

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Тольяттинский государственный университет»

Институт математики, физики и информационных технологий
(наименование института полностью)

Кафедра «Высшая математика и математическое образование»
(наименование)

44.04.01 Педагогическое образование
(код и наименование направления подготовки)

Математическое образование
(направленность (профиль))

**ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
(МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ)**

на тему «Упражнения на готовых чертежах как средство формирования функциональной культуры обучающихся в общеобразовательной школе»

Студент

В.В. Гуськов

(И.О. Фамилия)

(личная подпись)

Научный
руководитель

канд. пед. наук, доцент, И.В. Антонова

(ученая степень, звание, И.О. Фамилия)

Тольятти 2022

Оглавление

Введение.....	3
Глава 1 Теоретические основы формирования функциональной культуры обучающихся в общеобразовательной школе.....	10
1.1 Понятие функциональной культуры обучающихся.....	10
1.2 Содержание функциональной линии в школьном курсе математики.....	16
1.3 Различные подходы к формированию функциональной культуры обучающихся на уроках математики	27
Глава 2 Методические основы формирования функциональной культуры обучающихся на уроках математики в общеобразовательной школе.....	36
2.1 Упражнения на готовых чертежах при решении алгебраических задач ОГЭ и ЕГЭ	36
2.2 Компьютерные технологии при изучении функциональной линии в школьном курсе математики	48
2.3 Результаты педагогического эксперимента	60
Заключение.....	70
Список используемой литературы.....	72
Приложение А Методический анализ теоретического и практического содержания по теме «Упражнения на готовых чертежах в заданиях ЕГЭ по математике».....	81

Введение

Актуальность и научная значимость настоящего исследования.

Проблема формирования функциональной культуры обучающихся имеет немаловажное значение на современном этапе развития школьного математического образования.

Современная школа должна ориентироваться не только на ее формирование у школьников и развитие основных функциональных понятий, но и учить их применять полученные знания на практике. У выпускников школ не должно возникать проблем с продолжением образования в образовательных учреждениях различного уровня. Они должны свободно ориентироваться в современном мире и применять полученные знания о функциях в любой жизненной ситуации.

Сформированность у обучающихся общеобразовательной школы «представлений о математике как части общечеловеческой культуры, универсальном языке науки, позволяющем описывать и изучать реальные процессы и явления» в соответствии с ФГОС среднего (полного) общего образования [65] может быть обеспечено путем применения на уроках математики различных упражнений на формирование у них функциональной культуры.

Известно, что функциональная линия – одна из основных линий школьного курса математики.

Теоретические аспекты изучения функций в общеобразовательной школе описаны в исследованиях В.Г. Болтянского, Т.А. Ивановой, А.Г. Мордковича; В.А. Далингера; Л.С. Капкаевой; Г.И. Саранцева; Н.Л. Стефановой, Н.С. Подходовой, А.Я. Цукаря и др.

Анализ ранее выполненных диссертационных работ, посвященных формированию функциональной культуры обучающихся, показал, что они были рассмотрены в следующих аспектах:

- «формирования функционально-графической линии курса алгебры в условиях личностно-ориентированного обучения» (Л.В. Тихонова [62], 2002 г.);
- «дифференцированной работы учителя математики при формировании понятия функции» (И.В. Антонова [3], 2004 г.);
- «формирования графической грамотности учащихся при обучении решению планиметрических задач в условиях компьютерной поддержки» (С.М. Танеев [61], 2004 г.);
- «формирования понятий «функция» и «функциональная зависимость величин» у учащихся основной школы в условиях реализации межпредметных связей физики с математикой» (Е.В. Турчанинова [63], 2005 г.);
- «реализации функционально-графической линии в персонализированном обучении общеобразовательному курсу математики с использованием компьютерной системы MATHCAD» (С.Ю. Попадьяна [53], 2009 г.);
- «формирования у учащихся основной школы умений работать с графиками функций в условиях реализации межпредметных связей физики, математики и информатики» (О.В. Абрамова [1], 2012 г.);
- «формирования функционально-графической грамотности учащихся основной школы в процессе обучения математике» (М.Ю. Пермякова [50], 2015 г.).

В ходе анализа научно-методической литературы выделены основные направления работы учителя математики по ее формированию:

- формирование функциональной культуры обучающихся должно быть реализовано на всех ступенях школьного образования (Т.А. Иванова, О.В. Симонова [12]);
- процесс формирования функциональной культуры обучающихся должен носить непрерывный характер (Т.А. Иванова, О.В. Симонова);

- при формировании функциональной культуры необходимо использовать уровневую и профильную дифференциацию обучения (И.В. Антонова; Т.А. Иванова, О.В. Симонова);
- использование в обучении когнитивно-визуального подхода (В.А. Далингер; О.О. Князева [15]; С.М. Танеев), позволит качественно решить проблему формирования функциональной культуры у обучающихся, используя современные информационные технологии;
- современная школа должна ориентироваться не только на формирование знаний, но и на внедрение деятельностного подхода при формировании функциональной грамотности (Т.А. Иванова, О.В. Симонова);
- необходимо использовать в работе выполнение практических заданий межпредметного содержания на метапредметном уровне (О.В. Абрамова).

Таким образом, **актуальность** темы диссертационного исследования обусловлена сложившимся к настоящему времени **противоречием** между необходимостью формирования функциональной культуры обучающихся при изучении функциональной линии в общеобразовательной школе и недостаточной разработанностью методических основ формирования функциональной культуры обучающихся в общеобразовательной школе с помощью упражнений на готовых чертежах.

Указанное в исследовании противоречие позволяют сформулировать и выявить **проблему диссертационного исследования**: каковы методические основы формирования функциональной культуры обучающихся в общеобразовательной с помощью упражнений на готовых чертежах?

Объект исследования: процесс формирования функциональной культуры учащихся в общеобразовательной школе.

Предмет исследования: упражнения на готовых чертежах как средство обучения функциональной линии обучающихся в школьном курсе математики.

Цель исследования: выявить методические основы формирования функциональной культуры обучающихся на уроках математики в общеобразовательной школе с помощью упражнений на готовых чертежах.

Гипотеза исследования: предполагается, что процесс формирования функциональной культуры обучающихся будет эффективным, если: выявить методические основы формирования функциональной культуры обучающихся на уроках математики в общеобразовательной школе с помощью упражнений на готовых чертежах и с их учетом разработать методику ее формирования.

Задачи исследования:

1. Изучить понятие функциональной культуры обучающихся.
2. Выявить содержание функциональной линии в школьном курсе математики.
3. Представить различные подходы к формированию функциональной культуры обучающихся на уроках математики.
4. Составить упражнения на готовых чертежах при решении алгебраических задач ОГЭ и ЕГЭ.
5. Рассмотреть применение компьютерных технологий при изучении функциональной линии в школьном курсе математики.
6. Разработать урок с применением компьютерных технологий в рамках изучения функциональной линии в школьном курсе математики.
7. Провести педагогический эксперимент и представить его результаты.

Теоретико-методологическую основу исследования составили работы М.И. Башмакова [5], В.Г. Болтянского [6], В.А. Далингера [9], Л.М. Фридмана [66], А.Я. Цукаря [67].

Базовыми для настоящего исследования явились также работы В.А. Далингера [9], М.Ю. Пермяковой [50], В.П. Покровского [52], Г.И. Саранцева [59].

Решение поставленных задач потребовало привлечения следующих **методов исследования:** теоретические - анализ научной и учебно-методической литературы, школьных программ, учебников и учебных

пособий в аспекте изучаемой проблемы; изучение опыта работы отечественной и зарубежной школ по исследуемой теме; эмпирические - анализ собственного педагогического опыта работы, наблюдение, беседа, констатирующий и поисковый этапы педагогического эксперимента.

Основные этапы исследования:

- 1 этап (2020/2021 уч.г.): сравнительный анализ ранее выполненных исследований по теме диссертации, школьных учебников, нормативных документов (образовательных стандартов, программ), позволивших определить степень разработанности проблемы исследования, сформулировать гипотезу и задачи исследования;
- 2 этап (2020/2021 уч.г.): определение теоретических основ формирования функциональной культуры обучающихся в общеобразовательной школе;
- 3 этап (2021/2022 уч.г.): определение методических основ формирования функциональной культуры обучающихся в общеобразовательной школе, разработка систем алгебраических задач на готовых чертежах при подготовке к итоговой аттестации по математике учащихся 9 и 11 классов, организация и проведение констатирующего и поискового этапов педагогического эксперимента;
- 4 этап (2021/2022 уч.г.): оформление диссертации, корректировка ранее представленного материала, уточнение аппарата диссертационного исследования, описание результатов экспериментальной работы, формулирование выводов по проведенной работе в рамках диссертационного исследования.

Опытно-экспериментальная база исследования: МБОУ СОШ №20 г. Химки Московской области.

Научная новизна исследования заключается в том, что в нем определена и обоснована методика формирования функциональной культуры на готовых чертежах в курсе математики общеобразовательной школы, основанная на когнитивно-визуальном подходе.

Теоретическая значимость исследования состоит в том, что в нем:

- раскрыто понятие функциональной культуры обучающихся;
- выявлено содержание функциональной линии в школьном курсе математики;
- представить различные подходы к формированию функциональной культуры обучающихся на уроках математики.

Практическая значимость настоящего исследования определяется тем, что в нем разработаны: методические рекомендации по формированию функциональной культуры в курсе математики общеобразовательной школы; системы алгебраических задач на готовых чертежах при подготовке к итоговой аттестации по математике учащихся 9 и 11 классов; конспект урока с применением компьютерных технологий в рамках изучения функциональной линии в школьном курсе математики.

Достоверность результатов и выводов, полученных в ходе проведенного исследования, обеспечивается сочетанием теоретических и практических методов исследования; комплексным анализом педагогической практики и личным опытом работы в общеобразовательной школе.

Личное участие автора в организации и проведении исследования состоит в определении теоретических и методических основ формирования функциональной культуры обучающихся в общеобразовательной школе методических особенностей формирования функциональной культуры обучающихся на готовых чертежах; разработке систем алгебраических задач на готовых чертежах при подготовке к итоговой аттестации по математике учащихся 9 и 11 классов; конспекта урока с применением компьютерных технологий в рамках изучения функциональной линии в школьном курсе математики, в описании результатов экспериментальной работы.

Апробация и внедрение результатов исследования велись в течение всего исследования. Экспериментальная проверка предлагаемых методических рекомендаций была осуществлена в период производственной практики (научно-исследовательской работы) и производственной практики

(преддипломной практики) на базе кафедры «Высшая математика и математическое образование» Тольяттинского государственного университета, в период работы учителем математики на базе МБОУ СОШ №20 г. Химки Московской области.

Теоретические выводы и практические результаты исследования представлены на II Международной научно-практической конференции «Качество обучения как проблема контроля и оценки образовательной деятельности образовательных организаций (учреждений)» (г. Луганск, 27-28 января 2022 г.).

По теме исследования имеется публикация [4].

На защиту выносятся:

- методические рекомендации формирования функциональной культуры обучающихся на уроках математики в общеобразовательной школе;
- системы алгебраических задач на готовых чертежах при подготовке к итоговой аттестации по математике учащихся 9 и 11 классов.

Структура магистерской диссертации. Работа состоит из введения, двух глав, заключения, содержит 26 рисунков, 4 таблицы, список используемой литературы (72 источника). Основной текст работы изложен на 80 страницах.

Глава 1 Теоретические основы формирования функциональной культуры обучающихся в общеобразовательной школе

1.1 Понятие функциональной культуры обучающихся

Анализ научно-методической литературы показал, что в ней рассматриваются понятия «функционально-графическая культура», «графическая культура», «функциональная грамотность», «функционально-графическая грамотность», «графическая грамотность», определены понятия «математическая культура», «математическая грамотность». На сегодняшний день, формирование функциональной грамотности среди обучающихся общеобразовательной школы является одним из приоритетов развития школьного образования.

Рассмотрим различные подходы к понятию функциональная культура и основным понятиям, связанным с ним.

Так, в методической литературе указывается, что один из основополагающих факторов формирования математической культуры в целом у школьников является математическая грамотность.

В исследовании П.Ю. Батчаевой выделены компоненты математической культуры («вычислительная, алгоритмическая, логическая, графическая культура и культура речи; определено, что ядром математической культуры является математическая грамотность»), которую автор видит возможным формировать у учащихся основной школы с помощью специальной системы устных упражнений. Отбирается содержание системы устных упражнений с учетом определенных принципов: «углубление содержания тем и полноты; однотипности; принцип контрпримеров, наблюдения и обобщения, творческой активности и самостоятельности; непрерывного повторения, цикличности, скользящего временного интервала и словарного запаса (региональный комфорт)» [51].

М.Ю. Пермяковой определено, что функционально-графическая культура является элементом общей культуры обучающегося и характеризуется «высоким уровнем знаний, умений и навыков в области визуализации, пониманием механизмов эффективного использования графических отображений функциональных зависимостей для решения задач, умением интерпретировать и оперативно отображать результаты на приемлемом эстетическом уровне»; ее формирование осуществляется на материале функциональной содержательной линии школьного курса математики [51].

На основе иерархических ступеней графической культуры в обучении, выделенных в исследовании М.В. Лагуновой, автором приведены компоненты функционально-графической культуры обучающихся:

- «1) элементарная функционально-графическая осведомленность;
 - 2) функционально-графическая грамотность;
 - 3) функционально-графическая образованность;
 - 4) функционально-графическая компетентность» [51, с. 252],
- отражающие этапы формирования функционально-графической культуры школьников. По мере насыщения на определенном этапе новой учебной графической информацией осуществляется переход с одного этапа на другой.

В исследовании М.Ю. Пермяковой представлена методика формирования функционально-графической грамотности в курсе алгебры основной школы на основе когнитивно-визуального подхода; учитываются уровни изучения школьниками свойств функций, в ходе которого используются различные модели представления учебной информации. Под функционально-графической грамотностью автор понимает «комплекс функционально-графических умений, необходимых для чтения и изображения графиков элементарных функций» [50], которые включают в себя следующие основные виды умений:

- умение читать и анализировать график функции, определять её свойства, находить формулу, задающей функцию;
- умение строить чертеж графика функции по точкам, по ее свойствам или формуле, схематично отображать в соответствии с условием задачи.

Вместе с этим, М.Ю. Пермяковой выделены умения, составляющие функционально-графическую грамотность обучающихся: уметь работать с координатной плоскостью, строить графики функций, определять их свойства, читать, анализировать и преобразовывать их.

Отметим, что методические аспекты обучения математике в общеобразовательной школе на основе когнитивно-визуального подхода рассматриваются в работах В.А. Далингера [9], В.Г. Болтянского [6], Л.М. Фридмана [66], М.И. Башмакова [5], А.Я. Цукаря [67] и др.

По мнению В.А. Далингера [9, с. 37-45], данный подход предполагает процесс обучения математике строить с учетом зрительно-познавательного подхода к формированию знаний, умений и навыков обучающихся, что дает возможность использовать максимальные возможности визуального мышления, то есть познавательные функции наглядности могут быть достаточно широко и целенаправленно применены. Принцип наглядности поможет учащимся овладеть математическими понятиями, так как язык образов помогает оперировать с понятиями и умозаключениями. При решении математических задач автор предлагает сделать акцент на построении чертежа, который должен быть наглядным, правильно построенным и легко выполняемым.

О.О. Князева также предлагает использовать когнитивно-визуальный подход в старшей школе при изучении обучающимися начал математического анализа [15], что позволит им осознанно оперировать понятиями. Для достижения результата в процессе обучения предлагается использовать современные информационные технологии.

Процесс формирования функциональной грамотности также отображен в статье [11] Т.А. Ивановой и О.В. Симоновой, которые считают одним из

ключевых компетентный подход в обучении школьников. Авторы определяют два подхода к понятию функциональной грамотности: прагматический, основанный на социальном заказе, культурологический – основополагающий для педагогической деятельности, учитывающий развитие личности. Также авторы считают, что функциональная грамотность учащегося характеризует качество его подготовки и образованность.

В статье Н.А. Демченковой понятие функциональной графической грамотности трактуется как «система функционально-графических знаний и функционально-графических навыков, необходимых для чтения и отображения графиков элементарных функций» [10]. Подчеркивается, что в настоящее время формирование графической культуры учащихся может осуществляться зачастую лишь с помощью построения графиков функций, диаграмм и геометрических фигур при обучении математике ввиду сокращения учебного времени (или полного его отсутствия) на уроках технического черчения.

О.В. Абрамовой в работе [1] раскрывается проблема навыков работы с графиками при реализации межпредметных связей математики, физики и информатики. Установлено, что для формирования навыков при работе с графиками, решающая роль должна отводиться физике, так как природные явления и окружающий мир тесно связаны с ней. На метапредметном уровне предлагается выполнение практических заданий межпредметного содержания, близкие к реальной действительности. Это поможет добиться повышения качества знаний при работе с графиками функций.

Отметим, что с понятиями «графическая грамотность», «функционально-графическая грамотность» связаны ряд диссертационных исследований: С.М. Танеев [61], 2004 г.; М.Ю. Пермякова [10], 2015 г.

Так, в работе С.М. Танеева решается проблема формирования графической грамотности у учащихся на уроках геометрии в условиях компьютерной поддержки процесса обучения решению планиметрических задач. Автор считает, что важной задачей современного образования является

использование прогрессивных и визуальных методов, с помощью которых улучшается учебно-познавательный процесс школьников, что в первую очередь необходимо для восприятия ими графической информации. Формирование графической грамотности ускорит развитие пространственного мышления, которое поможет в дальнейшем решать им геометрические задачи, работать с чертежами и графиками. Для обеспечения данного процесса предлагается использовать в работе компьютер. Компьютерная поддержка поможет провести урок на качественном уровне.

Вместе с этим, немаловажное значение отводят изучению функции в образовательных учреждениях различного уровня и зарубежные авторы.

В статье Лиза Л. Клемент [70] рассматривается проблема формирования функциональной культуры студентов: на сколько они смогли овладеть необходимыми знаниями и умениями, связанными с понятием функции, чтобы их применить в практической деятельности. Автор считает, что понятие «функция» играет важную роль в учебном курсе математики, «концепция изучения функции» занимает центральное место в способностях учащихся описывать изменения взаимосвязи между переменными, объяснять изменения их параметров, а также интерпретировать и анализировать графики.

В научной статье А. Панаура, П. Майкл-Хрисанфу, А. Филиппу [71] уделяется проблеме изучения функций в школе, формированию функциональной культуры учащихся. В ходе исследования авторами выявлено, что учащиеся испытывают большие трудности при формулировке определения понятия функции, при решении задач на его применение, в том числе и на преобразование графиков функций; у некоторых учащихся сложилось неправильное представление о функциях. Описывались различные технологии и методы обучения школьников для повышения качества усвоения ими данного понятия.

В научной статье Д. Денбэл [68] рассматривает проблему обучения функциям в школе, изучение которых является неотъемлемой частью математики. По мнению автора, изучение функциональной линии в школе

позволит учащимся применить свои знания в различных науках и сферах деятельности. Овладев необходимыми знаниями, у них появится возможность моделировать различные жизненные ситуации.

В статье И. Кляйнер [69] рассматривает проблему изучения функции в старших классах. Автор считает, что концепция изучения функций является одной из отличительных черт «современной математики» по сравнению с «классической» математикой.

В статье А. Серпинской [72] рассматривается проблема мотивации учащихся в обучении функциям. По мнению автора, учащиеся должны иметь возможность использовать свои знания о функциях в различных науках, при объяснении различных жизненных ситуаций и явлений путем их моделирования. Построение модели может являться предметом обсуждения в классе. Построенные модели можно и нужно включать в упражнения.

Таким образом, функциональную грамотность школьников мы будем понимать как один из компонентов функциональной культуры, формирование которой осуществляется на материале функциональной линии школьного курса математики. При формировании функциональной культуры особая роль должна быть отведена функциональной пропедевтике, так как процесс формирования понятия функции достаточно длительный; школьники должны знать различные функциональные зависимости и уметь их применять при решении задач. Полное представление о понятии функции, её свойствах, различных видах элементарных функций происходит в несколько этапов: начиная от «элементарной функционально-графической осведомленности» до «функциональной культуры». У обучающихся будет возможность овладеть не только элементарными навыками, такими как построение графиков функций, но и научиться анализировать их, определять по ним свойства функций, преобразовывать графики функций; находить формулу, задающую функцию. Формирование функциональной культуры целесообразно осуществлять на основе когнитивно-визуального подхода в обучении с использованием информационных технологий. Для повышения уровня функциональной

культуры учащихся может применяться дифференцированный подход [3], в частности уровневая дифференциация. В соответствии с ФГОС среднего (полного) общего образования для учащихся важно уметь применять понятие функции при решении практико-ориентированных задач, которые могут включать задания межпредметного содержания.

1.2 Содержание функциональной линии в школьном курсе математики

Формирование и развитие необходимых знаний и умений учащихся при изучении функциональной линии в общеобразовательной школе очень важно. Оно связано с введением понятия функции, является ключевым и содержательным. С её помощью трактуются основные понятия элементарной математики. Функция считается моделью многих реальных процессов, зависящих от времени, понятие которой следует вводить ещё на пропедевтическом уровне в начальной школе, начиная с функциональной зависимости [60]. Школьники должны уметь применять полученные знания на практике, включая предметы, которые напрямую даже не связаны с математикой. Полученные знания пригодятся также им в быту, в своей жизнедеятельности.

В соответствии с нормативными документами: ФГОС основного общего образования, ФГОС среднего (полного) общего образования [64]; [65] и соответствующими Примерными основными образовательными программами [54]; [55], учащиеся должны овладеть следующими знаниями и умениями при изучении функциональной линии в общеобразовательной школе:

- Знания и умения учащихся при изучении функциональной линии в основной школе на базовом уровне.

В результате освоения темы «Функции» в основной школе учащиеся должны овладеть основными понятиями функции, знать её свойства, символику, также основные функциональные зависимости, кроме того, они

должны уметь читать, анализировать и строить графики, находить координаты точки, полученные знания они должны уметь применять на практике.

- Знания и умения учащихся при изучении функциональной линии в основной школе на базовом и углубленном уровнях.

На базовом и углубленном уровнях учащиеся должны ещё иметь представление о квадратичной функции, о линейной функции и о обратной пропорциональности, графически их отображать и уметь преобразовывать, определять свойства функции по её графическому изображению, также определять её область значения. Обучающиеся должны уметь составлять уравнение прямой, также уметь использовать график функции при решении различных задач.

- Знания и умения учащихся при изучении функциональной линии в основной школе на углубленном уровне.

Знания и умения обучающихся включают в себя оба предыдущих уровня. Кроме того, они должны свободно владеть основными понятиями о дробно-линейной, степенной и линейной функций, содержащей модуль, должны уметь исследовать функцию по её свойствам и решать задачи на прогрессии, также задачи других предметных областей при помощи исследования функций.

- Знания и умения учащихся при изучении функциональной линии в старшей школе на базовом уровне.

В ходе изучения математики в старшей школе, учащиеся должны систематизировать и углубить свои знания о функциях, полученные в основной школе. Они совершенствуют свои навыки построения графиков и их преобразования, знакомятся с новыми видами функций, такими как тригонометрические, показательные и логарифмические, степенные, сложные и взаимнообратные функции, учатся с ними работать, освоят начала математического анализа в том объеме, который им необходим и позволит исследовать элементарные функции, решать простейшие задачи, в том числе и в прикладной области. Старшеклассники должны изучить свойства

данных функций, также уметь находить их область определения, решать уравнения и неравенства (их системы) используя полученные знания, изучить и знать числовые последовательности и прогрессии, предел функции в точке и числовой последовательности, понятия непрерывности и дифференцируемости функции.

- Знания и умения учащихся при изучении функциональной линии в старшей школе на базовом и углубленном уровнях.

Знания и умения учащихся включают в себя требования, предъявляемые при изучении предмета «Математика» на базовом уровне; кроме того, они должны уметь читать, анализировать и строить графики функций, которые заданы разными способами, должны уметь исследовать функцию, знать её свойства, также примеры функциональных зависимостей. Старшеклассники учатся решать задачи с применением графиков функций в реальных процессах или явлениях.

- Знания и умения обучающихся при изучении функциональной линии в старшей школе на углубленном уровне.

Знания и умения обучающихся включают в себя оба предыдущих уровня. Кроме того, учащиеся с помощью графических представлений должны уметь описывать по графику и по формуле свойства функций и их поведение, учатся исследовать функцию. Умея находить область определения функции, старшеклассники должны уметь решать разными способами новые виды уравнений (иррациональные, тригонометрические, показательно-логарифмические), системы уравнений и неравенств; должны применить полученные знания на практике и в своей жизнедеятельности.

В результате освоения основной образовательной программы по предмету «Математика» в общеобразовательной школе, обучающиеся должны получить следующие предметные результаты:

- личностные: у учащихся должны быть сформированы коммуникативная компетентность, мотивация к обучению, стремление к самообразованию, они должны быть готовы к саморазвитию и

самореализации; должны быть сформированы умения: понятно и точно излагать свои мысли, правильно подбирать, оценивать и анализировать информацию;

– метапредметные: учащиеся научатся работать в сотрудничестве, контролировать свою учебную деятельность, самостоятельно выполнять и адекватно оценивать полученный результат после решения поставленных задач, научатся логически рассуждать и устанавливать причинно-следственные связи;

– предметные: обучающиеся разовьют в себе логическое и математическое мышление, получат навыки нахождения и анализа информации, научатся понимать и оперировать математическим языком и символикой, научатся рассуждать и доказывать математические утверждения, овладеют системой функциональных понятий.

Представим результаты анализа функциональной линии в школьных учебниках математики.

В современной школе введение понятия функции и её обоснование является центральным при изучении данной линии. Исходя из этого, существуют различные мнения и представления о том, как должен строиться учебный процесс при введении понятия функции и дальнейшего развития обучения функциональной линии обучающихся [52].

В методической литературе существует мнение, что определение функции, которое начинают вводить в основной школе, не должно быть осложнено громоздкими теоретическими сведениями. Информация должна быть дозированной и учитывать возрастные и психолого-педагогические особенности учащихся, она не должна быть просто научной. Информация должна быть понятной, наглядной и легко заучиваться.

Учебники алгебры 7 класса. Например, в учебниках Н.Ю. Макарычева и др. для 7 класса базового [16] и углубленного [17] уровней содержание понятия функции раскрывается без формальных определений на конкретных примерах, с опорой на изученный материал прошлых лет. В учебнике базового

уровня рассматриваются такие разделы как «Функции и графики», «Линейная функция» и т.д., автор делает упор на рассмотрение зависимости одной переменной от другой, также между величинами. Уделяется особое внимание нахождению значения функции по формуле, прямой пропорциональности и её графику. В разделе «Одночлены» автор рассматривает функции $y = x^2$ и $y = x^3$, их графики. В учебнике углубленного уровня дополнительно изучается раздел «Степенная функция с натуральным показателем». Автор на углубленном уровне более подробно рассматривает не только графики линейных функций и их взаимное расположение, но и графическое представление статистических данных, функции $y = x^2$ и $y = x^3$.

Принципиальным отличием учебников базового [24] и углубленного [25] уровней под редакцией А.Г. Мерзляка и др. для 7 класса является то, что не изучаются функции вида $y = x^2$ и $y = x^3$, в отличие от учебников Н.Ю. Макарычева и др. В учебнике базового уровня под авторством А.Г. Мордковича [35], не изучается функция вида $y = x^3$, также она не изучается и на углубленном уровне [36].

Учебники алгебры 8 класса. В учебниках Н.Ю. Макарычева и др. для 8 класса базового [18] и углубленного [19] уровней изучения функции продолжается. Рассматриваются такие разделы, как «Произведение и частное дробей», «Арифметический квадратный корень», а также «Элементы статистики» и т.д. В них автор уделяет особое внимание уравнениям вида $x^2=a$, функциям $y = \sqrt{x}$, $y = \frac{k}{x}$, и их графикам, чуть позднее изучаются функции $y = x^{-1}$ и $y = x^{-2}$, их свойства. На углубленном уровне автор уже отводит целую главу на изучение функций: «Функции и графики». В ней дополнительно и более подробно, в отличие от базового уровня, автор рассматривает такие разделы, как «Преобразование графиков функций» и «Дробно-линейная функция», и уделяет особое внимание области определения функции. В данной главе автор делает акцент на таких темах, как

«Растяжение и сжатие графиков функций» и «Параллельный перенос графиков функций».

Теперь давайте рассмотрим предметную линию учебников за 8 класс под авторством А.Г. Мерзляка и др. базовый [26] и углубленный [27] уровни, также учебники по алгебре, разработанные авторским коллективом под редакцией А.Г. Мордковича, базовый [37] и углубленный [38] уровни. В учебнике под авторством А.Г. Мерзляка и др. понятие функции вида $y = \frac{k}{x}$, вводится лишь на углубленном уровне, в отличие от учебника под редакцией Н.Ю. Макарычева и др., здесь она вводится на базовом уровне и более подробно изучается на углубленном. В учебнике под авторством А.Г. Мордковича базового уровня дополнительно изучаются функции вида $y = kx^2$, $y = ax^2 + vx + c$, $y = (x + l)$, $y = f(x) + m$, $y = (x + l) + m$, также разбирается построение графиков этих функций и их свойства. На углубленном уровне автор уделяет внимание функциям вида $y = kx^2$, $y = ax^2 + vx + c$, $y = (x + l) + m$, $y = |f(x)|$ и $y = f(|x|)$, построению графиков данных функций и их свойствам. В учебнике алгебры базового и углубленного уровня под редакцией С.М. Никольского и др. [46] понятие функции начинает вводиться с 8 класса. Рассматриваются функции вида $y = x$, $y = x^2$, $y = \frac{1}{x}$, $y = kx$, $y = |x|$, $y = [x]$ и $y = \{x\}$, $y = ax^2$, $y = \frac{k}{x}$, свойства данных функций и построение их графиков. Уделяется также внимание графику функции вида $y = a(x - x_0)^2 + y_0$.

Учебники алгебры 9 класса. В девятом классе продолжается изучение функциональной линии. В учебниках Н.Ю. Макарычева и др. базового [20] и углубленного [21] уровней изучении функции начинается с повторения области определения функции (ООФ) и её свойств. Далее, при изучении на базовом уровне рассматривается такой раздел, как «Квадратичная функция и её график» и функции вида $y = ax^2$ и $y = a(x - c)^2$, где автор уделяет внимание построению графиков функций и их свойствам, затем изучается степенная функция $y = x^n$ и корень n -й степени. В разделе «Уравнение с двумя переменными и их системы», автор уделяет внимание построению графика

данного уравнения. На углубленном уровне более подробно изучаются свойства функции (возрастание и убывание, монотонность, четность и нечетность, ограниченность и неограниченность). В разделе преобразования графиков функций, рассматриваются графики вида $y = |f(x)|$ и $y = f(|x|)$. Далее изучается раздел, посвященный взаимнообратным функциям (обратной данной и обратной степенной), тригонометрические функции, их свойства и графики. На этом предметная линия учебников данного автора заканчивается.

Далее рассмотрим изучение в девятом классе функционально-графической линии в учебных пособиях других авторов.

В учебнике алгебры базового и углубленного уровня [47] под редакцией С.М. Никольского и др. изучаются такие разделы как «Функция $y = x^n$ » и «Корень n -й степени», в них более подробно изучаются свойства и графики функции, таких как $y = x^n, (x \geq 0)$, $y = x^{2m}$ и $y = x^{2m+1}$, $y = \sqrt[n]{x}, (x \geq 0)$. В учебниках под авторством А.Г. Мерзляка и др. базовый [28] и углубленный [29] уровни, изучаются такие главы, как «Квадратичная функция» и «Степенная функция» (углубленный уровень), на базовом уровне рассматриваются функции вида $y = kx$, $y = f(x) + b$ и $y = f(x + a)$. На углубленном уровне рассматриваются свойства функции, построение графиков функций вида $y = kf(x)$, $y = f(kx)$, $y = f(x) + b$ и $y = f(x + a)$, $y = |f(x)|$ и $y = f(|x|)$, решение неравенств методом интервалов, затем изучаются степенная функция с натуральным показателем и обратная функция.

В учебниках под редакцией А.Г. Мордковича и др. для 9 класса базового [39] и углубленного [40] уровней приоритетом авторского коллектива является продолжение функциональной линии и основой курса. На базовом и углубленном уровнях изучаются числовые функции. Автор вводит понятие области определения числовой функции (ООЧФ) и её способам задания, учит описывать свойства функции по графику, переходя от геометрической модели к вербальной, уделяется также внимание построению графиков функций вида $y = x^n, (n \in \mathbb{Z})$, $y = x^{-n}, (n \in \mathbb{Z})$ и $y = \sqrt[n]{x}$, изучаются их свойства.

В диссертационном исследовании И.В. Антоновой указано, что согласно «концепции школьного курса алгебры А.Г. Мордковича при формировании научных понятий особо значимыми становятся: отказ от формулировки определения сложных понятий при его первоначальном появлении; стратегия введения (определяет время, то есть класс) и тактика введения (определяет формирование уровня строгости предъявления понятия на различных этапах):

- этап наглядно - интуитивного уровня (если он необходим или возможен при формировании того или иного понятия);
- этап рабочего уровня, то есть уровня словесного описания без жесткой формальной конструкции;
- этап формального определения понятия [3, с. 11].

В соответствии с данной концепцией формальное определение понятия функции (как правила соответствия) А.Г. Мордкович вводит только в 9 классе, в 7 классе понятие ограничивается описанием, определение не приводится. Автор отмечает, что «в разные периоды развития функциональной линии существовали различные подходы к определению понятия функции в учебниках алгебры 7-9-х классов, которая трактовалась как: зависимая переменная; соответствие двух множеств; переменная величина; правило соответствия» [3, с. 9].

В старшей школе продолжается изучение функциональной линии. Начнем рассмотрение учебной литературы авторского коллектива под руководством А.Г. Мордковича. Как известно, автор является сторонником изучения и построения материала по схеме: «функция» → «уравнения» → «преобразования». В учебниках для десятых и одиннадцатых классов на базовом уровне [41; 43] изучаются главы, посвященные элементарным функциям, такие как: «Тригонометрические функции», «Обратные тригонометрические функции. Решение тригонометрических уравнений», «Степенные функции», «Показательные и логарифмические функции», «Элементы теории пределов», «Производная», «Исследование функций с помощью производной» и др. В данных главах рассматриваются свойства этих

функций, их область определения и способы задания. Изучаются также преобразование тригонометрических и обратные тригонометрические функции, дифференцирование и интегрирование элементарных функций. Кроме того, подробно изучается построение графиков этих функций, также преобразование графиков данных функций. Автор особое внимание уделяет уравнению касательной к графику функций и их исследованию.

В учебниках десятого и одиннадцатого классов на базовом и углубленном уровнях [42; 44] изучаются главы, посвященные элементарным функциям, такие как: «Числовые функции», «Тригонометрические функции», «Преобразование тригонометрических выражений», «Производная», «Степени и корни. Степенные функции», «Показательная и логарифмическая функции» и др. Цель изучения на базовом и углубленном уровнях заключается в том, чтобы дать возможность учащимся расширить представление о фундаментальных понятиях математики (вещественное число, функция и её свойства) на должный уровень. Расширение курса происходит за счет добавления некоторых элементов теории делимости, метода математической индукции, а также понятий обратной и периодической функций.

В учебных пособиях под руководством авторского коллектива С.М. Никольского и др. для десятых и одиннадцатых классов на базовом и углубленном уровнях [48; 49], курс функциональной линии начинается с изучения раздела «Корень степени n », рассматриваются количественные отношения реальных процессов или явлений, то есть объяснение материала вначале построено на практических примерах, затем дается определение каждой из функций $y = f(x)$, $y = x^n$, $y = \sqrt[n]{x}$, ($x \geq 0$) и $y = \sqrt[n]{x}$, также их графиков. Далее изучаются разделы, такие как: «Степень положительного числа», «Логарифмы», «Тригонометрические функции числового аргумента» и др., затем курс переходит в одиннадцатый класс, который продолжается с изучения главы «Функции. Производные. Интегралы». В ней рассматриваются разделы, такие как: «Функции и их графики», «Предел функции и непрерывность», «Обратные функции», «Производная» и «Применение

производной», также темы автор начинает рассматривать с практических примеров, затем даёт определения данных функций и их графиков, рассматриваются их свойства.

Теперь рассмотрим учебники для десятых и одиннадцатых классов на базовом уровне авторского коллектива под руководством А.Г. Мерзляка и др. [30]; [32]. Объем и материал изложения функциональной линии в данных учебных пособиях немного отличается, чем у предыдущих авторов. Десятый класс начинается с главы «Повторение и расширение сведений о функции», затем изучаются «Степенная функция», «Тригонометрические функции», «Производная и её применение» и др. В одиннадцатом классе на базовом уровне функциональной линии уделена только одна глава «Показательная и логарифмическая функции», изучаются их свойства и графики.

В учебниках для десятых и одиннадцатых классов на углубленном уровне [31]; [33] изучение функциональной линии в десятом классе на углубленном уровне начинается с повторения, изучаются такие главы, как: «Повторение и расширение сведений о множествах, математической логике и функциях», «Степенная функция», «Тригонометрические функции» и «Производная и её применение». Вводятся понятия функций, изучаются их свойства, уделяется также внимание построению их графиков. В одиннадцатом классе продолжается изучение функциональной линии, изучается глава «Показательная и логарифмическая функции». Авторы также вводят понятия функций, изучаются их свойства и графики и не загромождают изучение курса доказательством теорем, ограничиваются только их формулировками. В учебниках десятого и одиннадцатого классов в доступной и понятной форме изложен материал, как и у предыдущих авторов с тремя уровнями сложности от базового до повышенного.

При рассмотрении учебника по алгебре и началам анализа десятых и одиннадцатых классов на базовом и углубленном уровнях, разработанным авторским коллективом под руководством Ш.А. Алимовым и др. [2], установлено, что курс функциональной линии начинается с изучения раздела

«Степенная функция», рассматриваются темы, связанные со свойствами функции, её графиком, уделяется внимание взаимно обратным функциям. Далее следует раздел «Показательная функция», в котором также авторский коллектив уделяет внимание свойствам данной функции и её графику. Затем следуют разделы, связанные с изучением логарифмических и тригонометрических функций. На завершающем этапе изучение функциональной линии авторский коллектив в последних главах учебника особое внимание уделяет разделам «Производная и её геометрический смысл», «Применение производной к исследованию функции». Данные разделы изучаются достаточно углубленно.

Исходя из анализа предметной линии учебников, можно сделать вывод, что все учебники соответствуют ФГОСам [64]; [65] и примерным основным образовательным программам [54]; [55]; учебный материал изложен в доступной форме и последовательно, есть задания для развития личностного и творческого потенциала. Авторами учебников материал изложен в основном без доказательства теорем, ограничиваясь лишь их формулировками или ограничиваясь лишь описанием, на фактах и реальных примерах. Задания в них распределены по уровню сложности. Это позволит учащимся самостоятельно изучить материал, так как в учебниках достаточно заданий для самостоятельной работы и самоконтроля. Учебники содержательны, имеют обширную практическую составляющую, некоторые снабжены отдельными задачками, все это в совокупности дает возможность обеспечить устойчивый интерес, воспитывать любовь к предмету. Они будут полезны для формирования и развития умений и навыков по освоению основных понятий функциональной линии.

Таким образом, изучение функциональной линии в общеобразовательной школе важно; с помощью понятия функции трактуются основные понятия элементарной математики; функция является моделью многих реальных процессов природы, представляющих собой функциональную зависимость [60]. На пропедевтическом уровне данное

понятие начинается с рассмотрения функциональной зависимости, поэтому важно начать изучение функциональной линии с опорой на ранее изученный материал. Сформированное у обучающихся общее представление о функциях и их свойствах, умение строить и анализировать графики функций поможет им в дальнейшем решать основные математические задачи. Применяя полученные знания, школьнику смогут решать уравнения, неравенства, задачи с параметрами. Полученные знания помогут обучающимся не только в учебном процессе, но и повседневной жизни.

1.3 Различные подходы к формированию функциональной культуры обучающихся на уроках математики

Первое представление о функции у детей начинает формироваться ещё с начальной школы. Именно с этого возраста закладываются основные понятия. Формирование функциональной культуры учащихся начинается происходить с введения понятия функциональной зависимости, которое имеет немаловажное значение. Основываясь на историческом подходе и событиях, учащимся рассказывают о том, откуда это понятие берет своё начало. Известно, что элементарное представление о функции начало зарождаться у людей еще с древнейших времен. Люди нередко задумывались о происходящих событиях или природных явлениях, пытались найти взаимосвязь между ними. В быту или хозяйстве, при постройке домов, при расчетах — зависимость размера одного объекта от другого или его объема. С появлением торговли и товарообмена, люди пытались найти эквивалентность ценности товара, при попытке обмена одного товара на другой, задумывались о пропорциональности величин.

После краткого погружения в исторический очерк учащимся на примерах объясняют понятие функциональной зависимости, то есть первое понятие о функции. Отметим то, что полное представление о функции и её свойствах происходит в несколько этапов, начиная от «элементарной

функциональной осведомленности» до «функциональной культуры» [51, с. 252]. Для учащихся очень важно рассмотреть изучаемый материал на реальных задачах или примерах, рассматривая разные ситуации и подходы [11, с. 384].

Далее, при изучении понятия функции в средней школе, начиная с введения курса алгебры, можно сделать акцент на том, что современное определение функции принадлежит русскому ученому Н.И. Лобачевскому, он её определяет, как некую зависимость между числовыми объектами. В свою очередь, Г.Л. Дирихле, основываясь на своих исследованиях, имеет немного другое представление о функции, её понятие он связывает с объектами различной природы, исключая при этом переменные величины [60, с. 257].

Процесс формирования понятия функции состоит из шести этапов, в школе изучаются только числовые функции [60, с. 259]. Первый и второй этапы являются пропедевтическими: с 1 по 4 классы и с 5 по 6 классы.

На первом этапе учащимся вводят первоначальное представление о функции на примере зависимости между величинами. Изменение зависимости одной величины от другой учащиеся могут наблюдать при изучении тем, связанных с арифметическими операциями над числами, а также при решении текстовых задач. В начальной школе учащиеся знакомятся с функциональными зависимостями вида $y=a-x$, $y=a+x$, $y=ax$, $y=x/a$, а по её окончании могут решать простые уравнения и задачи на основе связи между компонентами и результатами арифметических действий [60, с. 259].

Согласно Н.Л. Стефановой, Н.С. Подходовой [60, с. 259] второй этап формирования понятия функции также считается пропедевтическим. Он реализуется с 5 по 6 классы и отличается от первого содержанием деятельности. Процесс обучения, происходит в более наглядной форме, с обучающимися составляются таблицы со значениями переменных, строятся графики и диаграммы.

По мнению В.П. Покровского [52, с. 21], понятие функции и понятия, связанные с ней, должны вводиться в основной школе также на

пропедевтическом уровне с помощью опорных понятий и терминов, опираясь на прежний опыт школьников и конкретные примеры. Автор считает, что вводимая терминология для учащихся должна быть простой в восприятии и не должна быть громоздкой. Информация должна соответствовать возрастному критерию учащихся.

Третий этап реализуется в курсе алгебры, с 7 по 8 классы, и называется базовым (промежуточным). Учащиеся осваивают различные способы задания функции, рассматриваются их свойства, вводится понятийный аппарат. В основном понятия вводятся через примеры или явно. Рассматриваются задачи на движение или нахождения площади. Изучаются функции вида: $y = kx + b$, $y = x^2$, $y = x^3$, $y = ax^2 + bx + c$, $y = \frac{k}{x}$, $y = |x|$, $y = x^n$, $y = \sqrt{x}$.

Четвертый этап является завершающим в изучении функциональной линии в основной школе. Он основывается на обобщении и систематизации знаний об алгебраических функциях.

На пятом этапе, после завершения основной школы, в 10-11 классах изучают различные виды трансцендентных функций. Учащиеся знакомятся с показательными, логарифмическими и тригонометрическими функциями, а также их свойствами и графиками, решают задачи, связанные с исследованием функции с помощью производной и т.д. [52, с. 26-27].

Шестой этап является завершающим. В 11-м классе учащиеся обобщают и систематизируют знания, полученные с 7 по 11 классы. Задания учащихся включают в себя все виды функций, которые они изучали.

В итоге, по окончанию общеобразовательной школы у обучающихся должно быть сформировано понятие функции. Школьники будут знакомы с основными понятиями элементарных функций, которые можно представить в виде следующей классификации (рисунок 1) [52, с. 9].

Рассмотрим различные подходы к формированию функциональной культуры обучающихся в общеобразовательной школе на основе анализа научно-методической литературы.



Рисунок 1 – Элементарные функции

Методические аспекты обучения математике в общеобразовательной школе на основе когнитивно-визуального подхода рассматриваются в работах В.А. Далингера [9], В.Г. Болтянского [6], Л.М. Фридмана [66], М.И. Башмакова [5], А.Я. Цукаря [67] и др. Данный подход предполагает процесс обучения математике строить с учетом зрительно-познавательного подхода к формированию знаний, умений и навыков обучающихся, что дает возможность использовать максимальные возможности визуального мышления, то есть познавательные функции наглядности могут быть достаточно широко и целенаправленно применены [9].

Остановимся подробнее на применении данного подхода при формировании функциональной культуры обучающихся.

В.А. Далингер в научной статье [9, с. 297-303] рассматривает применение когнитивно-визуального подхода при изучении математических понятий в общеобразовательной школе как одну из проблем, так как формированию визуального мышления учащихся при обучении математике уделяется не так много времени, а с точки зрения теоретического исследования в этой области проблема мало изучена. Автор считает, что развитие только логического мышления при обучении математике недостаточно. Немаловажное значение имеет и зрительное восприятие информации, т.к. исходя из исследования многих учёных до восьмидесяти

процентов информации учащиеся получают через органы зрения. Благодаря визуальному восприятию процесс обучения можно сделать максимально эффективным, т.к. такой метод обучения учитывает индивидуальные особенности учащихся с точки зрения работы их головного мозга.

А.Я. Цукарь в научной статье [67, с. 20-27] рассматривает проблему аналитического и формального подхода к изучению функций. Автор считает, что при обучении математике мало используются или вовсе отсутствуют наглядные упражнения. Зачастую учащиеся запоминают определения, различные формулировки без подкрепления их графическими примерами. Игнорирование образного восприятия информации приводит к формальному обучению математике, из-за которого в последствии теряется интерес к учебе. Поэтому в процессе обучения должны использоваться такие задания, которые можно связать с реальными ситуациями и представить наглядно, графически. Такие задания будут учащимся понятны и интересны, а описание их с помощью графика будет простым.

Л.М. Фридман в книге [66, с. 384] затрагивает проблему наглядности в процессе познания. Автор опирается на исследования педагогов прошлого, которые считали, что наглядность в обучении является основным принципом дидактики. С его помощью в процессе наблюдения ребенок лучше воспринимает информацию. Данный принцип был введен Я.А. Коменским, который связывал успешность обучения детей с их чувственным восприятием. В дальнейшем эта теория была поддержана и развита учёным К.Д. Ушинским. Он также утверждал, что обучение должно строиться на конкретных образах, а по средствам наставника - легко воспринимаются, т.е. наставник становился проводником к познанию мира через зрительные образы.

Н.Л. Стефанова, Н.С. Подходова и др. в учебном пособии [60, с. 256-267] также затрагивают проблему наглядности в обучении, в частности функциям. Авторы считают, что обучение функциям должно происходить в различной форме, учитывая индивидуальные особенности учащихся и познавательные стили. Изучение материала должно происходить не только формально,

аналитически, но и графически. Задания на закрепление знаний должны строиться так, чтобы их можно было решить несколькими способами, в зависимости от познавательного стиля, переходя от более простого способа к менее предпочтительным.

Кроме того, в исследовании М.Ю. Пермяковой [50] уделяется внимание проблеме формирования функционально-графической грамотности, в основе которой лежит когнитивно-визуальный подход, связанный с развитием у школьников умений, которые необходимы им для чтения и изображения графиков элементарных функций. Опираясь на различные учебные модели, автор предлагает учитывать уровни изучения школьниками свойств функций.

В исследовании Л.Ю. Марушенко [22] говорится, что формирование понятия функции должно начинаться не в курсе алгебры, а в курсе математики с 1 по 6 классы. При этом необходимо учитывать возрастные и психолого-педагогические особенности школьников, а также тот материал, который ими изучается. Автор считает, что приоритетом современного математического образования должен быть деятельностный подход, который направлен на развитие интуиции и логического мышления, что поможет в дальнейшем в курсе математики 5 и 6 классов изучать такие темы, как «Прямая и обратная пропорциональность», «Координатная плоскость», «График» и т.д.

В исследовании И.В. Антоновой [3] описывается дифференцированный подход при обучении функциональной линии на уроках математики в основной школе. Автор предлагает использовать в работе учителя систему дифференцируемых заданий на основе концепции уровневой дифференциации обучения математике Р.А. Утеевой. В результате данной концепции, построенной на эффективной работе учителя, у учащихся формируется понятие функции и активизируется мыслительная деятельность.

Л.В. Тихонова в своем исследовании [62] рассматривает проблему личностно-ориентированного подхода при изучении функционально-графической линии курса алгебры. В частности, автор раскрывает систему методического обеспечения как новую концепцию в обучении учащихся.

В результате применения данного подхода формируется личность учащихся, повышается их математическая культура, также теоретический уровень знаний.

В исследовании О.В. Абрамовой [1] показано, что развивать у школьников основной школы умение работать с графиками функций и формировать понятие функции на уроках математики может помочь применению при обучении математике межпредметных связей с другими предметами. Для такой цели наиболее подходящими предметами являются физика (обработка данных физических величин) и информатика (изучение компьютерных программ). Благодаря межпредметным связям можно добиться качественного результата при изучении функциональной линии, так как учащиеся имели уже возможность рассмотреть обобщенные способы чтения, построения и анализа графиков.

Е.В. Турчанинова в своем исследовании [63] также уделяет внимание проблеме применения при обучении математике межпредметных связей с различными предметами, а именно: между физикой и математикой. Автор считает, что физико-математическая связь между этими предметами способствует повышению качества усвоения вышеуказанных понятий.

В статье Н.А. Демченковой [10] подчеркивается, что в настоящее время формирование графической культуры учащихся может осуществляться зачастую лишь с помощью построения графиков функций, диаграмм и геометрических фигур при обучении математике ввиду сокращения учебного времени (или полного его отсутствия) на уроках технического черчения.

Учитель математики Е.В. Власова в статье [7] рассматривает проблему формирования понятия функции, заданной в неявном виде, которую учащиеся обычно не видят, например: $16x - y = 0$ или $6 = xy$. Автор предлагает учащимся самим придумать функцию, которая задана в неявном виде и привести ее к каноническому виду. Данные задания также помогут зафиксировать знания, связанные с функциональной символикой.

В статье [45] учителя математики А.Д. Нахман указано, что изучение функциональной линии в старших классах должно происходить по следующему принципу: понятие функции, её свойства и график должны быть помещены в отдельный блок, так как функции и графики используются при решении физико-математических и экономических задач, а также при формировании и составлении статистических отчетов и данных. Автор предлагает знакомить учащихся с конкретными видами функций, отобразив их графически, и разобрав их свойства. Затем разобрать стандартные задачи, связанные с экстремумами функции, разобрать примеры на монотонность, четность и нечетность различного вида сложности.

В заключении отметим, что изучение функциональной линии в общеобразовательной школе на основе когнитивно-визуального подхода весьма затруднительно, так как, по мнению В.А. Далингера, формированию визуального мышления учащихся при обучении математике уделяется не так много времени, с точки зрения теоретического исследования в этой области проблема мало изучена. На сегодняшний момент не представлены методические рекомендации по организации учебной деятельности по формированию функциональной культуры обучающихся на уроках математики. В статье А.Я. Цукаря указано, что существует также проблема аналитического и формального подхода к изучению функций в школьном курсе математики, так как при обучении учащихся мало используются или вовсе отсутствуют наглядные упражнения, они запоминают определения, различные формулировки без подкрепления их графическими примерами.

Выводы по первой главе

Изучено понятие функциональной культуры обучающихся. Определено, что функциональную грамотность школьников мы будем понимать как один из компонентов функциональной культуры, формирование которой осуществляется на материале функциональной линии школьного курса

математики. При формировании функциональной культуры особая роль должна быть отведена функциональной пропедевтике. Полное представление о понятии функции, её свойствах, различных видах элементарных функций происходит в несколько этапов: начиная от «элементарной функционально-графической осведомленности» до «функциональной культуры». В соответствии с ФГОС среднего (полного) общего образования для учащихся важно уметь применять понятие функции при решении практико-ориентированных задач.

Выявлено содержание функциональной линии в школьном курсе математики. Установлено, что изучение функциональной линии в общеобразовательной школе важно; в разные периоды ее развития существовали различные подходы к определению понятия функции в школьных учебниках, которая трактовалась как: зависимая переменная; соответствие двух множеств; переменная величина; правило соответствия; с помощью понятия функции трактуются основные понятия элементарной математики; функция является моделью многих реальных процессов природы, представляющих собой функциональную зависимость. Полученные знания о функциях помогут обучающимся и в повседневной жизни.

Представлены различные подходы к формированию функциональной культуры обучающихся на уроках математики. Выявлено, что: при ее формировании целесообразен когнитивно-визуальный подход, связанный с развитием у школьников умений, необходимых им для чтения и изображения графиков элементарных функций; возможно применение: деятельностного подхода, направленного на развитие их интуиции и логического мышления; дифференцированного подхода, при котором предлагается использовать систему дифференцируемых заданий; личностно-ориентированного подхода, направленного на формирование личности учащихся, повышение их математической культуры, теоретического уровня знаний; развитию у школьников умения работать с графиками функций на уроках математики может помочь применение межпредметных связей с другими предметами.

Глава 2 Методические основы формирования функциональной культуры обучающихся на уроках математики в общеобразовательной школе

2.1 Упражнения на готовых чертежах при решении алгебраических задач ОГЭ и ЕГЭ

На сегодняшний момент государственная итоговая аттестация по математике является одной из форм проверки знаний учащихся по ключевым разделам и темам курсов основной и общеобразовательной школы. По результатам выпускных экзаменов можно сформировать общую картину полученных знаний и умений при усвоении предмета. В частности, можно проанализировать, на сколько глубоко сформировались необходимые знания и умения учащихся при изучении функциональной линии и насколько целостно сформировалась у них функциональная культура.

Решение задач на готовых чертежах является эффективным средством при подготовке учащихся к выпускным экзаменам по математике, в том числе и формирования у них функциональной культуры. Хотя, алгебраические задачи зачастую носят вычислительный характер и бывают типовыми, то есть решаются по определенному алгоритму, упражнения на готовых чертежах позволяют учащимся более глубоко погрузиться в тему и наглядно понять, как строится тот или иной график функции. Для некоторых учащихся иногда гораздо легче решить саму задачу, чем сделать к ней чертеж.

Для формирования функциональной культуры учащихся и успешной сдачи выпускных экзаменов по математике нами были рассмотрены различные сборники и задания, связанные с изучением функций.

Приведем типовые задания, которые встречаются в итоговой аттестации по математике в основной школе.

Типовые задания ОГЭ

Первый тип задач в ОГЭ по математике на установление соответствия между заданными графиками функции и теми формулами, которые их задают.

Задача 1. «Даны формулы:

$$1) y = \frac{2x}{5} + 2; \quad 2) y = \frac{2x}{5} - 2; \quad 3) y = -\frac{2x}{5} + 2.$$

Нужно установить соответствие между графиками функции (рисунок 2) и формулами, которые их задают» [57].

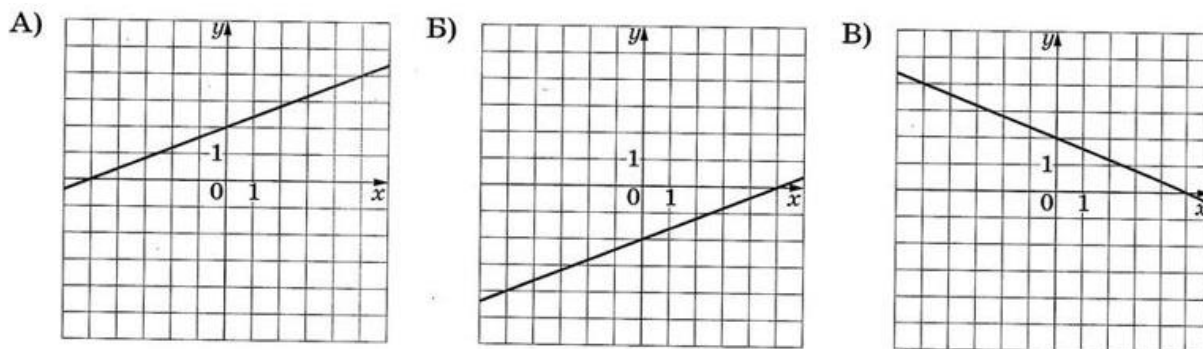


Рисунок 2 – Графики функций к примеру 1

Ответ: 123.

Второй тип задач, который встречается в ОГЭ, связан с функцией вида $y=kx+b$. Здесь также, как и в предыдущем задании, необходимо установить соответствие только уже между функцией и ее знаками коэффициентов.

Задача 2. «Даны коэффициенты:

$$1) k < 0, b < 0 \quad 2) k > 0, b > 0 \quad 3) k < 0, b > 0$$

Установите необходимое соответствие между знаками коэффициентов k и b и графиками функций (рисунок 3)» [57]. Ответ: 312.

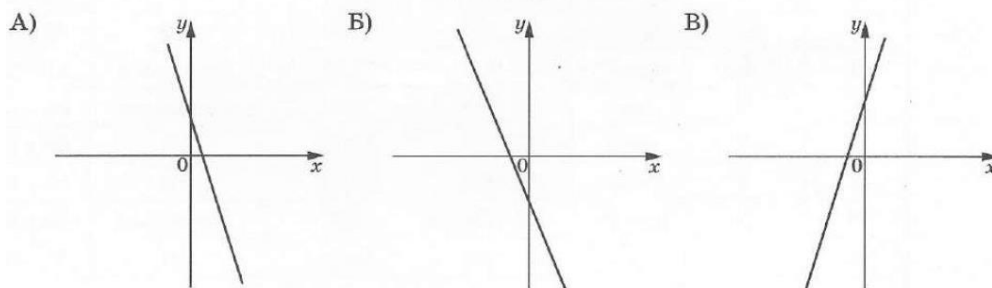


Рисунок 3 – Графики функций к примеру 2

Третий тип задач связан с квадратичной функцией вида $y=ax^2+bx+c$. Данное задание тоже на соответствие функции и знаков её коэффициентов.

Задача 3. «Даны коэффициенты:

а) $a>0, c>0$

б) $a<0, c>0$

в) $a>0, c<0$

Установите необходимое соответствие между знаками коэффициентов - а и с и графиками функций (рисунок 4)» [57]. Ответ: 321.

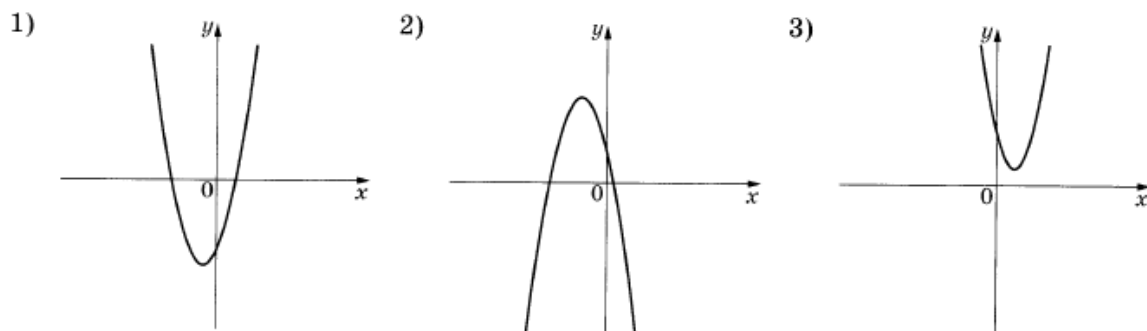


Рисунок 4 – Графики функций к примеру 3

Четвертый тип задач связан с чтением графиков и интерпретацией их.

Задача 4. «На графике (рисунок 5) показан расход электроэнергии в соответствие с тарифными зонами в течение 2021 года за каждый месяц. Пользуясь графиком и таблицей 1, нужно определить расход электроэнергии по каждому из периодов» [57].

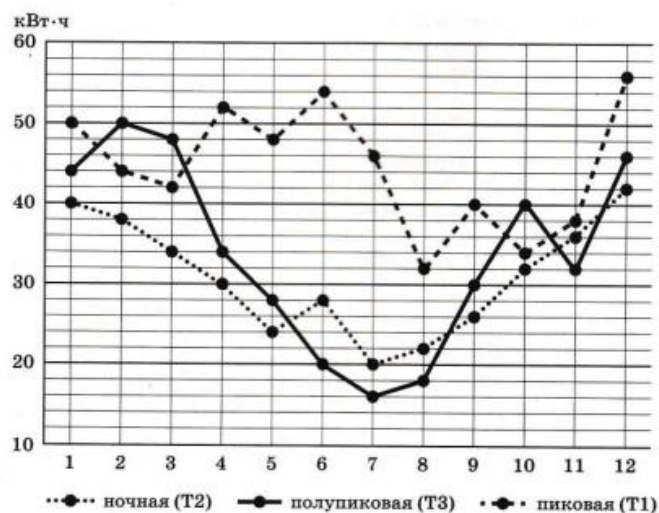


Рисунок 5 – График расхода электроэнергии к примеру 4

Таблица 1 – Динамика расхода электроэнергии

ПЕРИОДЫ	ДИНАМИКА РАСХОДА ЭЛЕКТРОЭНЕРГИИ
а) 02.21-03.21	1) расход в пиковой зоне максимально уменьшился
б) 05.21-06.21	2) больше всего расход уменьшился в ночной зоне
в) 07.21-08.21	3) произошло одинаковое увеличение расхода электроэнергии в пиковой и ночной зонах
г) 10.21-11.21	4) расход электроэнергии в полупиковой зоне уменьшился, во всех остальных зонах - увеличился

Ответ: 2413.

Пятый тип задач непосредственно связан с навыками построения графика функции, заданной формулой в которой встречается модуль. Данный тип задач вызывает наибольшее затруднение.

Задача 5. «Постройте график функции $y = x^2 - |6x + 5|$ и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком (рисунок 6) ровно три общие точки» [57]?

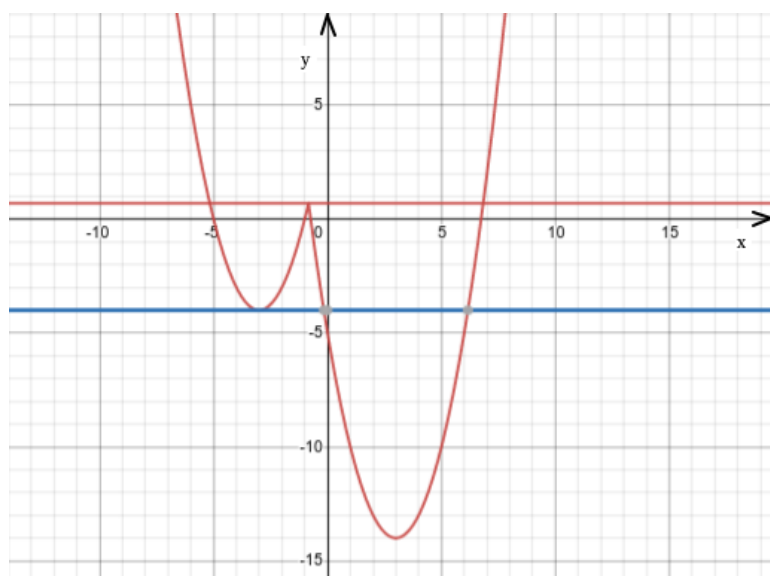


Рисунок 6 – График функции к примеру 5

Ответ: $m = -4$, $m = 25/36$.

Шестой тип задач также связан с построением графика функции, но функция уже задана системой уравнений. Данный тип задач также вызывает затруднение.

Задача 6. «Постройте график функции: $y = \begin{cases} x^2 - 8x + 14, & x \geq 3 \\ x - 2, & x < 3 \end{cases}$

Определите, при каких значениях m прямая $y=m$ имеет с графиком (рисунок 7) две общие точки» [57]?

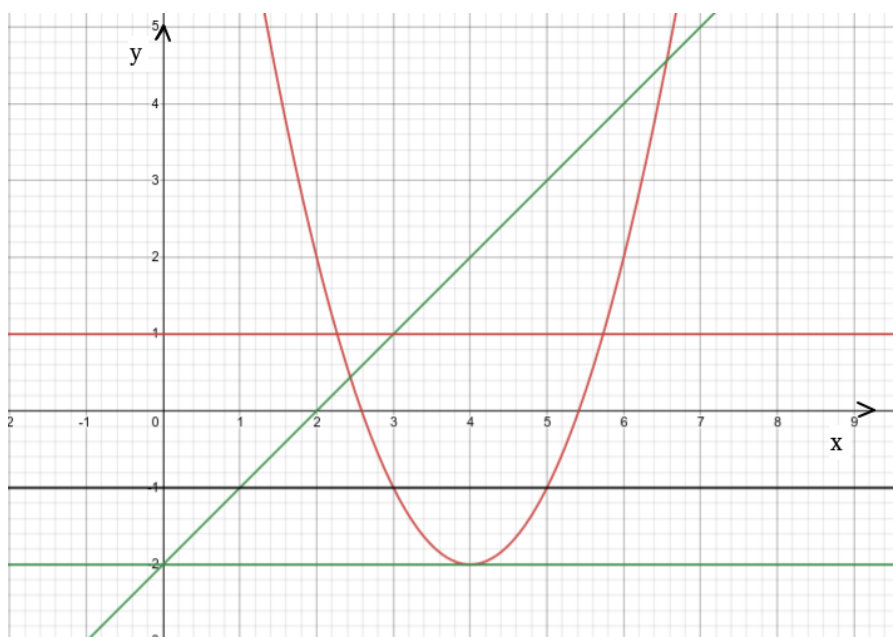


Рисунок 7 – График функции к примеру 6

Ответ: -2; $-1 < m < 1$.

Седьмой тип задач тоже на построение графика функции, но функция уже задана дробно-рационально. Данный тип немного легче, чем два предыдущих.

Задача 7. «Постройте график функции: $y = \frac{7x-6}{7x^2-6x}$ и определите при каких значениях k прямая $y = kx$ имеет с графиком (рисунок 8) одну общую точку» [57]?

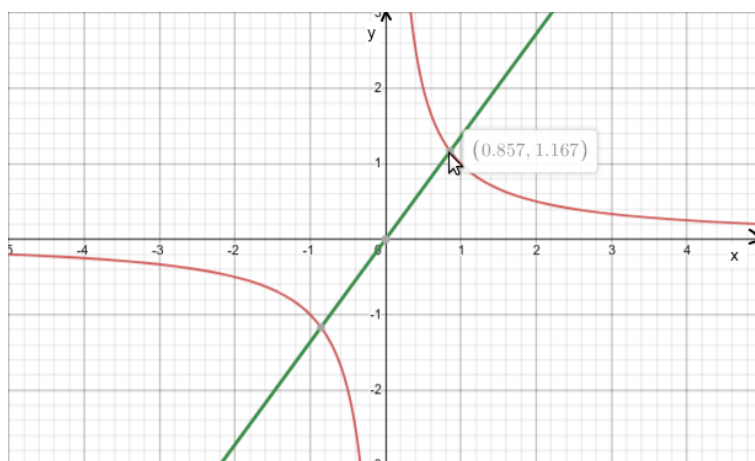


Рисунок 8 – График функции к примеру 7

Ответ: $k = 49/36$.

Система задач для учащихся десятого класса в виде упражнений на готовых чертежах на основе типовых заданий ОГЭ по математике была апробирована нами в ходе поискового этапа педагогического эксперимента (параграф 2.3). Данная система задач была составлена для того, чтобы учащиеся смогли обобщить, углубить и систематизировать свои знания о функциях после окончания основной школы в течение первого полугодия десятого класса, для того, чтобы выявить у них уровень сформированности функциональной культуры, то есть уровень знаний и умений, необходимый для чтения и изображения графиков элементарных функций, уровень сформированности функциональных понятий. После обобщения и систематизации знаний на уроках нами была проведена контрольная работа, которая состояла из 2-х вариантов в виде системы задач на готовых чертежах.

Типовые задания ЕГЭ

Первый тип задач в ЕГЭ по математике не вызывает особых сложностей учащихся. Он связан с нахождением абсциссы точки по графику производной функции $f(x)$.

Задача 1. Нужно найти абсциссу точки по графику производной функции $f(x)$, в которой касательная к графику (рисунок 9) функции $y=f(x)$ || прямой $y=2x-2$ [56].

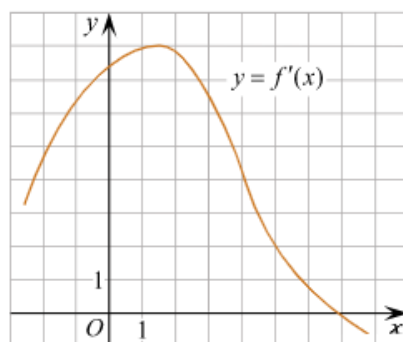


Рисунок 9 – График функции к примеру 1

Второй тип задач, который встречается на итоговом экзамене по математике, непосредственно связан с нахождением значения функции $f(x)$ от действительного числа по графику функции $f(x) = b + \log_a x$.

. Найдите $f(32)$ по графику (рисунок 10) функции $f(x) = b + \log_a x$, который указан на рисунке 2 [56].

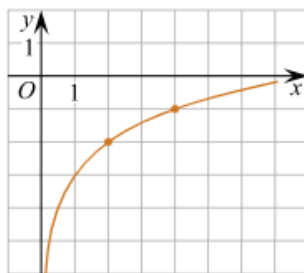


Рисунок 10 – График функции к примеру 2

Третий тип задач в ЕГЭ по математике связан с нахождением точек максимума и минимума функции $f(x)$, в том числе и на отрезке.

Задача 3(а). Дана функция $y = \ln(x+4)^2 + 2x + 7$, найдите её точку максимума [56].

Задача 3(б). Дана функция $y = -\frac{x}{x^2 + 1}$, найдите её точку минимума [56].

Задача 3(в). Дана функция $y = (x-2)^2 e^{(x-2)}$ на отрезке $[1; 4]$, найдите её наименьшее значение [56].

Четвертый тип задач, который встречается на итоговой аттестации по математике связан с нахождением числа «а» тригонометрической функции $f(x) = a \cos x + b$ по её графику.

Задача 4. Дана тригонометрическая функция $f(x) = a \cos x + b$. Нужно найти число «а» по графику (рисунок 11) заданной функции [56].

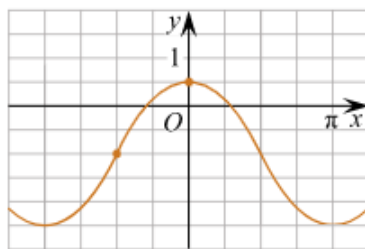


Рисунок 11 – График функции к примеру 4

Пятый тип задач непосредственно связан с нахождением значения параметра «а» заданной функции, в которой среди её значений имеется только 1-о целое число.

Задача 5. Дана функция $y = \frac{x^2 - 2x + a}{6 + x^2}$. Найдите значения параметра «а» заданной функции, в которой среди её значений имеется только 1-о целое число [56].

Шестой тип задач на итоговой аттестации по математике связан с нахождением промежутков возрастания и убывания функции, её экстремумов.

Ниже представлено несколько заданий данного типа.

Задача 6(а). Дана функция $f(x)$, которая определена и непрерывна на отрезке $[-6; 5]$. Нужно найти все целые точки, входящие в промежутки возрастания функции $f(x)$ по графику (рисунок 12) её производной. В ответе укажите сумму этих точек [56].

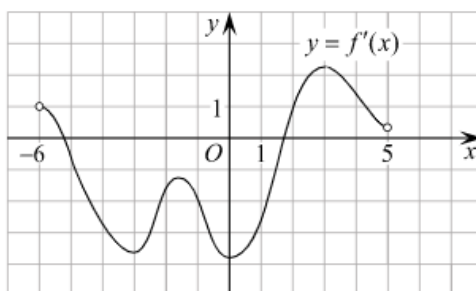


Рисунок 12 – График функции к примеру 6(а)

Задача 6(б). Дана функция $f(x)$, которая определена на интервале $(-4; 8)$. Нужно найти точку экстремума функции $f(x)$ на отрезке $[-2; 6]$ в соответствии с графиком (рисунок 13) её производной [56].

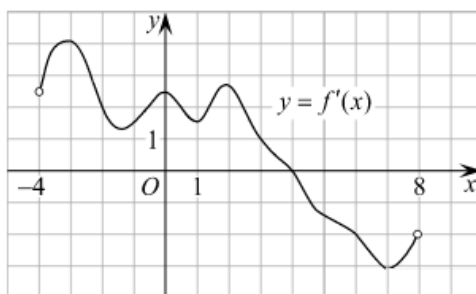


Рисунок 13 – График функции к примеру 6(б)

Также нами был проведен анализ практического опыта учителей при подготовке к итоговой аттестации по математике. Ниже представлен его краткий анализ.

В статье М.А. Кашук «Разработка элективного курса по теме «Производная функция» для учащихся гуманитарного профиля» [14] рассматривается обширность и значимость изучение данного курса в классах гуманитарного профиля, на изучение которого отводится 17 часов, в течение которых рассматривается вычисление производных, применение её для исследования функции на монотонность и экстремумы, а также решение задач ЕГЭ по математике, в том числе и на готовых чертежах. Автор считает, что данный курс будет полезен при подготовке к ЕГЭ.

В элективном курсе Э.Е. Рясной «Производная и её применение» [58] отводится на курс 16 часов, в течение которых рассматривается нахождение производной показательной и логарифмической функций, уравнение касательной к графику функции, промежутки возрастания, убывания и точки экстремума функции. В курсе присутствуют задания на готовых чертежах, которые будут полезны при подготовке к ЕГЭ.

В элективном курсе В.В. Медведевой «Функции и их графики» [23] отводится на курс 34 часа. Данный курс рассчитан на расширенное и углубленное изучение функций и их графиков, в течение которого будут рассмотрены графики степенной, показательной и логарифмической функций, а также их свойства. В курсе также присутствуют задания на готовых чертежах. Также автор считает, что данный курс будет полезен учащимся при подготовке к ЕГЭ.

В учебном пособии Н.Ю. Милованова [34] рассматриваются задания на готовых чертежах по алгебре и началам анализа. Данное пособие актуально не только для учителей математики, но и для учащихся при подготовке к ЕГЭ. Большое количество задач предполагает творческого подхода при их решении. Пособие также можно применять для диагностики учащихся.

Таким образом, анализ статьи [14], учебного пособия [34] и элективных курсов [23; 34] показывает, что многие учителя и исследователи проявляют немалый интерес к заданиям на готовых чертежах при подготовке к ЕГЭ по математике.

Нами была спроектирована система задач при проектировании изучения темы «Упражнения на готовых чертежах в заданиях ЕГЭ по математике», реализуемого в рамках технологии когнитивно-визуального подхода на уроках алгебры и начал математического анализа в 11 классе. Проектируемая система задач была нацелена на обобщение и систематизацию учебного материала обучающимися и рассчитана на 4 часа с учетом организации контроля знаний и умений учащихся. Основным учебником математики для математического профиля выбран учебник А.Г. Мерзляк и др. углубленного уровня. В Приложении А представлен методический анализ теоретического и практического содержания по теме «Упражнения на готовых чертежах в заданиях ЕГЭ по математике». Отметим, что изучение темы проекта было спланировано следующим образом:

- на 1-м уроке рассматриваются типы задач № 6: на нахождение точек экстремума (максимума и минимума) функции по графику функции, уделяется особое внимание задачам на физический и геометрический смысл производной, а также на понятие касательной к графику функции;
- на 2-м уроке рассматриваются типы задач № 6: на применение производной к исследованию функций и построению графиков, на чтение и исследование графиков первообразных функций, на геометрический смысл первообразных;
- на 3-м уроке рассматриваются типы задач № 9: на нахождение значения функции в точке, на нахождение значения абсциссы функции в точке, при котором выполняется заданное равенство, на определение коэффициентов: a , b и c функции, заданной аналитическим способом, по графику, и применение преобразования графиков функций, на нахождение абсциссы точки, являющейся точкой пересечения графиков

двух функций, на нахождение ординаты точки, являющейся точкой пересечения графиков двух функций;

– на 4-м уроке проводится итоговый контроль в форме самостоятельной работы.

Ниже представлено обоснование использования технологии когнитивно-визуального подхода при проектировании системы задач по теме «Упражнения на готовых чертежах в заданиях ЕГЭ по математике».

Стоит отметить, что данной проблемой интересовались многие авторы. Методические аспекты обучения математике в общеобразовательной школе на основе когнитивно-визуального подхода, представлены в работах В.А. Далингера [9], В.Г. Болтянского [6], Л.М. Фридмана [66], М.И. Башмакова [5], А.Я. Цукаря [67] и др.

Данный подход предполагает строить процесс обучения математике с учетом зрительного восприятия информации обучающимися, это дает возможность по максимуму использовать их интеллектуальные способности и активировать познавательные функции. Возможности визуального мышления могут быть достаточно широко и целенаправленно применены к формированию знаний, умений и навыков обучающихся [9].

Так, Л.М. Фридман в учебном пособии [66, с. 384] рассматривает принцип наглядность как основной принцип дидактики, т. к. благодаря наглядности изучаемого материала учащиеся быстрее воспринимают новую информацию, в следствие чего гораздо эффективнее идет процесс обучения.

А.Я. Цукарь в научной статье [67, с. 20-27] считает, что формальный и аналитический подход к изучению функции недостаточно эффективен, если отсутствуют наглядные упражнения. Задания, связанные с функциями, должны быть подкреплены графическими примерами, чтобы учащимся темы были понятны и интересны.

В исследовании М.Ю. Пермяковой [50] представлена методика формирования функционально-графической грамотности в курсе алгебры основной школы на основе когнитивно-визуального подхода, при котором

учитываются необходимые уровни изучения школьниками свойств функций. Методика построена на основе целостного «комплекса восприятия функционально-графических умений, необходимых для чтения и изображения графиков элементарных функций», а также различных моделей представления учебной информации [50].

Вместе с этим, отметим, что в лабораторном практикуме Н.Л. Стефановой, Н.С. Подходовой и др. [60, с. 113] рассматриваются задания на готовых чертежах, представлена функциональная линия основной и средней школы. Задания будут полезны для актуализации знаний и при подготовке к ЕГЭ по математике.

Отметим, что задачи, направленные на формирование функциональной культуры и понятия функции, мы называем упражнениями в соответствии с концепцией формирования понятий Г.И. Саранцева [59].

Выводы. Сделав анализ типовых заданий ОГЭ по математике нами было установлено, что все задания в основном связаны с установлением соответствия между функциями, заданными графическим и аналитическим способами; кроме того, есть задания повышенного уровня на построение графика функции, содержащего переменную под знаком модуля и нахождения значения коэффициента m , при которых прямая $y = m$ имеет с ним 2-е общие точки; а также есть задания на построение графика функции и нахождения значения коэффициента k , при которых прямая $y = kx$ имеет с ним 1-ну общую точку. Также встречается тип задач, который связан с чтением графиков и их интерпретацией.

Сделав анализ типовых заданий ЕГЭ по математике нами было установлено, что почти все задания были связаны с нахождением наибольшего и наименьшего значения функции различных её классов. Также в типовых заданиях ЕГЭ по математике встречались задачи с параметром, а также встречались задания на нахождения точки абсциссы по её графику и типы задач, связанные с нахождением значения функции $f(x)$ от действительного числа, также по её графику.

В ходе анализа практического опыта учителей были рассмотрены задания для подготовки к итоговой аттестации по математике по теме «Упражнения на готовых чертежах в заданиях ЕГЭ по математике» на основе опубликованных научных статей, учебно-методических пособий, а также материала, опубликованного в социальных сетях педагогических работников.

Таким образом, нами было установлено, что существует большой интерес учителей и исследователей к заданиям на готовых чертежах, в том числе связанных с подготовкой к ЕГЭ по математике. Кроме того, нами были изучены методические аспекты обучения математике в общеобразовательной школе на основе когнитивно-визуального подхода. Были рассмотрены и проанализированы работы В.А. Далингера [9], В.Г. Болтянского [6], Л.М. Фридмана [66], М.И. Башмакова [5], А.Я. Цукаря [67] и др. Мнение авторов сводится к тому, что процесс обучения математике целесообразно строить с учетом зрительно-познавательного подхода к формированию знаний, умений и навыков обучающихся. Так как это дает возможность на максимальном уровне использовать познавательные функции наглядности и возможности визуального мышления. Также было установлено, что упражнения на готовых чертежах будут направлены на формирование функциональной культуры и понятия функции, которые мы называем упражнениями в соответствии с концепцией формирования понятий Г.И. Саранцева [59]. Нами были спроектированы упражнения на готовых чертежах для решения алгебраических задач ОГЭ и ЕГЭ.

2.2 Компьютерные технологии при изучении функциональной линии в школьном курсе математики

Формирование функциональной культуры у обучающихся было всегда нелегкой задачей для учителя, её реализация считалась ключевым моментом в школьной программе. Темы, связанные с функциями, всегда были проблематичными для восприятия учащимися. Для оптимизации восприятия,

также интереса к изучаемой теме, учитель может использовать в работе компьютерные технологии. Это позволит учащимся быстрее освоить материал и сформировать у них необходимые знания и умения при изучении функциональной линии.

Представим результаты анализа научно-методической литературы по применению компьютерных технологий при обучении функциям в общеобразовательной школе.

В статье В.А. Далингера [9] уделяется внимание проблеме применения новых информационных технологий и компьютерных средств в обучении математике. Как считает автор, использование визуальной учебной среды в обучении и её конструирование помогает усилить продуктивную функцию наглядности, активировать деятельность учащихся.

В исследовании З.Н. Исмаиловой [13] говорится, что проблема компьютерная поддержки уроков математики в наше время актуальна. Ведутся работы по созданию программно-педагогических средств учебного назначения с методикой их применения для различных тем и разделов школьного курса математики. На сегодняшний момент использование компьютерных технологий на уроках математики предлагает большие возможности и заслуживает особое внимание. Например, это позволяет повысить качество усвоения учебного материала учащимися и его объем. Компьютерные технологии помогут сформировать у них исследовательские навыки, то есть ускорить процесс их формирования, особенно, если идет речь о старшеклассниках, усовершенствовать систему упражнений, также поможет решить проблему индивидуализации и дифференциации обучения.

В исследовании С.Ю. Пападьиной [53] также уделяется внимание проблеме изучения функционально-графической линии в школьном курсе математике. Автор считает, что данную проблему можно решить, если в процессе обучения использовать наглядные образы объектов в программной среде «MathCAD». Во время занятий учащиеся должны иметь возможность

интерактивно и в динамике изучить функции в виде различных наглядных упражнений.

В исследовании С.М. Танеева [61] рассматривается проблема применения компьютерных технологий в обучении при формировании графической грамотности учащихся. Автор считает, что компьютерные технологии помогут учащимся овладеть графическим языком, посредством которого они смогут развить мышление, научиться воспринимать рисунок в виде графического символа, полученные навыки применить в дальнейшем в различных сферах своей деятельности.

В статье Е.В. Громовой, И.С. Сафуанова [8] описывается, что в школе существует проблема изучения понятия «функции», которую, как считают авторы, можно преодолеть, если использовать в процессе обучения компьютерные технологии, в частности программную среду «GeoGebra». Данная учебная среда поможет учащимся овладеть новым концептуальным пониманием функций. В следствие чего можно в дальнейшем применить полученные знания в новом математическом контексте.

Кроме того, нами были изучены следующие программные среды для компьютерной поддержки урока при работе с графиками функций и их построением: «GeoGebra», «MS OfficeExcel», «ДЕСМОС» и «MathCAD».

Опишем возможности некоторых программных сред при изучении функций в общеобразовательной школе.

Приложение «GeoGebra» позволяет учащимся при решении задач графическим способом быстро провести самопроверку, при решении алгебраическим способом - уточнить ответ. Данная программная среда поможет решить им некоторые задания ОГЭ по математике, связанные с графиками функций и их построением.

Например, задание на построение графика функции, содержащего переменную под знаком модуля и нахождения значения коэффициента m , при которых прямая $y = m$ имеет с ним 2-е общие точки.

Приложение «MS OfficeExcel» также позволяет строить различные графики функций. Например, в данной программе можно построить график функции $y = x^3 - 3x^2 + 2x - 1$ на промежутке $[-5; 5]$ с шагом равным 1. В программе можно построить как графики основных элементарных функций, так кусочных функций, можно построить графики зависимостей или наложить один график на другой, или добавить дополнительную ось, чтобы показать данные различных типов.

Далее подробно остановимся на программной среде «ДЕСМОС», используемой нами на уроках математики.

Данную среду можно активно использовать для построения и изучения различных графиков функций, в том числе при проведении интегрированных уроков (уроков по математике и информатике). Данная программная среда полезна в работе не только учителю, но и учащимся. Обучающиеся с интересом учатся строить и анализировать графики функций. У них формируется понятие функции и функциональная культура. В программной среде ДЕСМОС по умолчанию уже заложены готовые графики функций, которые можно использовать, видоизменять и корректировать учителю «под себя» на уроках. Программа простая в использовании и динамичная. Приведем примеры построения графиков функций в программной среде «ДЕСМОС».

Пример 1. Линейная функция и ее график (прямая): $y = mx + b$ (рисунок 14).

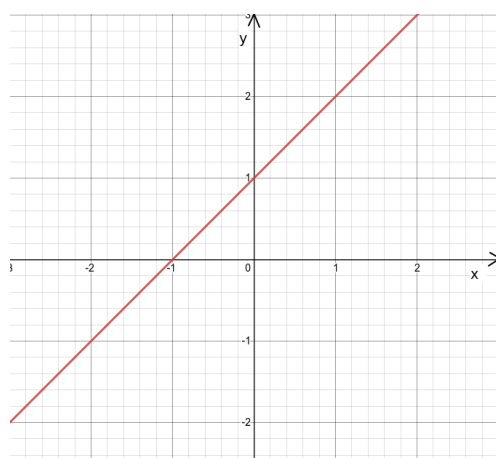


Рисунок 14 – График функции к примеру 1

Пример 2. Линейная функция и ее график (прямая); уравнение прямой, проходящей через две точки: $y - y_1 = m(x - x_1)$ (рисунок 15).

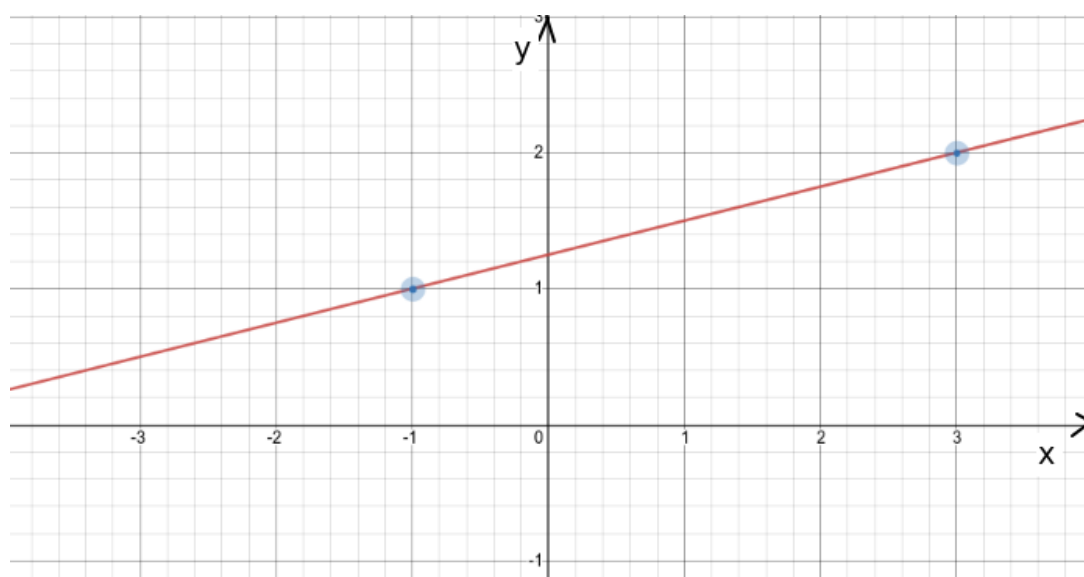


Рисунок 15 – График функции к примеру 2

Пример 3. Квадратичная функция и ее график (парабола): $y = ax^2 + bx + c$ (рисунок 16).

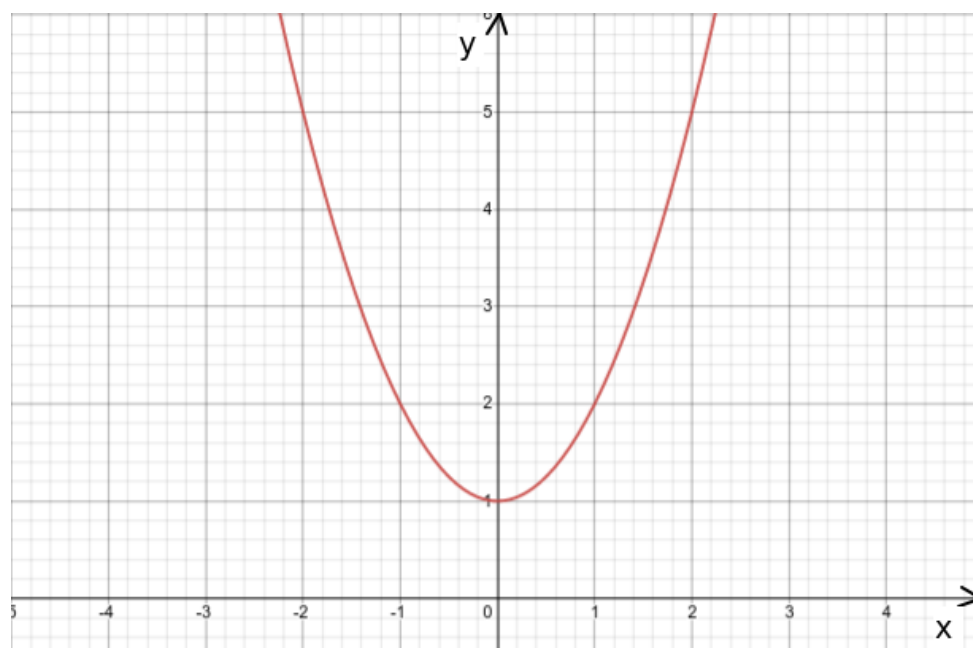


Рисунок 16 – График функции к примеру 3

Пример 4. Построение касательной $y = bx + c$ к графику квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ ($y \geq ax^2 + bx + c$; рисунок 17).

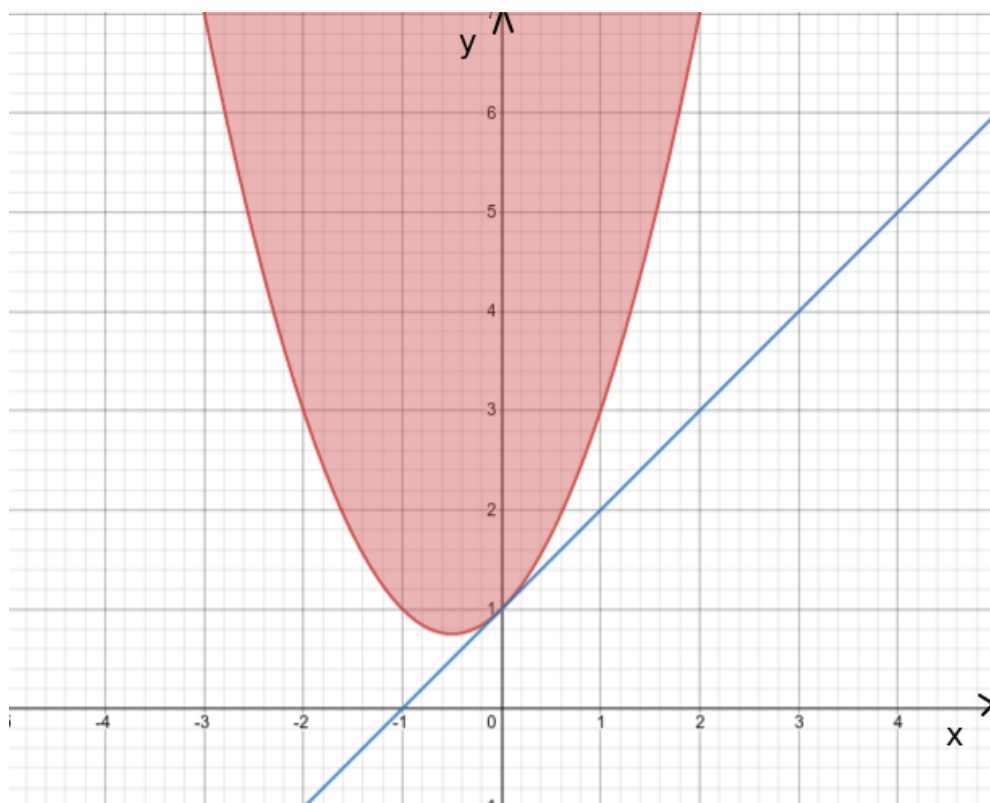


Рисунок 17 – График функции к примеру 4

Пример 5. Построение единичной окружности: $x^2 + y^2 = 1$ (рисунок 18).

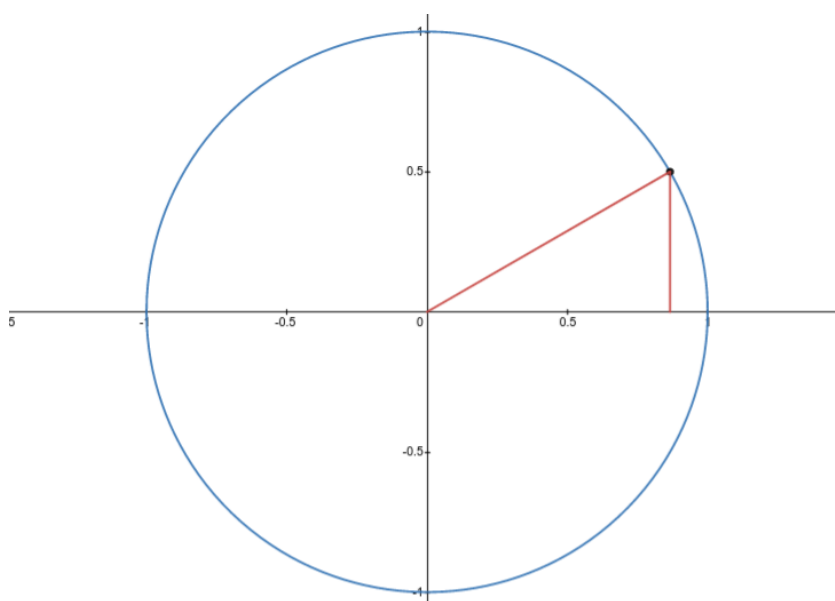


Рисунок 18 – График функции к примеру 5

Пример 6. Построение секущей $y = m(x - a) + f(a)$ к графику функции $f(x) = \sin(x) + 3x$ (рисунок 19).

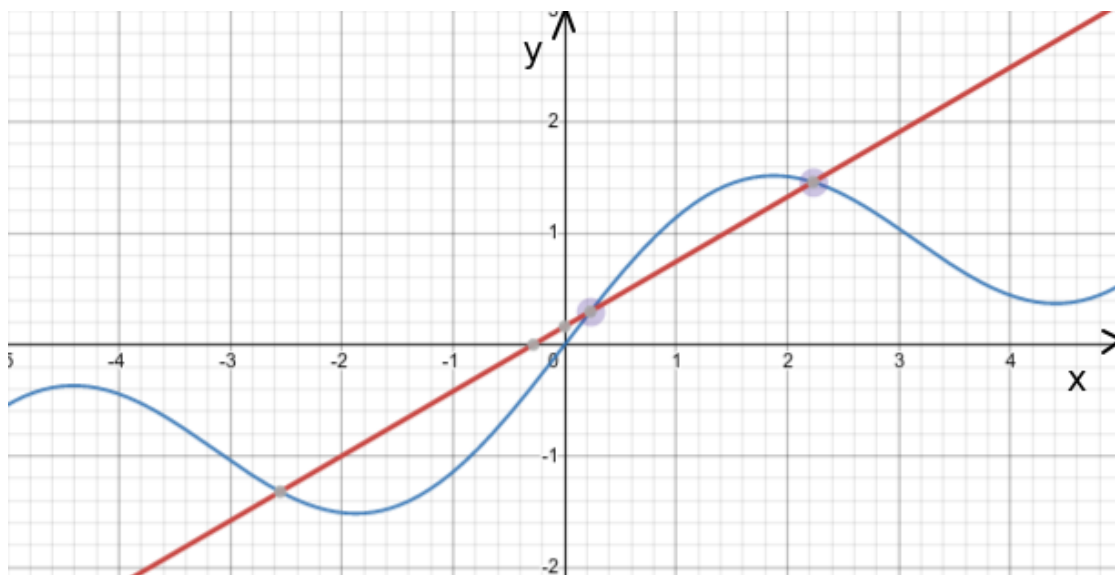


Рисунок 19 – График функции к примеру 6

Пример 7. Построение касательной $y = g(a)(x - a) + f(a)$ к графику функции $f(x) = \sin(x) + 3x$ (рисунок 20).

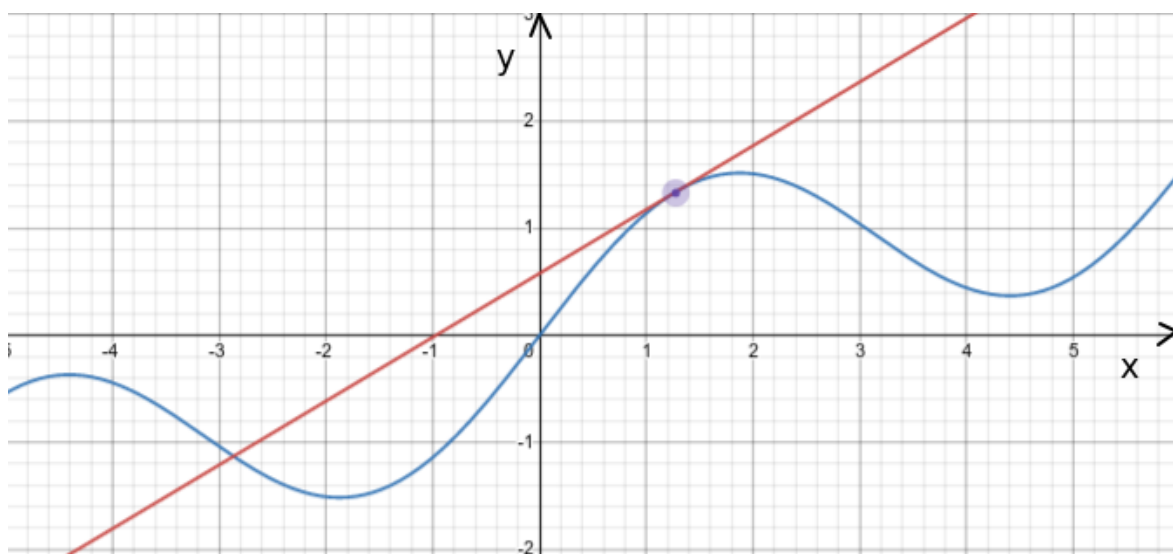


Рисунок 20 – График функции к примеру 7

Ниже представим конспект урока по алгебре в 9-ом классе с применением компьютерных технологий по теме «Построение графика квадратичной функции» в программной среде ДЕСМОС по учебнику Ю.Н. Макарычева (под ред. С.А. Теляковского).

Цель урока:

- образовательная: повторить понятие квадратичной функции и её свойства, вспомнить формулу, которой она задается, алгоритм построения, научиться строить графики в программной среде ДЕСМОС, закрепить необходимые понятия в ходе выполнения заданий;
- развивающая: развить логическое мышление, сформировать способствовать использовать приемы мыслительной деятельности: сравнения, обобщения и выделения главного; математический кругозор, умение строить и анализировать графики квадратичной функции в программной среде ДЕСМОС;
- воспитательная: воспитать интерес к математике, активность в учебе; прививать культуру межличностного и делового общения, воспитать ответственность и самостоятельность в процессе учебы.

Тип урока: урок закрепления изученного материала.

Оборудование: ноутбуки, программная среда ДЕСМОС для построения графиков функций, интерактивная доска, презентация к уроку, электронные карточки для практической работы, справочник.

Структура урока:

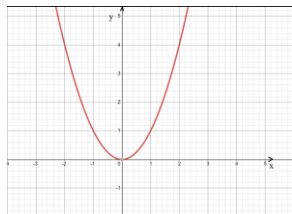
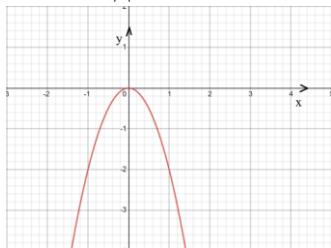
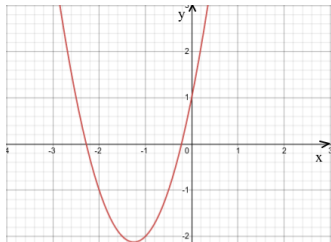
- I. Организационный момент (1 минута).
- II. Актуализация знаний учащихся (4 минуты).
- III. Проверочная работа (10 минут).
- IV. Изучение нового материала (10 минут).
- V. Формирование умений и навыков (15 минут).
- VI. Итоги урока (4 минуты).
- VII. Домашнее задание (1 минута).

В таблице 2 опишем ход урока по каждому его этапу.

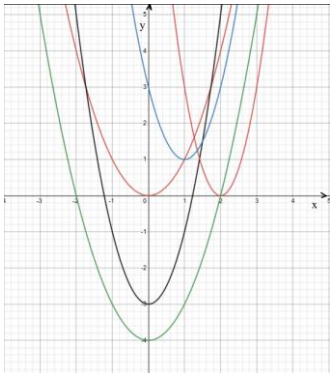
Таблица 2 – Примерный ход урока по каждому его этапу

I. Организационный момент (1 минута)			
Деятельность		Записи на доске (на экране)	Примечания по ходу урока
учителя	ученика (учащихся)	Дата. Классная работа. Тема урока: Построение графика квадратичной функции в программной среде ДЕСМОС.	
Учитель входит в класс, здоровается с учениками и начинает переключку (отмечает в электронном журнале отсутствующих). После переключки учитель озвучивает тему урока: Построение графика квадратичной функции в программной среде ДЕСМОС.	Учащиеся сидят тихо, староста класса называет отсутствующих.		
II. Актуализация знаний учащихся (4 минуты)			
Учитель начинает актуализацию знаний учащихся, задает вопросы: Приведите примеры квадратичной функции. Чем является график квадратичной функции? Как можно преобразовывать графики? Как построить график квадратичной функции? В случае, если никто не смог ответить, то правильный ответ дает учитель и указывает на их ошибки или неточности.	Ученики поднимают руки и поочередно начинают отвечать (выходить к доске и записывать). Если кто-то ответил неверно, следующий, в след за ним с разрешения учителя его поправляет.	Например: $y = x^2$, $y = -x^2 + 3$, $y = x^2 - 3$, $y = (x - 2)^2$, $y = (x + 2)^2$, $y = ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$. График квадратичной функции имеет вид параболы. Графики можно преобразовывать с помощью 2-х параллельных переносов по осям x и y , передвигая на определенное количество единиц как вправо, так и влево, также вверх и вниз по осям. Найти координаты вершины параболы и изобразить её на координатной плоскости, построить для нее ещё несколько точек, которые принадлежат ей, соединить эти точки линией.	

Продолжение таблицы 2

III. Проверочная работа (10 минут)			
Деятельность		Записи на доске (на экране)	Примечания по ходу урока
учителя	ученика (учащихся)		
Учитель открывает презентацию к уроку вместе с самостоятельной работой и поясняет задание. Через 8 минут учитель предупреждает о том, что время на самостоятельную работу истекает.	Учащиеся в тетрадях для самостоятельной работы начинают выполнять задания.	<u>1 вариант</u> Постройте график функции $y=x^2-4x-5$. Найдите: а) значение функции при $x=0,5$; б) значения аргумента при $y=3$. <u>2 вариант</u> Постройте график функции $y=x^2-2x-8$. Найдите: а) значение функции при $x=-1,5$; б) значения аргумента при $y=3$.	
IV. Изучение нового материала (10 минут)			
Деятельность		Записи на доске (на экране)	Примечания по ходу урока
учителя	ученика (учащихся)		
Учитель поясняет цель урока. На данном занятии мы будем отрабатывать умение строить графики квадратичной функции в программной среде ДЕСМОС, также их преобразовывать. Далее учитель знакомит детей с данной программой. Затем показывает им построение графиков в этой программной среде. Учитель строит графики вида: $y=x^2$ и $y=ax^2$ Затем вида: $+bx+c$, где $a \neq 0$.	Учащиеся садятся за компьютеры, внимательно слушают объяснение учителя и, повторяя за ним, начинают осваивать программную среду ДЕСМОС и строить графики.	$y=x^2$  $y=ax^2, a=-2$, где $a \neq 0$  $y=ax^2+bx+c$, $a=2, b=5, c=1$, где $a \neq 0$ 	

Продолжение таблицы 2

V. Формирование умений и навыков (15 минут)			
Деятельность		Записи на доске (на экране)	Примечания по ходу урока
учителя	ученика (учащихся)		
<p>Учитель: «Закрепляем знания, полученные на уроке».</p> <p>Нужно выполнить следующие задания в программной среде ДЕСМОС.</p> <p>Построить график параболы для каждого случая: $y = x^2$; $y = 2x^2 - 3$; $y = 3(x-2)^2$; $y = 2(x-1)^2 + 1$; $y = (x - 2) \times (x + 2)$.</p> <p>Учитель:</p> <p>«Давайте разобьемся на 2 команды. Та команда, которая выполнит все задания правильно, получит пятерку за работу на уроке.</p> <p>После выполнения задания, учитель начал проверять работы</p> <p>По завершении игры, учитель подвел итоги: «Победила команда динозавров».</p>	<p>Учащиеся начали выполнять задания в программной среде ДЕСМОС</p>	<p>Счет на доске:</p> <p>Команда «Динозавры»</p> <p>Команда «Ягуары»</p> <p>Построенные графики функций:</p> 	
VI. Итоги урока (4 минуты)			
Деятельность		Записи на доске (на экране)	Примечания по ходу урока
учителя	ученика (учащихся)		
<p>Вопросы учащимся:</p> <p>– В какую сторону направлены ветви параболы функции $y=ax^2$, при $a>0$ и при $a<0$?</p>	<p>Ученики поднимают руки и поочередно начинают отвечать</p>	<p>При $a>0$ ветви параболы направлены вверх, при $a<0$ ветви направлены вниз.</p>	

Продолжение таблицы 2

Деятельность		Записи на доске (на экране)	Примечания по ходу урока
учителя	учащихся		
<p>– Как из графика функции $y=ax^2$ можно получить следующие графики функции: $y=a(x-m)^2$, $y=a(x-m)^2+n$?</p> <p>– Где мы можем применить, полученные знания на уроке, в жизни (на практике)?</p> <p>– Как вы оцениваете нашу совместную работу на уроке?</p>	<p>Если кто-то ответил неверно, следующий, в след за ним с разрешения учителя его поправляет.</p> <p>Учитель показывает правильные ответы на экране.</p>	<p>График функции $y=a(x-m)^2$ можно получить из графика функции $y=ax^2$ с помощью параллельного переноса по оси x, передвигая на определенное количество единиц как вправо, так и влево. График функции $y=a(x-m)^2+n$ можно получить из графика функции $y=ax^2$ с помощью 2-х параллельных переносов по осям x и y, передвигая на определенное количество единиц как вправо, так и влево по оси x, а также вверх и вниз вдоль оси y соответственно.</p> <p>Пригодятся в учебной деятельности, на работе в будущем, в повседневной жизни, начиная от ориентирования по местности и заканчивая соционикой.</p> <p>Хорошо.</p>	
VII. Домашнее задание (1 минута)			
<p>Теперь перейдем к домашнему заданию, учитель его озвучивает и поясняет, если оно не понятно учащимся.</p> <p>Кроме того, учитель напоминает, что домашнее задание можно также посмотреть в электронном дневнике.</p>	<p>Ученики записывают домашнее задание в тетради или в дневнике.</p>	<p>Домашнее задание: № 126-127.</p> <p>Данные задания нужно выполнить в программной среде ДЕСМОС.</p> <p>Выполненные задания (в виде файла) нужно отправить учителю на проверку через Школьный портал или по электронной почте.</p>	

Таким образом, применение компьютерных технологий на уроках математики на сегодняшний момент актуально. Данная проблема была изучена в научно-методической литературе. В.А. Далингер считает, что использование визуальной учебной среды и её конструирование поможет усилить продуктивную функцию наглядности, активировать деятельность учащихся. З.Н. Исмаиловой установлено, что применение компьютерных технологий на уроках математики позволяет повысить качество усвоения учебного материала учащимися и его объем, сформировать исследовательские навыки у старшеклассников, усовершенствовать систему упражнений, решить проблему индивидуализации и дифференциации обучения.

Вместе с этим, отметим, что компьютерные технологии позволяют мотивировать учащихся при изучении функциональной линии в школьном курсе математики, так как темы, связанные с изучением функций вызывают у учащихся наибольшие затруднения. С помощью компьютерных технологий можно качественно и эффективнее усвоить данный материал. Для построения «MS OfficeExcel», «ДЕСМОС». Среда «ДЕСМОС» динамична и проста в использовании; в ней можно использовать уже готовые графики функций, которые включены в нее по умолчанию, учитель может видоизменять их и корректировать «под себя». Применение данной технологии позволит учащимся освоить и изучить материал функциональной линии школьного курса математики.

2.3 Результаты педагогического эксперимента

В этом учебном году (2021–2022 гг.) нами был проведен констатирующий этап эксперимента на базе МБОУ СОШ №20 г. Химки Московской области. В эксперименте участвовали учащиеся 10 «Б» класса в количестве двадцати пяти человек.

Эксперимент проводился во втором полугодии во время производственной практики (преддипломной практики).

Цель данного этапа эксперимента: выявить у учащихся десятого класса за курс основной школы уровень сформированности функциональной культуры, то есть уровень сформированности знаний и умений, необходимых для чтения и изображения графиков элементарных функций, также уровень сформированности функциональных понятий.

В частности, необходимо было выявить насколько учащиеся смогли обобщить, углубить и систематизировать свои знания о функциях после окончания основной школы в течение первого полугодия десятого класса.

Нами было установлено, что учащиеся данного класса обучались с седьмого по девятые классы по учебникам М.Ю. Макарычева. Для проведения эксперимента нами была составлена контрольная работа с заданиями на готовых чертежах за курс алгебры основной школы. Контрольная работа состояла из двух вариантов. За ее основу были взяты типовые задания ОГЭ, направленные на формирование функциональной культуры школьников:

- задания 1 и 2: на установление соответствия между функциями, заданными графическим и аналитическим способами;
- задания 3 и 4: на построение графика функции, содержащего переменную под знаком модуля и нахождения значения коэффициента m , при которых прямая $y = m$ имеет с ним 2-е общие точки;
- задания 5 и 6: на построение графика дробно-рациональной функции и нахождения значения коэффициента k , при которых прямая $y = kx$ имеет с ним одну общую точку.

Ниже представлен типовой вариант контрольной работы с решением (задания №1, №3 и №5 — для 1 варианта, задания №2, №4 и №6 — для 2 варианта, соответственно по 3 задания в каждом варианте).

Задание 1. «Дано три графика (рисунок 21) и четыре функции, которые предположительно их задают: 1) $y = \frac{2}{x}$, 2) $y = \frac{x}{2}$, 3) $y = \sqrt{x}$, 4) $y = x^2$.

Нужно установить соответствие между ними» [57].

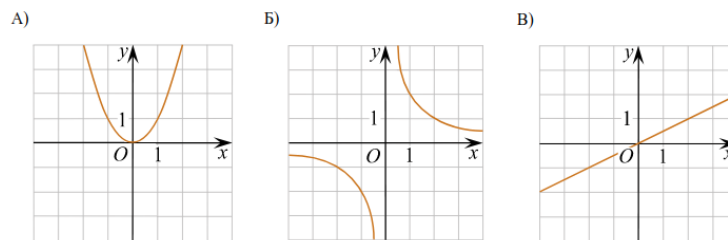


Рисунок 21 – Графики функций к заданию 1

Решение. Сначала мы определяем вид графика и функцию, которой он принадлежит.

- 1) $y = \frac{2}{x}$ - функция принадлежит уравнению гиперболы, её ветви располагаются в I и III четвертях, так как перед дробью стоит знак «плюс»;
- 2) $y = \frac{x}{2}$ - функция принадлежит уравнению прямой;
- 3) $y = \sqrt{x}$ - функция принадлежит уравнению параболы, направленной вправо;
- 4) $y = x^2$ - функция принадлежит уравнению параболы, ветви параболы направлены вверх.

Затем находим соответствие: А - 4, Б - 1, В - 2.

Ответ: А - 4, Б - 1, В - 2.

Задание 2. «Дано четыре графика (рисунок 22) и три функции, которые предположительно их задают: А) $y = x^2 + 2x$, Б) $y = x^2 - 2x$, В) $y = -x^2 - 2x$. Нужно установить соответствие между ними» [57].

Решение:

А) функция $y = x^2 + 2x$ задает параболу, так как $a=1$, из этого следует, что ветви параболы направлены вверх, абсцисса вершины равна минус единице, пересекает ось ординат в нулевой точке. Функция $y = x^2 + 2x$ соответствует первому графику;

Б) функция $y = x^2 - 2x$ задает параболу, так как $a=1$, из этого следует, что ветви параболы направлены вверх, абсцисса вершины равна

единице, пересекает ось ординат в нулевой точке. Функция $y = x^2 - 2x$ соответствует четвёртому графику;

В) функция $y = -x^2 - 2x$ задает параболу, так как $a=-1$, из этого следует, что ветви параболы направлены вниз, абсцисса вершины равна минус единице, пересекает ось ординат в нулевой точке. Функция $y = -x^2 - 2x$ соответствует третьему графику.

Ответ: 1 - А, 4 - Б, 3 - В.

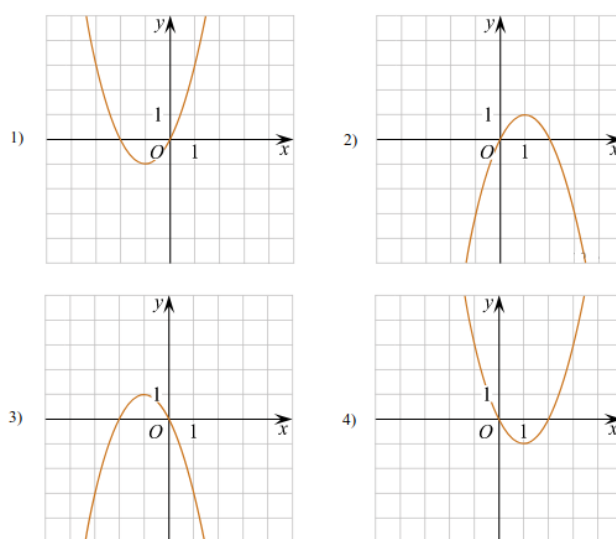


Рисунок 22 – Графики функций к заданию 2

Задание 3. Дана функция вида $y = x|x| + |x| - 3x$. Нужно построить её график (рисунок 23) и найти значения коэффициента m , при которых прямая $y = m$ имеет только 2-е с ним общие точки [57].

Решение. Преобразуем нашу функцию, раскрывая знак модуля:

$$y = \begin{cases} x \cdot x + x - 3x, & x \geq 0 \\ -x \cdot x - x - 3x, & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} x^2 - 2x, & x \geq 0 \\ -x^2 - 4x, & x < 0 \end{cases}$$

В итоге получили уравнения парабол $y = x^2 - 2x$ при $x \geq 0$ и $y = -x^2 - 4x$ при $x < 0$. Затем построим график функции $y = x|x| + |x| - 3x$ и получим 2-е общие точки при $m = -1$ и $m = 4$.

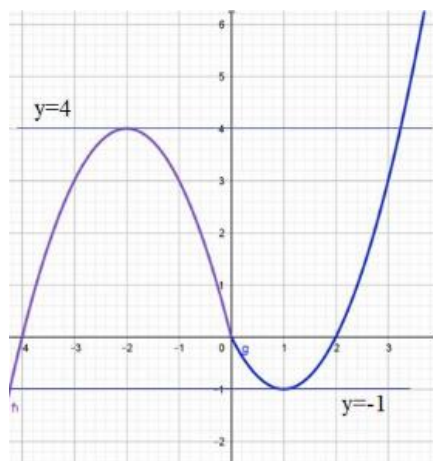


Рисунок 23 – График функции к заданию 3

Так как прямая $y=t$ имеет только 2-е общие точки с графиком, то их уровни можно вычислить как координаты y -вершины парабол по формуле:

$$y_0 = - (b^2 - 4ac)/4a$$

$$y_1 = c - \frac{b^2}{4} = \frac{-4}{4} = -1 \text{ и } y_2 = c - \frac{b^2}{4} = \frac{-16}{-4} = 4$$

Ответ: - 1; 4.

Задание 4. Дана функция вида $y = |x-2| - |x+1| + (x-2)$. Нужно построить её график (рисунок 24) и найти значения коэффициента t , при которых прямая $y=t$ имеет только 2-е с ним общие точки [57].

Решение: преобразуем нашу функцию, избавимся от модулей, раскрыв их знаки.

$$y = |x-2| - |x+1| + x-2 = \begin{cases} x-2-x-1+x-2, & x \geq 2, \\ 2-x-x-1+x-2, & -1 \leq x < 2, \\ 2-x+x+1+x-2, & x < -1 \end{cases} = \begin{cases} x-5, & x \geq 2, \\ -x-1, & -1 \leq x < 2, \\ x+1, & x < -1. \end{cases}$$

В итоге получили уравнения прямых $y = x+1$ при $x < -1$, $y = -x-1$ при $-1 \leq x < 2$ и $y = x-5$ при $x \geq 2$.

Теперь построим график функции $y = |x-2| - |x+1| + (x-2)$ и получим 2-е общие точки при $t = -3$ и $t = 0$.

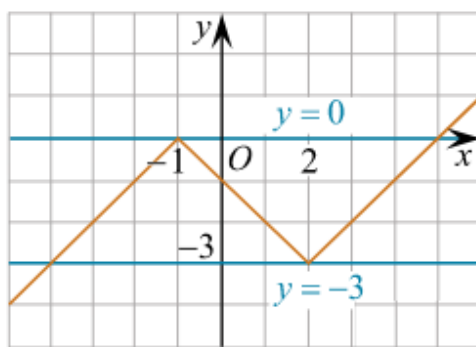


Рисунок 24 – График функции к заданию 4

Ответ: -3; 0.

Задание 5. Дана функция вида $y = \frac{(x^2+2,25)(x-1)}{(1-x)}$. Нужно построить её график (рисунок 25) и найти значения коэффициента k , при которых прямая $y=kx$ имеет только 1-у с ним общую точку [57].

Решение: преобразуем нашу функцию $y = \frac{(x^2+2,25)(x-1)}{(1-x)}$ и найдём её ОДЗ.

$$y = \frac{(x^2+2,25)(x-1)}{1-x} = -\frac{(x^2+2,25)(1-x)}{1-x} = -x^2-2,25, \quad x \neq 1.$$

Очевидно, что при $x \neq 1$ функция $y = -x^2-2,25$ имеет одну выколотую точку $(1; -3,25)$.

Далее построим график функции $y = -x^2-2,25$, который получен из графика $y = x^2$ путём отражения относительно оси Ox , и сдвигом его на $(0; -2,25)$. Для того, чтобы прямая $y=kx$ имела с построенным графиком 1-у общую точку, нужно чтобы прямая $y=kx$ была касательной к графику функции $y = -x^2-2,25$ и точка касания была $\neq 1$, или прямая $y=kx$ должна пересекать график $y = -x^2-2,25$ в точке $x=1$ или в какой-то другой точке.

Приравняем данную функцию $-x^2-2,25 = kx$ к нулю. Тогда $k^2-9=0$, $k = \pm 3$.

При $k = -3$ точка касания $x=1,5$; при $k=3$ точка касания $x=-1,5$.

Теперь нужно рассмотреть 2-й случай при $x=1$ и подставим его значение в уравнение $-x^2-2,25 = kx$, $k=-3,25$. Дискриминант нового полученного уравнения будет > 0 , из этого следует, что существует ещё одно решение.

Ответ: -3,25; -3; 3.

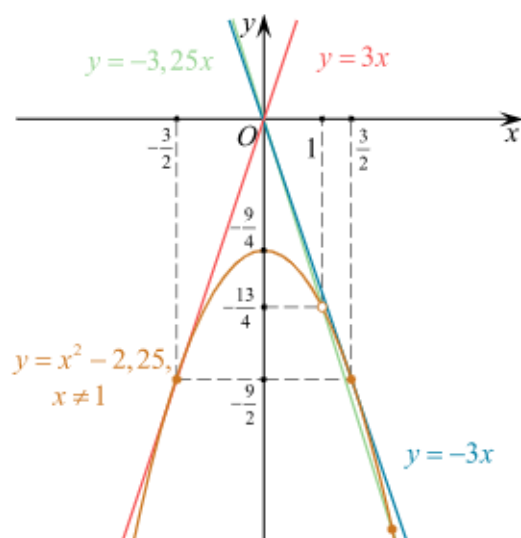


Рисунок 25 – График функции к заданию 5

Задание 6. Дана функция вида $y = \frac{(x-2)}{(\sqrt{x^2-2x})^2}$. Нужно построить её график (рисунок 26) и найти значения коэффициента k , при которых прямая $y=kx$ имеет только 1-ую с ним общую точку [57].

Решение. Найдем ООФ: $x^2 - 2x > 0$; $x \in (-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$. Приведем функцию к более простому виду: $\frac{x-2}{(\sqrt{x^2-2x})^2} = \frac{x-2}{x^2-2x} = \frac{1}{x}$ и построим график, который будет иметь вид гиперболы. Прямая $y=kx$ при $k \geq 1/4$ будет иметь с графиком функции ровно 1-ую общую точку. Ответ: $[1/4; +\infty)$.

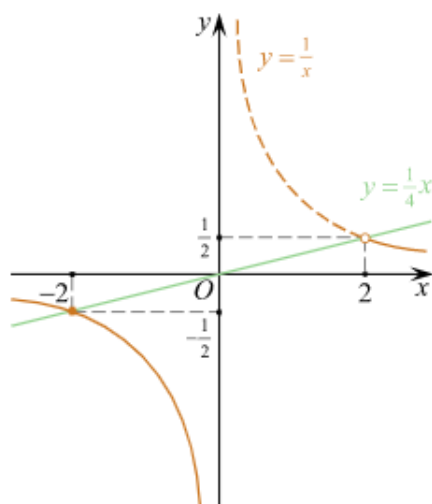


Рисунок 26 – График функции к заданию 6

На основе выполненной контрольной работы в таблицах 3 и 4 представлены результаты ее количественного анализа, описаны виды ошибок учащихся.

Таблица 3 – Результаты количественного анализ контрольной работы (количество учащихся выполнивших задания)

Количественный анализ				
Дата: 15.02.2022 Класс: 10 «Б» Тема: Функции.	Отметка			
	5	4	3	2
Кол-во учащихся, получивших следующие отметки	2	8	15	0
% от общего числа учащихся, выполнивших работу	8%	32%	60%	0%
Кол-во учащихся, не выполнявших задания	0			
Общее кол-во учащихся	25 (100%)			

Таблица 4 – Результаты количественного анализ контрольной работы (качество выполнения заданий)

Количественный анализ			
Дата: 15.02.2022	№ задания		
Класс: 10 «Б»	1(2)	3(4)	5(6)
Тема: Функции.			
Правильно и в полном объёме выполнили задание	25 (100%)	5 (20%)	7 (28%)
Правильно и частично выполнили задание	0	8 (32%)	10 (40%)
Неправильно выполнили задание	0	12 (48%)	8 (32%)
Не приступали к выполнению задания	0	0	0

Анализ таблицы 4 показывает, что больше всего затруднений у учащихся вызывают задания на проверку умения строить графики функций, содержащей переменную под знаком модуля и нахождения значения коэффициента m , при которых прямая $y = m$ имеет с ним 2-е общие точки (справилось только 20% учащихся). Кроме того, большие трудности у учащихся возникают при решении задач, связанных с проверкой умения строить графики функций и нахождением значения коэффициента k , при которых прямая $y = kx$ имеет с ним одну общую точку (справилось только 28% учащихся). С первым (вторым) заданием на установление соответствия между

функциями, заданными графическим и аналитическим способами справилось 100% учащихся. Не приступивших к выполнению заданий не было.

По итогам выполнения контрольной работы у учащихся были выявлены следующие виды ошибок: вычислительные ошибки (12% учащихся); не умение работать с понятием модуля выявлено у 48% учащихся, преобразовывать графики функций - у 32% испытуемых.

Замечания и предложения по результатам контрольной работы: повторить теоретический материал по темам: «Квадратичная функция и её график», «Степенная функция», «Графики вида $y=|f(x)|$ и $y=f(|x|)$ », «Взаимобратные функции»; отработать задания на построение графиков функций, их преобразования, закрепить их свойства.

После выполнения контрольной работы нами был проведен устный опрос в 10«Б» классе, чтобы выявить основные трудности и проблемы, связанные с выполнением заданий прошедшей контрольной работы. По результатам опроса можно сделать вывод, что задания на готовых чертежах учащимся интересны и особых сложностей в выполнении не вызывают. Другое дело, если идёт речь о построении графиков функций по заданным формулам, например, если функция содержит в себе модуль. Не все учащиеся до конца понимают, как преобразовывать такие функции, раскрывать модули.

Поисковый этап эксперимента был продолжен в апреле 2022 года. Он также проводился в МБОУ СОШ №20 г. Химки Московской области в 10 «Б» классе. Была осуществлена апробация системы задач на готовых чертежах при подготовке к ЕГЭ, описанная нами в параграфе 2.1 и направленная на формирование функциональной культуры школьников.

Таким образом, в результате проведения констатирующего и поискового педагогического эксперимента на базе МБОУ СОШ №20 г. Химки Московской области в 10 «Б» классе было выявлено, что учащиеся достаточно хорошо справляются с заданиями на готовых чертежах, так как они наглядны, более понятны и интересны. Чего нельзя сказать о тех заданиях, в которых нужно самим по заданной формуле строить график функции. Это в основном

задания более сложного уровня, где нужны преобразования при раскрытии знака модуля. В ходе поискового эксперимента была осуществлена апробация упражнений на готовых чертежах заданий ЕГЭ на формирование функциональной культуры.

Выводы по второй главе

Разработаны упражнения на готовых чертежах при решении алгебраических задач ОГЭ и ЕГЭ. Так, как это дает возможность на максимальном уровне использовать познавательные функции наглядности и возможности визуального мышления, что поможет при подготовке к итоговой аттестации по математике. Кроме того, упражнения на готовых чертежах направлены на формирование функциональной культуры и понятия функции, которые мы называем упражнениями в соответствии с концепцией формирования понятий Г.И. Саранцева.

Рассмотрено применение компьютерных технологий при изучении функциональной линии в школьном курсе математики.

Разработан урок с применением компьютерных технологий в рамках изучения функциональной линии в школьном курсе математики.

Проведен педагогический эксперимент и представлены его результаты. Определено, что учащиеся достаточно хорошо справляются с заданиями на готовых чертежах, так как они наглядны, более понятны и интересны. Чего нельзя сказать о тех заданиях, в которых нужно самим по заданной формуле строить график функции.

Заключение

Основные выводы и полученные результаты данного исследования:

1. Изучено понятие функциональной культуры обучающихся. Определено, что функциональную грамотность - это один из компонентов функциональной культуры, формирование которой осуществляется на материале функциональной линии школьного курса математики. При формировании функциональной культуры особая роль должна быть отведена функциональной пропедевтике. Полное представление о понятии функции, её свойствах, различных видах элементарных функций происходит в несколько этапов: начиная от «элементарной функционально-графической осведомленности» до «функциональной культуры».

2. Выявлено содержание функциональной линии в школьном курсе математики. Установлено, что в разные периоды функциональной линии существовали различные подходы к определению понятия функции в школьных учебниках, которая трактовалась как: зависимая переменная; соответствие двух множеств; переменная величина; правило соответствия; с помощью понятия функции трактуются основные понятия элементарной математики; функция является моделью многих реальных процессов природы, представляющих собой функциональную зависимость. Полученные знания о функциях помогут обучающимся не только в учебном процессе, но и повседневной жизни.

3. Представлены различные подходы к формированию функциональной культуры обучающихся на уроках математики. Выявлено, что при формировании функциональной культуры целесообразно использовать когнитивно-визуальный подход; возможно применение деятельностного, дифференцированного, личностно-ориентированного подходов; развитию у школьников умения работать с графиками функций на уроках математики может помочь применение межпредметных связей с другими предметами.

4. Разработаны упражнения на готовых чертежах при решении алгебраических задач ОГЭ и ЕГЭ. Процесс обучения математике целесообразно строить с учетом зрительно-познавательного подхода к формированию знаний, умений и навыков обучающихся, так как это дает возможность на максимальном уровне использовать познавательные функции наглядности и возможности визуального мышления. Упражнения на готовых чертежах направлены на формирование функциональной культуры и понятия функции, называемые нами упражнениями в соответствии с концепцией формирования понятий Г.И. Саранцева.

5. Рассмотрено применение компьютерных технологий при изучении функциональной линии в школьном курсе математики. Компьютерные технологии позволяют мотивировать учащихся при изучении функциональной линии в школьном курсе математики, так как темы, связанные с изучением функций вызывают у учащихся наибольшие затруднения.

Для построения графиков функций можно использовать различные программные среды: «GeoGebra», «MathCAD», «MS OfficeExcel», «ДЕСМОС».

6. Проведены констатирующий и поисковый этапы эксперимента. На констатирующем этапе эксперимента было выяснено, что учащиеся достаточно хорошо справляются с заданиями на готовых чертежах, так как они наглядны, более понятны и интересны. В ходе поискового этапа эксперимента была осуществлена апробация системы задач на готовых чертежах при подготовке к ЕГЭ, направленная на формирование функциональной культуры школьников.

Таким образом, цель и задачи исследования достигнуты.

Список используемой литературы

1. Абрамова О.В. Формирование у учащихся основной школы умений работать с графиками функций в условиях реализации межпредметных связей физики, математики и информатики: автореф. дисс. канд. пед. наук: 13.00.02. М., 2012. 26 с.
2. Алимов Ш.А. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы: учеб. для общеобразоват. организаций: базовый и углубл. / Ш.А. Алимов и др. М.: Просвещение, 2020. 463 с.
3. Антонова И.В. Дифференцированная работа учителя математики при формировании понятия функции в курсе алгебры основной школы: автореф. дис. канд. пед. наук: 13.00.02. / И.В. Антонова. Саранск, 2004. 19 с.
4. Антонова И.В., Гуськов В.В. Формирование функциональной культуры обучающихся на уроках математики в общеобразовательной школе // Качество обучения как проблема контроля и оценки образовательной деятельности образовательных организаций (учреждений): материалы II Международной научно-практической конференции, 27-28 января 2022 г. Луганск: ГОУ ВО ЛНР «Луганский государственный педагогический университет», 2022 (в печати).
5. Башмаков М.И. Развитие визуального мышления на уроках математики / М.И. Башмаков, Н.А. Резник // Математика в школе. 1991. №1. С. 4-8.
6. Болтянский В.Г. Как развивать «графическое мышление» // Математика в школе. 1978. № 3. С. 16-23.
7. Власова Е.В. Еще раз об изучении функции в средней школе / Е.В. Власова // Математика в школе, 2002. № 6. С. 53 – 57.
8. Громова Е.В., Сафуанов И.С. Применение компьютерной математической программы GEOGEBRA в обучении понятию функции / Е.В. Громова, И.С. Сафуанов // Образование и наука. 2014. № 4 (113).

9. Далингер В.А. Обучение математике на основе когнитивно-визуального подхода // Вестник брянского государственного университета. - 2011. №1. С. 297-303.

10. Демченкова Н.А. Формирование графической культуры учащихся при обучении функциям в курсе алгебры общеобразовательной школы / Н.А. Демченкова, Е.В. Легаева // Общество. 2020. №3(18). С. 52-55.

11. Иванова О.А. Изучение функциональной линии в курсе алгебры средней школы на основе метаметодического подхода (на примере функции вида $y=kx$). Молодой учёный. Ежемесячный научный журнал. №7 (54) / 2013. С. 384.

12. Иванова Т.А., Симонова О.В. Структура математической грамотности школьников в контексте формирования их функциональной грамотности / Вестник ВятГУ. 2009. №1. [Электронный ресурс]. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/struktura-matematicheskoy-gramotnosti-shkolnikov-v-kontekste-formirovaniya-ih-funktsionalnoy-gramotnosti/viewer> (дата обращения 25.05.2022).

13. Исмаилова З.Н. Компьютерные технологии как средство качественного усвоения учебного материала по математике старшеклассниками: автореф. дис. ... канд. пед. наук / З.Н. Исмаилова, Астрахань, 2010. 26 с.

14. Кашук М.А. Разработка элективного курса по теме «Производная функция» для учащихся гуманитарного профиля [Электронный ресурс] // Инновации. Наука. Образование. 2021. № 34. С. 248–254. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=46320423> (дата обращения 25.05.2022).

15. Князева О.О. Реализация когнитивно-визуального подхода в обучении старшеклассников началам математического анализа: автореферат дис. ... канд. пед. наук. Омск, 2003. 28 с.

16. Макарычев Ю.Н. Алгебра 7 класс: учеб. Пособие для общеобразоват. организаций: базовый уровень / [Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков]. 2 изд. М.: Просвещение, 2020. 224 с.

17. Макарычев Ю.Н. Алгебра 7 класс: учеб. Пособие для общеобразоват. организаций: углубл. уровень / [Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков]. 2 изд. М.: Просвещение, 2020. 304 с.
18. Макарычев Ю.Н. Алгебра 8 класс: учеб. Пособие для общеобразоват. организаций: базовый уровень / [Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков]. 2 изд. М.: Просвещение, 2020. 288 с.
19. Макарычев Ю.Н. Алгебра 8 класс: учеб. Пособие для общеобразоват. организаций: углубл. уровень / [Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, И.Е. Феоктистов]. 2 изд. М.: Просвещение, 2020. 352 с.
20. Макарычев Ю.Н. Алгебра 9 класс: учеб. Пособие для общеобразоват. организаций: базовый уровень / [Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, С.Б. Суворова]. 2 изд. М.: Просвещение, 2020. 320 с.
21. Макарычев Ю.Н. Алгебра 9 класс: учеб. Пособие для общеобразоват. организаций: углубл. уровень / [Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, И.Е. Феоктистов]. 2 изд. М.: Просвещение, 2020. 400 с.
22. Марушенко Л.Ю. Организация учебной деятельности учащихся 5-6 классов, направленной на подготовку к формированию понятия функции: автореферат дис. ... канд. пед. наук. М., 2009. 21 с.
23. Медведева В.В. Элективный курс по математике на тему «Функции и их графики» [Электронный ресурс] / Образовательная соцсеть nsportal.ru. URL: <https://nsportal.ru/shkola/algebra/library/2021/03/16/elektivnyy-kursfunktsii-i-ih-grafiki>. (дата обращения 25.05.2022).
24. Мерзляк А.Г. Алгебра. 7 класс: учебник для учащихся общеобразовательных организаций / А.Г. Мерзляк, В.М. Поляков, М.С. Якир. 4-е изд. М.: Вентана-Граф, 2020. 272 с.
25. Мерзляк А.Г. Алгебра. Углубленное изучение: 7 класс: учебник для учащихся общеобразовательных организаций / А.Г. Мерзляк, В.М. Поляков. 4-е изд. М.: Вентана-Граф, 2020. 336 с.

26. Мерзляк А.Г. Алгебра. 8 класс: учебник для учащихся общеобразовательных организаций / А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонский, М.С. Якир. 2-е изд. М.: Вентана-Граф, 2019. 208 с.

27. Мерзляк А.Г. Алгебра. Углубленное изучение: 8 класс: учебник для учащихся общеобразовательных организаций / А.Г. Мерзляк, В.М. Поляков. 4-е изд. М.: Вентана-Граф, 2020. 368 с.

28. Мерзляк А.Г. Алгебра. 9 класс: учебник для учащихся общеобразовательных организаций / А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонский, М.С. Якир. под ред. В.Е. Подольского. 4-е изд. М.: Вентана-Граф, 2020. 318 с.

29. Мерзляк А.Г. Алгебра. Углубленное изучение: 9 класс: учебник для учащихся общеобразовательных организаций / А.Г. Мерзляк, В.М. Поляков. под ред. В.Е. Подольского. 2-е изд. М.: Вентана-Граф, 2019. 368 с.

30. Мерзляк А.Г. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. Базовый уровень: 10 класс: учебное пособие для учащихся общеобразовательных организаций / А.Г. Мерзляк, Д.А. Номировский, В.Б. Полонский и др.; под ред. В.Е. Подольского. 2-е изд., пересмотр. М.: Вентана-Граф, 2020. 368 с.

31. Мерзляк А.Г. Математика: алгебра и начала математического анализа. Алгебра и начала математического анализа. Углубленное изучение: 10 класс: учебное пособие для учащихся общеобразовательных организаций / А.Г. Мерзляк, Д.А. Номировский, В.М. Поляков; под ред. В.Е. Подольского. 2-е изд., пересмотр. М.: Вентана-Граф, 2019. 480 с.

32. Мерзляк А.Г. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. Базовый уровень: 11 класс: учебное пособие для учащихся общеобразовательных организаций / А.Г. Мерзляк, Д.А. Номировский, В.Б. Полонский, М.С. Якир; под ред. В.Е. Подольского. 2-е изд., пересмотр. М.: Вентана-Граф, 2019. 288 с.

33. Мерзляк А.Г. Математика: алгебра и начала математического анализа. Алгебра и начала математического анализа. Углубленное изучение: 11 класс: учебное пособие для учащихся общеобразовательных организаций /

А.Г. Мерзляк, Д.А. Номировский, В.М. Поляков; под ред. В.Е. Подольского. 2-е изд., пересмотр. М.: Вентана-Граф, 2019. 413 с.

34. Милованов М.Ю. Алгебра и начала анализа. 10-11 классы. Задания на готовых чертежах / авт. - сост. Н.Ю. Милованов. Волгоград: Учитель, 2015. 106 с.

35. Мордкович А.Г. Алгебра. 7 класс. Учебник / А.Г. Мордкович, П.В. Семенов, Л.А. Александрова, Е.Л. Мардахаева. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2020. 367, [1] с.

36. Мордкович А.Г. Алгебра. 7 класс. Учебник для общеобразовательных организаций (углубленный уровень) / А. Г. Мордкович, Н.П. Николаев. М.: Издательство «Мнемозина», 2019. 232, [1] с.

37. Мордкович А.Г. Алгебра. 8 класс. Учебник / А.Г. Мордкович, П.В. Семенов, Л.А. Александрова, Е.Л. Мардахаева. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2020. 384 с.

38. Мордкович А.Г. Алгебра. 8 класс. Учебник для общеобразовательных организаций (углубленный уровень) / А. Г. Мордкович, Н.П. Николаев. М.: Издательство «Мнемозина», 2019. 232, [1] с.

39. Мордкович А.Г. Алгебра. 9 класс. Учебник / А.Г. Мордкович, П.В. Семенов, Л.А. Александрова, Е.Л. Мардахаева. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2020. 368 с.

40. Мордкович А.Г. Алгебра. 9 класс. Учебник для общеобразовательных организаций (углубленный уровень) / А.Г. Мордкович, Н.П. Николаев. П.В. Семенов. М.: Издательство «Мнемозина», 2019. 332 [1] с.

41. Мордкович А.Г. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа: базовый уровень: 10 класс. В 2 ч. Ч. 1 / А.Г. Мордкович, П.В. Семенов, Л.А. Александрова, Е.Л. Мардахаева. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2019. 256с.

42. Мордкович А.Г. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа: базовый и

углубленный уровень: 10 класс. В 2 ч. Ч. 1 / А.Г. Мордкович, П.В. Семенов. М.: Издательство «Мнемозина», 2019. 256 с.

43. Мордкович А.Г. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа: базовый уровень: 11 класс. В 2 ч. Ч. 1 / А.Г. Мордкович, П.В. Семенов, Л.А. Александрова, Е.Л. Мардахаева. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2019. 224с.

44. Мордкович А.Г. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа: базовый и углубленный уровень: 11 класс. В 2 ч. Ч. 1 / А.Г. Мордкович, П.В. Семенов. М.: Издательство «Мнемозина», 2020. 236 с.

45. Нахман А. Д. Функции и их свойства в программе подготовки к ЕГЭ/А.Д. Нахман // Математика в школе, 2010. № 3. С. 62 – 67.

46. Никольский С.М. Алгебра. 8 класс: учеб. для общеобразоват. организаций: базовый и углубл. уровни / С.М. Никольский и др. 5-е изд. М.: Просвещение, 2020. 320 с.

47. Никольский С.М. Алгебра. 9 класс: учеб. для общеобразоват. организаций: базовый и углубл. уровни / С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников и др. 5-е изд. М.: Просвещение, 2020. 368 с.

48. Никольский С.М. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс: учеб. для общеобразоват. организаций: базовый и углубл. уровни / С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников и др. 5-е изд. М.: Просвещение, 2018. 431 с.

49. Никольский С.М. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс: учеб. для общеобразоват. организаций: базовый и углубл. уровни / С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников и др. 5-е изд. М.: Просвещение, 2018. 576 с.

50. Пермякова М.Ю. Формирование функционально-графической грамотности учащихся основной школы в процессе обучения математике: автореф. дис. ... канд. пед. наук: 13.00.02. Шадринск, 2015. 24 с.

51. Пермякова М.Ю. Характеристика понятия «функционально-графическая грамотность обучающихся» / М.Ю. Пермякова // Мир науки, культуры, образования, 2012. №6(37). С. 252.

52. Покровский В.П. Методика обучения математике: функциональная содержательно-методическая линия [Текст]: учебно-метод. пособие / В.П. Покровский. Владимир: Изд-во ВлГУ, 2014. 143 с.

53. Попадьяна С.Ю. Реализация функционально-графической линии в персонализированном обучении общеобразовательному курсу математики с использованием компьютерной системы MATHCAD: автореф. дис. ... канд. пед. наук / С.Ю. Попадьяна. М., 2009. 23 с.

54. Примерная основная образовательная программа основного общего образования (одобрена решением федерального учебно-методического объединения по общему образованию, протокол от 08.04.2015 №1/15) (редакция от 04.02.2020). [Электронный ресурс]. URL: http://www.consultant.ru/document/cons_doc_LAW_282455/ (дата обращения 25.05.2022).

55. Примерная основная образовательная программа среднего общего образования (одобрена решением федерального учебно-методического объединения по общему образованию, протокол от 28.06.2016 №2/16-з). [Электронный ресурс]. URL: http://www.consultant.ru/document/cons_doc_LAW_282289/ (дата обращения 25.05.2022).

56. Решу ЕГЭ. Образовательный портал для подготовки к экзаменам [Электронный ресурс]. URL: <https://math-ege.sdamgia.ru/> (дата обращения 25.05.2022).

57. Решу ОГЭ. Образовательный портал для подготовки к экзаменам [Электронный ресурс]. URL: <https://oge.sdamgia.ru/> (дата обращения 25.05.2022).

58. Ряснова Э.Е. Элективный курс по математике на тему «Производная и её применение» [Электронный ресурс] / Открытый урок 1 сентября. URL: <https://urok.1sept.ru/articles/567419> (дата обращения 25.05.2022).

59. Саранцев Г.И. Упражнения в обучении математике / Г.И. Саранцев. 2-е изд., дораб. М.: Просвещение, 2005. 254 с. (Библиотека учителя. Математика).

60. Стефанова Н. Л., Подходова Н. С. Методика и технология обучения математике. Курс лекций: пособие для вузов / под научн. ред. Н. Л. Стефановой, Н. С. Подходовой. 2-е изд, испр. М.: Дрофа, 2008. С. 256–267.

61. Танеев С.М. Формирование графической грамотности учащихся при обучении решению планиметрических задач в условиях компьютерной поддержки: автореф. дисс. ... канд. пед. наук: 13.00.02. Омск, 2004. 24 с.

62. Тихонова Л.В. Методические особенности формирования функционально-графической линии курса алгебры в условиях личностно-ориентированного обучения: дисс. канд. пед. наук: 13.00.02. Чебоксары, 2002. 208 с.

63. Турчанинова Е.В. Формирование понятий «функция» и «функциональная зависимость величин» у учащихся основной школы в условиях реализации межпредметных связей физики с математикой: автореф. дис. ... канд. пед. наук./ Е.В. Турчанинова. Челябинск, 2005. 28 с.

64. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования: Приказ Мин. образования и науки РФ от 17.12.2010 г. №1897. Последнее обновление от 29.12.2014, №1644. [Электронный ресурс]. URL: https://fgos.ru/LMS/wm/wm_fgos.php?id=osnov (дата обращения 25.05.2022).

65. Федеральный государственный образовательный стандарт среднего общего образования: Приказ Мин. образования и науки РФ от 6.10.2009 г. №413. Последнее обновление от 29.12.2014 №1645. [Электронный ресурс]. URL: https://fgos.ru/LMS/wm/wm_fgos.php?id=sred (дата обращения 25.05.2022).

66. Фридман Л.М. Наглядность и моделирование в обучении. М.: Знание, 1984. 80 с. (Новое в жизни, науке, технике. Сер. "Педагогика и психология"; №6).

67. Цукарь А.Я. Изучение функций в VII классе с помощью средств образного характера // Математика в школе, 2000. № 14. С. 20-27.

68. Denbel D.G. Functions in the Secondary School Mathematics Curriculum/ D.G. Denbel // Journal of Education and Practice, 2015. № 1. P. 77 – 81.

69. Kleiner I. Evolution of the Function Concept: A Brief Survey/ I. Kleiner// The College Mathematics Journal, 1989. № 4. P. 282 – 300.

70. Lisa L. Clement. What do students really know about functions [Электронный ресурс]. 2001. PP. 745 – 748. URL: <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.535.8420&rep=rep1&type=pdf> (дата обращения 15.04.2022).

71. Panaoura A., Michael-Chrysanthou P., Philippou A. Teaching the concept of function: definition and problem solving [Электронный ресурс]. 2016. PP. 440 – 445. URL: <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01286927/document> (дата обращения 17.05.2022).

72. Sierpinska A. On understanding the notion function/ A. Sierpinska// The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy, 1992. P.25 – 58.

Приложение А

Методический анализ теоретического и практического содержания по теме «Упражнения на готовых чертежах в заданиях ЕГЭ по математике»

Методический анализ темы.

Базовые знания:

- понятие функции и ее графика; основные свойства функций;
- понятие непрерывной функции;
- понятие абсциссы и ординаты точки; понятия значения функции в точке;
- основные виды функций, изучаемых в 7-11 классах и их графики;
- графический способ решения уравнений;
- понятие дифференцируемой функции;
- понятие производной функции;
- геометрический и физический смысл производной;
- формулы и правила дифференцирования; производные элементарных функций;
- понятие касательной к графику функции; понятие углового коэффициента касательной; уравнение касательной к графику функции;
- понятие критических и стационарных точек; правило нахождения критических и стационарных точек;
- понятие наибольшего и наименьшего значений функции;
- понятие точки экстремума функции; понятие точек максимума и минимума;
- понятие монотонной функции; понятие возрастающей функции на интервале; понятие убывающей функции на интервале;
- правила исследования функции на монотонность и экстремумы;
- понятие первообразной функции; график первообразной и его связь с исходной функцией; первообразные элементарных функций; правила отыскания первообразных; геометрический смысл первообразной;

понятие неопределенного и определенного интегралов, формула Ньютона-Лейбница.

Рассматриваемые сведения:

- чтение и исследование графиков функций, в том числе с помощью понятия производной функции;
- чтение и исследование графиков производных функций;
- чтение и исследование графиков первообразных функций;
- примеры задач на применение производной для исследования функций;
- примеры задач на применение первообразной для исследования функций.

Теоретический материал. Анализ содержания темы «Упражнения на готовых чертежах в заданиях ЕГЭ по математике» в различных учебниках 11 класса, утвержденных Министерством Просвещения на 2021-2022 годы, рассмотрен в таблице А.1.

Таблица А.1 – Содержание учебного материала, входящих в тему, и количество часов на его изучение в учебниках 11 класса.

Учебник	Кол-во часов: 1 вар-т / 2 вар-т	Главы
А.Г. Мерзляк и др. [33]	37 / 45	Показательная и логарифмическая функции.
	14 / 18	Интеграл и его применение.
	41 / 49	Повторение и систематизация учебного материала.
А.Г. Мордкович и др. [44]	4 / 5 / 6	Повторение материала 10-го класса.
	24 / 31 / 35	Степени и корни. Степенные функции.
	31 / 38 / 45	Показательная и логарифмическая функции.
	9 / 11 / 13	Первообразная и интеграл.
	16 / 20 / 27	Обобщающее повторение.
Ш.А. Алимов и др. [2]	20	Тригонометрические функции.
	20	Производная и её геометрический смысл.
	18	Применение производной к исследованию.
	17	Интеграл.
	26	Итоговое повторение.

Анализ содержания темы проекта «Упражнения на готовых чертежах в заданиях ЕГЭ по математике» в различных учебниках, рекомендованных

Министерством Просвещения на 2021-2022 годы, показал, что наиболее подходящим является учебник авторского коллектива Мерзляка и др. [33] углубленного уровня для 11 класса, так как в нём содержание темы наиболее раскрыто, учебник снабжен доступным, полным и необходимым материалом для темы проекта, имеет много упражнений, хорошо проиллюстрирован.

В качестве дополнительной учебной литературы выбраны учебники для 11 класса под редакцией А.Г. Мордковича и др. [44], Ш.А. Алимов и др. [2] базового и углубленного уровней. Учебники под редакцией А.Г. Мордковича и др. [44], а также Ш.А. Алимова и др. [2] также наглядны, имеют достаточное количество примеров и заданий, в том числе и на готовых чертежах.

На обобщающее повторение в рассмотренных учебниках [2; 33; 44] в соответствии с методическими рекомендациями отведено от 16 до 49 часов на углубленном уровне в зависимости от количества часов в неделю на изучение учебного материала отводится: 4 / 5 / 6 часов в неделю.

В Таблицах А.2, А.3 представлен фрагмент перечня элементов содержания (по кодификатору), проверяемых на ЕГЭ по математике в заданиях №6 и №9 (углубленный уровень), в соответствии с темой проекта.

Таблица А.2 – Перечень элементов содержания (по кодификатору), проверяемых на ЕГЭ по математике в задании №6 (углубленный уровень).

Код раздела	Федеральный компонент ФГОС СОО	Элементы содержания, проверяемые заданиями экзаменационной работы
4.1	Производная	
	Понятие о производной функции, геометрический смысл производной. Физический смысл производной, нахождение скорости для процесса, заданного формулой или графиком. Уравнение касательной к графику функции. Производные суммы, разности, произведения, частного. Производные основных элементарных функций. Вторая производная и её физический смысл.	Производная функции в точке. Геометрический и физический смысл производной. Касательная к графику функции. Правила дифференцирования. Производные элементарных функций. Вторая производная, её геометрический и физический смысл.

Продолжение таблицы А.2

Код раздела	Федеральный компонент ФГОС СОО	Элементы содержания, проверяемые заданиями экзаменационной работы
4.2	Исследование функций	
	Применение производной к исследованию функций и построению графиков. Примеры использования производной для нахождения наилучшего решения в прикладных, в том числе социально-экономических, задачах.	Исследование элементарных функций на точки экстремума, наибольшее и наименьшее значение с помощью производной. Применение производной при решении задач.
4.3	Первообразная и интеграл	
	Первообразные элементарных функций. Примеры применения интеграла в физике и геометрии.	Первообразные элементарных функций. Вычисление площадей плоских фигур и объёмов тел вращения с помощью интеграла

Таблица А.3 – Перечень элементов содержания (по кодификатору), проверяемых на ЕГЭ по математике в задании №9 (углубленный уровень).

Код раздела	Федеральный компонент ФГОС СОО	Элементы содержания, проверяемые заданиями экзаменационной работы
2.1; 2.2	Уравнения. Неравенства.	
3.1	Определение и график функции	
	Функция, область определения функции. Множество значений функции. График функции. Примеры функциональных зависимостей в реальных процессах и явлениях. Обратная функция. График обратной функции. Преобразования графиков: параллельный перенос, симметрия относительно осей координат.	Решение задач с использованием числовых функций и их графиков. Обратные тригонометрические функции, их главные значения, свойства и графики. Взаимно обратные функции. Графики взаимно обратных функций. Преобразования графиков функций: сдвиг, умножение на число, отражение относительно координатных осей.
3.2	Элементарное исследование функций	
	Монотонность функции. Промежутки возрастания и убывания. Чётность и нечётность функции. Периодичность функции. Ограниченность функции. Точки экстремума (локального максимума и минимума) функции. Наибольшее и наименьшее значения функции.	Нули функции, промежутки знакопостоянства, монотонность. Чётные и нечётные функции. Периодические функции и наименьший период. Решение задач с использованием числовых функций и их графиков. Точки экстремума (максимума и минимума). Наибольшее и наименьшее значение функции.

Продолжение таблицы А.3

Код раздела	Федеральный компонент ФГОС СОО	Элементы содержания, проверяемые заданиями экзаменационной работы
3.3	Основные элементарные функции	
	Линейная функция, её график. Функция, описывающая обратную пропорциональную зависимость, её график. Квадратичная функция, её график. Степенная функция с натуральным показателем, её график. Тригонометрические функции, их графики. Показательная функция, её график. Логарифмическая функция, её график.	Использование свойств и графиков линейных и квадратичных функций, обратной пропорциональности. Степенная функция, её свойства и график. Тригонометрические функции числового аргумента $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$. Свойства и графики тригонометрических функций. Показательная функция, её свойства и график. Логарифмическая функция, её свойства и график.

Анализ задачного материала по теме проекта в ЕГЭ 2022 года (задача №6 – базового уровня и №9 - повышенного уровня) показал, что можно выделить определенные типы задач, указанные ниже.

Задача №6 ЕГЭ. Типы задач на готовых чертежах:

- на нахождение точек экстремума (максимума и минимума) функции по графику функции;
- на физический смысл производной;
- на геометрический смысл производной;
- на понятие касательной к графику функции;
- на применение производной к исследованию функций и построению графиков;
- на чтение и исследование графиков первообразных функций;
- на геометрический смысл первообразных.

Задача №9 ЕГЭ. Типы задач на готовых чертежах:

- на нахождение значения функции в точке;
- на нахождение значения абсциссы функции в точке, при котором выполняется заданное равенство;

- на определение коэффициентов a , b и c функции, заданной аналитическим способом, по графику, и применение преобразования графиков функций;
- на нахождение абсциссы точки, являющейся точкой пересечения графиков двух функций;
- на нахождение ординаты точки, являющейся точкой пересечения графиков двух функций.