МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Тольяттинский государственный университет»

Институт математики, физики и информационных технологий
(наименование института полностью)

Кафедра «Высшая математика и математическое образование»
(наименование)

44.04.01 Педагогическое образование
(код и наименование направления подготовки)

Математическое образование
(направленность (профиль))

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА (МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ)

на тему «Задачи на доказательство по алгебре и началам математического анализа как средство формирования познавательных универсальных учебных действий старшеклассников»

Студент А.А. Варфоломеева
(И.О. Фамилия) (личная подпись)

Научный руководитель канд. пед. наук, доцент, В.В. Липилина
(ученая степень, звание, И.О. Фамилия)

Тольятти 2022

Оглавление

Введение

Актуальность и научная значимость. На протяжении всего развития общества требуется постоянное совершенствование практических умений и открытие новых теоретических знаний. В настоящее время система образования претерпевает реформирование и модернизацию. Основные изменения нацелены на многогранное формирование личности. Одним из наиболее важных аспектов развитой личности является уровень сформированности логического мышления.

Мышление формируется в процессе изучения каждого предмета. Далеко не последнюю роль в его развитии играет обучение математике. Она способствует развитию у школьников навыков анализа данных, принятия решений и аргументировать свою позицию.

Основную долю формирования навыков проведения доказательства берёт на себя курс геометрии. Большое количество заданий на доказательство способствует развитию логического мышления, учит анализировать данные и аргументировать ту или иную позицию. Однако, в курсе алгебры задачи на доказательство занимают не менее важное место.

Одной из многих целей обучения математики служит обучение применению методов и способов проведения доказательств при решении задач. Простые задания, состоящие из одного или двух шагов доказательства, должны присутствовать с самого начала систематического изучения курса алгебры.

Решение стандартных задач на применение изученных свойств требует выработки определённых навыков, что обеспечивает усвоение теоретического материала и умение использовать его при выполнении математических упражнений.

В свою очередь, они позволяют развить логическое мышление, развить умение рассуждать, побуждают учащихся к анализу, аргументации, обоснованию, доказыванию. Они также могут являться неотъемлемой частью решения вычислительных задач. Главное отличие от задач на доказательство в геометрии алгебраические доказательства отличаются абстрактностью и отсутствием чертежей. Большая часть доказательств в алгебре проводят в общем виде.

Основное место в психолого-педагогической литературе и в методике обучения математике занимает процесс формирования умений проведения доказательств. Данный процесс является сложным и многогранным. Поэтому вопрос о его сущности, поиске удобного и краткого доказательства, обучении проведения математических доказательств не оставляет равнодушным многих исследователей.

«Вопрос о сущности математического доказательства изучался в работах Ф.Ф. Притуло [41], А.А. Столяра [50] и др.

А.А. Столяр [50] считает, что в строгом смысле о доказательстве можно говорить лишь в рамках какой-нибудь формальной аксиоматической системы. По его мнению, любое доказательство представляет собой конечную последовательность предложений математической теории.

Ф.Ф. Притуло [41] рассматривает доказательство как мыслительный процесс обоснования какого-либо суждения с помощью ранее известных истинных суждений.

Результаты данных исследований обладают большим значением для улучшения методики обучения учащихся проведению доказательств. Однако теория и практика сильно расходятся. Знания и умения по проведению доказательств находятся на низком уровне, а также присутствует формализм в их знаниях» [10].

Нельзя отрицать тот факт, что взаимосвязь жизненных и школьных задач довольно большая. Основные приемы рассуждения и доказательства пересекаются при решении двух видов задач. «Поэтому процесс обучения учащихся методам и приёмам проведения рассуждений и доказательств на уроках алгебры в старших классах является одним из средств формирования познавательных универсальных учебных действий, их воспитания и подготовки к будущей производственной деятельности» [10].

Анализ основной и дополнительной учебной литературы показывает, что на уроках алгебры в старших классах уделяется недостаточное количество времени задачам на доказательство. Что приводит к неполному формированию познавательных универсальных учебных действий учеников и не готовность выпускников школы к решению жизненных задач. Данная ситуация и определяет актуальность и научную значимость проблемы исследования.

Вопросы формирования познавательных универсальных учебных действий на уроках в школе, в том числе и алгебры, а также, во внеурочное время, затрагивались в различных диссертационных работах. Можно отметить исследования авторов Смирновой В.А. [48], Чоповой С.В. [62], Чулановой Н.А. [63], Фирер А.В. [57].

Проблема исследования представляется в определении задач на доказательство, влияющих на формирование познавательных универсальных учебных действий в курсе алгебры и начал математического анализа старшей общеобразовательной школе.

Под **объектом** исследования по теме данной исследовательской работы понимается процесс обучения математике в старшей общеобразовательной школе.

Предметом исследования выступают задачи на доказательство в курсе алгебры и начал математического анализа 10 - 11 классов в общеобразовательной школе.

Цель данной работы заключается в исследовании и систематизации задач на проведение доказательств как средства формирования познавательных универсальных учебных действий.

Гипотеза исследования основана на том что детальное и акцентированное обучение способам проведения доказательства при решении задач в курсе алгебры и начал математического анализа, позволяет обеспечить положительный результат в формировании познавательных учебных универсальных действий.

Задачи:

– определить, что является сущностью понятия «познавательные универсальные учебные действия»;
– разработать элективный курс «Задачи на доказательство в курсе алгебры и начал математического анализа»;
– предоставить результаты педагогического эксперимента по влиянии элективного курса на процесс формирования ПУУД.

К **теоретической и методологической основе** данного исследования относятся учебные пособия 10-11 классов Н.Я. Никольского [34], [35], А.Г. Мерзляка [26], [27], [28], [29] А.Г. Мордковича [31], [32], [33], А.Г. Рубина [43], [44].

Базовыми для настоящей работы являются основные требования к знаниям, умениям учащихся по ФГОС СОО и анализ содержания теоретического и задачного материала по темам, включающее в себя решение задач на проведение доказательств в курсе алгебры и начал математического анализа старших классов общеобразовательной школы [54], [56].

Методы исследования, использованные для решения поставленных задач: изучение и систематизация научно-исследовательской и учебно-педагогической литературы; наблюдение, анализ и педагогический эксперимент; статистическая обработка данных.

Основные этапы исследования:

– 1 этап (2020/2021 уч.г.): анализ ранее выполненных исследований по теме диссертации, анализ школьных учебников, нормативных документов (стандартов, программ), анализ опыта работы педагогов по данной теме;
– 2 этап (2020/2021 уч.г.): определение теоретических основ исследования по теме диссертации;

– 3 этап (2021/2022 уч.г.): определение методических основ исследования, разработка элективного курса для обучающихся старших классов;

– 4 этап (2021/2022 уч.г.): оформление диссертации, корректировка ранее представленных материалов, уточнение аппарата исследования, описание результатов экспериментальной работы, формулирование выводов.

Опытно-экспериментальная база исследования: Российская Федерация, Московская область, г.о. Павловский Посад, «Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение средняя общеобразовательная школа №2» корпус 2. В эксперименте принимали учащиеся старших классов.

Научная новизна проведенного исследования заключается в определении и обосновании методических особенностей формирования познавательных универсальных ученых действий через задачи на доказательство в курсе алгебры и начал математического анализа.

Теоретическая значимость исследования состоит в том, что в нем сформулированы теоретические основы обучения проведению доказательств в курсе математики старших классов, проанализированы соответствующие требования к подготовке учащихся; проанализирована методика обучения проведению доказательств учащихся.

Практическая значимость исследования заключается в анализе задачного материала школьного курса алгебры и начал математического анализа по теме диссертации, разработке соответствующего элективного курса.

Апробация и внедрение результатов работы велись в течение всего времени проведения исследования. Экспериментальная проверка предлагаемых методических рекомендаций была осуществлена в период производственной практики(научно-исследовательской работы) и преддипломной практики на базе кафедры высшей математики и математического образования Тольяттинского государственного университета, а также в период работы учителем математики в «Муниципальном бюджетном общеобразовательном учреждении средней общеобразовательной школе №2,корпус 2» (Российская Федерация, Московская область, г.о. Павловский Посад, ул. Каляева, д. 2).

На защиту выносятся:

– методические рекомендации по формированию познавательных универсальных учебных действий с помощью задач на доказательство в курсе алгебры и начал математического анализа;

– элективный курс «Задачи на доказательство в курсе алгебры и начал математического анализа»;

– результаты педагогического эксперимента.

Структура магистерской диссертации. Работа состоит из введения, двух глав, заключения, содержит 8 рисунков, 7 таблиц, список используемой литературы (71 источник). Основной текст работы изложен на 74 страницах.

Глава 1 Методические основы формирования познавательных универсальных учебных действий через задачи на доказательства в курсе алгебры и начал математического анализа

1.1 Понятие познавательных универсальных учебных действий

С 2009 года база функционирования школы опирается на Федеральный государственный образовательный стандарт второго поколения, в котором сформулированы конкретные требования не только к результатам освоения основной образовательной программы и её структуре, а также и к условиям её реализации.

Новый подход, предусматриваемый ФГОС среднего общего образования (ФГОС СОО), повлиял на изменение целей, задач, содержания образования на данном этапе его развития.

А.В. Могилев утверждает, что «современное образование постепенно отходит от традиционных методов и технологий, с помощью которых решались образовательные задачи» [30]. Нельзя с ним не согласиться, поскольку новый образовательный стандарт отличает то, что в его основе лежит системно-деятельностный подход. Суть которого заключается в организации учебного процесса при помощи активной, разносторонней и самостоятельной познавательной деятельности учащихся.

В связи с этим стали появляться инновационные подходы к образованию. По мнению Л.А. Макаровой, «инновации в качестве основных задач должны ставить:

– формирование способности добывать знания;

– формирование способности к саморазвитию и к самосовершенствованию;

– формирование коммуникативных способностей и социально значимых качеств» [24].

Решение поставленных Л.А. Макаровой задач можно осуществлять благодаря систематизированным, целенаправленным процессом формирования универсальных учебных действий у учащихся, что находит свое отражение в ФГОС СОО второго поколения.

Проблема формирования универсальных учебных действий рассматривалась во многих работах, в том числе [15], [18], [51], [60]. Среди них стоит отметить работы Асмолова А.Г. [4], Гальперина П.Я. [16], Выготского Л.С. [14], Давыдова В.В. [19], Эльконина Д.Б. [66]. Их исследования объединяет единое мнение, что процесс формирования УУД должен носить систематический, постепенный характер. Общее между проблемным обучением и познавательными универсальными учебными действиями можно проследить в работах Боженковой Л.И. [8] и Середы Т.Ю. [46].

Основой для становления концепции развития УУД послужил системно-деятельностный подход к обучению. Основные составляющие положения научной школы Л.С. Выготского стали фундаментальной базой для функционирования данной школы и образованию современного подхода к обучению. А базисные элементы (анализ, содержательное обобщение и т.д.) в той или иной мере находят свое отражение в познавательных универсальных учебных действиях.

Каждому из определённых авторов присущ индивидуальный подход к раскрытию термина «познавательные универсальные учебные действия». Раскроем часть из них.

В своей работе Середа Т.Ю. [46] познавательным универсальным учебным действиям дает такое определение как «действия, которые обеспечивают познание – умственный творческий процесс получения и постоянного обновления знаний, необходимых человеку» [46].

Асмолов А.Г. [4] утверждает, что «познавательные универсальные учебные действия – это умения результативно мыслить и работать с информацией в современном мире. Они обеспечивают способность к познанию окружающего мира: готовность осуществлять направленный поиск, обработку и использование информации» [4].

Онучина А.В. [38] в своей статье под познавательными учебными действиями понимает «действия самостоятельного прогнозирования учебных целей, которые создают условия для развития логического и проектного мышления» [38].

Боженкова Л.И. [7] отмечает, что «к познавательным общеучебным УУД относятся действия, связанные с переработкой учебной информации. Учебная информация становится знанием человека, если только она «присвоена» им, прибавлена к наличному умственному опыту, переработана с помощью познавательных действий» [7]. Помимо этого, Людмила Ивановна делает акцент на том, что представленные группы действий в книге Асмолова А.Г. [5] очень тесно связаны с обучением математике.

Проведя сравнительный анализ различных подходов к раскрытию термина «познавательные универсальные учебные действия» определение Н.А. Чулановой и Т.Н. Черняевой [64] становится основным для данной работы: «Познавательные УУД – это умственные действия, направленные на планирование, осуществление анализа своей познавательной деятельности и управление ею, на основе способов деятельности, используемых как в рамках образовательного процесса, так и при решении проблем в реальных жизненных ситуациях» [64, с. 186]. Относительно указанному мнению основные положения познавательных УУД имеют раскрытие в полном соответствии с ФГОС [40]; [55], принимая во внимание базисные виды деятельности индивидуума, проходящего обучение и аргументированно в полной мере раскрывает возможность сформировать познавательные действия в ходе обучения математике.

В старшей школе познавательные универсальные учебные действия имеют свои особенности. Так перед учениками 10-11 классов ставится только цель, которую они должны достигнуть, а какие инструменты и алгоритм использовать для её достижения они выбирают сами. Школа лишь направляет и максимально ориентирует учащихся, тем самым развивая их функциональную грамотность.

С психологической точки зрения сформировывается психологическая готовность выпускника к дальнейшему самостоятельному развитию.

Устройство познавательных универсальных учебных действий представлено на рисунке 1.

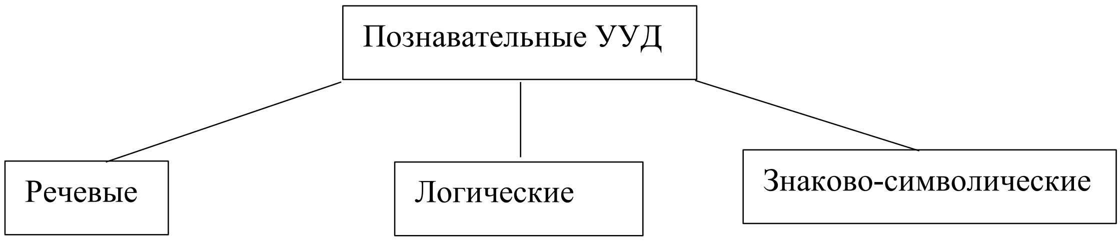

Рисунок 1– Устройство ПУУД

Речевые универсальные действия на старшей ступени можно охарактеризовать как «Адвокат дьявола». Они включают в себя умения:

– обосновывать непринятую позицию;
– выявлять возможные позиции;
– использовать принцип относительности.

Логические универсальные действия в 10 - 11 классах имеет характеристику «учебное исследование». Состоят из:

– умения подвести под понятие;
– умения делать вывод следствий, разворачивание понятия;
– умения проводить аналогии, выделять аксиоматику.

Знаково-символические универсальные действия можно отнести к понятию «когнитивная графика». Включает в себя:

– когнитивную и информационную графику;
– выявление общих законов;
– имитационное моделирование.

Отметим, что методические аспекты формирования познавательных универсальных учебных действий через задачи на доказательства в курсе алгебры и начал математического анализа также отражены и в различной зарубежной литературе [67]-[71]. Исходя из рассмотренных определений и структуры можно предполагать, что задачи на доказательство в курсе алгебры и начал математического анализа могут служить одним из средств формирования познавательных универсальных учебных действий.

1.2 Задачи на доказательство в школьных учебниках математики

Федеральный государственный образовательный стандарт среднего общего образования (ФГОС СОО) устанавливает требования к результатам освоения обучающимися основной образовательной программы. В силу своего предметного содержания математика имеет все возможности для формирования познавательных учебных действий, в том числе и познавательных. Немало важную роль в этом играют задачи на доказательство. Они позволяют развить такие компоненты познавательных универсальных учебных действий как умение строить самостоятельный процесс поиска, исследования; построения логической цепочки рассуждений, осуществления доказательства, выдвижения и обоснования гипотез.

Задачи на доказательство так же являются одним из средств развития логического мышления. Отечественные психологи и методисты поддерживали развитие логического мышления учащихся, в отличие от зарубежных. Например, швейцарский психолог и философ Ж. Пиаже [39] отстаивал положение о независимости развития логических структур от обучения. Советский педагог-математик и методист И.А. Гибш [17] подчеркивал необходимость формирования умений учащихся по использованию суждений и умозаключений с целью получения новых умозаключений на основании правил вывода и законов логики, а также применению различных приемов доказательств.

Рассмотрим в таблице 1 учебные пособия для обучения алгебре и началам математического анализа, которые используются в старшей общеобразовательной школе, работающей по ФГОС СОО на наличие задач на доказательство в курсе алгебры и начал математического анализа в процентном соотношении. Также выделим основные типы заданий, представленных в данных учебниках.

Таблица 1 – Сравнительный анализ учебных пособий

УМК	Класс	Уровень	Всего заданий	Задания на доказательство	Примечания
А.Г. Рубин, П.В. Чулков	10	Базовый и углублённый	782	121 16 %	В учебниках присутствуют задания 3-х уровней сложности (необходимый, повышенный, максимальный), в каждом из которых есть задания на доказательство.
А.Г. Рубин, П.В. Чулков	11	Базовый и углублённый	556	63 11%	
Н.Я. Виленкин, О.С. Ивашев-Мусатов, С.И. Шварцбурд	10	Углублённый	678	102 15%	Выделены типовые задачи для подготовки учащихся к ЕГЭ, предложены алгоритмы их выполнения и варианты заданий для самоконтроля, реализованы современные подходы к формированию проектно-исследовательских умений [13].
Н.Я. Виленкин, О.С. Ивашев-Мусатов, С.И. Шварцбурд	11	Углублённый	631	68 11%	
А.Г. Мордкович, П.В. Семёнов	10	Базовый и углублённый	2058	184 9%	Учебник состоит из 2-х книг: теоретическая и практическая. Упражнения представлены трёх уровней сложности. Количество упражнений рассчитано на то, чтобы хватило и для учащихся профильных школ различной направленности.
А.Г. Мордкович, П.В. Семёнов	11	Базовый и углублённый	1467	85 6%	

Продолжение таблицы 1

УМК	Класс	Уровень	Всего заданий	Задания на доказательство	Примечания
С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В Шевкин	10	Базовый и углублённый	1144	80 7%	По учебнику можно работать независимо от того, по каким учебникам учились школьники в предыдущие годы. Учебник нацелен на подготовку учащихся к поступлению в вузы. Выделены задания для базового и профильного уровней, задания для устной работы, задания повышенной трудности, а также задания для повторения.
С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В Шевкин	11	Базовый и углублённый	1216	81 7%	
А.Г. Мерзляк, Д.А. Номировский, В.Б. Полонский, М.С. Якир	10	Базовый	950	62 7%	В книгах представлены задачи 4 уровней сложности ключевые задачи. Отдельно выделены задания для домашней работы и устной работы. Есть небольшой раздел в конце каждого параграфа с заданиями для подготовки к изучению новой темы. Выделены основные понятия.
А.Г. Мерзляк, Д.А. Номировский, В.Б. Полонский, М.С. Якир	11	Базовый	945	28 3%	
А.Г. Мерзляк, Д.А. Номировский, В.М. Поляков	10	Углублённый	1232	171 14%	В книгах представлены задачи 4 уровней сложности ключевые задачи, результат которых можно использовать при решении других задач. Отдельно выделены задания для домашней работы и устной работы.
А.Г. Мерзляк, Д.А. Номировский, В.М. Поляков	11	Углублённый	1320	87 7%	

К основным заданиям на доказательство относятся задачи на доказательство равенств и неравенств [1]. Намного реже встречается доказательство формул и теорем, доказывание чётности и нечётности функции, и является ли число целым или иррациональным [20]; [42]; [47]; [52]; [61].

Приведём примеры заданий на доказательство из рассмотренных учебных пособий в таблице 2.

Таблица 2 – Примеры заданий на доказательство в школьных учебниках

УМК	Уровень	10 класс	11 класс
А.Г. Рубин, П.В. Чулков	Базовый и углублённый	1. «Докажите, что для всех допустимых значений α справедливо неравенство $|tg\alpha + ctg\alpha| \geq 2$» [43, с.31]. 2. «Докажите тождество: а) $\frac{1+\sin 2\alpha+\cos 2\alpha}{1+\sin 2\alpha - cos2\alpha} = ctg\alpha$; б) $\frac{ctg\alpha + ctg2\alpha + ctg4\alpha}{2cos2\alpha + 3cos4\alpha + 2} = \frac{1}{sin4\alpha}$ » [43, с. 47]. 3. «Докажите, что функция $y=tgx$ является периодической» [43, с. 99]. 4. «Докажите, что если функция $y = f(x)$ – периодическая с основным периодом Т, то функция	1. «Докажите, что неравенство $\frac{2+(\frac{x}{3})^{22}-(\frac{x}{3})^{25}}{3+(\frac{x}{2})^{6}-(\frac{x}{2})^{10}} > \frac{1}{2}$ Справедливо при $x \in [0; 2]$» [44, с. 12]. 2. «Докажите, что число $\sqrt[3]{4}+\sqrt[5]{3}$ иррационально» [44, с. 21]. 3. «Докажите, что для последовательности, заданной рекуррентно $a_{n+1}a_n = 1, a_1 = 3$, выполнено необходимое условие существования предела последовательности, но при этом она не имеет предела» [44, с. 56]. 4. «Докажите, что площадь фигуры, ограниченной линиями $y = cos^6x - sin^6x - -15sin^2xcos^4x + +15sin^4xcos^2x$,

Продолжение таблицы 2

УМК	Уровень	10 класс	11 класс
		$y = k \cdot f(mx + a) + b$, где k, m, a, b – действительные числа, $k \neq 0, m \neq 0$, тоже периодическая, причём её основной период равен $\frac{T}{\|m\|}$» [43, с.102]. 5. «Докажите, что многочлен, все коэффициенты которого положительны, не может иметь положительных корней» [43, с. 176].	$x = -\frac{\pi}{24}, x = \frac{\pi}{24}, y = 0$ более чем в 114 раз больше площади фигуры, ограниченной линиями $y = \left(1 + 2cos\frac{x}{24}\right)\left(cos\frac{x}{6} - -cos\frac{x}{4} + cos\frac{7x}{24}\right)$, $x = -2\pi, x = 2\pi, y = 0$» [44, с. 109].
А.Г. Мордкович, П.В. Семёнов	Базовый и углублённый	1. «Докажите неравенство: а) $5^n > 3n - 1$, где $n \in N$; б) $3^n > 2n^2 + 3n$, где ; $n \in N$; в) $2^n > 5n + 1$, где $n \in N, n \geq 5$; г) $5^n > 3n^2 + 10n$, где ; $n \in N, n \geq 3$ » [33, с. 35]. 2. «Докажите, что все значения функции y=5x+3 положительны в окрестности точки 0 радиуса 0,2» [33, с. 44]. 3. «Докажите тождество: а) $1 + tg^2t = cos^{-2}t$; б) $1 + ctg^2t = sin^{-2}t$; в) $sin^2t(1 + ctg^2t) = 1$; г) $cos^2t(1 + tg^2t) = 1$» [33, с. 79].	1. «Докажите, что многочлен не имеет действительных корней: а) $x^6 - 5x^3 + 7$; б) $x^4 - x + 2$ » [31, с. 16]. 2. «Докажите, что сумма $17^{11}+5^{11}$ делится без остатка на 22» [31, с.19]. 3. «Дано: $f(x) = log_2x$. Докажите, что выполняется следующее соотношение: а) $f(2^x) = x$; б) $f(4^x) + f(8^x) = 5x$» [31, с. 91]. 4.«Докажите, что множество решений неравенства $\|f(x)\| < g(x)$ совпадает с множеством решений системы $\begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > -g(x). \end{cases}$» [31, с. 185].

Продолжение таблицы 2

УМК	Уровень	10 класс	11 класс
		4. «Докажите, что функция $y = sinx$: а) возрастает на отрезке [12;13]; в) достигает на интервале (7;12) наименьшего и наибольшего значений; » [33, с. 96]. 5. «Докажите, что треугольник, образованный касательной к гиперболе $y = \frac{a^2}{x}$ и осями координат, имеет постоянную площадь, а точка касания является центром окружности, описанной около этого треугольника» [33].	

Проведя сравнительный анализ, можно сделать вывод о незначительном присутствии задач на доказательство в выбранных учебных пособиях по алгебре и началам математического анализа в 10-11 класс в соответствии с ФГОС. Также прослеживается тенденция к снижению количества заданий на проведение доказательств в 11 классе. Стоит отметить что, большая часть данных упражнений встречается в учебниках по геометрии.

Однако в школьной математике имеется достаточно много задач, которые по цели относятся к «задачам на нахождение», а по приемам - к «задачам на доказательство». В данном сравнительном анализе использовались упражнения с чёткой формулировкой «доказать», «докажите». Большая часть задач в учебниках связана с доказательством неравенств и тождеств. Одной из частей Федерального государственного образовательного стандарта среднего общего образования является формирование познавательных универсальных учебных действий у учащихся. Одним из инструментов их развития являются задачи на доказательство и процесс обучения их решения.

Выводы по первой главе

В первой главе был проведен анализ психолого-педагогической и методической литературы. С помощью него была раскрыта сущность познавательных универсальных действий и дана их характеристика для учащихся старших классов. Таким образом, под сущностью понимаются не сами знания, а умения их добывать, анализировать и применять на практике.

Был проведен сравнительный анализ учебных пособий на наличие заданий на доказательство в задачном материале. Его результат позволил убедиться в недостаточном количестве упражнений для развития навыков доказательства и, как следствие, формирования познавательных универсальных учебных действий. Так же, были определены основные виды задач на доказательство и приведены их примеры.

Глава 2 Реализация формирования познавательных универсальных учебных действий через задачи на доказательства в курсе алгебры и начал математического анализа

2.1 Технология усвоения методов доказательства

Большинство задач на доказательство относятся к школьному курсу по геометрии, однако и в курсе алгебры они занимают далеко не последнюю роль. Именно такой вид задач школьники не спешат выполнять и большую часть внимания выделяют на решение задач на вычисление. В основном это связано с недостаточным умением структурировать, соотносить и использовать большой объем информации. Хотя, навыки доказательства оказывают положительное влияние на умение решать вычислительные задачи.

Понятие «доказательство» в нашем привычном понимании появилось еще в Древней Греции в VII–VI до н.э. Основоположниками были древнегреческие философы и математики Фалес и Пифагор. В широком смысле «доказательство – всего лишь рассуждение, которое должно убедить нас настолько, что мы сами готовы убеждать с его помощью других» [53, с.14].

Однако, автор Стойлова Л.П. [49] трактует понятие немного иначе «доказательство – логическое действие, в процессе которого истинность какого-либо суждения основывается с помощью других суждений, которые считаются истинными. В математике такими суждениями могут стать аксиомы или доказанные раннее утверждения» [49, с. 83]

В современной математической науке существует множество способов и методов доказательства. Но, как отмечает Успенский В.А. [53] «предположить разумную классификацию всевозможных доказательств трудно. Тем более, что доказательство, как правило, состоит из нескольких (иногда очень многих) этапов, и на каждом этапе применяется свой способ убеждения. Нередко встречается, что внутрь одного способа доказательства «залезает» другой» [53, с. 7]. Выделим основные способы доказательства:

– доказательство от определения;

– доказательство «от противного»;

– доказательство, построенное на анализе свойств исследуемого объекта;

– доказательство по принципу приведения к нелепости, абсурдному;

– доказательство на основе классификации факторов, позволяющей установить свойства объекта исследования и причины его оригинального поведения;

– аксиоматическое доказательство;

– фактологическое доказательство;

– гипотетическое (концептуальное) доказательство;

– экспериментальное доказательство.

Существующие методы математических доказательств представлены на рисунке 2.

Рисунок 2 – Методы математических доказательств

Родиной понятия «технология» являются Соединенные Штаты Америки. Именно там в 60-х. годах начался новый этап развития педагогической науки. Следом за США педагогическая технология появилась и в Англии. Однако отголоски проявления данного понятия можно обнаружить и в работах античных авторов. Например, в работах Гиппократа (ок. 460-370 до н.э.) в основе определения темперамента лежат мимика и пластика. А в диалогах древнегреческого философа Сократа (470-399 до н.э.) прослеживаются способы влияния на взаимоотношения между своими собеседниками, стимуляции работы мысли посредством включения их в дискуссию.

С момента появления понятия «педагогическая технология» проходит свои этапы становления.

На данный момент всего было пройдено 6периодов: 40-е - сер. 50-х гг., сер. 50-х - 60-е гг., 70-е гг., с начала 80 – е – 90 гг., 90-е -2000 – е гг., 2000 гг – по настоящее время.

На первом этапе становления данного понятия прослеживается связь с научно-техническим прогрессом.

Так, для него характерно появление аудиовизуальных средств (магнитофонов, проигрывателей, проекторов, телевизоров и др.) и их использование в образовательной деятельности.

Уже на втором этапе понятие «технология обучения» приобретает такую характеристику как «технология самого построения учебного процесса», то есть появляется научное описание педагогического процесса (цель обучения, ее поэтапное достижение и строгая последовательность по ее достижению).

Третий этап характеризуется изменением методики преподавания с вербального на аудиовизуальное обучение, расширением базы и появлением спроектированного учебного процесса.

И уже на четвертом этапе появляются компьютерные и информационные технологии.

Пятому этапу характерно рассмотрение педагогических технологий в качестве одного из видов человеческих технологий.

На последней на данный момент ступени продолжает свое развитие теоретико – методологическая база применения информационных технологий и телекоммуникационных средств в системе образования.

В отечественной системе образования внедрение нового понятия «педагогические технологии» произошло в начале 60-ч гг. XXвека.

Хотя, как отмечал В.М. Боголюбов [6] данное понятие не признавали вплоть до 1971 г. [6, с. 19].

В ходе анализа учебников алгебры и начал математического анализа наиболее подходящей технологией для изучения методов доказательства в старшей школе выступает технология решения задач Хазанкина Романа Григорьевича [58].

Суть технологии Р.Г. Хазанкина заключается в использовании определённых форм уроков, которые следуют друг за другом, либо частично объединяются. К ним относятся:

- урок-лекция,
- урок-решение «ключевых задач»,
- урок-консультация,
- зачётный урок.

Концептуальные положения данной технологии составляют личностно-ориентированное обучение через педагогику успеха и сотрудничества, организация индивидуального обучения детей разного уровня развития, взаимосвязь коллективной и индивидуальной деятельности, сочетание урочной и внеурочной формы обучения.

Основную характеристику структурных элементов технологии Р.Г. Хазанкина [58] представим в таблице 3.

Организация изучения материала по данной технологии позволяет при использовании минимального количества задач охватить все элементы знания, указанные в программе.

Таблица 3 – Структурные элементы технологии Р.Г. Хазанкина

Тип урока	Характеристика
Урок-лекция	Цель: раскрытие нового материала крупным блоком. Основные элементы: мотивация, проблема и её анализ, проработка утверждений по алгоритму, обсуждение вопросов, связанных с темой урока, выбор материала для проведения зачёта, начало разбора решений ключевых задач.
Урок решения ключевых задач	Цель: выделить и разобрать минимальное число основных задач по теме Основные элементы: решение системы задач различными способами, составление однотипных и обратных задач, решение задач олимпиадного уровня.
Урок - консультация	Цель: устранение затруднений и коррекция знаний у учащихся. Основные элементы: ответы на возникшие вопросы, разбор задач повышенного уровня, подобранных учениками, нахождение алгоритма решения незнакомой задачи
Зачётный урок	Цель: проверка знаний по теме. Основные элементы: организация контроля с привлечением старших классов и использованием специальных карточек, разработанных совместно со старшими учениками.

В свою очередь, задачи необходимо подбирать таким образом, чтобы они были и не слишком простыми, и не слишком трудными, а также, чтобы их можно было использовать при решении большего количества задач.

Опираясь на основные заповеди технологии решения задач Р.Г. Хазанкина [58], можно сделать выводом о том, что при обучении математике стоит учить не только знаниям по предмету, но и умениям работать с этими знаниями, применять их на практике, учить находить алгоритмы и продолжать работать с уже решённой задачей. Поскольку все эти навыки необходимы для существования и развития в социуме.

С помощью данной технологии происходит качественное усвоение методов доказательства, так как происходит неоднократное применение алгоритма доказательства при решении ключевых задач, а также создается возможность для самостоятельного применения его в условиях решения незнакомых задач.

Рассмотрим применение технологии решения задач на примере изучения темы «Метод математической индукции».

В качестве базового учебника использован УМК А.Г. Мордковича для 10 класса профильного уровня [33].

Для изучения данной темы выделено 2 часа при 4 часах алгебры в неделю, в течении которых учащиеся должны усвоить метод математической индукции и научиться применять его на практике. В связи с тем, что тема изучается после проведения контрольной работы, то целесообразно в качестве домашнего задания предложить учащимся самостоятельно познакомиться с §6 Метод математической индукции [32, с. 45].

План работы над изучением темы:

Урок первый. Лекция, разбор ключевых задач.

Урок второй. Разбор ключевых задач, консультация.

Контроль организуется на следующем уроке перед началом изучения нового материала в виде самостоятельной работы, поскольку времени на изучение темы выделено мало и нет возможности организовать полноценный зачётный урок.

Изложение лекционного материала стоит сопровождать презентацией, на которой отображены основные моменты и представлен ход доказательства методом математической индукции, желательно в схематичном виде. При таком изображении учебного материала учащиеся могут быстро записывать его в тетрадь и не упускать важные моменты.

Помимо лекционного материала на слайдах могут быть представлены ключевые задачи и их решения ([21]; [25]). Необходимые комментарии и добавления учитель делает по ходу урока. Процесс решения ключевых задач сопровождается наводящими вопросами для активного включения учащихся в ход урока.

Приведём примерные планы-конспекты уроков по изучению темы «Метод математической индукции».

Урок первый.

Цель: раскрыть изучаемый материал

Образовательная: формирование знаний и умений по применению метода математической индукции.

Развивающая: развитие умения выделять основное, сравнивать, обобщать.

Воспитательная: формирование научного мировоззрения и интереса к математике.

Ход урока:

– организационный момент (1 мин),

– лекция (15 мин).

Учитель: «Метод полной индукции имеет весьма ограниченную область применимости в математике. Как правило, математические утверждения касаются бесконечного множества объектов (например, всех натуральных чисел, всех простых чисел, всех многогранников и т.д.), и перебрать все эти объекты оказывается невозможным. Но существует метод рассуждения, заменяющий неосуществимый перебор бесконечного множества случаев доказательством того, что если данное утверждение истинно в одном случае, то оно окажется истинным и в следующем за ним случае. Такой метод рассуждения называется математической индукцией или рассуждением от *n*к *n+1»* [11, с. 7-8]

Суть метода математической индукции можно проиллюстрировать на примере арифметической прогрессии $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$.

«По определению арифметической прогрессии,

$$a_{n+1} = a_n + d\ ,$$

значит,

$$a_1 = a_1,$$

$$a_2 = a_1 + d,$$

$$a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d,$$

$$a_4 = a_3 + d = (a_1 + 2d) + d = \ a_1 + 3d,$$

$$a_5 = a_4 + d = (a_1 + 3d) + d = \ a_1 + 4d \text{и т. д.}$$

Нетрудно догадаться, что для любого номера n справедливо равенство

$$a_n = a_1 + (n-1)d. \qquad (1)$$

Приведём обоснование формулы (1).

Если n = 1, то $\mathrm{a_1 = a_1 + (1-1)d}$ – верное равенство, т.е. формула (1) верна для n = 1.

Предположим, что формула (1) верна для натурального числа $n = k$, т.е. предположим, что верно равенство $a_k = a_1 + (k-1)d$.

Докажем, что тогда формула (1) верна и для следующего натурального числа n = k+1, т.е. докажем, что $a_{k+1} = a_1 + kd$.

В самом деле, по определению арифметической прогрессии,

$$a_{k+1} = a_k + +d,$$

значит,

$$a_{k+1} = a_k + d = (a_1 + (k-1)d) + d = a_1 + kd.$$

А теперь смотрите: для *n=1* формула (1) верна (это мы проверили).

Далее мы доказали, что если формула (1) верна для n=k, то она верна и для n = k+1.

Но формула (1) верна для n=1, значит, она верна и для n=2; так как она верна для n=2, то она верна и для n=3 и т.д.

Значит, формула (1) верна для любого натурального числа *n*» [32, с. 47-48]

«Принцип математической индукции.

Утверждение, зависящее от натурального числа n, справедливо для любого n, если выполнены два условия:

– утверждение верно для n = 1;

– из справедливости утверждения для n = k, где k – любое натуральное число, вытекает справедливость утверждения и для следующего натурального числа n = k+1» [32, с. 48-49].

При доказательстве каких типов задач используется метод математической индукции мы с Вами определим в ходе решения примеров.

Решение «ключевых задач» (25 мин)

Задача 1. Доказать, что при любом натуральном nчисло a_nделится на b.

$$a_n = 2n^3 + 3n^2 + 7n, \qquad b = 6.$$

Доказательство.

Учитель: Какие числа фигурируют в условии задачи?

Ученики: Натуральные.

Учитель: Какое наименьшее натуральное число Вам известно?

Ученики: 1.

Учитель: Что получим, если произведем подстановку $n = 1$?

Ученики: $a_n = a_1 = 2 + 3 + 7 = 12$

Учитель: Делится ли полученное число на 6? И какой вывод можно сделать?

Ученики: Поскольку число 12 делится на 6, то при n = 1 исходное утверждение является верным (число a_1 делится на b = 6).

Учитель: Таким образом, первый шаг в доказательстве мы выполнили. Доказали, что при n = 1 утверждение верно. Какое предположение идёт следующим?

Ученики: Что для произвольного натурального числа k $(k > 1)$исходное утверждение верно, то есть, число $a_k = 2k^3 + 3k^2 + 7k$ делится на $b = 6$.

Учитель: Как будет выглядеть выражение для $k + 1$? Верно ли будет это утверждение?

Ученики: Выражение

$$a_{k+1} = 2(k+1)^3 + 3(k+1)^2 + 7(k+1).$$

Преобразуем его:

$$a_{k+1} = 2(k+1)^3 + \ 3(k+1)^2 + 7(k+1) =$$

$$= \ 2(k^3 + 3k^2 + 3k + 1) + 3(k^2 + 2k + 1) + 7(k+1) =$$

$$= 2k^3 + 6k^2 + 6k + 2 + 3k^2 + 6k + 3 + 7k + 7 =$$

$$= (2k^3 + 3k^2 + 7k) + 6k^2 + 6k + 6k + 12 =$$

$$= (2k^3 + 3k^2 + 7k) + 6(k^2 + k + k + 2).$$

Учитель: Делится ли полученное выражение на 6? Какой вывод сделаем?

Ученики: Делится. Поскольку $a_k = 2k^3 + \ 3k^2 + 7k$ делится на 6 и выражение $6(k^2 + k + k + 2)$ делится на 6, то выражение $a_{k+1} = 2(k+1)^3 + + 3(k+1)^2 + 7(k+1)$ также делится на число b = *6*. Значит, исходное утверждение выполняется для любого натурального числаn.Что и требовалось доказать.

Задача 2. Доказать $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Доказательство.

Учитель: Доказательство данного равенства будем проводить с помощью метода математической индукции. Какой будет наш первый шаг?

Ученики: Проверяется верно ли это равенство при *n=1*.

$$n = 1{:}\ 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = 1$$

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} = 1$$

Учитель: Что получили?

Ученики: При *n = 1* формула верна.

Учитель: Что делаем дальше?

Ученики: Предполагаем, что при *n = k*формула будет верна.

Допустим, формула верна для *n = k*, то есть

$$1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

Учитель: Что включает в себя следующий шаг?

Ученики: Проверку верности формулы для *n = k + 1*.

$$1^2+2^2+\dots+k^2+(k+1)^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2=$$
$$=\frac{k(k+1)(2k+1)+6(k+1)^2}{6}=\frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6}=$$
$$=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}=\frac{(k+1)((k+1)+1)(2(k+1)+1)}{6}$$

Учитель: Какой вывод можно сделать?

Ученики: Если формула верна для $n = k$, то она верна и для $n = k + 1$, таким образом, формула верна для любого n.

Аналогичным способом проводиться доказательство следующих ключевых задач.

Задача 3. Доказать $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{2n}>\frac{13}{24}(n>1)$.

Рефлексия (2 мин)

Домашнее задание (2 мин)

№ 6.4 (в,г), 6.11(а), 6.21 (в,г) [3]составить блок-схему доказательства методом математической индукции.

Урок второй.

Цель: закрепить изученный материал

Образовательная: отработать навыки доказательства методом математической индукции

Развивающая: развитие алгоритмического мышления

Воспитательная: воспитание целеустремлённости, формирование научного мировоззрения и интереса к математике

Ход урока:

– организационный момент (1 мин),

– проверка домашнего задания (5 мин),

– решение оставшихся ключевых задач (10 мин).

Задача 4. Найти сумму: $1\cdot 1!+2\cdot 2!+\dots+2012\cdot 2012!+2013\cdot 2013!$

Закрепление изученного материала (25 мин)

Организуется индивидуальная и коллективная работа над заданиями №6.10, 6.12(а), 6.14(б), 6.22 (б) [3]

Рефлексия (2 мин).

Домашнее задание (2 мин).

№6.12(б), 6.14(г),6.17(б), 6.25(а) [3].

При анализе учебных пособий выяснилось, что на доказательство алгебраическим методом не выделено отдельных часов на изучение. Задания на доказательство тождеств, равенств и неравенств встроены в основной задачный материал в небольшом количестве. Поэтому уделить должное внимание на обучение их доказательству не всегда получается. Поэтому целесообразно проводить элективный курс, включающий в себя тщательный разбор решений задач на доказательство.

Однако, на уроках алгебры и начал математического анализе не стоит пренебрегать данными заданиями, поскольку элективный курс посещают не все учащиеся. Поэтому, процесс проведения доказательства тождеств, равенств и неравенств стоит сопровождать наводящими вопросами. При этом наводящие вопросы должны включать в себя:

– анализ формулировки задачи;

– анализ свойств и признаков;

– анализ доказательства;

– анализ теоретических основ для доказательства;

– анализ методов доказательства;

– анализ построения доказательства.

Наводящие вопросы необходимо составлять таким образом, чтобы ответы на них были в большей степени не односложными, подводили к каким-либо выводам и направляли по ходу доказательства.

Помимо просто решений задач для усвоения методов доказательств и формирования познавательных универсальных учебных действий недостаточно. Так Боженкова Л.И. [7] отмечает важность использования типовых заданий, связанных со структурированием учебной информации в виде схем, предписаний, таблиц и других образовательных продуктах.

Таким образом, изображение доказательства ключевых задач в виде схем позволяет обобщить процесс решения, способствует более качественному усвоению методов доказательства.

2.2 Проектирование изучения темы «Тригонометрические тождества»

2.2.1 Методический анализ теоретического и практического содержания по теме «Тригонометрические тождества»

Базовые знания:

– понятие тождества;
– правила проведения тождественных преобразований;
– соотношения между тригонометрическими функциями одного аргумента;
– тригонометрические функции двойного аргумента;
– тригонометрические функции суммы (разности) аргументов;
– сумма, разность, произведение тригонометрических функций.

Рассматриваемые сведения:

– понятие тригонометрического тождества;
– правила проведения тождественных преобразований тригонометрических тождеств.

Теоретический материал.

Так как определение тригонометрического тождества дается почти во всех учебниках, поэтому целесообразно рассмотреть определение тригонометрического тождества в каждом учебнике.

Анализ содержания темы «Преобразования тригонометрических выражений» в различных учебниках, рекомендованных Минобрнауки РФ, рассмотрен в таблице 4.

Таблица 4 – Содержание учебного материала по теме «Преобразования тригонометрических выражений»

Автор	Содержание учебного материала	Количество часов
А.Г. Мордкович	Глава 5 Преобразование тригонометрических выражений (§24 - §31) Первое доказательство тождества приведено в §25 1 части учебника [32, с. 207]. Первое задание появляется во 2 части учебника §24 №24.8-24.12 [33, с. 138] (16 тождеств) Следующие появления упражнений на доказательство тригонометрических тождеств: §25 №25.5-25.7 [33, с. 144-145] (8 тождеств) §26 №26.13[33, с.148] (4 тождества) §27 №27.8 – 27.16, 27.58 [33, с. 153-161] (32 тождества) §28 №28.10-28.13 [33, с. 162] (8 тождеств) §29 №29.7 – 29.11 [33, с.166] (9 тождеств) §30 №30.3 [33, с. 169] (2 тождества) Всего: 79 тождеств.	21
Н.Я. Виленкин	Глава 6 Тригонометрические функции, §3 Формулы сложения и их следствия (п. 1 – п. 7) Нет ни одного разобранного примера на доказательство тригонометрического тождества. Первое задание на доказательство тригонометрического тождества №544 [12, с. 261] (16 тождеств) Следующие задания: №568 [12, с. 268] (8 тождеств) №575 [12, с. 269-270] (5 тождеств), №581 [12, с. 273] (4 тождества), №588 [12, с. 275] (10 тождеств), №592 [12, с. 276] (7 тождеств), №597 [12, с. 278] (4 тождества), № 603 [12, с. 281-282] (21 тождество) Всего: 75 тождеств	7
А.Г. Мерзляк	Глава 3 Тригонометрические функции (§23-27). Разобранных примеров на доказательство тождеств в учебнике нет. Первое задание на доказательство тригонометрического тождества №23.5 [28, с.172] (4 тождества)	35

Продолжение таблицы 4

Автор	Содержание учебного материала	Количество часов
	Следующие задания: §23 №23.6-23.8 [28, с.172] (5 тождеств). §24 №24.5-24.6, 24.13-24.14, 24.21-24.22 [28, с.177-179] (12 тождеств) §25 №25.4, 25.7, [28, с.183] (7 тождеств) §26 №26.9, 26.18, 26.19, 26.22-26.23, 26.37, 26.43-26.44 [28, с.190-194] (21 тождество) §27 №27.7-27.12 [28, с.198-199] (19 тождеств) Всего: 64 тождества	
С.М. Никольский	Глава 2 Тригонометрические формулы. Тригонометрические функции (§7-11) Первое доказательство тригонометрического тождества приведено в §7.4 [34, с. 211]. Первое задание на доказательство тригонометрического тождества появляется в §8 №8.26 [34, с.243] (2 равенства), но с формулировкой «докажите справедливость равенства» Следующие задания: §9 №9.7 [34, с.261], 9.19 [34, с.263], 9.26 [34, с.265], 9.32 [34, с.266], 9.38 [34, с.268], 9.40 [34, с.268], 9.42 [34, с.268], 9.56 [34, с.272], 9.62-9.63 [34, с.272], 9.66 [34, с.274], 9.68, 9.78 [34, с.279], 9.80, 9.87 [34, с.280] (47 равенств) Всего: 47 равенств	24

В учебнике А.Г. Мордковича для 10 класса [32] понятие тригонометрического тождества не вводит. Он лишь отмечает, что соотношение $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, уже ранее было известно.

В учебнике Н.Я. Виленкина [12] определение тригонометрического тождества не дается. Присутствует определение тождественно равных рациональных выражений:

«Рациональные выражения A(x) и B(x), имеющие непустые области существования, называют тождественно равными в общей области существования, если равенство A(x)=B(x) выполняется для всех значений x, при которых как A(x), так и B(x) имеют числовое значение» [12, с. 57].

В учебнике А.Г. Мерзляка для 10 класса [28] определение тригонометрического тождества дается через равенство $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

В учебнике С.М. Никольского для 10 класса [34] определение тригонометрического тождества дается в виде теоремы: «Для любого угла α справедливо равенство $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$» [34, с. 211]. Там же приведено и доказательство основного тригонометрического тождества.

Сравнив определения в рассмотренных учебниках можно сделать вывод о том, что большинство авторов определение тригонометрического тождества рассматривают через основное тригонометрическое тождество. В процессе анализа было выявлено, что основное внимание при изучении материала направлено на выполнение заданий вычислительного характера.

2.2.2 Анализ практического опыта учителей по теме «Тригонометрические тождества»

В данном пункте проведем анализ практического опыта учителей по теме «Тригонометрические тождества», опубликованный в статьях и учебно-методических пособиях.

В статье У. Ажгалиева [2] «О некоторых способах составления тригонометрических тождеств» рассматривает 3 способа составления тригонометрических тождеств. По его мнению, «умение составлять школьные математические задачи является очень важным подспорьем для практического учителя» [2, с. 104]

В статье И.В. Есиковой и В.А. Козлова [17] изучаются тождества, содержащие обратные тригонометрические функции. Подробно описаны свойства таких функций и методы доказательства тождеств их содержащих. Приведено также большое количество примеров.

В статье А. Семеновой говорится что «вся тригонометрия основана на двух формулах» [45]. Доказательство своей точки зрения автор приводит с помощью выведения следствий из них.

На профильном сайте Инфоурок представлено большое количество конспектов уроков и презентаций по теме «Тригонометрические тождества» и «Тождественные преобразования тригонометрических тождеств».

Например, в методической разработке Т.Ю. Лазаренко [23] изучение темы «Тригонометрические тождества» построено на доказательстве основных тригонометрических тождеств.

На сайте Фестиваль педагогических идей «Открытый урок» представлены конспекты уроков, связанные с темой «Тригонометрические тождества». Одним из этих конспектов является работа Щепилло Е.П. [65]. В ней выводятся способы доказательства тождеств, а также отмечена важность запоминания алгоритмов вывода нужных формул тригонометрии.

На сайте «Решу ЕГЭ» [36] представлен материал для подготовки ЕГЭ по математике профильного уровня. При выполнении задания 12 «Уравнения» необходимы навыки тождественных преобразований тригонометрических уравнений. Для их приобретения и отработки применяются задания на доказательство тригонометрических тождеств. Заданий, связанных с тригонометрией на сайте представлено 166 штук.

В элективном курсе Р.А. Акберовой «Элементы тригонометрии» [3] на тему «Основные тригонометрические формулы» отводится 5 часов, в течение которых рассматриваются основные тригонометрические тождества, формулы приведения, преобразования тригонометрических функций, доказательство тождеств.

Таким образом, анализ темы в статьях [2, 17, 45] и опыт изучения темы посредством элективных курсов [3], разработки конспектов уроков [23,65] показывает интерес учителей и исследователей к теме «Тригонометрические тождества». Однако большая часть материала направлена на применение основных тригонометрических тождеств и формул, нежели на их доказательство.

2.2.3 Основные цели и задачи изучения темы «Тригонометрические тождества»

Цель: ввести определение тригонометрического тождества; научить находить способы доказательства тождества и применять их; формировать понятие тригонометрического тождества.

Задачи:

– сформировать понятие тригонометрическое тождество;

– с формировать навыки доказательства тригонометрических тождеств.

Теоретический и практический материал, рассматриваемый в проекте «Тригонометрические тождества», способствует формированию познавательного интереса и мотивации к математике, развитию творческих способностей учащихся, развивает навыки работы с учебной литературой; формирует качества математических знаний, тем самым повышает предметные математические компетенции.

2.2.4 Характеристика уровня требований к знаниям, умениям и навыкам учащихся по теме «Тригонометрические тождества»

В стандарте по математике (профильный уровень) прописано, что учащиеся должны:

знать/понимать

– значение математической науки для решения задач, возникающих в теории и практике; широту и ограниченность применения математических методов к анализу и исследованию процессов и явлений в природе и обществе;

– значение идей, методов и результатов алгебры и математического анализа для построения моделей реальных процессов и ситуаций.

– универсальный характер законов логики математических рассуждений, их применимость в различных областях человеческой деятельности;

– различие требований, предъявляемых к доказательствам в математике, естественных, социально-экономических и гуманитарных науках, на практике.

Уметь: решать тригонометрические уравнения, их системы; доказывать несложные тождества.

В результате изучения темы «Тригонометрические тождества на доказательство» ученик должен:

знать/понимать:

– формулировать определение тригонометрического тождества;

– формулировать правила тождественных преобразований;

уметь:

– определять и использовать правила тождественных преобразований для доказательства тригонометрических тождеств;

– доказывать тригонометрические тождества.

2.2.5 Проектирование изучения темы «Тригонометрические тождества» в рамках технологии Р.Г. Хазанкина

В соответствии с методическим пособием к УМК А.Г. Мордковича [33] на изучение темы «Тригонометрические тождества» отдельного времени в виде уроков не выделено. А сами задания на доказательство встречаются в каждом параграфе Главы 5 Преобразование тригонометрических выражений.

Поэтому целесообразно выделить 2 часа на изучение темы «Тригонометрические тождества».

Рассмотрим изучение темы на основе выбранной технологии.

Урок первый. (45 мин).

Включает в себя лекционный материал по данной теме. Начало работы над ключевыми задачами. В процессе работы над ключевыми задачами можно использовать наводящие вопросы [59], чтобы включить учащихся в активную работу по решению.

Цель: раскрыть и закрепить теоретические знания по теме «Тригонометрические тождества»

Задачи:

– образовательная – ввести понятие «тригонометрическое тождество», способы доказательства, рассмотреть ключевые задачи;

– развивающая – создать условия для развития аналитических способностей учащихся;

– воспитательная – содействовать развитию интереса к изучению предмета и повышению уровня мотивации;

– ожидаемые результаты – свободно оперируют понятием «тригонометрическое тождество», знают способы доказательства тригонометрических тождеств.

Ход урока

– организационный момент (2 мин);

– лекция (20 мин).

План лекции:

– определение тригонометрического тождества;

– способы доказательства;

– тригонометрические формулы и тождества.

Разбор и решение ключевых задач (20 мин)

Синус и косинус суммы и разности аргументов.

Доказать тождество:

$$\frac{1}{2}cosx - \frac{\sqrt{3}}{2}sinx = cos(\frac{\pi}{3} + x)$$

Доказательство:

$$cos\left(\frac{\pi}{3}+x\right)=cos\frac{\pi}{3}cosx-sin\frac{\pi}{3}sinx=\frac{1}{2}cosx-\frac{\sqrt{3}}{2}sinx$$

$$\frac{1}{2}cosx-\frac{\sqrt{3}}{2}sinx=\frac{1}{2}cosx-\frac{\sqrt{3}}{2}sinx$$

Тангенс суммы и разности аргументов

Доказать тождество:

$$tg\left(\frac{3\pi}{4}-x\right)+tgx=tg\left(\frac{3\pi}{4}-x\right)tgx-1$$

Доказательство:

$$tg\left(\frac{3\pi}{4}-x\right)+tgx=\frac{tg\frac{3\pi}{4}-tgx}{1+tg\frac{3\pi}{4}tgx}+tgx=-\frac{1+tgx}{1-tgx}+tgx=\frac{1}{cox(sinx-cosx)}$$

$$tg\left(\frac{3\pi}{4}-x\right)tgx-1=-\frac{(1+tgx)tgx}{1-tgx}-1=\frac{1}{cox(sinx-cosx)}$$

$$\frac{1}{cox(sinx-cosx)}=\frac{1}{cox(sinx-cosx)}$$

Формулы приведения

Доказать тождество:

$$\frac{tg(\pi-t)}{\cos(\pi+t)}\cdot\frac{\sin\left(\frac{3\pi}{2}+t\right)}{tg\left(\frac{3\pi}{2}+t\right)}=tg^2t$$

Доказательство:

$$\frac{tg(\pi-t)}{cos(\pi+t)}\cdot\frac{\sin\left(\frac{3\pi}{2}+t\right)}{tg\left(\frac{3\pi}{2}+t\right)}=\frac{-tgt}{\cancel{-cost}}\cdot\frac{(\cancel{-cost})}{-ctgt}=tg^2t$$

$$tg^2t=tg^2t$$

Формулы двойного аргумента. Формулы понижения степени.

Доказать тождество:

$$\frac{sin2t}{1+cos2t}\cdot\frac{cost}{1+cost}=tg\frac{t}{2}$$

Доказательство:

$$\frac{2sint\cdot cost}{2cos^2t}\cdot\frac{cost}{1+cost}=\frac{sint}{1+cost}=\frac{2sin\frac{t}{2}\cdot cos\frac{t}{2}}{2cos^2\frac{t}{2}}=\frac{sin\frac{t}{2}}{cos\frac{t}{2}}=tg\frac{t}{2}$$

$$tg\frac{t}{2}=tg\frac{t}{2}$$

Рефлексия (2 мин)

Домашнее задание (1 мин)

№24.9(г), 25.5(г), 26.13(г), 26.14(г), сформулировать алгоритм доказательства.

Урок второй. Решение задач. (45 мин)

Цель: закрепить полученные знания по теме.

Задачи:

– образовательная – закрепить навыки проведения доказательства тригонометрических тождеств;

– развивающая – создать условия для развития аналитических способностей учащихся;

– воспитательная – содействовать развитию интереса к изучению предмета и повышению уровня мотивации

– ожидаемые результаты – умеют проводить доказательство тригонометрических тождеств.

Организационный момент (1 мин).

Проверка домашнего задания (5 мин).

Решение задач (37 мин).

Преобразование суммы тригонометрических функций в произведение.

Доказать тождество:

$$\frac{sinx + sin2x + sin3x}{cosx + cos2x + cos3x} = tg2x$$

Доказательство:

$$\frac{2sin\frac{x+3x}{2} \cdot cos\frac{3x-x}{2} + sin2x}{2cos\frac{x+3x}{2} \cdot cos\frac{3x-x}{2} + cos2x} = \frac{2sin2x \cdot cosx + sin2x}{2cos2x \cdot cosx + cos2x} = \frac{sin2x \cdot (2cosx + 1)}{cos2x(2cosx + 1)} = \frac{sin2x}{cos2x} = tg2x$$

$$tg2x = tg2x$$

Преобразование произведения тригонометрических функций в сумму.

Доказать тождество:

$$sin^2x + \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = \frac{1}{4}$$

Доказательство:

$$\frac{1-cos2x}{2}-\frac{\cos\left(\left(\frac{\pi}{3}+x\right)+\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\right)+\cos\left(\left(\frac{\pi}{3}+x\right)+\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\right)}{2}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-cos2x+cos\frac{2\pi}{3}+cos2x\right)=\frac{1}{2}\left(1+cos\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$$

Решаем дальше (самостоятельно или в группе): №24.12(а),25.7(а), 26.13(в), 27.15 (а), 28.13(а), 29.9(а).

Рефлексия (1 мин).

Домашнее задание (1 мин).

Решить задачи, которые не успели сделать в классе.

Дополнительно: №29.11 (либо а, либо б).

2.3 Элективный курс «Задачи на доказательство в курсе алгебры и начал математического анализа»

Аннотация элективного курса

Программа направлена на обучающихся 10-11 классов базового уровня подготовки. В современной жизни человек должен быть всесторонне развитой личностью. Не маловажное место для становления человека в обществе занимает логическое мышление, формированию которого способствуют задачи на доказательство. Данный курс позволит учащимся удовлетворить свои образовательные потребности.

Пояснительная записка

Программа данного элективного курса направлена на рассмотрение способов решения задач на доказательство, применения их на практике.

Курс дополняет школьный курс математики, а также является одним из факторов повышения уровня сформированности ПУУД у старшеклассников.

Процесс освоения содержания курса учащимися сопровождается овладением новыми знаниями, обогащением своего жизненного опыта, получением возможности практического применения своих интеллектуальных способностей, развитием коммуникативных способностей, овладением общеучебными умениями.

Изучение курса предполагает использование и самостоятельную разработку схем, моделей, опорных конспектов, алгоритмов решения задач на доказательство.

Методической основой выступает деятельностный подход [22], который позволяет не только учить «знаниям», но и формировать способность учеников к их приобретению, к анализу и систематизации информации по теме, к проведению рассуждению и аргументированию своей точки зрения.

Цель: формирование познавательных универсальных учебных действий.

Задачи:

– расширение и углубление знаний по применению способов доказательства;

– формирование логического мышления;

– развитие интереса к изучению математики;

– обучение старшеклассников решению учебных и жизненных задач, способам анализа информации в различных формах.

Виды деятельности: обсуждение, исследовательская деятельность, работа с текстом, диспут, обзорные лекции, мини-лекции, семинары, практикумы по решению задач.

Методы и формы обучения определяются ФГОС СОО, с учетом индивидуальных и возрастных особенностей учащихся, развития и саморазвития личности.

Формы и методы контроля:

– тестирование,

– самопроверка,

– взаимопроверка,

– письменный и устный зачет,

– проверочные письменные работы,

– наблюдение.

Модульная система курса позволяет конструировать элективный курс вариативно на 17/25/34/68 часов (таблица 5).

Таблица 5 – Варианты формирования учебного плана

Название модуля	Количество часов			
Модуль 1. «Алгебраические выражения»	16	16	16	32
Модуль 2. «Тригонометрические выражения»	-	8	16	32
Итоговое занятие	1	1	2	4
Итого	17	25	34	68

Содержание элективного курса (таблица 6)

Модуль 1. «Алгебраические выражения»

Доказательство алгебраических неравенств:

– на основе определения,

– метод выделения квадратов,

– метод последовательных оценок,

– метод математической индукции,

– использование специальных и классических неравенств (неравенство Коши, Бернулли, Коши – Буняковского),

– использование элементов математического анализа.

Доказательство алгебраических тождеств:

– преобразование левой или правой части тождества,

– преобразование и левой, и правой части,

– вычитание одной части тождества из другой.

Таблица 6 - Учебно-тематический план (наполнение учебного плана)

Содержание	Часы	Включая		Формы занятий	Формы контроля
		лекции	практикум		
Модуль №1. «Алгебраические выражения»	16/32	3/3	13/29	-	-
1. Алгебраические неравенства	8/16	2/2	6/14	Лекция, практикум, обсуждение	Наблюдение, самопроверка взаимопроверка, зачёт
2. Алгебраические тождества	8/16	1/1	7/15	Лекция, практикум, обсуждение	Наблюдение, самопроверка взаимопроверка, зачёт
Модуль 2. «Тригонометрические выражения»	8/16/32	2/4/4	6/12/28	-	-
1. Тригонометрические неравенства	4/8/16	1/2/2	3/6/14	Лекция, практикум, обсуждение	Наблюдение, самопроверка взаимопроверка, зачёт
2. Тригонометрические тождества	4/8/16	1/2/2	3/6/14	Лекция, практикум, обсуждение	Наблюдение, самопроверка взаимопроверка, зачёт
Итоговое занятие	1/2/4			Игра, круглый стол, обсуждение, мини-проект	Наблюдение, защита проекта

Модуль 2. «Тригонометрические выражения»

Доказательство тригонометрических неравенств:

- методом от противного,
- аналитико-синтетическим методом,
- методом математического анализа,
- методом математической индукции,
- элементами геометрии,
- векторной алгеброй,

– графическим методом.

Доказательство тригонометрических тождеств:

– преобразование левой или правой части тождества,

– преобразование и левой, и правой части,

– вычитание одной части тождества из другой.

2.4 Описание педагогического эксперимента

В современном мире существует проблема взаимосвязи между интеллектуальным развитием учащегося и его учебных достижений по учебным предметам. Существуют две, совершенно диаметрально противоположные точки зрения, авторами которых являются Ж. Пиаже [39] и Выготский Л.С. [14].

Первый придерживается мнения о том, что на интеллектуальное развитие ребёнка нельзя никак повлиять или управлять им. Согласно этой концепции [37], обучение может ускорять или замедлять процесс интеллектуального созревания. Теоретические положения Ж. Пиаже [39] нашли свое подтверждение в опытах самого автора и в опытах его учеников.

Позиция Выготского Л.С. [14] в данном вопросе заключается в том, что при определённых условиях обучение определяет интеллектуальное развитие обучающихся. По его мнению, развитие совершается тогда, когда ученик сталкивается с трудностями при решении учебных задач и пытается найти пути их преодоления. При постановке таких задач необходимо учитывать нынешний уровень развития интеллектуальных способностей учащихся.

В процессе изучения курса «Алгебры и начал математического анализа» в 10-11 классе активно формируются познавательные универсальные учебные действия. Они оказывают положительный эффект на развитие интеллекта у выпускников. Поэтому в отборе материала для усвоения новых знаний и построения эффективной стратегии обучения необходимо учитывать разный уровень интеллектуального развития учеников.

В связи с этим, для нас представляется важным провести экспериментальную (поисковую) часть педагогического эксперимента, которая позволит показать на каком уровне развития находятся познавательные универсальные учебные действия при решении задач на доказательство в курсе «Алгебры и начал математического анализа», а также общий уровень интеллектуального развития.

Цель констатирующего этапа эксперимента – установить уровень развития познавательных универсальных учебных действий учащихся, связанный с решением задач на доказательство.

Констатирующий эксперимент проводился с использованием следующих методов: опрос респондентов и его анализ.

В ходе проведения эксперимента было задействовано 20 обучающихся 10-11 классов на базе «Муниципального бюджетного общеобразовательного учреждения средней общеобразовательной школы №2» г.о. Павловский Посад Московской области.

Оценка проводилась по следующим уровням овладения познавательными универсальными учебными действиями:

- высокий,
- средний,
- низкий.

Первый этап эксперимента состоял из двух частей. В первой использовалась методика КОТ – краткий отборочный ориентировочный тест (В.Н. Бузина, Э.Ф, Вандерлика). Ответы представлены в Приложении А.

Целью теста являлось измерение интегрального показателя сформированности общих познавательных способностей старшеклассников; характеристика сформированности познавательных способностей, лежащих в основе дальнейшего обучения; познавательной адаптации субъекта в мире в целом.

Тест КОТ (Краткий ориентировочный, отборочный тест, с ответами, В.Н. Бузина, Э.Ф. Вандерлик. Опросник диагностики интеллекта - IQ).

Инструкция.

«Вам предлагается несколько простых заданий. Познакомьтесь с образцами заданий и правильными ответами на них:

«Быстрый» является противоположным по смыслу слову: 1 - тяжелый, 2 - упругий, 3 - скорый ,4 - легкий, 5 - медленный. Правильный ответ: 5-й

Бензин стоит 0,44 руб за литр. Сколько (в копейках) стоят 2,5 литра? Правильный ответ: 110

Слова минер и минор по смыслу являются:

1 - сходными, 2 - противоположными, 3 - ни сходными, ни противоположными. Правильный ответ: 3-й.

Какие две из приведенных ниже пословиц имеют одинаковый смысл:

1 - первый блин комом, 2 - лиха беда начало, 3 - не красна изба углами, красна пирогами, 4 - не все коту масленица, 5 - старый друг лучше новых двух. Правильный ответ: 1-й и 2-й.

Тест содержит 50 вопросов, на выполнение теста дается 15 минут. Ответьте на столько вопросов, на сколько сможете, и не тратьте много времени на один вопрос. Работайте как можно быстрее. Если какое-нибудь задание теста у вас не получается, не задерживайтесь на нем слишком долго, переходите к следующему.

Стимульный материал к методике КОТ

«1. Одиннадцатый месяц года – это:

1 – октябрь, 2 – май, 3 – ноябрь, 4 – февраль» [9].

«2. Суровый" является противоположным по значению слову:

1 – резкий, 2 – строгий, 3 – мягкий, 4 – жесткий, 5 – неподатливый» [9].

«3. Какое из приведенных ниже слов отлично от других:

1 – определенный, 2 – сомнительный, 3 – уверенный, 4 – доверие, 5 – верный» [9].

«4. Ответьте Да или Нет. Сокращение "н.э." означает: "нашей эры" (новой эры)?» [9].

«5. Какое из следующих слов отлично от других:

1 – петь, 2 – звонить, 3 – болтать, 4 – слушать, 5 – говорить» [9].

«6. Слово "безукоризненный" является противоположным по своему значению слову:

1 – незапятнанный, 2 – непристойный, 3 – неподкупный,

4 – невинный, 5 – классический» [9].

«7. Какое из приведенных ниже слов относится к слову «жевать» как обоняние и нос:

1 – сладкий, 2 – язык, 3 – запах, 4 – зубы, 5 – чистый» [9].

«8. Сколько из приведенных ниже пар слов являются полностью идентичными?

Sharp M.C.	Sharp M.C.
Filder E.H.	Filder E.N.
Connor M,G.	Conner M,G.
Woesner O.W.	Woerner O.W.
Soderquist P.E.	Soderquist B.E.» [9].

«9. «Ясный» является противоположным по смыслу слову:

1 – очевидный, 2 – явный, 3 – недвусмысленный, 4 - отчетливый, 5 – тусклый» [9].

«10. Предприниматель купил несколько подержанных автомобилей за 3500 $, а продал их за 5500 $ заработав при этом 50 $ за автомобиль. Сколько автомобилей он продал?» [9].

«11. Слова "стук" и "сток" имеют:

1 – сходное значение, 2 – противоположное, 3 – ни сходное, ни противоположное» [9].

«12. Три лимона стоят 45 р. Сколько стоит 1,5 дюжины?» [9].

«13. Сколько из этих 6 пар чисел являются полностью одинаковыми?

5296	5296
66986	69686
834426	834426
7354256	7354256
61197172	61197172
83238224	83238234» [9].

«14. «Близкий» является противоположным слову:

1 – дружеский, 2 – приятельский, 3 – чужой, 4 – родной, 5 – иной» [9].

«15. Какое число является наименьшим?

6 0,7 9 36 0,31 5» [9].

«16. Расставьте предлагаемые ниже слова в таком порядке, чтобы получилось правильное предложение. В качестве ответа запишите две последние буквы последнего слова.

есть соль любовь жизни» [9].

«17. Какой из приведенных ниже пяти рисунков наиболее отличен от других? (рисунок 3)» [9].

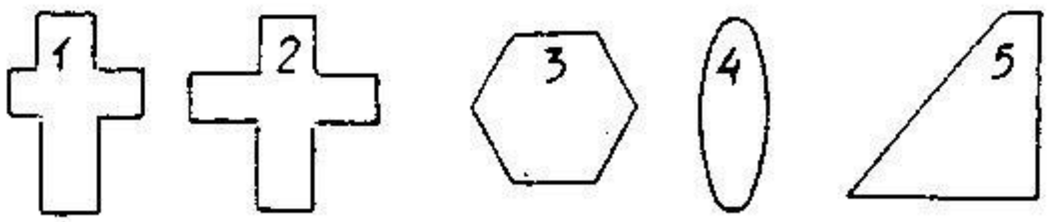

Рисунок 3 – К вопросу 17

«18. Два рыбака поймали 36 рыб. Первый поймал в 8 раз больше, чем второй. Сколько поймал второй?» [9].

«19. «Восходить» и «возродить» имеют: 1 – сходное значение, 2 – противоположное, 3 – ни сходное, ни противоположное» [9].

«20. «Расставьте предлагаемые ниже слова в таком порядке, чтобы получилось утверждение. Если оно правильно, то ответ будет П, если неправильно – Н.

мхом обороты камень набирает заросший» [9].

«21. Две из приведенных ниже фраз имеют одинаковый смысл, найдите их:

1. Держать нос по ветру.

2. Пустой мешок не стоит.

3. Трое докторов не лучше одного.

4. Не все то золото, что блестит.

5. У семи нянек дитя без глаза» [9].

«22. Какое число должно стоять вместо знака «?»:

73 66 59 52 45 38 ?» [9].

«23. Длительность дня и ночи в сентябре почти такая же, как и в:

1 — июне, 2 — марте, 3 — мае, 4 — ноябре» [9].

«24. Предположим, что первые два утверждения верны. Тогда заключительное будет: 1 — верно, 2 — неверно, 3 — неопределенно.

Все передовые люди — члены партии.

Все передовые люди занимают крупные посты.

Некоторые члены партии занимают крупные посты» [9].

«25. Поезд проходит 75 см за 1/4 с. Если он будет ехать с той же скоростью, то какое расстояние он пройдет за 5 с?» [9].

«26. Если предположить, что два первых утверждения верны, то последнее: 1 — верно, 2 — неверно, 3 — неопределенно.

Боре столько же лет, сколько Маше. Маша моложе Жени. Боря моложе Жени» [9].

«27. Пять полукилограммовых пачек мясного фарша стоят 2 $. Сколько килограмм фарша можно купить за 80 центов?» [9].

«28. Расстилать и растянуть. Эти слова: 1 — схожи по смыслу, 2 — противоположны, 3 — ни схожи, ни противоположны» [9].

«29. Разделите эту геометрическую фигуру (рисунок 4) прямой линией на две части так, чтобы, сложив их вместе, можно было получить квадрат» [9].

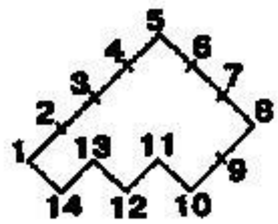

Рисунок 4 – К вопросу 29

«30. Предположим, что первые два утверждения верны. Тогда последнее будет: 1 — верно, 2 — неверно, 3 — неопределенно.

Саша поздоровался с Машей.

Маша поздоровалась с Дашей.

Саша не поздоровался с Дашей» [9].

«31. Автомобиль "XXX" стоимостью 2400 $ был уценен во время сезонной распродажи на 33 1/3%. Сколько стоил автомобиль во время распродажи?» [9].

«32. Три из пяти фигур (рисунок 5) нужно соединить таким образом, чтобы получилась равнобедренная трапеция» [9].

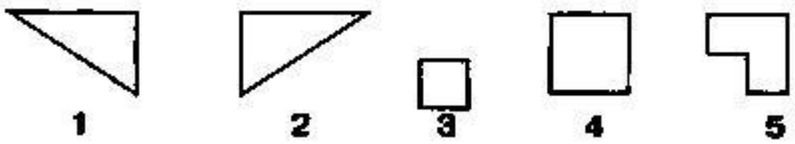

Рисунок 5 – К вопросу 32

«33. На платье требуется 2 1/3м. ткани. Сколько платьев можно сшить из 42 м?» [9].

«34. Значения следующих двух предложений: 1 — сходны, 2 — противоположны, 3 — ни сходны, ни противоположны.

Трое докторов не лучше одного.

Чем больше докторов, тем больше болезней» [9].

«35. Увеличивать и расширять. Эти слова: 1 — сходны, — противоположны, 3 — ни сходны, ни противоположны» [9].

«36. Смысл двух английских пословиц: 1 — схож, 2 — противоположен, 2 — ни схож, ни противоположен.

Швартоваться лучше двумя якорями.

Не клади все яйца в одну корзину» [9].

«37. Бакалейщик купил ящик с апельсинами за 3,6 $. В ящике их было 12 дюжин. Он знает, что 2 дюжины испортятся еще до того, как он продаст все апельсины. По какой цене ему нужно продавать апельсины, чтобы получить прибыль в 1/3 закупочной цены?» [9].

«38. Претензия и претенциозный. Эти слова по своему значению: 1 — схожи, 2 — противоположны, 3 — ни сходны, ни противоположны» [9].

«39. Если бы полкило картошки стоило 0,0125 $, то сколько килограмм можно было бы купить за 50 центов?» [9].

«40. Один из членов ряда не подходит к другим. Каким числом Вы бы его заменили: 1/4 1/8 1/8 1/4 1/8 1/8 1/4 1/8 1/6» [9].

«41. Отражаемый и воображаемый. Эти слова являются. 1 — сходными, 2 — противоположными, 3 — ни сходными. ни противоположными» [9].

«42. Сколько соток составляет участок длиною 70 м и шириной 20 м?» [9].

«43. Следующие две фразы по значению: 1 — сходны, 2 — противоположны, 3 — ни сходны, ни противоположны.

Хорошие вещи дешевы, плохие дороги.

Хорошее качество обеспечивается простотой, плохое — сложностью» [9].

«44. Солдат, стреляя в цель, поразил ее в 12.5% случаев. Сколько раз солдат должен выстрелить, чтобы поразить все сто раз?» [9].

«45. Один из членов ряда не подходит к другим. Какое число Вы бы поставили на его место:

1/4 1/6 1/8 1/9 1/12 1/14» [9].

«46. Три партнера по АО 'XXX' решили поделить прибыль поровну. Т. вложил в дело 4500 $, К. — 3500 $, П. — 2000 $. Если прибыль составит 2400

$, то насколько меньше прибыль получит Т. по сравнению с тем, как если бы прибыль была разделена пропорционально вкладам?» [9].

«47. Какие две из приведенных ниже пословиц имеют сходный смысл:

1. Куй железо, пока горячо.

2. Один в поле не воин.

3. Лес рубят, цепки летят.

4. Не все то золото, что блестит.

5. Не по виду суди, а по делам гляди?» [9].

«48. Значение следующих фраз: 1 — сходно, 2 — противоположно, 3 — ни сходно, ни противоположно.

Лес рубят щепки летят.

Большое дело не бывает без потерь» [9].

«49. Какая из этих фигур (рисунок 6) наиболее отлична от других?» [9].

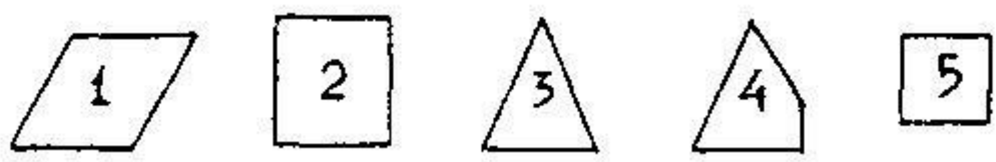

Рисунок 6 – К вопросу 49

«50. В печатающейся статье 24000 слов. Редактор решил использовать шрифт двух размеров. При использовании шрифта большого размера на странице умещается 900 слов, меньшего — 1200. Статья должна занять 21 полную страницу в журнале. Сколько страниц должно быть напечатано меньшим шрифтом?» [9].

В таблице 7 приведены результаты по данной методике.

Во второй части использовались задания, включающие в себя задачи на доказательство.

Цель заключалась в оценке уровня сформированности элементов познавательных УУД по отношению к конкретной области математики. Время на выполнение заданий 15 минут и 25 минут.

Таблица 7 – Результаты по методике КОТ

	Низкий (13 и меньше)	Ниже среднего (14-18)	Средний (19-24)	Выше среднего (25-29)	Высокий (30 и больше)
10 класс	1	3	6	0	0
11 класс	0	5	4	1	0

Задания для оценки уровня сформированности познавательных УУД относительно задач на доказательство

Задание первое. Составьте краткий конспект.

Математика, как все науки, представляет собой определенную систему суждений о математических объектах, которые называют математическими предложениями. Принадлежность предложения некоторой математической теории определяется двумя признаками:

– предложение записано (сформулировано) на языке данной теории, состоит из математических и логических терминов или символов;

– предложение истинно, то есть является исходным истинным предложением данной теории, или его истинность устанавливается доказательством. С каждым математическим предложением связаны его содержание и структура, неразрывно связанные между собой.

К основным видам математических предложений относятся аксиомы и теоремы.

Аксиома (от греческого слова, означающего «то, что приемлемо») — предложение, принимаемое без доказательства (его истинность допускается). Аксиомы конкретной математической теории образуют систему, описывающие свойства основных понятий данной теории и лежащих в основе доказательств других предложений.

К системе аксиом, характеризующих некоторую научную теорию, предъявляются, как известно, требования:

– независимости,

– непротиворечивости,

– полноты.

Таким образом, основные (неопределяемые) понятия и аксиомы составляют фундамент математической теории.

Аксиомы зародились в геометрии Евклида, который наряду с этим понятием использовал еще понятие постулата.

Постулат — (от латинского - «требование») — предложение, выражающее некоторое требование, которому должно удовлетворять некоторое понятие или некоторое отношение между понятиями.

Теорема (от греческого слова, означающего «рассматриваю, обдумываю») – предложение, истинность которого доказывается, то есть устанавливается как логическое следствие других предложений, принимаемых за истинные или доказанные раньше.

Каждая теорема содержит в себе условие (то, что известно о рассматриваемых в ней объектах) и заключение (то, что об этом объекте утверждается и требует доказательства).

Однако не все теоремы имеют такую «условную» форму, в которой четко разграничены условие и заключение. Формулировку теоремы, не использующую слов «если..., то...», называют категорической; она отличается лаконичностью и иногда удобна, но часто вызывает затруднения и ошибки учащихся.

С помощью теорем происходит изучение понятий, их свойств, отношений между ними, что и составляет математическую теорию. Теоремы этой теории связаны между собой, истинность или ложность одних влечет за собой истинность или ложность других, что облегчает их понимание и усвоение. Эти связи основаны на рассмотренных выше операциях над высказываниями и определяют основные виды теорем в математике.

Большинство теорем представляют собой импликацию двух высказываний (АВ) (то есть имеют одно условие и одно заключение) и называются простыми теоремами.

Из простой теоремы (называемой в этом случае прямой) можно образовать несколько новых:

- обратную (BA) – импликацию B и A,
- противоположную (AB) – импликацию отрицания B и отрицания A,
- противоположную обратной (BA) – импликацию отрицания B и отрицания A.

Если теорема имеет несколько условий, или несколько заключений, или несколько условий и заключений, то она называется сложной. Это – импликация конъюнкций высказываний, имеющая вид: ABB...B или AA...AB или AA...A BB...B.

Таким образом, каждая сложная теорема может быть представлена в виде нескольких простых (например, теорема о перпендикуляре, опущенном из вершины прямого угла прямоугольного треугольника на гипотенузу).

Важные частные случаи простых и сложных теорем:

- следствие –теорема, легко доказываемая с помощью одной теоремы;
- лемма – теорема, представляющая интерес только как ступень к доказательству другой теоремы;
- необходимое и достаточное условие –теорема, объединяющая в одной формулировке с использованием слов «необходимо и достаточно» прямую и обратную теоремы (AB);
- теорема существования – теорема, в которой отсутствуют условие и заключение, но утверждается существование какого-либо объекта, обладающего определенными свойствами (например, теорема существования параллельных прямых);
- теорема тождество и теорема формула – теоремы, выраженные языком математических символов;
- к теоремам можно отнести и задачи на доказательство.

В математике рассматриваются дедуктивные доказательства, то есть рассуждения, основанные на утверждениях, истинность которых установлена ранее. Доказательство обосновывает общность доказываемого предложения, то есть применимость его ко всем частным случаям.

Методы доказательства теорем основываются на свойствах операций над высказываниями, которые носят название законов логики; приведем основные из них:

– закон силлогизма;

– закон контрапозиции (прямая и противоположная обратной теоремы одновременно истинны или одновременно ложны);

– «если есть q, то есть и его основание p» — закон достаточного основания: всякая истинная мысль должна быть обоснована другими мыслями, истинность которых известна;

– закон тождества: каждая мысль, повторяясь в умозаключении, должна сохранять определенное устойчивое содержание;

– закон противоречия: не могут быть одновременно истинными две противоположные мысли об одном и том же предмете, взятом в одно и то же время и в одном и том же отношении;

– закон исключенного третьего: из двух противоречащих высказываний в одно и то же время и в одном и том же отношении одно непременно истинно;

– закон двойного отрицания.

Иногда объединяют закон противоречия и закон исключенной третьего в следующей формулировке: между противоречащими высказываниями нет ничего среднего, то есть третьего высказывания.

По способу ведения доказательства подразделяются на прямые и косвенные:

– доказательство большинства теорем – прямое доказательство – строится как цепь силлогизмов и основано на законе силлогизма;

– косвенное доказательство от противного: предполагают, что заключение теоремы неверно; затем выводят следствия из этого предположения до тех пор, пока не получится противоречие с известным предложением; тогда на основании закона противоречия делают вывод, что отрицание того, что нужно доказать, ложно и, значит, на основании закона исключенного третьего, истинно то, что требуется доказать;

– косвенное доказательство на основании закона контрапозиции: если доказательство данной теоремы вызывает трудности, вместо нее доказывают теорему, противоположную обратной;

– косвенное доказательство с помощью контрпримеров – для доказательства ложности какой-либо теоремы (часто обратной данной); чтобы убедиться в ложности суждения, достаточно привести один пример, где бы это суждение было ложным. Например, утверждение, обратное свойству ромба, «если в четырехугольнике диагонали взаимно перпендикулярны, то это – ромб» ложно, так как легко построить четырехугольник, у которого диагонали перпендикулярны, а ромбом он не является;

– косвенное доказательство теоремы существования –указание способа конструирования примера объектов, о которых говорится в теореме;

– прямое доказательство теоремы тождества (или формулы) проводится одним из следующих преобразований:

– одной части равенства до тех пор, пока не получится вторая;

– обеих частей до тех пор, пока не получится верное равенство или известное тождество;

– разности частей, пока не получится нуль;

– известного тождества, пока не получится то равенство, которое нужно доказать.

При доказательстве теорем используются также координатный, векторный методы, метод геометрических преобразований и методы дифференциального и интегрального исчисления.

Задание второе. Напишите план доказательства тождества

$$(a+b)^2 + \ (a-b)^2 = \ 2(a^2+b^2)$$

Задание третье. Докажите тождество

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = (x + \frac{1}{x})^2 - 2$$

Ответы.

Задание второе.

– с помощью формул сокращённого умножения раскроем скобки слева;

– приводим подобные слагаемые;

– выносим за скобку общий множитель;

– обе части равны – тождество доказано.

Задание третье.

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = (x + \frac{1}{x})^2 - 2$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = x^2 + 2x \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - 2$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} - 2$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = x^2 + \frac{1}{x^2}$$

Результаты данной части эксперимента, представленные на рисунке 7, необходимы для определения нынешнего уровня интеллектуального развития. Благодаря им определяется уровень последующей работы с учащимися, их возможности и полнота рассматриваемого материала.

Результаты второй части первого этапа, представленные на рисунке 8, показали, что половина участников обладают средним уровнем сформированности элементов познавательных УУД по отношению к задачам на доказательство, а высоким – только 10 % опрошенных.

На втором этапе педагогического эксперимента, после прохождения элективного курса, учащимся были предложены те же задания, что и на первом этапе, кроме опросника «КОТ» (рисунок 7).

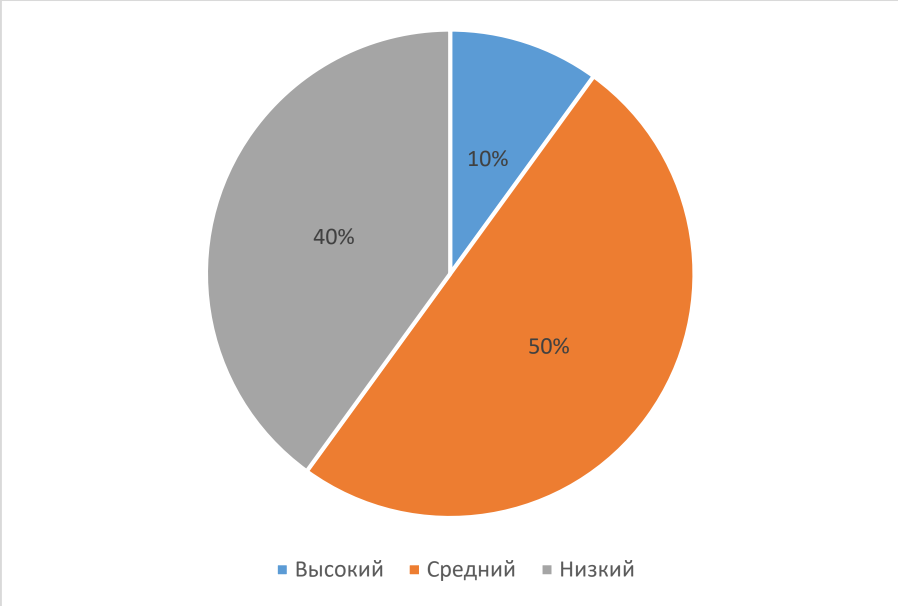

Рисунок 7 – Результаты по методике КОТ

Данные результаты показали увеличение участников эксперимента, имеющих средний и высокий уровень обладания элементами познавательных универсальных учебных действий. Так же на диаграмме видно, что значительно сократилось количество учеников с низким уровнем.

Среди элементов познавательных УУД, проверяемых в данном исследовании, были использованы: «умение структурировать знания (схематизировать, моделировать), умение выбирать наиболее простые способы решения задач в зависимости от конкретных условий, умение анализировать, умение устанавливать причинно-следственную связь» (рисунок 8).

В ходе проведения эксперимента было установлено, что изначальный уровень сформированности познавательных универсальных учебных действий по отношению к решению задач на доказательство недостаточно высок. Это видно по результатам опросника по методике КОТ и «Задачи на доказательство».

Полученные результаты на первом этапе эксперимента послужили основанием для внедрения элективного курса «Задачи на доказательство в курсе алгебры и начал математического анализа», рассчитанный на 17 часов, с целью оценить возможность его использования для повышения уровня сформированности ПУУД.

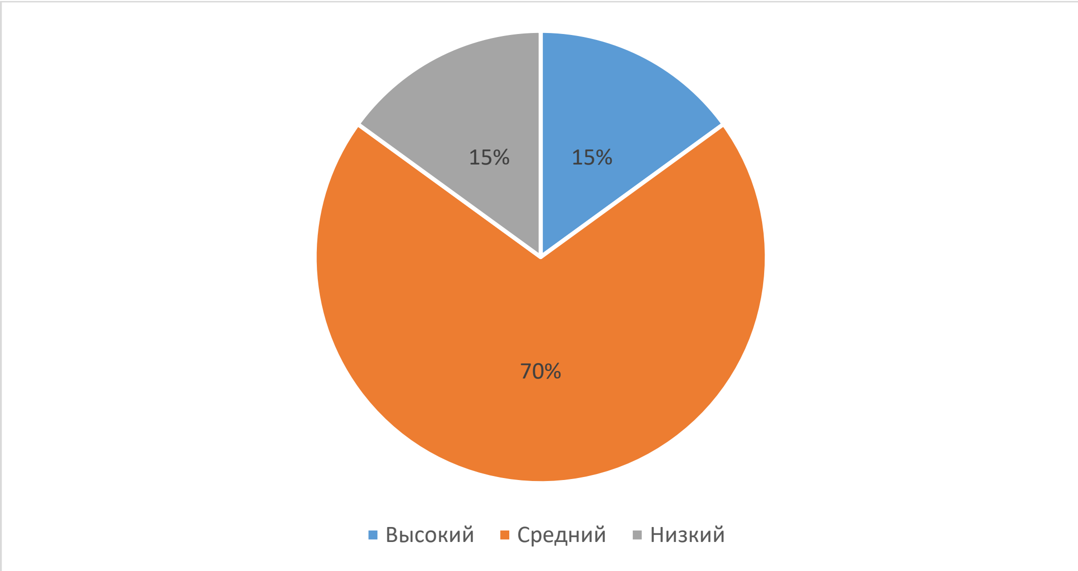

Рисунок 8 – Результаты опросника «Задачи на доказательство»

Результаты проведения второго этапа позволили прийти к выводу, что вариативность программы курса, организация занятий и акцентирование на формирование умений по проведению доказательств и познавательных УУД способствовали повышению уровню их сформированности и углублению полученных знаний по предмету. Однако, проведение элективного курса, рассчитанного на 17 часов, не позволяет максимально глубоко охватить учебный материал. Поэтому, для более лучшего и долгосрочного результата рекомендуется проводить курс, рассчитанный на 34 часа или 68 часов. Это даст возможность тщательно отработать свои навыки по проведению доказательств в курсе алгебры и начал математического анализа.

Выводы по второй главе

Анализ психолого-педагогической и методической литературы в первой главе позволил определить наиболее подходящую педагогическую технологию для обучения старшеклассников проведению доказательств и формирования познавательных универсальных учебных действий. Поэтому во второй главе была рассмотрена технология решения задач Р.Г. Хазанкина [58] и её практическое применение при изучении в 10 классе темы: «Метод математической индукции» по учебнику А.Г. Мордковича [32], [33]. Также, было спроектировано изучение темы «Тригонометрические тождества».

Поскольку в задачном материале представлено небольшое количество упражнений на доказательство, то для увеличения их количества был разработан элективный курс «Задачи на доказательство в курсе алгебры и начал математического анализа».

Для определения эффективности проведения этого курса был проведен педагогический эксперимент, который заключался в определении уровня сформированности познавательных универсальных учебных действий у учащихся старших классов. Исследование состояло из двух этапов. На первом этапе определялся изначальный уровень сформированности с помощью теста КОТ и заданий на доказательство. На втором использовались только задачи на доказательство. Результаты эксперимента показали, что проведение элективного курса положительно повлияло на уровень сформированности познавательных УУД. Также увеличилось количество участников эксперимента, имеющих средний и высокий уровень обладания элементами познавательных универсальных учебных действий, и значительно сократилось количество учеников с низким уровнем.

Таким образом, использование задач на доказательство в рамках технологии решения задач Р.Г. Хазанкина подтверждает свою значимую актуальность как средство формирования познавательных УУД.

Заключение

Социальная жизнь на протяжении всего времени существования человечества оставляет свой отпечаток на процессе обучения. На разных этапах своего развития социуму требуются люди, обладающие определенными навыками и знаниями. В ФГОС СОО отмечено, что выпускники школ должны обладать познавательными УУД.

Формирование познавательных универсальных учебных действий в курсе алгебры и начал математического анализа – процесс трудный и многоаспектный.

Его результаты являются неотделимой частью Федерального государственного образовательного стандарта среднего общего образования, который составляет основу для построения образовательного процесса. Курс математики в старшей школе обладает большим инструментарием для формирования познавательных УУД. В большей степени это связано со спецификой самого учебного предмета.

Поскольку в обучении старшеклассников математике уделяется большое внимание на развитие его логических способностей, абстрактному мышлению, умению анализировать и структурировать информацию, находить взаимосвязи между понятиями, лаконичному построению аргументации своей точки зрения, умению. Данные навыки, получаемые на уроках алгебры и начал математического анализа, существенно влияют на приспосабливаемость учащегося к жизни в социуме.

Современная реальность требует от выпускников школы уметь быстро принимать решения, аргументировать и доказывать свою позицию, обладать не только знаниями, но и уметь учиться. Именно для формирования этих умений идеально подходят задачи на доказательство. Связь умений доказывать математические утверждения и их практическое применение при решении жизненных ситуаций обуславливает актуальность данной темы исследования.

В ходе выполнения первой задачи был проведен анализ психолого-педагогической и методической литературы, что позволило определить сущность познавательных универсальных учебных действий, а также, понять, что понимается под ними.

Например, Боженкова Л.И. отмечает, что «к познавательным общеучебным УУД относятся действия, связанные с переработкой учебной информации. Учебная информация становится знанием человека, если только она «присвоена» им, прибавлена к наличному умственному опыту, переработана с помощью познавательных действий» [28].

В данном пособии также отмечено, что для формирования познавательных УУД необходимо использовать задания, направленные на переработку полученных знаний в виде таблиц и схем. Там же приведены типовые задания для реализации такого подхода к развитию ПУУД. При таком подходе к проработке учебного материала ученики лучше его усваивают и формируют свои навыки по структурированию информации. Помимо этого, анализ учебных пособий для старшеклассников по курсу алгебры и начал математического анализа позволил убедиться в том, что на решение задач на доказательство уделяется недостаточное количество времени. Что существенно влияет на уровень сформированности познавательных УДД.

В ходе опытно – экспериментальной работы были получены следующие выводы.

Во-первых, благодаря специфике проведения математических доказательств и применения для этого логического и абстрактного мышления, задачи на доказательство являются эффективным средством в процессе формирования познавательных универсальных учебных действий у учащихся старших классов. В свою очередь, они учат старшеклассников кратко и аргументированно высказывать свою позицию, структурировать полученную информацию и соотносить с тем, что уже было изучено ранее.

Во-вторых, посредством структурирования и анализа учебной информации, в частности представления доказательств ключевых задач в виде схем, успешно развиваются познавательные универсальные действия.

В-третьих, увеличение учебного времени, уделяемого на обучение проведению математических доказательств, за счёт элективного курса оказывает положительное влияние на уровень сформированности познавательных универсальных действий и уровень обученности учеников к решению задач на доказательство в курсе алгебры и начал математического анализа.

Полученные результаты проведенного исследования подтверждают правоту выдвинутой гипотезы, которая основана на том что детальное и акцентированное обучение способам проведения доказательства при решении задач в курсе алгебры и начал математического анализа, позволяет обеспечить положительный результат в формировании познавательных учебных универсальных действий. Тем самым, позволяя старшеклассникам получить навыки, необходимые для существования в социуме.

Таким образом, все поставленные задачи и цель были достигнуты.

Список используемой литературы

1. Аввакумова И. А. Задачи на доказательство как средство формирования познавательных универсальных учебных действий в процессе обучения математике // Актуальные вопросы преподавания математики, информатики и информационных технологий. 2020. № 5. С. 111-116.

2. Ажгалиев У. О некоторых способах составления тригонометрических тождеств // Математика и математическое образование : сборник трудов VI Международной научной конференции «Математика. Образование. Культура». Тольятти : Изд-во ТГУ, 2013. С. 104—105/

3. Акберова Р.А. Элективный курс по математике «Элементы тригонометрии». Каран-Кункас, 2014.

4. Асмолов А.Г. Как проектировать универсальные учебные действия. М.: Просвещение, 2010. 336 с.

5. Асмолов А.Г. Формирование УУД в основной школе: от действия к мысли. Система заданий. Пособие для учителя. М.: Просвещение, 2010.

6. Боголюбов В.М. Введение в педагогическую технологию: учебное пособие. Пятигорск: ПГЛУ, 1996. 232 с.

7. Боженкова Л.И. Методика формирования универсальных учебных действий при обучении алгебре. М. : Лаборатория знаний, 2016. 240 с.

8. Боженкова Л.И. Познавательные универсальные учебные действия в обучении математике // Наука и школа. 2016. №1. С. 54-60.

9. Бузин В.Н. Краткий отборочный тест. М.: Смысл (Психодиагностическая серия), 1998. №4.

10. Ветошкина Е. С. Обучение учащихся проведению доказательств на уроках геометрии в основной школе :Дис. канд. пед. наук : 13.00.02. Коломна, 2004. 196 с.

11. Виленкин Н.Я. Индукция. Комбинаторика. Пособие для учителей. М.: Просвещение, 1976. 48с.

12. Виленкин Н.Я. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс. Учебник для учащихся общеобраз. организаций (углублённый уровень). М.: Мнемозина, 2014. 352 с.

13. Виленкин Н.Я. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс. Учебник для учащихся общеобраз. организаций (углублённый уровень). М.: Мнемозина, 2014. 312 с.

14. Выготский Л.С. Педагогическая психология. М.: Педагогика-пресс, 1996. 536 с.

15. Газейкина А.И., Казакова Ю.О. Диагностика сформированности познавательных универсальных учебных действий обучающихся основной школы // Педагогическое образование в России, 2016. №7. URL: https://cyberleninka.ru/article/n/diagnostika-sformirovannosti-poznavatelnyh-universalnyh-uchebnyh-deystviy-obuchayuschihsya-osnovnoy-shkoly (дата обращения: 18.04.2022).

16. Гальперин П.Я. Лекции по психологии: Учебное пособие для студентов вузов. М: КДУ, 2005. 400 с.

17. Гибш И. А. Развитие речи в процессе изучения школьного курса математики // Математика в школе. 1995. № 6. С. 2–5.

18. Горленко Н.М., Запятая О.В., Лебединцев В.Б., Ушева Т.Ф. Структура универсальных учебных действий и условия их формирования // Народное образование. 2012. №4. С. 153-160.

19. Давыдов В.В. Теория развивающего обучения: монография. М. : Интор, 1996. 544 с.

20. Есикова И. В. Доказательство тождеств, содержащих обратные тригонометрические функции // Наука России: цели и задачи : Сборник научных трудов по материалам XXVIII международной научной конференции, Екатеринбург, 10 августа 2021 года. Екатеринбург: НИЦ«Л-Журнал». 2021. С. 70-74. – DOI 10.18411/sr-10-08-2021-13. – EDNUQXXJJ

21. Киричек, К. А. Реализация метода математической индукции в системе компьютерной алгебры Maple// Математика в школе. 2021.№ 4. С. 53-66.

22. Кудрявцева Н.Г. Системно-деятельностный подход как механизм реализации ФГОС нового поколения // Справочник заместителя директора школы. 2011. №4. С. 13-30.

23. Лазаренко Т.Ю., Методическая разработка урока по теме: Тригонометрические тождества. Донецк, 2020.

24. Макарова Л.А. Формирование и развитие универсальных учебных действий // Молодой ученый. 2015. №2.1. С. 18-19.

25. Маликов Т. С. Доказательство задач повышенной трудности на делимость методом математической индукции // Инновационные подходы в современной науке: Сборник статей по материалам XXXII международной научно-практической конференции: Общество с ограниченной ответственностью "Интернаука", 2018. С. 82-87.

26. Мерзляк А.Г., Номировский Д.А. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. 10 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений: базовый уровень. М. :Вентана-Граф, 2019. 368 с.

27. Мерзляк А.Г., Номировский Д.А. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. 11 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений: базовый уровень. М. :Вентана-Граф, 2019. 285 с.

28. Мерзляк А.Г., Номировский Д.А. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. 10 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений: профильный.М. :Вентана-Граф, 2019 – 477 с.

29. Мерзляк А.Г., Номировский Д.А. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. 11 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений: профильный уровень. М. :Вентана-Граф, 2019. 413 с.

30. Могилев А.В. Новые образовательные стандарты: давай разберемся. // Народное образование. 2011. №5. С. 32-39

31. Мордкович А.Г. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс. В 2 ч. Ч.2 Задачник для учащихся общеобразовательных организаций (базовый и углублённый уровни). М. : Мнемозина, 2014. 264 с.

32. Мордкович А.Г., Семёнов П.В. Алгебра и начала математического анализа. 10 кл. в 2 ч.: Ч. 1 учебник для общеобразоват. организаций (профильный уровень). М. : Мнемозина, 2009. 424 с.

33. Мордкович А.Г., Семёнов П.В. Алгебра и начала математического анализа. 10 кл. в 2 ч.: Ч. 2 задачник для общеобразоват. организаций (профильный уровень). М. : Мнемозина, 2009. 343 с.

34. Никольский С.М. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений: базовый и профил. Уровни / [С.М. Никольский и др.]. М.: Просвещение, 2009. 430 с.

35. Никольский С.М. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений: базовый и профил. уровни. М. : Просвещение, 2009. 464 с. (МГУ – школе)

36. Образовательный портал для подготовки к экзаменам СДАМ ГИА https://ege.sdamgia.ru/

37. Обухова Л.Ф. Концепция Жана Пиаже: за и против. М.: Изд-во Моск. Ун-та, 1981.191 с.

38. Онучина А.В. Структура универсальных учебных действий обучающихся основной школы // Отечественная и зарубежная педагогика. 2018. №2(48). С. 30-40 URL: https://cyberleninka.ru/article/n/struktura-universalnyh-uchebnyh-deystviy-obuchayuschihsya-osnovnoy-shkoly (дата обращения: 07.05.2022).

39. Пиаже Ж. Психология интеллекта. СПб.: Питер, 2003. 192 с.

40. Приказ Министерства образования и науки Российской Федерации об утверждении и введении в действие Федерального государственного образовательного стандарта основного общего образования

(5-9 классы) / Издан 17 декабря 2010 г. (в ред. 29 декабря 2014 г.) // № 1897. 01.01.2016. Собрание законодательства РФ.

41. Притуло, Ф. Ф. О методике изучения геометрических доказательств в средней школе: дис. . канд. пед. наук/ Ф. Ф.Притуло.-М., 1955. 267 с.

42. Пронина К.С. выпускная квалификационная работа 44.03.01-педагогическое образование профиль «математика» Задачи на доказательство как средство формирования познавательных универсальных учебных действий в процессе обучения» Министерство просвещения РФ ФГБОУ ВО «Уральский государственный педагогический университет», Екатеринбург, 2020.

43. Рубин А.Г., Чулков П.В. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 10 кл.: учеб. для организаций, осуществляющих образовательную деятельность. Базовый и углублённый уровни. М. :Баласс, 2016. 422 с. (Образовательная система «Школа 2100»).

44. Рубин А.Г., Чулков П.В. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 11кл.: учеб. для организаций, осуществляющих образовательную деятельность. Базовый и углублённый уровни. М. :Баласс, 2016. 256 с. (Образовательная система «Школа 2100»).

45. Семенова А. Тригонометрические тождества. // Квант. 2000. №4 с. 37

46. Середа Т.Ю. Формирование познавательных универсальных учебных действий на уроках математики // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Педагогика. 2013. №4. С. 43-51

47. Смирнов Е. О квадратичных вычетах // Квант. 2019. №10. С. 2-11.

48. Смирнова В.А. Методика формирования познавательных учебных действий в процессе обучения биологии в предметной информационно-

образовательной среде: дис. кандидат наук: 13.00.02 – Теория и методика обучения и воспитания (по областям и уровням образования). ФГБОУ ВО «Московский педагогический государственный университет», 2019. 205 с.

49. Стойлова Л.П. Математика: учебник для студ. Учреждений высш. Проф. Образования. М.: Академия, 2013. 464 с.

50. Столяр А.А. Зачем и как мы доказываем в математике: Беседы со старшеклассником. Мн.: Нар. Асвета, 1987. 143 с.

51. Тумашева О. В. Формирование функциональной грамотности учащихся на уроках математики: размышления о новых целевых ориентирах // Математика в школе. 2021. № 5. С. 8-13.

52. Уланкина Т.П. Логические задачи на уроках математики и во внеурочное время // Старт в науке. 2021. № 1. URL: https://science-start.ru/ru/article/view?id=2005 (дата обращения: 17.05.2022).

53. Успенский В.А. Апология математики: [сборник статей]. СПб: Амфора. ТИД Амфора, 2009. 554 с.

54. Федеральные государственные образовательные стандарты [Электронный ресурс]. URL: https://fgos.ru/.

55. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования от 17 декабря 2010 г. № 1897 // Министерство образования и науки Российской Федерации. URL: https://минобрнауки.рф/документы/938 (дата обращения: 08.01.2021).

56. Федеральный компонент государственного стандарта общего образования. Ч. II. Среднее (полное) общее образование. М-во образования Рос. Федерации. – М., 2012

57. Фирер А.В. Развитие познавательных универсальных учебных действий учащихся основной школы при обучении понятиям функциональной алгебры средствами визуализации: дис. кандидат наук: 13.00.02 – Теория и методика обучения и воспитания (по областям и уровням образования). Омск,2018. 225 с.

58. Хазанкин Р.Г. Десять заповедей учителя математики // Народное образование. 1991. №1. С.70-73

59. Хлевнюк Н. Н. Обучение математике в старшей школе с использованием теоретических конспектов // Математика в школе. 2021. № 4. С. 16-27.

60. Хнычкина Е.Е. Познавательные универсальные учебные действия и их оценка – стратегия развития учителя // Муниципальное образование: инновации и эксперимент. 2014. №4. С. 18-20

61. Чибисов Д. Элементарное доказательство закона больших чисел // Квант. 2019. № 5. С. 10-16.

62. Чопова С.В. Формирование познавательных универсальных учебных действий учащихся профильных классов: дис. кандидат наук: 13.00.01 – Общая педагогика, история педагогики и образования. Москва, 2013. 168 с.

63. Чуланова Н.А. Формирование познавательных универсальных учебных действий обучающихся в урочной и внеурочной деятельности: дис. кандидат наук: 13.00.01 – Общая педагогика, история педагогики и образования. Саратов, 2017. 224 с.

64. Чуланова Н.А., Черняева Т.Н. Нормативный контекст определения «познавательные универсальные учебные действия» // Современные проблемы науки и образования. 2014. №6. С. 179-186.

65. Щепилло Е.П. Конспект урока Тригонометрические тождества. 2014

66. Эльконин Д.Б. Психология развития: учеб. пособие для студ. высш. учеб. заведений. М.:Академия, 2001. 144 с.

67. Li B., L. LiuandL. Li "AutomaticAssessmentofProvingProblems in Middle School Algebra," 2011 Third International Conference on Intelligent Human-Machine Systems and Cybernetics, 2011, pp. 205-208, doi: 10.1109/IHMSC.2011.121.

68. Li B., Su W., Yi Y. and Li L. "Elementary algebra proof exercies using a theorem proving system," IEEE Conference Anthology, 2013. pp. 1-4.doi: 10.1109/ANTHOLOGY.2013.6784786.

69. Gunawardena E. A taxonomy of high school students' levels of understanding in solving algebraic problems, Teaching Mathematics and its Applications: An International Journal of the IMA, 2022. hrac004, https://doi.org/10.1093/teamat/hrac004

70. Michailova N.V. Problem-oriented justification of the modern mathematical analysis / Belarusian National Technical University. 2017.

71. V. Linda, Y. Xie and M. Han, "Designing Visually Interactive Learning Modules to Promote Students' Critical Thinking in Mathematics," 2018 IEEE Frontiers in Education Conference (FIE). 2018. pp. 1-5, doi: 10.1109/FIE.2018.8658568.

Приложение А

Ответы к тесту КОТ

Ключ (ответы) к тесту КОТ (Краткий ориентировочный, отборочный тест В.Н. Бузина, Э.Ф. Вандерлик. Опросник диагностики интеллекта - IQ)

Таблица А.1 – Ответы

Вопрос	Ответ	Вопрос	Ответ	Вопрос	Ответ	Вопрос	Ответ	Вопрос	Ответ
1	3	11	3	21	3 и 5	31	1600	41	3
2	3	12	270	22	31	32	1,2,4	42	14
3	2 или 4	13	4	23	2	33	18	43	1
4	Да	14	3	24	1	34	3	44	800
5	4	15	0,31	25	15 м	35	1	45	1/10
6	2	16	НИ	26	1	36	1	46	280
7	4	17	4	27	1	37	0,48 за дюжину	47	4 и 5
8	1	18	4	28	1	38	1	48	1
9	5	19	3	29	2-13	39	20	49	3
10	40	20	Н	30	3	40	1/8	50	17