 6-8 классов средней школы / Под ред. В.А. Гусева. М.: Просвещение, 1989. 144 с.

5. Голицына О.Л, Максимов Н.В. Информационные системы / Московская финансово-промышленная академия. М.: Форум, 2014. 329 с.

6. Груденов Я.И. Совершенствование методики работы учителя математики: Кн. для учителя. М.: Просвещение, 1990. 224 с.

7. Гурова Л.Л. Психологический анализ решения задач. Воронеж: Воронежский университет, 1976. 12 с.

8. Дайри Н.Г. Главное усвоить на уроке. М. : Знание, 1984. 192 с.

9. Далингер В.А. Методика реализации внутри предметных связей при обучении математике: Кн. для учителя. М.: Просвещение, 1991. 80с.

10. Демченкова Н.А. Роль проблемно-поисковых задач в формировании исследовательских умений студентов по математике// Социальная политика и социология. 2011. №9(75). С. 464-476.

11. Демченкова Н.А. Проблемно-поисковые задачи как средство формирования исследовательских умений в курсе методики преподавания математики в пед вузе: дис….канд. пед. наук. Тольятти, 2000. 203 с

12. Дьяченко В.К. Организационная структура учебного процесса и ее развитие. М.: Просвещение, 1989. 156 с.

13. Золотова А.В. Коллективная работа на уроках // Начальная школа. 1989. № 10. С. 34-35.

14. Иванова Т.А., Перевощикова Е.Н., Кузнецова Л.И., Григорьева Т.П. Теория и технология обучения математике в средней школе: Учеб. пособие. для студ. математических спец. педвузов /Под ред. Т.А. Ивановой,2-е изд., испр. и допол. Нижний Новгород: НГПУ, 2009. 355 с.

15. Ильницкая, И.А. Проблемные ситуации и пути их создания на уроке /И. А. Ильницкая. М.: Знание, 1985.№5. 80 с. (Новое в жизни, науке, технике).

16. Капкаева, Л.С. Лекции по теории и методике обучения математике: частная методика: учеб. пособие для студентов мат. спец. пед. вузов : в 2 ч. Ч. 1 / Л.С. Капкаева; Мордов. гос. пед. ин-т. Саранск, 2009. 262 с.

17. Ковалева Г.И. Изучаем свойства трапеции //Вестник Елецкого государственного университета. – 2010. Вып. 27. С. 104–109.

18. Колягин Ю.М., Ткачева М.В., Алгебра: 9 класс: учебник для учащихся общеобразовательных организаций. М.: Просвещение, 2014. 304 с.

19. Колягин Ю. М., Оганесян В. А. и др. Методика преподавания математики в средней школе. Общая методика. М.: Просвещение, 1975. 367 с.

20. Колягин Ю. М. Задачи в обучении математике / Научно-исслед. ин-т школ М-ва просвещения РСФСР. — Ч. 1: Математические задачи как средство обучения и развития учащихся. М.: Просвещение, 1977. 111 с.

21. Колягин Ю.М. Математические задачи как средство обучения и развития учащихся средней школы: Автореф. дисс... докт. пед. наук. М.: Просвещение, 1977. 55с.

22. Конакпаева С. А. Решение проблемно-поисковых задач на уроках математики как средство развития одаренности учащихся: материалы X Междунар. науч. конф. (г. Чита, апрель 2018 г.). Чита: Молодой ученый, 2018. С. 71-73.

23. Котов В.В. О методах организации на уроках коллективной учебной деятельности // Математика в школе. 1978. № 3. С. 33–35.

24. Кругляк М.И. О проблемном изложении учебного материала // Вопросы активизации мышления и творческой деятельности: Тезисы докладов на межвузовской конференции. М.: Красная Звезда, 1964. 211с.

25. Крупич В. И. Структура и логика процесса обучения математике в средней школе: Метод. разраб. по спецкурсу для слушателей ФПК. М.: МГПУ, 1985. 118 с.

26. Крупич В.И. Теоретические основы обучения решению школьных математических задач: Монография. М.: Прометей, 1995. 210 с.

27. Кубракова А.С. Проблемно-поисковые задачи как средство формирования исследовательских умений, обучающихся на уроках математики. Волгоград, 2012. 34 с.

28. Кузнецова А.А. Проблемно-поисковые задачи при обучении математике в общеобразовательной школе //Студенческие Дни науки в ТГУ – 2021: научно-практическая конференция (Тольятти, 5–30 апреля 2021 года): сборник студенческих работ / отв. за вып. С.Х. Петерайтис. – Тольятти: Изд-во ТГУ, 2021. – 1 оптический диск. С.506-510.

29. Кузнецова А.А. Принципы проектирования системы проблемно-поисковых задач как средства организации коллективной формы учебной деятельности обучающихся на уроках математике //Молодежь. Наука. Общество – 2021: Всероссийская студенческая научно-практическая междисциплинарная конференция (Тольятти, 20 декабря 2021 – 16 января 2022 года): сборник студенческих работ / отв. за вып. С.Х. Петерайтис. – Тольятти: Изд-во ТГУ, 2022. – 1 оптический диск.

30. Леонтьева М.Р., Суворова С.Б. Упражнения в обучении алгебре: Кн. для учителя. М.: Просвещение, 1985. 128с.

31. Лернер И.Я. Проблемное обучение. М.: Знание, 1974. 64 с.

32. Макарычев Ю.Н., Миндюк Н.Г., Алгебра: 9 класс: учебник для учащихся общеобразовательных организаций. М.: Просвещение, 2014. 271 с.

33. Матюшкин А.М. Некоторые проблемы психологии мышления // Предисловие к сб. переводов с нем. и англ. «Психология мышления». М.: Прогресс, 1965. 226 с.

34. Махмутов М.И. Организация проблемного обучения в школе. Книга для учителей / М.И. Махмутов. М.: Просвещение, 2007. 240 с.

35. Мерзляк А.Г., Полонский В.Б., Якир М.С. Алгебра: 9 класс: учебник для учащихся общеобразовательных организаций. М.: Вентана-Граф, 2014. 304 с.

36. Мельникова Е.Л. Проблемный урок или как открывать знания с учениками. М.: АПК и ПРО, 2006. 166 с.

37. Мищенко Т.М. Дидактические материалы и методические рекомендации для учителя по геометрии: 8 класс: к учебнику Л.С. Атанасяна и др. «Геометрия. 7-9 классы». ФГОС (к новому учебнику) / Т. М. Мищенко. М.: Экзамен, 2016. 174 с.

38. Нешков, К.И., Семушкин, А.Д. Функции задач в обучении Текст. / К.И. Нешков, А.Д. Семушкин // Математика в школе. 1971. № 3. С. 4–7.

39. Оконь В. Основы проблемного обучения. М.: Просвещение, 1968. 208 с.

40. Петровский В.А., Виноградова А.М. Учимся общаться с ребенком. М.: Просвещение, 1993. 191с.

41. Первин И.Б. Коллективная учебно-познавательная деятельность школьников. М.: Педагогика, 1985. 144 с.

42. Пойа Д. Математическое открытие. Решение задач: основные понятия, изучение и преподавание. Пер. с англ. В.С. Бермана / Под ред. И.М. Яглома. 2-е изд. М.: Наука, 1976. 448 с

43. Приходько, Е. Б. Применение технологии проблемного обучения на уроках математики: материалы III Междунар. науч. конф. (г. Казань, март 2018 г.). Казань: Молодой ученый, 2018. С. 27-31.

44. Савинов Е. С. Примерная основная образовательная программа образовательного учреждения. Основная школа. (Стандарты второго поколения). М.: Просвещение, 2011. 455 с.

45. Садыкова Ж.Н. Развитие навыков поисковой деятельности учащихся через проблемно-поисковый метод обучения: Наука и образования – журнал Internationalscientificreview, 2020 – с. 73-74

46. Саранцев, Г.И. Упражнения в обучении математике / Г.И. Саранцев. М.: Просвещение, 2005. 255 с.

47. Скаткин М. Н. Дидактика средней школы: Некоторые проблемы современной дидактики. М.: Просвещение, 1982. 319 с.

48. Скаткин М. Н. Проблемы современной дидактики. 2-е изд. М.: Педагогика, 1984. 96 с.

49. Смирнова И.М. Геометрия учебник 7-9 классы / И. М. Смирнова, В.А. Смирнов. М: Мнемозина, 2007. 382 с.

50. Суворова С.Б. Упражнения в обучении алгебре (6-8 классы). Пособие для учителей. М.: Просвещение, 1977. 48с.

51. Сайт Педагога-Исследователя URL: http://si-sv.com/publ/1/14-1-0-84, (дата обращения: 06.02.2022)

52. Сайт Гарант URL: https://base.garant.ru/74634042/53f89421bbdaf741eb2d1ecc4ddb4c33/ (дата обращения: 06.02.2022)

53. Сайт общедоступной электронной библиотеки «Математическое образование» URL: https://www.mathedu.ru/

54. Сайт Решу ЕГЭ Образовательный портал для подготовки к экзаменам URL: https://mathb-ege.sdamgia.ru/test?theme=191 (дата обращения 27.05.2022)

55. Сайт ФГОС. URL: https://fgos.ru/ (дата обращения 29.03.2021)

56. Сайт IX заочный тур творческого конкурса учителей. URL: https://www.mccme.ru/oluch/Zaoch_14_usl.htm (дата обращения 30.03.2021)

57. Симоненко В.Д., Ретивых М.В. Общая и профессиональная педагогика: Учебное пособие для студентов, обучающихся по специальности «Профессиональное обучение». В 2-х книгах. Брянск: Изд-во Брянского государственного университета, 2003. Кн.1. 174 с.

58. Утеева Р. А. Групповая работа как одна из форм деятельности учащихся на уроке // Математика в школе, 1985. №2

59. Утеева Р.А. Дифференцированное обучении математике учащихся средней школы: Пособие по спецкурсу и спец.семинару для студентов мат. спец. педвузов. М.: Прометей, 1996. 96 с.

60. Утеева Р.А. Теоретические основы организации учебной деятельности учащихся при дифференцированном обучении математике в средней школе: Монография. М.: Прометей, 1997. 230 с.

61. Фридман Л.М. Сюжетные задачи по математике. История, теория, методика. М.: Школьная Пресса, 2002. 15 с.

62. Федеральный перечень учебников, рекомендуемых к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ начального общего, основного общего, среднего общего образования URL: http://docs.cntd.ru/document/499087774. (Дата обращения 21.11.2021)

63. Цукерман Г.А. Виды общения в обучении. Томск: Пеленг, 1993. 263 с.

64. Чередов И.М. Система форм обучения в советской общеобразовательной школе. Монография. М.: Педагогика, 1987. 152 с.

65. Шапалова А.А. Задачи о равных отрезках в трапеции. Материалы Всероссийской научно-практической конференции. – Тверь. 2020, стр. 235-238

66. Шарыгин И.Ф. Геометрия. 7-9 кл. [Текст]: учеб. для общеобразоват. учреждений / И.Ф. Шарыгин. М.: Дрофа, 2012. 462 с.

67. Шыныбеков А.Н. Учебник для 8 класса общеобразовательной школы. Алматы: Атамура, 2018. 112с.

68. Makinde A.O. Some Methods of Effective Teaching and Learning Of Mathematics [электронный ресурс] / A.O. Makinde // Journal of Education and

Practice Vol.3, No.7, 2012. URL: http://www.iiste.org/Journals/index.php/JEP/article/view/12992 (Дата обращения 27.03.2022)

69. Ahlam EL-Shaer. Impact of Problem-Based Learning on Students` Critical Thinking Dispositions, Knowledge Acquisition and Retention [электронный ресурс] /Ahlam EL-Shaer, H. Gaber// Journal of Education and Practice Vol.5, No.14, 2014. URL: www.iiste.org/Journals/index.php/JEP/article/view/1849 (Дата обращения 27.03.2022)

70. John R. Savery. Overview of Problem-based Learning: Definitions and Distinctions. / John R. Savery // 2006. URL: http://docs.lib.purdue.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1002&context=ijpbl(Дата обращения 27.03.2022)

71. Problem-Based Learning. Stanford University newsletter on Teaching // winter, 2001, Vol.11, № 1. URL: http://web.stanford. Edu/dept/CTL/cgibin/docs/newsletter/problem_based_learning.pdf (Дата обращения 27.03.2022)

72. Saragih S., Habeahan W.L. The Improving of Problem Solving Ability and Students' Creativity Mathematical by Using Problem Based Learning in SMP Negeri 2 Siantar[электронный ресурс]/S.Saragih, W.L. Habeahan// Journal of Education and Practice Vol.5, No.35 2014. URL: www.iiste.org/Journals/index.php/JEP/article/view/17463 (Дата обращения 27.03.2022)