МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Тольяттинский государственный университет»

Институт математики, физики и информационных технологий
(наименование института полностью)

Кафедра «Высшая математика и математическое образование»
(наименование)

44.04.01 Педагогическое образование
(код и наименование направления подготовки)

Математическое образование
(направленность (профиль))

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА (МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ)

на тему «Решение алгебраических задач различными способами как средство формирования математической культуры обучающихся общеобразовательной школы»

Студент В.П. Ильиных
(И.О. Фамилия) (личная подпись)

Научный руководитель канд. пед. наук, доцент, Н.А. Демченкова
(ученая степень, звание, И.О. Фамилия)

Тольятти 2022

Оглавление

Введение

Актуальность и научная значимость настоящего исследования. Согласно требованиям Федерального государственного образовательного стандарта основного общего образования Российской Федерации (ФГОС РФ) «изучение предметной области «Математика и информатика» должно обеспечить формирование представлений о математике как о компоненте общечеловеческой культуры, универсальном языке науки, позволяющем описывать и изучать реальные процессы и явления» [62].

Математика является точной наукой, поэтому без математической культуры сейчас невозможно обойтись, она является основой всей культуры. Математическая культура – это взаимодействие человека со знаниями, вследствие чего производится анализ ее влияние на человека. Культура – это средство, с помощью которого можно понять жизнь, используя при этом различные естественные и формализованные языки (например, язык математики, музыки и т.д.). Благодаря чему можно сделать вывод, что в общую культуру обязательно входит и математика. О. Шпенглер [55] писал: «Каждая культура имеет свою математику» [55].

Предметные результаты освоения основной образовательной программы должны обеспечивать возможность дальнейшего успешного профессионального обучения или профессиональной деятельности.

Изучение предметной области «Математика и информатика» должно обеспечить:

– «сформированность представлений о социальных, культурных и исторических факторах становления математики и информатики;

– сформированность основ логического, алгоритмического и математического мышления;

– сформированность умений применять полученные знания при решении различных задач;

– сформированность представлений о математике как части общечеловеческой культуры, универсальном языке науки, позволяющем описывать и изучать реальные процессы и явления» [57].

Согласно концепции математического образования Российской Федерации, математика является одним из критериев интеллектуального уровня развития человека, элементом культуры и воспитанности. При обучении математике у обучающихся должен появиться интерес и понятие о том, что математическая культура необходима для получения различных результатов в информационной, технологической безопасности [51].

Элементы математического просвещения должны использоваться в повседневной жизни человека (например, рекламе, различных телепрограммах и т.д.). Также должно произойти увеличение числа людей, проявляющих интерес к математическим открытиям, новшествам, как это происходит в других сферах деятельности человека. Необходимо увеличить и разнообразить формы математических соревнований, в том числе с использованием дистанционных технологий [51].

В настоящее время в средней общеобразовательной школе ставится множество задач, которые необходимо решать, совершенствуя содержание образования, искать современные методы и приемы обучения. Одной из современных проблем общего образования является формирование математической культуры школьников.

В работе Л.М. Фридмана [25] указаны место и роль математических задач при обучении математике, выстроена классификация математических задач на основе их внешней структуры, усовершенствована методика обучения решению задач.

В книге для учителя В.И. Крупича [26] ставится проблема, связанная с изучением математических задач как сложной структуры, с рассмотрением взаимосвязи между ними. При детальном анализе задач и их структуры решается вопрос о взаимосвязи сложности задачи и проблемы при ее решении.

В своей диссертации Т.В. Захарова [20] обращает внимание на развитие информационно-познавательной деятельности как одной из важных факторов становления математической культуры обучающихся.

В.И. Снегурова [13] в своей работе рассматривает дистанционное обучение как один из факторов развития и формирования математической культуры при решении алгебраических задач.

С.П. Шарый [61] описывает решение интервальных задач, как один из доминирующих способов решения алгебраических задач. Автор считает, что «при развитии данного направления понимание множества решений интервальной системы уравнений (неравенств и т.п.) как множества всевозможных решений вещественных систем того же вида с параметрами из указанных интервалов не приложимо в ряде практически важных интервальных задач».

С.В. Валитова [8] в своем исследовании рассматривает методические вопросы при решении математических задач и предъявляет к ним определенные требования: целостности, системности, соответствие поставленной цели, формирование положительной мотивации.

Большинство учителей математики на своих уроках при решении алгебраических задач не рассматривают эти задачи как средство формирования математической культуры; при решении алгебраических задач обучающиеся и учителя стараются быстро найти ответ на вопрос в задаче, при этом зачастую пропускают основные важные методические вопросы по ее решению: как можно самостоятельно решить данную задачу, какими способами, и что нужно сделать для получения правильного результата?

При проведении анализа педагогической и методической литературы отмечаем недостаточное изучение вопроса, в котором рассматривается формирование математической культуры учащихся через решение алгебраических задач различными способами. Таким образом, актуальность исследования вытекает из **противоречия между** необходимостью формирования математической культуры обучающихся, которое обусловлено повышающимися требованиями к качеству образования выпускников школы, и недостаточной методической разработкой вопроса, обеспечивающего повышение уровня математической культуры обучающихся.

Проблема исследования заключается в выявлении возможностей решения алгебраических задач различными способами как средство формирования математической культуры обучающихся общеобразовательной школы.

Объект исследования: процесс обучения решению алгебраических задач в общеобразовательной школе.

Предмет исследования: способы решения алгебраических задач как средство формирования математической культуры обучающихся общеобразовательной школы.

Цель исследования: разработка методики обучения решению алгебраических задач различными способами как средство формирования математической культуры обучающихся общеобразовательной школы.

Гипотеза исследования: формирование математической культуры обучающихся будет более эффективным, если при решении алгебраических задач использовать следующие элементы математической культуры: вычислительные навыки, грамотную математическую речь, умение применять в жизни математические знания, творчество, интерес к предмету.

Проблема, предмет и гипотеза исследования определили следующие **задачи исследования**:

1. Рассмотреть понятие математической культуры обучающихся.
2. Рассмотреть понятие алгебраической задачи.
3. Рассмотреть классификацию алгебраических задач.
4. Рассмотреть опыт учителей по данной проблеме.
5. Провести анализ школьных учебников по математике на наличие различных способов решения алгебраических задач.
6. Разработать методику решения алгебраических задач различными способами при формировании математической культуры обучающихся.

7. Рассмотреть примеры алгебраических задач на формирование математической культуры.

8. Разработать элективный курс по математике на тему «Решение логарифмических и показательных уравнений и неравенств».

9. Раскрыть содержание и методику опытно-экспериментальной работы по теме исследования.

Теоретико-методологическую основу данного исследования составили работы О.В. Акулова [1], Л.В. Ворониной [10], Л.А. Гориной [12]. Г.В. Дорофеева [14], В.И. Крупича [26].

Базовыми для настоящего исследования явились также работы В.Ю. Шадрина [60], Х.Ш. Шахалиева [62], В.И. Петрова [50].

Для решения поставленных задач применялись следующие **методы исследования:** анализ психолого-педагогической, методической литературы по теме исследования; изучение и анализ состояния исследуемой проблемы в школьной практике; анализ собственного опыта работы в школе; педагогический эксперимент и обработка результатов эксперимента.

Основные этапы исследования:

– 1 семестр (2020-2021 учебный год): анализ ранее выполненных исследований по теме диссертации, анализ федеральных образовательных стандартов, нормативных документов, школьных образовательных и рабочих программ (на основе изучения научно-методической литературы и практики работы);

– 2 семестр (2020-2021 учебный год): определены теоретические и методические основы исследования по теме диссертации; рассмотрены различные подходы к формированию математической культуры обучающихся; проведен анализ данного понятия в современном образовании; изучено понятие алгебраической задачи и способы ее решения; проанализированы школьные учебники математики на предмет обучения решению алгебраических задач различными способами;

– 3 семестр (2021-2022 учебный год): подборка заданий и упражнений по формированию математической культуры обучающихся при решении алгебраических задач, разработка элективного курса «Решение алгебраических задач различными способами»;

– 4 семестр (2021-2022 учебный год): оформление диссертации, корректировка ранее представленного материала, уточнение аппарата исследования, описание результатов экспериментальной работы, формулирование выводов.

Опытно-экспериментальная база исследования: МБОУ СОШ № 21 Серовского городского округа Свердловской области.

Научная новизна исследования заключается в том, что в нем предложены методические рекомендации по формированию математической культуры при обучении решению алгебраических задач различными способами в средней общеобразовательной школе.

Теоретическая значимость исследования заключается в предложенной методике формирования математической культуры обучающихся при решении алгебраических задач различными способами в курсе математики общеобразовательной школы.

Практическая значимость исследования состоит в том, что разработанные методические рекомендации по формированию математической культуры обучающихся при решении алгебраических задач различными способами могут быть использованы учителями математики в их практической деятельности.

Достоверность и обоснованность результатов исследования обеспечивались сочетанием теоретических и практических методов исследования, анализом педагогической практики и личным опытом работы в общеобразовательной школе

Личное участие автора в организации и проведении исследования состоит в определении методических рекомендаций по формированию математической культуры обучающихся при решении алгебраических задач в

5-11 классах; разработке методики формирования математической культуры обучающихся при решении алгебраических задач различными способами и элективного курса по теме «Решение логарифмических и показательных уравнений и неравенств».

Апробация и внедрение результатов работы велись в течение всего исследования. Его результаты докладывались на следующей конференции: XXV Международной научной конференции «Информационное пространство современной науки» (Чебоксары, июнь 2022 г.).

По теме исследования имеются 2 публикации [23], [24].

Экспериментальная проверка предлагаемых методических рекомендаций была осуществлена в период производственной практики (научно-исследовательской работы) и преддипломной практики на базе кафедры высшей математики и математического образования Тольяттинского государственного университета и МБОУ СОШ № 21 Серовского городского округа Свердловской области.

На защиту выносятся:

– методические рекомендации по формированию математической культуры обучающихся при решении алгебраических задач различными способами в курсе математики 7-11 классов средней общеобразовательной школы;
– элективный курс «Решение логарифмических и показательных уравнений и неравенств» в курсе математики для обучающихся средней общеобразовательной школы.

Структура магистерской диссертации. Работа состоит из введения, двух глав, заключения, содержит 9 рисунков, 13 таблиц, список используемой литературы (67 источников). Основной текст работы изложен на 77 страницах.

Глава 1 Теоретические основы решения алгебраических задач различными способами как средство формирования математической культуры обучающихся общеобразовательной школы

1.1 Понятие математической культуры обучающихся

В настоящее время образование не стоит на месте. Происходят постоянные изменения. В последнее десятилетие дважды менялись и корректировались образовательные стандарты. При этом возникло множество проблем, одной из которых является формирование личности школьника, которая в будущем будет качественно работать по той профессии, которую он выбрал, а также способности к профессиональному росту во время трудовой деятельности.

Изучение научных трудов и исследований российских и зарубежных ученых по становлению математической культуры дают возможность выделить составляющие математической культуры. Но для этого надо иметь в виду, что математика является частью культуры человека.

В настоящее время однозначно описать понятие «культура» нельзя.

В.П. Зинченко [60] называет «культуру, как универсальный способ деятельности, как способ целостного освоения мира, против тех, кто считает, что лучше приобретать знания в традиционной форме в российском образовании. Итогом должно являться то, что образование должно быть непрерывно» [60].

В процессе изучения математики обучающиеся учатся логически рассуждать, совершенствуют общую культуру мышления. Математика развивает способность к систематизации, алгоритмизации, обобщению, размышлению, анализу, точности понятий, обоснованной критике.

Одним из условий решения вышеупомянутой проблемы является формирование у ученика математической культуры. Анализ психолого-педагогической литературы, посвященной теоретическим и прикладным аспектам проблемы формирования математической культуры школьников, позволил выделить основные теоретические положения нашего исследования [45].

При анализе научной литературы выяснилось, что приводятся различные определения понятия «математическая культура». Ее рассматривают как систему универсальных учебных действий, как совокупность общей и профессиональной культуры, как образование личности. Существует несколько подходов к рассмотрению понятия «математическая культура» [53].

Т.А. Иванова [22] описала гуманитаризацию математического образования, выявила основные ее компоненты и отразила принципы ее функционирования. Главным аспектом в представленной работе является психологическая структура личности и закономерности ее развития.

Х.Ш. Шихалиев [62] пишет: «Любые стандарты, относящиеся к математическому образованию, будут неполными, если в них не отражены требования к формированию математической культуры учащихся» [62]. Автор описывает понятие «математическая культура» в нескольких значениях. В каждом его значении математическая культура отражает общение между людьми и указывает на уровень развития человека.

Автор указывает, что понятие «математическая культура» не является полным и конечным. Согласно трудам Х. Ш. Шихалиева [62], «Математическая культура – это совокупность достижений человечества в его умениях пользоваться математическим языком в качестве средства как для общения с людьми, так и для описания и познания окружающей действительности; уровень, степень развития человечества в его умениях пользоваться математическим языком как для общения с людьми, так и для описания и познания окружающей действительности; осознанное пользование математическим языком как для общения с людьми, так и для описания и познания окружающей действительности» [62].

Е.Н. Рассоха [49] в своих трудах рассматривает математическую культуру как «совокупность следующих компонентов: систему математических знаний и умений, математическое мышление, математический язык, математическое самообразование и творческое саморазвитие» [52].

Г.М. Булдык [5] считает, что «Математическая культура – это знания, умения и навыки, которые сформированы в виде математической системы, и нужно научиться ими пользоваться в различных условиях, но в тоже время у них должны стоять свои цели и задачи [5].

Т.Г. Захарова [21] выделила основные компоненты математической культуры:

– человек должен уметь из всего разнообразия выделить математические ситуации;

– каждая личность должна обладать математическим мышлением и умением выделять все разнообразия средств математики;

– человек должен уметь проводить анализ, делать умозаключение, но при этом он должен быть готов к развитию [21].

Л.В. Воронина [10] в своих работах указывает на возрастные рамки. В рамках своих возрастных категориях математическая культура имеет свои особенности. Для успешной адаптации к различным процессам (например, информатизации общества) автор считает необходимым условием систематический и целенаправленный процесс получения человеком математической культуры [10].

Некоторые педагогические работники не совсем понимают, в чём заключается понятие «математическая культура», и считают, что данное понятие равносильно умению быстро делать в уме вычисления, быстро решать какую-либо математическую задачу, учить основные определения из учебника [63].

На основании вышеизложенного можно сделать вывод, что математическая культура – это большая система, в которую входит получение новых знаний, в том числе математических, в результате чего она должна изменить внутренних мир индивида и общества в целом.

«Исходя из содержания математического образования и характера образовательной деятельности обучающихся по овладению этим содержанием, к основным компонентам математической культуры можно отнести»:

– «когнитивно-компетентностный компонент как систему математических знаний, умений и навыков;

– креативный компонент как культуру творчества, культуру исследования, культур научного поиска;

– коммуникативный компонент как систему знаний и умений организации учебного взаимодействия;

– ценностно-мотивационный компонент как систему личностно-ориентированных ценностей, учебных мотивов и направленности личности;

– операциональный компонент как систему умственных операций и действий;

– рефлексивный компонент как систему умений, позволяющих субъектам обучения осознать и оценить степень сформированности у них всех компонентов математической культуры и успешности деятельности по ее формированию» [45].

В настоящее время существуют такие понятия, как математическая культура общества и личности. В.И. Снегурова [56] делит математическую культуру общества на два уровня: на простую математическую культуру общества и общую. «Под общей математической культурой можно понимать минимальную совокупность таких объектов, которые значимы и используются людьми постоянно, каким бы видом деятельности они ни занимались. Тогда математическая культура личности может быть определена как совокупность присвоенных им объектов общей математической культуры» [56].

Анализ педагогической и методической литературы показал, что можно выделить следующие элементы математической культуры:

– вычислительные навыки;

– грамотная математическая речь;

– умение применять в жизни математические знания;

– творчество;

– интерес к предмету.

Формирование данных элементов на уроках математики может осуществляться через разнообразие форм урочной и внеурочной деятельности. При обучении у школьников должна формироваться математическая культура, которая будет успешно реализована только при следующих условиях:

– «делать упор на метапредметные результаты обучения математике;

– способность обучающихся решать задачи по обобщенной форме;

– усилить значимость практико-ориентированных задач, которые в настоящее время включены в основной государственный экзамен;

– структурированное и целенаправленное формирование математических универсальных учебных действий обучающихся;

– постоянное повышение уровня самообразования в развитии математической культуры» [45].

Математическая культура является очень сложным понятием, которое удовлетворяет принципу системности, это означает, что у нее имеются множество компонентов разной сложности. Данные компоненты математической культуры обладают целостностью и системностью математической культуры [62].

Рассмотрим процесс формирования математической культуры за рубежом. При проведении анализа исследовательских работ зарубежных ученых можно выделить некоторые особенности. Так, например, в американских школах не уделяют особое внимание технологии получения математических фактов, основополагающим для них является применение на практике данного математического факта. А в странах азиатского региона, где уровень экономики достаточно развит, в учебниках математики математическая культура изучается достаточно детально и глубоко [9].

У британских школьников процесс обучения значительно отличается от других стран. Там в школу зачисляются с четырех лет и с того момента уже начинают заниматься математикой. Все занятия проходят исключительно в игровой форме: дети делят различные предметы, продукты питания, раскладывают кубики Lego. К шести годам они знают многие математические понятия, дроби, знают, что развернутый угол – 180 градусов, половина – 50 %, ½. Но так как обучение проходит в форме игры, то запоминание математических терминов происходит на практическом понимании [64].

При сравнении подходов к математическому образованию в США и Великобритании, можно увидеть существенные различия. Например, в США все задания стандартизированы и формализованы. В учебниках имеются все возможные варианты заданий, которые могут попасться на экзаменах. Поэтому при проведении итоговой аттестации все задания будут составляться исключительно из уже разобранных в учебных программах [67].

В британских школах упор ставится на расширение материала, курс намного шире, чем в российских школах, но это приводит к изучению программы довольно поверхностно, особенно для тех, кто выбрал базовую программу, а не углубленную. Обучающиеся сами выбирают уровень изучения математики с шестого класса [65]. Если выбрали базовый уровень, то обучение строится только по основным темам и простейшим задания, если же выбрали углубленный уровень, то данные обучающиеся очень активно участвует в олимпиадах. При обучении процесс устроен неформально, во время него происходит общение между преподавателем и учениками, что способствует социализации обучающихся [9].

В Китае, в основном, используется интерактивное обучение, в котором участвует весь класс. Данные занятия занимают больше половины урока. Часто объяснение материала происходит в игровой форме с применением межпредметных связей. В качестве примера можно привести следующий: сначала весь класс играет в шашки, а затем учитель достает географическую карту и начитает объяснять, чем похожа шахматная доска и координатная плоскость, рассказывает про систему GPS [66]. Для обучающихся, которые начинают изучать тригонометрию, учителя рисуют логотип МакДоналдса [9].

Основным преимуществом интерактивного метода в Китае является ускорение процесса обучения. При различных заданиях ученики поднимают карточки с ответами на вопрос. Если учитель видит, что ошибки допустило большое количество обучающихся, то данную тему он объясняет повторно. Но если неверно подняли карточки с ответами один или два ученика, то учитель просит родителей, чтобы взрослые позанимались сами с ребенком дома. Объем домашних заданий существенно снижен, иногда домашние задания могут не соответствовать пройденным темам. Например, сыграть на музыкальном инструменте или просто порисовать [67].

Сингапур на сегодняшний день – это одна из самых лучших стран по качеству образования. Рывок в экономике и образовании страна сделала за последние десятки лет, и многие страны изучают их процесс обучения. В Сингапуре активно используется эвристический подход: обучение идёт от частного к общему. Например, ученики решают множество задач не изучая теории, при этом приобретают личный опыт, на основании которого происходит обобщение и делаются выводы. При обучении в Сингапуре основной целью ставится совместная деятельность учителя и учеников. На уроках используется технологи проблемного обучения, ставятся всевозможные проблемы, ведется диалог, на основании которого тему урока узнают сами ученики, а не учитель. При этом, у учеников сингапурских школ хорошо развивается коммуникативность, критическое мышление и креативность, работа в группах или командах.

При обучении обучающиеся сидят по четыре человека. Это связано с тем, что дети работают в группах. Некоторые ученики становятся в данной группе учителями, при этом дети учатся слышать другого человека, исправлять ошибки друг друга, отстаивать свою точку зрения. Также данные обучающиеся не решают только примеры, они изучают их через различные виды задач, которые составлены на схемах, а иногда и на рисунках. На основании этого у обучающихся развивается логическое мышление [9].

Сформулируем основные позиции математической культуры, выстроив следующую иерархию, приведенную в таблице 1 [14].

Таблица 1 - Основные позиции математической культуры

Этап формирования	Математические умения
Уровень начального и основного общего образования	функциональная грамотность (на основе открытого банка заданий по функциональной грамотности); навык работы с алгоритмами, их построения; вычислительные навыки счета; предметный тезаурус: владение математическим языком; умение строить от руки с соблюдением размеров и пропорций; умение решать текстовые задачи; оперировать различными способами решения.
Уровень основного и среднего общего образования	умение переходить от теоретической к практической направленности; умение пользоваться классическими фактами истории математики.
Уровень среднего общего образования (в рамках профильного обучения)	пределы и предельные переходы; теория равносильности; элементы математического анализа другие умения, которые способствуют воспитанию математической культуры.

После проведенного анализа вышеуказанной литературы можно сделать выводы:

– в настоящее время математическое образование в России, как и все образование в целом, переживает реформы, меняются требования, содержание и планируемые результаты;

– математическое образование переходит на новый уровень, занимая особое место в обучении; математическая культура школьников становится самой главной задачей математического образования;

– в процессе обучения математике в школе ученика необходимо обучать не только образовательной деятельности, но и развивать его творческую личность, приглашая к участию в конкурсах, научно-практических конференциях, в исследовательской деятельности; главной особенностью становится практико-ориентированная направленность математического образования;

– при обучении курса математики предметное содержание федеральных образовательных стандартов должно происходить по уровням, чтобы учителя смогли научить обучающихся использовать полученные универсальные учебные действия при продолжении дальнейшего обучения в высших учебных заведениях, а после их окончания успешно реализовывали свой математический потенциал на практике.

Процесс образования человека можно определить формулой, которую вывел В.С. Библер [7]: «От знающего человека – к «человеку культуры»; математическое образование превращается в механизм развития его математической культуры». Так математическое образование в настоящее время нацелено на повышение математических знаний, которые в будущем помогут человеку социализироваться в обществе.

Международные ученые доказали, что математическая культура благоприятно действует на внимания обучающихся.

Иностранный ученый Д.Г. Денбел [61] в своих трудах приводил пример, что одной из форм математической культуры являются функции в математике. Он раскрыл основные проблемы, возникающие при решении алгебраических задач, в которых встречаются функции.

1.2 Алгебраические задачи в школьных учебниках математики

Определение «задача» в настоящее время понимается как какая-то проблемная ситуация или проблема, которую необходима решить. При изучении математики задачи сравнивают с понятиями, теоремами, выполнениями каких-либо алгоритмов и т.д. Задачи находятся на особом месте, так как обучающимся необходимо овладеть теоретическими знаниями, которые могут быть усвоены при решении определенных математических задач.

В школьном курсе математики и в основных образовательных программах задачи занимают практически самое главное место в содержании предмета. Для этого при обучении математики особое внимание нужно обратить именно на данный вопрос. Но при этом необходимо учитывать возраст обучающихся, на основании чего нужно выбирать формы обучения.

Л.Л. Гуров [3] дает следующее определение: «Задача – объект мыслительной деятельности, содержащий требования некоторого практического преобразования или ответа на теоретический вопрос посредством поиска условий, позволяющий раскрыть связи (отношения) между известными и неизвестными её элементами» [3].

Большинство ученых в своих исследованиях и работах рассматривают задачи как какую-либо систему, где обязательно должны присутствовать следующие компоненты:

- предмет задачи, находящийся в исходном состоянии;
- требования к задаче и необходимый ее предмет, т.е. требование.

Л.М. Фридман [59] рассматривает задачу как какую-то проблему или ситуацию, где требуется решить ее: «Генезис задачи можно рассматривать как моделирование проблемной ситуации, в какую попадает субъект в процессе своей деятельности, а саму задачу – как модель проблемной ситуации, выраженной с помощью знаков некоторого естественного или искусственного языка» [59].

Решение задачи может иметь несколько направлений:

- решение как план,
- решение как процесс,
- решение как результат.

Представим содержание обучения решению алгебраических задач различными способами 10-11 класса (таблица 2).

Таблица 2 – Содержания обучения решению алгебраических задач различными способами

Методы	Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин, М.В. Ткачёва и другие [2]	С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников и другие [50], [51]	Г.К. Муравин, О.В. Муравина [46], [47]
Метод подстановки	В теме «Показательные неравенства» используется метод подстановки в качестве метода решения. Метод подстановки рассматривается в теме «Логарифмические уравнения», данный метод используется в практических заданиях после теории	Используется в темах «Логарифмические уравнения и неравенства», «Тригонометрические уравнения и неравенства». Теоретически раскрывается метод с помощью примеров в параграфах. Затем отрабатывается метод практически в задачах после параграфов. Тема «Система уравнений с несколькими неизвестными», данному методу отводится целый параграф.	Тема «Решение тригонометрических уравнений», в параграфе рассматриваются примеры решения уравнений данным способом. В практической части много заданий на решение уравнений данным методом. Тема «Системы уравнений». Рассматривается метод подстановки и практические задачи содержат большое количество заданий на данный метод
Тригонометрическая подстановка	Не рассматривается	Используется в теме «Тригонометрическая форма комплексного числа». Приводится пример решения в теории параграфа, а также в решении практических заданий	Не рассматривается
Геометрический метод	Тема «Рациональные уравнения», рассматривается решение уравнений с помощью построения	Тема «Площадь криволинейной трапеции», применяется в решении практических задач.	Тема «Понятие корня n-й степени». Данный метод рассматривается в заданиях на нахождение приближенного значения корня n-й степени.

Продолжение таблицы 2

Методы	Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин, М.В. Ткачёва и другие [2]	С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников и другие [50], [51]	Г.К. Муравин, О.В. Муравина [46], [47]
	графиков функций. Тема «Показательные неравенства», одним из методов решения рассматривается геометрический метод.		используется в решении уравнений Тема «Непрерывность функции», геометрический метод
Методы решения алгебраических задач с параметрами	Не рассматривается	В теме «Уравнения, неравенства и системы с параметром» рассматривается функциональный метод решения, метод подбора	На данные методы отводится параграф, который называется «Задания с параметрами». Рассматриваемые методы решения: графический, метод подстановки

1.3 Классификация алгебраических задач как средство формирования математической культуры обучающихся

В настоящее время существует множество классификаций алгебраических задач. В таблице 3 приведена классификация алгебраических задач 10-11 класса.

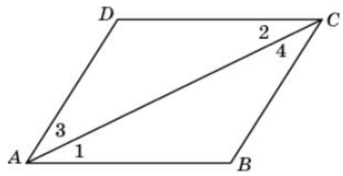
Таблица 3 – Классификация алгебраических задач

Наименование классификации	Описание	Примеры задач
По проблемности (классификация Ю.М. Колягина [25]	При анализе задачи практически всегда известны все компоненты задачи: условие, обоснование и заключение. Такой вид задач встречается при обучении теоретического материала.	1. Обучающиеся задачи (неизвестен всего один элемент) Задача 1. Решить квадратное уравнение $3x^2 + 5x - 2 = 0$ Задача 2. Мальчик решил квадратное уравнение, нашел его корни, но при этом применил

Продолжение таблицы 3

Наименование классификации	Описание	Примеры задач
	Он применяется для обратной связи ученика и учителя, чтобы можно было отследить уровень понимания.	теорему, которая обратна Виета. Поясните, можно ли так сделать? Задача 3. Мальчик решил квадратное уравнение, нашел его корни, но при этом применил теорему, которая обратна Виета. Поясните, можно ли так сделать? Задача 4. Ученик решил квадратное уравнение, разложив его на множители. Поясните, как можно было это сделать. 2. Поисковые задачи (неизвестны 2 компонента) Задача 1. Девочка ходит на внеурочную деятельность по математике. Списочный состав девочек на данном занятии 94 %. Какая наименьшая численность на данном курсе. 3. Проблемные задачи (неизвестны 2 компонента) Задача 1. Моторные лодки расположились на озере в точках X и У. Расстояние между ними 100 км. Лодки двигаются друг на встречу другу со скоростями 25 км/ч (лодка 1) и 30 км/ч (лодка 2) Какое время затратили они для их встречи в пункте Р
По структуре деятельности	В настоящее время структуры деятельности можно разделить на несколько видов: - репродуктивная; - продуктивная; -эвристическая.	Задача 1. Несколько групп учеников приехали на экскурсию в Санкт-Петербург. Чтобы группы не встречались, у каждого свои экскурсионные маршруты. Но место встречи должно быть одно через 5 часов. Вас выбрали старшей по группе и попросили составить план маршрута. Необходимо составить план, если на осмотр каждой достопримечательности вы должны находиться не более 11 минут, а время в пути составляет не более 3 минут между достопримечательностями.

Продолжение таблицы 3

Наименование классификации	Описание	Примеры задач
По математическому содержанию и методу решения	Зависят от того раздела, какой изучается в школьном курсе математики: алгебраические задачи; тригонометрические задачи; геометрические задачи и т.д.	Задача 1. Решите уравнение: $3+\cos 2x+3\sqrt{2}\cos x=0$ Задача 2. Найдите остаток при делении на 13 $12^{1231}+14^{4324}$
По характеру требований	Задачи на объяснение, построение, доказательство, вычисление и т.д.	Задача 1. Определить, при каких значениях а уравнение имеет решение $8=\mathrm{a}x-3a$ Задача2. В четырехугольнике *ABCD* ∠1 = ∠2 и ∠3 = ∠4. Докажите, что *AB* = *CD*. 
По специфике языка	текстовые, сюжетные, абстрактные.	Задача 1. Необходимо составить текст задачи о покупке канцелярских принадлежностей и суммы денежных средств. Задача 2. Моторные лодки расположились на озере в точках Х и У. Расстояние между ними 100 км. Лодки двигаются друг на встречу другу со скоростями 25 км/ч (лодка 1) и 30 км/ч (лодка 2) Какое время затратили они для их встречи в пункте Р.

1.4 Из опыта работы учителей по исследуемой проблеме

Г.Г. Левитас [42] обобщил опыт и представил способ решения текстовых задач алгебраическим способом. Автор в своей статье приводит примеры решения текстовых задач различными способами. Рассмотрим его пример. «У мальчика и у девочки вместе 12 конфет; у мальчика конфеты шоколадные и их на 2 меньше. Сколько конфет у мальчика и у девочки?»

При решении данной задачи, одним из методов можно рассмотреть алгебраический. На первом этапе необходимо перевести ее на формальный (математический) язык: $x + x + 2 = 12$.

Самая распространенная ошибка при решении алгебраическим методом это неверно составленная математическая запись.

При этом, Г.Г. Левитас в своих исследованиях приводит порядок решения задач:

– составить схему или картинку для уравнения;

– выбрать для неизвестных обозначения;

– оставить уравнение на математическом языке.

При решении задачи на конфеты, если у обучающихся возникают трудности, то можно составлять схему будущих уравнений.

На основании этого можно сделать вывод о том, что сложные формулировки текстовых задач легче переводится на математический язык.

Л.А. Сафонова [27] в своих исследованиях выделила основные этапы решения задач, которые представлены в таблице 4.

Таблица 4 – Основные этапы решения задач по Л.А. Сафоновой

Этап решения задачи	Необходимые действия
Анализ текста задачи	найти основные объекты задачи; понять основное условие и какой вопрос в данной задаче; выяснить, какие ситуации имеются в данной задаче.
Составления плана решения	установить зависимость величин; найти или составить основную формулу для решения задача (при необходимости вывести величину из формулы); выяснить, в каком предложении имеется зависимость величин.
Реализация составленного плана	перевести текстовую задачу на математический язык
Анализ решения	после получения ответа необходимо выполнить проверку полученного решения и записать правильный ответ.

Обучающимся необходимо понимать, что при алгебраическом методе необходимо правильно составить уравнение.

Для этого рассмотрим примеры различных задач:

– на рынке имеется 26 кг картофеля трех сортов. Картофеля 2 сорта 15 кг, это в 3 раза больше картофеля 1 сорта и на 9 кг больше картофеля III сорта;
– на рынке есть X кг картофеля 2 сорта, что на 9 кг больше картофеля 3 сорта и в 3 раза больше картофеля 1 сорта. А всего на рынке 26 кг картофеля всех сортов;
– на рынке имеется X кг картофеля 2 сорта, что в n раз больше картофеля 1 сорта и на k кг больше картофеля 3 сорта. Всего на рынке m кг картофеля все сортов.

Рассмотрим основные элективные курсы учителей по теме исследования.

У Е.Ю. Пушкаревой [54] имеется элективный курс «Решение алгебраических задач методом уравнений». В данном курсе приводятся решения основных задач, встречающиеся на государственной итоговой аттестации в 9 классе. Рассматриваются такие задачи, как задачи на движение, совместную работу и на сплавы и т.д.

У В.А. Ермеева [5] имеется курс «Графический метод решения задач на ЕГЭ». При изучении данной работы можно найти один из разделов «Методы решения уравнений с параметрами», который приводит примеры решения задач различными способами, а также имеется очень много заданий на нахождения параметров.

На основании вышеизложенного можно сделать вывод о том, что в данном параграфе рассмотрены основные вопросы решения алгебраических задач различными способами. Имеется много публикаций по теме исследования. Решение алгебраических задач различными способами вызывает большой интерес со стороны педагогического сообщества.

Выводы по первой главе

В первой главе рассмотрены различные подходы к формированию математической культуры обучающихся; сделан вывод о том, что процесс образования человека можно определить формулой, которую вывел В.С. Библер:

«от знающего человека – к человеку культуры, а математическое образование превращается в механизм развития его математической культуры» [55].

Математическое образование в настоящее время нацелено на повышение математических знаний человека, которые в будущем помогут человеку социализироваться в обществе.

Математическая культура является очень сложным понятием, которое удовлетворяет принципу системности. Это означает, что у нее имеется множество компонентов разной сложности. Данные компоненты математической культуры обладают целостностью и системностью.

В настоящее время математическое образование в России, как и все образование в целом, переживает реформы. Меняются требования, содержание и планируемые результаты. Математическое образование переходит на новый уровень, занимает особое место в обучении.

В процессе обучения математике в школе ученика необходимо обучать не только образовательной деятельности, но и развивать его творческую личность, предлагая участвовать в конкурсах, научно-практических конференциях, в исследовательской деятельности. Главной особенностью становится практико-ориентированная направленность математического образования.

Были проанализированы алгебраические задачи в школьных учебниках математики (Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин, М.В. Ткачёва и другие [2], С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников и другие [50], [51], Г.К.

Муравин, О.В. Муравина [46], [47] на предмет содержания обучения решению алгебраических задач различными способами.

Рассмотрены следующие методы решения задача: метод подстановки, тригонометрический и геометрический метод, метод решения алгебраических задач с параметрами.

Представлена классификация алгебраических задач (по проблемности, по структуре деятельности, по математическому содержанию и методу решения, по характеру требований, по специфике языка) с описанием каждой классификации и примерами задач.

Проанализирован опыт работы учителей при решении алгебраических задач различными способами. Рассмотрены элективные курсы по теме исследования.

Глава 2 Методические основы решения алгебраических задач различными способами как средство формирования математической культуры обучающихся общеобразовательной школы

2.1 Анализ учебников алгебры для обучающихся 5-11 классов по данной теме

В данном параграфе описываются основные учебники математики 5-6 классов, алгебры 7-9 класса, алгебры и начал математического анализа 10-11 класса согласно Федерального перечня учебников, допущенных Министерством просвещения Российской Федерации [58].

В таблице 5 представлено содержание учебников 5 класса по теме исследования.

Таблица 5 – Содержание учебников математики 5 класса

Учебники для обучающихся 5 класса		
Г.В. Дорофеев, Л.Г. Петерсон. Математика 5 класс [15], [19]	Г.К. Муравин, О.В. Муравина. Математика 5 класс [36], [41]	Е.А. Бунимович, Г.В. Дорофеев, С.Б. Суворова. Математика 5 класс [6]
Тема		
Составление математических моделей	Формулы и решение по ним уравнений	Задачи на различные виды движения движение
Тема		
Задачи на обыкновенные и десятичные дроби	Задачи на проценты	Отдельный раздел «Решение задач»
Тема		
-	-	Задачи на совместную работу

В учебниках Г.В. Дорофеева, Л.Г. Петерсон для 5 класса [15] имеются различные разновидности текстовых задач, которые можно решать различными способами, обучающиеся учатся составлять математические выражения, в рамках этого обучающиеся анализируют задачи, составляют численные и буквенные выражения. Можно сделать вывод, что это начальный этап решения алгебраических задач различными способами.

Во второй главе данного учебника, обучающиеся учатся составлять задачи на математическом языке, приводятся различные варианты оформления алгебраических задач, дается пояснение как можно со словесного описания задачи перевести ее на формальный (математический) язык. Приводится очень много примеров решения задач, после заием идут задания на составление математической записи или, наоборот, из математической записи составление условия задачи.

Самое большое разнообразие задач представлено в главе «Математический язык». По итогам изучения курса математики в 5 классе идет большой раздел «Повторение», где рассматривается решение задач различными способами.

В школьных учебниках по математике для 5 классов Г.К. Муравина, К.С. Муравина, О.В. Муравиной [36] также имеется множество текстовых задач. В основном это текстовые задачи на различные арифметические действия, составление алгебраических выражений. В середине учебного года обучающимся предлагают решение задач на движение (в противоположные стороны, навстречу друг другу, с отставанием и вдогонку).

Описанные задачи помогают обучающимся увидеть различия, данные задачи показывают, какое количество имеется задач на движение и позволяют обучающимся найти различия в них, правильно составить схемы и решать их. В 4 четверти данный учебник предлагает обучающимся изучить тему на составление формул и решения уравнений. Обучающимся даются различные формулы, где необходимо найти любое значение с помощью преобразования. Данные задачи необходимы, так как они включены в государственную итоговую аттестацию в форме основного государственного экзамена в 9 классе.

Ниже, в таблице 6, приведен анализ учебников по математике 6 класса.

Таблица 6 – Содержание учебников 6 класса по математике

Г.В. Дорофеев, Л.Г. Петерсон [16] учебник по математике для 6 класса	Г.К. Муравин, О.В. Муравина [29] учебник по математике для 6 класса	Е.А. Бунимович, Л.В. Кузнецова, С.С. Минаева [37] учебник по математике для 6 класса
Тема		
Задачи на различные виды движение по воде	Отношения и пропорции	Основные задачи на дроби
Тема		
Задачи на проценты	Пропорциональные величины	Что такое процент
Тема		
Решение задач с помощью пропорций	Решение уравнений	Что такое отношение
Тема		
Решение задач на проценты	«Главная» задача на проценты	
Тема		
-	-	Составление формул и вычисления по формулам
Тема		
-	-	Уравнения. Что такое уравнение.

В учебниках Г.В. Дорофеева, Л.Г. Петерсона для 6 класса [16], [29] уделяется особое внимание задачам. При решении возможно введение переменной, после чего необходимо составить уравнение. Имеется большой раздел, где необходимо решать уравнения. После изучения данной главы обучающимся предлагается решение задач с помощью уравнений.

При рассмотрении учебника авторов Г.К. Муравина, К.С. Муравина, О.В. Муравиной [16] можно отдельно выделить тему пропорции. Обучающимся предлагается совершенно новый способ решения задач, а также использование пропорций при рассмотрении задач на пропорции. После пропорций рассматривается раздел, где происходит решение уравнений. В рамках чего происходит преобразование текстового условия задачи на формальный (математический) язык.

При рассмотрении учебника авторов Е.А. Бунимовича, Л.В. Кузнецовой, С.С. Минаевой [37] можно выделить отдельным блоком задачи на десятичные дроби. В них происходит знакомство с процентами, отношениями, пропорциями. Также стоит обратить внимание на то, что авторы предлагают знакомство с буквенными выражениями, в рамках чего обучающиеся учатся составлять различные формулы. В завершении обучающимся предлагается решать различные варианты уравнений, после чего в учебнике даются задания на составление уравнений по условию задач и наоборот. В таблице 7 приводится содержание учебников 7 класса.

Таблица 7 – Содержание учебников 7 класса

Учебник для 7 классов Ю.Н. Макарычев, Н.Г.Миндюк, К.И. Нешков, С.Б. Суворова под ред. С.А. Теляковского [22]	Учебник для 7 классов Г.К. Муравин, О.В. Муравина [6]	Учебник для 7 классов Г.В. Дорофеев, С.Б. Суворова, Е.А. Бунимович [14]
Тема		
Решение задач с помощью уравнений	Математическая модель текстовой задачи	Задачи на проценты
Тема		
Линейное уравнение с двумя переменными	Решение уравнений	Пропорции. Решение задач с помощью пропорций
Тема		
Решение задач с помощью систем уравнений	Уравнения с двумя переменными и их системы	Алгебраический способ и способ решения задач с помощью уравнений
Тема		
Решение уравнений с одним неизвестным	Решение задач на пропорции	
Тема		
Уравнения с двумя переменными и их системы	Алгебраический способ решения задач Решение задач с помощью уравнений Решение задач с помощью уравнений	

В учебнике 7 класса авторов Ю.Н. Макарычева, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешкова, С.Б. Суворовой [7] алгебраические задачи рассматриваются при изучении линейных уравнений. В учебнике 7 класса авторов Г.К. Муравина, О.В. Муравиной [32] имеется параграф «Выражения», в которой происходит пояснение того, что, в основном, все задачи решались с помощью перевода на формальный (математический) язык с помощью составления выражений. После этого происходит объяснение сюжетных задач, которые встречаются в настоящее время кране редко. В рамках повторения в конце учебного года, авторы предлагают решение различных текстовых задач разными способами.

При рассмотрении учебника 8 класса авторов Г.В. Дорофеева, С.Б. Суворовой, Е.А. Бунимович [40] приводится алгебраический способ решения задач, после чего дается множества линейных уравнений. После закрепления данной темы авторы учебника рассматривают решение задач с помощью уравнений, приводят примеры, как обозначить переменную в различных текстовых задачах. После изучения темы «Многочлены» рассматривается решение задач с помощью схем и картинок. В таблице 8 представлено содержание учебников по алгебре для 8 класса.

Таблица 8 – Содержание учебников 8 класса по алгебре

Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, С.Б. Суворова учебник алгебры для 8 класса [30]	Г.К. Муравин, О.В. Муравина [38] учебник алгебры для 8 класса	Г.В. Дорофеев, С.Б. Суворова, Е.А. Бунимович [17] учебник алгебры для 8 класса
Тема		
Решение задач с помощью квадратных уравнений	Дробные уравнения с одной переменной	Решение уравнений и задач
Тема		
Решение задач с помощью рациональных уравнений	Прямая и обратная пропорциональность величин	Решение задач (в теме «Квадратные уравнения»)
Тема		
Задачи, приводящие к квадратным уравнениям	Линейное уравнение с двумя переменными	
Тема		
Решение задач с помощью систем уравнений	Решение задач с помощью систем уравнений	

В учебниках Ю.Н. Макарычева, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешкова, С.Б. Суворовой [30] алгебраические задачи встречаются в каждой главе, особое внимание уделяется задачам при решении квадратных и рациональных уравнений.

Авторы Г.К. Муравин, О.В. Муравина [38] рассматривают задачи при изучении дробных уравнений, пропорциональная зависимость, задачи к квадратным уравнениям, задачи, способом решения которых является система уравнений. В учебнике имеется практикум по решению задач. В данном разделе происходит рассмотрение задач на движение и совместную работу, которые выходят на государственную итоговую аттестацию во второй части основного государственного экзамена, имеется описание как решить данные задачи и как получить ответ.

В алгебре 8 класса авторов Г.В. Дорофеева, С.Б. Суворовой, Е.А. Бунимович [17] рассматривается решение задач алгебраическим способом, например, на концентрацию. Данные задачи выходят на государственную итоговую аттестацию во второй части основного государственного экзамена. Также рассматриваются задачи, решение которых осуществляются с помощью квадратных уравнений. В таблице 9 представлено содержание учебников 9 класса по алгебре

Таблица 9 – Содержание учебников по алгебре 9 класса

Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, С.Б. Суворова [31] учебник по алгебре для 9 класса	Г.К. Муравин, О.В. Муравина [39] учебник по алгебре для 9 класса	Г.В. Дорофеев, С.Б. Суворова, Е.А. Бунимович [18] учебник по алгебре для 9 класса
Тема		
Решение задач с помощью систем уравнений второй, степени	Границы значений величин	Решение задач (в теме «Уравнения и системы уравнений», после рассмотрения различных уравнений)
Тема		
	Неравенства с одной переменной и их системы	Решение задач (в главе «Уравнения и системы уравнений»)

В учебнике алгебры 9 класса авторов Ю.Н. Макарычева, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешкова, С.Б. Суворовой [31] алгебраические задачи практически не рассматриваются.

Имеются только задачи, которые можно решить с помощью систем уравнений второй степени. В учебнике Г.К. Муравина, О.В. Муравиной [39] рассматриваются задачи при изучении темы границ значений величин и неравенств с одной переменной.

Авторы учебника для 9 класса Г.В. Дорофеев, С.Б. Суворова, Е.А. Бунимович [18] делают уклон на вторую часть основного государственного экзамена в 9 классе (уравнения и системы уравнений с одной и двумя переменными)

В 10-11 классах проведен анализ учебников алгебры и начала математического анализа следующих авторов: А.Г. Мордковича [35], А.Г. Мерзляка, Д.А. Номировского, В.Б. Полонского, М.С. Якира [33], [34], Г.К. Муравина, К.С. Муравина и О.В. Муравиной [43], [44], С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин [47], [48].

При анализе учебников было выявлено, что, в основном, авторы имеют одинаковую концепцию, в которых рассматриваются различные функции, степени и корни, показательные и логарифмические уравнения, тригонометрические функции, производные, интегралы и уравнения и неравенства с двумя переменными.

В учебниках имеется много различных заданий с алгебраическими задачами, которые можно решить различными способами.

На основании вышеизложенного, можно сделать вывод о том, что при решении алгебраических задач, обучающиеся познают действительность, у них формируется математическая культура, а также универсальные учебные действия в соответствии с ФГОС культура.

2.2 Методика решения алгебраических задач на формирование математической культуры

При решении алгебраических задач можно сделать вывод о том, что это сложная деятельность, которая делится на более маленькие операции. Поэтому у обучающихся необходимо развивать данное умение, т.е. разбивать одну большую задачу на действия. При этом у школьников возникают определенные проблемы, самой главной проблемой можно выделить умение анализировать задачи, при этом создавая ее схему.

Л.М. Фридман [60] в своих исследованиях выделил основные этапы при решении алгебраических задач, изображенных на рисунке 1.

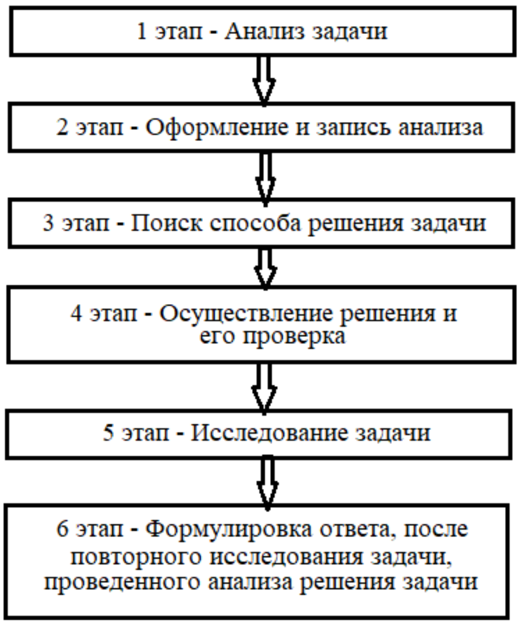


Рисунок 1 – Этапы решения алгебраических задач

Е.И. Лященко [29] выделила основные четыре этапа при решении алгебраических задач:

Знакомство с задачей.

Основными способами восприятия задач являются: чтение задачи вслух и «про себя», в конце чтения учитель задает вопросы обучающимся, математический диктант, анализ готовой схемы.

На данном этапе, обучающиеся начинают решать задачи с анализа текста задачи. После чего происходит запись текста в виде схемы или таблицы. Запись должна быть краткой, отражающей основную суть задачи. При этом учитель использует различные приемы, например, проводится аналитико-синтетический метод. После чего обучающиеся должны сделать вывод о том, имеются ли все исходные данные для решения задачи или требуется сделать какие-либо дополнительные преобразования и решения, чтобы решать данную задачу.

Составление плана.

Перед началом решения задачи необходимо составить план ее решения. План будет зависеть от способа решения. Например, если это арифметическое решение, то необходимо описать действия с пояснениями. Но при решении другим способом, например алгебраическим, необходимо выбрать, что будет являться величиной неизвестной, например Х, после чего выразить через нее остальные величины, провести анализ взаимосвязи данных величин между собой и в конце плана составить уравнение.

Реализация составленного плана.

В основном при решении алгебраических задач используется арифметический и алгебраический способ, поэтому и решение одной задачи будет отличаться.

Одним из основных способов решения задачи можно рассмотреть алгебраический. При данном решении обучающимся необходимо составить уравнения, при этом учитель должен указать, что можно составлять различные виды уравнений с одним условием задачи. Поэтому при дальнейшем обучении, обучающиеся смогут составлять не один вид уравнений, а несколько. Использование нескольких способов решения задач алгебраическим способом одной задачи, помогает найти оптимальный вариант решения, а также сравнить результат.

Проверка ответа и решения математических задач.

Данный этап очень важен при решении алгебраических задач.

Необходимо научить обучающихся после каждой решенной задачи делать проверку. На данном этапе учитель должен научить школьников различным способам проверки, например, решить другими способами, проверить, может ли данный ответ быть решением задачи и удовлетворяет ли он условию.

При рассмотрении методики решения задач, М.Б. Волович [11] выделил следующие пункты, изображенных на рисунке 2.

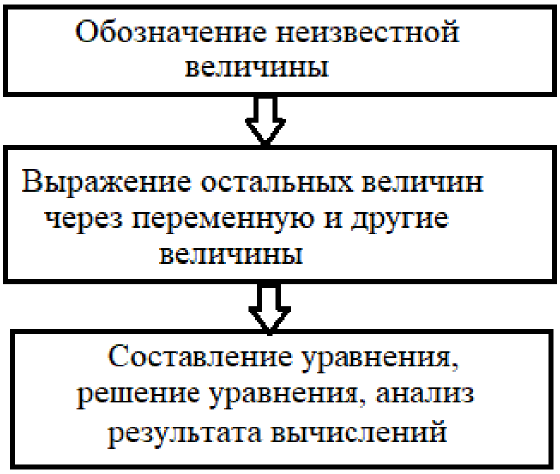


Рисунок 2 – Основные этапы решения алгебраических задач М.Б. Воловича

А.Д. Нахман [46] описал основные пункты решения математических задач, изображенных на рисунке 3.

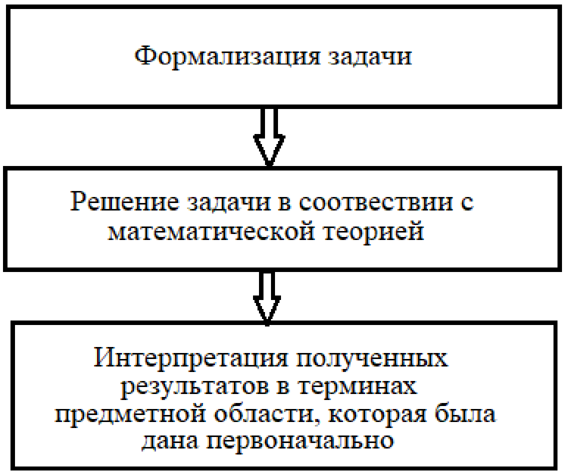


Рисунок 3 – Основные этапы решения алгебраических задач А.Д. Нахмана

Авторы Т.Е. Демидова и А.П. Тонких [13] в своих исследованиях обобщили основные способы проверки решенных задач, которые представлены на рисунке 4. При этом нужно, чтобы учитель научил обучающихся основным способам проверок.

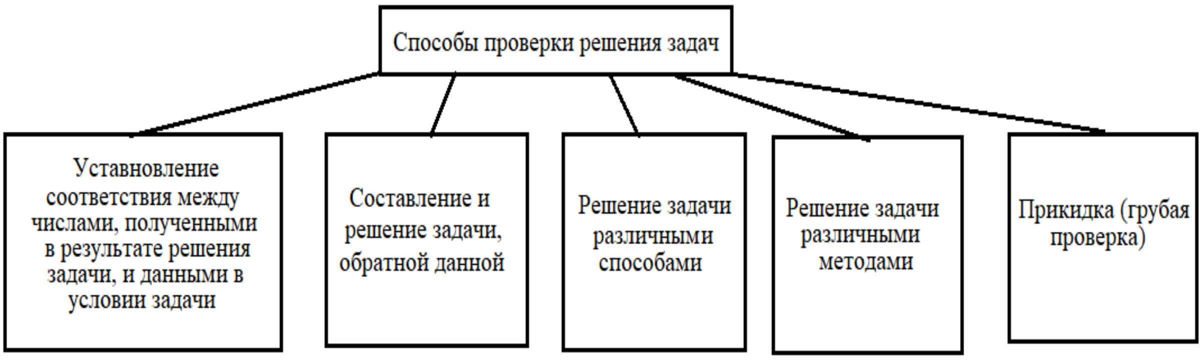


Рисунок 4 – Основные способы проверки решенных алгебраических задач

Автор В.И. Мишин [4] выделяет основные формы записи условий, которые изображены на рисунке 5.

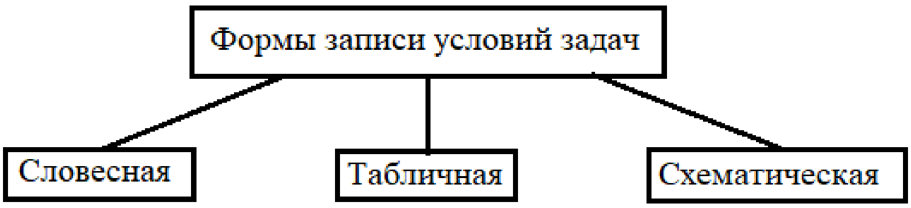


Рисунок 5 – Основные формы записи условия алгебраических задач

Основным критерием записи условия алгебраических задач является краткость и наглядность.

Анализируя различные методики решения алгебраических задач, можно сделать вывод о том, что необходимо развивать у обучающихся универсальные учебные действия, а также рассматривать реальные, а не абстрактные задачи, решение которых поможет применять их в жизни и быту.

Во время решения алгебраических задач способами, описанными в данном параграфе, у обучающихся сформируются вычислительные навыки. Они научатся решать текстовые задачи, применять в жизни математические знания и умения, уметь переходить от теоретической к практической направленности. У обучающихся будет проявляться интерес к математике как предмету в школе, что будет способствовать творческому развитию личности обучающегося.

2.3 Примеры алгебраических задач на формирование математической культуры

Обобщая исследования М.Р. Леонтьевой и С.Б. Суворовой [28] можно сформулировать требования к алгебраическим задачам:

– обучающиеся должны принимать участие в нахождении приемов решения;

– при разработке системы упражнений должно происходить усложнение задач;

– задачи должны быть комплексными, чтобы обучающиеся смогли определить к какому конкретному типу задач они используются.

Задача на части.

Задача 1. Мама решила купить детям альбомы в количестве 270 штук. Сколько альбомов купит она сыну и дочери, если известно, что что сыну она купит в 4 раза больше альбомов, чем дочери?

Решение. Примем за x количество альбомом у дочери, тогда составим уравнение $x + 4x = 270$.

Решим данное уравнение: $5x = 270$; $x = 270:5$; $x = 54 -$ столько альбомов у дочери. $4\text{х} = 4 * 5 = 216 -$ альбомов у сына. Проведем проверку: 216+54=270 альбомов. Ответ: 216 альбомов у сына и 54 альбома у дочери.

Задача на пропорции.

Задача 2. Из 21 кг оливок получили 5,1 кг оливкового масла. Сколько оливкового масла можно из 7 кг оливок?

Решение. Составим краткую запись: Пусть из 7 кг оливок получится x кг оливкового масла, тогда массу семян (кг), необходимую для получения 1 кг оливкового масла, можно найти: Разделить 21 на 5,1 или разделить 7 на x. Приравняв, получим пропорцию $\frac{21}{5,1} = \frac{7}{x}$. Получаем x=1,7.

Значит, из 7 кг оливок получится 1,7 кг масла. Ответ: 1,7 кг.

Задача на движение.

Задача 3. Расстояние между городом А и населенным пунктом В, равно 170 км, грузовой автомобиль проехал за 5 часов. Первые 2 часа он ехал со скоростью на 10 км/ч большей, чем скорость на оставшейся части пути. Определите скорости на первой и второй части пути.

Решение.

Пусть x – скорость грузового автомобиля на втором участке пути, тогда скорость грузового автомобиля на первом участке пути (x+10). На весь путь грузовой автомобиль затратил 5 часов, значит на втором участке затраченное время 2 часа, соответственно длина второго участка 3x.

Расстояние между двумя населенными пунктами находится суммой первого участка и второго: 2(x+10)+3x, по условию эта сумма равна 170 км.

Составим уравнение: 2(x+10)+3x= 170

2x+20+3x=170

5x=150

x=30.

Значит скорость грузового автомобиля на втором участке 30 км/ч., соответственно скорость на первом участке 30+10=40 км/ч.

Ответ: скорость на первом участке 40 км/ч, на втором участке 30 км/ч.

Задача на работу.

Задача 4. 6 машинисток печатают текст на 4 дня раньше, чем 4 машинистки. За сколько дней напечатают данный текст 6 машинисток?

Решение. Составим краткую запись

4 машинисток - ?

6 машинисток - ?, на 4 дня меньше, чем 4 машинистки

4 машинистки	(х+4) дня
6 машинисток	х дней

Составим уравнение: $\frac{6}{4} = \frac{x+4}{x}$

3х=2(х+4), х=8

Ответ: шестеро машинисток напечатают текст за 8 дней.

Задача на проценты.

Задача 5. В классе из 40 человек, из них 32 ходя на внеурочную деятельность по математике. Сколько процентов человек ходят на внеурочную деятельность?

Решение. 40 человек – 100%

32 человека – ?%

1 способ. Найдем 1%:

$$\frac{40}{100} = 0{,}4 - \text{составляет } 1\%$$

$$\frac{32}{0{,}4} = 80\ \%$$

2 способ. Составим уравнение:

Пусть х человек ходят на внеурочную деятельность по математике. 1% составляет: $\frac{40}{100} = 0{,}4$, а х процентов 0,4х обучающихся. Значит 0,4х=32; х=32:0,4; х=80.

Ответ: 80% человек посещают на внеурочную деятельность.

Задача на покупку и продажу.

Задача 6. Если бы Маша купила 11 карандашей, то у него осталось бы 5 рублей, а на 15 карандашей у него не хватало бы 7 рублей. Сколько денег было у Маши?

Решение.

Пусть х - стоимость карандашей, тогда

$$11x + 5 = 15x - 7; 4x = 12; x = 3$$

Значит один карандаш стоит 3 рубля. Посчитаем, сколько Маша потратила денег на 11 тетрадей: 11*3=33 тетради.

У Маши осталось 5 рублей, соответственно 33+5=38 рублей

Ответ: 38 рублей было у Маши.

Далее рассмотрим задачи для обучающихся 7-9 класса.

Задача на смеси, сплавы и концентрацию.

Задача 7. Имеются слитка, содержание свинца в одном 64%, в другом 84%. При взвешивании слиток полученного сплава получился результат 50 г, который содержит 76% свинца. Сколько весил каждый слиток?

Решение: Пусть x весит первый слиток, а y второй слиток. Тогда

$\frac{x*64\%}{100\%} = 0{,}64x$ – свинца в первом слитке;

$\frac{x*84\%}{100\%} = 0{,}84x$ – свинца во втором слитке.

$\frac{50*76\%}{100\%} = 38$ г – свинца в сплаве.

Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} x + y = 50 \\ 0{,}64x + 0{,}84\, y = 38 \end{cases}$$

Решая систему, получаем x=20, y=30.

Ответ: Первый слиток весил 20 г, второй 30 г.

Задача на движение

Задача 8. Из первого города во второй город выехал мотоциклист со скоростью 80 км/ч. Через определенное время поехал автомобиль, совершив 20 минутную остановку между населенными пунктами поехал обратно с той же скоростью. Спустя 48 км он встретил мотоциклиста, который ехал на встречу ему и был на расстоянии 120 км от второго города, когда во второй город прибыл мотоциклист. Найдите расстояние от первого года до места первой встречи автомобиля и мотоцикла расстояние между городами 480 км.

Решение. Расстояние между первым городом и первой встречи мотоцикла и автомобиля обозначим за S. А скорость автомобиля V км/ч. Соответственно, 72 км автомобиль пройдет за одинаковое время, которое понадобится мотоциклу, что проехать 48 км.

Значит, $\frac{72}{v} = \frac{48}{80}$

V=120 км/ч.

От встречи до второго горда мотоциклу останется проехать (480-s)км со скоростью 80 км/ч. Время $\frac{480-s}{80}$ ч.

За это время автомобиль проехал от места встречи до второго города, потратив 1/3 часа на стоянку и $\frac{120}{v}$, чтобы отъехать от второго города на 120 км.

Составим уравнение: $\frac{480-s}{80} = \frac{480-s}{v} + \frac{1}{3} + \frac{120}{v}$, решаем и находим s=160 км.

Ответ: Расстояние 160 км.

Задача на работу.

Задача 9. При изготовлении 21 кружки первый рабочий затрачивает на 4 часа меньше, чем второй рабочий на изготовление 35 таких же кружек. Известно, что первый рабочий за час делает на 2 кружки больше, чем второй. Сколько кружек в час делает второй рабочий?

Решение. Пусть x кружек/ч делает второй рабочий.

Составим уравнение: $\frac{35}{x} - \frac{21}{x+2} = 4;$ $\frac{35\cdot(x+2)-21\cdot x}{x(x+2)} = 4;$ $14x + 70 = 4x^2 + 8x;$ $4x^2 - 6x - 70 = 0;$ $x = -3.5$ и $x = 5$

Значит, второй рабочий делает 5 кружек/ч.

Ответ: 5 кружек/ч.

Задача на покупку и продажу.

Задача 10. Несколько человек решили купить букет цветов ценой от 170 до 195 рублей. При покупке выяснилось, что 2 человека не хотят покупать цветы, следовательно каждому из оставшихся пришлось внести на 1 рубль больше. Сколько стоил букет цветов?

Решение. Пусть x – стоимость цветов, y – число человек. Тогда каждый человек затратил $\frac{x}{y-2}$ рубля, а предполагалось $\frac{x}{y}$ рублей, что на рубль меньше.

Составим уравнение $\frac{x}{y-2}-\frac{x}{y}=1$. Выразим y через x, решив квадратное уравнение. $\left[\begin{array}{l} y=1+\sqrt{1+2x} \\ y=1-\sqrt{1+2x} \end{array}\right.$; Второе число не удовлетворяет условию, так как число человек – натуральное число.

С другой стороны, так как $170<x<195$, то для y получаем

$$1+\sqrt{341}<y<1+\sqrt{391}$$

В этих пределах находится одно число y=20.

Таким образом, первоначальное число человек оставило 20, а участвовали в покупке 18, при этом цветы стоили 180 рублей.

Ответ: Букет цветов стоил 180 рублей.

Задача на части.

Задача 11. Оля и Маша поделили 39 конфет между собой. Число конфет, доставшихся любому из них, меньше удвоенного числа конфет, доставшихся другому. Квадрат трети числа конфет, доставшихся Маше, меньше числа конфет, доставшихся Оле. Сколько конфет у каждого?

Решение. Пусть x – количество конфет у Оли, а y – у Маши. Составим систему уравнений

$$\begin{cases} x+y=39 \\ x<2y \\ y<2x \\ \frac{y^2}{9}<x \end{cases}$$

Решим первое уравнение: $x=39-y$, подставим в неравенство вместо x полученное выражение

$$\begin{cases} 39-y<2y \\ y<78-2y \\ \frac{y^2}{9}<39-y \end{cases}$$

Решая первые два неравенства получим $y>13, y<26$.

Получаем уравнение вида $y^2+9y-351<0$

При решении квадратного неравенства получаем, y=14, подставим в наше неравенство, получим x=25.

Ответ: 25 конфет у Оли, 14 конфет у Маши.

Далее рассмотрим задачи для обучающихся 10-11 класса.

Задача 12. Пароход прошел против течения реки 112 км, вернулся обратно затратив на 6 часов меньше. Найти скорость течения, если собственная скорость катера 11 км/ч.

Решение:

Пусть x – скорость течения реки, тогда 11+x – скорость катера по течению, а против течения 11-x, составим уравнение

$$\frac{112}{11-x}-\frac{112}{11+x}=6;\ \frac{224x}{(11-x)(11+x)}=6;\ \frac{112x}{121-x^2}=3$$

$$3x^2+112x-363=0$$

Решая квадратное уравнение получаем корни $x_1=3$, $x_2=-121/3$

Ответ: Скорость течения реки 3 км/ч.

В данном параграфе были представлены 12 алгебраических задач, которые решались различными способами. Данные задачи могут использоваться для промежуточной аттестации.

Представим самостоятельную работу для обучающихся 7 класса, которая состоит из 3-х заданий. На работу отводится 25 минут от урока.

Целью данной самостоятельной работы будет являться проверка сформированности знаний, умений и навыков данной темы. При решении задач можно отследить как обучающиеся освоили правила оформления краткой записи, а также выстраивания логики решения задач. На основании данных выводов можно выявить, как сформировалась математическая культура у обучающихся, смогут ли они в дальнейшем применять полученные знания на практике.

Задача 13. Из одного населенного пункта в другой автомобиль ехал по дороге со скоростью 14 км/ч, а обратно - 10 км/ч по грунтовой дороге, которая была длиннее на 2 км. Какой путь проехал автомобиль по дороге и грунтовой дороге, если на весь путь он затратил 4 ч?

Задача 14. Аня читала книгу 2 дня, после чего ее брат сал тоже читать такую же книгу. Закончили читать одновременно. Брат читал в день 7 страниц, а Аня – 3 страницы. Сколько страниц в книге?

Задача 15. На рынке имеется 2 мешка с муки одинаковой массы и 3 мешка с фасолью. Масса 5 мешков 160 кг. Муки продали 20%, а фасоли 35 % , после этого масса стала 125 кг. Сколько килограммов муки и фасоли было в каждом мешке изначально?

Г.М. Булдык [5] считает, что «Математическая культура – это знания, умения и навыки, которые сформированы в виде математической системы, и нужно научиться ими пользоваться в различных условиях, но в тоже время у них должны стоять свои цели и задачи [5]. Поэтому приведенные задачи можно считать одним из способов формирования математической культуры у обучающихся, так как при решении вышеупомянутых задач формируются необходимые знания, умения и навыки, которые оформлены в виде системы, представленной при рассмотрении множества задач. При решении задач у обучающихся формируется навык работы с алгоритмами, они обучаются оперировать различными способами решения задач, учатся переходить от теоретической к практической направленности. Также можно сделать вывод о том, что обучающиеся умеют различать виды представленных задач, грамотно и четко излагать ход их решения, приходить к правильному ответу, во время решения излагать свои мысли грамотным математическим языком, проявлять творчество и интерес к математике. По результатам можно судить о сформированности математической культуры.

2.4. Элективный курс по математике «Решение логарифмических и показательных уравнений и неравенств»

Пояснительная записка

При введении федеральных государственных образовательных стандартах били изменены требования к самому образованию, его качеству.

Стали предъявляться совершенно другие требования к результатам обучения. Началась активная фаза профилизации образования, на основании чего возникла необходимость для разработки данного элективного курса. Чтобы обучающиеся расширили свой кругозор, в совершенстве освоили тему логарифмических уравнений и неравенств, показательных уравнений и неравенств, при проведении государственной итоговой аттестации успешно решали данные задания.

Логарифмические и показательные уравнения и неравенства – тема, которая входит в содержание стандарта среднего общего образования, при этом обучающиеся испытывают трудности при решении данного вида заданий в рамках единого государственного экзамена. При определении дальнейшего пути своего развития, обучения в высших учебных заведениях данный разделе математики закладывает базу знаний, которую успешно применяют на практике.

Также при разработке данного курса были учтены ошибки**,** которые допускают обучающиеся при решении, и сложности, возникающие при реализации программы по математике**:**

– обучающиеся плохо оперируют свойствами логарифма;

– при решении какие-либо задач не достаточно использовать свойства функций, нужно расширять кругозор;

– у некоторых обучающихся отсутствует умения производить алгебраические преобразования;

– в учебном плане и рабочих программах предусмотрено небольшое количество часов на изучение данных тем, поэтому они рассматриваются поверхностно, без углубления;

– в учебниках, которые допущены к реализации образовательных программ, имеются не все разновидности заданий, которые могли бы выходить на государственную итоговую аттестацию.

Актуальность данного элективного курса объясняется расхождением планируемых результатов на уровне среднего общего образования и теми требованиями, которые предъявляются ВУЗами.

Курс разработан как для обучающихся 10 класса, так и для 11 класса.

Цели элективного курса:

– обобщить знания, которые были получены при изучении в курсе алгебры и началам математического анализа;

– рассмотреть различные варианты заданий по данной теме.

Задачи курса:

– систематизация знаний, полученных ранее;

– углубленное изучение тем школьной программы;

– осознанный выбор профиля в средней школе.

При реализации данной программы элективного курса используются следующие формы обучения: практикумы, семинары, исследовательские проекты (индивидуальные и групповые). При реализации программы, в основном, используется технологии проблемного обучения.

Планируемые результаты данного элективного курса.

– решение различных уравнений и неравенств на углубленным уровне;

– использовать рациональные способы решений логарифмических и показательных уравнений и неравенст;.

– применять полученные знания до этого при решении сложных заданий;

– получить максимальный балл на едином государственном экзамене по данным заданиям;

– проводить самооценку своих результатов.

Элективный курс рассчитан на 14 часов в 10 классе. В таблице 10 приведено тематическое планирование элективного курса, рассчитанного на 14 часов.

Таблица 10 - Тематическое планирование

Содержание	Кол-во часов
Введение	1
Логарифмические и показательные уравнения и неравенства	1
Способы решения показательных и логарифмических уравнений и неравенств: метод мажорант;	2
использование различных свойств функций;	2
использование метода рационализации;	2
метод интервалов.	2
Виды логарифмических и показательных уравнений в рамках ЕГЭ	3
Итоговое повторение	1
ИТОГО	14

Приведем примеры занятий к элективному курсу.

Тема 1. Введение

Цель урока: закрепить полученные знания на уроках математики (понятие логарифм, основное логарифмическое тождество, свойства логарифмов).

Тип занятия: повторение.

Ход занятия (40 минут)

Организационный момент (2 минуты)

Актуализация знаний (3 минуты)

Учитель задает вопрос «Что такое логарифм?». Определяет их важность при изучении курса математики в 10 классе.

Повторение ранее изученного материала (5 минут)

Учитель проводит опрос:

Что такое степень, основание и показатель степени?

Рассмотрение основных свойств степеней, которые были изучены ранее. $a^x . a^y = a^{x+y}, a^x : a^y = a^{x-y}, (a^x)^y = a^{xy}, a^0 = 1, a^{-x} = \frac{1}{a^x}$, $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{m}{n}}$

Решают примеры в уме:

$а)\ (1/25)^{-1/2};\ \ б)\ 49^{-0,5};\ \ в)\ 8^{-2/3};\ \ г)\ (1/8)^{-1/3}\ \ д)\ 64^{-1/4}.$

Изучение нового материала (20 минут)

План.

Логарифм числа и их свойства.

Основное логарифмическое тождество.

Формула перехода одного основания логарифмов к другому.

Десятичный и натуральный логарифмы.

Логарифм числа

При изучении логарифмов необходимо помнить решение показательных уравнений.

Рассмотрим решение нескольких показательных уравнений. Рассмотрим пример уравнения $2^{x} = 64$, решить его можно очень быстро. При преобразовании получаем $2^{x} = 2^{6}$, соответственно x=6.

А если рассмотреть случай, когда $2^{x} = 6$. Решить предыдущим способом и получить натуральное число не получится, при решении будет иррациональное число. Для этого рассмотрим доказательство x $= \frac{m}{n}, n$ и $m -$ натуральные числа. Значит, можно сделать равенство $2^{\frac{m}{m}} = 6$ или $2^{m} = 6^{n}$. При этом возникает противоречие, что 2 в любой степени будет всегда четное, в 6 в любой степени наоборот, нечетное, на основании которого и можно сделать вывод, что это число иррациональное. Поэтому при решении данного примера и ввели понятие – логарифм. Заменим запись $2^{x} = 6$ на x $= \log_{2} 6$.

Если рассматривать определение логарифма, то можно остановиться на таком примере, когда известно, что $a^{x} = b\ (a > 0? a \neq 1, b > 0)$, для этого нужно найти показатель степени x, т.е. нужно решить алгебраическую задачу, обратную возведению числа в степень. В результате чего и получается понятие логарифма.

Введение понятия основного логарифмического тождества

При рассмотрении логарифма обаятельно нужно вспомнить основное тригонометрическое тождество:

$a^{\log_a b} = b$ (где $b > 0$, $a > 0$ и $a \neq 1$)

Рассмотрим пример $2^{\log_2 8} = 8$. При этом, если рассмотреть $\log_2 8 = 3$, то это является корнем данного уравнения 2^x=8, на основании этого можно сделать вывод о том, что $2^{\log_2 8} = 8$. Поэтому мы получили основное логарифмическое тождество.

$a^{\log_a b} = b,$ где $a \neq 0, b > 0$.

Рассмотрим примеры согласно вышеуказанного тождества:

$2^{\log_2 3} = 3,\ 5^{\log_5 10} = 10,\ 10^{\log_{10} 0{,}4} = 0{,}4$;

$3^{\log_3 5}$=5; $2^{\log_2 0{,}7} 0{,}7;\ 3^{\log_3 7} = 7;\ 10^{\log_{10} 0{,}4} = 0{,}4$.

Основные свойства логарифмов

Рассмотрим основные свойства логарифмов, они вам уже знакомы, и х можно понять из определения логарифмов.

При любом $a > 0\ (a \neq 1)$ и любых положительных х и у выполнены равенства:

$$\log_a 1 = 0.$$

$$\log_a a = 1.$$

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_a x^p = p \log_a x \log_a x$$

для любого действительного р.

Рассмотрим примеры. Найти х

$$\log_5 x = 0,\ x=1$$

$$\log_{0,3} x = 1,\ x=0{,}3$$

$$\log_2 x = 1,\ x=2$$

$$\log_{0,5} x = 1,\ x=0{,}5$$

$$\lg_, x = 1,\ x=10.$$

Десятичные и натуральные логарифмы

Давайте вспомним с вами понятие десятичных и натуральных логарифмов, чем они отличаются? Если у логарифма основание 10, то данный логарифм считается десятичным и записывается lg b.

Натуральный логарифм обозначается Ln (обозначается In) у него основанием является e.

$In\ x = \log_b x.$

Рассмотрим некоторые примеры

$\lg 100 = 2$ $lg\ 1 = 0,$ так как 1= 10^0

$\lg 10 = 1$, так как 10= 10^1

$\lg 100 = 2$ так как 100= 10^2

$\lg 0{,}1 = -1$ так как 0,1= 10^{-1}

$\lg 0{,}01 = -2$ так как 0,01=10^{-2}

$\lg 0{,}001 = -3$ так как 0,001=10^{-3}

Формулы перехода от одного основания логарифм к другому

При решении логарифмов, часто встречаются задачи с логарифмами с различными основаниями. Поэтому необходимо знать и применять формулы перехода логарифма от одного основания к другому основанию. $\mathrm{Log}_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ $где\ b > 0, a > 0, a \neq 1, c > 0, c \neq 1.$

Давайте упростим выражение:

$$\log_3 64 + \log_9 64 + \log_{27} 69;$$

$$9\log_{27} 8 - 3\log_3 4;$$

$$2\log_5 3 + 4\log_{25} 2.$$

Ответ. а) $11\log_3 2$; б) $3\log_3 2$; в) $2\log_5 6.$

Закрепление изученного материала (7 минут)

Работа по вариантам на листочках.

Вариант 1

$\log_2 16 = 16 \ldots,$ так как $2^{\cdots} = 16.$

$\log_2\left(\frac{1}{8}\right) = \cdots,$ так как $2^{\cdots} = \frac{1}{8}.$

$\log_2 1 = \ldots,$ так как $2^{\cdots} = 1.$

$\log_{\sqrt{5}} 25 = \ldots,$ так как $\left(\sqrt{5}\right)^{\cdots} = 25.$

$\log_{\ldots} 16 = 4, так\ как\ \ldots^4 = 16.$

$\log_2 \ldots = 3, так\ как\ 2^3 = \ldots$

Вариант 2

$\log_{\ldots}\left(\frac{1}{32}\right) = -5,$ так как $\ldots^{-5} = \frac{1}{32}.$

$2^{\log_2 5} = \ldots$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{2}} 3} = \ldots$

$3^{\log_3 \cdots} = 8.$

$5^{\log_{\ldots} 4} = 4.$

$$\log_3 \ldots = -4, \quad \textit{так как } 3^{-4}.$$

Подведение итогов, домашнее задание (2 минуты)

Рефлексия (1 минута)

Тема 2. Логарифмические и показательные уравнения и неравенства.

Цель: Рассмотреть более сложные логарифмические и показательные уравнения и неравенства.

Задача 16. Решите уравнение $\log_3(x^2 - 6x + 12) = \cos(2\pi x)$

Решение:

$$x^2 - 6x + 12 = (x-3)^2 + 3 \geq 3,$$

$\log_3(x^2 - 6x + 12) \geq 1$, но $\cos(2\pi x) \leq 1$, уравнение имеет решение только когда

$\begin{cases} \log_3(x^2 - 6x + 12) = 1 \\ \cos(2\pi x) = 1 \end{cases}$, при решении получаем x=3

Ответ. 3

Задача 17. Решите неравенство $\frac{x^4 - 16}{2^{10-x^2} + 2^{3x}} \leq 0$

Решение:

$\frac{(x^2+4)(x^2-4)}{2^{10-x^2} + 2^{3x}} \leq 0,$

$\begin{cases} x^2 \geq 4 \\ 2^{10-x^2} < 2^{3x} \end{cases}, \begin{cases} (x-2)(x+2) \geq 0 \\ (x-2)(x+5) > 0 \end{cases}$, получаем x>2,x<-5.

$\begin{cases} x^2 \leq 4 \\ 2^{10-x^2} > 2^{3x} \end{cases}, \begin{cases} (x-2)(x+2) \leq 0 \\ (x-2)(x+5) < 0 \end{cases}$, получаем $-2 \leq x \leq 2$.

Задача 18. Решите уравнение $\log_{2x}(12 - 4x) = 2 - \log_{2x} 4$

Решение:

ОДЗ: $\begin{cases} 2x > 0 \\ 2x \neq 1 \\ 12 - 4x > 0 \end{cases}; \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 0{,}5 \\ x < 3 \end{cases}$

$$\log_{2x}(12 - 4x) = 2 - \log_{2x} 4;$$

$$\log_{2x} 4 + \log_{2x}(12 - 4x) = \log_{2x}(2x)^2;$$

$$\log_{2x}(48 - 16x) = \log_{2x} 4x^2;$$

$$48 - 16x = 4x^2;$$

$$4x^2 + 16x - 48 = 0;$$

Решая уравнение, получаем x=-6 и x=2

Ответ: x=2.

Задача 19. Решите уравнение $\log_x 3 \cdot \log_{81}(4x-3) = 0{,}5$.

Решение:

ОДЗ: $\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \\ 4x - 3 > 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \\ x > 0{,}75 \end{cases}$

$$\log_x 3 \cdot \log_{81}(4x-3) = 0{,}5;$$

$$\frac{1}{\log_3 x} \cdot \frac{1}{4}\log_3(4x-3) = \frac{1}{2};$$

$$\frac{\log_3(4x-3)}{\log_3 x} = 2;$$

$$\log_3(4x-3) = \log_3 x^2;$$

$$4x - 3 = x^2;$$

Решая уравнение, получаем x=1, x=3.

Ответ: x=3

Тема 3. Способы и решения показательных и логарифмических уравнений и неравенств.

Цель: Рассмотреть различные способы решения показательных и логарифмических уравнений и неравенств.

1 способ: метод мажорант

Метод мажорант рассматривается, когда невозможно решить неравенства или уравнения обычными методами. Данный метод повышает математическую культуру, так как знание его, помогает решать единый государственный экзамен по математике на профильном уровне.

Метод мажорант используется тогда, когда известно, что множество значений некоторых функций ограничено.

Задача 20. Решите уравнение $(x-3)^4 + (x^2 - 2x - 3)^{10} = 0$.

Решение:

Так как показатель степени четное число, значит

$(x-3)^4 > 0$ и $(x^2 - 2x - 3)^{10} > 0$, Соответственно данное равенство верно тогда, когда

$(x-3)^4 = 0$ и $(x^2-2x-3)^{10} = 0$.

Решая первое уравнение получаем x=3. Решая второе уравнение получаем x=-1 и x=3.

На основании этого можно сделать вывод, что x=3 является ответом.

Ответ: 3.

Задача 21. Решите неравенство

$4\sqrt{(3x-1)^2} + \sqrt{log_2^2 x^2 + 16\log_4 x} \le 4-12x$.

Решение:

Упростим:

$$4|3x-1| + \sqrt{log_2^2 x^2 + 16\log_4 x} \le 4-12x.$$

Оба слагаемых в левой части положительны, значит права также положительна

$4-12x \ge 0;\ \ x \le \frac{1}{3}$,

Значит, подмодульное значение меньше нуля, раскроем модуль с противоположным знаком:

$$-4(3x-1) + \sqrt{log_2^2 x^2 + 16\log_4 x} \le 4-12x;$$

$$4-12x + \sqrt{log_2^2 x^2 + 16\log_4 x} \le 4-12x.$$

Вычитаем 4-12x из левой и правой частей неравенств:

$$\sqrt{log_2^2 x^2 + 16\log_4 x} \le 0.$$

Квадратный корень всегда положителен, значит неравенство выполняется, когда левая часть =0.

Решим уравнение

$$log_2^2 x^2 + 16\log_4 x = 0;$$

$$log_2^2 x^2 + 8\log_2 x = 0;$$

Произведем преобразования первого слагаемого

$$log_2^2 x^2 = (\log_2 x^2)^2 = (2\log_2|x|)^2 = (2\log_2 x)^2$$

Проведем замену $\log_2 x = t$

$$4t^2 + 8t = 0$$

Получаем корни уравнения: t=0 и t=-2,

Произведем обратную замену:

$$\log_2 x = 0 \text{ или } \log_2 x = -2, \text{получаем } x = 1 \text{ или } x = \frac{1}{4}$$

Ответ: $\frac{1}{4}$.

2 способ: использование различных свойств функций.

Решение задач, связанных с функцией, воспринимаются обучающимися только как построение графика. Например, метод интервалов основан на непрерывности. А решение показательных и логарифмических уравнений и неравенств решаются на монотонность. Поэтому для повышения математической культуры при решении алгебраических задач обучающимся необходимо научиться применять свойства функций при решении алгебраических задач, где целью является не построение графиков.

Использование ограниченности функций

Задача 22. Решите неравенство $\frac{1-x}{1-x} < 2^x$.

Решение:

ОДЗ: все действительные x, кроме x=-1.

Получаем три множества: $-\infty < x < -1,\ -1 < x \leq 0,\ \ 0 < x \leq +\infty$.

Рассмотрим каждый промежуток:

Первый промежуток: $-\infty < x < -1$. Имеем $g(x) = \frac{1-x}{1+x} < 0$, а $f(x) = 2^x > 0$

Можно сделать вывод, что все x являются решением данного неравенства.

Второй промежуток: $-1 < x \leq 0$. Имеем $g(x) = 1 - \frac{2x}{1+x} \geq 0$, а $f(x) = 2^x \leq 1$. Можно сделать вывод, что все x не являются решением данного неравенства.

Третий промежуток: $0 < x \leq +\infty$. Имеем $g(x) = 1 - \frac{2x}{1+x} < 1$, а $f(x) = 2^x > 1$. Можно сделать вывод, что все x являются решением данного неравенства.

Ответ: $-\infty < x < -1,\ 0 < x \leq +\infty$

Использование монотонности

Задача 23. Решить неравенство $2^x + 3^x + 4^x < 3$

Решение:

Функции $y=2^x$, $y=3^x$, $y=4^x$ непрерывны и возрастают на всей оси. Поэтому можно сделать вывод о том, что $y = 2^x + 3^x + 4^x$ является такой же функцией. При x=0 данная функция принимает значение равное 3. Непрерывность и монотонность функции при x>0, получаем $2^x + 3^x + 4^x > 3$, при x<0 получаем $2^x + 3^x + 4^x < 3$, поэтому можно сделать вывод о том, что решением неравенства является x<0.

Ответ: $-\infty < x < 0$.

Задача 24. Решите уравнение $-\sqrt[8]{x-2} + \sqrt[4]{18-x} = 2$.

Решение:

ОДЗ: $2 \leq x \leq 18$

Функция $f(x) = -\sqrt[8]{x-2}$ и $g(x) = \sqrt[4]{18-x}$ непрерывны и убывают, поэтому $h(x) = -\sqrt[8]{x-2} + \sqrt[4]{18-x}$ также непрерывна и убывает. На основании этого можно сделать вывод, что $h(2) = 2$, то $x = 2$ является решением.

Ответ: 2.

Использование графиков

Использование графиков при решении уравнений и неравенств является еще одним из способов формирования математической культуры обучающихся. При этом, данный способ не дает точного результата, а лишь приближенное решение.

Задача 25. Решить неравенство $\sqrt{1-x^2} < \sqrt[8]{5-x}$, график изображен на рисунке 6.

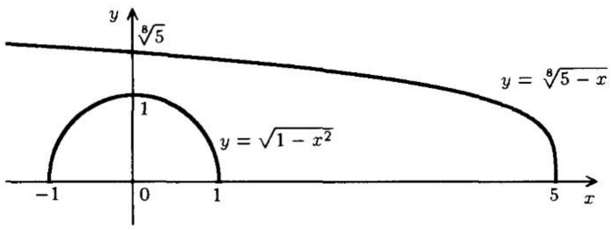


Рисунок 6 – График к неравенству $\sqrt{1-x^2} < \sqrt[8]{5-x}$

Решение:

ОДЗ все x из промежутка [-1;1]

Графики функций $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ и $g(x) = \sqrt[8]{5-x}$ представлены на рисунке 7.

Как можно увидеть из графика, что для всех x неравенство справедливо. Приведем доказательство.

$0 \le f(x) \le 1$, получаем $\sqrt[8]{5-x} \ge \sqrt[8]{4} > 1$, значит $x \in [-1;1]$, получаем $f(x) \le 1 \le g(x)$, поэтому решением будут все x из промежутка [-1;1]

Ответ: $-1 \le x \le 1$

Задача 26. Найти все значения параметра b, при которых уравнение $lg|x| + \lg(2-x) - \lg(lgb) = 0$ имеет единственное решение.

Произведем замену $lgb = a$, получим

$$\lg\big(2|x|(2-x)\big) = lga.$$

Получаем

$$\begin{cases} 2|x|(2-x) = a \\ x < 2 \\ x \ne 0 \end{cases}$$

Произведем построение графика функции $y = 2|x|(2-x)$, с областью определения $x < 2$ и $x \ne 0$. График функции изображен на рисунке 7.

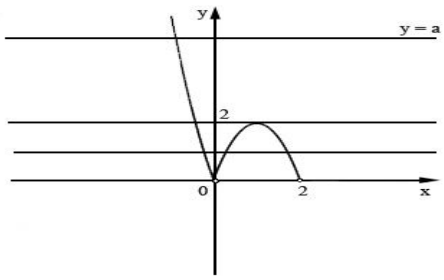


Рисунок 7 - График функции $y = 2|x|(2 - x)$,
с областью определения $x < 2$ и $x \neq 0$

Из рисунка видно, что требование y=a выполняется когда $a > 2$, т. е. $lgb > 2, b > 100$.

Ответ: $b > 100$.

3 способ: Использование метода рационализации

Метод рационализации используется при решением неравенств с переменной в основании логарифма. Также данный метод можно использовать при решении и в других случаях. Данный метод связан с монотонностью функций. При рассмотрении данного способа можно использовать как показательные, логарифмические неравенства так и другие, которые содержат монотонную функцию.

Использование данного метода расширяет кругозор обучающихся, при этом повышая математическую культуру.

Задача 27. Решите неравенство: $\log_{x-1}(x^2 - 3) \geq 2$

Решение:

$\log_{x-1}(x^2 - 3) \geq 2$; приведем основание логарифма к 3

$$\frac{\log_3(x^2-3)}{\log_3(x-1)} - 2 \geq 0, \quad \frac{\log_3(x^2-3) - 2\log_3(x-1)}{\log_3(x-1) - 0} \geq 0,$$

$$\frac{\log_3(x^2-3) - \log_3(x-1)^2}{\log_3(x-1) - \log_3 1} \geq 0$$

$$\begin{cases} \dfrac{(x^2-3)-(x-1)^2}{(x-1)-1} \geq 0 \\ x^2 - 3 > 0 \\ x - 1 > 0 \\ x - 1 \neq 1 \end{cases}; \quad \begin{cases} \dfrac{2x-4}{x-2} \geq 0 \\ |x| > \sqrt{3} \\ x > 1 \\ x \neq 2 \end{cases}; \quad \begin{cases} 2 \geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} x < -\sqrt{3} \\ x > \sqrt{3} \end{array}\right. \\ x > 1 \\ x \neq 2 \end{cases}; \quad \begin{cases} x > \sqrt{3} \\ x \neq 2 \end{cases}$$

Ответ: $x \in (\sqrt{3}; 2) \cup (2; \infty)$.

Задача 28. Решите неравенство: $\log_{|x+2|}(4+7x-2x^2) \le 2$

Решение:

Перейдем к основанию 2:

$$\log_{|x+2|}(4+7x-2x^2) \le 2\,; \quad \frac{\log_2(4+7x-2x^2)-\log_2|x+2|^2}{\log_2|x+2|-\log_2 1} \le 0.$$

$$\begin{cases} \dfrac{(4+7x-2x^2)-(x+2)^2}{|x+2|-1} \le 0 \\ |x+2| > 0 \\ |x+2| \ne 1 \\ 4+7x-2x^2 > 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} \dfrac{-3x^2+3x}{(x+2)^2-1} \le 0 \\ x+2 \ne 0 \\ x+2 \ne 1 \\ x+2 \ne -1 \\ 2x^2-7x-4 < 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} -\dfrac{3x(x-1)}{(x+1)(x+3)} \le 0 \\ x \ne -2 \\ x \ne -1 \\ x \ne -3 \\ -0{,}5 < x < 4 \end{cases}; \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x < -3 \\ -1 < x \le 0 \\ x \ge 1 \end{array}\right. \\ -0{,}5 < x < 4 \end{cases}$$

Ответ: $x \in (-0{,}5; 0] \cup [1; 4)$.

4 способ: Метод интервалов

Задача 29. Решить неравенство $3 \cdot 16^x + 2 \cdot 81^x < 5 \cdot 36^x$

Решение:

Разделим на 36^x, получим $3 \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^x + 2 \cdot \left(\frac{9}{4}\right)^x \le 5$;

Произведем замену $\left(\frac{4}{9}\right)^x = m, m > 0,$ тогда $3m^2 - 5m + 2 \le 0$

Получаем корни 1 и $\frac{2}{3}$, на рисунке 8 построим интервалы

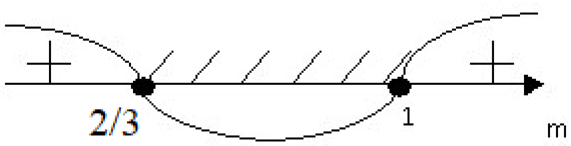


Рисунок 8 – Числовая прямая для неравенства

$m \in \left[\frac{2}{3}; 1\right],\ \ \frac{2}{3} \leq \left(\frac{4}{9}\right)^{x} \leq 1,\ \frac{2}{3} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} \leq 1,\ \ 0 \leq x \leq \frac{1}{2}$

Ответ: $\left[0; \frac{1}{2}\right]$

Задача 30. Решить неравенство $\frac{\log_2((x+1)(x-3)}{\log_2(x-3)} < 1$

Решение:

$$\log_{(x-3)}\big((x+1)(x-3)\big) < 1;$$

$$\log_{(x-3)}\big((x+1)(x-3)\big) < \log_{(x-3)}(x-3);$$

$$\log_{(x-3)}(x+1) + \log_{(x-3)}(x-3) - \log_{(x-3)}(x-3 < 0);$$

$$\log_{(x-3)}(x+1) < 0.$$

Так как $\log_a b < 0,$ то $\begin{cases}(a-1)(b-1) < 0 \\ a > 0 \\ b > 0\end{cases}$

Получим $\begin{cases}(x+1-1)(x-3-1) < 0 \\ x+1 > 0 \\ x-3 > 0\end{cases}$; $\begin{cases}x(x-4) < 0 \\ x > -1 \\ x > 3\end{cases}$; изобразим на рисунке 9.

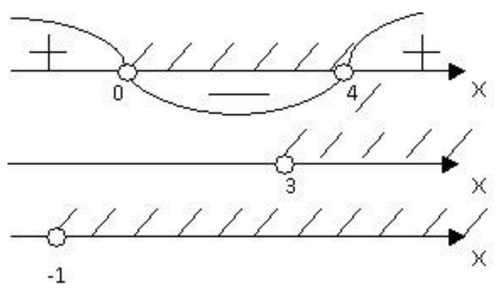


Рисунок 9 – Числовая прямая для неравенства

Ответ: (3;4).

Занятие 4. Виды логарифмических и показательных уравнений в рамках ЕГЭ

Цель: Рассмотреть основные задания на логарифмические и показательные уравнения, которые входят в единый государственный экзамен.

При решении логарифмических и показательных уравнений, выходящих на итоговую аттестацию в 11 классе отслеживают не только предметные результаты курса математики, но и служат критерием для определения сформированности математической культуры у обучающихся.

Рассмотрим некоторые задания:

Задача 31. а) Решите уравнение $\log_5(2-x) = \log_{25} x^4$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\log_9 \frac{1}{82}; \log_9 8\right]$.

Решение:

а) $\log_5(2-x) = \log_{25} x^4$; $\begin{cases} 2-x = x^2 \\ x^2 > 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x^2 + x - 2 = 0 \\ x \neq 0 \end{cases}$; $\left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = 1 \end{array}\right.$.

б) Так как $\log_9 \frac{1}{82} < -2 < \log_9 8 < 1,$ то отрезку $\left[\log_9 \frac{1}{82}; \log_9 8\right]$ принадлежит корень -2.

Ответ: - 2.

Задача 32. а) Решите уравнение $9^{x-\frac{1}{2}} - 8 \cdot 3^{x-1} + 5 = 0$

б) Найдите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left(1, \frac{7}{3}\right)$.

Решение:

а) $9^{x-\frac{1}{2}} - 8 \cdot 3^{x-1} + 5 = 0$; $3 \cdot 9^{x-1} - 8 \cdot 3^{x-1} + 5 = 0$.

Произведем замену: $t = 3^{x-1},$ тогда $3t^2 - 8t + 5 = 0,$ получаем $t = 1$ и $t = \frac{5}{3}$.

t=1: $3^{x-1} = 1, x = 1,$

$t = \frac{5}{3}, 3^{x-1} = \frac{5}{3}, x = \log_3 5.$

б) x=1 не принадлежит $\left(1, \frac{7}{3}\right)$. Поскольку $1 < \log_3 5$ и $\log_3 5 < \log_3 9 = 2 < \frac{7}{3},$ корень $x = \log_3 5$ принадлежит промежутку $\left(1, \frac{7}{3}\right)$.

Ответ: а) 1, $\log_3 5$ б) $\log_3 5$

Занятие 5. Итоговое повторение

В рамках итогового повторения обучающиеся закрепляют решение логарифмических и показательных уравнений и неравенств. Проводится самостоятельная работа, которая включает 4 задания:

Задача 33. Решите уравнение $4^{x^2-1} - 24 \cdot 2^{x^2-3} + 8 = 0$.

Задача 34. Решите уравнение $3 \cdot 9^{x-\frac{1}{2}} - 7 \cdot 6^{x} + 3 \cdot 4^{x-1} = 0$.

Задача 35. Решите уравнение $\log_2(x^2 - 5) \cdot log_3^2(7 - x) + 3\log_2(x^2 - 5) - 2log_3^2\,(7 - x) - 6 = 0$.

Задача 36. Решите уравнение $(x^2 + 2x - 1)(\log_2(x^2 - 3) + \log_{0.5}(\sqrt{3} - x)) = 0$.

Критерии оценки:

Задача 33 – 1 балл;

Задача 34 – 1-2 балл;

Задача 35 – 1-2 балла;

Задача 36 – 1-3 балла.

Отметка «5» выставляется ученику за 7-8 баллов; отметка «4» - за 5-6 баллов; отметка «3» - за 3-4 балла; отметка «2» - за 0-2 балла.

Данный элективный курс должен сформировать основные знания и умения при решении логарифмических и показательных уравнений и неравенств. Во время обучения данного курса обучающиеся учатся правильным математическим языком прописывать ход решения данных заданий различными способами, повышается интерес к предмету, формируются вычислительные навыки, которые проверяются на едином государственном экзамене базового и профильного уровня, результатом всего этого является формирование математической культуры у обучающихся. Также задания в данном элективном курсе взяты задания из открытого банка заданий по функциональной грамотности.

По итогам данного элективного курса можно сделать вывод: у обучающихся сформировались вычислительные навыки, умения решать текстовые задачи, умения решать различными способами алгебраические задачи, умения переходить от теоретической к практической направленности, элементы математического анализа.

2.5 Описание проведенного педагогического эксперимента

При работе в МБОУ СОШ № 21 Серовского городского округа учителем математики был проведен педагогический эксперимент. Для этого был выбран 10 класс, с численностью 9 человек универсального профиля.

Цель данного эксперимента – понять, какой уровень сформированности математической культуры имеют обучающиеся 10 класса при изучении алгебраических задач.

При проведении анализа сформированности предметных результатов по итогам проводимых контрольных работ у обучающихся 10 класса, были выявлены основные пробелы в знаниях в части решения заданий на логарифмы. Данный вид заданий можно встретить на государственной итоговой аттестации в 11 классе как на базовом, так и на профильном уровне. Недостаточно сформированные универсальные учебные действия по данному направления показывают, что у обучающихся на базовом уровне не сформирована математическая культура, так как отсутствует система знаний, позволяющая в системе решать данные вид заданий Обучающиеся плохо оперируют математическими понятиями, такими как логарифм, свойства логарифма.

Для определения уровня сформированности универсальных учебных действий по алгебре и началам анализа в 10 классе был выбран раздел логарифмы. По итогам была создана контрольная работа, рассчитанная на урок.

Для этого был разработан и внедрен элективный курс «Решение логарифмических и показательных уравнений и неравенств», рассчитанный на 14 уроков. В рамках данного курса обучающиеся актуализировали знания по данной теме, вспомнили понятие логарифм, основные свойства логарифма, научились решать логарифмические и показательные уравнения и неравенства различными способами и методами, например, такими как метод мажорант, интервалов, использование различных свойств функций.

После внедрения элективного курса была проведена контрольная работа.

В ней отражались виды контроля по формированию математической культуры и были приставлены следующие задания:

– вычисление логарифмических уравнений различными способами;

– вычисление показательных уравнений различными способами.

Приведём примеры заданий контрольной работы.

Задача 37. Решите уравнение:

$$4^{x^2-1} - 24 \cdot 2^{x^2-3} + 8 = 0.$$

Задача 38. Решите уравнение:

$$3 \cdot 9^{x-\frac{1}{2}} - 7 \cdot 6^x + 3 \cdot 4^{x-1} = 0.$$

Задача 39. Решите уравнение:

$$\log_2(x^2-5) \cdot log_3^2(7-x) + 3\log_2(x^2-5) - 2log_3^2(7-x) - 6 = 0.$$

Задача 40. Решите уравнение:

$$(x^2+2x-1)(\log_2(x^2-3) + \log_{0.5}(\sqrt{3}-x)) = 0$$

Задача 37 – 1 балл;

Задача 38 – 1-2 балл;

Задача 39 – 1-2 балла;

Задача 40 – 1-3 балла.

Отметка «5» выставляется ученику за 7-8 баллов; отметка «4» - за 5-6 баллов; отметка «3» - за 3-4 балла; отметка «2» - за 0-2 балла.

Итоги контрольной работы представлены в таблице 11.

При проведении анализа было выявлено, что обучающиеся в основном не справились с 4 заданием. (справился 1 обучающийся, что составляет 11 % от всех обучающихся).

При этом такие задания, как решение показательных уравнений, обучающиеся выполнили правильно.

Например, с 1 заданием справились все 100% обучающихся.

Таблица 11 – Результаты контрольной работы по теме «Логарифмы»

Задание	Процент обучающихся, выполнивших неверно или не приступивших к выполнению	Процент обучающихся, выполнивших верно
Задание 1	0 человек (0%)	9 человек (100%)
Задание 2	3 человека (33%)	6 человек (67%)
Задание 3	4 человека (44,5%)	5 человек (55,5%)
Задание 4	8 человек (89%)	1 человек (11%)

При проведении анализа были вывалены следующие ошибка в заданиях, представленные в таблице 12.

Таблица 12 – Распространенные ошибки при решении контрольной работы

<table>
<tr><td colspan="6">Задание 1</td></tr>
<tr><td colspan="6">Виды ошибок</td></tr>
<tr><td colspan="2">Вычислительные ошибки</td><td colspan="2">Ошибки логического характера</td><td colspan="2">Неверно применено свойство логарифмов</td></tr>
<tr><td colspan="2">0</td><td colspan="2">0</td><td colspan="2">0</td></tr>
<tr><td colspan="6">Задание 2</td></tr>
<tr><td colspan="6">Виды ошибок</td></tr>
<tr><td colspan="3">Вычислительные ошибки</td><td colspan="3">Неверно применено свойство логарифмов</td></tr>
<tr><td colspan="3">1</td><td colspan="3">2</td></tr>
<tr><td colspan="6">Задание 3</td></tr>
<tr><td colspan="6">Виды ошибок</td></tr>
<tr><td colspan="3">Вычислительные ошибки</td><td colspan="3">Ошибки логического характера</td></tr>
<tr><td colspan="3">2</td><td colspan="3">2</td></tr>
<tr><td colspan="6">Задание 4</td></tr>
<tr><td colspan="6">Виды ошибок</td></tr>
<tr><td colspan="2">Вычислительные ошибки</td><td colspan="2">Ошибки логического характера</td><td colspan="2">Неверно применено свойство логарифмов</td></tr>
<tr><td colspan="2">4</td><td colspan="2">3</td><td colspan="2">2</td></tr>
</table>

На основании приведённой таблицы, можно сделать вывод о том, что не все обучающиеся в совершенстве владеют решениями показательных и логарифмических уравнений, в некоторых случая можно увидеть простые вычислительные ошибки.

Таблица 13 – Распределение обучающихся по оценкам, полученными на контрольной работе

Количество обучающихся		Оценка
число	%	
1	11	5
3	33,5	4
3	33,5	3
2	22	2

В таблице 13 представлено распределение обучающихся по оценкам, полученными на контрольной работе.

Основными приемами обучения при решении алгебраических задач различными способами служат: групповая и индивидуальная работа, участие обучающихся на различных этапах Всероссийской олимпиады школьников, внеурочная деятельность и различные курсы внеурочной деятельности.

Средства обучения:

– технические;

– дидактические;

– наглядные пособия (схемы, слайды);

– чертежные инструменты.

Целью данного эксперимента является определение уровеня сформированности математической культуры у обучающихся при решении данных видов алгебраических задач. При проведении всестороннего анализа можно сделать вывод о том, что большая часть обучающихся в системе научились решать данные виды заданий, излагать верный алгоритм решения, грамотно излагать свои мысли на математическом языке. Данный вывод показал, что у обучающихся сформировалась математическая культура при решении данных видов алгебраических задач.

Выводы по второй главе

Проанализированы учебники, вошедшие в федеральный перечень учебников, для обучающихся 5-11 классов в разрезе решения алгебраических задач различными способами.

Проведен анализ методической литературы на предмет методики решения алгебраических задач в различных источниках; получены основные методические особенности решения алгебраических задач.

Рассмотрены примеры решения различных алгебраических задач с 5 по 11 класс. Приведены основные типы задач, которые выходят на государственную итоговую аттестацию.

Разработан элективный курс «Решение логарифмических и показательных уравнений и неравенств» в курсе математики и начал математического анализа в 10-11 классах. Рассмотрены различные способы решения уравнений и неравенств, выходящих на государственную итоговую аттестацию в 11 классе.

Проведен педагогический эксперимент с обучающимися 10 класса МБОУ СОШ № 21, рассмотрены основные трудности при изучении конкретных алгебраических задач.

Целью эксперимента является определение уровня сформированности математической культуры у обучающихся.

Заключение

Основные выводы и полученные результаты проведенного исследования:

– в исследовании определены понятия «математическая культура»;

– выделены различные виды алгебраических задач в школьных учебниках математики; рассмотрена классификация различных видов алгебраических задач;

– проанализирован опыт учителей по исследуемой проблеме, рассмотрены различные элективные курсы на формирование математической культуры у обучающихся; выполнен анализ содержания школьных учебников математики 5-11 классов;

– проведен анализ методической литературы на предмет методики решения алгебраических задач в различных источниках; получены основные методические особенности решения алгебраических задач;

– рассмотрены примеры решения различных алгебраических задач с 5 по 11 класс. Приведены основные типы задач, которые выходят на государственную итоговую аттестацию;

– разработан элективный курс «Решение логарифмических и показательных уравнений и неравенств» в курсе математики и начал математического анализа в 10-11 классах;

– рассмотрены различные способы решения уравнений и неравенств, выходящих на государственную итоговую аттестацию;

– проведен педагогический эксперимент с обучающимися 10 класса МБОУ СОШ № 21, рассмотрены основные трудности при изучении конкретных алгебраических задач, определены уровни сформированности математической культуры у обучающихся.

Список используемой литературы

1. Акулова О.В. Современная школа: опыт модернизации// Книга для учителя. Санкт-Петербург, 2005. 302 с.

2. Алимов Ш.А., Колягин Ю.М., Ткачёва М.В. и др. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа (базовый и углубленный уровни). 10-11 классы: учебник для общеобразовательных учреждений.// Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин, М.В. Ткачёва. М: АО «Издательство «Просвещение», 2020. 385 с.

3. Наглядная геометрия (лабораторный метод изложения). Первая ступень : начальный курс геометрии.// А. М. Астряб. М.; Петроград : Гос. Изд-во, 1923. 160 с.

4. Блох А.Я. Методика преподавания математики в средней школе. Частная методика: Учеб. пособие для студентов пед. ин-тов по физ.- мат. спец. / А.Я. Блох, В. А. Гусев, Г. В. Дорофеев и др.; Сост. В. И. Мишин. М.: Просвещение, 1987. 416 с.

5. Булдык Г.М. Формирование математической культуры экономиста в вузе: дис. … д-ра пед. наук. – Минск, 1997. 116 с.

6. Бунимович Е.А. Математика. Арифметика. Геометрия. 5 класс: учеб. для общеобразоват. организаций с прил. на электрон. носителе/ Е.А. Бунимович, Г.В. Дорофеев, С.Б. Суворова и др.; Рос. академ. наук, Рос. академ. образования, изд-во «Просвещение». 3-е изд. М.: Просвещение, 2014. 223 с.

7. Бунимович Е.А. Математика. Арифметика. Геометрия. 6 класс: учеб. для общеобразоват. организаций с прил. на электрон. носителе / Е.А. Бунимович, Л.В. Кузнецова, С.С. Минаева и др. 3-е изд. М.: Просвещение, 2014. 240 с.

8. Валитова С.Л. Методические основы обучения поиску решения текстовых алгебраических задач в 7-9 классах на основе формирования приемов учебной деятельности: канд. пед. наук / С.Л. Валитова. М.: РГБ, 1998. 188 с.

9. Вдовиченко А.А. Практикум по методике обучения и воспитания (математика). Модуль «Введение в систему математического образования России» обучающихся по направлению образование, профиль / Саратов, 2015 .32 с.

10. Воронина Л.В. Математическая культура личности / Л.В. Воронина, Л.В. Моисеева. М: Педагогическое образование в России. – 2012 – № 3 – С. 37–44.

11. Волович М.Б. Ключ к пониманию математики - 5-6 классы / М.Б. Волович. М.: Аквариум, 1997. 288 с.

12. Горина Л.А. О развивающем потенциале функционально-графической линии в курсе алгебры основной школы / Л.А. Горина М: Математика в школе. 2011. №2. 73 с.

13. Демидова Т.Е., Тонких, А.П, О способах проверки решения текстовых задач / Т.Е.Демидова, А.П.Тонких М: Математика в школе. 1999. № 5. 45 с.

14. Дорофеев Г.В. Гуманитарно-ориентированное обучение математике: концептуальный аспект / Г.В. Дорофеев // Математика для каждого: концепция, программы, опыт работы. 2000. 392 с.

15. Дорофеев Г.В. Математика. 5 класс. / Г.В. Дорофеев, Л.Г. 2-е изд., перераб. М.: Издательство «Ювента», 2010. 112 с.

16. Дорофеев Г.В. Математика. 6 класс. / Г.В. Дорофеев, Л.Г. Петерсон. // 2-е изд., перераб. М.: Издательство «Ювента», 2010. 112 с.

17. Дорофеев Г.В. Алгебра. 7 класс: учеб. для общеобразоват. организаций / Г.В. Дорофеев, С.Б. Суворова, Е.А. Бунимович и др. 2-е изд. М.: Просвещение, 2014. 287 с.

18. Дорофеев Г.В. Алгебра. 8 класс: учеб. для общеобразоват. организаций / Г.В. Дорофеев, С.Б. Суворова, Е.А. Бунимович и др. 3-е изд. М.: Просвещение, 2016. 320 с.

19. Дорофеев Г.В. Алгебра. 9 класс: учеб. для общеобразоват. организаций / Г.В. Дорофеев, С.Б. Суворова, Е.А. Бунимович и др.// под ред.

Г.В. Дорофеева; Рос. академ. наук, Рос. академ. образования, 5-е изд. М.: Просвещение, 2010. 304 с.

20. Захарова Т.В. Формирование учебно-познавательной компетентности учащихся: на примере математики: канд. пед. наук / ТВ. Захарова. М.: РГБ, 2012. 183 с.

21. Захарова Т.Г. Формирование математической культуры в условиях профессиональной подготовки студентов вуза: Дис. ... канд. пед. наук / Т.Г. Захарова. М.: РГБ, 2005. 173 с.

22. Иванова Т.А. Теория и технология обучения математике в средней школе: учеб. пособие для студентов математических специальностей педагогических вузов / Т. А. Иванова, Е.Н. Перевощикова, Л.И. Кузнецова, Т.П. Григорьева. Н. Новгород. М: НГПУ, 2009. 355 с.

23. Ильиных В.П., Демченкова Н.А. Формирование математической культуры учащихся общеобразовательной школы /В.П. Ильиных, Н.А. Демченкова// Информационное пространство современной науки: Материалы XXV международной научной конференции. 20 июня 2022 г., г. Чебоксары. Чебоксары: Книга. 2022.

24. Ильиных В.П. Методический проект «Алгебраические задачи на работу»/В.П. Ильиных/Научный журнал «Вестник магистратуры», г. Йошкар-Ола, 2022.

25. Колягин Ю.М. Задачи в обучении математике: в 2 ч. / Ю.М. Колягин. М.: Просвещение, 1997. 140 с.

26. Крупич В.И. Учить школьников учиться математике / Е.Б.Епишова, В.И.Крупич. М:Просвещение. 1990. 129 с.

27. Левитас Г.Г. Об алгебраическом решении текстовых задач/ Г.Г. Левитас. М: Математика в школе. 2000. № 8. 13 с.

28. Леонтьева М.Р. Упражнения в обучении алгебре: Кн. Для учителя / М.Р. Леонтьева, С.Б. Суворова М.: Просвещение, 1985. 128 с.

29. Лященко Е.И. Лабораторные и практические работы по методике преподавания математики: Учеб. пособие для студентов физ.-мат. спец. пед.

ин-тов / Е.И. Лященко, К.В. Зобкова, Т.Ф. Кириченко и др.; Под ред. Е.И. Лященко. М.: Просвещение, 1988. 223 с.

30. Макарычев Ю.Н. Алгебра. 7 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений / Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, С.Б. Суворова; под ред. С.А. Теляковского. М.: Просвещение, 2013. 256 с.

31. Макарычев Ю.Н. Алгебра. 8 класс: учеб. для общеобразоват. организаций с прил. на электрон. носителе / Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, С.Б. Суворова; под ред. С.А. Теляковского. М.: Просвещение, 2013. 287 с.

32. Макарычев Ю.Н. Алгебра. 9 класс: учеб. для общеобразоват. организаций / Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, С.Б. Суворова; под ред. С.А. Теляковского. 21-е изд. М.: Просвещение, 2014. 271 с.

33. Мордкович А.Г. Алгебра и начала математического анализа 10 класс. В 2 ч. ч. 1: учебник для учащихся общеобразовательных учреждений/А.Г. Мордкович 17-е изд., доп. М.: Мнемозина, 2013. 175 с.

34. Мордкович А.Г. Алгебра. 11 класс: методическое пособие для учителя /А.Г. Мордкович, П.В. Семенов. М: Мнемозина, 2010. 72 с.

35. Мордкович А.Г. Алгебра. 11 класс. В 2 ч.: учебник для учащихся общеобразовательных учреждений/А.Г. Мордкович. 12-е изд., доп. М.: Мнемозина, 2010. 215 с.

36. Муравин Г.К. Математика. 5 кл.: учебник / Г.К. Муравин, О.В. Муравина. 3-е изд., стереотип. М.: Дрофа, 2014. 318 с.

37. Муравин Г.К. Математика. 6 кл.: учебник / Г.К. Муравин, О.В. Муравина. 2-е изд., стереотип. М.: Дрофа, 2014. 319 с.

38. Муравин Г.К. Алгебра 7 кл.: учеб. для общеобразоват. учреждений / Г.К. Муравин, К.С. Муравин, О.В. Муравина. 9-е изд., стереотип. М.: Дрофа, 2013. 285 с.

39. Муравин Г.К. Алгебра 8 кл.: учеб. для общеобразоват. учреждений / Г.К. Муравин, К.С. Муравин, О.В. Муравина. 15-е изд., стереотип. М.: Дрофа, 2013. 254 с.

40. Муравин Г.К. Алгебра 9 кл.: учебник / Г.К. Муравин, К.С. Муравин, О.В. Муравина. 14-е изд., стереотип. М.: Дрофа, 2014. 315 с.

41. Муравин Г.К. Алгебра и начала математического анализа 10 класс: учебник для общеобразовательных учреждений/Г.К. Муравин, К.С. Муравин, О.В. Муравина. 13-е изд. М.: Дрофа, 2015. 278 с.

42. Муравин Г.К. Алгебра и начала математического анализа 11 класс: учебник для общеобразовательных учреждений/Г.К. Муравин, К.С. Муравин, О.В. Муравина./14-е изд. М.: Дрофа, 2016. 269 с.

43. Муравин Г.К., Муравина О.В. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс. Базовый уровень: учебник. 7-е изд. М.: Дрофа, 2016. 356 с.

44. Муравин Г.К., Муравина О.В. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс. Базовый уровень: учебник. 7-е изд. М.: Дрофа, 2016. 325 с.

45. Насыпаная В.А. Математическая культура учащихся: основные характеристики, функции и компоненты. Аспекты и тенденции педагогической науки: материалы II Международной научной конференции. М: Санкт-Петербург, 2017. 45 с.

46. Нахман А.Д. Математическое моделирование как инновационная содержательно-методическая линия в курсе математики [Электронный ресурс] / А.Д. Нахман // Вестник Тульского государственного университета. Серия: современные образовательные технологии в преподавании естественнонаучных дисциплин. №1 (13). 2014. 96 с.

47. Никольский С.М., Потапов М.К., Решетников Н.Н., Шевкин А.В., Алгебра и начала математического анализа: Учебник для 10 класса образовательных учреждений: базовый и профильный уровни. ФГОС М.: Изд. «Просвещение». 2016. 430 с.

48. Никольский С.М., Потапов М.К., Решетников Н.Н., Шевкин А.В., Алгебра и начала математического анализа: Учебник для 11 класса

образовательных учреждений: базовый и профильный уровни. ФГОС М.: Изд. «Просвещение», 2020. 452 с.

49. Педагогический опыт по формированию графической культуры обучающихся при изучении функций в курсе алгебры и математического анализа 10-11 классы.
[Электронный ресурс]: https://infourok.ru/material.html?mid=40278 (дата обращения – 20.05.2022).

50. Петров В.М. Графический метод исследования функции в курсе математики средней школы. Автореф. дис. канд. пед. наук. М: Киев., 1969. 19 с.

51. Приказ Об утверждении плана мероприятий Министерства образования и науки Российской Федерации по реализации Концепции развития математического образования в Российской Федерации: Приказ Минобрнауки России от 03.04.2014 № 265. 25 с.

52. Рассоха Е.Н. Формирование математической культуры как педагогическая проблема/ Е.Н. Рассоха М: Вестник ОГУ. № 7. 2002. 136 с.

53. Саранцев Г.И. Гуманитаризация математического образования//Гуманитарные традиции математического образования в России: сборник статей участников Всероссийской научной конференции с международным участием. М: АГПИ. – Арзамас: АГПИ, 2012. 101 с.

54. Сафонова Л.А. О действиях, составляющих умение решать текстовые задачи / Л.А. Сафонова. М: Математика в школе. № 8. 2000. 36 с.

55. Словарь философских терминов /науч. ред. проф. В.Г. Кузнецова. Москва: Инфр. М, 2005. 729 с.

56. Снегурова В.И. Технология использования индивидуализированной системы задач как средство развития математической культуры учащихся (На примере изучения алгебры и начал анализа в 10 кл.): автореф. дис. ... канд. пед. наук. М: СПб., 1998. 156 с.

57. Федеральный государственный образовательный стандарт. Об утверждении федерального государственного стандарта среднего общего

образования: Приказ Минобрнауки России от 17.05.2012 № 413 // Вестник образования России. № 18. 2012. 65 с.

58. Федеральный перечень учебников, рекомендованных к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ начального общего, основного общего, среднего общего образования: Приказ Мин. просвещения РФ от 20 мая 2020. 356 с.

59. Фридман Л. М. Сюжетные задачи но математике. История, теория, методика. М. Школьная Пресса, 2002. 55 с.

60. Шадрин В.Ю. Математическая одаренность подростка как социально-педагогическая проблема / В.Ю. Шадрин. М: Оренбург, 2011. 44 с.

61. Шарый С.П. Интервальные алгебраические задачи и их численное решение: Дис. ... докт. пед. наук / С.П. Шарлой. М.: РГБ, 2000. 86 с.

62. Шихалиев Х. Ш. Больше внимания формированию математикой культуры учащихся / Х.Ш. Шихалиев М: Математика в школе, № 2. 1994. 102 с.

63. Abdolhossini A. The effects of cognitive and meta-cognitive methods of teaching in mathematics/ A. Abdolhossinu// 4th World Conference on educational sciences, added 02.05.2012. – vol. 46. – 5894-5899 p. – Режим доступа: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1877042812022719. (дата обращения 20.05.2022).

64. Andreescu T., Gelca R. Mathematical Olympiad Challenges. Birkhauser, 2000. 280 p.

65. Lisa L. Clement . What do students really know about functions [Электронный ресурс]. 2001. PP. 745 – 748. URL: http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.535.8420&rep=rep1&type=pdf (дата обращения: 15.04.2022).

66. Musgrave S. Understanding and advancing graduate teaching assistants mathematical knowledge for teaching/ S. Musgrave, S. Marilyn P. Carlson// The Journal of Mathematical Behavior, added march 2017 – vol. 45. – 137-149 p. [Электронный ресурс]. – Режим доступа:

https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0732312316302012. (дата обращения - 15.05.2022).

67. Negut A. Problens for the Mathematical Olympiads. GIL Publishing House, 2005. – 158 p.