МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Тольяттинский государственный университет»

Институт математики, физики и информационных технологий
(наименование института полностью)

Кафедра «Высшая математика и математическое образование»
(наименование)

44.04.01 Педагогическое образование
(код и наименование направления подготовки)

Математическое образование
(направленность (профиль))

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА (МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ)

на тему «Алгебраические задачи как средство формирования аналитических умений обучающихся общеобразовательной школы»

Студент А.А. Ивашкова
(И.О. Фамилия) (личная подпись)

Научный руководитель канд. пед. наук, доцент, В.В. Липилина
(ученая степень, звание, И.О. Фамилия)

Тольятти 2022

Оглавление

Введение

Актуальность и научная значимость настоящего исследования. Современные тенденции образования, а также образовательные стандарты подталкивают методистов и исследователей к поиску альтернативных методов обучения учащихся всех школьных возрастов. В последнее время, наблюдается формирование нового подхода в образовании, направленного на личностную ориентацию, учитывающего особенности развивающего обучения. Можно сделать вывод о том, что современное образование ставит перед собой задачу формирования личностные качества ученика, давая ему возможность саморазвиваться.

Все ранее существовавшие методы организации учебного процесса подпадают под категорию «традиционное обучение». Традиционным обучением называется такой процесс обучения, который действует на протяжении долгого времени. Методология традиционного обучения основывается на технологическом подходе, следовательно обучение переходит в производственно-технологический процесс.

Фундаментальная цель традиционного обучения формулируется как подготовка подрастающего поколения к жизни, развитие и формирование ценностных установок и необходимых качества, которые помогут адаптироваться в социуме.

Одной из методических проблем при обучении математике является проблема формирования у старшеклассников аналитических умений.

Цель исследования: выявить методические основы алгебраических задач как средства формирования аналитических умений у старшеклассников.

Объект исследования: процесс обучения алгебре в 10-11 классах общеобразовательной школы.

Предмет исследования: алгебраические задачи как средство формирования аналитических умений обучающихся общеобразовательной школы.

Гипотеза исследования: формирование аналитических умений старшеклассников на уроках математики будет осуществляться эффективнее, если:

– учащиеся имеют достаточный уровень мотивации, для осуществления учебной деятельности;

– обеспечено единство трех основных составляющих обучения, а именно содержательного, мотивационного и деятельностного;

– осуществлено программно-методическое сопровождение формирующего процесса.

Цель исследования, объект, предмет и выдвинутая гипотеза обусловили необходимость решения следующих задач:

Задачи исследования:

1. Выделить основные психолого-педагогические особенности формирования аналитических умений учащихся.

2. Определить современные тенденции при формировании аналитических умений на уроках математики при решения алгебраических задач.

3. Разработать учебный курс по формированию аналитических умений обучающихся общеобразовательной школы посредством решения алгебраических задач.

4. Апробировать программу элективного курса «Алгебраические задачи».

Теоретико-методологическую основу исследования составили исследования как отечественных, так и иностранных методистов, педагогов и психологов. Стоит отметить работы Л.С. Выготского [5], П.Я. Гальперина [8], В.В. Давыдова [13], Ю.М. Колягина [27], и др.

Базовыми для настоящего исследования явились работы П.Я. Гальперина [8], [9], В.В. Давыдова [13], Л.С. Выготского [5].

Основные этапы исследования

– 1 семестр (2020/21уч.г.): анализ ранее выполненных исследований по теме диссертации, обзор статей по теме алгебраические задачи.

– 2 семестр (2020/21уч.г.): определение теоретических основ аналитических умений при решении алгебраических задач.

– 3 семестр (2021/22 уч.г.): разработка элективного курса по теме «Алгебраические задачи»

– 4 семестр (2021/22 уч.г.): оформление диссертации, корректировка ранее представленного материала, уточнение аппарата исследования, описание результатов экспериментальной работы, формулирование выводов.

Опытно-экспериментальная база исследования: МБОУ «СОШ № 4 г. Тосно» Ленинградской области, г. Тосно.

В соответствии с целью и задачами осуществлён выбор **методов исследования:** теоретический анализ психолого-педагогической, методической литературы по теме исследования, анализ и обобщение, констатирующий и поисковый этапы эксперимента.

Научная новизна исследования заключается в рассмотрении методических основ формирования аналитических умений старшеклассников с помощью алгебраических задач.

Теоретическая значимость исследования состоит в том, что в нем раскрывается роль алгебраических задач в формировании аналитической деятельности старшеклассников.

Практическая значимость исследования определена тем, что в диссертации представлена подборка уравнений и неравенств, содержащих параметр, раскрыты различные методы их решения, а также предложен соответствующий элективный курс «Алгебраические задачи».

Достоверность и обоснованность результатов и выводов, полученных в ходе проведенного исследования, обеспечиваются теоретикометодологической базов и подтверждаются результатами педагогического эксперимента.

Личное участие автора в организации и проведении исследования состоит в самостоятельном решении поставленных задач и описании результатов исследования.

Апробация и внедрение результатов работы велись в течение всего исследования, а также в период производственной (научно-исследовательской работы) и преддипломной практик на базе кафедры «Высшая математика и математическое образование».

Экспериментальная проверка предлагаемых методических рекомендаций была осуществлена в период производственной практики, а также в период работы учителем математики на базе МБОУ «СОШ №4 г. Тосно».

Результаты исследований докладывались и обсуждались на V международной научно–практической конференции «Теоретико-методологические аспекты преподавания математики в современных условиях» 2022, г. Луганск, ГОУ ВО ЛНР «ЛГПУ». Они также отражены в одной публикации [36].

На защиту выносятся:

– рекомендации по обучению теме решению задач с параметрами;

– анализ задач с параметрами предлагающихся в курсе математики общеобразовательной и элективный курс по теме данной работы;

– результаты педагогического эксперимента по практической апробации элективного курса.

Структура магистерской диссертации. Работа состоит из введения, двух глав и заключения, содержит 11 рисунков, 2 таблиц, список используемой литературы (61 источников). Основной текст работы изложен на 70 страницах.

Глава 1 Теоретические основы обучения решению алгебраических задач как средству формирования аналитических умений обучающихся общеобразовательной школы

1.1 Психологические аспекты формирования аналитических умений

Способы повышения эффективности образовательного процесса начали исследоваться ещё с начала прошлого века. Первые значимые результаты были достигнуты П.Я. Гальпериным [8], вместе со своими учениками. Исследователям удалось провести «экспериментальное формирование внимания», с помощью поэтапного формирования умственных действий и понятий [8].

Также существует мнение о том, что особую ценность представляют результаты комплексного исследования учебной деятельности, в которых исследуются не только познавательные функции, но и различные мотивы, эмоции.

Все ранее существовавшие методы организации учебного процесса подпадают под категорию «традиционное обучение». Данный тип обучения характеризуется тем, что главной в нём является репродуктивная деятельность учеников. Основной задачей традиционного обучения является развитие учащегося. Из негативных последствий традиционного метода обучения можно выделить следующие:

- невозможность внедрения индивидуальных подходов в образовании;
- отсутствие возможности выбора времени и места обучения;
- полное игнорирование личностных качеств учащихся.

Фундаментальная цель традиционного обучения формулируется как подготовка подрастающего поколения к жизни, развитие и формирование ценностных установок и необходимых качества, которые помогут адаптироваться в социуме [2].

Опираясь на фундаментальную цель такого обучения, можно говорить о том, что такой подход отчасти является функциональным обучением, так как ученик получает необходимые качества для выполнения определенных функций в дальнейшем будущем. Следовательно, в основу содержания обучения вкладывается определенный набор поставленных задач, решение которых позволяет получить ученику необходимый набор навыков, которые будут полезны в жизни. Эти функции неопределенны, существует некая их вариативность. Таким образом, чтобы охватить большое количество изучаемого материала нужно потратить достаточно большое количество времени, но в условиях сложившейся классно-урочной системы это практически не осуществимо. В силу этого обстоятельства преобладает репродуктивная учебная деятельность, которая позволяет вместить в себя наибольшее количество информации, которую можно изучить. Также из минусов можно выделить то, что обучение происходит в форме монолога, следовательно, учитель приходит с готовым знанием, прибегая к методам поощрений и наказаний принимать её как нужную и важную для изучения. При таком подходе к процессу обучения, совсем не учитываются индивидуальные особенности учащихся, что приводит к снижению эффективности образования в целом [15].

Исходя из вышеизложенной информации, можно сделать вывод, что развитие учащегося не являлось приоритетной задачей обучения, а являлось только его побочным продуктом. Если в теории регламентируется, что обучение должно развивать учащегося, то на практике, в первую очередь уделяется внимание формированию набора знаний, умений и навыков, которые будут полезны в дальнейшем. Синонимично традиционному обучению можно сопоставить принуждение. Следовательно, все поставленные перед собой дидактические задачи мог решить тот преподаватель, который проявлял высокий уровень требовательности к своим ученикам, такие педагоги не только могут преподать материал на понятном языке, но знают, каким образом заставить ребенка усвоит его. Таким образом, такой учитель считался образцовым работником. К большому сожалению, этот стереотип сохранился и в нынешней системе образования [18].

На фоне всех этих недостатков, у исследователей начало формироваться мнение о том, что модель функционального обучения требует безотлагательной замены. Альтернативным вариантом замены становится развивающее обучение, в котором чётко сформулирована следующая позиция: развитие учащегося должно быть конечным продуктом обучения, а не побочным результатом [7].

Учебная деятельность является особым видом деятельности, предметом которой является учащийся. Учебная деятельность не меняет учебные дисциплины, которые изучает ученик, она проводит изменение самого ученика. Исследователем В.В. Давыдовым [14] была развита теория учебной деятельности, в которой им удалось выделить такие компоненты как потребности, мотивы, задачи, действия и операции. Принципы построения теории развивающего обучения в основу ставят теоретические знания, методом является организация совместной учебной деятельности школьников, продуктом развития являются психологические изменения, которые характерны только для младшего школьного возраста [3].

По мнению Д.Б. Эльконина [55], в структуру учебной деятельности входят: мотивация, а именно, познавательная мотивация, мотивация к самосовершенствованию и т. д., учебную задачу, которая состоит из определенного набора задач, выполняя которые, учащийся овладевает общими способами действия, учебные операции, контроль и оценку. Результатом освоения учебной деятельности при развивающем обучении должно стать умение учиться, которое является незаменимым атрибутом успеха в дальнейшей жизни [8].

Так же по мнению В.В.Давыдова [14], учебная деятельность не должна быть ассоциирована с учением, так как человек получает определенные навыки и знания и в процессе других видов деятельности. Осваивая учебную деятельность, человек показывает не только свои умения и навыки, которые он приобрел, но и своё умение учиться. Основой содержания учебной деятельности являются теоретические знания, которые являются симбиозом абстрагирования, обобщения и теоретических понятий. Данное мнение основывается на том, что, осуществляя учебную деятельность учитель руководствуется ранее выделенной основой многообразия действительности. Учебная деятельность характеризуется переходом от абстрактного к конкретному, от общего к частному [23].

Также стоит отметить отличия в видах задач, которые решают в учебной и в творческой деятельности. Учебная деятельность решает тренировочные задачи, направленные на получение определенных умений и методов решений. Творческая деятельность решает поисково-творческие задач, направленные на развитие способностей ребенка. Поэтому можно сделать вывод о том, что учебная деятельность формирует умение учиться, а творческая формирует умение находить новые, нестандартные способы решения поставленных задач, возникающих в процессе образования [9].

Исходя из вышеперечисленной информации, основным результатом учебной деятельности остаётся только формирование теоретического мышления. Следовательно, уровень развития теоретического мышления прямым образом влияет на приобретаемые в дальнейшем знания [4].

Если проводить анализ состояния нынешней системы образования школы, можно отметить, что на уроках математики, учащиеся выполняют только стандартные шаблонные задачи, которые не вносят никакой новизны. При решении таких задач полностью отсутствует поисковая деятельность учащихся.

В первую очередь это связанно с тем, что ученик, подходя к решению задачи, не ищет новые способы её решения, он уже знает алгоритм её решения. В случае, когда ребенок при решении следующей задачи пытается искать новые методы решения, это означает, что он плохо усвоил предоставленный учителем материал.

Делаем вывод, что «аналитические умения – это освоенный человеком мысленный процесс разбиения целого на части, рассмотрение, изучение предмета на основе собственного опыта» [26].

«Основными логическими формами, в которых реализуется мысль, принято считать аналитическую и синтетическую деятельность ума, т. е. такие, которые сначала разлагают воспринимаемый мир на отдельные элементы, а затем строят из этих элементов новые образования, помогающие лучше разбираться в окружающем. В этом отношении чрезвычайно важно уяснить психологический механизм образования понятий, т. е. таких общих и родовых реакций, которые относятся не к отдельному предмету, а к целому классу или к целой группе предметов одновременно. Каждая реакция в этом смысле представляет из себя чрезвычайно ценный аккумулятор опыта и, в сущности, уже является теорией. Когда мы говорим «лампа», имея в виду целый класс однородных предметов, мы пользуемся результатами произведённой раньше огромной аналитической работы разложения всех бывших предметов на их составные части» [1].

«Выполняя творческие задания, учащиеся анализируют условия, выделяют существенное в предложенной ситуации, соотносят данные и искомое, выделяют связи между ними» [13].

В.В. Давыдов говорит о том, что «курс математики ставит своей целью формирование у школьников предпосылок теоретического мышления (анализ, планирование, рефлексия), поэтому он ориентирован главным образом на формирование научных (математических) понятий, а не только на выработку практических навыков и умений. Эта специфика курса требует особой организации учебной деятельности школьников в форме постановки и решения ими учебных задач. … Решение учебной задачи осуществляется согласно теоретическому принципу, который имеет значение не только для некоторого частного случая, но и для всех случаев данного типа. Мысль школьников при этом движется от общего к частному» [14].

1.2. Методические аспекты формирования аналитических умений в процессе решения алгебраических задач

В основу российского образования была заложена так называемая знаниевая парадигма. Осуществление образовательного процесса базировалось на дедуктивных началах. Большая часть внимания уделялась усвоению знаний. Как утверждали исследователи, принцип усвоения знаний имеет громадный развивающий потенциал, и именно он является движущей силой формирования умений и навыков учеников. Одной из попыток усовершенствования данной идеи была так называемая, теория развивающего обучения, которая в итоге оказалась не настолько эффективной, в процессе эволюции образовательной системы. «Знаниевая парадигма всегда держит в себе конфликт между получаемыми знаниями и умением их применять»[32].

Именно благодаря построению такой системы, удалось достичь высоких результатов образования учеников середины XX века. Современная система образования практически от нее не отличается.

Становление образования с целью постоянного развития, это достаточно долгий и кропотливый процесс, которые включает в себя результаты прогнозирования и параллельного формирования необходимых умений и навыков, отношений.

Развивающее обучение является приоритетной формой обучения современного образования. Определение развивающего обучения можно сформулировать следующим образом. Развивающим обучением называется такой вид обучения, направленный на всестороннее развитие личностных качеств индивида, с последующим усвоением необходимых знаний, умений и навыков. Информационная функция обучение отходит на второй план при использовании развивающего обучения, следовательно, на первое место выходит развивающая функция. Роль учителя в организации развивающего обучения является колоссальной, так как он отвечает за все процессы её формирования. Следовательно, он должен понимать, как должно выглядеть такое обучение, и какими особенностями оно обладает. Если трактовка данного вида обучения будет ошибочной, то таким образом, получить максимально возможный результат от данного вида учебной деятельности не удастся [6].

С психологической точки зрения развитие определяется как некоторые изменения в психике человек, которые имеют свою чётко выстроенную логическую структуру и проявляются как новые формирования. Впервые, идея использования развивающего обучения была выдвинута ещё в первой половине прошлого века Л.С. Выготским [5].

Успешное построение процесса развивающего обучения напрямую зависит от формирования необходимых условий, направленных на овладение основными приёмами мышления. Таким образом, учащийся сможет выйти на новый уровень развития, что даст возможность более быстро усваивать новый материал с максимальной продуктивностью.

На фоне изменений в образовательной системе начали появляться различные методические продукты разных ученых, направленные на организацию развивающего обучения. Каждый из этих учебников отличается стилем повествования, применяемыми формами работы в силу того, что каждый автор имеют свою уникальную трактовку понятия развивающего обучения. Часть авторов заостряет внимание на развитии наблюдения, мышления, другая часть авторов пишет о необходимости формирования умственных действий, также есть мнения о том, что развивающее обучение должно строиться на создании особых условий, которые будут сопутствовать развитию учебной деятельности.

Также, при организации процесса обучения нужно учитывать много других факторов, влияющих на него как со стороны учителя, так и со стороны учеников. Каждый ученик обладает разным уровнем знанием, следовательно, учитель должен организовывать учебный процесс таким образом, чтобы охватывать учеников с разным уровнем знаний, подбирать разные формы работы [7].

Следовательно, приходим к мнению, что современный образовательный процесс должен учитывать особенности каждого отдельно взятого учащегося.

В современной педагогической литературе существует много систем развивающего обучения, но стоит выделить основные две. Первая была создана Л.В. Занковым [20], а вторая Б.Д. Элькониным [55] и В.В. Давыдовым [14].

Система развивающего обучения Л.В. Занкова[20] направлена на общее развитие учащегося. В процессе исследования понятия «общего развития» автору удалось получить рад логически связанных между собой понятий, которые были выстроены в единую линию, а именно, мыслительная деятельность, наблюдение, практические действия [46].

Следовательно, Л.В. Занковым [20] были сформулированы следующие дидактические принципы построения развивающего обучения. Данные принципы формулируются следующим образом:

- трудность обучения должна быть повышенной,
- фундаментальная роль в процессе образования отводится теоретическим знаниям;
- беспрерывное обогащение знаниями учеников;
- осознанность процесса учения;
- дифференцированный подход к учащимся.

Между всеми этими принципами существует логическая связь. Так первый принцип связан сразу со вторым и третьим, а второй связан напрямую с четвертым [10].

Таким образом, Л.В. Занков [20], в ходе своих исследований смог определить базовые свойства методической системы образования. К ним он отнес многогранность, процессуальность, коллизии, вариативность.

Анализ учебников данных авторов показал, что материал в них является труднодоступным для понимания. Степень наглядности представления материала достаточно сильно снижена, а уже имеющаяся является достаточно однообразной. Текстовое наполнение материалом занимает практически 80% учебника [38].

По мнению В.В. Давыдова [14], система Л.В. Занкова [19] может повлиять на совершенствование процесса обучения, несмотря на сложность её реализации. Но в первую очередь внимание должно уделяться эмпирическому мышлению.

Также стоит отметить, что в поостренной система Л.В. Занков [20] в недостаточной степени поработал над идеей процессуального обучения. В понимании Л.В. Занкова [20], «подлинное познание каждого элемента все время прогрессирует по мере овладения другими, последующими элементами предмета и осознания, соответствующего целого...» [11].

Исследуя возможности математики в развитии аналитических навыков учащихся, стоит отметить, что: «К числу качеств научного мышления относятся гибкость, оригинальность, глубина, целенаправленность, рациональность, широта, активность, критичность, доказательность мышления, организованность памяти, четкость и лаконичность речи и записи» [2], следовательно, в формировании аналитического умения обучающихся общеобразовательной школы неоценимую роль играет формирование умений и навыков решения задач, что требует: «… применения многочисленных мыслительных умений: анализировать заданную ситуацию, сопоставлять данные и искомые, решаемую задачу с решенными ранее, выявляя скрытые свойства заданной ситуации; конструировать простейшие математические модели, осуществляя мысленный эксперимент; синтезировать, отбирая полезную для решения задачи информацию, систематизируя ее; кратко и четко, в виде текста, символически, графически и т. д. оформлять свои мысли; объективно оценивать полученные при решении задачи результаты, обобщать результаты решения задачи, исследовать особые проявления заданной ситуации» [2]. При переходе к парадигме личностно ориентированного образования, проблема развития критического мышления при обучении школьной математике становится все более и более актуальной [12].

«Для развития аналитических умений необходимо создание и применение специальных методических инструментов, одним из которых стала педагогическая технология развития критического мышления через чтение и письмо. Урок, построенный по технологии РКМЧП, имеет трехфазную структуру: вызов, осмысление, рефлексия, каждая стадия выполняет свою функцию» [16].

«Стоит остановиться подробнее на распространенных стратегиях РКМЧП. Прием «Кластер» применим как на стадии вызова, так и на стадии рефлексии, и заключается в том, что информация, касающаяся какого-либо понятия, явления, систематизируется в виде кластеров, выделяются основные смысловые единицы, которые фиксируются в виде схемы с обозначением всех связей (рисунок 1)» [43].

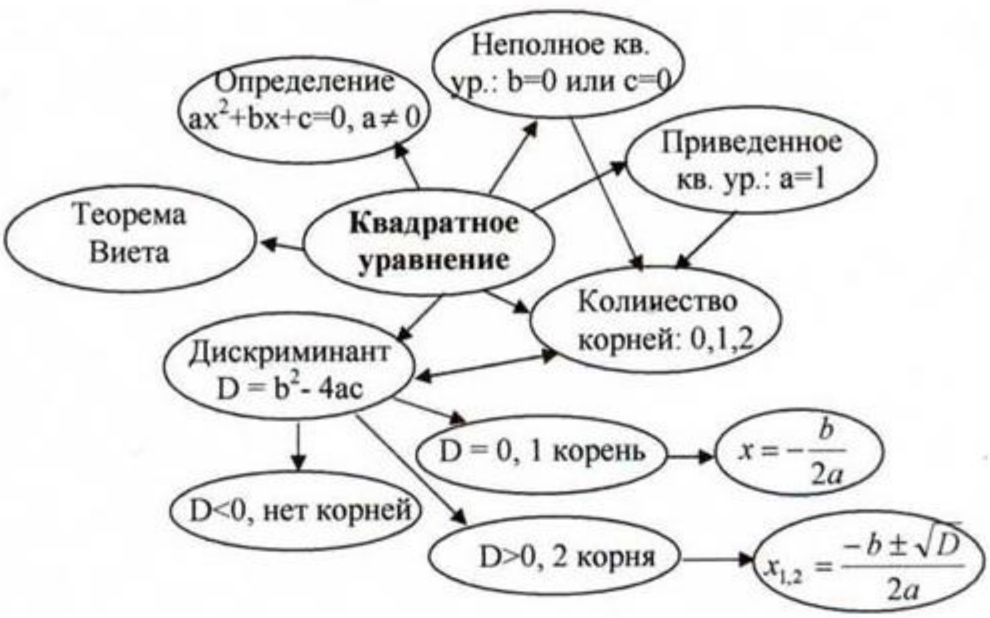

Рисунок 1 – Кластер по теме квадратные уравнения

Чаще всего используют блок-схемы. Блок-схема помогает выйти на правильное использование формулы и выстраивает логическую цепочку. Рассмотрим пример блок-схемы по решению линейных уравнений с параметрами (рисунок 2).

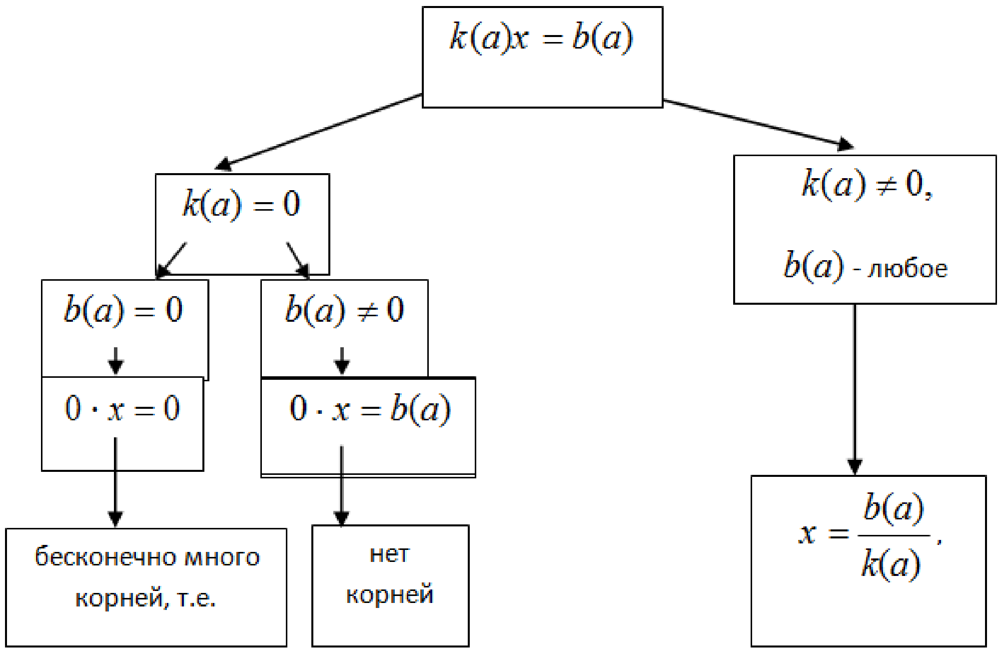

Рисунок 2 – Блок-схема

«Проблема формирования аналитических умений является для современной школы одной из важнейших педагогических задач, аналитические умения — это освоенный человеком мысленный процесс разбивания целого на части, рассмотрение, изучение предмета на основе собственного опыта. Подобные умения формируются у учащихся ещё в начальной школе. К концу обучения в начальной школе у учащихся сформированы умения анализировать типологические особенности арифметических задач, осознанно выбирать соответствующий способ решения, целенаправленно троить последовательность действий по решению задач, то есть у учащихся возникают предпосылки теоретического мышления» [33].

В.А. Сластёнин «аналитическими умениями считает следующие умения:

– умение расчленить явление на составляющие элементы (условия, причины, стимулы, средства и т.д.);

– умение осмыслить каждую часть в связи с целым и во взаимодействии;

– умение определить проблему и способы её оптимального решения» [24].

Структура аналитических умений включает личностную и деятельностную оставляющие:

– «первая по сути своей представляет потенциальную характеристику аналитических умений старшеклассников, включая мотивационный, содержательный, деятельный, результативно-оценочный аспекты; выделенные компоненты, взаимодействуя друг с другом, образуют целостную, динамическую структуру» [24];

– «вторая составляющая проявляется в сущностных (деятельностных) характеристиках аналитических умений старшеклассников и связана, в частности, с осознанностью, освоенностью, обобщённостью этапной реализации процесса формирования аналитических умений учащихся старшей школы» [24].

«Педагогическая сущность формирования аналитических умений старшеклассников заключается в актуализации и развитии образовательного потенциала личности, она обусловлена характеристикой выделенных критериев (мотивационный, содержательный, деятельностный, результативно-оценочный)» [51].

На основе анализа у учащихся при школьном обучении развивается аналитическое мышление, благодаря которому осуществляется исследование сложного явления [17].

Вторая составляющая аналитических умений – умение формулировать и задавать вопросы. В самом общем приближении диалог предполагает наличие вопроса и ответа [18].

Третья составляющая аналитических умений –рефлексия. В отечественной психологии представлены многочисленные исследования, посвященные проблеме рефлексии, ее методологические, теоретические, экспериментальные и прикладные аспекты изучены достаточно разносторонне. «Старший школьный возраст — это период интенсивного развития самосознания, когда происходит активное познание самого себя и поиск информации, значимой для своего будущего. В результате направленной формирующей работы в знании старшеклассников появляется второй, более сложный уровень самопознания, где соотношение знаний о себе происходит не в оппозиционных рамках «я и другой», а в рефлексивных пределах внутреннего диалога» [13].

Таким образом, аналитические умения – это важная составляющая общих умений старшеклассников, имеющая большое значение при изучении математики и решении математических , особенно алгебраических задач [19].

Аналитические умения объединяют следующие черты:

– «сознательность (осознанный характер) установления ценностных взаимоотношений между целью деятельности и способами-условиями её достижения;

– однородность структурного строения (совокупность различных практико-ориентированных знаний и навыков);

– однотипность механизма практической реализации (самостоятельный перенос известных способов деятельности в новые условия)» [49].

Таким образом, формирование аналитических умений старшеклассников несомненно более сложный процесс, чем формирование обще учебных умений: здесь труднее выявить действительную степень их сформированное [21].

Применение игровых технологий также может быть использовано при формировании аналитических умений.

Каждый человек в своей жизни хотя бы раз сталкивался с определенной игрой. Благодаря игровой деятельности учащиеся дошкольного и младшего школьного возраста проходят процесс непосредственной социализации, так как приобретают навыки коммуникации со своими сверстниками [22].

Существует множество различных подходов к определению понятия игры, причем как с психологической, педагогической, так и математической точки зрения.

Игра является одним из важных видов деятельности детей, так как благодаря ей, ребенок познает окружающий мир, формирует, развивает психические процессы и т. д. Благодаря применению игровых технологий, учитель может многократно повысить эффективность процесса обучения, так как игра позволяет испытать ребенку положительные эмоции, которые помогут более качественно осваивать новый учебный материал.

Игры существовали ещё с древних времен, однако с развитием человечества приобретали всё новые формы и правила. Первобытное общество применяло игры для выражения своей культуры и неповторимости. Игры того времени изображали реальные процессы и явления, которые происходили с их участниками [23].

Следовательно, игра является одним из видов деятельности, которая является неким ответвлением от привычной всем трудовой деятельности.

Игра имеет большое прикладное значение, так как даёт возможность ребенку ощутить свою важность в осуществляемой деятельности, проявить свои личностные качества. Игра оказывает всестороннее влияние на учащихся младшего школьного возраста и помогает им найти своё место в том социуме, в котором они находятся в данный момент жизни [24].

В начале прошлого века, об игре начал говорить Л.С. Выготский [5] ,он впервые начал говорить о полезности детских игр в процессе обучения. В своих работах он упоминает об алгоритме разработки педагогической ценности игры. Выготский [5] заметил, что игра не возникает просто так, она является результатом развития культуры различных народов.

Игра по сути является высшей формой поведения, и имеет возможность решать множество сложных задач, которые нельзя решать с помощью традиционных способов обучения. Следовательно, требования, предъявляемые к участникам игры – это изобретательность и находчивость [25].

В каждой игре ребенок находится в равных условиях и зависит от действий других игроков. Следовательно, каждое последующее задание, будет показывать, как игрок координирует свои действия с другими игроками.

Таким образом, игра — это естественная форма обучения детей младшего школьного возраста, которая может подготовить учащихся к будущей жизни. Игра для детей имеет большое значение и соответствует возрастным особенностям учеников младшего школьного возраста. Можно говорить о том, что с помощью игры развивается множество полезных умений и навыков [26].

Следовательно, игра выступает как некоторый важный процесс развития ребенка, целью которого является формирование навыков наблюдательности, развития и воображения. Игра является универсальным средством познания окружающего мира и имеет большое количество возможностей, таким образом, кратко охарактеризовать понятие игры достаточно проблематично.

Игры используются для изучения математики, физики, химии, биологии, иностранных языков, дисциплин экономического цикла [27].

Игра является деятельностью, которая выполняется для получения «функционального удовольствия». Игра является инструментом развития, следовательно, ребенок в процессе игры развивается, а развивается он, потому что играет [57].

Среди функций игры выделяют следующие:

– функция развлечения;
– коммуникативная функция;
– терапевтическая функция;
– диагностическая функция;
– коррекционная функция;

– функция межнациональной коммуникации;

– функция социализации.

Анализируя материал, касающийся игр, можно сказать, что игра является важным компонентом учебной деятельности учеников, а также, действенным инструментом для учителей. Учитывая накопленный опыт по исследованию игр, так и не удалось дать точную классификацию игр, удалось только найти связь игры с культурой, также определено значение игры при формировании личности и эмпирическим путем определили биологический характер игры и ее обусловленность психологическими и социальными факторами [58].

Немаловажной является классификация игр О.С. Газмана, идеи которого считались и до сих пор считаются новаторскими в современном образовании. Его классификация выглядела следующим образом:

– Подвижные дидактические игры по его мнению являются одним из важнейших видов игр, так как они дают возможность осуществлять физическое развитие детей в школьном возрасте.

– Сюжетно-ролевые дидактические игры. Данный вид игр формирует положительные предпосылки к нравственному воспитанию учащегося, так как в дальнейшем, ему придется столкнуться с социумом, в котором воспитание и правильные ценности имеют важное значение. К сюжетно-ролевым играм можно отнести ролевые, игры-драматизации, режиссерские. Сюжет, это достаточно гибкая составляющая, которая существует во времени и может постоянно меняться, в зависимости от текущей ситуации.

Особое внимание, стоит обратить на компьютерные дидактические игры, которые совершили прорыв в недавнем времени.

– Компьютерные дидактические игры. Игры данного вида отличаются от всех остальных игр тем, что с их помощью можно интерпретировать ролевые методы решения игровых задач, следовательно, появляется возможность отследить все развивающиеся во время игры диалоги, чего нельзя сделать во время игры вживую.

В российском образовании игровые технологии мало применяются. Большинство попыток применить игровые технологии при организации учебной деятельности зачастую не очень успешны.

Существуют и мнения о том, что игра и вовсе является самостоятельным вектором развития образования.

Выводы по первой главе

В результате выполненной работы можно сделать следующие выводы.

Степень разработанности данной темы является недостаточной для успешного формирования аналитических умений учащихся. В первую очередь на это влияют психологические особенности учащихся, а также методы обучения, которые распространены в образовании сегодняшнего времени.

В данной главе были проанализированы основные предпосылки и методы формирования аналитических учащихся. Формирование аналитических учений обучающихся, базируется на нескольких фундаменьтальных принципах, главным из которых является актуализация и развитие образовательного потенциала личности.

Формирование аналитических умений старшеклассников несомненно сложный процесс. Труднее выявить действительную степень их сформированности.

Глава 2 Алгебраические задачи как средство формирования аналитических умений обучающихся

2.1 Элективный курс «Алгебраические задачи»

Пояснительная записка

Рабочая программа элективного курса «Алгебраические задачи» для 10 класса составлена на основе авторской программы А.Н. Землякова [21].

Курс «Алгебраические задачи» «систематизирует и упорядочивает, закрепляет и углубляет знания, умения и навыки учащихся в области элементарной алгебры. Закрепление и углубление знаний учащихся, полученных в курсе алгебры основной школы, основывается на систематизации задач в соответствии с типами выражений, функций, фигурирующих в задачах (рациональных и иррациональных, алгебраических, тригонометрических, показательных, логарифмических) и, на методах решения задач (переход к следствиям, равносильные преобразования, методы замены и разложения, функциональные методы, геометрические интерпретация, графическая интерпретация» [21].

«Основной целью изучения курса является:

– систематизация и углубление знаний, закрепление и упрочнение умений, необходимых для продолжения образования в вузах с повышенными требованиями к математическому образованию выпускников средней школы;

– получение общего представления об элементарной алгебре и применяемых в ней методах как о составляющей всей математики как науки;

– развитие логической и методологической (в узком смысле) культуры, составляющей существенный компонент культуры мышления, рассматриваемый в рамках общей культуры;

– овладение общими приемами организации действий: планированием, осуществлением плана, анализом и выражение результатов действий» [35].

При изучении курса «Алгебраические задачи» перед учащимися ставятся следующие конкретные задачи [28]:

« – получение знаний об основных логических и содержательных типах алгебраических задач: уравнений, неравенств, систем, совокупностей систем уравнений и неравенств, рациональными, иррациональными функциями/выражениями;

– овладение навыками соответствующих алгебраических преобразований выражений и логических преобразований алгебраических задач;

– овладение логическими, аналитическими, графическими методами решения алгебраических задач с изучаемыми классами выражений и функций;

– освоение методов решения и исследования вычислительных и логических задач с параметрами;

– получение конкретного представления о взаимосвязях высшей математики (арифметики, алгебры, математического анализа) с элементарной алгеброй на основе использования методов высшей математики при исследовании и решении алгебраических задач» [35].

Требования к уровню подготовки учащихся. Образовательные результаты (планируемые результаты обучения)

Предметные знания. «Алгебраические задачи: уравнения, неравенства с переменными, системы, совокупности. Множества решений. Следование и равносильность задач» [52].

«Предметные умения, которыми должны овладеть учащиеся по изучению данного курса:

– умение проводить логически грамотные преобразования выражений и эквивалентные преобразования алгебраических задач (уравнений, неравенств, систем, совокупностей);

– умение использовать основные методы при решении алгебраических задач с различными классами функций (рациональными и иррациональными алгебраическими), в том числе: методы замены, разложения, подстановки, эквивалентных преобразований, использования симметрии, однородности, оценок, монотонности;

– умение понимать и правильно интерпретировать задачи с параметрами, логические и кванторные задачи; умение применять изученные методы исследования и решения задач с параметрами: аналитический и координатный» [52].

«Общеинтеллектуальные умения:

– умение анализировать различные задачи и ситуации, выделять главное, достоверное в той или иной информации;

– владение логическим, доказательным стилем мышления, умение логически обосновывать свои суждения;

– умение конструктивно подходить к предлагаемым заданиям;

– умение планировать и проектировать свою деятельность, проверять и оценивать ее результаты»[52].

«Общекультурные компетенции:

– понимание элементарной математики как неотъемлемой части математики, методы которой базируются на многих разделах математики высшей;

– понимание роли элементарной математики в развитии математики, роли математиков в развитии современной элементарной математики;

– восприятие математики как развивающейся фундаментальной науки, являющейся неотъемлемой составляющей науки, цивилизации, общечеловеческой культуры во взаимосвязи и взаимодействии с другими областями мировой культуры» [52].

Рассмотрим учебно-тематический план предполагаемого курса (таблица 1).

Таблица 1 – Учебно-тематический план

№ п/п	Наименование разделов, тем	Кол-во часов
1	Логика алгебраических задач	6
2	Многочлены и полиномиальные алгебраические уравнения	22
3	Рациональные алгебраические уравнения и неравенства.	7
4	Рациональные алгебраические системы	15
5	Иррациональные алгебраические задачи	19

2.2 Методика работы над алгебраической задачей

Как известно, каждая задач начинается с формулировки условия, в котором интерпретируется информация о неизвестных величинах, а также связи между ними, которые будут использованы при непосредственном решении [29].

Образовательный процесс в математическом аспекте, более чем на половину, состоит из алгебраических задач. Повышенная концентрация таких задач обусловлена несколькими важными причинами [30]:

– решения алгебраических задач, дало возможность найти им практическое применение. Благодаря алгебраическим задачам, обучающиеся и не только обучающиеся, могут проанализировать все отношения, возникающие при их решении, что может положительно повлиять на осознание текущей действительности;

– благодаря алгебраическим задачам, обучающийся может осознать, где могут быть полезны математические понятия, с которыми он сталкивается, на протяжении всего изучения математического курса;

– в процессе решения можно формировать умения, необходимые для решения любой математической задачи [31].

«Следует иметь в виду, что понятие «решение задачи» можно рассматривать с различных точек зрения: решение как результат, т.е. как ответ на вопрос, поставленный в задаче, и решение как процесс нахождения этого результата. С точки зрения методики обучения решению задач на первый план выступает процесс нахождения результата, который, в свою очередь, тоже можно рассматривать с различных точек зрения. Во-первых, как способ нахождения результата и, во-вторых, как последовательность тех действий, которые входят в тот или иной способ» [57].

В более общей классификации, все задачи подразделяются на простые и составные. Простой задачей является такая задача, которая не требует применения большого количества сложных алгоритмов, требующих множества усложнений. Составной задачей, является задача, которая, может быть решена с применением различных алгоритмов, имеющих разную степень сложности [34].

Введение нового типа составных задач, проводится по классическому методу, сначала проводится пропедевтика, суть которой, подготовить обучающихся, к получению нового материала, далее проходит ознакомление учащихся с новым материалом темы, и на последнем этапе происходит практическая реализация, полученных на уроке знаний [35].

Как правило, процесс решения составной задачи подразумевает её разбиение на множество более простых задач, результат решения которых, приводит к решению первоначальной задачи.

Процесс решения каждой составной задачи осуществляется поэтапно:

– ознакомление с содержанием задачи;

– поиск решения задачи;

– оставление плана решения;

– запись решения и ответ;

– проверка решения задачи.

Следовательно, основной посыл при решении задач по данному алгоритму заключается в том, чтобы после проведения анализа исходного условия задачи, получить способ её решения, в который будут включены все необходимые действия, логически выстроенная последовательность этих действий, которая приведет к нужному конечному результату [38].

Стоит подчеркнуть, что между такими понятиями как «обучение решение задачи» и, непосредственно, « решением задачи», существует весомая разница, которая будет продемонстрирована при дальнейшем изложении материала в работе [40].

Различия подобного рода вызваны тем, что в различных источниках литературы, возникает подмена понятий, отсюда, возникает такая ситуация, когда вопрос «Как научить решать задачи?» заменяется на казалось бы, равнозначный, «Как решать задачи на уроке?». Следовательно, методика обучения решению задач сводится к методике решения задач. В результате такой подмены, получается, что вся работа по организации учебной деятельности преподавателя, направлена на то, чтобы находить ответы на поставленные в исходной задачи вопросы, а не на формирование умения решать задачи, к направленности деятельности учащихся на решение конкретной задачи, а не на овладение способом решения [41]. По этой же причине среди части учителей всё ещё распространено мнение, что любая задача, включённая в урок, должна быть обязательно решена на уроке, решение доведено до конца и записано должным образом [42]. Таким образом, эффективность работы учащегося на уроке заметно снижается, за счет траты времени на ненужные действия, которые не формируют умения решать поставленные задачи [43].

«Обучение решению задач – это специально организованное взаимодействие учителя и учащихся, цель которого – формирование у учащихся умения решать задачи» [60].

«Вначале полезно помочь каждому ученику осознать уже имеющиеся у него собственные представления. Для этого нужно попросить детей произнести вслух слова решить задачу и представить, что они означают. Затем каждому ученику дать возможность высказаться. В результате прийти к тому пониманию, которое принято в математике и в других областях знания: решить задачу – это значит ответить на её вопрос так, чтобы ответ соответствовал условию задачи. Теперь полезно «поиграть» с задачами, выбирая ответ к ним среди нескольких данных» [61].

Следовательно, представленная система чётко придерживается того, что в процессе обучения решению алгебраических задач, первоначальным действием, при её решении, должен являться анализ. Учитель должен разными способами намекать ученикам, чтобы они озвучивали все методы и приемы, которые были использованы при решении задачи. Построенная таким образом работа над задачей поможет ученикам, осознавать осуществляемые ими действия при её решении [45].

Наличие определенного количества знаний, а также умение находить необходимые зависимости между различными величинами, присутствующими в задаче, даёт ученику возможность отсортировывать информацию и выбирать только ту, которая нужна для решения поставленной задачи [46].

Например, «при решении задач с параметрами могут возникать такие трудности [47]:

– приходится производить ветвление всех значений параметров на отдельные классы;
– не умеют переводить задачу, заданную аналитически, в графическую;
– сложность восприятия заданий» [12].

В учебной литературе очень мало отводится места объяснению решений задач с параметрами. Соответствующей литературы много, но выпускаемые задачники и книги имеют очень узкую направленность и ориентированы на подготовленных школьников или даже студентов. В школьных учебниках отводится очень мало времени или вообще не отводят время на задачи с параметрами. Изучение данной темы затрагивают в некоторых учебниках только в 11 классе. Начинать изучение данной темы стоит с 7-го класса [48].

Важно чтобы учащиеся сначала осознавали и понимали важные моменты:

«Например, что параметр – это число, а с другой стороны это неизвестная» [24].

Задача. Сравните числа –a и 3a.

Решение. Распространенная ошибка это, то что считают что $-a < 3a$.

На первый взгляд, и правда –a<0, а 3a>0. Но это далеко не так. Сам параметр может быть любым числом: a=0, a>0 или a<0.

Значит нужно рассматривать сразу три случая, когда

a>0, то *–a<0*, а 3a>0

Следовательно,–a< 3a.

Второй случай, a=0, то –a=0 и 3a=0, а значит они равны. 0=0

Третий случай a <0 , то -a>0, а 3a<0. Следовательно, -a>3a

Ответ: если a >0, то -a<3a; если a=0, то-a=3a, если a< 0, то 3a< -a

Учитывать независимость параметра от условия задачи [49]:

– Определить, что из себя представляет заданное уравнение

– Переформулировать задачу с параметром в другом виде: решить семейство уравнений, полученных из уравнения при любых значениях параметра.

– Разделить множество значений параметра на подмножества

– Решить заданное уравнение на каждом подмножестве.

Основные способы (методы) решения задач с параметром.

«Способ I (аналитический). Это способ так называемого прямого решения, повторяющего стандартные процедуры нахождения ответа в задачах без параметра» [35].

«Способ II (графический). В зависимости от задачи (с переменной x и параметром a) рассматриваются графики или в координатной плоскости (x; y), или в координатной плоскости (x; a)» [35].

«Способ III (решение относительно параметра). При решении этим способом переменные *x* и а принимаются равноправными и выбирается та переменная, относительно которой аналитическое решение признается более простым. После естественных упрощений возвращаемся к исходному смыслу переменных *x* и а, и заканчиваем решение» [35].

«Метод решения относительно параметра удобно применять, когда:

– выражение имеет высокую степень как многочлен относительно переменной x и одновременно является линейным или квадратным выражением относительно параметра [51];

– если формулировка задачи подсказывает, что переменную по смыслу задачи удобно считать параметром, а параметр – считать переменной;

– если геометрическое место точек, определяемое заданным в условии неравенством, удается изобразить на координатной плоскости «переменная-параметр» [36].

Любая математическая задача может быть параметризована, а это значит, что все уравнения и неравенства могут быть любого типа – с параметрами и без них. Можно сделать вывод, что сравнивать уравнения и неравенства с параметрами с квадратами, логарифмами и т.п. совершенно неразумно и неудобно [52]. Алгоритмы решения задач с параметрами четко определены, органично интегрированы в каждую тему курса, для каждой темы курса разработана система упражнений. При изучении понятий «параметр» и «параметрическое уравнение» студенты должны четко понимать и усвоить правильное определение «параметрического уравнения» и освоить различные методы решения [53].

Выделим несколько уровней подготовки школьника по предмету «Уравнения и неравенства» [50]:

– умение решать простейшие уравнения и неравенства с параметрами;

– возможность решать уравнения и неравенства с простейшими параметрами, такими как добавить число к обеим частям уравнения (неравенство); две части уравнения (неравенства), разделенные на число; привести к общему числовому знаменателю, привести к сходным терминам и т. д.

– умение решать уравнения, содержащие параметры, и приводить к ним простыми преобразованиями;

– возможность решать уравнения, содержащие параметры, используя замены переменных, упрощенные формулы умножения, декомпозицию и т.п. для сведения их к максимально простым уравнениям.

– возможность решения параметров, сведенных к простейшим уравнениям (неравенствам), посредством «сложных» преобразований.

Задачи с параметрами в современной системе школьного математического образования занимают особое место, они пронизывают практически весь курс школьной математики. Учителя в некоторой степени избегают этих задач в своей практической деятельности и поэтому школьники не охотно приступают к решению таких задач, часто боятся их. Примечательно, что такие задачи отсутствуют в абитуриентских учебниках и тестах Германии, Канады [57].

Задачи с параметрами могут быть разноуровневыми. При формировании аналитических умений целесообразно применять различные уровни задач с параметрами. К сожалению, в большинстве учебных общефедеральных комплектах количество задач с параметрами не превосходит 2%.

Именно поэтому учителям математики необходимо специально продумывать организацию подготовки учащихся к решению задач с параметрами.

Приведем пример урока-практикума в 10 и в 11 классе.

Учащимся раздаются карточки, они начинают работать самостоятельно.

Базовый уровень.

«Для каждого значения параметра a решите уравнение

1) $(\mathrm{a}-2)\mathrm{x} = \mathrm{a}^2 - 4$;

2) $\frac{\mathrm{x}^2-1}{\mathrm{x}-1} = \mathrm{a}$;

3) $\frac{\mathrm{a}-2}{\mathrm{ax}-3} = 1$;

4) $\lfloor \mathrm{x}-1 \rfloor - \mathrm{a}|\mathrm{x}+1| = 2$» [39].

Повышенный уровень.

«1. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$|x - a^2 + a + 2| + |x - a^2 + 3a - 1| = 2a - 3, \qquad (1)$$

имеет хотя бы один корень на отрезке $[5; 23]$.

2. Найдите все значения а, при каждом из которых уравнение

$$\left|\frac{5}{x+1} - 3\right| = ax + a - 2, \qquad (3)$$

на промежутке $(-1; \infty)$ имеет больше двух корней» [53].

«3. Найдите все значения а, при каждом из которых уравнение

$$ax + \sqrt{3 - 2x - x^2} = 4a + 2, \qquad (4)$$

имеет единственный корень» [53].

Высокий уровень.

«1. Решить уравнение

$$\frac{x}{a(x+1)} - \frac{2}{x+2} = \frac{3-a^2}{a(x+1)(x+2)}, \qquad (5)$$

2. Решите уравнение: $a^{x+1} = b^{3-x}$.

3. Найти наименьшее значение параметра a, при котором уравнение

$$\sqrt{x^2 - 6x + 10} + \sqrt{x^2 - 4x + 8} = a, \quad (6)$$

имеет хотя бы один корень.

4. Сколько корней имеет уравнение | | x | – 2 | = a в зависимости от параметра а?» [52].

Приведем решение заданий базового уровня.

Задание 1.

$$(a-2)x = a^2 - 4, \quad (7)$$

Решение. Рассмотрим два случая

1 случай а≠2, то тогда уравнение имеет вид

$$x = \frac{a^2-4}{a-2}, \quad (8)$$

$$x = \frac{(a-2)(a+2)}{(a-2)}, \quad (9)$$

$$x = a + 2, \quad (10)$$

2 случай а=2, то тогда уравнение имеет вид $0 \times X = 0$, где х- любое число. Значит этому уравнению удовлетворяет любое действительное число.

Ответ: для а=2 любое число есть корень; для каждого а≠2 единственный корень х=а+2.

Задание 2.

$$\frac{x^2-1}{x-1} = a, \quad (11)$$

Решение. Рассмотрим два случая

1 случай х$\neq 1$, то

$$\begin{cases} x + 1 = a, \\ x \neq 1; \end{cases} \begin{cases} x = a - 1, \\ a - 1 \neq 1; \end{cases} \begin{cases} x = a - 1, \\ a \neq 2 \end{cases}, \quad (12)$$

2 случай х=1, то а=2. Но х=1 не входит во множество решения уравнений.

Ответ: при а=2 решения нет; при а$\neq 2$, $x = a - 1$.

Задание 3. $\frac{a-2}{ax-3} = 1.$

Решение: $ax - 3 \neq 0,$ то $a - 2 = ax - 3 \ \Leftrightarrow ax = a + 1.$

При а =0 решений нет.

При а$\neq 0$, $x = \frac{a+1}{a}$. Исключим значения а при которых ах-3=0 или $a\ \frac{a+1}{a} - 3 = 0 \ \Leftrightarrow a = 2$

Ответ: при а=0; а=2 решения нет; при $a \neq 0; a \neq 2 \quad x = \frac{a+1}{a}$

Задание 4. $\lfloor x - 1 \rfloor - a|x + 1| = 2.$

Решение:

х-1=0, то х=1

х+1=0, то х=-1

Решим уравнения для каждого промежутка

На промежутке $(-\infty; -1]$

$$|x - 1| = -(x - 1), \tag{13}$$

$$|x + 1| = -(x + 1), \tag{14}$$

Можно переписать следующим образом:

$$-x + 1 + a(x + 1) = 2 \Leftrightarrow x(a - 1) + a = 2 - 1 \ \Leftrightarrow x(a - 1) = 1 - a, \tag{15}$$

Случай а=1:

$$0 \times x = 0, x \in (-\infty; -1]$$

Случай а$\neq 1$

$$x = \frac{1-a}{a-1} = -1, но\ \frac{1-a}{a-1} \leq -1 \ \Leftrightarrow \frac{0}{a-1} \leq 0 \Leftrightarrow a \neq 1, \tag{16}$$

При $a \in [-1; 1]$:

$$|x - 1| = -(x - 1), \tag{17}$$

$$|x + 1| = x + 1, \tag{18}$$

Можно переписать следующим образом:

$$-x + 1 - a(x + 1) = 2 \Leftrightarrow -(a + 1)x = 1 + a, \tag{19}$$

Случай а=-1:

$$0 \times x = 0, x \in [-1; 1]$$

При $a \neq -1$ $x = -1$.

На промежутке $(1; +\infty)$

$$|x-1| = x-1, |x+1| = x+1, \qquad (20)$$

Можно переписать следующим образом:

$$x - 1 - a(x+1) = 2 \Leftrightarrow (1-a)x = a+3, \qquad (21)$$

При $a = 1$: $x \in \emptyset$

При $a \neq 1$:

$$x = \frac{a+3}{1-a}, но\ \frac{a+3}{1-a} > 1 \Leftrightarrow \frac{a+3-1+a}{1-a} > 0 \Leftrightarrow \frac{2a+2}{1-a} > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2a+2>0 \\ 1-a>0 \end{cases} \\ \begin{cases} 2a+2<0 \\ 1-a<0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$-1 < a < 1, \qquad (22)$$

Ответ: x=-1 при $a \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$

$x \in (-\infty; -1]$, то a=1

x=-1; x=$\frac{a+3}{1-a}$, $-1 < a < 1$

$x \in [-1; 1]$, то a=-1.

Решения задач повышенного уровня

Задание 1. «Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$|\mathrm{x} - \mathrm{a}^2 + \mathrm{a} + 2| + |\mathrm{x} - \mathrm{a}^2 + 3\mathrm{a} - 1| = 2\mathrm{a} - 3, \qquad (23)$$

Имеет хотя бы один корень на отрезке $[5; 23]$» [50]

Решение:

Исходное уравнение можно записать следующим образом:

$$(x - a^2 + 3a - 1) - (x - a^2 + a + 2) = 2a - 3, \qquad (24)$$

Полагая:

$$m = x - a^2 + 3a - 1, n = x - a^2 + a + 2, \qquad (25)$$

Исходное уравнение преобразуется к:

$$|m| + |n| = m - n, \qquad (26)$$

Тогда при $n \leq 0 \leq m$:

$$x - a^2 + a + 2 \leq 0 \leq x - a^2 + 3a - 1 \leftrightarrow a^2 - 3a + 1 \leq x \leq a^2 - a - 2, \quad (27)$$

Двойное неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases} a^2 - 3a + 1 \leq a^2 - a - 2 \\ \left[\begin{array}{c} a^2 - a - 2 \leq 4 \\ a^2 - 3a + 1 \geq 19 \end{array}\right. \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} 2a \geq 3 \\ \left[\begin{array}{c} a^2 - a - 6 \leq 0 \\ a^2 - 3a - 18 \geq 0 \end{array}\right. \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} a \geq 1{,}5, \\ \left[\begin{array}{c} (a-3)(a+2) \leq 0 \\ (a-6)(a+3) \geq 0 \end{array}\right. \end{cases} \leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a \geq 1{,}5, \\ \left[\begin{array}{c} a \leq -3 \\ -2 \leq a \leq 3, \\ a \geq 6 \end{array}\right. \end{cases} \quad (28)$$

Ответ: $a \in [1{,}5; 3] \cup [6; +\infty)$

Задание 2. «Найдите все значения а, при каждом из которых уравнение

$$\left|\frac{5}{x+1} - 3\right| = ax + a - 2, \quad (29)$$

на промежутке $(-1; \infty)$ имеет больше двух корней (рисунок 3)» [50].

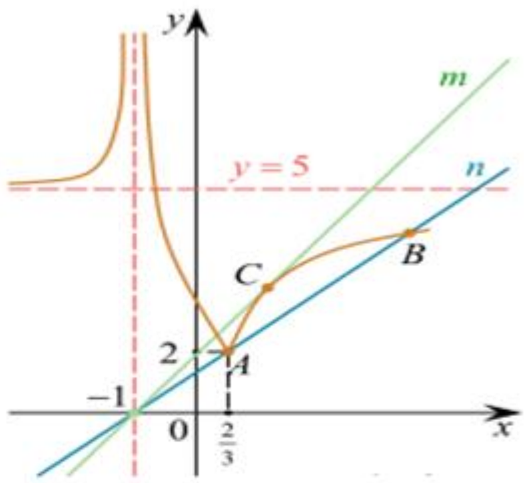

Рисунок 3 – Графики функций, входящих в уравнение

Решение: (графическое)

Рассмотрим функции $f(x) = \left|\frac{5}{x+1} - 3\right| + 2$ и $y = ax + a$

Количество решений равно количеству пересечений графиков.

Уравнение вида $y = \mathrm{a}(\mathrm{x}+1)$ интерпретирует семейство прямых, проходящих через точку $(-1; 0)$, у которых $k = a$. Графическую иллюстрацию можно изобразить следующим образом (Рисунок 3). Важное замечание заключается в том, что при $a \leq 0$ графики не пересекаются на промежутке $(-1; +\infty)$.

Далее нужно проверить все значение параметра, являющиеся положительными. Если возникает ситуация, когда угловой коэффициент $y = \mathrm{a}(\mathrm{x}+1)$ больше или меньше соответствующих угловых коэффициентов прямых n и m, тогда при $(-1; +\infty)$ пересечение будет наблюдаться ровно в одной точке. Если возникает ситуация, когда прямая $y = \mathrm{a}(\mathrm{x}+1)$ совпадает с прямой n или с прямой m, тогда пересечение будет наблюдаться ровно в двух точках. Следовательно, пересечения в трех точках возможны только при наличии трех положительных корней, при условии, что прямые $y = \mathrm{a}(\mathrm{x}+$ $+1)$ лежат внутри острого угла, образованного прямыми n и m.

Если $A\left(\frac{2}{3}; 2\right) \in n$ тогда $a\left(\frac{2}{3}+1\right) = 2$ откуда $a =$ $= \frac{6}{5}$. При $\left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$ $f(x) = 5 - \frac{5}{x+1}$ тогда $n \in f(x)$ в точке $y = 5 - B\left(\frac{3}{2}; 3\right)$.

Прямая m касается ветви гиперболы $y = 5 - \frac{5}{x+1}$. Касательная к гиперболе имеет с ней единственную общую точку, поэтому уравнение $5 - \frac{5}{x+1} = a(x+1)$ или $a(x+1)^2 - 5(x+1) + 5 = 0$ при $a = \frac{5}{4}$ имеет единственное решение. Таким образом, $C\left(1; \frac{5}{2}\right)$.

Случай $\frac{6}{5} < a < \frac{5}{4}$ соответствует условию исходной задачи.

Ответ: $a \in \left(\frac{6}{5}; \frac{5}{4}\right)$

Решение (аналитическое).

Пусть $f(x) = ax + a - 2$ и $g(x) = \left|\frac{5}{x+1} - 3\right|$. Далее нужно решить уравнение вида $f(x) = g(x)$ при всех значениях параметра на промежутке $(-1; +\infty)$.

При $a \leq 0$ уравнение $f(x) = g(x)$ не имеет решений на промежутке $(-1; +\infty)$.

При $a > 0$ функция $f(x)$ возрастает. Функция $g(x)$ убывает на промежутке $(-1; \frac{2}{3}]$, поэтому уравнение $f(x) = g(x)$ имеет не более одного решения на промежутке $(-1; \frac{2}{3}]$ при $a \geq \frac{6}{5}$.

При $\left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$ исходное уравнение запишется следующим образом: $ax + a - 2 = 3 - \frac{5}{x+1}$. После преобразований: $ax^2 + (2a - 5)x + a = 0$. При $a > \frac{5}{4}, x \in \emptyset$, при $a = \frac{5}{4}, x = 1$, при $0 < a < \frac{5}{4}$ уравнение имеет два корня.

Если уравнение имеет два корня x_1 и x_2 то есть $0 < a < \frac{5}{4}$ то больший корень $x_2 = \frac{5-2a+\sqrt{D}}{2a} > \frac{5-2a}{2a} > 1 > \frac{2}{3}$ поэтому он принадлежит промежутку $\left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$. Меньший корень x_1 принадлежит промежутку $\left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$ тогда и только тогда, когда

$$f\left(\frac{2}{3}\right) > 0 \leftrightarrow a\left(\frac{2}{3}\right)^2 + (2a-5)\cdot\frac{2}{3} + a = \frac{25a-30}{9} > 0 \leftrightarrow a > \frac{6}{5}$$

Исходя из вышеприведенных рассуждений

$$\left|\frac{5}{x+1} - 3\right| = ax + a - 2, \qquad (30)$$

имеет следующее количество корней на промежутке $(-1; +\infty)$:

– нет корней при $a \leq 0$

– один корень при $0 < a < \frac{6}{5}$ и при $a > \frac{5}{4}$

– два корня при $a = \frac{6}{5}$ и при $a = \frac{5}{4}$

– три корня при $\frac{6}{5} < a < \frac{5}{4}$

Ответ: $\frac{6}{5} < a < \frac{5}{4}$.

Задание 3. «Найдите все значения а, при каждом из которых уравнение $ax + \sqrt{3 - 2x - x^2} = 4a + 2$ имеет единственный корень» [50].

Решение. Исходное уравнение равносильно следующему: $\sqrt{3-2x-x^2} = -ax + 4a + 2$. Пусть: $f(x) = \sqrt{3-2x-x^2}$ и $g(x) = -ax + 4a + 2 = -a(x-4) + 2$ Графическая интерпретация имеет вид (рисунок 4).

Наличие только одного корня возможно только в двух случаях: либо прямая касается полуокружности, либо пересекает её в единственной точке.

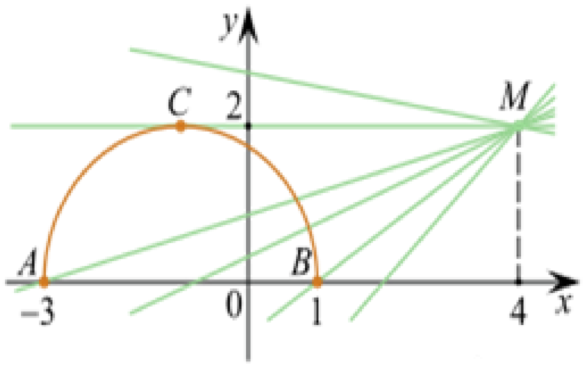

Рисунок 4 – График функции

При $a = 0$ исходное уравнение имеет единственный корень. При $-a < 0$ корней нет.

При $-\frac{2}{3} \leq a < -\frac{2}{7}$ исходное уравнение имеет единственный корень. При $-a > \frac{2}{3}$ корней нет.

Ответ: $[-\frac{2}{3}. -\frac{2}{7}) \cup \{0\}$.

Задание 4. «Найти наименьшее значение параметра a, при котором уравнение

$$\sqrt{x^2 - 6x + 10} + \sqrt{x^2 - 4x + 8} = a, \quad (31)$$

имеет хотя бы один корень» [50].

В данном случае, нужно найти наименьшее значение функции a (x),

$$a(x) = \sqrt{(x-3)^2 + 1} + \sqrt{(x-2)^2 + 4}, \quad (32)$$

Пусть $\vec{p}(3-x;1)$,$\vec{q}(x-2;2)$, тогда $|\vec{p}|=\sqrt{(x-3)^2+1}$, $|\vec{q}|=\sqrt{(x-2)^2+4}$. Вектор $\vec{p}+\vec{q}$ имеет координаты (1;3) и

$|\vec{p}\ +\vec{q}| = \sqrt{1^2+3^2} = \sqrt{10}$. В силу $|\vec{p}| + |\vec{q}| \geq |\vec{p}\ +\vec{q}|$ и $a \geq \sqrt{10}$, последнее неравенство выполняется, если $\vec{p}$ и $\vec{q}$ сонаправлены.

Если $\vec{p}$ II $\vec{q}$,то $\frac{3-x}{x-2} = \frac{1}{2}$, х $=\frac{8}{3}$.

Наименьшее значение достигается при х $=\frac{8}{3}$ и $a = \sqrt{10}$.

Ответ: $\sqrt{10}$.

Приведем решение задания 4 высокого уровня.

Задание 4. «Сколько корней имеет уравнение

$$| \, | x | - 2 \, | = a, \tag{33}$$

в зависимости от параметра а?» [50]

Решение. Графическая интерпретация графиков, входящих в уравнение (Рисунок 5).

По рисунку можно заметить, что если $a = 0$, то прямая $y = a$ совпадает с осью ОХ и имеет с графиком функции $y = |\,|x| - 2\,|$ две общие точки; значит, исходное уравнение имеет два корня.

Если $0 < a < 2$, то прямая $y = a$ имеет с графиком функции $y = |\,|x| - 2|$ четыре общие точки и, следовательно, исходное уравнение имеет четыре корня.

Если $a = 2$, то прямая $y = 2$ имеет с графиком функции три общие точки. Тогда исходное уравнение имеет три корня (Рисунок 5).

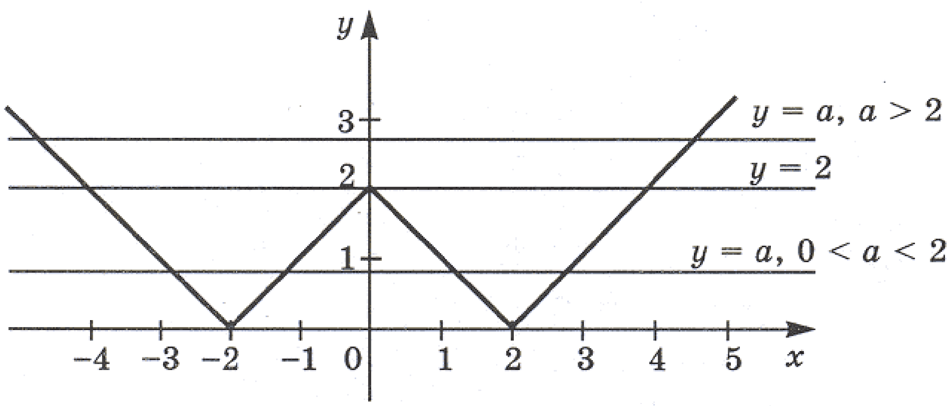

Рисунок 5 – Графики функции при различных значениях параметра

Если *a > 2*, то прямая *y = a* будет иметь с графиком исходной функции две точки, то есть данное уравнение будет иметь два корня.

Ответ: если *a < 0*, то корней нет; если *a = 0* или *a > 2*, то два корня; если *a=2*,то три корня; если *0<a<2*, то четыре корня.

2.3 Система алгебраических задач применяемых для развития аналитических умений учащихся общеобразовательной школы

Пример 1. «Решить уравнение $ax = 5$»[39],

Решение: перед нами линейное уравнение.

Если $a = 0$, то уравнение $0 \cdot x = 5$решения не имеет.

Если $a \neq 0$, $x = \frac{5}{a}$ - решение уравнения.

Ответ: при $a \neq 0$, $x = \frac{5}{a}$, при $a = 0$ решения нет.

Пример 2. «Решить уравнение $ax - 6 = 2a - 3x$» [39].

Решение: перед нами линейное уравнение. Найдем его корни при различных значениях параметра:

$$ax - 6 = 2a - 3x, \tag{34}$$

$$ax + 3x = 2a + 6, \tag{35}$$

Переписав уравнение в виде

$$(a + 3)x = 2(a + 3), \tag{36}$$

рассмотрим два случая: $a = -3$ и $a \neq -3$.

«Если $a = -3$, то любое действительное число x является корнем уравнения (1). Если же $a \neq -3$, уравнение (1) имеет единственный корень $x = 2$ » [15].

Ответ: при $a = -3$, $x \in R$; при $a \neq -3$, $x = 2$.

Пример 3. «При каких значениях параметра a среди корней уравнения $2ax - 4x - a^2 + 4a - 4 = 0$ есть корни больше 1» [37]?

Решение: решим уравнение

$$2ax-4x-a^2+4a-4=0, \quad (37)$$

– перед нами линейное уравнение

$$2(a-2)x=a^2-4a+4, \quad (38)$$

$$2(a-2)x=(a-2)^2, \quad (39)$$

При $a=2$ решением уравнения $0x=0$ будет любое число, в том числе и большее 1.

При $a\neq 2$, $x=\frac{a-2}{2}$. По условию $x>1$, то есть $\frac{a-2}{2}>1, a>4$.

Ответ: при $a\in\{2\}\cup(4;\infty)$.

Пример 4. «Для каждого значения параметра a найти количество корней уравнения $ax=8$» [39]

Решение. $ax=8$ –перед нами линейное уравнение.

$$a=\frac{8}{x}, \quad (40)$$

$y=a$ – семейство горизонтальных прямых;

$y=\frac{8}{x}$ - графиком является гипербола.

Построим графики этих функций (Рисунок 6).

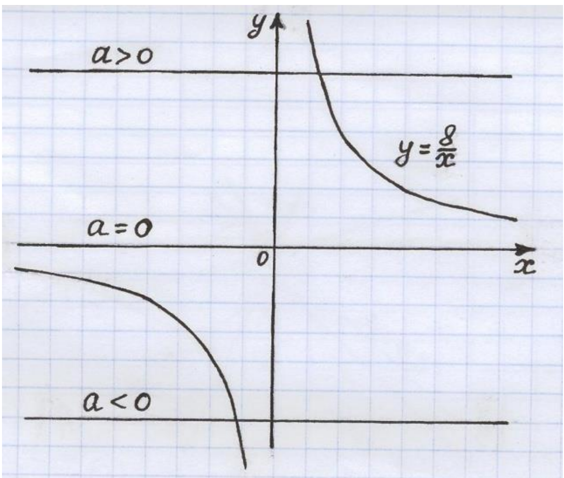

Рисунок 6 – Графики функций

Ответ: если а=0, то уравнение решений не имеет. Если а $\neq$ 0, то уравнение имеет одно решение.

Пример 5. «С помощью графиков выяснить, сколько корней имеет уравнение: $|x| = ax - 1$» [40]

$y = |x|, y = ax - 1$ – графиком является прямая, проходящая через точку (0; -1).

Построим графики этих функций (рисунок 7).

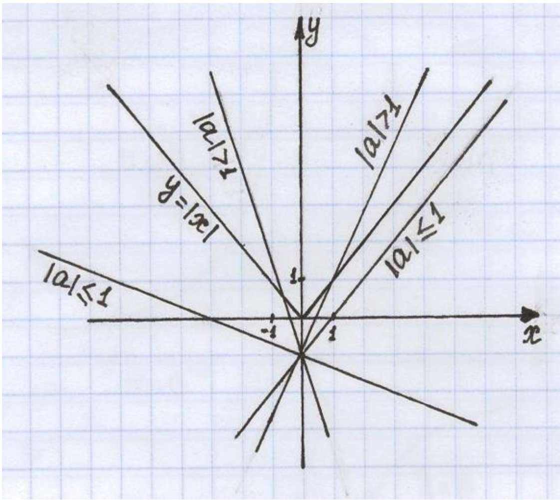

Рисунок 7 – Графики функций

Ответ: при $|a| > 1$- один корень, при $|a| \leq 1$ – уравнение корней не имеет.

Пример 6.«Решить неравенство $ax + 4 > 2x + a^2$» [41]

Решение.

$$ax + 4 > 2x + a^2 \Leftrightarrow (a-2)x > a^2 - 4, \qquad (41)$$

Рассмотрим три случая:

– $a = 2$. Неравенство $0x > 0$ решений не имеет.

– $a > 2$. $(a-2)x > (a-2)(a+2) \Leftrightarrow x > a + 2$

– $a < 2$. $(a-2)x > (a-2)(a+2) \Leftrightarrow x < a + 2$

Ответ. $x > a + 2$при $a > 2$; $x < a + 2$, при $a < 2$; при $a = 2$ решений нет.

Пример 7. «Решить уравнение $ax^2 - 2(a-1)x - 4 = 0$» [44].

Это квадратное уравнение

Решение: Особое значение $a=0$.

– При $a=0$ получим линейное уравнение $2x-4=0$. Оно имеет единственный корень $x=2$.

– При $a \neq 0$. Найдем дискриминант.

$$D=(a-1)^2+4a=(a+1)^2, \tag{42}$$

«Если $a=-1$, то $D=0$ – один корень.

Найдем корень, подставив вместо $a=-1$.

$-x^2+4x-4=0$, то есть $x^2-4x+4=0$, находим, что $x=2$.

Если $a \neq -1$, то $D>0$. По формуле корней получим» [44]:

$$x=\frac{(a-1)\pm(a+1)}{a}, \tag{43}$$

$x_1=2, x_2=-\frac{2}{a}$

Ответ: при $a=0$ и $a=-1$ уравнение имеет один корень $x=2$; при $a \neq 0$ и $a \neq -1$ уравнение имеет два корня $x_1=2, x_2=-\frac{2}{a}$.

Пример 8. «Найдите количество корней данного уравнения $x^2-2x-8-a=0$ в зависимости от значений параметра a» [47]

Решение. Перепишем данное уравнение в виде $x^2-2x-8=a$

$y=x^2-2x-8$ - графиком является парабола;

$y=a$ - семейство горизонтальных прямых.

Построим графики функций (рисунок 8).

Ответ: при $a<-9$, уравнение решений не имеет; при $a=-9$, уравнение имеет одно решение; при $a>-9$, уравнение имеет два решения

Пример 9. «При каких a неравенство $(a-3)x^2-2ax+3a-6>0$ выполняется для всех значений x?» [54]

Решение. Квадратный трехчлен положителен при всех значениях x, если $a-3>0$ и $D<0$, т. е. при a, удовлетворяющих системе неравенств:

$$\begin{cases} \grave{a}-3>0 \\ a^2-(a-3)(3a-6)<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-3>0 \\ 2a^2-15a+18>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\in(3;+\infty) \\ a\in(-\infty;\frac{3}{2})\cup(6;+\infty) \end{cases}, \quad (44)$$

откуда следует, что $a>6$» [54]. Ответ. $a>6$

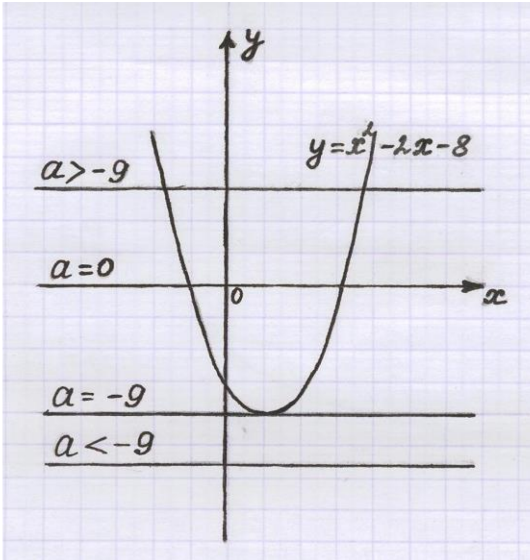

Рисунок 8 – Графики функций из уравнения

Пример 10. «Найдите все значения a, при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} \mathrm{a}(\mathrm{x}-1)\geq 4, \\ 2\sqrt{\mathrm{x}-2}\geq \mathrm{a},, \\ 3\mathrm{x}<a+14; \end{cases} \quad (45)$$

имеет хотя бы одно решение на отрезке [4; 5]» [56].

Преобразуем систему:

$$\begin{cases} \mathrm{a}\geq \frac{4}{\mathrm{x}-1}, \mathrm{x}-1\neq 0 \text{ на отрезке } [4;5] \\ \mathrm{a}\leq 2\sqrt{\mathrm{x}-2}, \\ \mathrm{a}>3x-14. \end{cases}, \quad (46)$$

Если идти по пути графического метода решения, то результаты будут следующими: Графики $a = \frac{4}{x-1}$и $a = 2\sqrt{x-2}$ пересекаются в точке N (3; 2). Графики $a = \frac{4}{x-1}$ и $a = 3x - 14$ пересекаются в точке M(5; 1). График корня и прямая пересекаются в точке K (6; 4).

Поскольку система должна иметь хотя бы одно решение на отрезке [4; 5], определим наименьшую и наибольшую ординаты проекции выделенного на рисунке четырехугольника на ось ординат (рисунок 9).

Найдём координаты точки P:

$a = 2\sqrt{x-2},\ x = 5 \Rightarrow a = 2\sqrt{5-2} = 2\sqrt{3}$

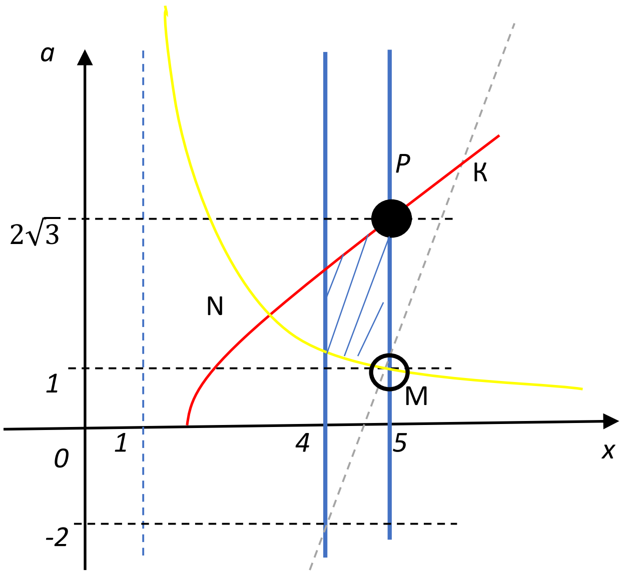

Рисунок 9 – Графическая интерпретация

Проекции точек P и M дают искомое множество: заданная система неравенств имеет хотя бы одно решение на отрезке [4; 5] при$1 < a \leq 2\sqrt{3}$.

Ответ: $(1; 2\sqrt{3})$.

Пример 11. «Найдите все значения a, при каждом из которых имеет ровно три различных решения система уравнений» [57]

$$\begin{cases} (x-4)^2 + (y-4)^2 = 9, \\ y = |x-a| + 1. \end{cases}, \qquad (47)$$

Графически, исходная система выглядит следующим образом (рисунок 10). Каждая из построенных кривых получается в результате применения элементарных преобразований графиков функции, которые изучаются ещё в средней школе.

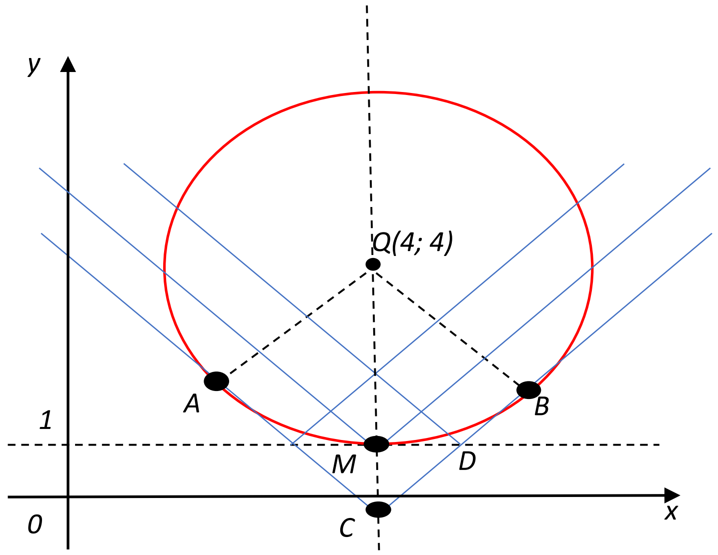

Рисунок 10 – Окружность и прямые

Ровно три общие точки фигуры имеют в следующих случаях:

– Вершина прямого угла лежит в точке Mкасания окружности и прямой $y = 1$, а его стороны пересекают окружность в двух точках (первый случай). Это возможно, только если $a = 4$.

– Одна из сторон прямого угла пересекает окружность в двух точках, а другая касается окружности в точкеA(второй случай) или в точке B (третий случай). Найдём значения параметра для этих двух случаев. Поскольку радиус окружности, проведённый в точку касания окружности и прямой, перпендикулярен прямой, четырёхугольник $BQAC$ является квадратом со стороной 3 и диагональю $3\sqrt{2}$. Тогда $MD = MC = QC - QM = 3\sqrt{2} - 3$.Следовательно, для случая касания в точкеBполучаем$а = 3\sqrt{2} - 3 + 4 = 1 + 3\sqrt{2}$. Для касания стороны угла и окружности в точке A аналогично получаем ещё одно значение параметра:$a = 4 - \left(3\sqrt{2} - 3\right) = 7 - 3\sqrt{2}$.

При $a < 7 - 3\sqrt{2}$ или $a > 1 + 3\sqrt{2}$ прямой угол имеет не более двух общих точек с окружностью.

При $7 - 3\sqrt{2} < a < 4$ или $4 < a < 1 + 3\sqrt{2}$ прямой угол имеет четыре общие точки с окружностью.

Ответ: $a = 7 - 3\sqrt{2}; a = 4; a = 1 + 3\sqrt{2}$.

Пример 12. «Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$(ax - x^2) + \frac{1}{ax - x^2} + 2 = 0 \ , \tag{48}$$

имеет ровно два различных корня на промежутке $(-2; 2]$» [44]

Сделаем замену $y = ax - x^2$, тогда получим:

$$y + \frac{1}{y} + 2 = 0 \Rightarrow \frac{y^2 + 2y + 1}{y} = 0 \Rightarrow \frac{(y+1)^2}{y} = 0 \Rightarrow y = -1, \tag{49}$$

Выполним обратную замену: $ax - x^2 = -1 \Rightarrow x^2 - ax - 1 = 0$. Дискриминант этого уравнения равен$a^2 + 4 > 0$, поэтому оно при всех значениях a имеет ровно два различных корня.

Положим $f(x) = x^2 - ax - 1$. Так как $f(0) = -1 < 0$, оба корня уравнения $f(x) = 0$ принадлежат промежутку $(-2; 2]$ тогда и только тогда, когда $f(-2) > 0$ и $f(2) \geq 0$, то есть когда $4 + 2a - 1 > 0$ и $4 - 2a - 1 \geq 0$. Значит, уравнение $(ax - x^2) + \frac{1}{ax - x^2} + 2 = 0$ имеет ровно два различных корня на промежутке $(-2; 2]$ при $-1{,}5 < a \leq 1{,}5$

Ответ:$-1{,}5 < a \leq 1{,}5$.

Пример 13. «Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\ln(6a - -x)\ln(2x + 2a - 2) = \ln(6a - x)\ln(x - a), \tag{50}$$

имеет ровно один корень на отрезке$[0; 2]$» [54].

Преобразуем уравнение:

$\ln(6a - x)\ln(2x + 2a - 2) - \ln(6a - x)\ln(x - a) = 0 \Rightarrow \ln(6a - -x)\left(\ln(2x + 2a - 2) - \ln(x - a)\right) = 0 \Rightarrow \ln(6a - x) = 0$ или $\ln(2x + 2a - -2) - \ln(x - a) = 0$.

Рассмотрим эти случаи:

Первый случай:

$\ln(6a - x) = 0$ при условиях:

$$\begin{cases} 2x + 2a - 2 > 0, \\ x - a > 0. \end{cases}, \tag{51}$$

$$\begin{cases} 6a - x = 1 \Rightarrow x = 6a - 1 \\ 2(6a - 1) + 2a - 2 > 0, \\ 6a - 1 - a > 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 6a - 1, \\ 14a - 4 > 0, \\ 5a > 1; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 6a - 1, \\ a > \frac{2}{7}. \end{cases}, \tag{52}$$

Число $6a - 1$ лежит на отрезке $[0; 2]$, если $\frac{1}{6} \le a \le \frac{1}{2}$. Тогда для первого случая получаем: $\frac{2}{7} < a \le \frac{1}{2}$.

Второй случай:

$\ln(2x + 2a - 2) = \ln(x - a)$ при условии $6a - x > 0$:

$$\begin{cases} 2x + 2a - 2 = x - a, \\ x - a > 0, \\ 6a - x > 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 - 3a, \\ 2 - 3a - a > 0, \\ 6a - (2 - 3a) > 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 - 3a, \\ \frac{2}{9} < a < \frac{1}{2}. \end{cases}, \tag{53}$$

Число $x = 2 - 3a$ лежит на отрезке $[0; 2]$, если $0 \le a \le \frac{2}{3}$. Тогда для второго случая получаем: $\frac{2}{9} < a < \frac{1}{2}$.

Корень $x = 6a - 1$ равен $x = 2 - 3a$, если $a = \frac{1}{3}$.

«Итак, исходное уравнение имеет ровно один корень на отрезке $[0; 2]$ при $\frac{2}{9} < a \le \frac{2}{7}, a = \frac{1}{3}, a = \frac{1}{2}$» [54].

Ответ: $\frac{2}{9} < a \le \frac{2}{7}, a = \frac{1}{3}, a = \frac{1}{2}$.

Пример 14. «Найдите все значения a, для каждого из которых уравнение

$$25^x - (a + 6) \cdot 5^x = (5 + 3|a|) \cdot 5^x - (a + 6)(3|a| + 5), \tag{54}$$

имеет единственное решение» [56].

Аналитический способ решения:

$$25^x - (a+6)\cdot 5^x = (5+3|a|)\cdot 5^x - (a+6)(3|a|+5), \qquad (55)$$

$$25^x - (a+6)\cdot 5^x - (5+3|a|)\cdot 5^x + (a+6)(3|a|+5) = 0, \qquad (56)$$

$$25^x - (a+6+5+3|a|\ )\cdot 5^x + (a+6)(3|a|+5) = 0, \qquad (57)$$

«Пусть $5^x = t>0$, тогда» [56]:

$$t^2 - (a+6+5+3|a|)\cdot t + (a+6)(3|a|+5) = 0, \qquad (58)$$

Исходное уравнение будет иметь единственное решение:

1 случай: если уравнение (25) имеет единственное решение (D=0);

2 случай: если уравнение (25) имеет два корня (D>0), один из которых меньше нуля или равен нулю.

Пусть $n = a+6, m = 5+3|a|$;

1 случай: $D = (n+m)^2 - 4mn = 0 \Rightarrow n^2 + 2mn + m^2 - 4mn = 0 \Rightarrow$
$n^2 - 2mn + +m^2 = 0 \Rightarrow (n-m)^2 = 0 \Rightarrow a + 6 = 5 + 3|a| \Rightarrow$
$a - 3|a| = -1;$

если $a<0$, то $4a = -1 \Rightarrow a = -\frac{1}{4}$; если$a>0$, то $-2a = -1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$.

2 случай: $D = (n+m)^2 - 4mn > 0 \Rightarrow t_1 = \frac{m+n+\sqrt{(n-m)^2}}{2}$;

$t_2 = \frac{m+n-\sqrt{(n-m)^2}}{2}$;

если $n>m$, то:

$t_1 = \frac{m+n+n-m}{2} = n = a+6; t_2 = \frac{m+n-n+m}{2} = m = 3|a|+5;$

если $n<m$, то:

$t_1 = \frac{m+n-n+m}{2} = m = 3|a|+5;\ t_2 = \frac{m+n+n-m}{2} = n = a+6;$

1) $\begin{cases} a+6>0, \\ 3|a|+a \le 0; \end{cases}$ – система не имеет решений, т.к. выражение $3|a|+5$ всегда положительно.

2) $\begin{cases} a+6 \le 0, \\ 3|a|+5>0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \le -6 \\ 3|a| > -5 \end{cases} \Rightarrow$

или $\begin{cases} a \le -6 \\ -a > -\frac{5}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \le -6 \\ a \le \frac{5}{3} \end{cases} \Rightarrow a \le -6$

или $\begin{cases} a \le -6 \\ a > -\frac{5}{3} \end{cases}$ => $\begin{cases} a \le -6 \\ a > \frac{5}{3} \end{cases}$ => система не имеет решений.

Ответ:$a = -\frac{1}{4}$;$a = \frac{1}{2}$; $a \le -6$.

Графический способ: преобразуем исходное уравнение:

$25^x - (a+6) \cdot 5^x = (5 + 3|a|) \cdot 5^x - (a+6)(3|a|+5)$ =>

$5^x(5^x - a - 6) = (5+3|a|)(5^x - a - 6)$; =>$(5^x - a - 6)(5^x - 3|a| - 5) = 0$ =>$5^x - a - 6 = 0$ или $5^x - 3|a| - 5 = 0$.

Построим графики функций $a = 6 - 5^x$ и $a = \pm\frac{5^x - 5}{3}$ на координатной плоскости xOa (рисунок 11):

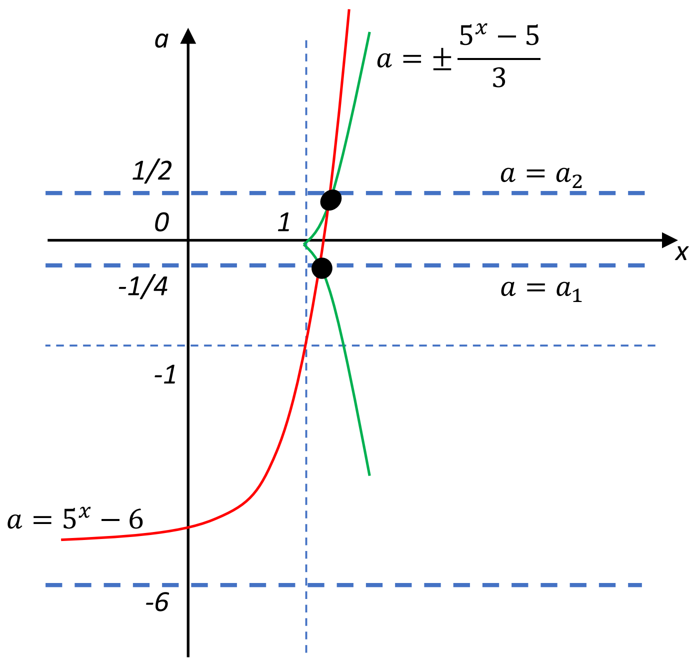

Рисунок 11 – Графики функций

«На чертеже заметим, что система имеет единственное решение при $a = a_1$, $a = a_2$ и $a \le -6$. Найдём a_1 и a_2» [54]:

«Если a>0, то: $\begin{cases} 5^x - a - 6 = 0, \\ 5^x - 5 + 3a = 0; \end{cases}$ =>$6 + a = 5 - 3a$,=>$a_1 = -\frac{1}{4}$» [56].

«Если a<0, то: $\begin{cases} 5^x - a - 6 = 0, \\ 5^x - 5 - 3a = 0; \end{cases}$ =>$6 + a = 5 + 3a$, =>$a_2 = \frac{1}{2}$» [56].

Ответ: $a = -\frac{1}{4}$; $a = \frac{1}{2}$; $a \leq -6$.

«Важно помнить:

– при использовании только графического метода, так же, как и только аналитического, может быть допущена ошибка, поэтому необходимо последовательно и внимательно указывать ход своего решения. При возможности выполнить проверку полученного результата, применяя другой способ решения];

– ответ, полученный только с помощью графика, может быть сомнителен, поэтому необходимо подкрепить его с помощью аналитического вывода, что в первую очередь подтвердит правоту выбранного пути решения и полученный ответ» [56].

Представляется, что для развития аналитических умений обучение методам и способам решения алгебраических задач в общеобразовательной школе должно быть не только сконцентрировано на прикладных задачах. Следует выдержать разумный баланс между математической теорией и ее практическим аспектом [55].

Пример 15. «Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x + y - xy = 1 \\ x^2 + y^2 - xy = 3 \end{cases}\text{,» [56],} \quad (59)$$

Преобразовав второе уравнение системы к виду

$$(x + y)^2 - 3xy = 3, \quad (60)$$

видим, что удобно ввести новые переменные:

$$u = x + y, \ v = xy, \quad (61)$$

Для u, v получим систему уравнений

$$\begin{cases} u - v = 1 \\ u^2 - 3v = 3 \end{cases}, \quad (62)$$

Выразив u из первого уравнения и подставив во второе, получаем квадратное уравнение:

$$v^2 - v - 2 = 0, \quad (63)$$

корнями которого являются числа $v_1 = 2$ и $v_2 = -1$.Тогда

$$u_1 = 3 \text{ и } u_2 = 0, \tag{64}$$

Из предыдущего следует, что данная система равносильна совокупности следующих двух систем:

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ xy = 2 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x + y = 0 \\ xy = -1 \end{cases}, \tag{65}$$

Первая система имеет два решения (1; 2) и (2; 1), а вторая система имеет два решения (1; -1) и (-1; 1).

Таким образом, исходная система имеет четыре решения:

(1; 2), (2; 1), (1; -1), (-1; 1)

Одним из нестандартных методов решения систем уравнений является метод использования свойств векторов. Учитывая, что в курсе геометрии векторам уделяется недостаточно времени, учащимся вначале следует объяснить основные понятия коллинеарности векторов $\bar{a} = (x_1;\ y_1;\ z_1)$ и $b = (x_2;\ y_2;\ z_2)$:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}, \tag{66}$$

Если, помимо этого, известно, что векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ сонаправлены, то:

$$|\bar{a}| + |\bar{b}| = |\bar{a} + \bar{b}|, \tag{67}$$

Если векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ направлены противоположно, то

$$|\bar{a}| + |\bar{b}| = |\bar{a} - \bar{b}|, \tag{68}$$

Перпендикулярность векторов проверяется и с помощью других соотношений:

$$x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0, \tag{69}$$

Проиллюстрируем идею применения векторов на следующем примере решения системы уравнений.

Пример 16. «Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} \sqrt{(x+1)^2 + y^2} + \sqrt{(x-3)^2 + y^2} = 4 \\ x^2 + y^2 - 8x + 12 = 0 \end{cases}, \tag{70}$$

Выражение в левой части по своей форме напоминает сумму длин двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ с координатами» [56]:

$$\bar{a} = (x + 1;\ y),\ \ \bar{b} = (x - 3;\ y), \tag{71}$$

По виду векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ видно, что вектор $\bar{c} = \bar{a} - \bar{b}$ имеет координаты, не зависящие от x и y:

$$\bar{c} = \bar{a} - \bar{b} = (4; 0) \qquad c = |\bar{c}| = 4, \tag{72}$$

Таким образом, первое уравнение системы принимает вид:

$$a + b = c \ \text{ или } |\bar{a}| + |\bar{b}| = |\bar{a} - \bar{b}|, \tag{73}$$

Это означает, что векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ коллинеарны и противоположно направлены. Однако, у векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ вторая координата одинакова. Следовательно, векторы могут быть коллинеарны и противоположно направлены лишь если их первые координаты равны со знаком «минус», что в данном случае возможно лишь если $y = 0$.

Система приобретает вид:

$$\begin{cases} |x + 1| + |x - 3| = 4 \\ x^2 - 8x + 12 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x + 1| + |x - 3| = 4 \\ (x - 6)(x - 2) = 0 \end{cases}, \tag{74}$$

Единственным решением этой системы является: $x = 2$. При этом, векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ оказываются противоположно направленными:

$$\frac{x+1}{x-3} = \frac{3}{-1} < 0, \tag{75}$$

К числу нестандартных относятся методы, основанные на монотонности и ограниченности функций.

Основная идея использования ограниченности заключается в сравнении предельных значений функций, входящих в систему уравнений. Если на некотором отрезке

$$a_1 \leq x \leq a_2, \tag{76}$$

функция $f(x)$ является монотонно возрастающей, т.е.

$$f(x_1) > f(x_2) \text{ если } a_2 \geq x_1 > x_2 \geq a_1, \tag{77}$$

и функция $g(x)$ является монотонно убывающей, т.е.

$$g(x_1) > g(x_2), \text{если } a_1 \leq x_1 < x_2 \leq a_2, \tag{78}$$

то тогда уравнение $f(x) = g(x)$ может иметь лишь единственный корень, либо не имеет корней. Для исследования функций на ограниченность и монотонность зачастую приходится использовать производную и другие знания начал анализа.

Пример 17.

Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 7y\log_x 3 - x^2 - 2y^2 = -x - y \\ (x+2)^{\lg(2-y)} = 1 \end{cases}, \tag{79}$$

Из первого уравнения следует, что

$$x > 0, x \neq 1, \tag{80}$$

Тогда:

$$x + 2 > 2,\ x + 2 \neq 3, \tag{81}$$

и из второго уравнения следует:

$$\lg(2 - y) = 0 \Rightarrow 2 - y = 1 \Rightarrow y = 1, \tag{82}$$

Подставляя в первое уравнение, находим:

$$7\log_x 3 = x^2 - x + 1 \Rightarrow \log_3 x = \frac{7}{x^2 - x + 1}, \tag{83}$$

Функция:

$$f(x) = \log_3 x, \tag{84}$$

является монотонно возрастающей для $x > 0$. Далее, исследуем функцию

$$g(x) = \frac{7}{x^2 - x + 1}, \tag{85}$$

с помощью производной

$$g'(x) = -\frac{7(2x-1)}{(x^2-x+1)^2}, \tag{86}$$

При $0 \leq x < 0{,}5$ функция является возрастающей, т.к. $g'(x) > 0$. Зная, что:

$$g(0) = 7,\ g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{28}{3} \text{ и } f\left(\frac{1}{2}\right) = \log_3\frac{1}{2} < 7, \tag{87}$$

на этом участке

$$g_{min}(x) > f_{max}(x), \qquad (88)$$

и уравнение не имеет решений.

При $x > 0{,}5,\ x \neq 1,$ функция $g(x)$ является монотонно убывающей и уравнение

$$f(x) = g(x), \qquad (89)$$

может иметь единственное решение. Подбором находим, что при $x = 3$:

$$f(3) = \log_3 3 = 1,\ g(3) = \frac{7}{3^2-3+1} = 1, \qquad (90)$$

Решение системы уравнений

$$x = 3,\ y = 1, \qquad (91)$$

Рассмотрим примеры, для решения которых используются нестандартные, неклассифицированные методы.

Пример 18.

Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + xy - 2y^2 + 8x + 10y + 12 = 0, \\ x^2 + 3xy + 2y^2 - x + y - 6 = 0. \end{cases}, \qquad (92)$$

Решение.

Решаем каждое из уравнений системы как квадратное относительно неизвестной x:

$$\begin{cases} x^2 + (y+8)x + (-2y^2 + 10y + 12) = 0 \\ x^2 + (3y-1)x + (2y^2 + y - 6) = 0 \end{cases}, \qquad (93)$$

Тогда исходная система преобразуется к виду

$$\begin{cases} (x + 2y + 2)(x - y + 6) = 0, \\ (x + 2y - 3)(x + y + 2) = 0. \end{cases} \qquad (94)$$

и равносильна совокупности четырех систем линейных уравнений:

$$\begin{cases} x + 2y + 2 = 0 \\ x + 2y - 3 = 0 \end{cases}, \begin{cases} x + 2y + 2 = 0, \\ x + y + 2 = 0. \end{cases} \qquad (95)$$

$$\begin{cases} x - y + 6 = 0 \\ x + 2y - 3 = 0 \end{cases}, \begin{cases} x - y + 6 = 0, \\ x + y + 2 = 0. \end{cases} \qquad (96)$$

Очевидно, что первая система не имеет решений, а другие системы дают три решения задачи:

$$(-2;\ 0),\qquad (-3;\ 3),\qquad (-4;\ 2)$$

Пример 19.

Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{x^3}{y} - 2xy = 16, \\ \frac{y^3}{2x} + 3xy = 25. \end{cases}, \tag{97}$$

Решение

Запишем систему в виде

$$\begin{cases} \frac{x^3}{y} = 16 + 2xy \\ \frac{y^3}{x} = 50 - 6xy \end{cases}, \tag{98}$$

Перемножив почленно уравнения этой системы, получаем:

$$13(xy)^2 - 4xy - 800 = 0, \tag{99}$$

Из этого уравнения следует:

$$xy = 8 \text{ или } xy = -\frac{100}{3}, \tag{100}$$

Если $xy = 8$, то из первого уравнения системы находим:

$$\frac{x^4}{xy} = 16 + 2xy,\ x^4 = 256, \tag{101}$$

Соответственно,

$$x_1 = 4,\qquad x_2 = -4$$

$$y_1 = 2,\qquad y_2 = -2$$

Если же

$$xy = -\frac{100}{3}, \tag{102}$$

то из первого уравнения системы следует

$$x^4 = -\frac{800}{169}$$

и система уравнений не имеет действительных корней.

В результате, получаем ответ:

$$(4;\ 2),\qquad (-4;\ -2)$$

Приведенные примеры указывают, что для развития аналитических умений учащихся важную роль играет их обучение технике использования существующих алгоритмов решения широкого спектра как стандартных, так и нестандартных алгебраических задач [58].

Решение таких задач играет ключевую роль в дальнейшем развитии учащихся, так как задействует все возможные навыки и умения, которые получает обучающийся за время прохождения всего курса математики.

2.4 Педагогический эксперимент и его результаты

Первоначальным этапом апробации представленной программы являлся констатирующий этап. Задачей данного этапа является качественная оценка того, насколько хорошо обучающиеся, знакомы с материалом по теме «Задачи с параметрами и методы их решения»

Представленная программа апробировалась в общеобразовательной школе на протяжении двух месяцев, начиная с 1 марта 2022 года и заканчивая 27 апреля 2022 года. Длительность представленной программы рассчитана всего на 8 часов, следовательно, она разделена на 8 занятий по одному часу в неделю. Для апробации, был выбран одинадцатый класс.

Апробация экспериментальной программы «Решение алгебраических задач, а именно решение задач с параметрами» осуществлялась на базе МБОУ «СОШ №4 г. Тосно» Ленинградской области г. Тосно. Данная программа проходилась учениками старшей школы, Также, в апробации принимали участие обучающиеся 10 классов, которые хотели получить различного рода знания о задач с параметрами, а также о методах их решения

Методологической основой представленной программы выступили учебники по алгебре и началам математического анализа для 10 и 11 класса авторского коллектива С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин [43]. Представленный учебник является универсальным, так как содержит материала как для базового, так и для профильного обучения.

Также, преподавательский состав имел полную информацию о содержании курса, как теоретическую, так и практическую. В программе предоставлен план работы по решению задач с параметрами (таблица 2). Следовательно, учащиеся посетили 9 уроков.

Каждый урок был условно разделен на теоретическую и практическую части. Теоретическая часть излагалась в форме лекции, на которой предоставлялся весь необходимый материал, для последующей реализации практической части. Практическая часть урока заключалась в анализе заданий, которые были даны преподавателями на прошлых уроках, а также последующее решение задач по новой теме, которая изучается на уроке.

«На констатирующем этапе экспериментальной работы преподавателям по завершении курса занятий с помощью анкетирования были заданы следующие вопросы:

– Наблюдается ли Вы повышение интереса у обучающихся по ходу занятий к данной теме?

– Какие темы представляются наиболее сложными для обучающихся?

– Как распределить темы между занятиями для лучшего усвоения старшеклассниками?

– Следует ли изменить комплекс задач для занятий?

– Какие рекомендации по улучшению элективного курса Вы можете предложить?» [50].

Таблица 2 – Программа курса

№ занятия	Тема	Дата
1	Лекция. Знакомства с параметрами. Методы решения задач. Линейные уравнения и неравенства.	02.03.2020
2	Практическое занятие «Решение линейных уравнений»	09.03.2020
3	Лекция. Квадратичные уравнения и неравенства с параметрами	16.03.2020
4	Практическое занятие «Квадратичные уравнения и неравенства с параметрами»	23.03.2020
5	Лекция. Дробно-рациональные уравнения и неравенства	06.04.2020

Продолжение таблицы 2

№ занятия	Тема	Дата
6	Практическое занятие: Дробно-рациональные уравнения и неравенства	13.04.2020
7	Лекция. Иррациональные уравнения и неравенства	20.04.2020
8	Практическое занятие. Иррациональные уравнения и неравенства	27.04.2020

Преподаватели отметили живой интерес учащихся (около 70%) к практическим занятиям в рамках данной программы. Сложной была, тема №7 уровень правильного решения задач по этим темам оказался не очень высоким (примерно 50%). В целом, преподаватели, по итогам оценки домашних и самостоятельных работ посчитали целесообразным учет уровневой дифференциации при составлении заданий и изложении материала.

«Учащимся, по завершении обучения на констатирующем этапе экспериментальной работы были заданы следующие вопросы:

– Были ли лекционные занятия интересны для Вас?

– Что на практических занятиях Вам давалось более легко?

– Какой материал вызвал у Вас наибольшее затруднения?

– Понравились ли Вам лекционные занятия?

– Какой материал оказался наиболее интересным?

– Считаете ли Вы полезным для себя полезными умения и навыки, полученные во время посещения занятий?» [50]

Исходя из полученных данных, удалось выяснить, что учащиеся по достоинству оценили представленную программу, несмотря на возникшие некоторые трудности при её реализации.

На поисковом этапе был апробирован теоретический материал, касающихся задач с параметрами и методам их решения. Как результат, была разработана система задач по теме «Решение задач с параметрами».

Выводы по второй главе

Анализируя материал, касающийся развития аналитических умений, можно сказать, что данные умения являются важным компонентом учебной деятельности учеников.

Учитывая накопленный опыт по исследованию аналитических умений, удалось разработать определенную программу, направленную на формирование данных умений.

Для реализации данной программы были выбраны алгебраические задачи, а именно, задачи с параметрами, которые являются одними из сложнейших задач, которые часто можно встретить как в олимпиадных задачах, так и в задачах различных экзаменов.

Заключение

Проведенное исследование в рамках данной работы позволяет представить следующие результаты:

1. Аналитические умения являются довольно сложным и многокомпонентным понятием, которое требует тщательной проработки при построении процесса обучения преподавателем. Каждое занятие должно быть направлено не на поиск ответов, а на умение проводить анализ, сопоставлять важные и второстепенные факты, умение проводить анализ решения и т.д.

2. В работе была рассмотрена классификация методов решения задач с параметрами, которые используются при изложении материала по теме «Решение задач с параметрами» в курсе алгебры общеобразовательной школы.

3. Предложен элективный курс «Алгебраические задачи» для проведения в 10 классе, который предполагает изучение решения задач с параметрами.

4. Описана методика работы над алгебраической задачей.

5. Представлен анализ педагогического эксперимента по апробации предлагаемой экспериментальной программы «Решение задач с параметрами» в рамках элективного курса.

Данная тема является достаточно сложной для изучения, следовательно, представленный курс может быть продолжен в дальнейшем. Продолжение обосновано тем, что данный вид задач всегда присутствует в заданиях вступительных экзаменов, а также в заданиях Единого Государственного Экзамена.

В целом, реализация разработанного курса показала его эффективность.

В работе рассмотрены различные методы и способы развития аналитических умений при решении алгебраических задач, а именно задачи с параметром.

Все поставленные задачи решены, цель данной работы достигнута.

Список используемой литературы и используемых источников

1. Волкова М.В. Взаимодействие рефлексии и уровня притязаний в решении мыслительных задач: автореф. дисс. .. канд. психол. наук . М., 1989. 24 с.
2. Вульфов Б. З. Основы педагогики в лекциях, ситуациях, первоисточниках / Б. З. Вульфов, В. Д. Иванов. М., 1996. С. 76-81.
3. Вульфов Б. З. Основы педагогики: учебное пособие / Б. З. Вульфов, В.Д. Иванов. - изд. 2-е, перераб. и доп. М.: Изд-во УРАО, 1999. 616 с.
4. Вульфов Б. З. Педагогика рефлексии / Б. З. Вульфов, В. Н. Харькин. М.: ИЧП «Издательство Магистр», 1995. 111с.
5. Выготский Л. С. Психология развития как феномен культуры / Л. С. Выготский. М., 1996. 136 с.
6. Высоцкий В. С. Задачи с параметрами при подготовке к ЕГЭ. М.: Научный мир, 2011. 316 с.
7. Газман О. С. От авторитарного образования к педагогике свободы / О. С. Газман // Новые ценности образования: Содержание гуманистического образования; под ред. Н. Б. Крыловой. М.: ИННОВАТОР, 1995. С. 16-45.
8. Гальперин П.Я. Введение в психологию: учеб.пособие для вузов / П. Я. Гальперин. – 2–е изд. – М.: Книжный дом «Университет», 2000. Герценовские чтения. 1997. Актуальные проблемы социальных наук. СПб., 1998. С. 109-111.
9. Гальперин П.Я. Общий взгляд на учение о так называемом поэтапном формировании умственных действий, представлений и понятий / П. Я. Гальперин // Вестник Московского университета. Сер. 14. Психология. 1998. № 2. С. 3-8.
10. Гинзбург М. Р. Психологическое содержание личностного самоопределения / М. Р. Гинзбург // Вопросы психологии. 1994. № 3. С.43.

11. Горбашко Е. А. Качество образования в системе обучения управлению качеством / Е. А. Горбашко // Стандарты и качество. 2001. № 10. С. 20–23.

12. Горнштейн П.И. «Задачи с параметрами» – РИА, 2002г. ФИПИ: Методические рекомендации для учителей, подготовленные на основе анализа типичных ошибок участников ЕГЭ 2019 года по математике [Электронный ресурс] URL:http://fipi.ru/ege-i-gve-11/analiticheskie-i-metodicheskie-materialy (дата обращения 07.10.2020).

13. Гуткина Н. И. Личностная рефлексия в подростковом возрасте: автореф. дисс. канд. психол. наук / Н. И. Гуткина. М., 1983. 20 с.

14. Давыдов В. В. Что такое учебная деятельность? / В. В. Давыдов // Начальная школа. 1999. С. 19.

15. Донсков А. А. Формирование у школьников общеобразовательных школ умений во взаимосвязи с мотивацией учебных действий / А. А. Донсков. – Волгоград, 2001. 149 с.

16. Дубровина И. В. Психология: учебник для студ. сред, пед. учеб.заведений / И. В. Дубровина, Е. Е. Данилова, А. М. Прихожан; под ред. И.В. Дубровиной. М.: Издательский центр «Академия», 1999. 464 с.

17. Дубровина И. В. Формирование личности старшеклассника *I* И. В. Дубровина. М.: Просвещение, 1989. 169 с.

18. Дьяченко В.К. Организационная структура учебного процесса / В. К. Дьяченко. М.,1989. С.21.

19. Журавлев И. К. Теоретические проблемы современного школьного учебника / И. К. Журавлев. М.: Просвещение, 1989. 152–160 с.

20. Занков Л.В. Избранные педагогические труды. М., 2010.

21. Здоровенко М. Ю., Зеленина Н. А., Крутихина М. В. Использование различных методов решения задач с параметром на Едином государственном экзамене по математике // Научно-методический электронный журнал «Концепт». 2016. № 8 (август). 0,4 п. л. URL: http: //e-koncept.ru/2016/16176.htm.(дата обращения 14.04.2021).

22. Земляков А.Н. Алгебра +: рациональные и иррациональные алгебраические задачи. Учебное пособие. 2-е изд. М.:Бином. Лаборатория знаний, 2012 – 320 с.

23. Зотов Ю. Б. Книга для учителя / Ю. Б. Зотов. М., 1984. 344 с.

24. Исакова Д.Г. Методика обучения решению задач с параметрами в курсе средней школы [Электронный ресурс] https://zhurnalpedagog.ru/servisy/publik/publ?id=2580 (дата обращения 26.04.2022).

25. Кабанова-Меллер Е. Н. Учебная деятельность и развивающее обучение / Е. Н. Кабанова-Меллер. М.: Педагогика, 1981. 96 с.

26. Кларин М. В. Педагогическая технология в учебном процессе / М.В. Кларин. М.: Знание,1986. 80 с.

27. Ключевые компетенции и образовательные стандарты; Докл. А. В. Хуторского на отделении философии образования и теории педагогики РАО. 23 апреля 2002 г. Центр «Эйдос»

28. Колягин Ю.М., М.В.Ткачева, Н.Е.Федорова, М. И. Шабунин. Алгебра и начала математического анализа 11 класс Москва: Просвещение, 2016.

29. Конаржевский Ю. А. Педагогический анализ учебно–воспитательного процесса и управления школой / Ю. А. Конаржевский М, 1986. 288 с.

30. Коржуев А. В. Рефлексия и критическое мышление в контексте задач высшего образования А. В. Коржуев, В. А. Попков, Е. Л. Рязанова // Педагогика. 2002. № 1. С. 18–22.

31. Королев С. Л. Единство образовательного и воспитательного процессов в современной школе / С. Л. Королев // Философия образования. – №5. 2002. С. 113–117.

32. Краевский В. В. Методология педагогического исследования/ В. В. Краевский. Самара: СамГПИ, 1994. 165 с.

33. Краевский В. В. Методология педагогического исследования: пособие для педагога-исследователя / В. В. Краевский. Самара: Изд–во Самар. гос. пед. ин–та, 1994. 165 с.

34. Кулишов В. В., Малюга А. В. Технология педагогической поддержки самоактуализации старшеклассников// Научно-методический электронный журнал «Концепт». 2016. Т. 29. С. 70–74. URL: http://e-koncept.ru/2016/56554.htm(дата обращения 12.05.2022)

35. Липилина В.В. Формирование универсальных учебных действий при решении примеров и задач с параметрами с применением многоуровневых систем задач. (Монография) Проблемы реализации ФГОС при обучении математике в основной и старшей общеобразовательной школе. Книга1. г. Самара, 2014 г.

36. Липилина В.В., Ивашкова А.А. Отдельные аспекты обучения решению алгебраических задач в общеобразовательной школе как средству формирования аналитических умений учащихся // Теоретико-методологические аспекты преподавания математики в современных условиях. Луганск, ЛНУ.2022 (в печати)

37. Литвинова И. Н. Решение задач с параметрами как средство формировании исследовательских умений учащихся // Научно-методический электронный журнал «Концепт». 2015. Т. 6. с. 11-15. URL: http: //e-koncept.ru/2015/65203.html.

38. Малова И. Е., Сенчурова Г.П. Обогащающий анализ текстов решения заданий с параметрами [Текст] / И. Е. Малова, Г. П. Сенчурова // Математика в школе. 2018. № 2. С. 43-52

39. Матвеева Т. Е. Принципы конструирования урока в формате ФГОС общего образования//Научно-методический электронный журнал «Концепт». 2013. Т. 3. с. 1231-1235. URL: http: //e-koncept.ru/2013/53249.html.

40. Материалы X Международной студенческой научной конференции «Студенческий научный форум»

URL:<href="https://scienceforum.ru/2018/article/2018005313"> https://scienceforum.ru/2018/article/2018005313 (дата обращения: 30.05.2022)

41. Мирошин В. В. Решение задач с параметрами. Теория и практика/ В. В. Мирошин. М.: Издательство «Экзамен», 2009. 286 с.

42. Мордкович А.Г., Алгебра и начала математического анализа, 10 – 11 класс. Часть 1./А.Г.Мордкович. Москва: Просвещение, 2009.

43. Никольский С.М., Потапов М.К., Решетников Н.Н., Шевкин А.В. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений: базовый и профильный уровни 8-е изд. М.: Просвещение, 2009. 464 с.: ил.

44. Патрикова Т. С. Методика проектирования современного учебного занятия

45. Решу ЕГЭ [Электронный ресурс] URL:https://ege.sdamgia.ru/ (дата обращения 30.05.2022)

46. Саранцев Г.И. Методика обучения математике в средней школе- Москва: «Просвещение», 2002, с.205

47. Сборник научных работ «Проблемы теории и практики обучения математике», представленных на Международную научную конференцию «70 Герценовские чтения», г.Санкт-Петербург, 2017

48. Селевко Г. К. Личностный подход в образовательном процессе / Г. К. Селевко // Школьные технологии. - 1999.–№ 6. С.108–135.

49. Селевко Г. К. Современные образовательные технологии: учебное пособие / Г. К. Селевко. М.: Народное образование, 1998. 256 с.

50. Селевко Г. К. Технология саморазвития личности школьника / Г. К. Селевко // Школьные технологии, 1999. №6. С. 5–26.

51. Федеральный Государственный стандарт среднего (полного) общего образования.

52. ФИПИ: Методические рекомендации для учителей, подготовленные на основе анализа типичных ошибок участников ЕГЭ 2019 года по математике

[Электронный ресурс] URL: http://fipi.ru/ege-i-gve-11/analiticheskie-i-metodicheskie-materialy (дата обращения 28.05.2022)

53. Шахмейстер А.Х. Уравнения и неравенства с параметрами 4-е изд. СПб.:«Виктория плюс»: М.: МЦНМО: СПб.: «Петроглиф», 2019. 304 с.

54. Шестакова С.А. Математика. Задачи с параметром. Задача 18 (профильный уровень) / Под ред. И.В. Ященко. М.:МЦНМО, 2018. 288 с.

55. Электронный журнал «Концепт». 2014. Т. 20. с. 1881-1885. URL: http: //e-koncept.ru/2014/54640.htm. (дата обращения 20.05.2022)

56. Эльконин Даниил., Давыдов В.В. Вопросы психологии учебной деятельности младших школьников. М., 1962. 288 с.

57. Geoff Whitty (1993) Education Reform and Teacher Education in England in the 1990s, Journal of Education for Teaching: International research and pedagogy, 19:4, 263–275.

58. Jean Murray & Rowena Passy (2014) Primary teacher education in England: 40 years on, Journal of Education for Teaching, 40:5, 492–506.

59. John Furlong (2013) Globalisation, Neoliberalism, and the Reform of Teacher. Education in England, The Educational Forum, 77:1, 28–50.

60. Report: A framework of core content for initial teacher training (ITT) July 2016

61. Valerie Halstead (2003) Teacher Education in England: Analysing change through scenario thinking, European Journal of Teacher Education, 26:1, 63–75.