МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Тольяттинский государственный университет»

Институт математики, физики и информационных технологий
(наименование института полностью)

Кафедра «Высшая математика и математическое образование»
(наименование)

44.04.01 Педагогическое образование
(код и наименование направления подготовки)

Математическое образование
(направленность (профиль))

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА (МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ)

на тему «Геометрические задачи как средство обобщающего повторения при подготовке к итоговой аттестации по математике в общеобразовательной школе»

Студент	С.Н. Косолапов	
	(И.О. Фамилия)	(личная подпись)
Научный руководитель	д-р пед. наук, канд. физ.-матем. наук, профессор С.Н. Дорофеев	
	(ученая степень, звание, И.О. Фамилия)	

Тольятти 2022

Оглавление

Введение

Актуальность и научная значимость настоящего исследования. Математика является одним из основных предметов, обеспечивающих формирование готовности общества к позитивным его изменениям на основе логичных и целесообразных преобразованиях, обусловливающих их гуманность. Именно поэтому изучение математики в школе сосредоточено не только вокруг формирования знаний, умений и навыков, но и вокруг метапредметных образовательных результатов. Сейчас особое внимание уделяется формированию интеллектуальной и исследовательской деятельности, способности учащегося к самообразованию и самоанализу собственных действий, понимание анализа ситуации, что требует применения математики и эффективных действий в ней, используя приобретенные знания, умения и навыки на практике. Важной целью является развитие математического мышления и интуиции, творческих способностей, необходимых для получения будущей профессии.

Современное значение геометрических знаний и умений неоценимо для большого количества профессий, именно поэтому одной из проблем современной школы является формирование геометрической компетентности учащихся в процессе обучения математики. Одной из главных особенностей геометрического образования является развитие пространственных представлений, так как именно они играют большую роль во взаимодействии человека с окружающим миром.

Изучение координат и векторов особенно актуально, именно поэтому метод координат считается основным методом исследования свойств геометрических фигур в аналитической геометрии. Изучение координатно-векторного метода упрощает изложение теоретического материала, доказательство теорем, решение алгебраических и геометрических задач.

Проблемы, касающиеся развития геометрических знаний, умений и навыков учеников старшей школы систематически рассматриваются педагогами-методистами. Различные аспекты рассматривались такими учеными, как О.В. Витюк, А.Л. Воевода, М.И. Желдак, С.А. Раков (рассматривают различные аспекты применения информационных технологий в преподавании геометрии), В.Г. Моторина (исследует проблему развития геометрической компетентности при обучении геометрии), Г.П. Бевз (рассматривает различные типы стереометрических задач и их роль в формировании геометрической компетентности), Б.М. Величковская, Н.П. Линькова, (рассматривали формирование и развитие пространственных представлений, как процесс создание образов и оперирование ими), В.В. Давыдов, Е.М. Кабанова-Меллер, Г.С. Костюк, Н.А. Менчинская, И.Е. Унтта (психолого-педагогическая составляющая проблемы), А.В. Павлов, В.Е. Михайленко, О.Л. Подгорный, В.С. Обухова и другие.

Цель – выявить роль и значимость геометрических задач и методов их решения в организации обобщающего повторения.

Объект – обучение старшеклассников геометрии.

Предмет – геометрические задачи как средство обобщающего повторения при обучении школьников геометрии.

Для достижения поставленной цели были сформулированы следующие задачи:

1. Изучить различные подходы к толкованию понятия “задача” и рассмотреть типологии школьных геометрических задач.
2. Изучить основные методы решения геометрических задач на вычисление, доказательство и построение.
3. Определить основные цели и задачи обучения школьников решению геометрических задач в общеобразовательной школе.
4. Проанализировать подходы к обучению старшеклассников решению задач в учебниках геометрии 7-11 классов.
5. Подготовить методические рекомендации по формированию умений решать геометрические задачи в старших классах.

6. Разработать элективный курс «Геометрические задачи на доказательство векторным методом».

7. Проанализировать результаты экспериментальной работы.

Применялись такие **методы исследования** как анализ, обобщение, наблюдение, беседа, тестирование, диалог и т. д., которые обнаружили и выявили проблемы в методике обучения:

– во-первых, большинство учащихся не умеют решать геометрические задачи как на доказательство. так и на вычисление и часто игнорируют подобный тип геометрических задач;

– во-вторых, учащиеся испытывают трудности при построении доказательства и алгоритма решения геометрической задачи на вычисление;

– в третьих, учащиеся не владеют методами доказательства и решения геометрической задачи на вычисление.

Базовый метод исследования – анализ традиционной методики обучения на основе опыта работы в школе (гимназии). Метод сплошного наблюдения в образовательной среде школы, который фиксировал и обобщал результаты учебной деятельности старшеклассников. Анализ результатов учебной деятельности старшеклассников на основе устных рассуждений и письменных решений геометрических задач на доказательство, включая пробные задания ЕГЭ. Диалоги, беседы с учителями, дискуссии по проблемам обучения.

Анализ психолого-педагогической, научной и учебно-методической литературы, обзор научных статей в журналах «Математика в школе» и «Математика для школьников», «Квант», «Педагогика». Направляющий метод исследования – педагогический эксперимент по внедрению технологии обучения и обработка результатов эксперимента. Констатирующий эксперимент рассматривался, как определяющий метод исследования с целью установления сформированности умений доказывать геометрические задачи.

Основные этапы исследования:

– 1 семестр, 2020-2021 учебный год: анализ ранее проводимых исследований по теме диссертации, анализ УМК по геометрии 10 - 11 классов, изучение нормативных документов: образовательный стандарт, учебных программа, профессиональный стандарт «Педагог», закон «Об образовании»; Концепция развития математического образования в Российской Федерации; анализ опыты работы учителей;

– 2 семестр, 2020-2021 учебный год: определение теоретических и методический направлений по теме диссертации, выработка собственной стратегии и подходов к проблеме исследования, формулировка методики обучения;

– 3 семестр, 2021-2022 учебный год: разработка методики обучения на основе технологического подхода, формулировка методики, определение целей методики обучения, задач методики обучения, составление содержания методики обучения, подборка материала для составления элективного курса «Геометрические задачи на доказательство векторным методом»;

– 4 семестр, 2021-2022 учебный год: доработка в окончательном варианте методики обучения на основе технологического подхода, внедрение технологии обучения в учебный процесс, проведение констатирующего эксперимента, оформление и корректировка материалов диссертации, описание результатов эксперимента, формулировка выводов.

Опытно-экспериментальная база исследования: Государственное образовательное учреждение «Гимназия №441» Фрунзенского района Санкт-Петербурга.

Теоретическая значимость исследования заключается в предложенной методике решения геометрических задач при подготовке итоговой аттестации по математике в общеобразовательной школе.

Новизна исследования: разработаны методические рекомендации обучения решению геометрических задач на вычисление в старших классах.

Практическая значимость исследования:

– проведена классификация геометрических задач на вычисление;

– предложены методические рекомендации для решения геометрических задач в 10-11 классах;

– разработан элективный курс «Геометрические задачи на вычисление и доказательство векторным методом».

Достоверность и обоснованность результатов исследования обеспечивались сочетанием теоретических и практических методов исследования, анализом педагогической практики и личным опытом работы в общеобразовательной школе.

Апробация и внедрение результатов работы велись в течение всего исследования. Его результаты докладывались на следующих конференциях: Всероссийской студенческой научно-практической междисциплинарной конференции «Молодежь. Наука. Общество» (Тольятти, январь 2022 г); Международной научно-практической конференций «Качество обучения как проблема контроля и оценки образовательной деятельности образовательных организаций (учреждений)», (г. Луганск, январь 2022 г.);Х Международной научной конференции 27-29 апреля 2022 года «Математика. Образование. Культура» (К 160-летию со дня рождения Давида Гильберта). (Тольятти, 27-29 апреля 2022 года). По теме исследования имеются 3 публикации.

На защиту выносятся:

– методические рекомендации по решению геометрических задач при подготовке к итоговой аттестации в общеобразовательной школе;

– элективный курс «Геометрические задачи на вычисление и доказательство векторным методом».

Структура магистерской диссертации. Работа состоит из введения, двух глав, заключения, содержит 45 рисунков, 3 таблицы, список используемой литературы (54 источника). Основной текст работы изложен на 104 страницах.

Глава 1 Теоретические основы методики обучения решению геометрических задач

1.1. Понятие и типология школьных геометрических задач

«Приоритетным направлением деятельности современной системы образования является формирование универсальных учебных действий, которые дают возможность школьникам развивать способности к саморазвитию и самосовершенствованию на протяжении всей жизни» [4].

В образовательном стандарте второго поколения выделяют одно из основных когнитивных универсальных действий - способность решать проблемы и задачи. Понятие «задача» весьма обширно употребляется во многих областях науки и практики, а также имеет несколько синонимов (проблема, вопрос, назначение, цель, задание).

Невзирая на разницу в использовании термина «задача», алгоритм решения задачи в любой области обладает единой структурой: вход в ситуацию, которая требует основательного анализа, её моделирование, составление плана, осуществление плана, изучение полученного решения.

Важное место в обучении математике занимают задачи: это и цель, и средство обучения. Способность решать задачи является показателем обученности и развития учащихся. С помощью задач в обучении математике реализуются такие цели как: образовательные, развивающие, воспитательные. Решение геометрических задач развивает логическое мышление, алгоритмические и творческие способности, формирует мировоззрение, пространственное воображение, развивает навыки практического применения математической теории в повседневной жизни и профессии.

В процессе решения математической задачи учащийся выясняет большое количество нового: знакомство с новой ситуацией, которая описана в задаче, решение задачи с помощью математической теории, изучение новых разделов математики, освоение новых методов решения, применение теоретического материала в новой нестандартной ситуации. Учащиеся получают геометрические знания и развивают свои геометрические способности при решении геометрических задач. В данной технологии ученик усваивает метод решения определённого типа задач и развивает способность решать аналогичные задачи, а при эффективной тренировке - навык, что также увеличивает уровень математического образования.

Обучение применению геометрических знаний к практическим потребностям весьма эффективно используется при решении геометрических задач. Без математического аппарата невозможно представить исследование и представление конструкторских процессов и их свойств.

Воспитанию у учащихся честности и правдивости, настойчивости к преодолению трудностей, уважения к работе своих сверстников способствует грамотное поставленное обучение решению геометрических задач. Геометрические задачи развивают логическое и алгоритмическое мышление, практические навыки использования математики, формируют мировоззрение, являются наиболее важным средством развития пространственного воображения, а также эвристических и творческих принципов.

Специально подобранные задачи способствуют активизации мыслительной деятельности обучающихся, мотивации введения понятий, теорем, выявлению основных свойств геометрических объектов, их взаимосвязи, формированию математической речи. Анализ развития методики обучения математики показывает существенное изменение роли задач, их содержания, в частности требования задачи. Обучение решению задач является наиболее результативной формой развития математической деятельности [1]. Так например, исследования под руководством Н.А. Менчинской показали, необходимость включения учащихся в деятельность по классификации задач по типам и их наименованию. Классификация геометрических задач по разным основаниям представлена в работах многих ученых. Л.М. Фридман, Ю.М. Колягин, А.Я. Цукарь и другие в основу по классификации задачи положили характер умственной деятельности. А.И. Фетисов, Л.М. Фридман, Д. Пойя и другие основной характеристикой задач и следовательно способом их структурировать считают требование задачи. Работы Б.С. Каплан, Н.К. Рузин, А.А. Столяр и других классифицируют задачи по дидактической функции.

Д. Пойя подмечает, что «хорошая классификация предполагает разбиение задач на такие типы, что тип задачи определяет её метод» [2]. Системная работа учителя по обучению учеников определению типа и класса задач позволяет создать эффективную методику обучения школьников решению задач.

«Ключевой задачей является задача, идея решения которой применяется при решении других задач. В этом случае идея является систематизирующим элементом. Каждая задача системы использует результат решения одной ключевой задачи. Суть метода ключевой задачи заключается в выделении ключевой задачи и разработке системы задач объединенных общей идеей» [23].

Ключевая задача может иметь две функциональные особенности:

– задача-факт, в этом случае ключевая задача выступает в роли теоремы школьного курса;

– задач-метод, то есть задача позволяющая отработать метод решения определенного класса задач.

В данной технологии можно выделить определенную систему задач. Во-первых она будет помогать усвоить факт или метод решения, который раскрыли в «ключевой» задаче. Во-вторых, позволит увидеть связь между отдельными темами школьного курса математики. Поэтому данная система задач, которая была составлена этим методом, является эффективным средством повторения, обобщения и систематизации учебного материала.

Идея решения задач с использованием ключевых, или базовых задач, не новая. Вопрос заключается в том, как учителю удается найти эти идеи? Какие задачи он считает ключевыми? Например, в некоторых учебниках, чтобы помочь учителю, ключевые задачи обозначены специальным обозначением (УМК А.Г. Мерзляка. Алгебра (7-9) (баз). Учитель должен обратить внимание учащегося на данные задачи, потому что идея их решения может быть использована для решения других задач.

«Результат анализа методической, математической и педагогической литературы показал, что не существует общего определения «ключевой (опорной или базисной) задачи». Точно так же, как и нет точного сопоставления опорной, ключевой и базисной задачи, но принимая во внимание различные утверждения, можно заключить, что эти слова являются синонимами».[3]

При решении каждой конкретной задачи, в качестве главного, для учителя выступает ведущая функция, ради которой решалась эта задача:

– «обучающая функция задач направлена на формирование у учащихся систем математических знаний, умений и навыков на разных этапах их усвоения;

– воспитательная функция задач определяется целями воспитания и направлена на воспитание познавательного интереса, самостоятельности в получении знаний и навыков учебного труда, нравственных качеств, культуры» [14];

– «развивающая функция задач направлена на развитие мышления учащихся, на их обучение эффективным приемам умственной деятельности, например, обучение умению выделять главное, существенное в задачах и их решении;

– контролирующая функция направлена на установление уровня обученности, математического развития учащихся, способностей самостоятельного изучения математики, сформированности познавательных интересов учащихся и т.д.» [11].

Для формирования умений решать задачи по геометрии необходимо обучать учащихся специальным знаниям о задачах и их решении. Без них эти умения формируются стихийно и могут возникнуть только при решении большого количества задач. Многие учителя на решение задач отводят более половины учебного времени, но результаты такой работы не всегда значительны.

При решении задачи учитель, как правило, основное внимание уделяет поиску решения и его записи. Это, несомненно, правильно. Однако, как показывает практика, на выводы после найденного решения задачи часто не остается ни сил, ни времени. Техническая сторона решения часто закрывает более важную – учебно-познавательную цель, то главное, для чего решалась задача. Важно обогатить учащихся общими методами решения задач, потому что не количество решаемых задач, а метод их решения определяет обучающий эффект.

Важными условиями, определяющими выбор основного, существенного при решении задач, мы считаем формирование у учащихся общего подхода к решению любых задач и усвоение знаний, необходимых для этого. Таковы знания [15]:

- о структуре задачи и структуре решения задачи;
- об основных типах задач;
- об этапах их решения;
- об основных методах решения задач;
- о признаках применения методов.

Учителю следует ознакомить учащихся с общей структурой решения задачи. Этот процесс можно поделить на 7 этапов. Его структуру можно изобразить следующей схемой (рисунок 1).

Главным в условии задачи являются математические зависимости между данными, между данными и искомыми величинами и теоретические сведения, отраженные в условии, вытекающие из решения. Так, в учебнике по геометрии А. В. Погорелова к задачам отнесено много теорем, которые часто применяются при решении задач. Это, например [17]:

- задача о свойстве биссектрисы треугольника;

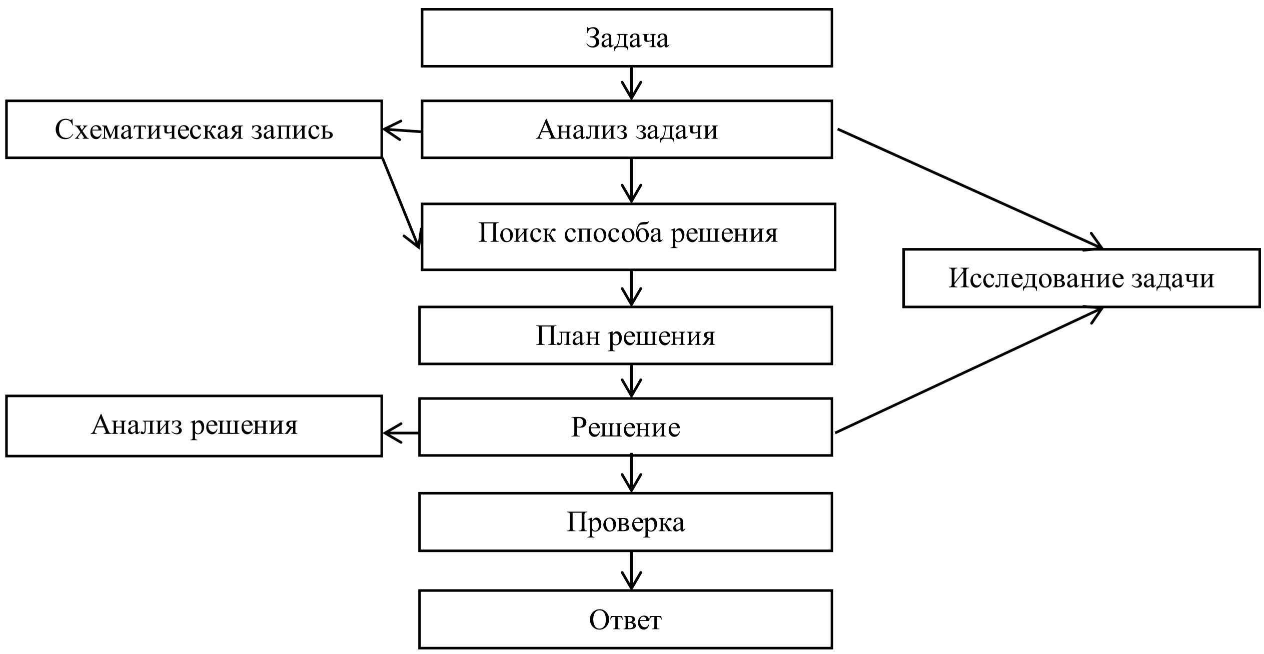


Рисунок 1 - Общая структура решения задачи

– задача о свойстве отрезка соприкасающихся, проведенных в круг с одной точки;

– задачи о свойствах параллелограмма;

– задачи о свойствах вписанного и описанного четырехугольников;

– отдельные формулы площади треугольника, четырехугольников и т.д.

Поэтому и учитель, и ученики должны знать, зачем ему решать данную задачу, понимать, что из решения следует выделять такие знания и умения, которые важны для дальнейшего обучения.

Учителю нужно учить учащихся искать способы решения задач. Основными методами поиска является аналитический и синтетический. Напомним, что аналитический – это метод рассуждений от неизвестных, искомых к данным величинам. Синтез – это способ рассуждений от данных до разыскиваемых, неизвестных величин. Синтетический метод целесообразно использовать тогда, когда задача легка или уже известен способ ее решения. Ему нужно отдавать предпочтение в младших классах. Способ решения большинства задач, в том числе более сложных, следует искать аналитическим методом, исходя из требования задачи. Тогда каждый шаг ученика целеустремлен, он ищет только то, что нужно найти, а не то, что можно (как при синтетическом методе). Конечно, и при разрешении аналитическим иногда приходится прибегать к синтезу. Когда решают трудную задачу, то пользуются аналитико-синтетическим методом: прокладывают путь и от требования, и от условия, пока не будет найдена связь между ними. Осуществлять поиск решения задачи аналитико-синтетическим методом учителю следует в форме эвристической беседы, продумав систему целенаправленных вопросов к учащимся.

Учащихся нужно учить решать задачи отдельных типов. Если установлен тип задачи, то сделан важный шаг в поиске плана ее решения. Распознавание типа задачи требует от учащихся умения выделять главное в условии задачи, ибо тип задачи определяется характером ее требования или основными соотношениями между данными и искомыми величинами.

По характеру требования различают четыре основных вида задач [21]:

– задачи на вычисление,
– задачи на доказывание,
– задачи на исследование,
– задачи на построение.

Большинство конкретных типов задач школьного курса математики носят алгоритмический или полуэвристический характер. Есть алгоритмы решения разных типов уравнений, неравенств, задач на движение, на совместную работу, на проценты и т.д. Поэтому при решении стандартных задач, то есть задач, имеющих определенный алгоритм решения, важно обучение учащихся составлять и применять алгоритмы и схемы решения. Например, при решении геометрических задач на вычисление можно использовать следующий алгоритм [22]:

– сделать схематический рисунок,

– обозначить одну из неизвестных величин через х,

– выразить через х неизвестные величины,

– записать и решить уравнение,

– записать и проверить ответ.

Учащихся целесообразно ознакомить с признаками, по которым можно установить, каким из основных методов – алгебраическим (метрическим), координатным, векторным, методом геометрических преобразований – лучше всего решать геометрическую задачу.

Рассмотрим, по каким признакам можно соотнести задачи с определенным методом решения.

Виды геометрических задач, которые можно решать координатным методом [28]:

– задачи на отыскание геометрических мест точек (ГМТ);

– задачи на подтверждение зависимостей между линейными элементами геометрических фигур.

Решая задачу координатным методом, выполняют три шага:

– записываем геометрическую задачу на языке координат;

– превращаем алгебраическое выражение;

– переводим найденный результат на язык геометрии.

Виды геометрических задач, которые можно решать векторным методом [28]:

– задачи, связанные с доказыванием параллельности прямых;

– задачи, в которых следует доказать, что некоторая точка делит отрезок в определенном отношении, в частности, является его серединой;

– задачи, в которых нужно доказать, что три точки A, B, C лежат на одной прямой;

– задачи, в которых нужно доказать, что данный четырехугольник ABCD – параллелограмм;

– задачи на нахождение длины отрезка;

– задачи на нахождение величины угла;

– задачи, в которых линейные элементы и углы расположены в разных плоскостях и возвести их в одну плоскость невозможно или нецелесообразно.

Алгоритм применения векторного метода для решения задачи приведен ниже.

Шаг 1 – сформулировать задачу на языке векторов. Для этого сначала следует рассмотреть некоторые из данных в задаче отрезков как векторы и записать векторное равенство.

Шаг 2 – преобразовать векторное равенство, пользуясь законами действий над векторами, известными векторным равенствам.

Шаг 3 – перевести найденный результат на язык геометрии.

Виды геометрических задач, которые можно решать методом геометрических преобразований:

Чтобы решить задачу методом геометрических преобразований нужно [32]:

– рассмотреть наряду с данными фигурами новые фигуры, которые извлекли из данных с помощью определенного преобразования (симметрии, поворота или параллельного переноса);

– выяснить свойства новых фигур;

– перенести эти свойства на данные фигуры.

«Для успешного решения различных типов школьных геометрических задач необходимо проводить грамотное обобщающее повторение, которое представляет собой деятельность по совершенствованию усвоенной ранее учебной информации, направленной на установление отношений и новых взаимосвязей на более высоком уровне» [10].

В связи с этим правильно организованное обобщающее повторение представляется наиболее важным аспектом подготовки учащихся к итоговой аттестации в общеобразовательной школе. Формами итоговой аттестации в настоящее время является Основной государственный экзамен (ОГЭ), Единый государственный экзамен (ЕГЭ) и Государственный выпускной экзамен (ГВЭ).

Государственный выпускной экзамен представляет собой форму государственной итоговой аттестации, сдаваемым за курс основной школы (9 лет обучения) для определенной категории лиц: инвалидов, детей-инвалидов, для учащихся с ОВЗ, для учащихся учебных заведений закрытого типа либо в учреждениях, в которых исполняется наказание в виде лишения свободы и др. Особенностью является то, что по всем учебным дисциплинам экзамен проводится в письменной форме с использованием заданий, билетов, тестов.

Основной государственный экзамен (ОГЭ) является итоговым экзаменом, сдаваемым учащимися за курс основной школы (9 лет обучения) и является основанием при приеме в учреждения среднего профессионального образования (техникумы, колледжи)

Особенность Единого государственного экзамена (ЕГЭ) по математике заключается в том, что он сочетает в себе и школьной выпускной, и одновременно вступительный экзамен в средне-специальные или высшие учебные заведения. Соответственно, ЕГЭ проверяет усвоение учебного материала более глубже и шире: курс алгебры за 7-9 классы, курс алгебры и начал анализа за 10-11 классы и курс геометрии за 7-11 классы. Как правило, с заданиями уровня А учащиеся справляются гораздо лучше, т.к. аналогичные задачи разбирались на уроках и мало отличаются от привычных. Самые трудными считаются задачи второй части ЕГЭ, для которых необходимо проводить грамотное обобщающее повторение.

Основная сложность геометрических задач второй части ЕГЭ по математике является то, что учащимся необходимо знать и применять материал из ранее изученного курса планиметрии. Также здесь представляется важным не просто знать признаки и свойства, аксиомы и теоремы, но и способность применить их на практике. Анализируя планиметрические задачи

ЕГЭ предыдущих годов могу сделать вывод, что при рациональном способе решения можно пройти всего один-два шага, не более. Как правило, в задаче незнакомая и не типичная ситуация либо существует необходимость применять свойства и признаки в измененной ситуации. Это свидетельствует о том, что для хорошего результата ЕГЭ учащемуся необходимо владеть различными приемами и способами решения геометрических задач. В ходе обобщающего повторения при решении геометрических задач необходимо у учащегося сформировать целостное представление о свойствах геометрических фигур и различных способах решения различных типологий геометрических задач.

1.2. Основные методы решения геометрических задач на доказательство

Геометрические задачи на доказательство являются, пожалуй, самыми сложными. Наибольшую трудность они вызывают из-за требования обосновать некое математическое утверждение, данное и сформулированное в условии. «Соответственно, решение геометрических задач на доказательство заключается в том, чтобы метод цепочки умозаключений вывести утверждение задачи с аксиом и доказанных ранее теорем или последствий из них» [24].

Геометрические задачи на доказывание бывают двух видов:

«а) во время решения которых предполагают, что описанные в их условиях геометрические фигуры;

б) такие, в которых факт существования геометрической фигуры, о которой идет речь в задаче, нужно доказать.

В первом случае решение задачи возводится к обоснованию ее заключения, исходя из посылки задачи («дано»). При этом переформулирование условия задачи часто выступает средством поиска решения задачи, поскольку позволяет решить другую, способ решения которой известен или его можно найти сравнительно проще. На это обстоятельство учителю следует обратить особое внимание» [33].

Задача 1. Докажите, что в правильной треугольной пирамиде противоположные ребра взаимно перпендикулярны. Условие задачи можно переформулировать, например: «Если дана (или она существует) правильная треугольная пирамиды, то в ней противоположные ребра взаимно перпендикулярны».

Как правило, в данном случае доказательство достаточности найденных условий существования геометрической фигуры не требуется.

Приведем пример задачи второго вида.

Задача 2. Докажите, что существует призма, отличная от куба, и такова, что у нее все грани равны между собой. В ходе решения задач на доказательство часто возникает необходимость исследовать существование математического объекта, описанного ее условием. Результаты такого исследования могут оказывать существенное влияние как на ход решения задачи, так и на выражение в ответе.

Задача 3. «Доказать, что сумма квадратов диагоналей трапеции равна сумме квадратов боковых сторон, добавленной к удвоенному произведению оснований» [8].

Решение.

Изобразим трапецию в системе координат, как на рисунке 2.

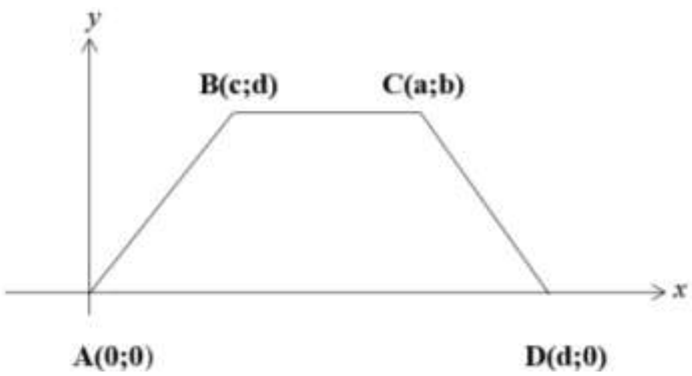


Рисунок 2 – Трапеция в системе координат

Вершины трапеции имеют координаты: A(0;0), B(c;d), C(a;b), D(d;0).

Тогда:

$AC^2 + BD^2 = a^2 + b^2 + (d - c)^2 + b^2 = a^2 + 2b^2 + (d - c)^2$.

$AB^2 + CD^2 + 2AD*BC = c^2 + b^2 + b^2 + (d - a)^2 = a^2 + 2b^2 + (d - c)^2$

Получим:

$AC^2 + CD^2 = AB^2 + CD^2 + 2AD*BC$, ч.т.д.

Задача 4. «Доказать, что середины сторон четырехугольника являются вершинами параллелограмма» [4].

Решение.

«Пусть E, F, M, N – середины сторон четырехугольника ABCD (рисунок 3). Достаточно доказать, что $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{MN}$.

Если O – произвольная точка плоскости, то» [4]:

$$\overrightarrow{OE} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}),\ \overrightarrow{OF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}),\ \overrightarrow{ON} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OC}), \overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD}).$$

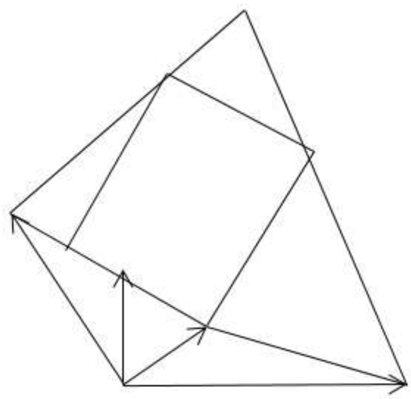


Рисунок 3 – Рисунок к задаче 4

$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OE} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}),\ \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA})$.

Значит, $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{MN}$, ч.т.д.

Задача 5. «В правильной четырехугольной пирамиде через сторону основания проведена плоскость, перпендикулярная противоположной боковой грани. Сторона основания пирамиды равна a, двухгранный угол при основании равно α. Докажите, что площадь сечения равна $a^2 \sin^3 \alpha$, где

$45° < a < 90°$» [8].

Решение.

«Пусть PABCD – изображение правильной пирамиды, о которой говорится в условии задачи (рисунок 4). Построим апофемы PK и PЭ пирамиды.

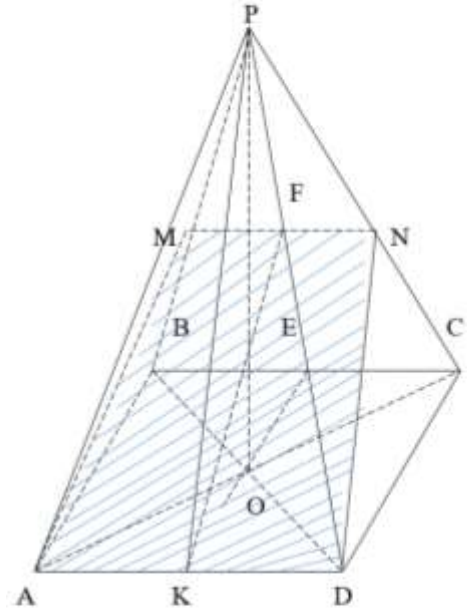


Рисунок 4 – Рисунок к задаче 5

Поскольку пирамида верна, то $\angle \mathrm{PKO} = \angle \mathrm{PEO}$. По условию задачи:

$$\angle \mathrm{PЭO} = \alpha, \mathrm{AD} = \mathrm{a}.$$

В плоскости треугольника PKE проведем $\mathrm{KF} \perp \mathrm{PE}$. Построим плоскость, которая проходит через прямые AD и KF. Из-за того, что $\mathrm{AD} \parallel \mathrm{BC}$, то $\mathrm{AD} \parallel$ пл. BPC, следовательно, $\mathrm{AD} \parallel \mathrm{MN}$, где MN – линия пересечения плоскостей ADF и BPC. Итак, AMND – трапеция. Остается доказать, что AMND – искомое сечение, то есть что пл. AMND $\perp$ пл. PBC.

В самом деле, $\mathrm{AD} \perp$ пл. PKE, потому что $\mathrm{AD} \perp \mathrm{PK}, \mathrm{AD} \perp \mathrm{KE}$, назад $\mathrm{AD} \parallel \mathrm{KF}$. Но $\mathrm{AD} \parallel \mathrm{MN}$, тогда $\mathrm{MN} \perp \mathrm{KF}$. Кроме того, $\mathrm{KF} \perp \mathrm{PE}$по построению, следовательно, $\mathrm{KF} \perp$ пл. BPC. Поскольку пл. AMND проходит через прямую KF, то пл. AMND $\perp$ пл. PBC» [8].

Тогда «площадь сечения вычислим по формуле:

$$\mathrm{S_{AMND}} = \frac{\mathrm{AD} + \mathrm{MN}}{2}\mathrm{KF}.$$

Из прямоугольных треугольников KFE и PKO найдем соответственно: $KF = a \cdot \sin\alpha$, $PK = \frac{a}{2\cos\alpha}$.

Из прямоугольного треугольника PKF_1 получим:

$$PF = \sqrt{PK^2 - KF^2}, PF = \sqrt{\frac{a^2}{4\cos^2\alpha} - a^2\sin^2\alpha} =$$

$$= \frac{a}{2|\cos\alpha|}\sqrt{1 - \sin^2 2\alpha} = \frac{a|\cos2\alpha|}{2|\cos\alpha|}$$

Условия существования сечения AMND найдем из того, что $\angle FKE < < \angle PKE$, или $90° — \alpha < \alpha$, откуда $\alpha > 45°$.

С другой стороны, $\angle PKE + \angle PEK < 180°$, т.е. $\alpha + \alpha < 180°$ или $\alpha < 90°$. Следовательно, $45° < a < 90°$, поэтому $90° < 2\alpha < 180°$ и $\cos 2\alpha < < 0, \cos\alpha > 0$.

Из-за этого

$$PF = -\frac{a\cos2\alpha}{2\cos\alpha}$$

Так как $MN \parallel BC$, то $\Delta PMN \sim \Delta PBC$, тому $\frac{PF}{MN} = \frac{PE}{BC}$, откуда $MN = \frac{PF \cdot BC}{PE}$.

В итоге получим $MN = -a \cdot \cos 2\alpha$

Наконец, получим:

$$S_{AMND} = \frac{a - a\cos2\alpha}{2} \cdot a \cdot \sin\alpha = \frac{a^2}{2} \cdot \sin\alpha(1 - \cos2\alpha) = a^2 \cdot \sin^3\alpha$$

где

$$a > 0, 45° < \alpha < 90°$$

Как видим, использование условий существования сечения позволило упростить найденное выражение для вычисления искомой величины» [8].

1.3 Основные методы решения геометрических задач на построение

Геометрические построения традиционно являются одной из основных содержательных линий школьного курса геометрии. Это обусловлено тем, что выполнять их приходится и учащимся при изучении всего курса геометрии, и работникам различных отраслей в профессиональной деятельности (инженерам-конструкторам, геодезистам, архитекторам, портным, столярам, строителям и др.).

Простейшие геометрические построения учащиеся выполняют уже в начальной школе и в 5-6 классах: проводят прямые, окружности, отрезки, равные заданным, строят углы заданной градусной меры с использованием транспортира, проводят параллельные и перпендикулярные прямые с помощью линейки и угольника, изображают углы, треугольники, квадраты, прямоугольные параллелепипеды, цилиндры, конусы, призмы, пирамиды.

В систематическом курсе геометрии специально выделяют задачи на построение, которые решаются только с помощью циркуля и линейки. Эти задачи имеют значительную дидактическую ценность, поскольку не только формируют практические навыки выполнения основных построений, но и развивают логическое мышление, формируют эвристическую деятельность. Из курса геометрии для высших учебных заведений известно, что такие задачи решают в четыре этапа:

«1) анализ задачи, цель которого – установить связи между искомыми и данными задачи, составить план выполнения построения;

2) построение по составленному плану;

3) доказывания, цель которого – доказать, что построенная фигура удовлетворяет условиям задачи;

4) исследование, цель которого – выяснить, при каких данных задача имеет решения, сколько их, есть отдельные случаи, требующие специального рассмотрения» [38].

По количеству решений задачи на построение, следует иметь в виду, что этот вопрос решается в зависимости от того, имеем дело с позиционными или с непозиционной задачами. В позиционных задачах указано, как размещены одни фигуры относительно других заданных фигур. В таком случае искомые построенные фигуры считают различными решениями. В непозиционных задачах уровне фигуры не считают различными решениями.

В школьном курсе геометрии при решении задач на построение нецелесообразно требовать от учеников выполнять всегда все четыре этапа решения. Во-первых, исследование может оказаться сложнее, чем построение, доказательство, и недоступным для большинства учащихся, особенно если в условии задачи указанные углы. Во-вторых, в простейших задачах ученики могут составить план построения без всякого анализа, и требование его проведения только ослабит их интерес к решению задачи. Нецелесообразно при решении каждой задачи требовать от учеников выполнять построение искомой фигуры, если основные построения уже хорошо отработаны, а к ним сводится решения любой задачи.

Учитывая указанные факторы, для большинства задач на построение следует считать задачу решенной, если указан план построения искомой фигуры и доказано, что построенная по ним фигура удовлетворяет требования задачи. Это не исключает возможности в сложных задачах обучать учеников осуществлять предварительный анализ, а в некоторых задачах - выполнять построение и исследования, если оно доступно ученикам. Сильнее ученикам целесообразно предлагать в классе и при выполнении домашнего задания при решении отдельных задач выполнять все четыре этапа.

Тема «Геометрические построения» тесно связана с признаками равенства треугольников и параллельности прямых, свойствами окружности, поскольку построение и доказательство во многих задачах основываются на этом учебном материале. Именно этим объясняется, что в учебниках в начале темы вводятся сведения об окружности и ее элементах, теоремы о центре вписанной в треугольник и описанной около него окружности, сведения о касательной. Кроме пяти основных построений также рассматриваются понятия о геометрическом месте точек и метод геометрических мест. Основное количество задач на построение сосредоточено в этой теме и в следующей, посвященной изучению в 8 классе четырехугольников. В других темах курса планиметрии количество задач на построение значительно уменьшается [43].

Основной целью изучения геометрических построений в школе является научить учащихся выполнению основных построений с помощью линейки и циркуля, а также решению несложных комбинированных задач, которые сводятся к выполнению основных построений.

Ученики должны знать алгоритмы выполнения основных построений, уметь выполнять их, составлять план построения и доказательства в несложных комбинированных задачах.

Основные случаи задач на построение:

«1) треугольника по данным сторонами;

2) угла, равного данному;

3) биссектрисы данного угла;

4) перпендикулярной прямой;

5) деление отрезка пополам» [32].

Начиная изучение основных построений, целесообразно напомнить ученикам, что они уже выполняли различные построения (в частности, некоторые из основных) с помощью циркуля, линейки, угольника, транспортира, например, строили треугольники по заданным элементам. В геометрии особенно интересны задачи, которые решаются только с помощью циркуля и линейки. Использование только циркуля и линейки в тех случаях, когда отрезки и углы заданы геометрически, повышает точность построения.

Прежде всего нужно выяснить и помнить, что геометрические построения можно выполнять с помощью каждого из этих двух инструментов. С использованием только линейки можно провести:

«1) произвольную прямую;

2) произвольную прямую, проходящую через заданную точку;

3) прямую, проходящую через две заданные точки» [32].

«Циркулем можно только описать окружность по данному центру, данному радиусу, в частности отложить на данной прямой от данной точки данный отрезок» [36].

При изучении основных построений целесообразно воспользоваться алгоритмическим подходом, а именно добиться от каждого ученика усвоения алгоритма основного построения. Например, при построении биссектрисы угла алгоритм может выглядеть следующим образом:

«1) описать с вершины угла как из центра окружность произвольного радиуса;

2) из точек пересечения построенного круга со сторонами угла описать два круга тем же самым радиусом и обозначить точку их пересечения, отличную от вершины угла;

3) через вершину угла и точку пересечения окружностей провести луч, который и является биссектрисой угла» [43].

Учащиеся должны не только знать алгоритм каждого основного построения, но и уметь применять его для решения задач на построение. Например, алгоритм построения угла, равного заданному, целесообразно сразу использовать для построения с помощью циркуля и линейки треугольника по двум сторонам и углу между ними и по стороне и двум углам.

Обучение решению сложных задач на построение должно быть направлено прежде всего на овладение методами решения таких задач, на развитие продуктивного мышления учащихся. В школьном курсе основными методами решения задач на построение являются: «метод геометрических мест, методы геометрических преобразований (симметрии, поворота, параллельного переноса, гомотетии), алгебраический метод»[38].

«Геометрическим местом точек, имеющих указанное свойство, называется фигура, которая состоит из тех и только тех точек, которые имеют это свойство. Суть метода пересечения ГМТ состоит в том, что задачу сводят к построению одной точки X (основного элемента построения), которая удовлетворяет некоторым двум независимым условиям, вытекающим из постановки задачи. Пусть F_1 (F_2) – множество точек, удовлетворяющее первое (второе) условие» [40].

Очевидно, что искомая точка принадлежит как фигуре F_1, так и фигуре F_2, то есть их пересечению.

Основными ГМТ на плоскости, с которыми сталкиваются учащиеся в школе, являются (рисунки 5, 6):

«1) ГМТ, которое находится на заданном расстоянии r от данной точки O, есть окружность с центром в точке O радиуса r: ω (O; r)

2) ГМТ, равноудаленное от точек A и B, является срединный перпендикуляр к [AB];

3) ГМТ, удаленное от данной прямой AB на расстояние r, является совокупность двух прямых, параллельных данной, которые находятся на расстоянии r от него» [32];

«4) ГМТ, равноудаленное от двух прямых, которые пересекаются является совокупность двух перпендикулярных прямых - биссектрис углов, образованных прямыми;

5) ГМТ, равноудаленных от двух параллельных прямых, есть прямая, которая к ним параллельная и является их осью симметрии;

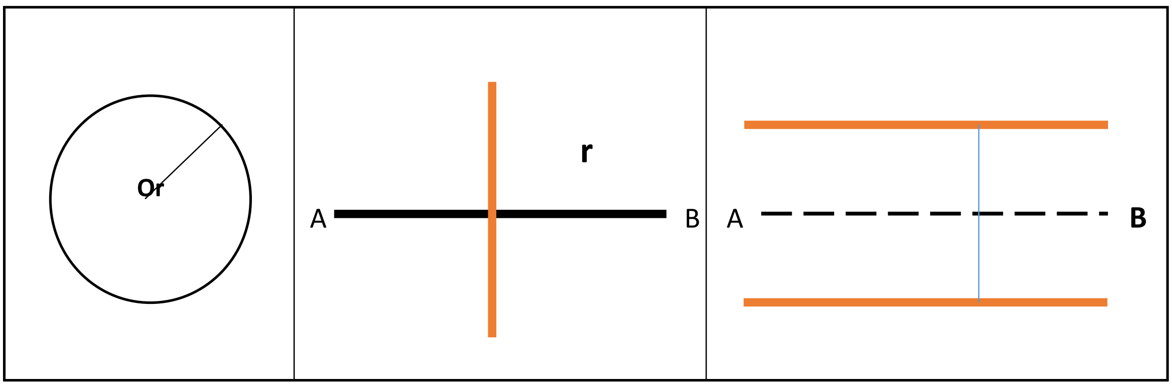
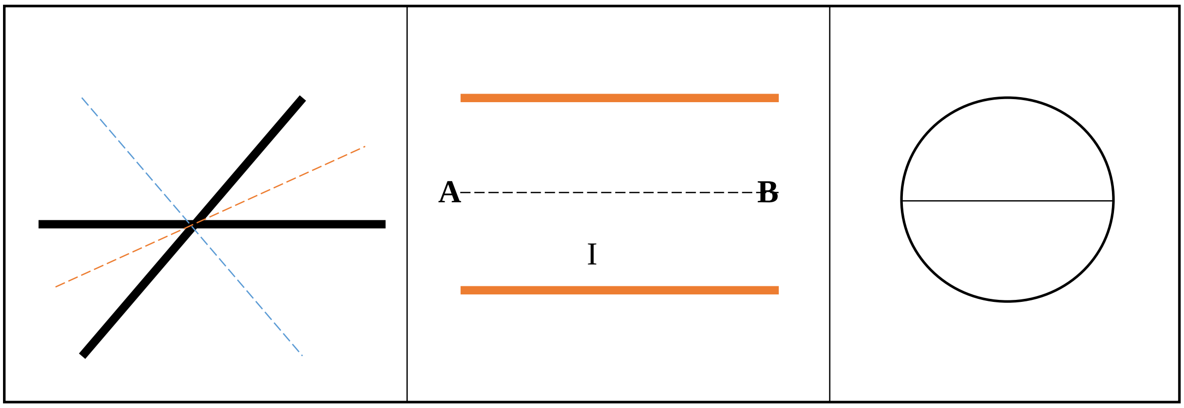


Рисунок 5 – Основные геометрические места точек (1, 2, 3)

6) ГМТ, из которых данный отрезок АВ виден под углом 90° является круг, который построен на [АВ] как на диаметре, кроме точек А и В»[32].



b_1

b_2

Рисунок 6 – Основные геометрические места точек (4, 5, 6)

«Методом преобразований в теории геометрических построений называют применение преобразований в геометрических построениях. Идея метода геометрических преобразований заключается в том, что искомую или данную фигуру преобразовывают так, чтобы после этого построение стало проще или свелось непосредственно к одной из элементарных задач» [24].

В зависимости от того, какое геометрическое преобразование используется, говорят о методе [29]:

- параллельного переноса,
- поворота (центральной симметрии),
- осевой симметрии,
- сходства (гомотетии),
- инверсии и др.

Большой класс задач можно решить с использованием метода сходства, суть которого заключается в том, что строится вспомогательная фигура, подобная искомой, так, чтобы она удовлетворяла все условия задачи, которые определяют форму фигуры, кроме одного условия – которое определяет ее размеры. Затем строят искомую фигуру, подобную уже построенной, которая удовлетворяла бы и последнее условие. При этом, как правило, применяется гомотетия. Поэтому учащиеся должны уметь строить образы точек, прямых и окружностей при гомотетии М.

Метод сходства применяется при построении треугольника по одному линейному и двумя нелинейным элементам, при вписывании одной фигуры в другую и при решении других задач.

Суть алгебраического метода заключается в том, что решение задачи сводят к построения некоторого отрезка (или нескольких отрезков), заданного формулой. Как известно, «с помощью циркуля и линейки можно построить только такие отрезки, длины которых выражаются через длины данных отрезков с помощью конечного числа пяти операций: сложение, вычитание, умножение, деление и извлечение квадратного корня. В школе рассматривают построения отрезков, заданных следующим формулам» [24]:

- $x_1 = a + b$;
- $x_2 = a - b (a > b)$;
- $x_3 = \frac{p}{q} a (p, q \in N)$;
- $x_4 = \frac{ab}{c} (\frac{x_4}{a} = \frac{b}{c})$;
- $x_5 = \sqrt{ab}$;
- $x_6 = \sqrt{a^2 + b^2}$;
- $x_7 = \sqrt{a^2 - b^2} (a > b)$.

Построение двух первых отрезков очевидно.

Для построения третьего, например $\mathbf{x_3 = \frac{2}{3} a}$, поделим по теореме Фалеса отрезок a на q (3) частей и возьмем p (2) таких частей (рисунок 7).

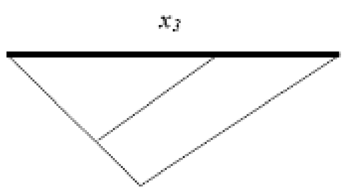


Рисунок 7 – Построение отрезка x_3

Построение отрезка 4 можно выполнить двумя способами, рисунок 8.

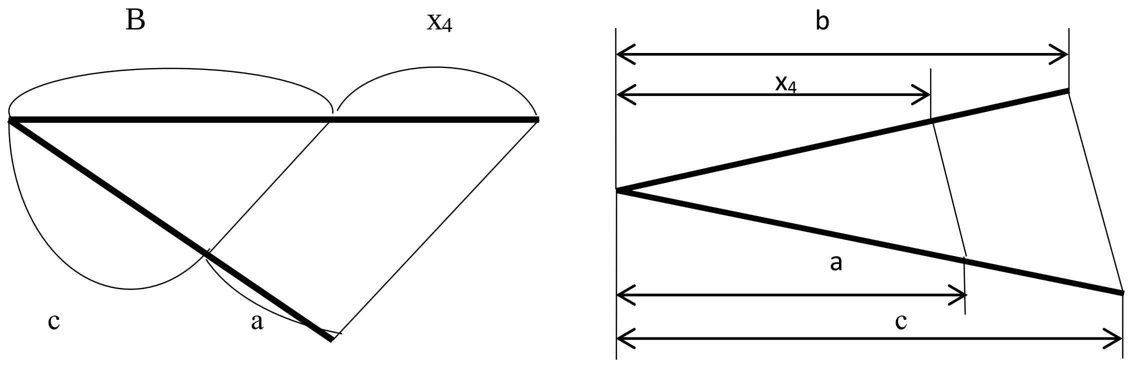


Рисунок 8 – Построение отрезка x_4

Как известно, «высота прямоугольного треугольника, опущенная из вершины прямого угла, есть среднее пропорциональное между проекциями катетов на его гипотенузу» [5]:

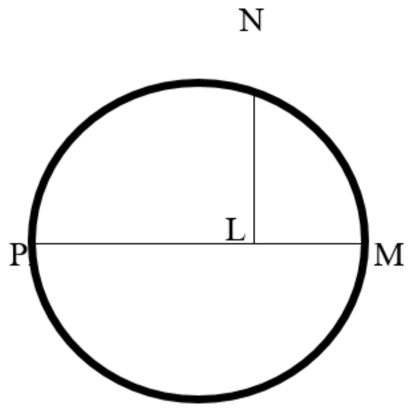


Рисунок 9 – Построение отрезка x_5

Построение отрезка x_5 основывается именно на этом факте: откладываем отрезок CM = PL + LM = a + b; в точке L ставим перпендикуляр к PM; отрезок CM делим пополам и строим круг, для которого PM является диаметром. Отрезок LN – искомый (рисунок 9).

Построение отрезков x_6 и x_7 следует из теоремы Пифагора.

Рассмотрим пример решения задачи.

Задача 6. «Даны острый угол ABC и точка M в середине его. Построить на сторонах угла такие точки X и Y, чтобы ΔMXY имел наименьший периметр» [5].

Решение.

Анализ. Предположим, что ΔMX_1Y_1 – искомый (рисунок 10). Одна вершина треугольника известна – точка M. Точки X_1 и Y_1 – нужно найти. Установим, какие условия удовлетворяют эти точки.

X_1 и Y_1 лежат соответственно на сторонах BA и BC угла ABC. Для нахождения второго условия строим точки M_1 и M_2 симметричны относительно сторон угла. Строим отрезки MX_1, MY_1, M_1M_2. Периметр треугольника равняется сумме $MX_1+ X_1Y_1+MY_1$. Он должен быть самым маленьким. Длина ломаной $M_1X_1Y_1M_2$ будет меньше тогда, когда точки M_1, X_1, Y_1, M_2 будут лежать на прямой M_1M_2.

Следовательно, искомые точки X_1 и Y_1являются точками пересечения сторон угла BA и BC с прямой M_1M_2.

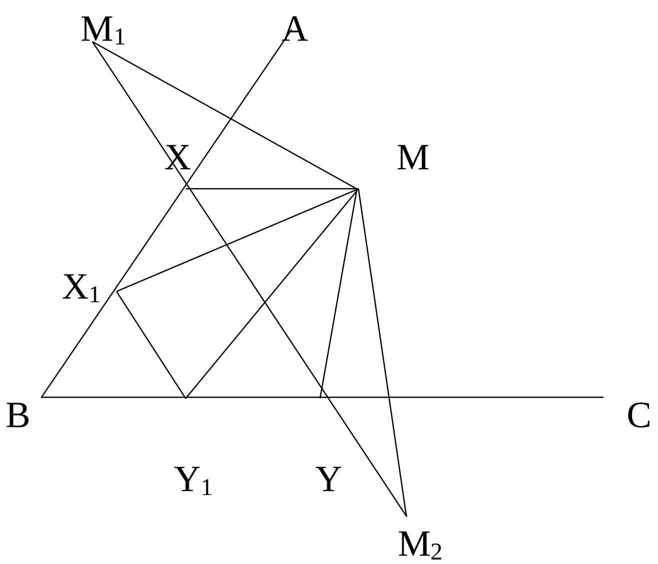


Рисунок 10 – Рисунок к задаче 6

Построение. Строим:

1) точки M_1 и M_2, симметричные точке M относительно сторон данного угла;

2) прямую M_1M_2;

3) точки X и Y в сечении прямой M_1M_2со сторонами BA и BC угла ΔMXY – искомый.

Большинство задач на построение можно решить различными способами. Это помогает развивать у учащихся логическое мышление и стремление к поиску наиболее рационального решения.

1.4. Основные методы решения геометрических задач на вычисление

«Под задачей на вычисление понимают такую задачу, в которой требуется данные о геометрической фигуре доказать к установлению числового результата. Задача на вычисление характеризуется требованием установить данные о неизвестный элемент геометрической фигуры с помощью чисто геометрических выкладок с использованием алгебраических зависимостей»[27].

«Задача на вычисление с числовыми данными является частным случаем задачи с параметрическими данными, поэтому часто возникает необходимость рассматривать именно их. Считается устоявшимся мнение о том, что в решении геометрической задачи на вычисление с параметрическими данными должно войти исследование области существования геометрическая фигура»[31]. Такой точки зрения придерживается Л. М. Фридман, утверждающий, что решение геометрической задачи на вычисление с параметрическими данными сводится к заданию функции-формулы, показывающей, «какие операции и в каком порядке нужно выполнить значениям параметров, чтобы найти размер искомого элемента. Но для задания какой-либо функции недостаточно назвать закон соответствия, а нужно еще указать область ее определения» [11, с. 14].

Функциональный подход к трактовке понятия решения задачи можно сохранить, если рассматривать его как доказательство соответствующей теоремы, составленной по условию данной задачи. Сущность этого подхода проиллюстрируем примером [36].

Задача 7.

«Периметр ромба равен 20 см, а сумма его диагоналей – 14 см. Найти площадь ромба» [23].

Решение

«S_p = 2AO·OB.

Пусть $AO = x$.

Тогда 2x + 2·OB = 14;

OB = 7-x

Поскольку диагонали ромба взаимно перпендикулярны (рисунок 11):

то$AO^2 + OB^2 = AB^2$.

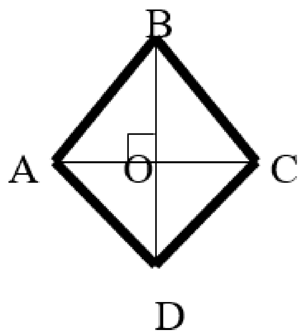


Рисунок 11 – Рисунок к задаче 7

По условию P=20 см, значит AB = $\frac{P}{4}$ = 5 см.

Тогда $x^2 + (7-x)^2 = 5^2$; $x^2 - 7x + 12 = 0$; $x_1 = 4$, $x_2 = 3$.

ЗначитAO = 4 см, OB = 3см (или AO = 3 см, OB = 4см).

Следовательно, площадь ромба вычисляется S_p = 2·4·3=24 см» [23].

Ответ: 24 см.

Задача 8. «Длина стороны основания правильной треугольной пирамиды равна *a*, двухгранный угол при основании равно α. Вычислите объем пирамиды» [23].

«Будем считать, что нам дана (или она существует) правильная треугольная пирамида со стороной основания *a* и двугранным углом α при основании. Надо вычислить объем этой пирамиды.

Будем исходить из того, что если дана правильная треугольная пирамида со стороной основания *a* и двугранным углом α при основании, то высота пирамиды равна $\frac{1}{6}\mathrm{a}\sqrt{3}\mathrm{tg}\alpha$, а объем равен $\frac{1}{24}\mathrm{a}^3\mathrm{tg}\alpha$.

Суть решения задачи состоит в том, что мы заменяем его доказательством теоремы: Если в правильной треугольной пирамиде сторона основания равна а, а двугранный угол при основании равен α, то его объем равен $\frac{1}{24}\mathrm{a}^3\mathrm{tg}$ a.

Следовательно, задача будет решена, если докажем только что сформулированную теорему» [23].

Здесь важно заметить, что «выражение для объема пирамиды является функцией от параметров а и α, нахождение которой составляет цель решения задачи.

С логической точки зрения решение геометрической задачи на вычисление схематически можно подать следующим образом: Если фигура Ф существует и имеет свойства A, то она имеет также свойства B.

Предположение о существовании геометрической фигуры, заданной условием задачи, следует обосновать, то есть найти условия, при которых фигура существует. Необходимыми условиями в задаче 1 будут: а > 0, 0°<a<90°.

Чтобы убедиться, что они достаточны необходимо доказать возможность построения правильной треугольной пирамиды со стороной основания *a* и двугранным углом α при основании, где а>0, 0° < a < 90°.

Приступая к решению геометрической задачи на вычисление, каждый раз приходится учитывать особенности конфигурации, описанной в условии задачи. Часто это сложная задача, требующая высокой культуры вычислений и понимания сущности найденных зависимостей» [23]. Приведем пример.

Задача 9. «Найдите объем правильной четырехугольной пирамиды, длина стороны основания которой равна a, а двугранный угол при боковом ребре равен α» [34].

Решение.

«Пусть PABCD – изображение данной в условии задачи пирамиды (рисунок 12). Поскольку OC – проекция наклонной PC на пл. ABC и $OC \perp BD$, то по теореме о трех перпендикулярах $PC \perp BD$. Построим $OK \perp PC$.

По признаку перпендикулярности прямой и плоскости $PC \perp$ пл. BKD, то есть $\angle BKD$ — линейный угол двугранногоугла с ребром PC. По условию задачи $\angle BKD = \alpha, AD = a$» [34].

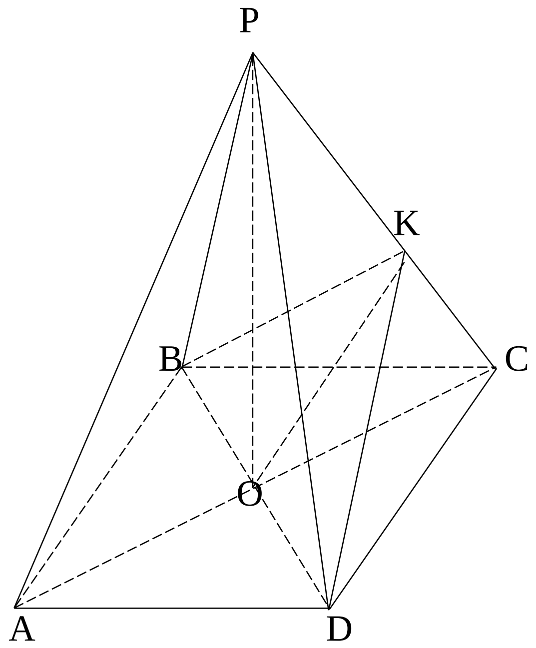


Рисунок 12 – Рисунок к задаче 9

Из равенства треугольников KCB и KCD (KC — общая $CB = CD, \angle KCB = \angle KCD$) вытекает, что $KB = KD$.

Так как $OB = OD$, то по свойству медианы равнобедренного треугольника $KO \perp BD, \angle OKB = \angle OKD = \frac{\alpha}{2}$.

Объем пирамиды вычислим по формуле (1):

$$V = \frac{1}{3} AD^2 \cdot PO \qquad (1)$$

Из прямоугольного треугольника OKD $(\angle KOD = 90°)$ и

$$OK = OD \cdot ctg \angle OKD, OK = \frac{\alpha}{\sqrt{2}} ctg \frac{\alpha}{2}$$

Но $S_{\Delta POC} = \frac{1}{2} \cdot PO \cdot OC = \frac{1}{2} PC \cdot OK$, то есть

$$PO \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{a}{\sqrt{2}} ctg \frac{a}{2} \sqrt{PO^2 + \frac{a^2}{2}}$$

или

$$PO^2 = PO^3 ctg^2 \frac{\alpha}{2} + \frac{a^2}{2} ctg^2 \frac{\alpha}{2}$$

откуда

$$PO = \frac{a\left|ctg\frac{\alpha}{2}\right|}{\sqrt{2(1 - ctg^2\frac{\alpha}{2})}} = \frac{a\left|ctg\frac{\alpha}{2}\right| \cdot \left|sin\frac{\alpha}{2}\right|}{\sqrt{-2cos\alpha}} \qquad (2)$$

Подставив формулу (2) в (1), будем иметь

$$V = \frac{1}{3} a^2 \cdot \frac{a\left|ctg\frac{\alpha}{2}\right| \cdot \left|sin\frac{\alpha}{2}\right|}{\sqrt{-2cos\alpha}} = \frac{a^3\left|cos\frac{\alpha}{2}\right|}{3\sqrt{-2cos\alpha}}.$$

В ходе решения задачи мы предполагали существование описанной в условии задачи пирамиды и все выкладки делали, исходя из этого предположения.

Установим область существования данной пирамиды.

По условию задачи находим:

$$a > 0, 0° < a < 180°, 0 < OK < L < OC.$$

Эти условия определяют область существования прямоугольного ΔOKC, а, следовательно, и область существования правильной четыре угловой пирамиды.

Если подставим в эти зависимости значения

$OC = \frac{a}{\sqrt{2}}, OK = \frac{a}{\sqrt{2}} \operatorname{ctg} \frac{a}{2}$, то получим:

$$a > 0, 0° < a < 180°, 0 < \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} < 1 .$$

Отсюда $a > 0, \quad 90° < \alpha < 180°$.

Эти условия эквивалентны исходным условиям, следовательно, они определяют искомую область существования пирамиды.

В ней $\cos \frac{\alpha}{2} > 0, \cos\alpha < 0$, поэтому $V > 0$.

Ответ: объем пирамиды выражается формулой $\frac{a^3 \left|\cos\frac{\alpha}{2}\right|}{3\sqrt{-2\cos\alpha}}$, где $a > 0, \quad 90° < \alpha < 180°$.

В этой задаче можно также изучить выведенную формулу объема. Без такого обоснования проведенные выкладки нельзя считать правильными, а их отсутствие часто становится причиной ошибок во время решение геометрических задач.

Следовательно, считать геометрическую задачу на вычисление с параметрическими данными можно только тогда, когда, кроме вычисления искомой величины, установлены необходимые и достаточные условия существования фигуры, о которой речь в задаче.

Нужно учащихся учить понимать, каким методом лучше и удобнее решать геометрическую задачу.

Для примера рассмотрим задачу на вычисление, которую можно решить тремя способами:

– геометрическим,

– алгебраическим,

– тригонометрическим.

Задача 10.

«В равнобедренном треугольнике основание равно 12 см, а боковая сторона 10 см. Найти высоту, проведенную к боковой стороне?» [32].

Решение.

Геометрический способ.

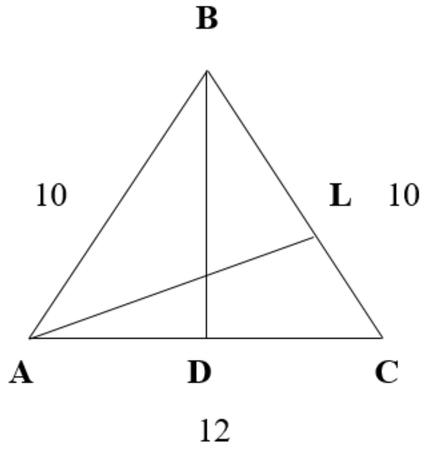


Рисунок 13 – Рисунок к задаче 10

Используем теорему Пифагора (рисунок 13):

$BD = \sqrt{BC^2 - DC^2} = \sqrt{100 - 36} = \sqrt{64} = 8$ см.

Из подобия треугольников ΔALC~ΔBDC следует отношение: $\frac{AL}{BD} = \frac{AC}{BC}$.

Отсюда имеем, что $AL = \frac{BD*AC}{BC} = \frac{8*12}{10} = 9{,}6$см.

Алгебраический способ.

«Пусть LC = x. Тогда ΔALBполучим, что $AL^2=AB^2-BL^2$.

Аналогично из треугольника ΔALC получим, что $AL^2=AC^2-CL^2$.

Отсюда, $AB^2-BL^2=AC^2-CL^2$, то есть $10^2-(10-x)^2=12^2-x^2$.

$100-100+20x-x^2=144-x^2$,

20x=144,x=7,2, то есть LC = 7,2

Отсюда $AL = \sqrt{AC^2 - CL^2} = \sqrt{144 - 51{,}84} = \sqrt{92{,}16} = 9{,}6$ см.»[32].

3. Тригонометрический метод.

Из ΔALC получим, что:

$\sin\angle C = \frac{BD}{BC} = \frac{8}{10} = 0{,}8$..

Значит AL=AC·sinC=12·0,8=9,6.

Ответ: 9,6 см.

Выводы по первой главе

Геометрическая задача является основным средством обучения школьником математическим знаниям. Нами в этой главе было отмечено, что для решения геометрических задач можно эффективно использовать как методы синтетической геометрии, так и методы алгебраической геометрии, в частности векторные метод, векторно-координатный метод и алгебраический способ. Важно, чтобы школьники имели достаточно глубокие представления об этих методах, могли прогнозировать и предвидеть сложность или оригинальность того или другого способа решения задачи. К сожалению, в школьном курсе геометрии уделяют очень мало времени решению геометрических задач с применением движений, гомотетии или подобия. В данной главе мы попытались разработать методические рекомендации к обучению школьников решению геометрических задач этими способами. В процессе обучения школьников геометрическим фактам мы всегда придерживались правила, что одной из важных целей преподавания математики в школе есть обучение учащихся не только доказательству теорем и решению геометрических задач, но и самое главное, наделение их функциями, выполняющими в учебном процессе важную воспитательную роль, в частности, формирование целеустремленности, потребности в приобретении математических знаний, самостоятельности, формирование адекватности в самооценке своих знаний, способности к самоорганизации своей учебно-познавательной деятельности.

Глава 2 Содержательно-методические особенности обучения старшеклассников решению геометрических задач

2.1. Основные цели и задачи обучения решению геометрических задач в общеобразовательной школе

Цель общего среднего образования состоит в развитии личности, которая сочетает в себе творческий потенциал к обучению, инициативность к саморазвитию и самообучению в современных условиях. Важным фактором развития такой личности является формирование у учащихся умений применять приобретенные знания в реальных жизненных ситуациях, во время решения практических задач и способности определять и обосновывать собственную жизненную позицию.

Основным средством реализации указанной цели является введение компетентностного подхода в учебно-воспитательный процесс общеобразовательной школы путем формирования предметных и ключевых компетентностей.

В основу содержания и организации процесса обучение математике положено компетентностный подход, согласно которому конечным результатом обучения предмету являются сформированные определенные компетентности, которые будут способствовать способности ученика применять свои знания в реальных жизненных ситуациях, нести ответственность за свои действия, брать полноценное участие в жизни общества.

«Для успешного участия в современной общественной жизни личность должна владеть определенными приемами математической деятельности и навыками их применений к решению практических задач. Определенной математической подготовки и готовности ее применять требует и изучение многих учебных предметов общеобразовательной школы»[18]. Поэтому одним из главных задач курса геометрии является обеспечение условий для достижения каждым учеником практической компетентности, что достигается в процессе решения геометрических задач.

«Практическая компетентность подразумевает, что выпускник общеобразовательного учебного заведения:

- умеет строить и исследовать самые простые математические модели реальных объектов, процессов и явлений, задач, связанных с ними, с помощью математических объектов, соответствующих математических задач;
- умеет овладевать необходимой оперативной информацией для понимания постановки математической задачи, ее характера и особенностей; уточнять выходные дни данные, цель задачи, находить необходимую дополнительную информацию, средства решение задачи; переформулировать задачу;
- расчленить задачи на составляющие, устанавливать связи между ними, составлять план решения задачи; выбирать средства решения задачи, их сравнивать и применять оптимальные; проверять правильность решение задачи; анализировать и интерпретировать полученный результат, оценивать его пригодность из разных позиций; обобщать задачу, всесторонне ее рассматривать; принимать решение по результатам решения задачи»[54];
- «владеет техникой вычислений, рационально совмещая устные, письменные, инструментальные вычисления, в частности приближенные;
- умеет проектировать и осуществлять алгоритмическую и эвристическую деятельность на математическом материале;
- умеет работать с формулами (понимать содержательное значение каждого элемента формулы, находить их числовые значение при заданных значениях переменных, выражать одну переменную через другие);

– умеет классифицировать и конструировать геометрические фигуры на плоскости и в пространство и, устанавливать их свойства, изображать пространственные фигуры и их элементы, выполнять построения на изображениях;

– умеет измерять геометрические величины на плоскости и в пространство и, которые характеризуют размещение геометрических фигур (расстояния, углы), находить количественные характеристики фигур (площади и объемы)» [28].

Практическая компетентность является важным показателем качества математического образования. Формирование навыков применения знаний является одним из главных целей обучение геометрии. Радикальным средством реализации прикладной направленности школьного курса математики широкое систематическое применение метода математического моделирования в течение всего курса. Это касается введения понятий, обнаружение связей между ними, характера иллюстраций, системы упражнений и, наконец, системы контроля.

Реализация практической направленности в процессе обучение геометрии означает:

– создание запаса математических моделей, которые описывают реальные явления и процессы общекультурной значимости, а также изучаются по смежных предметам;

– формирование у учащихся знаний и умений, которые необходимые для исследования этих математических моделей;

– обучение учащихся построению и опыту простейших математических моделей реальных явлений и процессов.

Практическая направленность математического образования существенно повышается благодаря внедрению информационно-коммуникационных средств обучения математике.

Одним из важнейших средств обеспечение практической направленности обучение математике есть установление межпредметных связей математики с другими предметами, в первую очередь с естественными. Особой внимания заслуживает установка, связей между математикой и информатикой – двумя образовательными отраслями, которые являются определяющими в подготовке личности к жизни в постиндустриальном, информационном обществе. Широкое применение информационно-коммуникационных средств в обучении математике целесообразно для проведения математических экспериментов, практических занятий, информационного обеспечения визуального интерпретирование математической деятельности, проведение исследований.

Геометрия в старшей школе должна учить учащихся правильному восприятию окружающего мира. Но для этого стереометрия имеет больше возможностей. Речь идет о развитии логического мышление, формирование пространственного воображения, выработка навыков применение геометрии к решению практических задач. Решение этих задач начинается с рассмотрения темы «Параллельность прямых и плоскостей в пространстве». В ней закладывается фундамент для изучения стереометрии – геометрии пространства. Особое внимание необходимо уделить реализации прикладной направленности темы. Главным вкладом в решение указанной проблемы есть формирование четких представлений о взаимоотношениях геометрических объектов (прямых, плоскостей) и отношений между ними с объектами окружающего мира. Важное место в теме необходимо отвести обучению учащихся изображению пространственных фигур на плоскости и применении этих изображений при решении задач.

В процессе изучение темы «Перпендикулярность прямых и плоскостей в пространстве» закладывается фундамент для измерений в стереометрии. Значительной внимания требует формирование таких фундаментальных понятий, как общее понятие расстояния, понятие угла как меры размещение прямых и плоскостей и двугранного угла как геометрической фигуры. С введением отношение перпендикулярности прямых и плоскостей, перпендикулярности плоскостей, а также расстояний и углов моделирующие возможности курса стереометрии значительно растут.

Рассмотрение темы «Координаты и векторы» позволит повторить учебный материал по стереометрии и применить новый подход к изучению прямых и плоскостей в пространстве. Отдельной задачей изучение темы «Координаты и векторы» представляет собой обобщение векторного и координатного методов в пространстве.

В темах «Многогранники», «Тела вращения» рассматриваются основные виды геометрических тел и их свойства. При изучении этих тем важен подход, предполагает формирование навыков конструирование и классификации тел и их поверхностей. Такой подход требует использование конструктивных определений. Конструктивные определения позволяют установить общность между призмами и цилиндрами, пирамидами и конусами. В процессе изучение темы «Объемы и площади поверхностей геометрических тел» должны быть рассмотрены разные методы вычисления объемов и площадей поверхностей. Особое внимание необходимо уделить методу разбиения, который имеет большое практическое значение. Использование аналогии между измерениями площадей плоских фигур и объемов будет способствовать усвоению материала учениками. При изучении площадей поверхностей тел цельно широко пользоваться естественной и важной с практической точки зрения идеей развертки.

2.2. Анализ подходов к обучению решению задач в учебниках геометрии 7-11 классов

Система задач в учебнике является главным средством усвоения предмета, а также формирование у учащихся ключевых компетентностей. Проблема подбора системы задач в учебнике по геометрии многоаспектна. Для ее построения необходимо учесть психологические, дидактические, методические и предметные аспекты. Требования к системе задач в учебнике геометрии основываются на дидактических принципах, целях и требованиях к результатам обучения, особенностях учебной познавательной деятельности учащихся в соответствующей возрастной категории.

Рассмотрим принципы подбора системы задач в учебниках геометрии:

– Смирнова И.М. Геометрия. 10-11 классы (гуманитарный профиль) / И.М. Смирнова. М.: Мнемозина, 2011. 223 с.;

– Александров А.Д. Математика. Алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия. 10-11 классы. Учебник / А.Д. Александров, А.Л. Вернер, В.И. Рыжик. М.: Просвещение, 2014. 256 с.;

– Шарыгин И.Ф. Геометрия. 7-9 классы / И.Ф. Шарыгин. М.: Дрофа, 2010. 368 с.;

– Шарыгин И.Ф. Геометрия. 10-11 классы. Учебник для общеобразовательных учебных заведений / Шарыгин И.Ф. М:Дрофа, 1999. 208 с.

Главным действующим лицом геометрии в указанных учебниках является фигура (на плоскости и в пространстве), а главным средством обучения – рисунок, изображение. Содержание учебного материала, изложенного в учебниках, является системой знаний, а не их совокупностью. Учебный материал учебников строится на основе психолого-педагогических закономерностей усвоения знаний, а не сводится только к выстраиванию геометрической теории. Авторы школьных учебников пытаются сделать изложение материала максимально доказательным.

Согласно данным учебникам процесс изучения геометрии в школе предполагает самые разные виды деятельности. И в первую очередь – решение задач. Геометрические задачи – это элемент знаний. В отличие от алгебраических задач, отвечающих определенным образцам, геометрические задачи обычно не решаются по алгоритмам. Процесс обучения алгебре состоит в усвоении учащимися методов, приемов, алгоритмов, имеющих преимущественно синтетический характер и учащимся открыть их самостоятельно почти невозможно. В геометрии схожих методов очень не достаточно. Почти каждая задача по геометрии является нестандартной.

Проблема подбора системы задач в учебнике по геометрии многоаспектна. Для ее построения авторы учли психологические, дидактические, методические и предметные аспекты. Система задач в учебнике геометрии основываются на дидактических принципах, целях и требованиях к результатам обучения, особенностях познавательной деятельности учащихся исходя из их возраста.

Авторы учли общедидактические положения, определяющие направления деятельности по отбору системы упражнений и направленные на достижение соответствующих методических целей. Конкретные требования, реализующие принципы отбора системы упражнений, являются признаками, наличие и учет которых создает предпосылки для эффективной организации учебного процесса по геометрии.

Принцип компетентностного обучения. Эффективность современного образования обеспечивается реализацией компетентностного подхода. В мировом опыте сложилось понимание компетентности как интегрированного результата образования, приобретенного личностью.

Такой подход в системе задач предполагает смещение акцентов по накоплению нормативно определенных знаний, умений и навыков на выработку и развитие умений действовать, применять опыт в проблемных условиях (когда, например, приведены неполные условия задачи, не хватает информации о чем-то, мало времени для развернутого поиска ответа, когда не срабатывают типовые варианты решения и т.п.). В это время создаются условия для привлечения механизмов компетентности – способности действовать в конкретных условиях и мотивов достичь результата.

Современные тенденции в образовании требуют чтобы содержание и методы обучения геометрии имели тесную связь с жизнью, основами других наук, были направлены на подготовку школьников к использованию геометрических знаний в жизни, будущей профессиональной деятельности, на широкое применение в процессе обучения информационно-коммуникационных технологий. Умение применять математические знания на практике является одним из требований компетентностного подхода к обучению. Принцип компетентностного обучения в построении системы геометрических упражнений реализуется через требования:

– привлечение задач прикладного содержания (практических задач);

– обеспечением этапов применения математических знаний к решению задач, возникающих в практике.

Принцип индивидуализации обучения. Реализация компетентностного подхода сопровождается ростом роли индивидуальности каждого школьника. Суть индивидуализации обучения геометрии состоит в том, чтобы в выборе методов, средств, темпа обучения наиболее полно учитывать индивидуальные различия учащихся.

Учебники позволяют цельно предлагать учащимся полноценные геометрические задачи и оценивать их деятельность по мере продвижения и приближения к полному решению, наблюдая за ходом рассуждений каждого.

Важное значение для индивидуализации обучения геометрии имеет применение наглядности. Зрительная (чувственная) система человека является доминантной для пространственного мышления. Ее преимуществом является способность охватывать разные характеристики объекта, фиксировать его пространственные, структурные, функциональные, временные характеристики. Групповая работа с наглядностью с одной стороны активизирует индивидуальные особенности зрительного восприятия каждого ученика, а другой – помогает интерпретировать и абстрагировать эти восприятия к определенным образам. Следует помнить, что для формирования пространственного воображения учащемуся нужно накопить достаточное количество пространственных представлений. Этому будут способствовать изображения пространственных фигур предложенные в учебниках.

Наряду с этим нужно обучать старшеклассников правильно изображать пространственные фигуры. Значительное внимание в учебниках уделено правилам параллельного и ортогонального проектирования, построению сечений многогранников. Реализована необходимость воспитывать графическую культуру учащихся.

Ни один школьный предмет не имеет таких возможностей для логического развития учащихся, как геометрия. Однако формировать умение логически мыслить невозможно без осознания учащимися необходимости делать это в соответствующих ситуациях. Потребность доказывать формируется в результате убеждения учащихся в несовершенстве органов чувств при обосновании утверждений, осознании ограниченности опытно - индуктивного обоснования для решения задач.

В этом случае полезны предложенные задачи с противоречивой информацией; с использованием зрительных иллюзий. Развитию логического мышления старшеклассников способствуют также стереометрические упражнения на исследования, выяснение зависимостей между понятиями, их классификаций, корректности определений, понятий и т.д.

Принцип доступности. Дидактический принцип доступности требует, чтобы объем и содержание учебного материала были под силу учащимся, соответствовали уровню их умственного развития и запасу знаний и умений. Этот принцип реализуется в учебниках согласно требованиям: корректности формулировки условия и требования задач в системе геометрических упражнений; соответствия элементов системы уровням обучаемости учащихся.

Принцип полноты. В учебниках реализовано наличие достаточное количество упражнений ко всем разделам, темам, предусмотренным программой и размещению их в соответствующей последовательности, обеспечению реализации соответствующих программных требований по результатам обучения. Система упражнений по геометрии реализовывает их функции и содержит подсистемы для организации систематического повторения материала, самостоятельной учебной деятельности, для ее контроля и коррекции.

Система упражнений обеспечивает реализацию способов обучения геометрии. По характеру учебно-познавательной деятельности учащихся методы обучения делятся на: объяснительно-иллюстративные, репродуктивные, проблемные, частично поисковые, исследовательские, практические методы обучения. Построенная в учебниках система упражнений по геометрии выполняет требование сочетания различных типов упражнений как по темам, так и по видам деятельности. А именно: система упражнений по геометрии к каждой теме должна содержать достаточное количество упражнений на вычисление, построение, доказывание и исследование, а также для устного и письменного решения, самостоятельной и коллективной работы. Упражнения являются методом организации и управления учебно-познавательной деятельностью учащихся; носителем действий, адекватных содержанию обучения. Поэтому система упражнений по геометрии должна соответствовать содержанию, операционному составу и этапам учебной познавательной деятельности учащихся, что в полной мере реализовано в указанных учебниках.

Учебный процесс организуется разными средствами, в частности системой упражнений, на всех основных этапах учебного процесса: на этапе подготовки к введению нового содержания, непосредственному введению нового содержания, его закреплению, этапе контроля и коррекции этого процесса. В данных учебниках система упражнений по геометрии соответствует этапам учебного процесса.

Принцип научности в построении системы упражнений по геометрии следует из принципа научности отбора соответствующего содержания. Этот принцип реализуется, при соблюдении требований использования современной терминологии и символики, ознакомления учащихся с различными методами геометрии. Система упражнений, направленная на усвоение геометрических методов в указанных учебниках, реализует следующие требования: обеспечивает усвоение всех составляющих определенного метода; содержит достаточное количество задач для формирования соответствующего уровня владения метода; формирует умение определять возможность применения того или иного метода в данной ситуации; содержит задачи на распознавание типа задачи и сознательного выбора приема ее решения.

Принцип систематичности и последовательности. Основным средством реализации этого дидактического принципа считается содержание обучения. Поэтому одним из требований к системе упражнений по геометрии является ее соответствие логической структуре теоретического материала. Этот принцип реализуется также по требованию наращивания сложности упражнений. В учебниках применяется несколько способов усложнения геометрических упражнений: увеличение количества содержательных единиц (расширение тематики упражнений); усложнение алгоритма решения упражнения; введение в решение упражнений эвристик и увеличение их количества. Усложнение упражнений на высоком уровне осуществляется как по двум предыдущим методам, так и путем увеличения количества эвристик в решении.

Принцип вариативности. Важным условием формирования у учащихся правильных обобщений психологи считают варьирование несущественных признаков понятия при инвариантности существенных. Варьирование в построении системы упражнений в учебниках реализуется следующим образом: если в определении того или иного понятия существен определенный признак, необходимо, чтобы этот признак в упражнениях, предлагаемых учащимся, фигурировал в качестве существенного, а другие, несущественные признаки, должны широко варьироваться. Варьирование формы представления условия упражнений способствует фиксации в памяти учащихся того или иного приема решения задач. При этом варьирование условия геометрических упражнений касается несущественных сторон, непосредственно не влияющих на применение приема решения, а именно, числовых данных, буквенных обозначений, размещения фигур и т.п. Форму представления условия упражнений варьируют путем ввода дополнительных элементов, увеличения количества числовых данных. Варьирование видов умственной деятельности посредством системы упражнений реализуется путем привлечения задач на прямые и обратные действия.

Подбирая систему упражнений по геометрии для достижения определенной цели, авторы предусмотрели вариацию видов математического мышления, предлагая различные типы упражнений: на вычисление, доказательство, построение, исследование.

Таким образом, система задач по геометрии в учебнике является эффективным средством изучения предмета, так как построена с учетом современных тенденций в образовании, в частности на основе компетентностного подхода и индивидуализации обучения на уроках геометрии.

2.3. Методические рекомендации по формированию умений решать геометрические задачи в старших классах

«В стереометрии существует два основных метода решения задач. Первый из них основывается на аксиомах, теоремах и следствиях из них, свойствах геометрических фигур. Второй метод – координатный или координатно-векторный» [36].

Каждой точке координатного пространства соответствует единственная упорядоченная тройка чисел (x, y, z), и наоборот, каждой упорядоченной тройке чисел соответствует единственная точка координатного пространства. Такое взаимно однозначное соответствие между точками и их координатами дает возможность решать некоторые геометрические задачи алгебраическими средствами. Этот метод, называют координатным методом. Он является объектом изучения раздела геометрии, который называется аналитическая геометрия [4].

Метод координат является достаточно универсальным методом, поскольку обеспечивает тесную связь между алгеброй и геометрией [36].

Соединяясь, эти две науки дают возможность, применяя координатный метод, строить доказательства и решать многие задачи более рационально, более кратко, чем геометрически.

Преимуществом этого метода является и то, что он упрощает и сокращает решения задач, а во время его использования нет потребности в построении сложных рисунков. В то же время у координатного метода есть и недостаток - иногда большой объем вычислений.

Координатным методом можно решать, как задачи, в которых точки или векторы заданы своими координатами, а основные геометрические фигуры (прямые, плоскости, круги, сферы и т.п.) – своими уравнениями, так и задачи, в которых координатный метод является удобной интерпретацией условия.

«Некоторые геометрические задачи удобно решать с помощью координатно-векторного метода. Это прежде всего задачи, в которых речь идет о кубе, прямоугольном параллелепипеде или тетраэдре с прямым углом. Прямоугольная система координат в пространстве естественным образом связана с многогранниками, при этом среди координат их вершин много нулей, что упрощает вычисления.

Сущность координатно-векторного метода, заключается в том, что геометрическая задача переводится на язык алгебры, и ее решение сводится к решению уравнений, неравенств или их систем» [21].

«Из курса стереометрии известно, что уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$ перпендикулярно ненулевому вектору $\vec{n} = \{A, B, C\}$ в прямоугольной системе координат имеет вид» [5]:

$$A\,(x - x_0)\;B(y - y_0)C\;(z - z_0)$$

«или $Ax + By + Cz + D = 0,$ где $D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0)$

Напротив, любое уравнение первой степени $Ax + By + Cz + D = = 0,$ определяет в координатном пространстве единую плоскость, которая перпендикулярна вектору с координатами (A, B, C).

Положение плоскости в пространстве однозначно определяется заданием трех точек, не лежащих на одной прямой. Пусть данная плоскость пересекает оси координат в точках $M_1(a,0,0)$, $M_3(0,b,0)$, $M_3(0,0,c)$ но не проходит через начало координат» [5].

Подставив координаты этих точек в общее уравнение плоскости, получим [5]:

«$Aa + D = 0$, $Bb + D = 0$, $Cc + D = 0$,

Где числа a, b, c и Dотличны от нуля.

Отсюда находим

$$A = -\frac{D}{a}, B = -\frac{D}{b}, C = -\frac{D}{c}.$$

И уравнение $Ax + By + Cz + D = 0$, приводится к виду

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

Полученное уравнение называют уравнением плоскости в отрезках. Его часто применяют при решении задач.

Как известно, расстояние между двумя точками $A(x_1,y_1,z_1)$ и $B(x_2,y_2,z_2)$ вычисляется по формуле:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Пользуясь данной формулой можно легко вывести уравнение сферы.

В прямоугольной системе координат уравнение сферы радиуса R с центром в точке $C(a, b, c)$ имеет вид:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$$» [5].

«Рассмотрим способы задания прямой в координатном пространстве.

Пусть прямая l проходит через данную точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$ и параллельная ненулевоме вектору $\vec{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$.

Вектор $\vec{a}$ называют направляющим вектором прямой l (рисунок 14)» [7].

«Произвольная точка $M\ (x, y, z)$ принадлежит прямой l тогда и только тогда, когда векторы:

$$\overrightarrow{MM_0} = t\vec{a}, \text{или} \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_0} + t\vec{a}$$

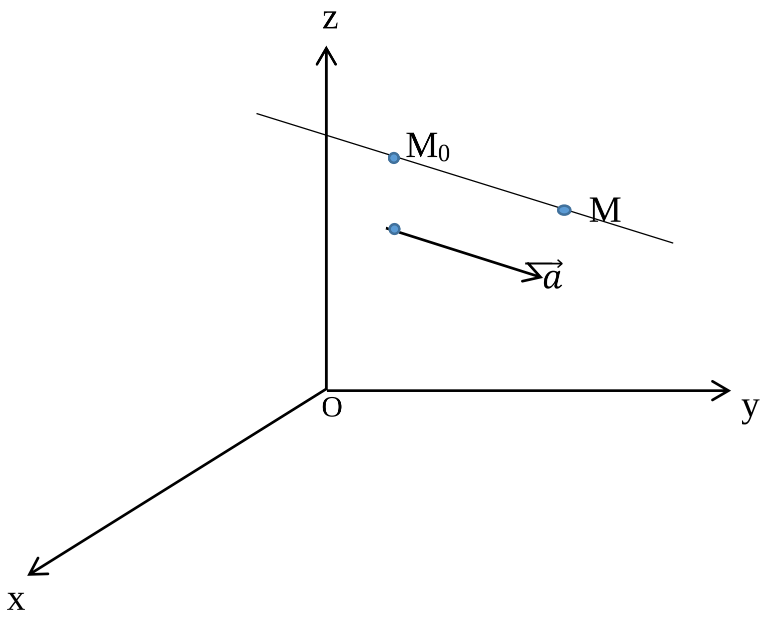


Рисунок 14 – Способ задания прямой в координатном пространстве

где t – некоторое число (параметр). Данное соотношение в координатах равносильно системе уравнений:

$$\begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + a_2 t \\ z = z_0 + a_3 t \end{cases}$$

Данную систему называют параметрическими уравнениями прямой.

Если прямая l параллельна оси Oz, то вектор $\vec{k} = \{0,0,1\}$ является направляющим вектором, и уравнение прямой примет вид: $x = x_{0,} y = y_0$ (координата z примет произвольное значение)»[7].

«Пусть ни одна из координат вектора $\vec{a}$ не равна 0. Тогда исключив из полученных уравнений параметр t, получим уравнение:

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}$$

Полученные уравнения называются каноническими уравнениями прямой.

Выведем формулу для вычисления расстояния от данной точки $M_0(x_0,y_0,z_0)$ до плоскости, заданной в прямоугольной системе координат уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$, Пусть перпендикуляр, проведенный M_0 под углом к плоскости α, пересекает ее в точке M_1 (рисунок 15)»[10].

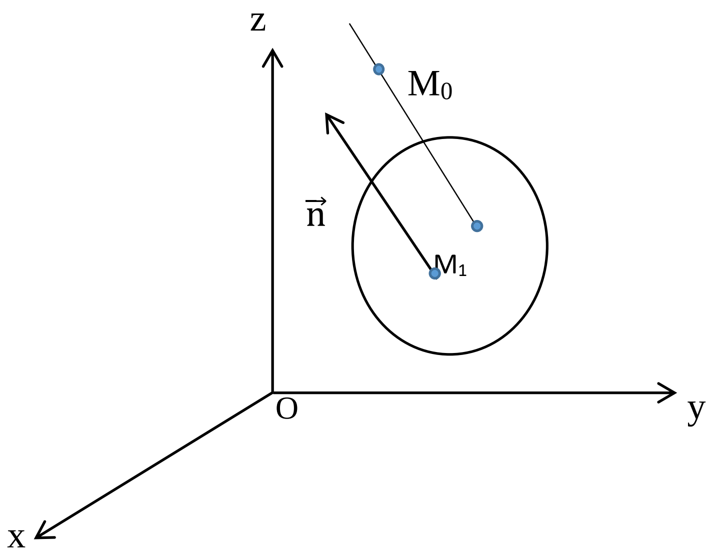


Рисунок 15 – Рисунок, иллюстрирующий вывод формулы

«Тогда, $\overrightarrow{M_0M_1} = \{x_1 - x_1, y_1 - y_1, z_1 - z\}$

Так как вектор $\vec{n} = \{A, B, C\}$перпендикулярен плоскости α и коллинеарный вектору $\overrightarrow{M_0M_1}$то по определению скалярного произведения, тогда»[34]:

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M_1} = |\vec{n}| \cdot \left|\overrightarrow{M_0M_1}\right| \cdot (\pm 1)$$

Принимаем $\overrightarrow{M_0M_1} = d$, тогда

$$d = \frac{\left|\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M_1}\right|}{|\vec{n}|}$$

Выразим скалярное произведение, которое стоит в знаменателе дроби, через координаты векторов $\vec{n}$и $\overrightarrow{M_0M_1}$и получим:

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M_1} = A\,(x_1 - x_0)\,B(y_1 - y_0)C\,(z_1 - z_0) =$$
$$= Ax_1 + By_1 + Cz_1 - (Ax_0 + By_0 + Cz_0)$$

Точка M_1 лежит в плоскости α, поэтому $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$. Таким образом, имеем:

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M_1} = Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D$$

Учитывая, что $|\vec{n}| = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$, получим:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

«Итак, для того чтобы вычислить расстояние от точки M_0 до плоскости α, нужно в многочлен $Ax + By + Cz + D$ вместо x, y, z подставить координаты точки M_0, взять модуль полученного числа и разделить его на число $\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$» [41]. Использование координат и векторов для решения стереометрических задач представлено ниже. Рассмотрим различные варианты перевода геометрических фактов на векторный язык и векторных соотношений на геометрический язык [41].

Прямые параллельны и векторы коллинеарны (рисунок 16):

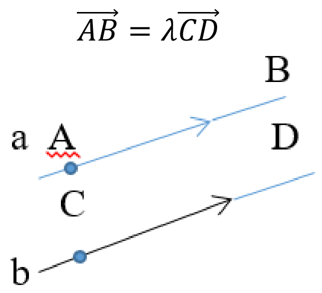


Рисунок 16 – Прямые параллельны и векторы коллинеарны

Векторы коллинеарны: $\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{AC}$ или $\overrightarrow{OC} = p\overrightarrow{OA} + (1 - p) \cdot \overrightarrow{OB}$ (рисунки 17, 18).

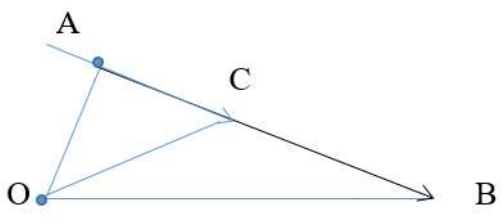


Рисунок 17 – Векторы коллинеарны

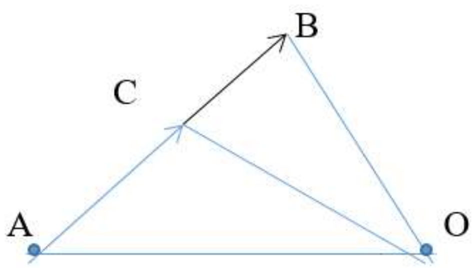


Рисунок 18 – Рисунок, иллюстрирующий случай коллинеарности

$\frac{AC}{CB} = \frac{m}{n}$;Точка C – середина AB;

A) $\left(\frac{AB}{AC} = 1\right) \overrightarrow{AC} = \frac{m}{n_n}\overrightarrow{CB}$

B) $\overrightarrow{OC} = \frac{n_n}{m+n}\overrightarrow{OA} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$

Точка M – середина AB; точка K - середина CD (рисунок 19).

$$\overrightarrow{MK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD})$$

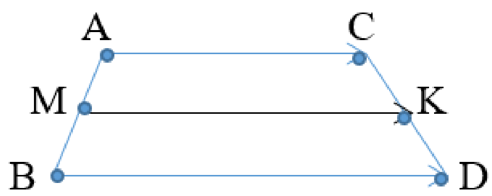


Рисунок 19 – Рисунок , иллюстрирующий случай 4

Точка M – точка пересечения медиан Δ ABC; точка O – произвольная точка (рисунок 20):

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$$

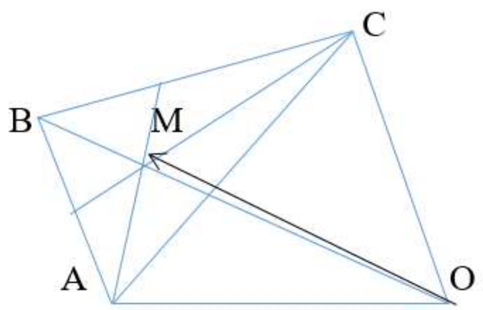


Рисунок 20 – Рисунок , иллюстрирующий случай 5

Прямые перпендикулярны a⊥b (рисунок 21).

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$$

$$(\overrightarrow{AB} \neq 0, \overrightarrow{CD} \neq 0)$$

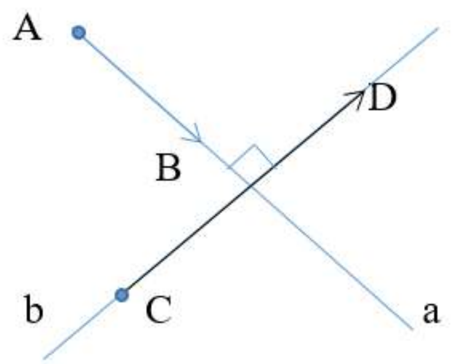


Рисунок 21 – Прямые перпендикулярны

AB = a, тогда $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$, где $\vec{a} = \overrightarrow{AB}, |\vec{a}| = a$ (координатах: $|\vec{a}| = = \sqrt{x_a^2 + y_a^2}$ – на плоскости; $|\vec{a}| = \sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2}$ – в пространстве) (рисунок 22).

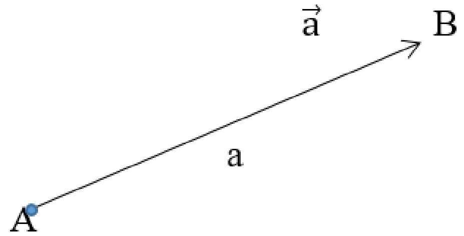


Рисунок 22 – Рисунок, иллюстрирующий случай 7

$\angle BAC = \varphi$; $\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$ (рисунок 23). где: $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AC} = \vec{b}$; φ – угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

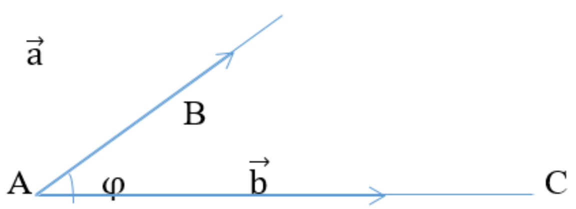


Рисунок 23 – Рисунок, иллюстрирующий случай 8

D ∈ (ABC) C ∈ AB; точка O – произвольная точка (рисунок 24):

а) $\overrightarrow{CD} = \alpha\overrightarrow{CA} + \beta\overrightarrow{CB}$;

b) $\overrightarrow{OD} = \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} + (1 - \alpha - \beta)\overrightarrow{OC}$

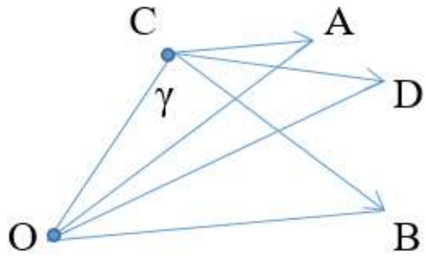


Рисунок 24 – Рисунок, иллюстрирующий случай 9

Уточним формулировку основных сведений и обоснуем векторные соотношения, рассмотренные выше.

«Соотношение $\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{OC} = p\overrightarrow{OA} + (1 - p) \cdot \overrightarrow{OB}$» [11].

Из определения коллинеарных векторов следует, что если векторы лежат на одной прямой или на параллельных прямых, то они коллинеарны, и наоборот, если векторы коллинеарны, то они лежат на одной прямой или на параллельных прямых [11].

Кроме того, ненулевые векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$коллинеарны тогда и только тогда, когда существует такое число λ, что $\vec{a}\lambda = \vec{b}$. Иначе говоря, если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ненулевые и $\vec{a}\lambda = \vec{b}$, то векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны (и лежат на параллельных прямых или на одной прямой) и наоборот, если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны (лежат на параллельных прямых или на одной прямой), то существует такое число λ, $\lambda \neq 0$, что $\vec{a}$ и $\vec{b}$ [16].

Таким образом, мы обосновали основные соотношения, приведенные в случаях 1 и 2. Заметим также, что в случае, когда три точки A, B, C лежат на одной прямой (см., например, рисунок 17), векторы $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{BA}$ коллинеарны, следовательно, $\overrightarrow{BC} = p\overrightarrow{BA}$, но тогда $\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = p\,(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})$. Отсюда

$\overrightarrow{OC} = p\overrightarrow{OA} + (1 - p)\overrightarrow{OB}$ [11].

«И наоборот, если выполняется соотношение $\overrightarrow{OC} = p\overrightarrow{OA} + (1 - p)\overrightarrow{OB}$, то выполняется и соотношение $\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = p\,(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})$. Поэтому векторы $\overrightarrow{BC}$

и $\overrightarrow{BA}$ коллинеарны, следовательно, точки A, B, C лежат на одной прямой (прямые BC и BA не могут быть параллельными, так как они имеют общую точку B).

Полученное соотношение можно сформулировать так: точки A, B, C лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда для произвольной точки O выполняется векторное равенство $\overrightarrow{OC} = p\overrightarrow{OA} + (1-p)\overrightarrow{OB}$, (т.е. в разложении вектора $\overrightarrow{OC}$ по двум неколлинеарным векторам $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$сумма коэффициентов разложения равна единице)» [16].

Соотношения $\overrightarrow{AC} = \frac{m}{n_n}\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{OC} = \frac{n_n}{m+n}\overrightarrow{OA} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{OB}$ [11].

Если точка C делит отрезок AB в отношении m: n$\frac{AC}{CB} = \frac{m}{n}$, то $\overrightarrow{AC} = \frac{m}{n_n}\overrightarrow{CB}$.

$\overrightarrow{AC} = \frac{m}{n}\overrightarrow{CB}$. Тогда $n\overrightarrow{AC} = m\overrightarrow{CB}$ и поэтому $n\left(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}\right) = m(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC})$. Отсюда $\overrightarrow{OC} = \frac{n_n}{m+n}\overrightarrow{OA} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{OB}$.

И наоборот, если выполняется равенство $\overrightarrow{OC} = \frac{n_n}{m+n}\overrightarrow{OA} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{OB}$, то выполняется и равенство $\overrightarrow{AC} = \frac{m}{n}\overrightarrow{CB}$, то есть точка C делит отрезок AB в отношении m: n. Таким образом, точка C делит отрезок AB в отношении m: n (считая от точки A) тогда и только тогда, когда выполняются равенства $\overrightarrow{AC} = \frac{m}{n}\overrightarrow{CB}$ или $\overrightarrow{OC} = \frac{n_n}{m+n}\overrightarrow{OA} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{OB}$.

Заметим, что когда точка C является серединой отрезка BC, то отношение m: n = 1: 1 и по формуле $\overrightarrow{OC} = \frac{n_n}{m+n}\overrightarrow{OA} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{OB}$ получим

$$\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}).$$

Соотношение $\overrightarrow{MK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD})$ [11].

Пусть точка M – середина отрезка AB и точка K – середина отрезка CD (рисунок 19). Тогда $\overrightarrow{MB} = -\overrightarrow{MA}$ и $\overrightarrow{KD} = -\overrightarrow{KC}$. Запишем вектор MK двумя способами: $\overrightarrow{MK} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CK}$ и $\overrightarrow{MK} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DK}$. Сложив почленно эти равенства и учитывая, что векторы $\overrightarrow{MA}$и $\overrightarrow{MB}$, а также $\overrightarrow{CK}$ и $\overrightarrow{DK}$

противоположные (а сумма противоположных векторов равна нулевому вектору), получаем: 2MK = AC + BD, тогда $\overrightarrow{MK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD})$.

Соотношение $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}\overline{(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})}$ [11].

Пусть в треугольнике ABC отрезок AK – медиана, точка M – точка пересечения медиан (рисунок 20).

По свойству медиан треугольника AM: MK = 2: 1. Тогда для произвольной точки O по формуле $\overrightarrow{OC} = \frac{n_n}{m+n}\overrightarrow{OA} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{OB}$.

Имеем: $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OK}$.

Учитывая, что точка K – середина BC, по формуле $\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}\overline{(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})}$, имеем: $\overrightarrow{OK} = \frac{1}{2}\overline{(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})}$. Итак, $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}\overline{(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}$.

Соотношение $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0, \overline{(\overrightarrow{AB} \neq 0, \overrightarrow{CD} \neq 0)}$ [11].

«Это соотношение отражает известное свойство: если два ненулевых вектора перпендикулярны, то их скалярное произведение равно нулю; и наоборот, если скалярное произведение двух ненулевых векторов равно нулю, то эти векторы перпендикулярны.

Соотношение $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2, |\vec{a}| = \sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2}$ » [11].

Для нахождения длины отрезка AB можно рассмотреть вектор $\overrightarrow{AB} = a$ и воспользоваться равенством $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$, то есть для нахождения длины отрезка можно найти скалярный квадрат вектора, изображающий этот отрезок. Если есть возможность ввести прямоугольную систему координат в пространстве и найти координаты вектора $\overrightarrow{AB} = \vec{a}(x_a; y_a; z_a)$то $AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2}$.

Соотношение $\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$ [11].

Если необходимо найти $\angle BAC = \varphi$ (рисунок 23), то можно рассмотреть ненулевые векторы $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AC} = \vec{b}$ и воспользоваться формулой скалярного произведения векторов $\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\varphi$. Отсюда $\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$.

Соотношение $\overrightarrow{CD} = \alpha\overrightarrow{CA} + \beta\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{OD} = \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} + (1 - \alpha - \beta)\overrightarrow{OC}$ [11].

Пусть точка D принадлежит плоскости ABC и точка C не принадлежит прямой AB (рисунок 24). Тогда векторы $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{CB}$ неколинеарные. Поскольку вектор $\overrightarrow{CD}$ лежит в плоскости ABC (т.е. компланарный векторам $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{CB}$), то он раскладывается на два неколинеарных вектора $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{CB}$в таком виде: $\overrightarrow{CD} =$ $= \alpha\,\overrightarrow{CA} + \beta\,\overrightarrow{CB}$.

И наоборот, если для ненулевых векторов $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{CB}$выполняется равенство $\overrightarrow{CD} = \alpha\,\overrightarrow{CA} + \beta\,\overrightarrow{CB}$, то векторы $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CB}$ и $\overrightarrow{CD}$ лежат в одной плоскости, следовательно, точка D принадлежит плоскости ABC.

Если O – произвольная точка, то равенство $\overrightarrow{CD} = \alpha\,\overrightarrow{CA} + \beta\,\overrightarrow{CB}$ можно записать так: $\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC} = \alpha\,(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC}) + \beta\,(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC})$. Тогда $\overrightarrow{OD} = \alpha\,\overrightarrow{OA} +$ $+ \beta\overrightarrow{OB} + (1 - \alpha - \beta)\overrightarrow{OC}$. Таким образом, точка D принадлежит плоскости ABC тогда и только тогда, когда $\overrightarrow{CD} = \alpha\,\overrightarrow{CA} + \beta\,\overrightarrow{CB}$или $\overrightarrow{OD} = \alpha\,\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} +$ $+ (1 - \alpha - \beta)\overrightarrow{OC}$.

Задача 1 [13].

Составьте уравнение геометрического места точек пространства, равноудаленных от точки A $(1;\ 2;\ 3)$ и начала координат (рисунок 25).

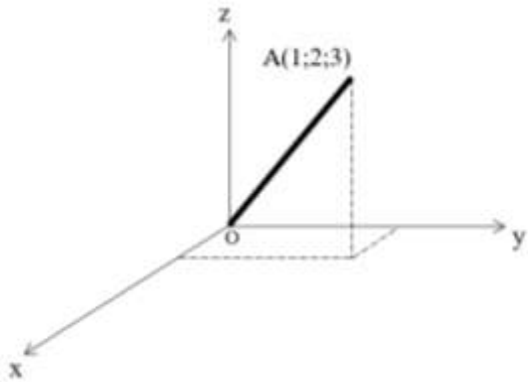


Рисунок 25 – Рисунок к задаче 1

Пусть M $(x;\ y;\ z)$ – любая точка искомого геометрического места точек. Тогда $MA_1 = MO_2$, или

$(1 - x)^2 + (2 - y)^2 + (3 - z)^2 = x^2 + y^2 + z^2$, отсюда

$$x + 2y + 3z - 7 = 0.$$

Это и есть искомое уравнение.

Задача 2.

«Найдите координаты точки C, которая лежит на оси ординат, если известно, что ΔABC с вершинами в точках $A\,(-7; 1; 2)$ и $B\,(5; 3; 1)$ – прямоугольный» [17].

Решение.

«В задаче не сказано, какой из углов должен быть прямым. Поэтому нужно рассмотреть три варианта, когда прямым будет угол при вершине A, или при вершине B, или при вершине C.

Рассмотрим случай, когда $\angle A = 90°$.

Тогда по теореме Пифагора $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

Пусть $C\,(0; y; 0)$ – искомая точка.

Тогда

$$BC^2 = 25 + (y - 3)^2 + 1 = (y - 3)^2 + 26;$$

$$AB^2 = 144 + 4 + 1 = 149;$$

$$AC^2 = 49 + (y - 1)^2 + 4 = (y - 1)^2 + 53.$$

получим уравнение

$$(y - 3)^2 + 26 = 149 + (y - 1)^2 + 53.$$

Его корень $y = 42$. Итак, $C_1\,(0;\ 42;\ 0)$.

Рассмотрев случаи, когда прямым будет угол B или угол C, получим окончательный ответ:

$C_1\,(0;\ 42;\ 0)$; $C_2\,(0;\ 32{,}5;\ 0)$; $C_3\,(0;\ 2 + \sqrt{39});\ 0)$; $C_4(0;\ 2 - \sqrt{39};\ 0)$»[17].

Задача 3.

«Докажите, что четырехугольник с вершинами в точках $A\,(7;\ 0;\ 6), B\,(4;\ 2;\ 2), C\,(-3;\ 2;\ 2), D\,(0;\ 0;\ 6)$ – параллелограмм»[12].

«Тогда найдем координаты середины диагоналей AC и BD.

$$x_1 = \frac{4 + 0}{2} = 2, y_1 = \frac{2 + 0}{2} = 1, z_1 = \frac{2 + 6}{2} = 4.$$

Итак, середина диагонали AC имеет координаты $O_1(2;1;\ 4)$. Аналогично

$$x_2 = \frac{4+0}{2} = 2, y_2 = \frac{2+0}{2} = 1, z_2 = \frac{2+6}{2} = 4\,.$$

То есть середина диагонали BD имеет координаты $O_2(2,1,4)$.

Поскольку координаты середин диагоналей совпадают, то это означает, что диагонали четырехугольника пересекаются и точкой пересечения делятся пополам. Итак, ABCD – параллелограмм»[12].

Задача 4.

«Пирамида OABC задана координатами своих вершин: $O\ (0;\ 0;\ 0), A\ (3;\ 0;\ 0), B\ (0;\ 3;\ 0), C\ (0;\ 0;\ 3)$

Найдите длину высоты OM.

Найдем длины ребер данной пирамиды» [17].

Поскольку $AB\ =\ BC\ =\ AC\ =\ 3\sqrt{2}$и $OA\ =\ OB\ =\ OC\ =\ 3,$ то пирамида правильная (рисунок 26).

Итак, $M\ (x;\ y;\ z)$ - точка пересечения медиан ΔABC.

По свойству медиан треугольника $CM\colon MK\ = 2\colon 1, \text{т. е.}\ \lambda\ =\ 2.$

Поскольку точка K – середина AB – имеет координаты $K(\frac{3}{2};\frac{3}{2};0)$, то

$$x = \frac{0+2\cdot 1{,}5}{1+2} = 1, y = \frac{0+2\cdot 1{,}5}{1+2} = 1, z = \frac{3+2\cdot 0}{1+2} = 1.$$

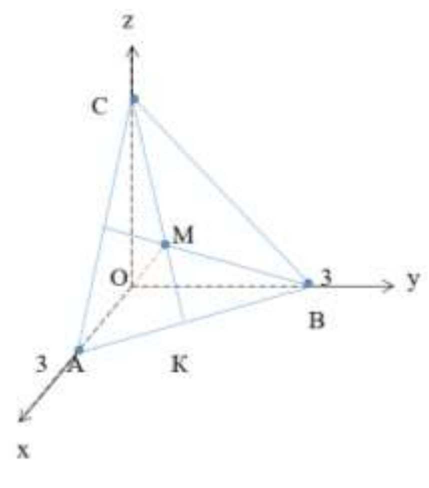


Рисунок 26 – Рисунок к задаче 4

Итак, координаты точки $M\ (1;\ 1;\ 1)$. Тогда $OM\ =\ \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$

Задача 5.

«Составьте уравнение плоскости, которая проходит через точки $A(4;\ 2;\ -1), B(-1;\ 0;\ 3)$ и $C(0;\ 0;\ 1)$.

Уравнение плоскости $ax + by + cz + d = 0$. Так как точки A, B, C принадлежат плоскости, их координаты удовлетворяют условию, то есть

$$4a + 2b - c + d = 0, -a + 3c + d = 0, c + d = 0.$$

Выразим коэффициенты a, b, c через d:

$$c = -d, a = -2d, b = 3d.$$

Имеем: $-2dx + 3dy - dz + d = 0$.

Так как $d \neq 0$, то получим уравнение $2x - 3y + z - 1 = 0$» [14].

Задача 6 [12].

Найдите длину линии пересечения сферы $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 +$ $+ (z + 1)^2 = 25$ плоскостью $z = 2$.

Чтобы найти уравнение линии пересечения сферы и плоскости, решим систему уравнений:

$$\begin{cases} (x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z + 1)^2 = 25, \\ z = 2. \end{cases}$$

Получим: $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (2 + 1)^2 = 25$,

откуда $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + 9 = 25$ или

$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 16$ — уравнение окружности радиусом $r = 4$.

Найдем длину этой окружности: $C = 2\pi r, C = 8\pi$.

Ответ: 8π.

Задача 7.

«Найдите длину хорды, которую сфера

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z + 1)^2 = 35$$

отсекает от прямой AB, если $A\ (2;\ 0;\ 1), B\ (6;\ 1;\ 2)$.

Воспользуемся уравнением прямой, проходящей через две точки:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

Тогда уравнение прямой AB будет иметь вид:

$$\frac{x - 2}{4} = \frac{y}{1} = \frac{z - 1}{-3} = t.$$

Откуда

$$\begin{cases} x = 4t + 2 \\ y = t \\ z = -3t + 1 \end{cases}$$

Найдем координаты точек пересечения прямой и сферы» [1]:

$$(4t + 1)^2 + (t + 2)^2 + (2 - 3t)^2 = 35,$$

или $16t^2 + 8t + 1 + t^2 + 4t + 4 + 4 - 12t + 9t^2 = 35$, откуда $26t^2 = 26$, то есть $t = \pm 1$.

Тогда $M_1(6;\ 1;\ -2), M_2(-2;\ -1;\ 4)$.

Поэтому $M_1M_2 = \sqrt{64 + 4 + 36} = \sqrt{104} = 2\sqrt{26}$

В последующих задачах, которые рассматриваются случаи, когда координаты точек нам не даны, и систему координат нужно ввести самостоятельно.

Задача 8.

«Докажите, что все три средние линии тетраэдра проходят через одну точку и делятся этой точкой пополам» [2].

Доказательство.

Пусть ABCD – произвольный тетраэдр, KL, EF и PT – его средние линии. Средней линией тетраэдра называют отрезок, соединяющий середины двух непересекающихся рёбер тетраэдра. Все средние линии тетраэдра пересекаются в одной точке и делятся этой точкой пополам.

Разместим систему координат, как показано на рисунке 27, и обозначим координаты вершин тетраэдра: $A\ (m;\ n;\ h)$,

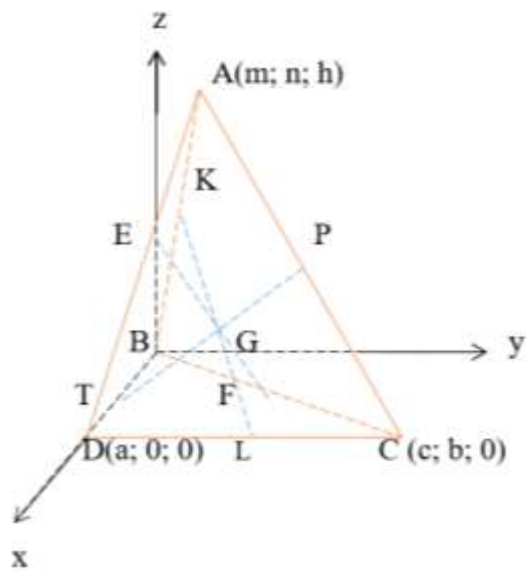


Рисунок 27 – Рисунок к задаче 8

$B\ (0;\ 0;\ 0), C\ (c;\ b;\ 0), D\ (a;\ 0;\ 0)$. Тогда координаты середин ребер и соответствующих средних линий тетраэдра будут:

$$K\left(\frac{m}{2};\frac{n}{2};\frac{h}{2}\right), L\left(\frac{a+c}{2};\frac{b}{2};0\right),$$

$$G\left(\frac{m+a+c}{4};\ \frac{n+b}{4};\frac{h}{4}\right),$$

$$E\left(\frac{m+a}{2};\frac{n}{2};\frac{h}{2}\right), F\left(\frac{c}{2};\frac{b}{2};0\right), G_1\left(\frac{m+a+c}{4};\frac{n+b}{4};\frac{h}{4}\right),$$

$$P\left(\frac{m+c}{2};\frac{n+b}{2};\frac{h}{2}\right), T\left(\frac{a}{2};0;0\right), G_2\left(\frac{m+a+c}{4};\frac{n+b}{4};\frac{h}{4}\right)$$

Соответствующие координаты точек G, G_1 и G_2 равны. Следовательно, эти точки совпадают. G – середина каждой средней линии данного тетраэдра.

Задача 9 [3]. Найдите на трех попарно скрещивающихся ребрах куба следующие три точки, сумма квадратов расстояний между которыми была бы минимальной.

Решение.

Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$– произвольный куб, K, P, T – точки на его попарно скрещивающихся ребрах AB, CC_1, A_1D_1 (рисунок 28).

Если систему координат разместить, как показано на рисунке 6, и обозначить длину ребра куба буквой а, то координаты рассматриваемых точек будут: $K\ (a;\ y, 0), P\ (0;\ 0;\ z), T\ (x;\ a;\ a)$.

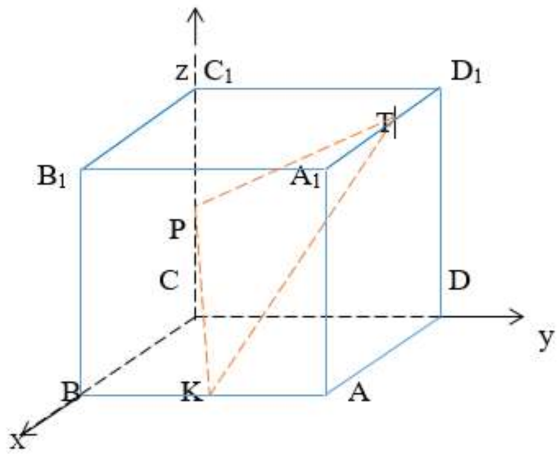


Рисунок 28 – Рисунок к задаче 9

Сумма квадратов расстояний между точками: $KP^2 + PT^2 + TK^2 =$

$$= a^2 + y^2 + z^2 + z^2 + x^2 + a^2 + (a - z)^2 - (a - x)^2 + (a - y)^2 + a^2$$

$$= 2\left(\frac{9}{4}a^2 + \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{a}{2}\right)^2\right).$$

Наименьшее значение эта сумма приобретает, когда $x = y = z = a/2$. Поэтому K, P, T - середины скрещивающихся ребер куба.

Задача 10.

«Основой пирамиды SABCD является параллелограмм (рисунок 29). Проведена плоскость, пересекающая боковые ребра SA, SB, SC, SD пирамиды соответственно в точках K, L, M, N таких, которые $SK = \frac{1}{k}SA, SL = \frac{1}{l}SB, SM = \frac{1}{m}SC, SN = \frac{1}{n}SD$.

Найти зависимость между числами k, l, m, n» [2].

Решение.

«По условию принадлежности четырех точек M, N, K и L, имеем:

$$|MN| = \alpha\overrightarrow{MK} + \beta\left|\overrightarrow{ML}\right|\text{» [2].}$$

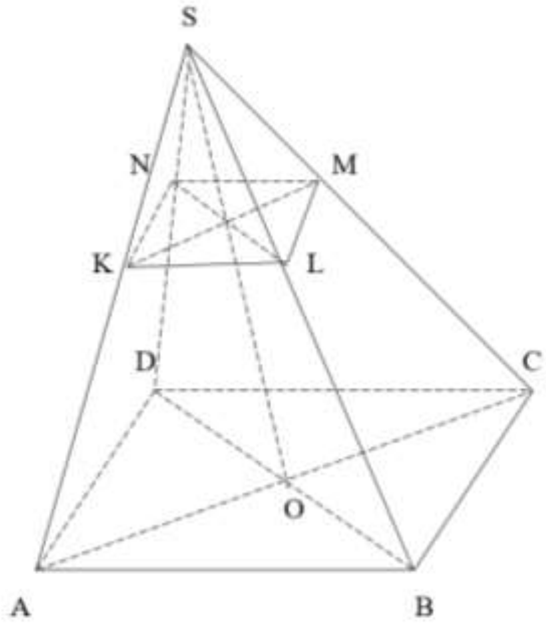


Рисунок 29 – Рисунок к задаче 10

«Представим каждый из векторов, входящих в равенство в виде разности двух векторов с общим началом в точке S. Получим:

$\overrightarrow{SN} - \overrightarrow{SM} = \alpha(\overrightarrow{SK} - \overrightarrow{SM}) + \beta(\overrightarrow{SL} - \overrightarrow{SM})$.

Отсюда

$$\overrightarrow{SN} = \alpha\,\overrightarrow{SK} + \beta\overrightarrow{SL} + \overrightarrow{\gamma SM}.$$

где $\gamma = 1 - \alpha - \beta$.

Учитывая условие задачи и предварительное равенство, перепишем так:

$$\frac{1}{n}\overrightarrow{SD} = \frac{\alpha}{k}\overrightarrow{SK} = \frac{\beta}{l}\overrightarrow{SB} = \frac{\gamma}{m}\overrightarrow{SC}.$$

Обозначим через точку O пересечение диагоналей параллелограмма ABCD. Так как O – середина диагоналей AC и BD, то

$$\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD} = 2\overrightarrow{SO}.$$

Значит,

$$\frac{1}{n}\overrightarrow{SD} = \frac{1}{k}\left(\overrightarrow{SA} - \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC}\right).$$

Таким образом, $\frac{1}{n}\overrightarrow{SD}$ вектор выражаем двумя способами средством неколлинеарных векторов $\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SC}$.

В силу единства разложения вектора, получаем числовые равенства:

$$\frac{a}{k} = \frac{1}{n}, \frac{\beta}{l} = -\frac{1}{n}, \frac{\gamma}{m} = \frac{1}{n}.$$

Отсюда, учитывая, что, $\alpha + \beta + \gamma = 1$, находим $k + m = l + n$.

Приведем числовой пример.

Если плоскость проходит через вершину A тетраэдра ABCD и пересекает его ребра SB и SD в точках L и N таких, которые

$$\overrightarrow{SL} = \frac{1}{2}\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SD}, \text{ то } k = 1, l = 2, n = 3.$$

значит $m = 2 + 3 - 1 = 4$, то есть $\overrightarrow{SM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{SC}$» [2].

Задача 11 [5].

Плоскость проходит через точки M, N, K куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, при этом $M \in AA_1, N \in B_1C_1, K \in CD, AM: MA_1 = 1: 2, B_1N: NC_1 = 3: 2, CK = KD$.

В каком отношении эта плоскость делит ребро AD?

Решение. Расположим систему координат относительно данного куба, как показано на рисунке 30, и обозначим $AB = 1$.

Данные точки имеют координаты: $M\left(1; 0; \frac{1}{3}\right), N\left(0; \frac{3}{5}; 1\right), K\left(\frac{1}{2}; 1; 0\right)$.

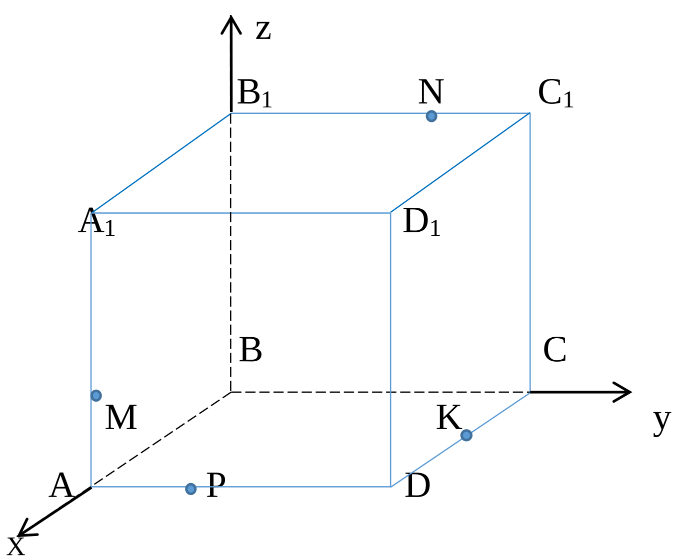


Рисунок 30 – Рисунок к задаче 11

Плоскость, которая проходит через эти точки можно задать уравнением: $ax + by + cz + d = 0$

Если подставим в данное уравнение координаты названных точек, получим систему:

$$\begin{cases} a + \frac{1}{3}c + d = 0, \\ \frac{3}{5}b + c + d = 0, \\ \frac{1}{2}a + b + d = 0. \end{cases}$$

Значит $a = 26, b = 20, c = 21, d = -33.$

Таким образом, секущей плоскости соответствует уравнение:

$$26x + 20y + 21z - 33 = 0$$

Точка $P(1; y; 0)$ лежит на секущей плоскости.

Таким образом, $26 + 20y - 33 = 0,$ откуда $y = \frac{7}{20}.$ Если $AP = \frac{7}{20}$, то $PD = \frac{13}{20}.$

Ответ: $AP : PD = 7 : 13.$

Задача 12 [6].

«$ABCBA_1B_1C_1B_1$ – куб, точка E – середина A_1B_1, точка F – середина B_1C_1. Найти угол между плоскостями AD_1E и D_1FC»[6].

Решение.

«1) Введем систему координат с началом в точке A(0; 0; 0) так, чтобы грани куба принадлежали координатным плоскостям» [6], рисунок 31.

Тогда есть координаты необходимых нам точек:

A(0; 0; 0), D(1; 0; 1), E(0; 0,5; 1), F(5; 1; 1), C(1; 1; 0).

3) Составляем уравнение плоскости A_1DE:

$$x + 2y - z = 0.$$

Составим уравнение плоскости D_1FC:

$$2x + y + z - 3 = 0.$$

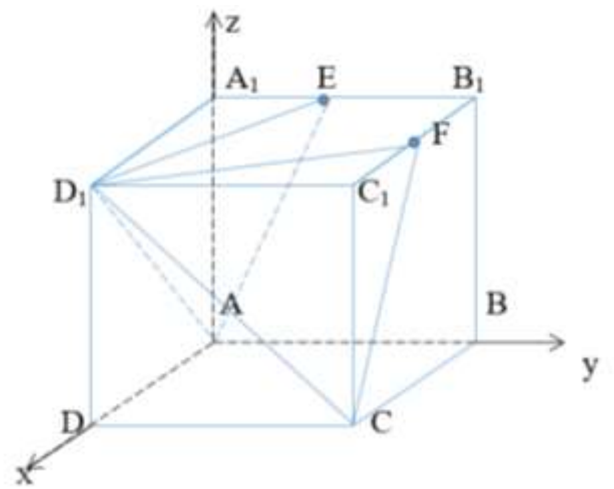


Рисунок 31 – Рисунок к задаче 12

4) Обозначим через φ угол между плоскостями AD_1E и D_1FC:

По формуле угла между плоскостями имеем:

$$\cos\varphi = \frac{|1\cdot 2 + 2\cdot 1 - 1\cdot 1|}{\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{2^2+1^2+1^2}} = \frac{1}{2}$$

Таким образом, $\varphi = 60°$»[6].

Ответ: 60°.

Задача 13. «Найдите угол между скрещивающимися прямыми, одна из которых содержит диагональ куба, а другая – диагональ его грани» [7].

Решение. Разместим куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром а в системе координат так, как показано на рисунок 32.

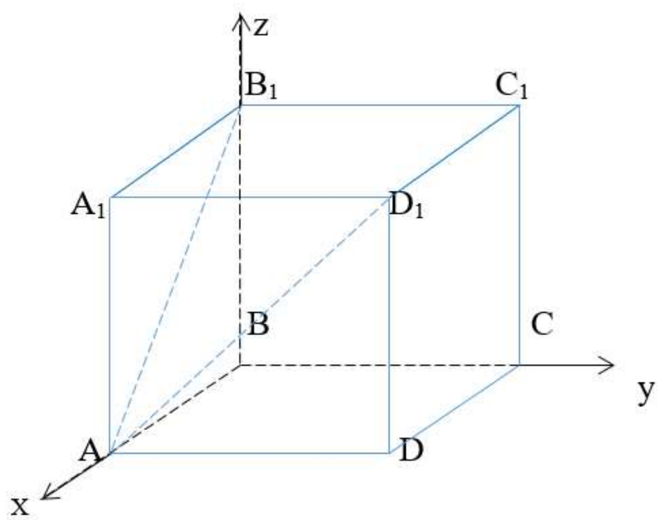


Рисунок 32 – Рисунок к задаче 13

Найдем угол между прямыми BD_1 и B_1A, пользуясь формулой скалярного произведения векторов: $\overrightarrow{BD_1} \cdot \overrightarrow{B_1A} = |\overrightarrow{BD_1}| \cdot |\overrightarrow{B_1A}| \cdot \cos\angle(\overrightarrow{BD_1}, \overrightarrow{B_1A})$. Так как B (0;0;0), D(a;a;a), B_1 (0;0;a), A (a;0;0), то $\overrightarrow{BD_1}(a; a; a), \overrightarrow{B_1A}(a; 0; -a)$. Значит, $\overrightarrow{BD_1} \cdot \overrightarrow{B_1A} = a \cdot a + a \cdot 0 + a \cdot (-a) = 0$, то есть данные векторы перпендикулярны, и искомый угол равен 90°. Ответ: 90°.

Задача 14 [9]. Найдите расстояние между серединой ребра BC куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$и точкой M на его ребре A_1D_1, если ребро куба равно 2 см, а D_1M: $MA_1 = 2$ (рисунок 33).

Решение.

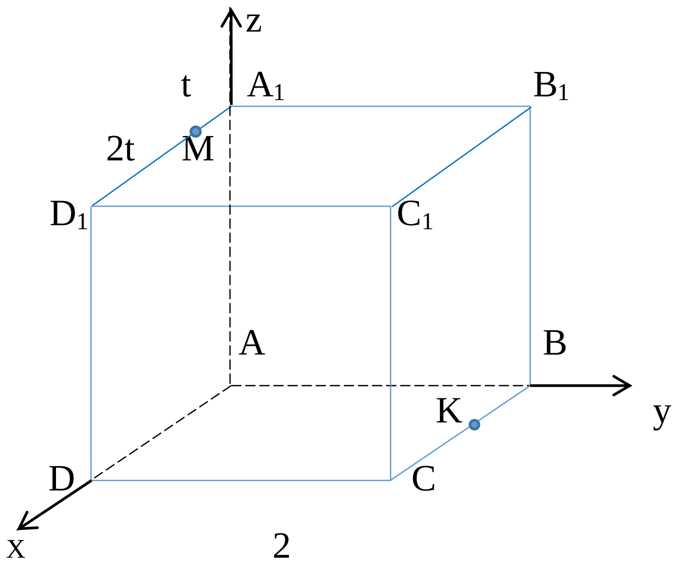


Рисунок 33 – Рисунок к задаче 14

Введем прямоугольную систему координат так, чтобы начало координат совпадало с т. A, а ребра ADи AB принадлежали осям Ox и Oy.

Тогда: B(0;2;0), C(2;2;0), A_1(0;0;2), D_1(2;0;2). K – середина [BC]. Тогда K (1;2;0). M делит $[D_1A_1]$ в отношении 2:1. Тогда:

$$x_M = \frac{0 \cdot 2 + 2}{2 + 1} = \frac{2}{3};\ y_M = \frac{0}{2 + 1} = 0;\ z_M = \frac{2 \cdot 2 + 2}{2 + 1} = 2$$

$$|MK|^2 = \left(\frac{2}{3} - 1\right)^2 + 2^2 + 2^2 = \frac{73}{9}.$$

Ответ: $MK = \frac{\sqrt{73}}{3}$ см.

Задача 15 [4].

Ребро куба имеет длину 1. Найдите расстояние между прямыми, которым принадлежат скрещивающиеся диагонали между двух смежных диагоналей куба (рисунок 34).

Решение.

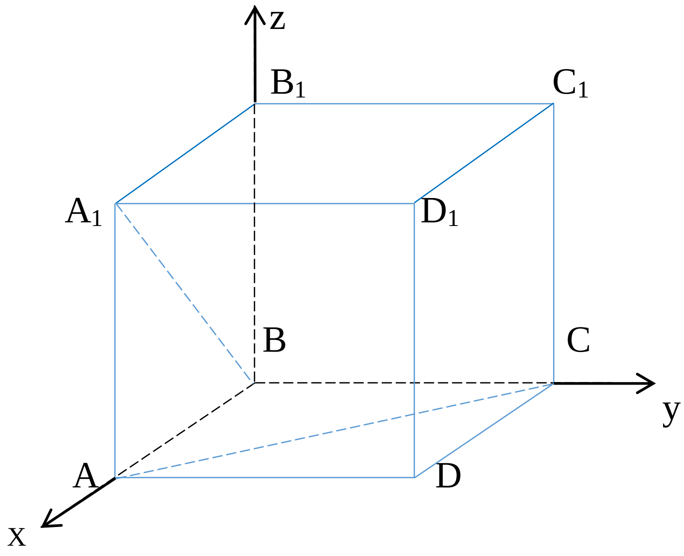


Рисунок 34 – Рисунок к задаче 15

Введем прямоугольную систему координат с началом в точке B и направим ось Ox вдоль ребра BA, Oz– вдоль ребра BB_1, рисунок 34.

C (0;1;0), A_1(1;1;0).

«Как известно, расстояние между скрещивающимися прямыми равно расстоянию от произвольной точки одной из этих прямых к плоскости, которая содержит вторую и проведена параллельно первой.

Проведем через A_1B плоскость α параллельно AC.

Пусть ax + by + cz + d = 0– уравнение этой плоскости. Из условия, что α проходит через точки B(0;0;0) и A(1;0;0), имеем: d = 0, a + c = 0. Тогда уравнение плоскости α имеет вид ax + by + az = 0, x + ky – z = 0.

Вектор нормали $\vec{n}$плоскости α параллелен общему перпендикуляру скрещивающихся прямых A_1B и AC, значит $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.

Учтем, что $\vec{n}(1; k; -1), AC(1; 1; 0)$ имеем $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 1 + k = 0, k = -1$

Искомое расстояние является расстоянием от произвольной точки прямой AC, например A(1;0;0), до плоскости x – y – z = 0.

$$p = \frac{|1\cdot 1+0\cdot(-1)+0\cdot(-1)|}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{3}$» [4].

Задача 16.

«В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найти угол между прямой AC и плоскостью AB_1C_1» (рисунок 35) [18].

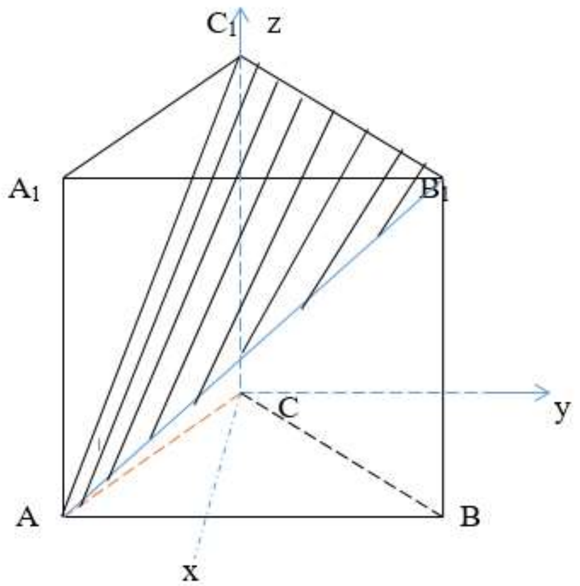


Рисунок 35 – Рисунок к задаче 16

Решение.

«Введем прямоугольную систему координат xyz.

$$A\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}; 0\right), C(0;0;0), C_1(0;0;1), B_1\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}; 1\right).$$

$\vec{p} = \overrightarrow{AC}\left\{-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}; 0\right\}$ – координаты направляющего вектора прямой AC.

При решении стереометрических задач легко заметить преимущества координатно-векторного метода перед другими методами, которые требуют знания большого количества определений, признаков и формул» [18].

2.4.Элективный курс «Геометрические задачи на вычисление и доказательство векторным методом»

Пояснительная записка

«Умение решать геометрические задачи может сыграть серьезную роль в математической подготовке будущего выпускника, поэтому данная тема важна для учителя математики. Ни один вид задач не дает столько материала для развития математической инициативы и логических навыков учащегося, как геометрические задачи. Эти задачи обычно не допускают стандартного подхода к ним и формального восприятия их учащимися. Геометрические задачи являются существенным фактором математического образования; они являют собой мощное орудие геометрических исследований» [22].

Цель курса:

– систематизация и обобщение знаний, полученных в процессе изучения геометрии в 7–10 классах, повторение основных опорных фактов и методов решения задач координатно-векторным методом;

– способствовать достижению учащимися высокого уровня математической подготовки;

– развивать устойчивый познавательный математический интерес;

– соединить школьное обучение с исследовательской деятельностью по выбору, согласно собственному интересу к конкретным проблемам.

Задачи курса:

– способствовать систематизации и обобщению знаний, умений и навыков из геометрии, необходимых в повседневной жизни и трудовой деятельности, достаточно для продолжения образования;

– повышать математическую культуру, развивать логическое, абстрактное мышление, пространственное воображение учащихся;

– развивать способности учащихся к решению задач по геометрии [22].

Программа данного курса структурирована в соответствии с последовательностью изучения основных тем школьного курса геометрии и концентрирует внимание учащихся на основных понятиях и методах решения геометрических задач координатно-векторным методом.

Занятия целесообразно строить таким образом, чтобы основное учебное время использовалось для актуализации опорных фактов и решения геометрических задач, а теоретический материал повторять с использованием опорных таблиц и обобщающих схем.

Формы контроля.

Оценивание достижений обучающихся во внеурочной деятельности должно отличаться от привычной системы оценивания на уроках.

Можно выделить следующие формы контроля:

– сообщения и доклады (мини);
– результаты математических викторин, конкурсов;
– творческий отчет (в любой форме по выбору учащихся);
– различные упражнения в устной и письменной форме;
– рефлексия.

Курс предназначен для учащихся 11 класса и рассчитан на 34 часа, проведение занятий 1 раз в неделю. Тематическое планирование по курсу представлено в таблице 1.

Ожидаемые результаты. Обучающиеся овладеют умениями и знаниями применения координатного, векторного и векторно-координатного метода для решения стереометрических задач. Программа рассчитана на 34 часа, 1 час в неделю. Представим примеры задач по некоторым темам программы, которые целесообразно решить с обучающимися на занятиях.

Задача 1. «Квадрат ACC_1A_1 является боковой гранью прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$. Точка M лежит на луче A_1C_1, $A_1M = 3, AC =$ $= AB = 2$ угол CAB – прямой. Найти периметр сечения призмы плоскостью, которая проходит через точки M и B параллельно прямой AB_1» [35].

Таблица 1 – Тематическое планирование по курсу геометрии «Решение стереометрических задач координатно-векторным методом»

№ п/п	Тема занятия	Количество часов	Вид занятия
1.	Введение. Основные формулы и определения.	2	лекция
2.	Вектор. Операции над векторами. Коллинеарность и компланарность векторов.	3	практическое
3.	Уравнение плоскости.	3	практическое
4.	Параметрические уравнения прямой.	3	практическое
5.	Многогранники.	4	практическое
6.	Шар и сфера.	4	практическое
7.	Касательная плоскость к сфере.	4	практическое
8.	Касательная прямая к сфере.	4	практическое
9.	Взаимное расположение двух сфер.	4	практическое
10.	Итоговое занятие.	1	практическое
	Всего	34	

Решение. Введем систему координат (рисунок 36) и запишем координаты точек. Из условия, что ACC_1A_1 – квадрат вытекает:

$$A(0;0;0), A_1(0;0;2), C(0;2;0), C_1(0;2;2), B(2;0;0), B_1(2;0;2), M(0;3;2).$$

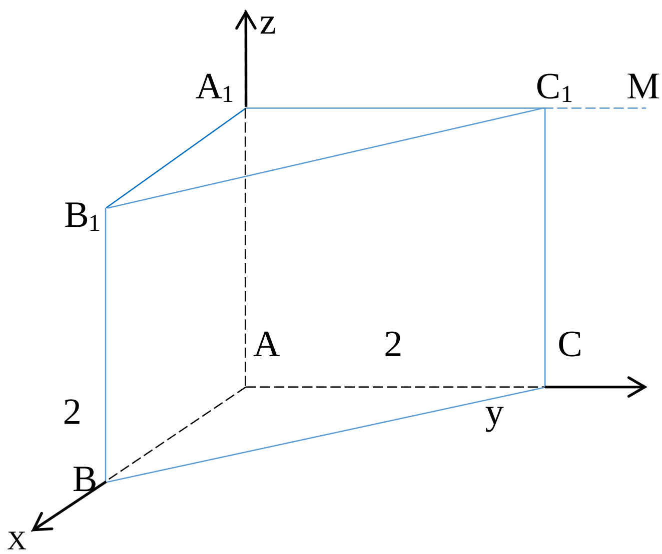


Рисунок 36 – Рисунок к задаче 1

Запишем координаты вектора $\overrightarrow{AB_1}(2;0;2)$. Из условия, что плоскость параллельна вектору $\overrightarrow{AB_1}$, вытекает, что вектор нормали $\vec{n}$ к искомой плоскости перпендикулярен к вектору $\overrightarrow{AB_1}$. Составим уравнение заданной плоскости:

$$\begin{cases} 2a + d = 0, \\ 3b + 2c + d = 0, \\ 2a + 2c = 0. \end{cases}$$

Пусть $a = 3$, тогда $c = -3, d = -6$ и $b = 4$. Уравнение плоскости имеет вид: $3x + 4y - 3z - 6 = 0$. Построим сечение, то есть найдем точки пересечения ребер призмы с плоскостью.

Пусть $P(0; p; 0)$ – точка пересечения заданной плоскости и ребра AC. Тогда имеем равенство: $3 \cdot 0 + 4 \cdot p - 3 \cdot 0 - 6 = 0$. Получим, что $p = \frac{3}{2}$, $P\left(0; \frac{3}{2}; 0\right)$.

Пусть $F(0; 2; f)$ – точка пересечения заданной плоскости и ребра CC_1. Тогда имеем равенство: $3 \cdot 0 + 4 \cdot 2 - 3 \cdot f - 6 = 0, f = \frac{2}{3}$ то есть $F\left(0; 2; \frac{2}{3}\right)$.

Сечением призмы является треугольник BPF. Найдем длины его сторон:

$$\left|\overrightarrow{BP}\right| = \sqrt{4 + \frac{9}{4}} = \frac{5}{2}; \left|\overrightarrow{PF}\right| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{4}{9}} = \frac{5}{6}; \left|\overrightarrow{BF}\right| = \sqrt{4 + 4 + \frac{4}{9}} = \frac{2}{3}\sqrt{19}.$$

Значит, периметр сечения равен $\frac{10+2\sqrt{19}}{3}$.

Ответ: $\frac{10+2\sqrt{19}}{3}$

Задача 2. «В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ ребра основы $ABCD$ равны 4. Боковые ребра пирамиды $-\sqrt{17}$. Точки M, N, K и – середины ребер SC, SD и SA соответственно. Найти объем пирамиды $MNKAD$» [25].

Решение. Введем систему координат (рис. 37) и запишем координаты точек. $A(4; 0; 0), B(4; 4; 0), C(0; 4; 0), D(0; 0; 0)$,

$$S(2; 2; 3), K\left(3; 1; \frac{3}{2}\right), M\left(1; 3; \frac{3}{2}\right), N\left(1; 1; \frac{3}{2}\right)$$

Вычислим площадь четырехугольника $NKAD$, который является основой пирамиды $MNKAD$. Отметим, что NK – средняя линия треугольника ASD.

Площадь четырехугольника NKAD равна $4/3S$, где S – площадь треугольника ASD (рисунок 37).

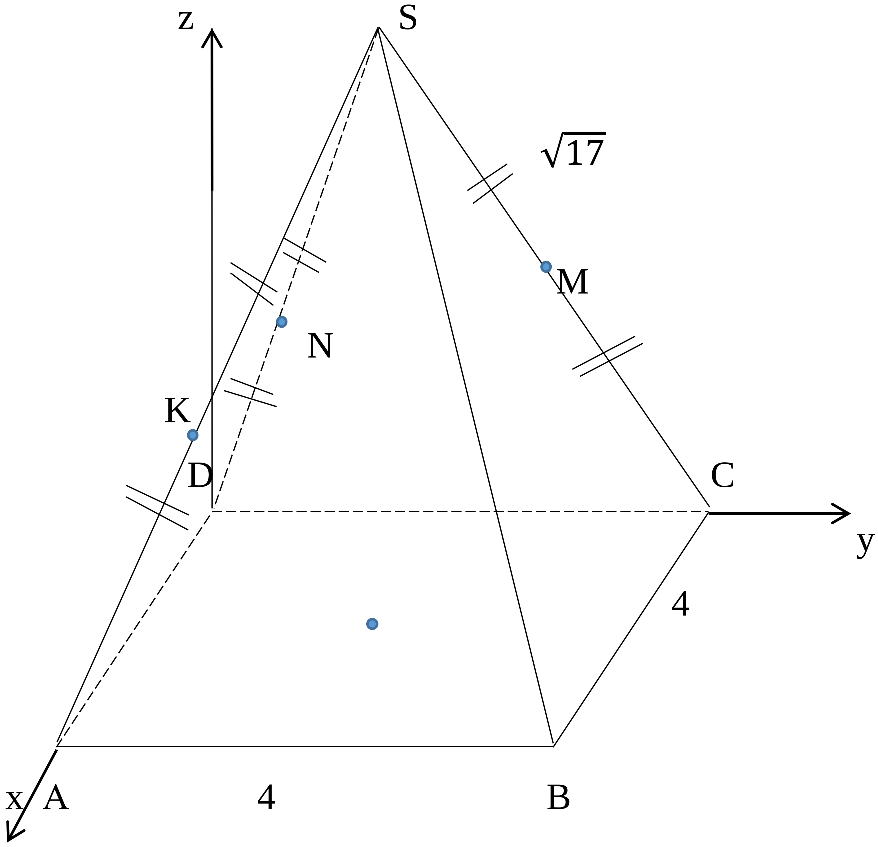


Рисунок 37 – Рисунок к задаче 2

Поэтому: $S = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \left(\sqrt{17 - 4}\right) = 2\sqrt{13}.$

Площадь $S_{NKAD} = \frac{3}{2}\sqrt{13}$.

В пирамиде MNKAD проведем высоту P на основу NKAD.

«Так как точки $(N; K; A; D)$лежат на плоскости ASD, то высота равна расстоянию ρ от точки M до плоскостиASD.

Составим уравнение плоскости:

$$\begin{cases} d = 0 \\ 2a + 2b + 3c + d = 0 \\ 4a + d = 0 \end{cases}$$

Пусть $b = 3,$ тогда $d = 0, a = 0, c = -2.$

Уравнение плоскости имеет вид: $3y - 2z = 0$

Вычислим расстояние ρ от точки Мдо плоскости ASD:

$$\rho = \frac{|9-3|}{\sqrt{9+4}} = \frac{6}{\sqrt{13}};\ H = \rho = \frac{6}{\sqrt{13}}.$$

Искомый объем $V = \frac{1}{3}\frac{3}{2}\sqrt{13} \cdot \frac{6}{\sqrt{13}} = 3.$

Ответ: 3» [25].

Задача 3. «Дан куб $ABCDA'B'C'D'$, длина его ребра равна 1.Точка Q центр грани $A'D'C'D'$. Найти радиус сферы, которая проходит через точки B, D, C', Q.»

Решение. Введем систему координат (рисунок 38) и запишем координаты точек B, D, C', Q. $B(1;1;0), D(0;0;0), C'(0;1;1), Q(\frac{1}{2};\frac{1}{2};1)$

Пусть центр сферы находится в точке O с координатами $(x_0;\ y_0;\ z_0)$. Тогда отрезки BO,DO,C'O,QO равны между собой, так как они являются радиусами.

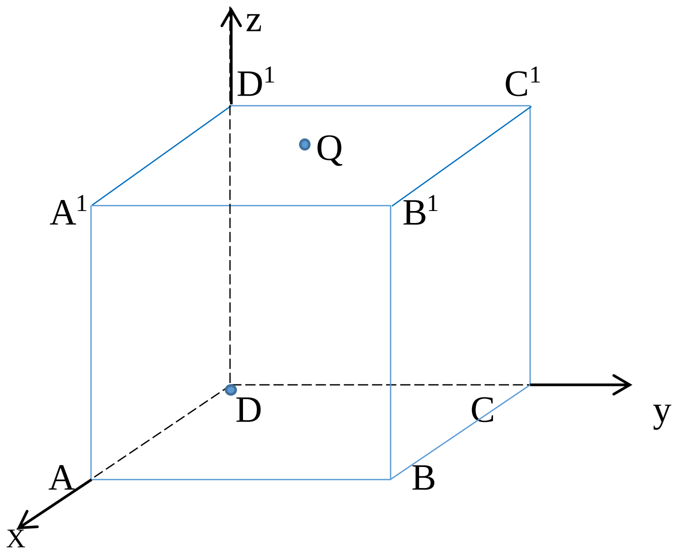


Рисунок 38 – Рисунок к задаче 3

Запишем координаты векторов $\overrightarrow{BO}, \overrightarrow{DO}, \overrightarrow{C'O}, \overrightarrow{QO}$. Имеем:

$$\overrightarrow{BO} = (\overrightarrow{x_0 - 1;\ y_0 - 1;\ z_0}$$

$$\overrightarrow{DO} = (\overrightarrow{x_0;\ y_0;\ z_0}$$

$$\overrightarrow{C'O} = (\overrightarrow{x_0;\ y_0 - 1;\ z_0 - 1}$$

$$\overrightarrow{QO} = (\overrightarrow{x_0 - \frac{1}{2};\ y_0 - \frac{1}{2};\ z_0 - 1}$$

Приравнивая друг к другу длины этих векторов, получим систему:

$$\begin{cases} \left|\overrightarrow{DO}\right| = \left|\overrightarrow{BO}\right| \\ \left|\overrightarrow{C'O}\right| = \left|\overrightarrow{QO}\right|. \\ \left|\overrightarrow{DO}\right| = \left|\overrightarrow{C'O}\right| \end{cases}$$

Подставим в эту систему координаты векторов и получим:

$$\begin{cases} x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = (x_0 - 1)^2 + \ (y_0 - 1)^2 + z_0^2, \\ x_0^2 + (y_0 - 1)^2 + (z_0 - 1)^2 = (x_0 - \frac{1}{2})^2 + (y_0 - \frac{1}{2})^2 + (z_0 - 1)^2, \\ x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = x_0^2 + (y_0 - 1)^2 + (z_0 - 1)^2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_0 + y_0 = 1, \\ x_0 - y_0 = \frac{1}{2}, \\ y_0 + z_0 = 1. \end{cases}$$

Решив систему, получим: $x_0 = \frac{1}{4}, y_0 = \frac{3}{4}, z_0 = \frac{1}{4}$,

Тогда радиус сферы Rравен, например, длине вектора $\overrightarrow{DO}$:

$$R = \sqrt{(\frac{1}{4})^2 + (\frac{3}{4})^2 + (\frac{1}{4})^2} = \frac{\sqrt{11}}{4}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{11}}{4}$.

Задача 4.

«Дан куб $ABCDA'B'C'D'$, с ребром 5. Точки K и L расположены соответственно на ребрах B'C' и CD так, что B'K:KC' = DL: LC = 1: 2. Центр сферы, которая расположена касательно к плоскостям ABCDи ABB'A', лежит на отрезке KL. Найти радиус сферы» [28].

Решение.

Введем систему координат (рисунок 39) и запишем координаты точек и уравнения плоскостей, которые даны в условии задачи. Получим: $L\left(0;\frac{5}{3};0\right), K\left(\frac{10}{3};5;5\right)$.

Уравнение плоскости ABCD: $z = 0$, а плоскости $ABB'A'$: $x - 5 = 0$.

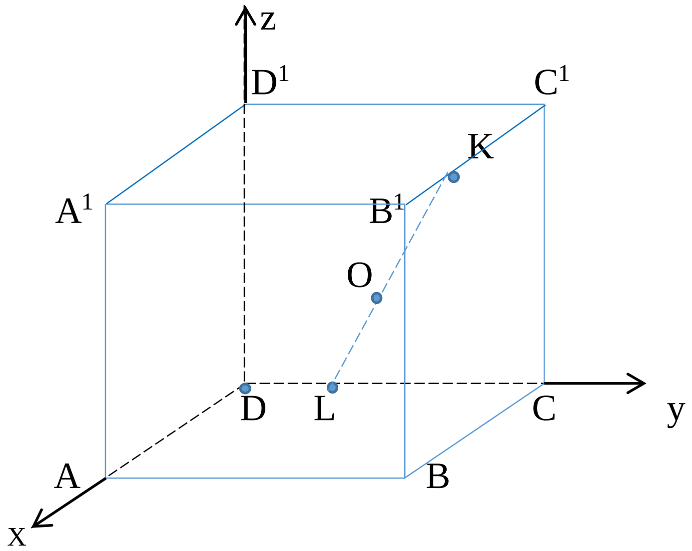


Рисунок 39 – Рисунок к задаче 4

Для нахождения координат точки $O(x_0; y_0; z_0)$.(центра сферы) воспользуемся параметрической формой записи прямой (так как по условию точка O принадлежит LK).

$$\overrightarrow{LO} = \alpha\overrightarrow{LK}$$

$$\begin{cases} x_0 - 0 = \dfrac{10}{3}\alpha, \\ y_0 - \dfrac{5}{3} = \dfrac{10}{3}\alpha, \\ z_0 - 0 = 5\alpha, \end{cases}$$

Откуда

$$\begin{cases} x_0 = \dfrac{10}{3}\alpha, \\ y_0 = \dfrac{10}{3}\alpha + \dfrac{5}{3}, \\ z_0 = 5\alpha, \end{cases}$$

Так как точка O принадлежит отрезку LK, то $0 \le \alpha \le 1$.

Сфера касается данных плоскостей, значит, расстояния от цента сферы (точка O) к этим плоскостям равны между собой (равны радиусу сферы).

Расстояние от точки O до плоскости $ABCD(z = 0)$.

$$\rho = \frac{|5\alpha|}{\sqrt{1}}$$

Расстояние от точки O до плоскости $ABB'A'(x - 5 = 0)$

$$\rho = \frac{\left|\frac{10}{3}\alpha - 5\right|}{\sqrt{1}}$$

Имеем равенство:

$$|5\alpha| = \left|\frac{10}{3}\alpha - 5\right|$$

Учитывая принадлежность точки O, имеем:

$$5\alpha = -\frac{10}{3}\alpha + 5, \alpha = \frac{3}{5}$$

Искомый радиус равен расстоянию от одной из плоскостей: R= 3.

Ответ: 3.

Задача 5.

«Ребра пирамиды ABCD AC, BC, DC попарно перпендикулярны и равны 4. Точка N– середина ребра AB, а точка M расположена на ребре AD так, что AM:MD= 3: 1. Сфера с центром на прямой CN касается ребра AD в точке M. Найти радиус сферы» [28].

Решение.

Выполним чертеж (рисунок 40) и обозначим на прямой CN точку O – центр сферы.

Понятно, что OM– радиус сферы и $OM \perp AD$ (так как M– точка касания. Значит, $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$.

Введем систему координат и вычислим координаты векторов $\overrightarrow{OM}$ и $\overrightarrow{AD}$.

$$A(4; 0; 0), B(0; 4; 0), C(0; 0; 0),$$

$$D(0; 0; 4), M(1; 0; 3), N(2; 2; 0).$$

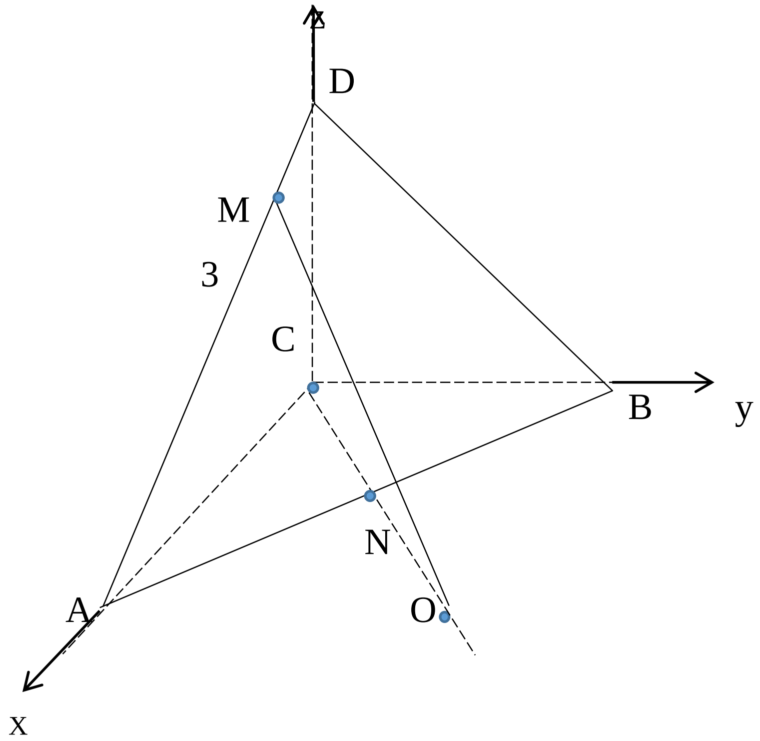


Рисунок 40 – Рисунок к задаче 5

Запишем координаты точки $O(x_0;\ y_0;\ z_0)$.Так как точка O находится на прямой CN, то $z_0 = 0, x_0 = y_0$ (так как CN – биссектриса угла ACB). Пусть точка O имеет координаты $(f; f; 0)$, тогда

$$\overrightarrow{OM}(1 - f; -f; 3), \overrightarrow{AD}(-4; 0; 4).$$

$$\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{AD} = 0 = -4 \cdot (1 - f) + 3 \cdot 4$$

$$0 = -4 + 4f + 12$$

$$f = -2.$$

Получили, что $\overrightarrow{OM}(3; 2; 3)$.

Значит, $R = \left|\overrightarrow{OM}\right| = \sqrt{9 + 4 + 9} = \sqrt{22}.$

Ответ: $\sqrt{22}.$

Задача 6. Пусть $ABCA'B'C'$ – правильная призма с основой ABC, боковыми ребрами AA', BB', CC', причем все ребра призмы равны 2. Пусть точка M – середина ребра CC'. Найти сферу с минимально возможным радиусом, которая касается прямых $A'C, BM$.

Решение.

Введем систему координат (рисунок 41) и запишем координаты данных точек. Получим:

$A(\sqrt{3}; 1; 0), B(0; 2; 0), C(0; 0; 0), A'(\sqrt{3}; 1; 2), B'(0; 2; 2), C'(0; 0; 2), M(0; 0; 1)$

$A(0; 0; 0), A_1(0; 0; 2), C(0; 2; 0), C_1(0; 2; 2), B(2; 0; 0), B_1(2; 0; 2), M(0; 3; 2).$

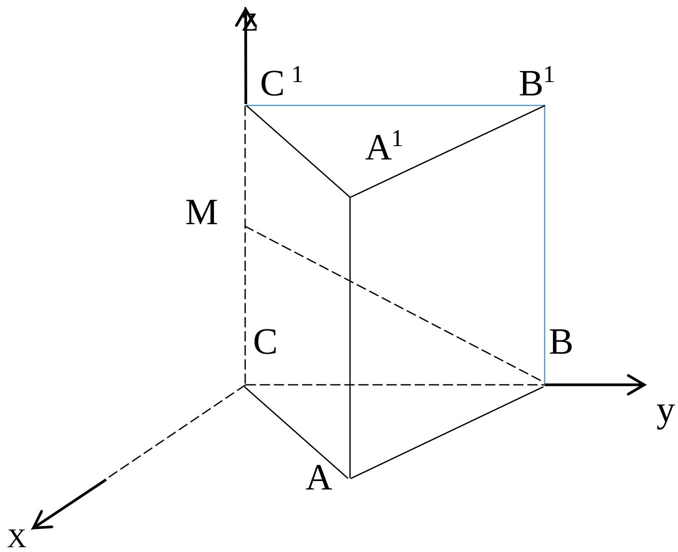


Рисунок 41 – Рисунок к задаче 6

Известно, что для прямых $A'C$ и BMсуществует общий перпендикуляр, то есть существует точка F на прямой $A'C$ и точка на прямой BM, и FP перпендикулярный к двум прямым $A'C$ и BM. Длина этого общего перпендикуляра FP меньше чем длина любого отрезка с концами на этих прямых.

Рассмотрим произвольную сферу R, которая касательная к прямым $A'C$ и BM в точках K_1и K_2. Пусть K_1и K_2не является общим перпендикуляром. Тогда центр этой сферы (точка O) не лежит на отрезке K_1K_2. Понятно, что $OK_1 + OK_2 > K_1K_2$, то $R > \frac{K_1K_2}{2}$. Так как $K_1K_2 > FP$, то и $R > \frac{FP}{2}$.

Из последнего равенства вытекает, что искомым минимальным радиусом является радиус сферы с центром в середине общего перпендикуляра FP и этот минимальный радиус равен $\frac{FP}{2}$. Найдем длину общего перпендикуляра. Составим уравнение, которая проходит через прямую MB и параллельна прямой $A'C$. Найдем расстояние к этой плоскости от точки C.

Вектор $\overrightarrow{A'C}$ имеет координаты $\left(-\sqrt{3};\ -1; -2\right)$.

$$\begin{cases} c + d = 0 \\ 2b + d = 0 \\ -\sqrt{3}d - b - 2c = 0 \end{cases}$$

Из этой системы вытекает уравнение искомой плоскости:

$$5x - \sqrt{3}y - 2\sqrt{3}z + 2\sqrt{3} = 0$$

Расстояние от точки C до плоскости находим по формуле:

$$\rho = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|2\sqrt{3}|}{\sqrt{25 + 3 + 12}} = \sqrt{\frac{3}{10}}.$$

Таким образом, длина общего перпендикуляра FP равна $\sqrt{\frac{3}{10}}$ и минимальный радиус равен половине длины FP, то есть

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{10}} \text{ или } \frac{\sqrt{30}}{20}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{30}}{20}$.

Задача 7. «Ребра основы ABC правильной треугольной пирамиды SABC равны $2\sqrt{3}$, боковые ребра равны $4\sqrt{3}$. Найти радиус сферы, которая касается луча AS и плоскости ABC в точке C» [25].

Решение.

Пусть точка O – центр искомой сферы (рисунок 42).

Из условия касания сферы к плоскости ABC в точке C, имеем, что отрезок OC перпендикулярен к плоскости ABC. Пусть F – точка касания сферы и луча AS, $OF = R$. Отрезки ACи AF равны как касательные к сфере,
которые проведены из одной точки. То есть, $AF = 2\sqrt{3}$ и отрезок $FS = AS -$ $-AF = 2\sqrt{3}.$

Пусть T – основа перпендикуляра, которая проведена из вершины S на прямую OC. Тогда, отрезок TC равен высоте пирамиды, которая проведена из

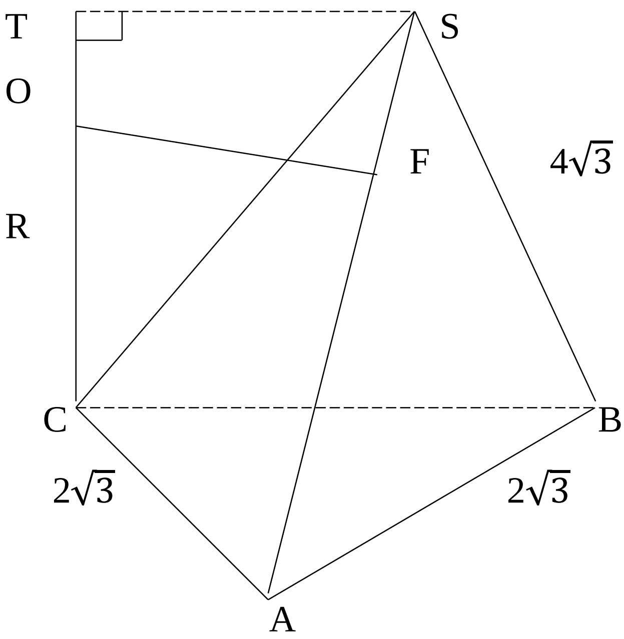


Рисунок 42 – Рисунок к задаче 7

вершины S. А отрезок TS равен $\frac{2\mathrm{m}}{3}$, где m – медиана правильного треугольника ABC, то есть $\mathrm{m} = 3$ и $\mathrm{TS} = 2$. Высоту пирамиды можно найти из равенства $\mathrm{TS}^2 = (4\sqrt{3})^2 - 2^2$. Значит, $\mathrm{CT} = \sqrt{44}$. Длина отрезка OT равна $\left|\sqrt{44} - \mathrm{R}\right|$. Запишем для треугольников OST и OSF теорему Пифагора и получим систему уравнений:

$$\begin{cases} \mathrm{OS}^2 = (\sqrt{44} - \mathrm{R})^2 + 4 \\ \mathrm{OS}^2 = \mathrm{R}^2 + (2\sqrt{3})^2 \end{cases}$$

Радиус сферы находим из равенства:

$$(\sqrt{44} - \mathrm{R})^2 + 4 = \mathrm{R}^2 + (2\sqrt{3})^2, \mathrm{R} = \frac{9}{\sqrt{11}}$$

Ответ: $\frac{9}{\sqrt{11}}$

Задача 8. «Дан куб $\mathrm{ABCDA'B'C'D'}$ с ребром 1. На ребре CD как на диаметре построена сфера. Вторая сфера, центр которой находится в середине куба, касается первой сферы и граней трехгранного угла куба с вершиной $\mathrm{B'}$. Найти радиус второй сферы» [28].

Решение.

Введем систему координат (рисунок 43) и вычислим координаты центров двух сфер. Так как первая сфера построена на AD как на диаметре, то радиус этой сферы равен $\frac{1}{2}$ и координаты этой сферы (точки O_1) – $(\frac{1}{2}; 0; 0)$.

Если радиус второй сферы обозначить как r, то координаты точки O_2 (центр второй окружности) такие: $(1-r; 1-r; 1-r)$. Известно, что точка касания двух сфер принадлежит отрезку O_1O_2.

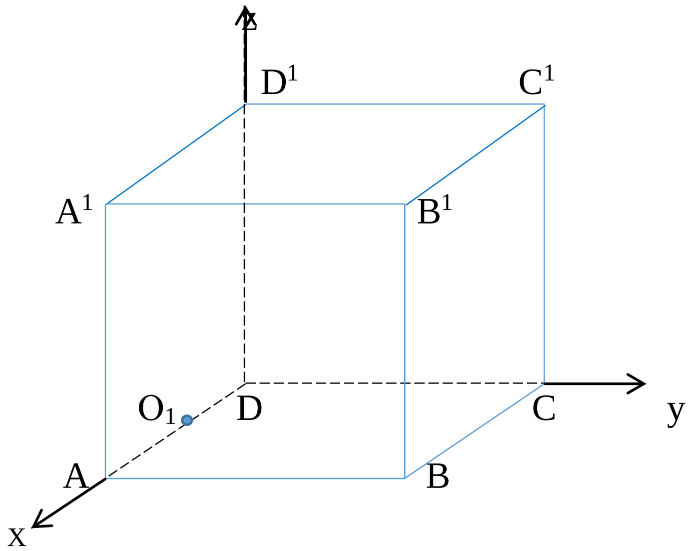


Рисунок 43 – Рисунок к задаче 8

С одной стороны, длина отрезка O_1O_2 равна $(\frac{1}{2} + r)$, с другого – равно длине вектора $\overrightarrow{O_1O_2}$ с координатами $\overrightarrow{O_1O_2}$ $(\frac{1}{2} - r; 1 - r; 1 - r)$.

Получаем уравнение $\frac{1}{2} + r = \sqrt{(\frac{1}{2} - r)^2 + (1 - r)^2 + (1 - r)^2}$, решив его имеем: $r_1 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}, r_2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

По условию, центр второй окружности находится в середине куба. Значит, значение $r_2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$является лишним корнем.

Решение $r_1 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ является единым, а центр O_2имеет координаты $(\frac{\sqrt{5}-1}{2}; \frac{\sqrt{5}-1}{2}; \frac{\sqrt{5}-1}{2})$.

Ответ: $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

2.5. Результаты экспериментальной работы

Для проверки разработанной программы нами был проведен педагогический эксперимент, состоящий из трех этапов:

– констатирующий этап – диагностика знаний обучающихся по теме «Координатно-векторный способ решения задач»;

– формирующий этап – реализация разработанной программы элективного курса;

– контрольный этап – повторная диагностика знаний обучающихся по теме «Координатно-векторный способ решения задач».

В педагогическом эксперименте приняли участие обучающиеся 10 класса в количестве 50 человек.

На контрольном этапе нами была предложена контрольная работа.

Контрольная работа для констатирующего этапа

«Задание 1.

Точка C – середина отрезка $AB, A\,(-5;\ 7;\ -3), C(-3;\ -5; 0)$. Найдите координаты точки B.

Задание 2.

Даны точки $A\,(5;\ -12;\ 7), B\,(0;\ y;\ 3), C\,(x;\ 17;\ -14), D\,(15;\ 0;\ z)$. При каких значениях x, y и z является верным равенство.

Задание 3.

Используя векторы, докажите, что четырехугольник ABCD с вершинами в точках $A\,(-4;\ 2;\ 5), B\,(-6;\ 3;\ 0), C\,(12;\ -8;\ 1)$ и $D\,(14;\ -9;\ 6)$является параллелограммом.

Задание 4.

Дано $\vec{m} \uparrow\uparrow \vec{n}, |\vec{m}\,| = 5\sqrt{2}, \vec{n} = (4;\ -1;\ 7)$. Найти координаты вектора $\vec{m}$» [16].

Задание 5.

Найдите угол между векторами $\vec{m} = \vec{a} + \vec{b}$ и $n = 3\vec{a} - 2\vec{b}$, если $|\vec{a}| = \sqrt{3}, |\vec{b}| = 4, \angle(\vec{a}, \vec{b}) = 30^\circ$.

Результаты выполнения работы приведены в таблице 2.

Таблица 2 – Результаты выполнения контрольной работы (констатирующий этап)

№ задания	Количество обучающихся экспериментального класса, выполнившие задание (25 человек)	% обучающихся экспериментального класса, выполнившие задание	Количество обучающихся контрольного класса, выполнившие задание (25 человек)	% обучающихся контрольного класса, выполнившие задание
1	22	88%	22	88%
2	13	64%	17	68%
3	6	24%	9	36%
4	3	12%	5	20%
5	0	0%	1	4%

Задания 1-3 являются стандартными задачами по данной теме, поэтому с ними ученики справились лучше. В отличии от задач 4-5, которые считаются задачами повышенной сложности. С таким уровнем заданий чаще всего встречаются учащиеся, изучающие математику на профильном уровне, посещающие математические кружки или факультативы. С этими задачами правильно справились только единицы учащихся.

Анализ результатов констатирующего этапа эксперимента позволил сделать вывод о невысоком уровне сформированности у учащихся умений применять векторный и координатный методы для решения задач высокого уровня сложности, что свидетельствует о малом количестве задач из данной темы и недостаточную вариативность задач. На формирующем этапе эксперимента нами реализована разработанная программа элективного курса по решению стереометрических задач координатно-векторным методом.

На первом занятии были актуализированы знания обучающихся по теме, затем осуществлялось решение более сложных задач, примеры которых приведены выше.

Представим задачи предложенные обучающимся на первом занятии.

Задачи на использование сведений о координатах

Рассмотрим задачу, которую можно решить двумя способами, используя сведения о координатах.

Задача 1. Вершины четырехугольника ABCD имеют координаты $\mathrm{A}(-2;1)$, $\mathrm{B}(0;4)$, $\mathrm{C}(4;1)$, $\mathrm{D}(2;-2)$. Докажите, что ABCD $-$ параллелограмм.

Решение. 1-й способ. Как известно, по признаку параллелограмма четырехугольник, диагонали которого точкой пересечения делятся пополам, является параллелограммом. Найдем координаты средин диагоналей AC і BD. Середина отрезка AC имеет координаты $\mathrm{x} = \frac{-2+4}{2} = 1; \mathrm{y} = \frac{1+1}{2} = 1$. Середина отрезка BD имеет координаты $\mathrm{x} = \frac{0+2}{2} = 1; \mathrm{y} = \frac{4+(-2)}{2} = 1$. Значит, отрезки AC и BD имеют общую $(1;1)$, то есть четырехугольник ABCD $-$ параллелограмм по определению.

2-й способ. Как известно, по признаку параллелограмма четырехугольник, противоположные стороны которого попарно равны, является параллелограммом. Найдем длины сторон четырехугольника ABCD:

$\mathrm{AB} = \sqrt{(-2-0)^2 + (1-4)^2} = \sqrt{13}$, $\mathrm{BC} = \sqrt{(0-4)^2 + (4-1)^2} = 5$;

$\mathrm{CD} = \sqrt{(4-2)^2 + \left(1-(-2)\right)^2} = \sqrt{13}$, $\mathrm{AD} = \sqrt{(-2-2)^2 + \left(1-(-2)\right)^2} = 5$.

Значит, $\mathrm{AB} = \mathrm{CD}$, $\mathrm{BC} = \mathrm{AD}$, то есть четырехугольник ABCD $-$ параллелограмм по определению.

Задача 2. Составьте уравнение прямой, проходящей через точки $\mathrm{A}(-6;-1)$ и $\mathrm{B}(3;2)$.

Решение. Так как абсциссы точек A и B не равны, прямая AB не параллельна оси ординат. Значит, будем искать ее уравнение в виде $y = kx + m$. По условию задачи координаты точек A и B удовлетворяют искомое уравнение, то есть

$$\begin{cases} -1 = -6k + m, \\ 2 = 3k + m. \end{cases}$$

Решением системы этих уравнений будет пара $k = \frac{1}{3}, m = 1$. Таким образом, искомым уравнением будет $y = \frac{1}{3}x + 1$.

Сведем его к виду $ax + by + c = 0$: $3y = x + 3$; $x - 3y + 3 = 0$.

Задачи на использование сведений о векторах

Задача 3.

«Даны векторы $\vec{a}(2; 3), \vec{b}(-4; 5)$. Найти координаты вектора $\vec{c}$, такого, что $\vec{b} + \vec{c} = \vec{a}$.

Решение. В этой задаче воспользуемся определением суммы векторов через координаты, а также определение равных векторов. То есть координаты вектора, являющиеся суммой векторов $\vec{b}$и$\vec{c}$ такие же, как координаты вектора $\vec{a}$. Используем это. Пусть имеем вектор $\vec{c}(c_1; c_2)$.

Тогда: $-4 + c_1 = 2;\ 5 + c_2 = 3$.

Откуда $c_1 = 6;\ c_2 = -2$.

Ответ. $\vec{c}(6; -2)$» [16].

Задача 4. «Докажите, что точки $A(1; 2), B(2; 4), C(-3; -6)$ лежат на одной прямой.

Решение.

Определим координаты векторов $\overrightarrow{AB}$и$\overrightarrow{AC}$: $\overrightarrow{AB}(1; 2)$, $\overrightarrow{AB}(-4; -8)$. Заметим, что $\overrightarrow{(-4; -8)} = -4 \cdot \overrightarrow{(1; 2)}$, то есть $\overrightarrow{AC} = -4\overrightarrow{AB}$.

Это значит, что векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ коллинеарные. Но прямые AB и AC имеют общую точку A, то есть точки A, B иC лежат на одной прямой» [16].

Применение координатного, векторного и векторно-координатного метода для решения задач

Задача 5. Дано: $\Delta CAB, \angle C = 90^{\circ}, CA = a, CB = b, AB = c$. Доказать, что $c^2 = a^2 + b^2$.

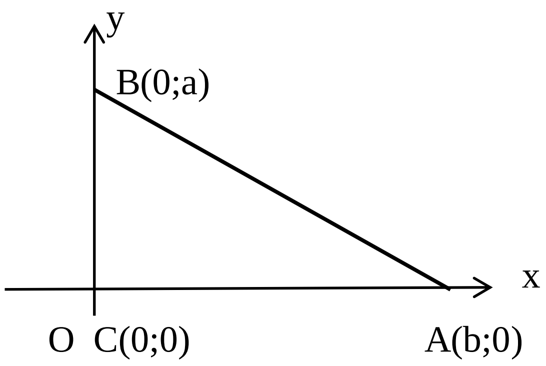


Рисунок 44 – Рисунок к задаче 5

Решение: Введем систему координат так, чтобы катеты CA и CB лежали на осях Ox и Oy соответственно, а точка C – в начале координат (рисунок 44). В этой системе координат вершины треугольника будут координаты: $C(0; 0)$, $A(b; 0)$, $B(0; a)$. Найдемо длину отрезка AB: $AB^2 = b^2 + a^2$, а по условию $AB^2 = c^2$. Значит, $c^2 = a^2 + b^2$.

Задача 6. «Точка пересечения отрезков, соединяющих середины противоположных сторон четырехугольника, совпадает с точкой пересечения его диагоналей. Докажите, что данный четырехугольник – параллелограмм» [16].

Решение. Пусть диагонали четырехугольника ABCD пересекаются в точке O, точки M и N – середины сторон AD и BC соответственно (рисунок 45).

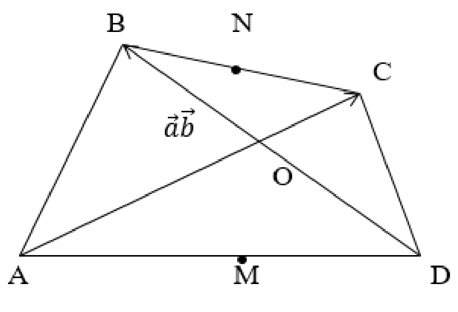


Рисунок 45 – Рисунок к задаче 6

Определим $\vec{a} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OC}$. Тогда $\overrightarrow{ON} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$. Так как $\overrightarrow{OD} \uparrow\downarrow \vec{a}, \overrightarrow{OA} \uparrow\downarrow b$, то $\overrightarrow{OD} = m\vec{a}$, $\overrightarrow{OA} = n\vec{b}$, значит, $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OA}) = \frac{1}{2}(m\vec{a} + n\vec{b})$, где m и n – некоторые числа.

По условию задачи $\overrightarrow{OM}$ и $\overrightarrow{ON}$ коллинеарные, значит, $\overrightarrow{OM} = k\overrightarrow{ON}$, или $\frac{1}{2}(m\vec{a} + n\vec{b}) = \frac{k}{2}(\vec{a} + \vec{b})$. Отсюда $(k - m)\vec{a} = (k - n)\vec{b}$. Но поскольку векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ неколлинеарные, равенство возможно только при условии $k = m = n$. Значит, $\overrightarrow{BC} = \vec{b} - \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = k(\vec{b} - \vec{a})$, то есть векторы $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AD}$ коллинеарные, откуда BC‖AD. Аналогично можно доказать, что AB‖CD. Таким образом, $ABCD -$ параллелограмм.

Задача 7.

Вычислить угол между векторами $\vec{a} = 3\vec{p} + 2\vec{q}$ і $\vec{b} = \vec{p} + 5\vec{q}$, где $\vec{p}$ и $\vec{q}$ – единичные перпендикулярные векторы.

Решение. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$. Вычислим $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $|\vec{a}|$ і $|\vec{b}|$.

$\vec{a} \cdot \vec{b} = (3\vec{p} + 2\vec{q})(\vec{p} + 5\vec{q}) = 3\vec{p}^2 + 17\vec{p}\vec{q} + 10\vec{q}^2 = 3 \cdot 1 + 10 \cdot 1 = 13;$

$|\vec{a}| = \sqrt{(3\vec{p} + 2\vec{q})^2} = \sqrt{9\vec{p}^2 + 12\vec{p}\vec{q} + 4\vec{q}^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13};$

$|\vec{b}| = \sqrt{(\vec{p} + 5\vec{q})^2} = \sqrt{\vec{p}^2 + 10\vec{p}\vec{q} + 25\vec{q}^2} = \sqrt{1 + 25} = \sqrt{26};$

Тогда $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{13}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{26}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$; отсюда, угол 45°.

Ответ: 45°.

На контрольном этапе нами предложена контрольная работа.

Задача 1. Определите центр и радиус окружности заданной уравнением $x^2 - 4x + y^2 + 2y - 11 = 0$.

Задача 2. Найдите координаты четвертой вершины параллелограмма ABCD, если $A(-2; 1), B(0; 4), C(4; 1)$.

«Задача 3. При каком значении x векторы $\vec{a}(2; -1)$ і $\vec{b}(3; x)$ перпендикулярны?

Задача 4. Доказать, что катет прямоугольного треугольника является среднее пропорциональное между гипотенузой и его проекцией на гипотенуз» [16].

Задача 5. Найти координаты середины отрезка AB, если $A(-5;4)$, $B(3;2)$.

Результаты выполнения контрольной работы приведены в таблице 3.

Таблица 3 – Результаты выполнения контрольной работы(контрольный этап)

№ задания	Количество обучающихся экспериментального класса, выполнившие задание (25 человек)	% обучающихся экспериментального класса, выполнившие задание	Количество обучающихся контрольного класса, выполнившие задание (25 человек)	% обучающихся контрольного класса, выполнившие задание
1	25	100%	21	84%
2	20	80%	15	60%
3	14	64%	9	36%
4	7	28%	5	20%
5	5	20%	1	4%

Таким образом, результаты педагогического эксперимента подтверждают эффективность разработанной программы элективного курса.

Выводы по второй главе

При решении стереометрических задач кроме традиционных методов с использованием алгебры и тригонометрии могут использоваться и другие методы, в том числе и координатно-векторный, который объединяет два метода решения геометрических задач: векторный и координатный. Сравнивая указанный метод с другими методами решения стереометрических задач, мы обнаружили, что очень часто он позволяет избежать искусственных построений, упрощает решение многих геометрических задач и доказывание теорем. Он удобен также тем, что не нужно использовать большое количество формул, признаков и свойств фигур.

Координатно-векторный метод в школьном курсе геометрии применяется очень мало, хотя и достаточно удобен. Учитывая, что учащиеся не очень хорошо понимают указанный метод, важно сочетать координатно-векторный метод вместе с аналитическим методом. Такой подход к решению стереометрических задач будет способствовать поиску более простых и доступных решений задач и лучшему усвоению учащимися учебного материала.

Нами проанализированы учебники по геометрии и сделан вывод, что система задач по геометрии в учебнике является эффективным средством изучения предмета, так как построена с учетом современных тенденций в образовании, в частности на основе компетентностного подхода и индивидуализации обучения на уроках геометрии.

Для углубления и расширения знаний учащихся по решению задач координатно-векторным способом нами разработан элективный курс, применение которого показало положительные результаты.

Заключение

В ходе выполнения ВКР и проведения экспериментальный работы нами было установлено, что специальным образом подобранные геометрические задачи могут служить основой организации повторяющего обучения не только по геометрии, но и по алгебре, когда составляем алгебраическое уравнение, тригонометрии, когда используем тригонометрические соотношения между углами, сторонами или ребрами.

Более того, геометрические задачи, процесс поиска их решения, реализация конкретного способа решения, в частности, координатно-векторного, способствуют развитию как наглядно-образного, так и аналитического мышления.

Разработанный элективный курс ориентирован на подготовку школьников к выполнению обязательной и дополнительной части ОГЭ и ЕГЭ.

Уровень сформированности у школьников умения переформулировать геометрическую задачу на векторном языке свидетельствует об уровне развития способности к эвристическому мышлению.

Список используемой литературы

1. Александров А.Д. Геометрия. 11 класс / А.Д. Александров, А.Л. Вернер, В.И. Рыжик. М.: Просвещение, 2006. 320 с.
2. Александров А.Д. Геометрия / А.Д. Александров, А.Л. Вернер, В.И. Рыжик. М: Просвещение, 1999. 271с.
3. Александров А.Д. Математика. Алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия. 10-11 классы. Учебник / А.Д. Александров, А.Л. Вернер, В.И. Рыжик. М.: Просвещение, 2014. 256 с.
4. Артыкбаева З.А. Методика обучения решению геометрических задач // Актуальные проблемы гуманитарных и естественных наук. 2015. №2-2. URL: https://cyberleninka.ru/article/n/metodika-obucheniya-resheniyu-geometricheskih-zadach (дата обращения: 11.06.2022).
5. Атанасян Л.С. Геометрия 10-11. М: Просвещение, 2009. 258 с.
6. Вдовин А.Ю. Высшая математика. Стандартные задачи с основами теории [Электронный ресурс]: учеб. пособие / А.Ю. Вдовин, Л.В. Михалева, В.М. Мухина. Электрон. дан. Спб: Лань, 2009. 192 с. Режим доступа: https: / / e.lanbook.com/book/45(дата обращения: 11.06.2022).
7. Бутузов В.Ф. Геометрия. 11 класс. Рабочая тетрадь / В.Ф. Бутузов, Ю.А. Глазков, И.И. Юдина. М.: Просвещение, 2013. 675 с.
8. Вергазова Ольга Бухтияровна Применение координатно-векторного метода решения стереометрических задач в процессе подготовки к ЕГЭ по математике (профильный уровень) // Концепт. 2017. №1. URL: https://cyberleninka.ru/article/n/primenenie-koordinatno-vektornogo-metoda-resheniya-stereometricheskih-zadach-v-protsesse-podgotovki-k-ege-po matematike-profilnyy (датаобращения: 11.06.2022).
9. Вилейтнер Г. История математики от Декарта до середины XIX столетия / Г. Вилейтнер. М.: Физматгиз, 1960. 469 с.
10. Волович М.Б. Векторы // Первое сентября. 2001. №15. С.11-16.

11. Габович И., Горнштейн П. Вооружившись методом координат // Квант. 2009. №11. С. 42 – 47.

12. Гельфанд И.М. Метод координат [Электронный ресурс]: учеб. пособие / И.М. Гельфанд, Е.Г. Глаголева, А.А. Кириллов. Электрон. дан. Москва: МЦНМО, 2009. С. 21-22. Режим доступа: https://e.lanbook.com/book/9321(датаобращения: 11.06.2022).

13. Глаголев Н. А. Элементарная геометрия: стереометрия для 10-11 кл. ср. шк. в 2 ч. М.: Просвещение, 2008. Ч. 2.

14. Гордин Р.К. ЕГЭ 2017. Математика. Геометрия. Стереометрия. Задача 14 (профильный уровень) [Электронный ресурс]: учеб. пособие. Электрон. дан. Москва: МЦНМО, 2017. 120 с. Режим доступа: https://e.lanbook.com/book/92688(датаобращения: 11.06.2022).

15. Готман Э.Г., Скопец З.А. Решение геометрических задач аналитическим методом. М.: Просвещение, 2009. 136 с.

16. Гусев В.А. Преподавание геометрии в 6-8 классах: Сб. статей / сост. В.А. Гусев. М.: Просвещение, 1979. 287 с.

17. Давыдов А.Н. Методика обучения решению геометрических задач на доказательство по технологии наводящих вопросов // Вестник магистратуры. 2018. №9-1 (84). URL: https://cyberleninka.ru/article/n/metodika-obucheniya-resheniyu-geometricheskih-zadach-na-dokazatelstvo-po-tehnologii-navodyaschih-voprosov (дата обращения: 11.05.2022).

18. Калинин А.Ю. Сборник задач по геометрии. 10-11 классы [Электронный ресурс]: учеб. пособие / А.Ю. Калинин, Д.А. Терешин. Электрон. дан.Москва: МЦНМО, 2011.160 с. Режимдоступа: https://e.lanbook.com/book/9349(датаобращения: 11.06.2022).

19. КомилжонА.Р. Problems of solving geometric equations using mathematical equations // Scientific progress. 2022. №4. URL: https://cyberleninka.ru/article/n/problems-of-solving-geometric-equations-using-mathematical-equations (дата обращения: 11.06.2022).

20. Кружилина Е.В. Обучение решению задач по геометрии векторным методом в средней школе // Вестник Таганрогского института имени А.П. Чехова. 2016. №1. URL: https://cyberleninka.ru/article/n/obuchenie-resheniyu-zadach-po-geometrii-vektornym-metodom-v-sredney-shkole(дата обращения: 11.06.2022).

21. Кушнир И.А. Векторные методы решения задач [Текст]: учеб.пособие / И.А. Кушнир. Киев: Обериг, 1994. 210 с.

22. Ларин А.А. Подготовка к ЕГЭ [Электронный ресурс] / А.А. Ларин. Режим доступа: http://www.alexlarin.net/. Доступ свободный.

23. Литвиненко В.Н. Геометрия. Готовимся к ЕГЭ. 10 класс / В.Н. Литвиненко, О.А. Батугина. М.: Просвещение, 2011. 160 с.

24. Лихолетов И.И., Мацкевич И.П. Руководство к решению задач по высшей математике, теории вероятностей и математической статистике [Текст]: Лихолетов И.И., Мацкевич И.П. 2-е изд., исправл. и доп. Минск: Вышэйшая школа, 1969. 454 с.

25. Математика. Подготовка к ЕГЭ-2012: учебно-методическое пособие / под ред. Ф.Ф. Лысенко, С.Ю. Калабухова. Ростов-на-Дону: Легион – М., 2011. 183 с.

26. Мельникова Н. Б. Геометрия: векторы и координаты в пространстве / Мельникова Н. Б., Литвиненко В. Н., Безрукова Г. К. М:Просвещение, 2007. 120с.

27. Мерзляк А.Г. Геометрия. 7 класс. Учебник / А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонский, М.С. Якир. Москва: Наука, 2015. 192 с.

28. Мугаллимова С.Р. Векторы для школьника [Текст]: учеб.пособие / С.Р. Мугаллимова. Омск: «Сфера», 2008. 51 с.

29. Новые компьютерные технологии. Координатная плоскость // Математика – Приложение к газ. «Первое сентября» №29, 2004. С. 10-14.

30. Останов К.М., Мамиров Б. У., Актамова В. У. О методике решения задач с помощью геометрических преобразований // European science. 2019.

№4 (46). URL: https://cyberleninka.ru/article/n/o-metodike-resheniya-zadach-s-pomoschyu-geometricheskih-preobrazovaniy (дата обращения: 11.06.2022).

31. Останов К.М., Наврузов У.Б., Ботиров М. М. Некоторые вопросы методики обучения учащихся решению геометрических задач при изучении школьного курса математики // Проблемы науки. 2021. №8 (67). URL: https://cyberleninka.ru/article/n/nekotorye-voprosy-metodiki-obucheniya-uchaschihsya-resheniyu-geometricheskih-zadach-pri-izuchenii-shkolnogo-kursa-matematiki (дата обращения: 11.06.2022).

32. Погорелов А.В. Аналитическая геометрия [Электронный ресурс]: учеб. пособие / А.В. Погорелов. Электрон. текстовые данные. Москва, Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2005. 208 с. – Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/16488.html. ЭБС «IPRbooks».

33. Постников М.М. Аналитическая геометрия [Электронный ресурс]: учеб. пособие. Электрон. дан. Санкт-Петербург: Лань, 2009. 416 с. Режим доступа: https://e.lanbook.com/book/318(дата обращения: 11.06.2022).

34. Потоскуев Е.В., Звавич Л.И. Геометрия. 10 класс: учебник для общеобразовательных учреждений(углублённый уровень). 6-е изд. М.: Дрофа, 2010. 224 с.

35. Потоскуев Е.В. Векторно-координатный метод решения задач стереометрии. М.: Издательство «Экзамен», 2019. 213 с.

36. Смирнова И.М. Геометрия / И.М.Смирнова, В.Ф.Смирнов. М,2008. 201с.

37. Смирнова И.М. Геометрия. 7 класс. Дидактические материалы / А.Г. Мерзляк и др. М.: Вентана-Граф, 2014. 112 с.

38. Смирнова И.М. Геометрия. 10-11 классы (гуманитарный профиль) / И.М. Смирнова. М.: Мнемозина, 2011. 223 с.

39. Сумина Г.Н. Методические рекомендации к изучению метода координат на плоскости: учебно-методическое пособие / сост. Г.Н. Сумина. М: Просвещение, 2013 г. 76 с.

40. Сюнюшев А.П. Векторно-координатный метод при решении стереометрических задач // Информация и образование: границы коммуникаций INFO. 2018. №10 (18). URL: https://cyberleninka.ru/article/n/vektorno-koordinatnyy-metod-pri-reshenii-stereometricheskih-zadach (дата обращения: 14.06.2022).

41. Сюнюшев А.П., Барабанова Е.Н., Байгонакова Г.А. Вычисление площадей некоторых геометрических фигур с помощью векторного произведения // Информация и образование: границы коммуникаций INFO. 2018. №10 (18). URL: https://cyberleninka.ru/article/n/vychislenie-ploschadey-nekotoryh-geometricheskih-figur-s-pomoschyu-vektornogo-proizvedeniya (дата обращения: 14.06.2022).

42. Темербекова А.А., Байгонакова Г.А. Практические аспекты решения стереометрических задач с помощью векторно-координатного метода // Информация и образование: границы коммуникаций INFO. 2018. №10 (18). URL: https://cyberleninka.ru/article/n/prakticheskie-aspekty-resheniya-stereometricheskih-zadach-s-pomoschyu-vektorno-koordinatnogo-metoda (дата обращения: 14.06.2022).

43. Цубербиллер О.Н. Задачи и упражнения по аналитической геометрии [Электронный ресурс]: учеб. пособие. Электрон. дан. Санкт-Петербург: Лань, 2009. 336 с. Режим доступа: https://e.lanbook.com/book/430 (дата обращения: 14.06.2022).

44. Черноусов Д.В. Применение векторно-координатного метода при решении задач по физике // Информация и образование: границы коммуникаций INFO. 2018. №10 (18). URL: https://cyberleninka.ru/article/n/primenenie-vektorno-koordinatnogo-metoda-pri-reshenii-zadach-po-fizike (дата обращения: 14.06.2022).

45. Шарыгин И.Ф. Геометрия. 7-9 классы / И.Ф. Шарыгин. М.: Дрофа, 2010. 368 с.

46. Шарыгин И.Ф. Геометрия. 10-11 классы. Учебник для общеобразовательных учебных заведений. / Шарыгин И.Ф. М:Дрофа, 1999. 208с.

47. Шарыгин И.Ф. Математика для поступающих в вузы: учебное пособие / И.Ф.Шарыгин. М.: Дрофа, 2006. 479 с.

48. Ященко И.В. Математика: интенсивный курс подготовки к экзамену / И.В.Ященко. М.: Айрис-прес, 2003. 432 с.

49. Baron, LoisM. Dothe math! Decorate with Geometry // Math Horizons. 2018. V. 26. P. 14 - 15.

50. Berendonk, S. Proof without words: sums of squares in a thin rectangle // The College Mathematics Journal. 2018. V. 49. P.180.

51. Brenton, L. A Bigger Altar: Geometry and Ritual // Math Horizons. 2017. V. 25. P. 8 - 11.

52. Edwin, O’Shea. Proofs are like love songs // Math Horizons. 2018. V. 26. P. 34.

53. Grigorieva E. Methods for solving complex geometry problems. Boston: Birkhauser, 2013.

54. Shum, K.P. (2017). Techniques for Solving Problems of Plane Geometry. In: Soifer, A. (eds) Competitions for Young Mathematicians. ICME-13 Monographs. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-56585-9_3