

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Тольяттинский государственный университет»

Институт математики, физики и информационных технологий
(наименование института полностью)

Кафедра «Высшая математика и математическое образование»
(наименование)

44.04.01 Педагогическое образование
(код и наименование направления подготовки)

Математическое образование
(направленность (профиль))

**ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
(МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ)**

на тему «Примеры и контрпримеры как средство обучения
старшеклассников работе над математическими ошибками в
общеобразовательной школе»

Студент

Н.Е. Валиева

(И.О. Фамилия)

(личная подпись)

Научный
руководитель

д-р пед. наук, профессор, Р.А. Утеева

(ученая степень, звание, И.О. Фамилия)

Тольятти 2022

Оглавление

Введение.....	3
Глава 1 Теоретические основы обучения старшекласников работе над математическими ошибками.....	9
1.1 Понятие и виды математических ошибок	9
1.2 Причины появления математических ошибок у старшекласников в процессе обучения	14
1.3 Приемы и методы работы над математическими ошибками	25
1.4 Средства обучения старшекласников работе над математическими ошибками	30
Глава 2 Проектирование примеров и контрпримеров как средства обучения старшекласников работе над математическими ошибками.....	39
2.1 Принципы проектирования системы задач (примеров и контрпримеров) по математике.....	39
2.2 Система задач (примеров и контрпримеров) по алгебре и началам анализа как средство обучения и самоконтроля над ошибками	50
2.3 Система задач (примеров и контрпримеров) по геометрии как средство обучения и самоконтроля над ошибками	60
2.4 Педагогический эксперимент и его результаты	75
Заключение	86
Список используемой литературы и используемых источников.....	89
Приложение А Соотношение видов деятельности обучающихся на этапах проблемного урока и результатов формирования навыков работы над ошибками.....	97

Введение

Актуальность и научная значимость настоящего исследования.

Преодоление сложностей и работа над ошибками являются неотъемлемой частью изучения математики на всех ступенях образовательного процесса старшей школы. В условиях наблюдающегося процесса снижения общего количества часов, выделяемого для изучения математики, особую значимость приобретает эффективность работы над математическими ошибками. Умение своевременно обнаружить допущенные неточности и правильно решить задачу является залогом повышения предметных компетенций обучающихся.

Большинство школьников зачастую встречаются с определенными трудностями в процессе работы над ошибками, поскольку для ее выполнения следует найти и определить данные ошибки и неточности и справиться их согласно математическим правилам и установленным требованиям оформления работ.

Данный факт говорит о том, что необходимо совершенствование методологических подходов в отношении освоения детьми правил и методов работы над ошибками по математике, ведь умение самостоятельно находить и исправлять ошибки важно в целях дальнейшего успешного завершения школы.

Этим и определяется значимость и актуальность выбранной нами темы.

Сегодня успешная реализация педагогами согласно образовательным стандартам [59], личностно-ориентированного подхода в обучении просто невозможна без учебно-познавательной работы самих учащихся.

Актуальность темы обусловлена еще и тем, что работа с математическими ошибками, как неотъемлемая часть образовательного процесса, осваиваемая в течение всего обучения в школе, выступает важным средством, способствующим развитию у школьников интерес не только к математике, но и к другим предметам естественнонаучной направленности. Ведь полноценное изучение большинства современных наук, физико-

математических, химико-биологических, социально-экономических, невозможно без навыков и умений устранять допущенные мыслительно-логические и вычислительные ошибки.

Сегодня можно назвать выделить несколько направлений, в которых учеными рассматривается проблематика данной работы:

- изучение возможных причин возникновения математических ошибок у старшеклассников [6],[10], [17],[18], [38];
- исследование различных направлений методической работы с математическими ошибками [1], [20–21],[26], [32], [37], [64];
- разработка систем задач, направленных на предупреждение математических ошибок [7], [8], [12], [46],[52], [56];
- анализ различных аспектов учебно-познавательной деятельности в процессе работы с математическими ошибками и типологизации самих ошибок [11], [15], [22], [28],[34], [63], [68].

Констатирующий этап эксперимента и анализ практики обучения математике свидетельствуют о наличии **противоречия** между потребностью школьной практики в совершенствовании методической работы с математическими ошибками старшеклассников и её фактическим состоянием. Данное противоречие позволило сформулировать **проблему диссертационного исследования:** какова методика обучения старшеклассников работе над математическими ошибками.

Объект исследования: процесс обучения математике в общеобразовательной школе.

Предмет исследования: методика обучения старшеклассников работе над математическими ошибками.

Цель исследования: обосновать методику обучения старшеклассников работе над математическими ошибками.

Гипотеза исследования состоит в том, что методика обучения старшеклассников работе над математическими ошибками будет эффективна,

если она будет основана на выделении приемов и методов поиска математических ошибок с помощью системы примеров и контрпримеров.

Для достижения цели и проверке гипотезы необходимо решить следующие **задачи**:

1. Систематизировать причины появления математических ошибок у старшеклассников в процессе обучения.
2. Проанализировать понятие и виды типичные математических ошибок старшеклассников.
3. Выделить приемы и методы работы над математическими ошибками.
4. Разработать систему задач (примеры и контрпримеры) по алгебре и началам анализа как средство обучения и самоконтроля над ошибками.
5. Разработать систему задач (примеров и контрпримеров) по геометрии как средство обучения и самоконтроля над ошибками.
6. Провести педагогический эксперимент и апробацию методических материалов по теме диссертации.

Проблему формирования и повышения уровня мотивации учащихся при работе над математическими ошибками предлагается решать с помощью изучения и анализа нескольких механизмов, влияющих на учебно-познавательную деятельность школьников. Такими механизмами, в частности, являются:

- непосредственный процесс изучения и анализа математических ошибок на школьных уроках;
- личностно-ориентированный подход на уроках и проведение индивидуальной работы над математическими ошибками.

При разработке системы задач необходимо будет рассмотреть различные виды математических ошибок, которые в своих работах выделили М. Брадис [10], В.И. Рыжик [51], В. Литцман [33], В.С. Карнацевич [25]. Авторы отмечают, что группы ошибок, которые они выделили, не показывает

весь спектр тех ошибок, которые существуют, что говорит об их многообразии.

Необходимо обратить внимание на психологические особенности старшеклассников при обучении работе над математическими ошибками и на важность наглядного характера излагаемого материала [62]. Для учащихся разного склада мышления наглядность будет способствовать лучшему усвоению материала.

Теоретико-методологическую основу данного исследования составили работы М. Брадиса [10], Я.И. Груденова [19], В. А. Далингера [20–21], [41], М.И. Зайкина [24], Г.И. Саранцева [53].

Базовыми для настоящего исследования явились также работы В.С. Карнацевича [25], В.А. Колосовой [26], В. Литцмана [33], Н.С. Майковой [34], Н.В. Метельского [40], О.А. Очерedyко [46], В.И. Рыжика [51], И.Ю. Свиридовой [54], О.А. Тарасовой [56], Л.М. Фридмана [60].

Методы исследования: анализ психолого-педагогической, научной и учебно-методической литературы; изучение, наблюдение и обобщение школьной практики; анализ собственного опыта работы в школе; различные виды эксперимента по проверке основных положений исследования.

Основные этапы исследования:

– 1 семестр (2020/2021 уч.г.): анализ ранее выполненных исследований по теме диссертации; анализ школьных программ и учебников по математике, нормативных документов; анализ опыта работы школы по данной теме.

– 2 семестр (2020/2021 уч.г.): определение теоретических и методических основ обучения старшеклассников работе над математическими ошибками.

– 3 семестр (2021/2022 уч.г.): подборка системы задач (примеров и контрпримеров) по алгебре и начала анализа и по геометрии как средств обучения и самоконтроля над ошибками.

– 4 семестр (2021/2022 уч.г.): оформление диссертации, корректировка ранее представленного материала, уточнение аппарата исследования,

описание результатов экспериментальной работы, формулирование выводов по главам.

Опытно-экспериментальная база исследования: ГБОУ СОШ № 635 Приморского района, г. Санкт-Петербург.

Научная новизна исследования заключается в том, что проблема обучения старшеклассников работе над математическими ошибками рассмотрена в аспекте формирования приемов и методов поиска математических ошибок с помощью системы примеров и контрпримеров.

Теоретическая значимость исследования заключается в предложенной методике работы над математическими ошибками с помощью примеров и контрпримеров.

Практическая значимость исследования заключается в разработке системы задач по алгебре и начала анализа и системы задач по геометрии как средств обучения и самоконтроля над типичными математическими ошибками.

Достоверность и обоснованность результатов исследования обеспечивались сочетанием теоретических и практических методов исследования, анализом педагогической практики и личным опытом работы в общеобразовательной школе.

Личное участие автора в организации и проведении исследования состоит в выявлении методических особенностей и формулировании методических рекомендаций по работе с математическими ошибками старшеклассников в общеобразовательной школе; разработке системы задач по алгебре и начала анализа и системы задач по геометрии как средство обучения и самоконтроля над ошибками.

Апробация и внедрение результатов работы велись в течение всего исследования. Его результаты обсуждались:

- в период прохождения производственных (научно-исследовательской НИР 1–4) и преддипломной практик на кафедре «Высшая математика и

математическое образование» ФГБОУ ВО «Тольяттинский государственный университет;

– на всероссийской научно-практической междисциплинарной конференции «Молодежь. Наука. Общество» (Тольятти, декабрь–январь, 2022 г.).

Основные результаты исследования отражены в 2 публикациях [13], [14].

На защиту выносятся:

- система задач (примеров и контрпримеров) по алгебре и началам анализа как средство обучения и самоконтроля над ошибками;
- система задач (примеров и контрпримеров) по геометрии как средство обучения и самоконтроля над ошибками.

Структура магистерской диссертации. Работа состоит из введения, двух глав, заключения, содержит 27 рисунков, 9 таблиц, 1 приложение, список используемой литературы (74 источника). Основной текст работы изложен на 96 страницах.

Глава 1 Теоретические основы обучения старшекласников работе над математическими ошибками

1.1 Понятие и виды математических ошибок

Под ошибкой обычно понимают «результат неправильного действия» [46]. «Существует деление ошибок на случайные и систематические. Школьник может сделать случайную ошибку один раз, либо она характерна для одного-двух учеников. Такие ошибки возникают непостоянно. Систематические соответственно и возникают у одного школьника либо нескольких систематически, раз за разом, многократно. Они устойчивы. Либо появляются у разных учеников за один раз» [34].

В каждой ошибке следует различать:

- «сущность математической ошибки – это требования, правила или прием решения, которые были нарушены» [35]. Сущность математической ошибки школьников можно увидеть, проанализировав то, как ученик пишет или произносит свое решение данной ему задачи, какое именно действие при решении было выполнено им неправильно, то есть она имеет внешнее выражение;
- причину возникновения ошибки. «Причина – это явление, обстоятельство, служащее основанием чего-нибудь или обуславливающее появление другого явления» [57]. Внешне определить ее очень сложно, поэтому перед учителем ставится задача определить побудителя, который подталкивает к выполнению ошибочных действий учеников.

Первичным из данных понятий является все же сущность ошибки, выявляя которую, мы начинаем анализировать, по каким причинам она могла возникнуть.

«Для систематизации ошибок существуют различные принципы, среди которых можно выделить: причинный (причина возникновения: Г. Веймер,

Д. Майергойз и др.); предметный (сущность ошибки: В.И. Рыжик, Н.Н. Зильбельберг); деятельностный (вид учебной деятельности учеников, при которой допускаются ошибки: З.И. Слепкань, Г.Н. Скобелев и др.); потемный (тема, при изучении которой ученики допускают ошибки: В.Г. Прочухаев, А.Т. Муханов и др.); количественный (число учеников, допустивших ошибку: Д.С. Ангелов, Н.Н. Беляева и др.)» [26, с. 9].

Если ученик допускает ошибку при решении задачи у доски в классе или в контрольной, проверочной работе, то учитель снижает ему оценку. Большинство школьников не анализируют, почему была допущена ошибка, а лишь расстраиваются из-за ее снижения. Очень часто на уроках можно наблюдать картину, когда ученик, выполняя задание у доски, следит за реакцией учителя, и во время допущения ошибки на вопрос педагога: «Разве это верно?», просто стирает ответ, как будто и вовсе не сделал ошибку и пытается решить задание иным способом. В таком случае ошибка была устранена лишь при контроле учителя и, по всей вероятности, будет допущена учеником снова при решении задачи самостоятельно, так как причина возникновения ошибки была не выявлена и не отработана.

Присутствует на уроках и другая ситуация, когда ученики спрашивают у учителя: «А можно ли в данном примере возвести обе части уравнения во вторую степень, разделить на x , сократить дробь?». Задавая подобные вопросы, учащиеся пытаются перенести ответственность за решение на педагога. Если же учитель не перенаправит вопрос самим школьникам, да к тому же и с объяснением, почему так можно сделать или нельзя, то у учащихся также в дальнейшем будут возникать ошибки при самостоятельном решении, когда не у кого будет спросить.

С.В. Мугаллимов замечает, что существуют различия в письменных работах по алгебре и геометрии. «Ошибки в решении алгебраических задач связаны с плохо сформированными операциями, алгоритмами, понятиями. В решении геометрических задач ошибки появляются из-за нарушения

логических рассуждений, принятия ошибочной гипотезы, недостаточной работы с чертежом» [43, с.1].

Ошибки в математических заданиях могут быть разных видов – их подробнее рассматривают ученые в своих трудах М. Брадис [10], В.И. Рыжик [51], В. Литцман [33], В.С. Карнацевич [25]. Математики указывают, что группы ошибок, которые они выделили не показывают весь спектр существующих ошибок, что говорит об их многообразии» [35].

Приведем пример групп ошибок, которые сформулировали вышеуказанные авторы.

М. Брадис выделил две группы ошибок: «в речи и мышлении и «вне речи». К первой группе он относил ошибки, связанные с неправильной математической речью, которые не только осложняют процесс изучения математического материала, но и являются источником возникновения различных заблуждений:

- двусмысленные слова;
- двусмысленность произношения;
- двусмысленность конструкции;
- ошибка распределения;
- ошибка составления» [10, с.14–15].

«Ко второй группе ошибок он относит ложные доказательства, которые возникли из-за поспешных, необдуманных обобщений:

- неверное использование правил последовательных умозаключений за счет обращения;
- распределение на редкие и исключительные ситуации;
- подмена четких математических определений интуитивными интерпретациями;
- ошибки и неточности при построении задания;
- отнесение свойств и параметров одного конкретного вида всему роду.

Например, совпадающие точки рассматриваются как различные; различные точки рассматриваются как совпадающие; точка берется там,

где она не может быть; предположенная точка пересечения на самом деле отсутствует; ломанная принимается за прямую; прямая принимается за ломанную;

- искажение смысла сокращенных записей;
- отступление от концепций и тезисов;
- неточности и ошибки, последовавшие за неверной интерпретацией условных записей геометрических соображений»[10, с.16–35].

В.И Рыжик выделил следующие виды ошибок:

- «нарушение равносильности;
- использование допущений, которые не оговорены условием;
- заведомо предполагается существование того, о чем говорится;
- использование теорем, определений за границей своей применимости;
- потеря смысла;
- неверное использование математических символом;
- логические ошибки:
 - а) ошибки при работе с логическими операциями и кванторами;
 - б) ошибки структурные;
 - в) ошибки при записи ответа;
- ошибки в аналогиях;
- ошибки при обобщениях;
- ошибки, допущенные интуицией;
- неверный выбор модели» [51, с.175–185].

В. Литцман рассматривал зрительные, авторские ошибки, ошибки школьников и софизмы. «К зрительным относил ошибки, которые возникают при:

- «– оценке длины отрезков, частей кривых;
- размеров фигур;
- в определении направлений;
- перспективном изображении пространственных образов»[33, с.15–26].

Авторские ошибки, по мнению В. Литцмана, приносят пользу в обучении: «Пусть некоторым утешением для школьников будет сознание того, что и другие люди допускают ошибки... Однако гораздо важнее добиться того, чтобы обнаружение ошибки выработали у читателя критическое восприятие изучаемой литературы. Тогда ошибки других... приобретут большое значение для обучения» [33, с.26–38]. Автор также считал, что, разбирая свои ошибки и софизмы, учащиеся научатся большему, чем даже при выполнении упражнения по готовому алгоритму.

В.С. Карнацевич анализировал огрехи и ошибки своих учеников в геометрии с позиции оценки усвоенных ими умений и знаний. Ученый разделил совершаемые в работах ошибки на несколько групп в зависимости от конкретных видов демонстрации знаний школьниками.

- «– ошибки, совершаемые при изучении новых категорий и понятий, их характеристик и определений;
- школьник не владеет сутью определения термина, не может выполнить построение фигуры по изучаемым правилам;
- ученик способен выполнить чертеж фигуры верно, но не может дать четкое логическое определение ей, допускает синтаксические математические искажения, называет лишние видовые отличия или, наоборот, не произносит важного, необходимого видового отличия;
- приблизительное представление о геометрическом термине;
- ученик хорошо знает определение, может повторить изображение фигуры, данное в учебнике, но ему трудно сделать чертеж самостоятельно;
- ошибки, связанные с изучением теорем;
- неточные формулировки теорем;
- проблемы в доказательствах теорем (использование непосредственно того, что нужно доказать; использование очевидных следствий из того, что нужно доказать);
- нарушение последовательности рассуждений;

- отсутствие обоснований;
- неверные обоснования (ученик применил теорему, но не все условия для этой теоремы выполняются; ссылка на частный случай, использование верной теоремы, но которая до этого не получила доказательства);
- ошибки, которые школьники совершают в процессе выполнения задач по геометрии;
- неточности и ошибки при построении, в чертежах; неправильное оформление записей в задаче;
- ошибки при расчетах, тригонометрического характера;
- неточности и ошибки, допускаемые по причине неумения мысленно моделировать, уметь представлять в уме объемные фигуры и конструкции»[25].

Таким образом, не существует единой классификации математических ошибок. Данный вопрос, не смотря на его обширную изученность в научной литературе, представляется дискуссионным.

1.2 Причины появления математических ошибок у старшеклассников в процессе обучения

Причина образования ошибок выступает активатором, который подталкивает учащегося к их совершению и ведет его решение к неверным результатам. Сущность ошибочного действия несложно определить по действиям учащегося: он неверно рассуждает и пишет, выбирает неправильное действие, порой нелогичное для решения данной задачи.

Увидеть причину ошибки внешне обычно непросто. Педагогу же нужно понять, что побудило ученика совершить ошибку, что позволит ему по возможности предотвратить в дальнейшем подобные ошибки.

Как правило, причины появления ошибок в работе у учащихся – самые разные, поскольку в их основе могут быть и психологические тонкости, и методическая специфика образовательного процесса, или что-то иное.

Осуществление психологического анализа ошибок и упущений в математических работах нацелено на выявление сущности и природы допущенных ошибок и причин их образования [45], [47], [48], [50].

Определить ошибки, означает, прежде всего, указать учащемуся их причины и сущность, чтобы они их осознали, и затем показать правила и конкретизирующие моменты в противопоставление его неправильному представлению темы и решению. Изучение реальных причин совершения ошибок у школьников позволяет адресно и более конкретно скорректировать у них последовательность выполнения математических действий, знания и практические навыки решения заданий [34].

Рассмотрим подробно группу ошибок, которые возникают под влиянием психологических факторов.

Запоминание. На уроках математики важную роль играет один из основных психологических факторов – запоминание. Для успешного решения геометрических задач ученик должен знать определения, свойства, признаки, аксиомы различных геометрических фигур, для решения алгебраических задач: правила и алгоритм решения. Например, при решении задач по теме «Логарифмические неравенства» нужно знать не только свойства логарифмов, но и помнить ранее пройденный материал: определение логарифмов, метод интервалов, изображение решения неравенств на числовой прямой. Если учащиеся не будут знать определения, свойства, то это приведет их к логическим ошибкам при решении задач.

«Запоминание – это обобщенное название процессов, обеспечивающих удержание материала в памяти» [66].

В исследованиях А.А. Смирнова [55] было выявлено, что запоминание напрямую связано с особенностями деятельности человека, которая характеризуется прежде всего направленностью. В учебной деятельности

человека такую направленность называют мнемической. «Она имеет конкретные виды (точность, полнота, последовательность, прочность), которые влияют на запоминание учащихся» [66].

Изучая определенный школьный материал, ученик ставит перед собой цель запомнить материал, как можно точно. При этом возникают два варианта запоминания: выучить материал наизусть или запомнить его своими словами. Выбор школьников, как учить, зависит от информации, которую несет в себе данный текст. Например, в алгебре, как правило, все определения и свойства необходимо знать наизусть, поскольку, если учащиеся неверно сформулируют их, то это может привести их к неправильному применению определений и свойств в решении задачи.

Полнота запоминания зависит от того, нужно ли нам запомнить все содержание текста или лишь его часть, главную мысль, отдельные факты. На уроках геометрии школьники запоминают в основном то, что выделено в учебнике жирным шрифтом или обведено в рамку, например, в учебнике Ш.А. Алимова «Алгебра и начала математического анализа. 10–11 класс» определения, свойства, теоремы выделены в рамку розового цвета [2].

Последовательность запоминания основывается на том, что учащиеся запоминают материал в том виде, который дает им учитель, или как записано в учебнике, или строят свое запоминание в более логической последовательности на их взгляд. Например, в логике упомянутого уже учебника Ш.А. Алимова «Алгебра и начала математического анализа. 10–11 класс» изучение логарифмов начинается с его определения и свойств, а затем логарифмических функций, уравнений и неравенств [2].

Прочность запоминания зависит от того, на какой срок мы хотим запомнить данный материал: «навсегда» или на определенный срок, то есть на тот момент, когда его нужно рассказать. В случае математики материал необходимо запомнить на продолжительный срок, так как в решении задач используются различные свойства, которые учащиеся могли пройти, например, 1–2 года назад.

«Выделяют несколько видов памяти. У человека, как правило, доминирует один или два типа памяти в зависимости от того, как ему легче запомнить ту или иную информацию. Среди них выделяют визуальную, слуховую, кинестетическую память» [66]. В одном классе могут встретиться ученики, у которых доминируют различные виды памяти, поэтому при построении урока учителю необходимо выстраивать материал таким образом, чтобы были задействованы все перечисленные виды.

Перечислим различные факторы, которые также оказывают влияние на запоминание школьников:

- материал сравнительно огромного размера запоминается неохотно, с уклонением;
- если материал недостаточно хорошо понят, то он запоминается неправильно, человек может воспроизводить изученное неточно, при этом, даже не замечая этого, или возникает иллюзия того, что все было усвоено;
- вид материала. Определения и формулы запоминаются точнее, чем, например, свойства;
- требования, предъявляемые запоминающему другими людьми или им самим. Учащиеся, готовя уроки, ориентируются, прежде всего, на то, какие именно требования предъявляет им конкретный учитель. Например, учитель может спрашивать свойства логарифмов в различной последовательности, а может и в той последовательности, в которой они были записаны на уроке или даны в учебнике;
- условия, в каких приходится запоминать. Если ученик пытается запомнить материал в шумной обстановке или постоянно отвлекается на что-то еще, то материал запомнится хуже;
- индивидуально-психологические особенности учащихся;
- эмоциональное отношение. Если ученику не нравится данный предмет или какая-то тема, то запоминать материал школьнику будет сложение.

Учителю при составлении урока необходимо учитывать эти факты, чтобы подготовить материал в правильной форме, наилучшей для запоминания. Ведь именно от того, как преподнесет учитель учебный материал, в каком виде, объеме, будет ли сопровождаться данная тема мотивацией для ее изучения и интереса зависит то, как ученик ее запомнит и какие усилия совершит для ее запоминания. Ведь хорошо выученный материал сокращает количество ошибок школьников.

Внимание. Состояние внимания учащихся на уроке одно из важнейших условий продуктивности познавательной деятельности. Если ученик невнимательно слушал учителя на уроке, то это приведет его к трудностям в понимании учебного материала и в решении задач. Ученик должен быть внимательным не только во время урока, но и при решении задач самостоятельно. Одной из самых распространенных ошибок является ошибка по невнимательности. Не следя за собой, ученики неправильно списывают и читают условия задачи. Но внимательным на уроке должен быть и учитель, так как и он может допустить ошибку при написании на доске, например, формул. К тому же необходимо следить и за решением учеников на доске. Если ученик допускает ошибку на доске, а учитель этого не замечает, то в дальнейшем, решая аналогичную задачу, школьник вновь допустит такую же ошибку. Поэтому учителю важно быть внимательным на уроке и уметь организовывать внимание учащихся. Рассмотрим для этого подробнее, что же такое внимание и какие у него особенности.

«Внимание – процесс состояния настройки субъекта на восприятие приоритетной информации и выполнение поставленных задач» [66].

Появление у школьника внимания, его усиление и сосредоточение на чем-то может определяться воздействием различных условий: влияние внешних раздражителей; появление нечто нового и непонятного; спонтанность появления нового; проявление полярности и контраста между раздражителями; ожидание учеником конкретного явления, события; позитивные эмоции и ощущения.

Выделяют несколько обязательных условий, которые на долгое время позволяют сохранить после произвольное внимание у школьников:

- запас конкретных знаний, умений, информации и опыта;
- неактивность в деятельности.

Выделяют также достаточные условия, чтобы поддерживать долгий период времени любое внимание:

- реализации деятельности, интересной и важной для индивида;
- испытываемое ощущение обязанности и ответственности за благополучное и результативное завершение данной деятельности;
- занятия человека соответствуют интересам и стремлениям индивида, либо хотя бы на настоящий момент для него увлекательны.

На рисунке 1 приведены условия усиления, ослабления и облегчения внимания.

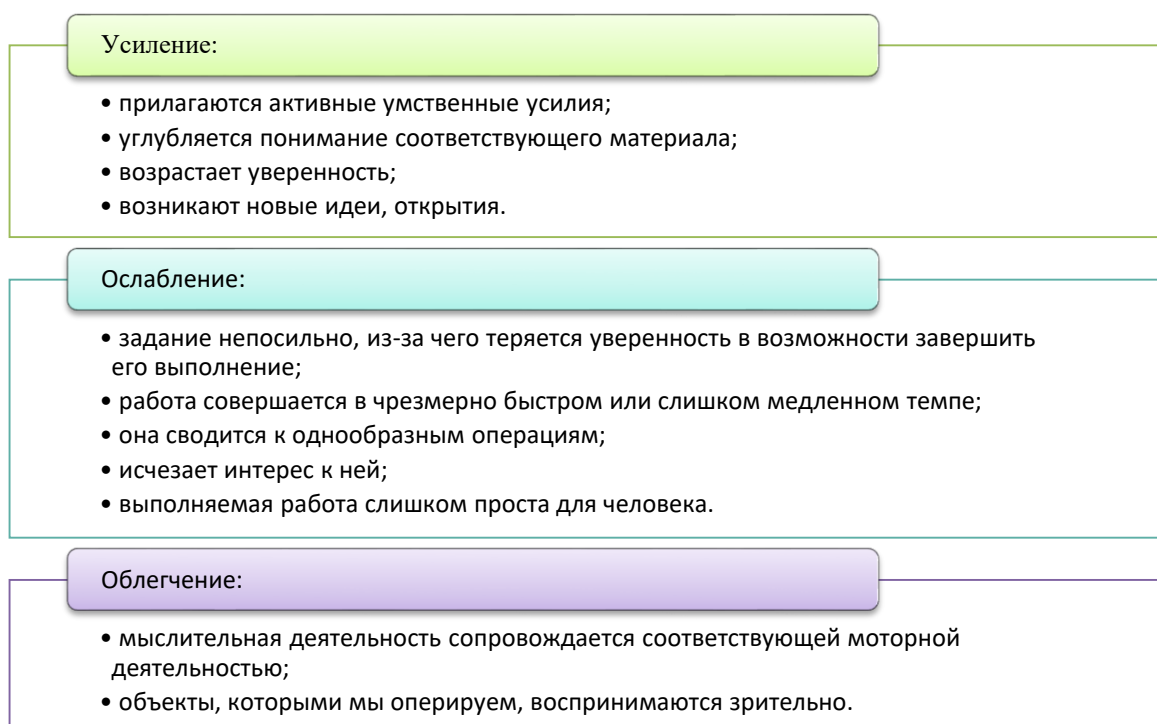


Рисунок 1 – Условия усиления, ослабления, облегчения внимания

Правильно организованный урок учителем, в котором будут учитываться все выше перечисленные факты, будет способствовать наиболее

полному понимаю ими учебной программы, и уменьшит количество ошибок, которые возникают по невнимательности.

Мышление. «Мышление можно охарактеризовать, как высшую форму познавательной деятельности, которую характеризуют следующие качества человека:

- гибкость – способность извлекать, распознавать удачные и эффективные способы решения, использовать разные способы, умение мыслить за рамками предложенного, искать новые варианты решения, если меняются изначальные условия задания;
- оригинальность – необычность способов решения стандартных задач учащимися;
- целесообразность – нахождение наиболее кратчайшего пути решения проблемы в поставленной задаче, осуществление разумного выбора действий при решении задачи;
- рациональность – умение находить оптимальные способы и средства решения, чтобы сэкономить время, желание найти самое простое и верное решение в предлагаемой задаче;
- широта – умение обхватить проблему в целом и обобщить ее, определять и группировать, разграничивать факты и категории, применять аналогии, анализировать и обобщать в процессе решения задания;
- активность – стремление обязательно решить представленное задание, инициатива для достижения верного результата;
- критичность – умение оценить правильность выбора путей решения задачи, полученные ответы, с точки зрения их достоверности;
- доказательность – нацеленность на обоснование и осмысленную аргументацию каждого этапа решения задания;
- организованность памяти – возможность усваивать, запоминать, постоянно хранить, оперативно и верно использовать полученные учебные сведения, правила, данные» [66].

Ослабление этих качеств у учащихся, причем отметим, что школьник может не обладать всеми перечисленными качествами одновременно, влечет за собой ошибки в решении задач.

Интерференция навыков. Интерференция навыков – перенос уже выработанных частных навыков на вновь формируемое действие на основании их частичного, чисто внешнего сходства, приводящего к затруднениям усвоения нового навыка.

Данный перенос появляется в условиях, когда:

- составляющие прошлых усвоенных знаний и умений используются в принятии и освоении новых знаний и действий, без принятия во внимания их специфики;
- в процессе применения совершенного нового и незнакомого способа реализации определенного действия взамен проверенного и знакомого.

В качестве причин, инициирующих интерференцию навыков, выступают следующие:

- Усвоенные и многократно использованные ранее навыки и умения определены как более устойчивые и крепкие нервные связи в сопоставлении с формирующимися новыми. Данное обуславливает тот факт, интерференция отражается слабее, когда принятые рабочие действия относятся по большей части к теоретическим умениям, а не практическим навыкам. Поэтому и получается, что переучиться «на новый лад» гораздо сложнее, чем обучиться новому.
- Школьник может с трудом понимать отличия усвоенного прошлого способа деятельности от нового изучаемого. Он не видит практической разницы между ними, и поэтому появляется интерференция навыков.

С появлением последней у школьников начинают появляться ошибки при решении различного рода заданий.

Например, сформировавшийся навык раскрытия скобок вида $b(x+c)=bx+bc$ может проявляться у школьников при работе с

тригонометрическими формулами, если рядом нет данной формулы или она не выучена. Тогда к формуле $\sin(x + y)$ ученик начинает применять уже известный ему навык раскрытия скобок и получает в ответе:

$$\sin(x + y) = \sin(x) + \sin(y)$$

Подобные ошибки вызваны также непониманием самой математической природы темы функций, и, в частности, тригонометрических функций.

Также следует назвать причины, которые обусловлены недоработками учебных пособий и образовательных школьных программ:

- в содержании учебных пособий составители совершают слишком ранний поспешный переход к использованию обобщений в процессе развития у школьников навыков применения правил, порядков действий и умения анализировать и подытоживать в заданиях;
- в учебнике приводятся правила, теоремы, алгоритмы решения, но недостаточно приводятся разных и наглядных примеров решения на них;
- составители слишком много внимания уделяют строгости представления информации по темам;
- представленные в учебных пособиях задачи и задания не позволяют должным образом проработать и закрепить изученный материал.

Выделяют следующие причины, определяемые недоработками и упущениями в организации образовательного процесса в школе:

- педагогом не ведется работа по предотвращению у учеников желания «на автомате» использовать освоенные данные;
- у школьников не развиваются навыки по обращению объекта к определённой категории или понятию, умения определять и классифицировать критерии математических понятий;
- у школьников не развивают навыки самооценки и самоконтроля;
- недостаточно уделяется внимания развитию у школьников вычислительной культуры;

- педагогом мало используется наглядность, чтобы учащиеся могли лучше усвоить новую информацию;
- недостаточно уделяется внимания подготовительной деятельности в целях осознанного изучения тем занятий; педагог не продумывает более глубокое усвоение, закрепление учебного материала в дальнейшем [56].

Кроме того, можно выделить в числе причин появления математических ошибок такие.

Низкая мотивация.

При низкой мотивации на уроках учащиеся начинают плохо слушать учителя, не следить за доской, не выполнять задания на уроке в своей тетради. Поверхностное, невдумчивое восприятие нового материала приводит к непониманию его, что может привести в дальнейшем к ошибкам;

Неряшливый, неаккуратный почерк.

Учащиеся, которые имеют неряшливый почерк, при записи решения задачи не всегда сами понимают, что именно они написали. Например, они могут не понять, какую именно цифру они записали, и в следующем действии подставить неверное число, что приведет к неправильному ответу;

Скорость работы.

Медлительность и небольшая скорость мышления, рассуждений тормозит работу учащегося, мешает ему реализовать контроль своих действий. Если ученик «застрял» с одной частью задачи, в его мышлении «удаляются» данные о другой части, в отношении которой он может совершить непреднамеренную ошибку, что-то упустить. При слишком быстрой работе выполнения заданий у учащихся возникают ошибки из-за того, что не все действия они успевают проанализировать, допускают вычислительные ошибки и опiski;

Понимание текста задачи.

При прочтении условия задачи ученику для ее решения необходимо выделить условие и требование задачи, объекты, которые участвуют в задаче

и отношения между ними, выполнить рисунок к задаче, отметить на чертеже данные условия, сделать краткую запись. Если ученик не умеет выполнять выше перечисленные действия, то он не сможет решить задачу правильно, то есть допустит ошибку.

Пропуски уроков, приводящие к незнанию материала, пробелам в знаниях.

Большая учебная нагрузка, практическое отсутствие отдыха и малое количества сна ведут к рассеянности, снижению внимательности и скорости рассуждений и мыслительных процессов, и в итоге это становится причиной разных ошибок, порой даже нелогичных и «глупых» [56].

Считается, что допущение учениками ошибок в математике говорит о недостатках и недоработках педагогических методик обучения предмету. Оперативное исправление недочетов и ошибок, конечно, нужное, но не достаточное условие гуманистического направления математического обучения. На данный момент о гуманизации обучения говорится очень много, как «об ориентации через школьную дисциплину на личность ученика. Осуществление замысла гуманизации подразумевает использование в рамках обучающих методик положений о личности ученика, его возможностях, логических законов его личностного становления» [25].

В свое время ученый-математик из Польши Г. Штейнгауз отмечал большое значение для развития детского мышления проведение работы с ошибками по математическому предмету. Он говорил, что «если педагог уверит ученика, что в его решении есть неточность либо ошибка, то ученик наверняка подробно изучит соответствующий материал, чтобы это проверить». Поэтому, нужно отметить, что одним из значимых факторов совершенствования качественного уровня математического образования является составление специального перечня ошибок и его использование в процессе обучения для отработки знаний.

1.3 Приемы и методы работы над математическими ошибками

Базовыми методами работы над математическими ошибками являются контроль и самоконтроль.

При проверке работ педагог отмечает как математические, так и грамматические, и стилистические ошибки. Причем педагог самостоятельно корректирует такие недочеты, а это неправильный подход. Увидев исправленную ошибку, школьник только выражает согласие с исправлением. Но для того, чтобы улучшить уровень самостоятельной учебной деятельности школьника важно, чтобы он сам обнаружил недоработки и ошибки, разобрал их и причины их допущения. В связи с чем, педагог может показать то место, где совершена ошибка, а для этого использовать систему символов. Так, указанные рядом с примером две черточки говорят об серьезнейшей ошибке, одна – о небольшой и негрубой, а волна говорит о небольшом недочете.

Когда педагог проверяет домашние задания, он должен внимательно проследивать все этапы вычислений в задачах, проводимые алгоритмы действий, рассуждения и описания. Необходимо проследить за наиболее типичными и часто повторяющимися ошибками и выделить их. Прежде всего, нужно обратить внимание на самые грубые и серьезные ошибки, обусловленные несоблюдением законов математики и ключевых правил.

Как раз данные ошибки и следует разбирать более подробно на классных занятиях. Нужно не просто назвать типичные грубые ошибки, а разобрать их, прояснить решения, определить причины их допущения. Нужно привлекать внимание других учащихся, также совершивших подобные ошибки.

Бывает, что задача вызывает трудности в решении у большей части ребят в классе, тогда следует более подробно разобрать это задание, прорешать разные задачи по этой части. Если выявленная ошибка не имеет массового характера, то учащемуся предлагается разобрать ее дома самому, исправить задание, при этом учитель дает подсказки и ссылку на правило математики.

Проводить работу над ошибками следует немедленно, так как если откладывать разбор ошибок, учащиеся быстро теряют интерес к нему. Чем оперативнее проводить такую работу, тем больший эффект она дает.

В целях предупреждения большого количества ошибок и их качественного исправления, следует развивать у учащихся умения самоконтроля, подразумевающего 2 составляющие: умение самостоятельно выявлять недочеты и ошибки; навыки самостоятельной работы по пояснению выявленных ошибок и их исправления.

На практике используются следующие приемы самоконтроля:

- проведение проверочных действий, в том числе использование приемов обратного действия, определенных преобразований и вычислений;
- составление и решение задания, которое обратное заданному, в целях проверки верного решения и ответа;
- оценивание итоговых результатов задания и пути его решения с позиции здравого смысла и логики;
- проведение проверочных действий по заданию путем его графического решения (при аналитическом виде задачи).

Также помогает развивать навыки самостоятельного контроля использование подхода приближенного оценивания предполагаемого результата, так как определение потенциальных границ итогов выполнения задания дает возможность не сделать небольшие недочеты, описки, пропуски чисел и т.п.

Например, школьнику дано задание: «В недельный срок предприятие выпускает 130 компьютеров, исполняя план работы месяца на 25%. Какое количество компьютеров предприятие по плану должно выпускать за месяц?»

Школьник делает запись:

$$\frac{130 \cdot 100}{25} = 52.$$

Можно быстро выявить ошибку, если ребенок до того, как начать решать, логически поразмыслит над примерным ответом: «Если за одну

неделю выпускается 130 компьютеров, то всего за 4 недели будет выпущено явно больше 130 штук, значит и ответ будет больше, чем 130».

Становление и развитие у школьника универсальных учебных действий в учебно-познавательной работе определяется используемыми средствами и способами обучающего процесса. Чтобы сформировать у школьников умения качественной работы над ошибками по математическому предмету можно применять такое средство как проблемное обучение. Так, в качестве данного средства Т.Л. Блинова [9] указывает на проблемное задание, выступающее составляющим элементом указанного обучения.

То есть проблемное обучение определяется как специальная организация образовательного процесса, в рамках которой педагог намеренно создает проблемные задания и ситуации, и при которой подразумевается самостоятельная работа школьников по разрешению таковых [9], [30].

Проведение проблемного урока включает в себя несколько этапов: «установление проблемы», «реализация поиска ее решения», «выражение данного решения», «реализация продукта».

Т.Л. Блинова в рамках своих исследований представляет наглядно в виде схемы (Приложение А) картину соотнесения разновидностей работы школьников на всех этапах такого занятия и итогов развития универсальных учебных действий школьников в учебно-познавательной деятельности [19].

Представленное сопоставление доказывает насколько действительно целесообразно использовать проблемные уроки в классе, чтобы добиться эффективного развития познавательно-учебных навыков у детей.

Для примера рассмотрим некую проблемную ситуацию занятия, определим основные элементы познавательных УУД, формированию которых будет способствовать разрешение данной ситуации.

Итак, класс проходит тему «Основное свойство дроби». Педагог озвучивает задание: «У Димы в сумке есть 50 рублей. В одном отделе магазина он купил конфет на $\frac{1}{4}$ от всей суммы. В другом отделе потратил $\frac{3}{12}$ от всей

суммы на жевательную резинку. Определите, сколько денег Дима потратил в каждом из отделов.

В процессе решения дети называют ответы: в обоих отделах мальчик потратил одинаково по 12 рублей 50 копеек. При решении ребята встречаются с проблемой, для них это выглядит противоречиво: $\frac{1}{4}$ тождественна $\frac{3}{12}$. Школьники задают вопрос: «В задаче две разные части от одного числа, а ответ одинаковый и там, и там» (формируется проблема).

Затем школьники переходят к следующему этапу – ищут решение проблемного вопроса. В процессе рассуждений учащиеся приходят к выводу, что $\frac{1}{4} = \frac{3}{12}$, то есть $\frac{1}{4} = \frac{1 \cdot 3}{4 \cdot 3} = \frac{3}{12}$. В итоге дети делают вывод, что при умножении числителя и знаменателя дроби на одинаковое число, получаем дробь, равную ей по значению.

Затем школьников ждет третий этап – выражение данного решения, иными словами выражение новых знаний в общепринятой формулировке (определения, правила).

Последний этап – «Реализация продукта». Кто-то из ребят представляет результат разрешения проблемного вопроса для всех одноклассников.

Решение этого проблемного момента было направлено на становление у ребят следующих УУД [29]: переработка и систематизация данных, развитие логики рассуждений, определение причинно-следственной связи в проблеме, работа с числами.

При применении проблемного обучения педагогу не следует намеренно исправлять ошибки учащегося (в их предположениях и решениях), либо предупреждать о совершаемой ошибке. Предложенное учеником утверждение можно представить всем ребятам на рассмотрение и добиться, чтобы тот сознательно выявил и исправил ошибку. Как показывает педагогическая практика, периодические проверки учащимся решений других ребят помогают сформировать у него умение критической оценки собственного решения.

Например, можно предлагать решать задания, в которых нужно обнаружить ошибку.

Задание 1. $x^2 + 6x + 36 = (x + 6)^2$.

Задание 2. $(x^2 - 1)^2 = x^4 - 1$.

Задание 3. $\log_{\sqrt{2}} 8 = 3$.

Задание 4. $\ln(a + b) = \ln a + \ln b$.

В частности, изучение работ ЕГЭ одиннадцатиклассников [36], показывает, что школьники совершают типичные ошибки:

- в процессе преобразований дробно-рациональных выражений;
при исследовании функций на максимальное и минимальное значения;
- в процессе решения неравенств с логарифмическими выражениями;
- при определении общей площади криволинейной трапеции;
- при построении фигур вращения в заданиях по геометрии;
- при построении графиков функции с участием модулей;
- при пояснении применяемых формул и обстоятельств в процессе решения стереометрических задач и др.

После проверки самостоятельной работы анализируются допущенные ошибки, определяются пробелы в знаниях и проводится работа по их устранению.

Обобщая вышесказанное, хочется сделать вывод, что применение в современных образовательных программах проблемного обучения по математической дисциплине, в том числе вовлечение школьников в разрешение проблемных вопросов заданий при осуществлении работы над ошибками, помогает целенаправленно формировать у учащихся познавательные универсальные учебные действия, что являются одними из первостепенных требований действующих ФГОС ООО и СОО [59].

Базовыми методами работы над математическими ошибками являются контроль и самоконтроль. Метод контроля допустим, но менее эффективен: педагог занимается, как правило, личным исправлением ошибок, что является крайне неверным решением. Более важным и эффективным является

формирование у обучающихся навыков самоконтроля, которое включает способность самостоятельно обнаруживать ошибки, а также умение самостоятельного объяснения ошибки и ее исправления.

1.4 Средства обучения старшекласников работе над математическими ошибками

В отношении деятельности педагога по математике по работе над ошибками необходимо формировать специальную систему. Решение индивидуальных заданий дает стойкий позитивный эффект, поскольку школьник сам решает их, как в школе, так и дома. При этом такие индивидуальные задания должны быть сформированы верно с точки зрения методики работы, и быть ориентированы на проработку определенных ошибок и недочетов. В связи с чем, педагог должен на постоянной основе отслеживать основные трудности и типичные ошибки учеников. Например, для учета этих сведений можно применять таблицу [25].

Таблица 1 - Таблица (примерная) учета основных затруднений обучающихся

Список учащихся класса	Тема...			Примечание «+» – ошибка устранена; «-» – ошибка не устранена
	Пробелы в знаниях	Классные индивидуальные задания	Домашние индивидуальные задания	

Заполнение всех граф таблицы, за исключением первой, рекомендуется осуществлять карандашом. Пополнение списка ошибок ведется при проверке домашних заданий, самостоятельных и контрольных работ. Большинство ошибок повторяются из года в год, поэтому молодому педагогу рекомендуется ознакомиться с ними.

Важным средством работы над математическими ошибками является объяснение и предупреждение ошибок.

Чтобы минимизировать совершение ошибок, необходимо применять различные приемы профилактики, в частности:

- задания должны быть представлены четко, ясно и понятно для восприятия;
- регулярная проработка знаний, умений и навыков в устном варианте, систематический разбор массовых и типичных недочетов, ошибок;
- важно в процессе изучения новой темы предвидеть ошибку и проработать ряд задач на отработку грамотного и верного усвоения темы; делать акценты на всех составляющих формул, прорешивать разнотипные задачи, что будет способствовать минимальному количеству ошибок;
- давать на решение интересные задания, чтобы развивать устойчивое внимание к дисциплине;
- правила, четко сформулированные и хорошо разъясненные, а также конкретные алгоритмы, порядки действий при решении типичных заданий помогают полноценно и прочно усвоить математический материал, что логично минимизирует ошибки в решениях.

Педагог должен помнить, что регулярное и методичное повторение помогает отработать практические навыки, закрепить материал, устранить пробелы и предупредить ошибки. В математической дисциплине очень важна преемственность и связь материалов обучения. Нельзя изучить и освоить новый материал, если не усвоен предшествующий, поэтому на всех уроках есть повторение пройденного. В процессе разъяснения новой темы необходимо пользоваться категориями, терминами и теоремами, пройденными на предыдущих занятиях.

Например, перед изучением темы «Теоремы сложения» следует повторить следующие теоретические вопросы:

- четные и нечетные функции;
- изменение тригонометрических функций при возрастании и убывании аргумента;

- знаки тригонометрических функций;
- таблицы значений тригонометрических функций.

А также выполнить задания:

- Определите четность и нечетность тригонометрической функции:

$$\text{а) } y = -\cos x + x^2; \text{ б) } y = \sin^2 x; \text{ в) } y = \frac{\operatorname{tg} x}{x}.$$

- Найдите область определения функции $y = x^2 - 6x + 10$.

- При каких значениях x функции $y = \sin x$ и $y = \cos x$ принимают одинаковые значения?

Перед прохождением темы «Первообразная и интеграл» следует повторить все формулы дифференцирования. Затем предлагается самостоятельная работа (на 10–15 мин), на которой ученики получают карточки-задания, в которых «опущены» один–два компонента из формулы дифференцирования и приведены две функции, производные которых необходимо найти. После проверки самостоятельной работы анализируются допущенные ошибки, определяются пробелы в знаниях и проводится работа по их устранению.

Рассмотрим ошибки, допускаемые в курсе алгебры и начал анализа.

Задание. Найти точное значение $\arcsin(\sin \frac{5\pi}{6})$.

«Некоторые учащиеся считают, что $\arcsin(\sin k) = k$ при любом k и дают такой ответ: $\arcsin(\sin \frac{5\pi}{6}) = \frac{5\pi}{6}$. Это очень грубая ошибка. По определению $-\frac{\pi}{2} < \arcsin x < \frac{\pi}{2}$. Следовательно, число $\arcsin(\sin \frac{5\pi}{6})$ должно принадлежать промежутку $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$, число $\frac{5\pi}{6}$ этому промежутку не принадлежит. Имеем: $\arcsin(\sin \frac{5\pi}{6}) = \arcsin(\sin(\pi - \frac{\pi}{6})) = \arcsin(\sin \frac{\pi}{6}) = \arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$ » [24]. «Аналогичное задание «вычислить $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 130^\circ)$ » вызывает у учащихся неверный ответ 130° . Можно исправить ошибку следующим образом: учитывая, что $-90^\circ < \operatorname{arctg} \alpha < 90^\circ$ для любого α и $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x$ при $x \in (-90^\circ; 90^\circ)$, имеем: $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 130^\circ) = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 180^\circ - 50^\circ) = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(-50^\circ)) = -50^\circ$. Существует второй способ решения.

Пусть $\arctg(\operatorname{tg} 130^\circ) = x$, получаем $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(\arctg(\operatorname{tg} 130^\circ))$, откуда $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} 130^\circ$. По условию равенства тангенсов имеем $x = 130^\circ + \pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$. Учитывая область определения функции $y = \arctg x$, где $x \in (-90^\circ; 90^\circ)$, при $k = -1$ $x = 130^\circ - 180^\circ = -50^\circ$ [24].

Рассмотрим еще один пример правильного решения аналогичного задания вычислить $\arcsin(\sin 2)$ (при неверном ответе учащихся «2»).

Решение: $\arcsin(\sin k) = k$, если $-\frac{\pi}{2} < k < \frac{\pi}{2}$,

$$\arcsin(\sin 2) = \arcsin(\sin(\pi - 2)) = \pi - 2, \text{ так как } \pi - 2 \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right).$$

Иногда ученики используют неверную формулу, не задумываясь над ней. Например, «определяя, является ли число $(\sqrt{7} - \sqrt{3})^2$ рациональным, ученик пишет: $(\sqrt{7} - \sqrt{3})^2 = (\sqrt{7-3})^2 = (\sqrt{4})^2 = 4$ и получает неверный ответ, выполняя преобразование иррационального выражения, учащийся получил $\sqrt{x^2 + 4} = \sqrt{x^2} + \sqrt{4} = x + 2$. Во-первых, учащиеся забывают, что $\sqrt{x^2} = |x|$, во-вторых, опять ошибочная аналогия с формулой $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \sqrt{b}$, где $a \geq 0, b \geq 0$ » [36]. Применение «формулы $\sqrt{a - b} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$ » в классе обязательно происходит независимо от того, повторяются свойства радикалов на уроках или нет. Ученик проводит аналогию с «формулой

$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \sqrt{b}$, где $a \geq 0, b \geq 0$ и не понимает, почему он неправ. Если заставить ученика написать правильно по свойству, то долговременного эффекта не получится. Необходимо, чтобы ученик понял и осознал свою ошибку. Для этой цели пригоден совет: вычислите $(\sqrt{25} - \sqrt{16})^2$ по тому алгоритму, который только что применили, имеем $(\sqrt{25} - \sqrt{16})^2 = (\sqrt{25 - 16})^2 = (\sqrt{9})^2 = 9$ и по действиям $(\sqrt{25} - \sqrt{16})^2 = (5 - 4)^2 = 1$ и определите, какое решение верное. Ученик задумывается и находит ошибку» [9].

«Можно предложить учащимся проверить себя, взяв, например, значение $x = 2\sqrt{2^2 + 4} = \sqrt{2^2} + \sqrt{4} = 2 + 2 = 4$, но $\sqrt{2^2 + 4} = \sqrt{8}$; при

$x = -2\sqrt{(-2)^2 + 4} = \sqrt{(-2)^2} + \sqrt{4} = -2 + 2 = 0$, но $\sqrt{(-2)^2 + 4} = \sqrt{8}$. Делаем вывод: преобразование выполнено неверно, формула « $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ » не существует и $\sqrt{x^2} = |x|$ » [44].

При работе с «многоэтажными дробями» ученики делают много ошибок. «Например: $\frac{a}{\frac{b}{c}} = \frac{a}{\frac{b}{c}}$. Нужно посоветовать ученику проверить написанное при конкретных значениях переменных. Так, при $a = b = 1$,

$c = 2$, получим $\frac{1}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$, с другой стороны, $\frac{1}{\frac{1}{2}} = 1 : \frac{1}{2} = 1 \cdot 2 = 2$, тогда $2 = \frac{1}{2}$. В

результате ученик должен сделать вывод, что при работе с «трехэтажными дробями» лучше ставить скобки, чем сравнивать длины дробных «черточек»:

$\frac{a}{(\frac{b}{c})} \neq \frac{(\frac{a}{b})}{c}$. И, разумеется, должна появиться верная запись $\frac{a}{(\frac{b}{c})} = \frac{ac}{b}$ » [25].

«При выполнении преобразований со степенями учащиеся не только допускают ошибки, но просто забывают формулы, например, формулу: $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$. Полезно учащимся показать, как они могут вспомнить формулу, пользуясь определением степени, например, $a^3 \cdot a^4 = aaa \cdot aaaa = a^7 = a^{3+4}$. Применяя определение степени в подобных ситуациях, учащиеся могут вывести любую формулу действий со степенями» [25]. Аналогично можно показать ошибки в действиях со степенями.

Ещё пример ошибки: $a^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{a^2}$, «если при этом объяснить ученику, что дробь только в показателе степени, он это объяснение забудет и в следующий раз опять ошибется. Следует привести конкретный пример с удобным вычислением $2^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} = \frac{1}{2^2} = 2^{-2}$. Здесь же можно предложить другой способ: $a^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{a^2}, \left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2 = \left(\frac{1}{a^2}\right)^2, a = \frac{1}{a^4}$ » [29].

Необходимо в результате записать формулу $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$.

Встречаются ошибки от непонимания: «большинство учащихся, решая впервые неравенство $x^2 > 4$, приводят неверное решение $x > 2$. Полезно в этом

случае предложить учащимся проверить число, например. -3, при этом учащиеся убеждаются в неверности ответа» [34]. Можно показать три способа решения этого неравенства. 1 способ тот, которым и пользовались учащиеся « $\sqrt{x^2} > \sqrt{4}$, $x > 2$ », но допустили следующую ошибку « $\sqrt{x^2}=x$ ». Верное решение $\sqrt{x^2} > \sqrt{4}$, $|x| > 2$, $x \in (-\infty; -2) \cup (2; \infty)$. Этот способ решения содержит опасный момент – необходимо обратить внимание на возрастание функции $y = \sqrt{x}$ при $x \geq 0$, иначе в дальнейшем будут еще ошибки при решении неравенств. Второй способ основан на методе интервалов $x^2 > 4$, $x^2 - 4 > 0$, $(x-2)(x+2) > 0$, $x \in (-\infty; -2) \cup (2; \infty)$.

Третий способ графический (рисунок 2).

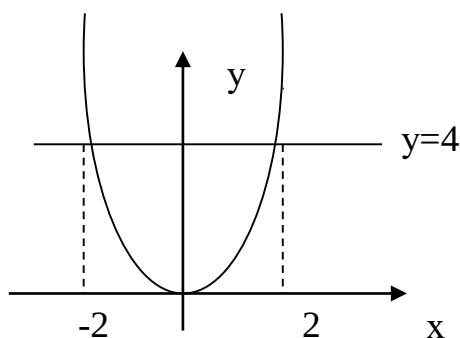


Рисунок 2 – Графическое решение простейших квадратичных неравенств $x^2 > 4$ при $x \in (-\infty; -2) \cup (2; \infty)$.

Выполняя тригонометрические задания, ученик часто «изобретает формулы», например: « $\sin 2x = 2\sin x$ »: «в этом случае можно поступить двумя способами: подставить $x = \frac{\pi}{6}$ и получить неверное равенство $\sin \frac{\pi}{3} = 2\sin \frac{\pi}{6}$, $\frac{\sqrt{3}}{2} = 2 \cdot \frac{1}{2}$ или вспомнить определение $\sin x$ на тригонометрическом круге (рисунок 3)» [69].

Наглядно хорошо видно, что $\sin 2x \neq 2\sin x$. Обращение к тригонометрическому кругу всегда полезно повторением определения тригонометрических функций и наглядностью определений.

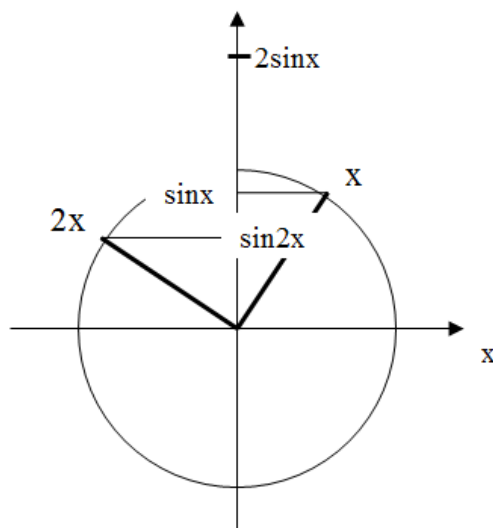


Рисунок 3 – Графическая демонстрация ошибки при решении тригонометрических неравенств

Учебный год в 9-х и 11-х классах должен заканчиваться повторением и систематизацией учебного материала. Важным моментом в средствах обучения старшеклассников работе над математическими ошибками является работа над ошибками на пробных экзаменах ЕГЭ. Включение отдельными пунктами задания «доказать, что...» является большим шагом по улучшению вариантов ЕГЭ. Это должно способствовать улучшению качества преподавания геометрии в школе.

В 2020 году на ЕГЭ задание №15 представляло собой «стандартное логарифмическое неравенство, в левой части которого была лишь разность логарифмов по основанию, большему единицы. После элементарных преобразований с использованием свойств логарифмической функции оно сводилось к дробно-рациональному неравенству. Всё просто, но для области допустимых значений независимого аргумента требовались условия и возникало неравенство типа $1 - \left(\frac{1}{x}\right) > 0$. Вот на решении этого неравенства и «споткнулось» более половины всех экзаменуемых, получив в ответе множество $(1; +\infty)$, что неверно» [34].

Планиметрическая задача № 16 от года к году упрощается, но это не влияет на успешность их решения. Задачи подразделялись на два типа: «в

первом типе задач требовалось показать, что точки, равноудалённые от оснований трапеции, лежат на средней линии, каковая и параллельна этим основаниям. Во втором типе задач параллельность сторон четырёхугольника вытекала из равенства вписанных углов, которые являлись накрест лежащими при двух прямых. Многие школьники начинали решение задачи, но делали весьма неубедительные выводы, что затрудняло экспертов при выставлении баллов. Второй пункт задачи требовал знания нескольких теорем и формул» [31].

Причём считаем, что сложность в двух типах предлагавшихся в регионе геометрических задач была разная. Практически не существует каких-либо алгоритмов решения, а необходимых для этого теорем и вытекающих из них формул достаточно много. Опыт решения можно приобрести лишь в результате упорного труда. Как отмечалось Н.Л. Майоровой, «всё современным школьникам преподнесено на блюде. Оговорены правила игры, сокращено количество экзаменов, отменены экзамены в вузы. Школа и родители прилагают много усилий для возможности приобретения нужных знаний, навыков и умений. Но результаты проверки этих навыков (не говорим о знаниях) оставляют желать лучшего» [16].

Выводы по первой главе

В первой главе были получены следующие результаты.

Формирование перечня математических ошибок и применение его в учебных целях оказывается одним из важных факторов улучшения качества эффективности обучения. В то же время до сих пор не выработано единой классификации математических ошибок. Данный вопрос, не смотря на его обширную изученность в научной литературе, представляется дискуссионным.

Изучены приемы и методы работы над математическими ошибками. Применение в современных образовательных программах проблемного

обучения по математической дисциплине, в том числе вовлечение школьников в разрешение проблемных вопросов заданий при осуществлении работы над ошибками, помогает целенаправленно формировать у учащихся познавательные универсальные учебные действия, что являются одними из первостепенных требований действующих ФГОС ООО и СОО.

Базовыми методами работы над математическими ошибками являются контроль и самоконтроль. Метод контроля допустим, но менее эффективен: педагог занимается, как правило, личным исправлением ошибок, что является крайне неверным решением. Более важным и эффективным является формирование у обучающихся навыков самоконтроля, которое включает способность самостоятельно обнаруживать ошибки, а также умение самостоятельного объяснения ошибки и ее исправления.

Выявлены средства обучения старшеклассников работе над математическими ошибками. Важным средством работы над математическими ошибками является объяснение и предупреждение ошибок.

Решение индивидуальных заданий дает стойкий позитивный эффект, поскольку школьник сам решает их, как в школе, так и дома. При этом такие индивидуальные задания должны быть сформированы верно с точки зрения методики работы, и быть ориентированы на проработку определенных ошибок и недочетов. В связи с чем, педагог должен на постоянной основе отслеживать основные трудности и типичные ошибки учеников в рамках обучения математике и развития ряда показателей логического мышления. Вопрос о математических ошибках в процессе решения заданий из ЕГЭ также требует дополнительной проработки, как на уровне работы с учащимися, так и на уровне методики решения от создателей.

Глава 2 Проектирование примеров и контрпримеров как средства обучения старшекласников работе над математическими ошибками

2.1 Принципы проектирования системы задач (примеров и контрпримеров) по математике

Проектируемая система задач не являются повторением основного учебного курса и предназначена для:

- стимулирования учебно-познавательной деятельности учащихся;
- развития их умственных возможностей и исследовательских компетенций;
- обучения алгоритмам универсальных учебных действий.

При проектировании системы задач в виде примеров и контрпримеров представляется целесообразным исходить из технологии обучения, которую предполагается использовать для этого.

В качестве такого средства при обучении старшекласников работе над собственными ошибками воспользуемся технологией обучения математике под авторством Р.Г. Хазанкина [61].

Общеизвестно, что основным средством обучения математике являются задачи. Учитывая их роль, Р. Г. Хазанкин творчески развил идею ключевых задач по каждой теме школьного курса математики в 7–11 классах. Концептуальные положения технологии:

- «личностный подход, педагогика успеха, педагогика сотрудничества;
- обучать математике – обучать решению задач;
- обучать решению задач – обучать умениям типизации + умение решать типовые задачи;
- индивидуализировать обучение «трудных» и «одаренных»;
- органическая связь индивидуальной и коллективной деятельности;
- управлять общением старших и младших школьников;

– сочетать урочную и внеурочную формы работы» [61].

Р. Г. Хазанкин разработал свою систему уроков, направленную на достижение выше сформулированных целей. Она включает восемь типов уроков:

- «урок-лекцию;
- урок-решение ключевых задач;
- урок-решение обучающих задач;
- урок-консультацию;
- зачетный урок;
- урок анализа результатов зачетного занятия;
- контрольный урок;
- урок анализа результатов контрольной работы» [61].

Рассмотрим методические особенности каждого типа урока.

«Урок-лекция. Лекция рассматривается как основа теоретической подготовки к решению математических задач. Она раскрывает новую тему крупным блоком.

На таких уроках решается целый комплекс взаимосвязанных друг с другом задач:

- «а) заинтересовать учащихся материалом лекции;
- б) сформировать знание сути изучаемого вопроса в процессе объяснения;
- в) познакомить учащихся с методами математических исследований, которые используются в процессе изучения темы;
- г) заложить основы не только для решения задач, но и для доступной учащимся исследовательской деятельности» [61].

В каждой лекции имеют место быть:

- «– обоснование необходимости изучения темы;
- проблемные ситуации, анализ этих ситуаций;
- работа с утверждениями по определенной схеме;

- обсуждение круга вопросов, которые близки к теме лекции и которые предлагаются для самостоятельной работы;
- сообщение материала, выносимого на зачет» [61].

Урок-решение ключевых задач. При осмыслении системы уроков по теме, Р. Г. Хазанкин определяет те умения, которые он должен сформировать у всех учащихся. Выделяются следующие «виды работы с задачами: решение задачи различными методами; решение системы задач; проверка решения задач товарищами; самостоятельное составление задач: аналогичных, обратных, обобщенных, на применение; участие в конкурсах и олимпиадах» [61].

Урок-консультация. К нему школьники готовят вопросы и задачи, которые они не могли решить или решение которых их интересует.

Преимущества урока-консультации для учителя:

«– В ходе подготовки к проведению урока часто обнаруживается, что не все ключевые задачи разработаны в классе, поэтому учитель может во время консультации восполнить пробел.

– Карточки, которые подготовили учащиеся к уроку-консультации, могут быть использованы учителем как дидактический материал при повторении темы, организации контроля и т. п.

– Вопросы учащихся автор использует для обобщения математических утверждений, знакомства учащихся с приемами сопоставления новых задач.

– В ходе урока-консультации учитель получает возможность ближе узнать учеников, выявить наиболее любознательных и наиболее пассивных, вовремя поддержать тех, кто испытывает трудность при решении тех или иных задач» [61].

Зачетный урок занимает особое место в развитии индивидуальных способностей школьников, он проводится по целой теме, к его проведению привлекаются старшеклассники. Принимающие зачет должны повторить всю

тему, осмыслить ее на более высоком уровне по сравнению с тем, что они изучали ранее.

Урок анализа результатов зачетного занятия. Высокую результативность таких уроков обеспечивают:

- «– предварительная аналитическая деятельность учителя по изучению результатов зачета;
- умение учителя правильно определить психологические причины затруднения;
- правильный выбор форм и методов работы по определению затруднений;
- организация дифференцированно-группового обучения на уроке;
- оперативность в проведении анализа и доведении его результатов до учащихся» [61].

Контрольный урок. Он проводится на основе письменных контрольных работ. Их содержание почти совпадает с содержанием тех, что приводятся в дидактических материалах. Но в любую контрольную работу включается еще одно задание, с которым могут справиться только отдельные ученики.

Урок анализа результатов контрольной работы. Его цель – оказание помощи ученикам. Высокую эффективность таких уроков обеспечивает ряд условий. К их числу следует отнести:

- «–предварительную аналитическую деятельность учителя по изучению контрольных работ;
- обоснованный выбор форм и методов проведения коррекции;
- привлечение старших школьников к проверке работ и оказание целенаправленной помощи младшим» [61].

В рамках данной технологии важную роль играет отбор самих ключевых задач. При отборе задачного материала предполагается руководствоваться следующими положениями:

- «с помощью данных задач можно изучить все основные положения рассматриваемой темы;

- задач не должно быть очень много, что предполагается самой технологией;
- по уровню сложности задачи должны быть рассчитаны на средний уровень подготовки, так чтобы у учащихся с низкой мотивацией появился интерес к теме и занятиям, а у «продвинутых» учащихся - интерес к дальнейшему углубленному изучению темы;
- задачи должны содержать различные подходы, предполагающие исследование, в том числе, и теоретические положения рассматриваемой темы;
- процесс решения задач не должен быть слишком длинным, чтобы постоянно поддерживать интерес учащихся» [61].

Оптимальный набор ключевых задач является наиболее важным для достижения положительных результатов в повышении предметных компетенций обучающихся.

Рассмотрим далее несколько ключевых задач, которые являются полезными при изучении работы над собственными математическими задачами.

Задача 1

Решить уравнение:

$$x^3 + x = x^2 + 3x$$

Решение:

При следующих преобразованиях допускается типичная ошибка.

$$x(x^2 + 1) = x(x + 3)$$

$$x^2 + 1 = x + 3$$

$$x_1 = -1, x_2 = 2$$

Ошибка

Потерян один корень.

Контрпример

Очевидно, что $x = 0$ является решением уравнения. Косвенно на это указывает и то обстоятельство, что исходное уравнение является уравнением

третьей степени. Учащимся стоит на это обращать внимание, так как, возможно, такое уравнение имеет три корня. Конечно же, этот пример иллюстрирует важность соблюдения установленных правил при сокращении в уравнениях. Так, уравнение:

$$2x = x \sin x$$

не имеет решения, если применить необоснованное сокращение.

Задача 2

Решить уравнение:

$$4x - 6 = \sqrt{6x - 2x^2}$$

Решение:

Возводим уравнение в квадрат и находим решения:

$$16x^2 - 48x + 36 = 6x - 2x^2$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$x_1 = 1, x_2 = 2$$

Ошибка

Получен один лишний корень.

Контрпример

Очевидно, что $x = 1$ не является решением уравнения. В данном случае, внимание учащихся следует акцентировать на двух аспектах:

- при возведении уравнения в квадрат следует соблюдать предусмотренный алгоритм,
- по окончании решения следует сделать проверку, когда это предоставляется возможным.

Задача 3

Решить уравнение

$$\sqrt{x + 3 - 4\sqrt{x - 1}} + \sqrt{x + 8 - 6\sqrt{x - 1}} = 1$$

Решение

Выделяем в подкоренных выражениях полные квадраты:

$$x + 3 - 4\sqrt{x - 1} = (x - 1) - 4\sqrt{x - 1} + 4 = (\sqrt{x - 1} - 2)^2$$

$$x + 8 - 6\sqrt{x-1} = (x-1) - 6\sqrt{x-1} + 9 = (\sqrt{x-1} - 3)^2$$

Исходное уравнение принимает вид:

$$(\sqrt{x-1} - 2) + (\sqrt{x-1} - 3) = 1$$

Далее:

$$\sqrt{x-1} = 3, x = 10$$

Проверкой убеждаемся, что $x = 10$ является корнем уравнения.

Ошибка

При раскрытии иррациональностей потеряны корни уравнения.

Контрпример

Обращаем внимание учащихся на необходимость обязательного соблюдения равенства:

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

Учащиеся самостоятельно исследуют другие корни уравнения:

$$|\sqrt{x-1} - 2| + |\sqrt{x-1} - 3| = 1$$

Далее:

при $\sqrt{x-1} > 3$ или $x > 10$ получаем:

$$2\sqrt{x-1} = 6, x = 10$$

и решений нет,

при $2 \leq \sqrt{x-1} \leq 3$ или $5 \leq x \leq 10$ получаем:

$$\sqrt{x-1} - 2 + 3 - \sqrt{x-1} = 1$$

и решением является весь отрезок $x \in [5; 10]$,

при $\sqrt{x-1} < 2$ или $1 \leq x < 5$ получаем:

$$2\sqrt{x-1} = 4, x = 5$$

и решений нет.

Таким образом, решением исходного уравнения является отрезок:

$$x \in [5; 10]$$

Задача 4

Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x + \sqrt{\frac{x}{x+y}} = \frac{42}{x+y} \\ xy - x = 16 \end{cases}$$

Решение:

Задача решается с помощью комбинации стандартных методов:

- замена переменных;
- разложение на множители;
- подстановка.

Первое уравнение системы после замены переменных:

$$u = \sqrt{x}, v = \frac{1}{\sqrt{x+y}}$$

приводится к виду:

$$u^2 + uv - 42v^2 = 0,$$

$$(u + 7v)(u - 6v) = 0$$

Далее:

$$u = 6v \Rightarrow x = \frac{36}{x+y} \Rightarrow y = \frac{36}{x} - x$$

$$\begin{aligned} xy - x = 16 &\Rightarrow 36 - x^2 - x = 16 \Rightarrow x^2 + x - 20 = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow x_1 = -5, x_2 = 4 \Rightarrow x = 4, y = 5 \end{aligned}$$

Ошибка

При замене переменных было упущено еще одно решение.

Контрпример

В данном случае проще продемонстрировать учащимся правильное решение. Корректная замена переменных записывается в форме:

$$u = \sqrt{x}, v = \frac{1}{\sqrt{x+y}}, \text{ при } x > 0, x+y > 0$$

$$u = \sqrt{-x}, v = \frac{1}{\sqrt{-(x+y)}}, \text{ при } x < 0, x+y < 0$$

Первое уравнение системы приводится к виду:

$$u^2 + uv - 42v^2 = 0,$$

$$(u + 7v)(u - 6v) = 0$$

или

$$-u^2 + uv + 42v^2 = 0,$$

$$(u - 7v)(u + 6v) = 0$$

Во втором случае:

$$u = 7v \Rightarrow x = \frac{49}{x+y} \Rightarrow y = \frac{49}{x} - x$$

Получаем второе решение:

$$\begin{aligned} xy - x &= 16 \Rightarrow 49 - x^2 - x = 16 \Rightarrow x^2 + x - 33 = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow x_{1,2} &= \frac{-1 \pm \sqrt{133}}{2} \Rightarrow x = \frac{-1 - \sqrt{133}}{2}, y = \frac{41 - 8\sqrt{133}}{33} \end{aligned}$$

Задача 5

Решите уравнение:

$$\log_{x-1}(2x^2 - 5x + 3) = 2$$

Решение

Преобразуем уравнение к виду:

$$2x^2 - 5x + 3 = (x - 1)^2$$

Далее:

$$2x^2 - 5x + 3 = x^2 - 2x + 1$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

Находим решения:

$$x_1 = 1, x_2 = 2$$

Ошибка

Не выполнена проверка ОДЗ для уравнения.

Контрпример

Для основания логарифма должны быть выполнены условия:

$$x - 1 > 0; x - 1 \neq 1$$

Очевидно, что полученные значения x_1 и x_2 не удовлетворяют этим условиям. Следовательно, заданное уравнение не имеет решений.

Задача 6

Решите уравнение:

$$\log_3(2x - 3) + \log_3(x + 2) = 2$$

Решение

Преобразуем уравнение к виду:

$$(2x - 3)(x + 2) = 9$$

Далее:

$$2x^2 + x - 15 = 0$$

Находим решения:

$$x_1 = -3, x_2 = \frac{5}{2}$$

Ошибка

Не выполнена проверка условий:

$$2x - 3 > 0, x + 2 > 0$$

Контрпример

При $x_1 = -3$ условия из ОДЗ не выполнены. Проверкой убеждаемся, что для x_2 :

$$\log_3\left(2 \cdot \frac{5}{2} - 3\right) + \log_3\left(\frac{5}{2} + 2\right) = \log_3 2 + \log_3 \frac{9}{2} = 2$$

и уравнение имеет единственное решение:

$$x = \frac{5}{2}$$

Задача 7

Решите уравнение:

$$\log_{x^4} 16 = \log_{\frac{x^2-3}{2}} 2$$

Решение

Запишем уравнение в виде:

$$\frac{1}{4} \log_x 16 = \frac{1}{\log_2 \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}\right)}$$

$$\frac{1}{\log_2 x} = \frac{1}{\log_2 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{3}{3} \right)}$$

$$\frac{1}{2}(x^2 - 3) = x, x^2 - 2x - 3 = 0$$

Находим:

$$x_1 = -1, x_2 = 3$$

Очевидно, $x_1 = -1$ не является решением, так как $x_1^2 - 3 < 0$. Получаем ответ:

$$x = 3$$

Ошибка

В процессе преобразований потерял корень уравнения.

Контрпример

Очевидно, что если $x = a$ является решением уравнения, то $x = -a$ также является еще одним решением. Действительно,

$$\log_{x^4} 16 = \log_x 2 \text{ при } x > 0, x \neq 1$$

$$\log_{x^4} 16 = \log_{-x} 2 \text{ при } x < 0, x \neq -1$$

откуда и следует два решения:

$$x = \pm 3$$

Задача 8

Решите уравнение:

$$1 + \log_{x+1} x = \frac{1}{1 + \log_2 x}$$

Решение

Преобразуем уравнение к виду:

$$(1 + \log_{x+1} x)(\log_2 x + 1) = 1$$

$$\log_2 x + \log_{x+1} x + \log_2 x \cdot \log_{x+1} x = 0$$

Далее, преобразуем к уравнению с логарифмами, имеющими одинаковое основание:

$$\frac{1}{\log_x 2} + \frac{1}{\log_x(x+1)} + \frac{1}{\log_x 2 \cdot \log_x(x+1)} = 0$$

$$\log_x(x+1) + \log_x 2 + 1 = 0$$

$$\log_x(2(x+1)) = -1$$

Подходящим решением уравнения

$$2(x+1) = \frac{1}{x}$$

является лишь

$$x = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

Ошибка

В процессе преобразования к одинаковому основанию потерян корень уравнения.

Контрпример

Действительно:

$$\log_2 x = \frac{1}{\log_x 2}$$

лишь при $x \neq 1, x > 0$. Поэтому случай $x = 1$ требует отдельной проверки. Убеждаемся, что это еще один корень уравнения.

Таким образом, в процессе реализации технологии работы над ошибками посредством примеров и контрпримеров важную роль играет отбор самих ключевых задач. Оптимальный набор ключевых задач является наиболее важным для достижения положительных результатов в повышении предметных компетенций обучающихся. В работе приведены примеры ключевых задач, которые являются полезными при изучении работы над собственными математическими задачами.

1.2 Система задач (примеров и контрпримеров) по алгебре и началам анализа как средство обучения и самоконтроля над ошибками

Ошибки в определениях в алгебре и началах анализа. В целях установления понятия или категории, следует назвать существенные критерии

предметов, нашедших отражение в этой категории. Это не простая задача для школьников, поскольку обычно школьники без особого осмысления «зазубривают» математические определения. Такой подход ведет к тому, что ученик теряет понимание существенных признаков, и не может охарактеризовать их истинную сущность.

Пример 1.1 «Определение» возрастающей функции

В серии учебников по алгебре Ю.Н. Макарычева приводит для указанного понятия следующую формулировку: «Следует считать функцию возрастающей на некоем участке, когда большее значение аргумента на данном участке согласуется с большим значением самой функции».

Определение в параграфе специально выделено, как важное для понимания.

Однако оперируя данным определением, рассмотрим его наглядно, на примере некой функции $f: x \rightarrow x^2$, которая имеет постоянное значение на участке $(+\infty; -\infty)$. Допустим, что $x_1=3$, а $x_2=4$. Имея данные значения, определим функцию f : получим, что $f(3) = 9$, $f(4) = 16$. Все логично по определению о соответствии большего значения x и f . Для наглядности и сравнения выберем любое число для x_1 , а для x_2 возьмем такое положительное значение, которое будет больше $|x_1|$. Отсюда получаем, что $x_2 > x_1$ т.е. в итоге у нас получится, что всякий раз $f(x_2) > f(x_1)$. Следовательно, рассматриваемая функция $y=x^2$ будет соответствовать выше представленной формулировке автора и «возрастать» на указанном участке. Тогда сторонний наблюдатель может возразить и предложить выбрать отрицательные значения x_1 и x_2 (например, -3 и -2 соответственно). Однако в определении не указано, что мы обязаны брать именно отрицательные значения.

«После приведенного «определения» авторы дают второе (но уже обычным шрифтом, никак его не выделяя): «Другими словами: функцию $y = f(x)$ называют возрастающей в некотором промежутке, если для любых x_1 и x_2 из этого промежутка, таких, что $x_2 > x_1$ выполняется неравенство $f(x_2) > f(x_1)$ » [46].

Здесь присутствует определенный замысел авторов: ведь если бы они первым разместили последнее определение, а для второго (затем представленного) добавили фразу: «Поясняющее описание возрастающей функции ...», то затем они должны были бы написать, что последняя формулировка не подходит под конкретизирующее определение функции и описать наглядный этому пример.

Приведение в отношении математических понятий описаний тоже очень важно, однако они не относятся к четким определениям. В рассмотренной ситуации составители учебника изначально приводят описание, и затем уже само определение категории, и при этом не разъясняют, что есть что, и почему описание не подходит под категорию определений. Кроме того, они путают читателя, используя слова-связки «другими словами», между формулировками.

Контрпримеры, доказывающие ложность высказываний в алгебре и началах анализа [65], [67].

Пример 2.1 «Любое число, оканчивающееся единицей, делится на 3» [20, с.11].

Контрпример: 41, число оканчивается единицей, но оно не делится на 3.

Пример 2.2 «Сумма любого четного и нечетного числа есть число простое» [20, с.11].

Контрпример: $2+7=9$: число 9 не простое, а составное.

Контрпримеры, доказывающие или опровергающие суждения в алгебре и началах анализа:

Пример 3.1 «При любых значениях переменной x выражение

$$\sqrt{\frac{-(x-1)^2}{x^2+1}}$$

не имеет смысла» [20, с.13].

Контрпример: пример, опровергающий суждение: при $x=1$ выражение имеет смысл и его значение равно нулю.

Пример 3.2 «Возможны такие значения a , b и c , при которых парабола $y=ax^2+bx+c$ пересекает прямую $y=2$ в двух точках, а прямую $y=1$ – в одной точке» [20,с.13].

Контрпример: пример, доказывающий истинность суждения, приведен на рисунке 4:

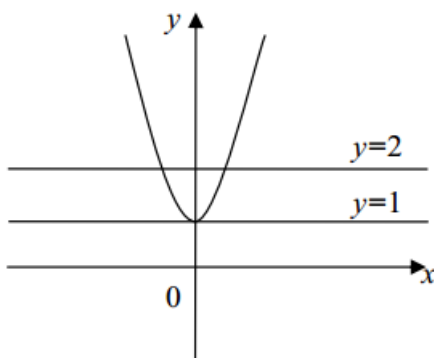


Рисунок 4 – Пример, доказывающий истинность суждения

У этой параболы, например, $a=2$, $b=0$, $c=1$.

Есть, конечно, и другие наборы значений: $a=1$, $b=0$, $c=1$; $a=3$, $b=0$, $c=1$ и т.д.

Можно сделать вывод: a – любое положительное число, $b=0$, $c=1$.

Пример 3.3 «Есть такое значение λ , при котором вектор λa противоположно направлен вектору $5a$ » [20, с.13].

Примеры, доказывающие суждение: например, $\lambda=-5$, $\lambda=-2$, $\lambda=-0,5$ и т.д.
Вывод: λ – любое действительное отрицательное число».

Пример 3.4 «Нет таких двух чисел, чтобы их сумма была бы равна сумме и квадратов.

Пример, опровергающий суждение» [20, с.14]:

$$a=1,2, b=0,4; 1,2+0,4=1,6; 1,2^2 + 0,4^2 = 1,6; a+b= a^2+b^2.$$

Пример 3.5 «Можно найти такие пары чисел, разность которых равна их произведению» [20, с.14].

Контрпример: пример, доказывающий суждение:

$$a = \frac{4}{5}, b = \frac{4}{9}; \frac{4}{5} - \frac{4}{9} = \frac{16}{45}; \frac{4}{5} \times \frac{4}{9} = \frac{16}{45};$$

$$a \cdot b = a \times b$$

В общем виде эти числа могут быть записаны в виде:

$$a = \frac{m}{n}, b = \frac{m}{n+m}$$

Действительно

$$\frac{m}{n} - \frac{m}{n+m} = \frac{nm+m^2-nm}{n(n+m)} = \frac{m^2}{n(n+m)} = \frac{m}{n} \cdot \frac{m}{n+m}.$$

Высказывания, утверждения, умозаключения с неопределенным значением истинности в алгебре и началах анализа.

Пример 4.1 Парадокс Лазаря Карно (французский математик, 1753 - 1823). Докажем, что

$$i^2 = 1.$$

Доказательство

$$\langle i\sqrt{-1}, i^2 = -1.$$

С другой стороны

$$i^2 = \sqrt{-1} * \sqrt{-1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1} = 1; i^2 = 1 \rangle [20, с.22].$$

Объясняется этот парадокс тем, что во множестве комплексных чисел понятие арифметического квадратного корня не вводится.

Пример 4.2 Докажем, что косинус любого острого угла больше 1.

Доказательство.

«Пусть x - острый угол. Прологарифмируем равенство

$$\cos x = \cos x; \lg(\cos x) = \lg(\cos x)$$

Умножив левую часть равенства на 2 будем иметь,

$$2\lg(\cos x) > \lg(\cos x), \text{ откуда } \lg(\cos x)^2 > \lg(\cos x).$$

Из последнего неравенства следует,

$$\cos^2 x > \cos x.$$

Так как угол острый, то $\cos x > 0$. Разделив обе части неравенства

$$\cos^2 x > \cos x \text{ на } \cos x,$$

будем окончательно иметь: $\cos x > 1 \rangle [20, с.22].$

Пример 4.3 «Следует доказать, что тело обладает объемом, тождественным его части». «Представим на рисунке 5 гиперболу с равными сторонами $x^2 - y^2 = 1$, которая движется вокруг оси Ох.

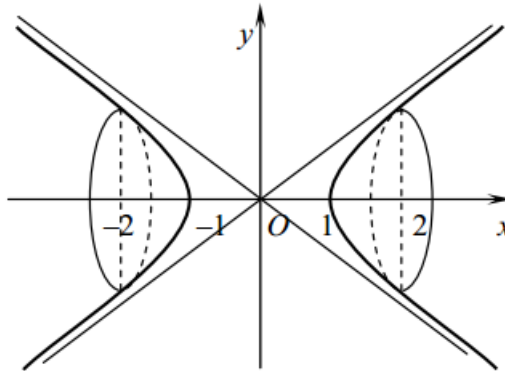


Рисунок 5 – Гипербола с равными сторонами $x^2 - y^2 = 1$, которая движется вокруг оси Ох

В итоге мы видим вращение на оси двупольного гиперboloида, и верхние его точки приходятся на ось Ох и с одной, и другой стороны от 0, занимая расстояние = 1 от начальной точки координатной оси.

Представленные на рисунке плоскости $x = \pm 2$ выделяют определенные тела от всех плоскостей гиперboloида, и мы можем определить объемы данных тел. По логике обе части имеют равные объемы (учитываем правила симметрии). Первым делом определим объем тела, выделяемый плоскостью от одной из плоскости фигуры. Сначала определим интеграл с пределами 1–2.

$$V_1 = \pi \int_1^2 y^2 dx = \pi \int_1^2 (x^2 - 1) dx = \pi \left(\frac{x^3}{3} - x \right) \Big|_1^2 = \frac{4}{3} \pi.$$

Затем определим объем и одной, и второй частей фигуры, которые образуются пересечением гиперboloида плоскостями $x = \pm 2$.

Определим интеграл с пределами -2 – +2.

$$V_2 = \pi \int_{-2}^2 y^2 dx = \pi \int_{-2}^2 (x^2 - 1) dx = \pi \left(\frac{x^3}{3} - x \right) \Big|_{-2}^2 = \frac{4}{3} \pi.$$

В итоге и одна, и вторая часть тела обладают таким же объемом, как и одна часть такового» [19, с.24].

Рассмотренная задача позволяет найти ошибку: в процессе вычисления интеграла нужно помнить, что квадрат функции может обладать действительным значением, а сама функция – имеет мнимые величины.

Пример 4.4 Если задать обучающимся вопрос: «Может ли фигура с бесконечной площадью дать при вращении тело с конечным объемом?» [20, с.25], скорее всего их ответ будет заключаться в том, что подобное не представляется возможным. Следует привести пример:

«Рассмотрим фигуру, ограниченную гиперболой $y = \frac{1}{x}$ осью Ox и прямой $x = 1, x > 1$, которая затем вращается вокруг оси Ox » [69].

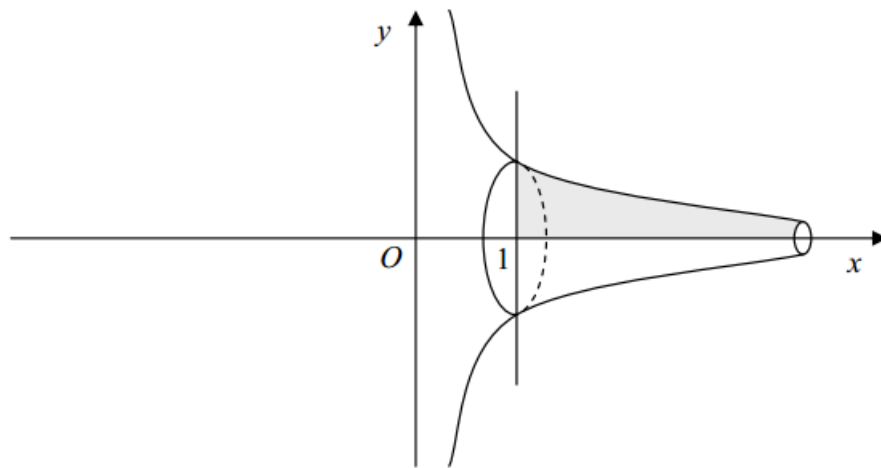


Рисунок 6 – Фигура, ограниченная гиперболой $y = \frac{1}{x}$, осью Ox и прямой $x=1, x \geq 1$, которая затем вращается вокруг оси Ox

«Площадь заштрихованной фигуры мы вычислим с помощью интеграла

$$S = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x \frac{dx}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x \Big|_1^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x - \ln 1) = +\infty$$

Итак, площадь этой фигуры бесконечна.

Вычислим объем тела, полученного вращением этой фигуры с бесконечной площадью вокруг оси Ox .

$$\begin{aligned} V &= \int_1^{+\infty} \pi y^2 dx = \int_1^{+\infty} \frac{\pi dx}{x^2} = \pi \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x \frac{dx}{x^2} = \pi \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x x^{-2} dx \\ &= \pi \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x} \Big|_1^x \right) = \pi \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x} + 1 \right) = \pi(0 + 1) = \pi. \end{aligned}$$

Итак, объем этого тела конечен. Более того, мы получили, что осевое сечение тела конечного объема имеет бесконечную площадь» [69].

Пример 4.5 Рассмотрение задания и его разбор помогают продемонстрировать ученикам, что наглядные решения порой ведут к совершению разных ошибок, поэтому необходимо включать рассуждения «здравый смысл» при решении.

Примечательно, что «фигуры бесконечной протяженности могут иметь конечную площадь» [20, с.26] (что нельзя сказать о приведенном прошлом примере). К квадрату, величина стороны которого составляет 1, придвинем прямоугольную фигуру с параметрами 1 и $\frac{1}{2}$. К нему придвинем другую прямоугольную фигуру, имеющую такое же основание (1), но меньшую высоту ($\frac{1}{4}$) и последовательно приложим также иные прямоугольники по той же логике.

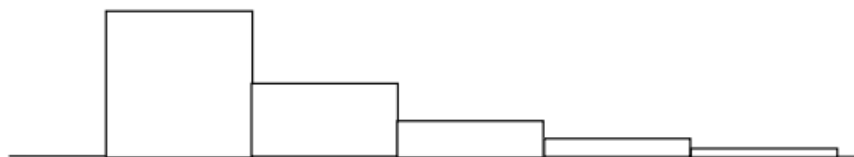


Рисунок 8 – Ступенчатая фигура

Эта ступенчатая фигура имеет площадь

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$$

Но, как мы видим, это сумма бесконечной убывающей геометрической прогрессии с первым членом 1 и со знаменателем $\frac{1}{2}$. По формуле

$$S = \frac{b_1}{1-q}$$

имеем

$$S = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2.$$

Пример 4.6 «Вписать в шар радиуса r конус с наибольшей поверхностью S . Экваториальное плоскостное сечение этой конфигурации будет таким» [20, с.26]:

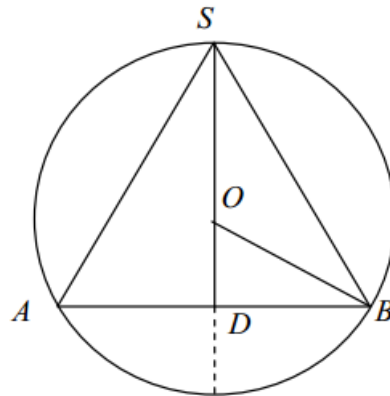


Рисунок 9 – Плоскостное сечение вписанного шара радиуса r в конус с наибольшей поверхностью S

имеем,

$$OS = r, SD = h, SB = l, DB = k.$$

Полная поверхность конуса будет равна

$$S = \pi k^2 + \pi kl$$

Из $\triangle DOB$ имеем

$$DB^2 = k^2 = r^2 - (h - r)^2 = h(2r - h)$$

$$k = \sqrt{h(2r - h)}$$

Из $\triangle SDB$ имеем

$$SB^2 = l^2 = h^2 + (2rh - h^2) = 2rh$$

$$l = \sqrt{2rh}$$

Тогда

$$S = \pi h(2r - h) + \pi \sqrt{h(2r - h)} \cdot \sqrt{2rh} = \pi h(2r - h) + \pi \sqrt{2rh^2(2r - h)}$$

Выбирая высоту h за неизвестную переменную величину x , имеем

$$f(x) = \frac{S}{\pi} = x(2r - x) + \sqrt{2rx^2(2r - x)},$$

причем заметим, что

$$0 < x < 2r.$$

«Найдем критические точки полученной функции, для чего найдем производную и приравняем ее к нулю:

$$f'(x) = 2r - 2x + \frac{4xr^2 - 3rx^3}{\sqrt{4r^2x^2 - 2rx^3}}$$

Приравнивая производную к нулю, получаем

$$(2r - 2x) \sqrt{4r^2x^2 - 2rx^3} = 3rx^2 - 4r^2x.$$

Так как $x = 0$ не удовлетворяет условию задачи, то разделим обе части последнего равенства на x . Имеем, после возведения в квадрат обеих частей равенства,

$$4(x - r)^2 (4r^2 - 2rx) = (4r^2 - 3rx)^2$$

Упрощая это уравнение, получим

$$8x^2 - 23rx + 16r^2 = 0.$$

Следовательно,

$$x_{1,2} = \frac{23 \pm \sqrt{17}}{16} r \text{ [69].}$$

Делаем акцент на том, что представленные корни принадлежат промежутку в пределах $(0; 2r)$, т.е. и тот, и другой – критический для $y = f(x)$.

В процессе перехода через каждую из этих точек первая производная функции $y = f(x)$ меняет свой знак с «+» на «-», а значит в этих точках функция $y = f(x)$ имеет максимум.

Следовательно, нами выявлено, что задача получила 2 разных ответа, однако так быть не может.

Несложно определить из графика функции $y = f(x)$, что исключительно точка

$$x = \frac{23 - \sqrt{17}}{16} r \approx 1,2r$$

выступает точкой максимума.

А другая:

$$x = \frac{23 + \sqrt{17}}{16} r \approx 1,7r$$

выступает посторонним корнем, выведенным по факту возведения в квадрат левой и правой частей уравнения, которое получилось за счет приравнивания

первой производной к «0». Т.е. когда при установлении точки экстремума имеет место иррациональное уравнение, следует быть бдительнее.

Работа с задачами, содержащими противоречивую информацию в структуре решения, строится следующим образом:

- представляется задание и его верное полноценное решение;
- неточность или ошибка вводится в цепь логических рассуждений;
- школьникам нужно найти ошибку в решении, обосновать причину появления таковой.

Последние задачи относятся к числу софизмов – ложные доказательства, полученные с помощью рассуждений, которые только кажутся правильными, но обязательно содержат ту или иную ошибку.

Софизм (уловка, выдумка, головоломка) – мнимое доказательство, в котором обоснованность заключения кажущаяся, порожденная чисто субъективным впечатлением, вызванным недостаточностью логического или семантического анализа.

Таким образом, анализ показал, что контрпримеры дают на практике самый большой и верный эффект при условии, что ученикам представляются 2 утверждения, и в них перемешаны заключение и условие. А если школьники не в курсе правильности утверждений, то эффект будет еще больше. Роль контрпримеров в обеспечении качества математической подготовки рассмотрена в работе [49].

2.3 Система задач (примеров и контрпримеров) по геометрии как средство обучения и самоконтроля над ошибками

Система задач (примеров и контрпримеров) по геометрии как средство обучения и самоконтроля над ошибками подразумевает как задания из планиметрии, так и задания стереометрического характера.

Контрпримеры в планиметрии: геометрические определения

Освоение определений в рамках геометрии ничем не отличается по своей сути от алгебры. Освоение каждого определения сопровождается установлением непосредственных связей между ним и уже известными категориями и терминами, рассмотрением наглядных примеров, характеризующих само определение и таких, которые наоборот ему не соответствуют. Более успешное освоение нового определения возможно за счет решения заданий с его использованием. Первым шагом следует изучить саму формулировку и разобрать ее. В первую очередь, нужно продемонстрировать ученикам отличия, обусловленные применением каких-либо понятий и терминов в новой формулировке. Ученики должны раз и навсегда усвоить, что в формулировке есть определяемое понятие, которое отвечает рассматриваемому объекту, и определяющее – за счет которого поясняется сущность и содержание рассматриваемого объекта. Если ребята не осознают данной разницы, и не умеют правильно определять эти понятия, они будут в дальнейшем путать их и стилистически неверно устанавливать.

Чаще всего школьники допускают ошибки в интерпретации определения из-за того, что не соблюдают существующие логические правила. В частности, когда объем определяющего понятия меньше, чем объем определяемого, в итоге констатируется ошибка очень узконаправленного определения. И наоборот, если первое шире второго – определение получается очень широким.

Пример 1.1. Возьмем к примеру следующую формулировку из учебника: «Диаметр окружности – это отрезок прямой, который соединяет две точки окружности». В данной фразе объем определяющего понятия включает в себя все отрезки, которые могут соединять две точки (хорды). Чтобы проработать и исправить ошибки нужно показывать ученикам наглядные контрпримеры, демонстрирующие критерии различий по виду, и то, что именно не соответствует в данном случае определяемому понятию» [20].

Следовательно, контрпримеры желательно применять на занятиях почаще для проработки определений.

Следует отметить, что не нужно отмечать четкую границу среди примеров и контрпримеров, которые в первом случае демонстрируют смысл того или иного тезиса, а во втором демонстрируют ложность утверждения. Ведь одна и та же вещь, факт или критерий в отношении одного утверждения будет подтверждающим примером, а в отношении другого – будет контрпримером.

В математической дисциплине можно неограниченно использовать контрпримеры [70], [71], [72], [73], [74]. С их помощью школьники эффективнее усваивают новую информацию, лучше определяют связи между понятиями. Также они используются в выявлении ошибок и их аналитическом разборе, для опровержения неправильных выводов и рассуждений, для того, чтобы продемонстрировать различия определения, сформулированного школьником и установленного в учебной литературе.

Даже учитывая такое разнообразие возможностей применения контрпримеров на практике в математической дисциплине, все-таки их использует крайне редко. И говорит об этом недостаток соответствующей литературы, освещающей этот вопрос. Данный момент лишний раз доказывает, что применяемые методики не отвечают реальным практическим потребностям.

Согласно опыту автора данного отчета, порой при определении понятий ошибки допускаются даже старшеклассниками. Поэтому целесообразно рассмотреть методику формирования геометрических понятий через систему контрпримеров на следующих примерах.

Пример 1.2 Школьникам дается задание: проверить, насколько верно данное определение в формулировке: «Хорда определяется как линия, которая соединяет 2 любые точки круга (окружности)». Если ученикам сложно аргументировать, можно представить следующий контрпример, изображенный на рисунке 10 (а). По факту его разбора школьники подытоживают, что применение в определении слова «линия» неправильно, и нужно поменять его на «отрезок», тогда все сойдется верно.



Рисунок 10 – Контрпримеры к неверным определениям «хорды» и «вписанного многоугольника»

Пример 1.3 Другой контрпример, представленный на рисунке 10 (б), показывает случай, когда ученик допускает ошибку при формулировке определения о вписанном многоугольнике, упуская «все». Ученик отмечает, что вписанным в окружность многоугольником следует считать таковой при условии, что его вершины расположены на какой-либо окружности». Здесь правильно подразумеваются «все его вершины». Поэтому очень важно показать контрпример, дабы учащиеся не думали, что упущенное слово не имеет значения, а педагог придирается. После его разбора ребята поймут, какую значимость имеет слово «все». Так, они увидят наглядно, что по определению, приведенному без этого слова, не каждый многоугольник может быть вписан в окружность. Следует периодически предлагать ребятам самостоятельно подобрать контрпримеры к осваиваемым понятиям и их определениям, чтобы осознавать важное значение всех слов в формулировке.

Из практики следует, что основу изучаемого на занятии определения школьники усваивают тут же, следовательно, и профилактическую работу по ошибкам необходимо реализовать вместе с освоением понятия, применяя разные наглядные контрпримеры.

Пример 1.4 Так, на занятии изучается понятие медианы, и педагог просит учеников повторить ее определение. Они отвечают, что медиана является линией, которая соединяет вершину треугольника и серединку его стороны. Не нужно, услышав такой ответ, мгновенно поправлять

отвечающего. А указав на рисунок 11 (а) сказать, что согласно его определению – это тоже медиана. Тогда, увидев, яркий контрпример, ученик сам поймет свою ошибку и исправит ее.



Рисунок 11 – Контрпримеры к неверным определениям «медианы»

«Возможен еще и такой случай при изучении понятия медианы треугольника, когда учащиеся изменяют определение следующим образом: «прямая, проходящая через вершину треугольника и середину противоположной стороны, называется медианой», но, увидев рисунок 11, б) понимают, что опять допустили оплошность, и окончательно исправляют определение. В тех случаях, когда определения изучаемых понятий оказываются для учащихся труднодоступными, целесообразно заменять эти определения поясняющими описаниями. Поясняющим описанием условимся называть такое понятное, доступное учащимся предложение, которое вызывает у всех учащихся один и тот же наглядный образ и помогает хорошо усвоить новое понятие. Это усвоение должно быть доведено до такого уровня, чтобы в дальнейшем учащиеся, не вспоминая поясняющего описания, могли быстро и безошибочно распознать все объекты, охватываемые данным понятием. Очевидно, не следует добиваться запоминания поясняющих описаний. На первоначальном этапе обучения поясняющее описание выступает в роли стимулирующего звена» [9].

Школьные учебники не освобождены от недостатков, например, от неправильной методики исправления ошибочных определений.

Пример 1.5 Например, к определению данным учащимся: «Биссектрисой угла называется луч, делящий угол пополам», можно привести, как минимум, три контрпримера (рисунок 11, а, б, в).

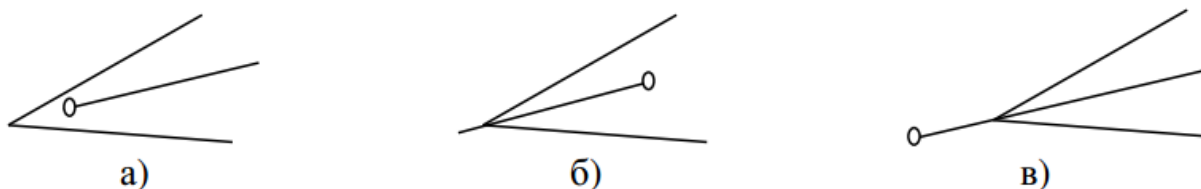


Рисунок 12 – Контрпримеры к неверным определениям «биссектрисы»

Пример 1.6 Чтобы треугольник был равнобедренным, необходимо, чтобы каждая его высота являлась биссектрисой и медианой.

Достаточно привести контрпример о высоте, проведенной к боковой стороне треугольника.

Контрпримеры геометрических фигур – четырехугольников

Пример 1.7 Чтобы четырехугольник был параллелограммом, достаточно, чтобы две его стороны были параллельны, а две другие равны.

Контрпримером такого четырехугольника является равнобокая трапеция.

Пример 1.8. «Паркетчик, вырезая квадраты из дерева, проверял их так: он сравнивал длины сторон, и если все четыре стороны были равны, то считал квадрат вырезанным правильно. Надежна ли такая проверка?

Контрпример. Ромб тоже имеет равные стороны, поэтому такая проверка недостаточна» [54].

Пример 1.9. «Другой паркетчик проверял свою работу иначе: он мерил не стороны, а диагонали. Если обе диагонали оказывались равными, паркетчик считал квадрат вырезанным правильно. Вы тоже так думаете?

Контрпример. Эта проверка ненадежна. В квадрате, конечно, диагонали равны, но не всякий четырехугольник с равными диагоналями есть квадрат.

Равные диагонали могут быть у прямоугольника и у равнобокой трапеции» [54].

Пример 1.10. «Третий паркетчик при проверке квадратов убеждался в том, что все 4 части, на которые диагонали разделяют друг друга, равны между собой. По его мнению, это доказывало, что вырезанный четырехугольник есть квадрат. А по-вашему?

Контрпример. Этим свойством обладают не только диагонали квадрата, но и диагонали прямоугольника» [54].

Пример 1.11 При разрезании четырехугольника по любой из диагоналей получилось два равнобедренных треугольника. Обязательно ли диагонали будут перпендикулярны?

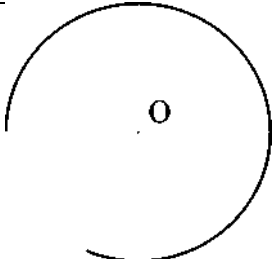
Решение. В качестве примера рассмотрим равнобедренную трапецию, у которой верхнее основание равно боковой стороне, а величины углов при нижнем основании равны 72° . Диагонали такой трапеции не перпендикулярны.

Ответ. Нет.

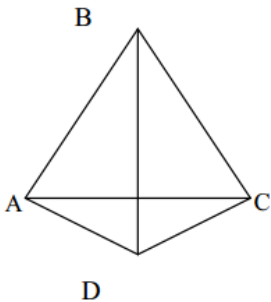
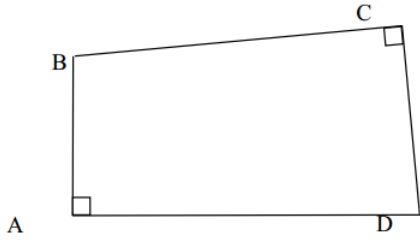
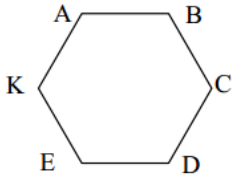
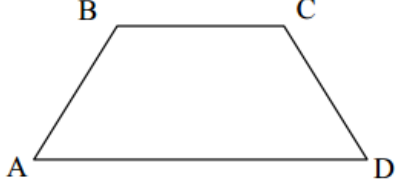
Примеры 1.12-1.16.

Приведем еще несколько контрпримеров на определение геометрических понятий (таблица 2):

Таблица 2 – Дополнительные контрпримеры на определение геометрических понятий

№	Определения	Контрпримеры
1.12	Окружностью называется плоская кривая, точки которой одинаково удалены от одной точки, лежащей в этой плоскости, называемой центром окружности	 «Все точки указанной плоской линии удалены от точки О на одно и то же расстояние, но линия окружностью не является. В определении не указан существенный признак «все»» [20, с.9].

Продолжение таблицы 2

№	Определения	Контрпримеры
1.13	Прямоугольником называется четырехугольник, у которого диагонали равны	 «У четырехугольника ABCD диагонали AC и BD равны, но он не является прямоугольником» [20, с.9].
1.14	Прямоугольником называется четырехугольник, у которого два противоположных угла прямые.	 «У четырехугольника ABCD противоположные углы A и C прямые, но он не является прямоугольником» [20,с.10].
1.15	Квадратом называется многоугольник, у которого все стороны и все углы равны между собой.	 «У правильного шестиугольника ABCDEK все стороны между собой равны, и все углы между собой равны, но он не является квадратом» [20,с.10].
1.16	Параллелограммом называется четырехугольник, две противоположные стороны которого попарно параллельны.	 «У четырехугольника ABCD две противоположные стороны BC и AD параллельны, но он не является параллелограммом» [20,с.10].

Контрпримеры, доказывающие ложность высказываний в планиметрии

Пример 2.1 «Любая фигура, имеющая 3 угла, является треугольником

Контрпример: Следующая фигура имеет три угла, но она не треугольник» (рисунок 13) [20, с.11]:



Рисунок 13 – Фигура, имеющая три угла

Пример 2.2 «Если углы АОВ и ВОС имеют общую сторону, то всегда угол АОС является их суммой» [20, с.11]

Контрпример (рисунок 14):

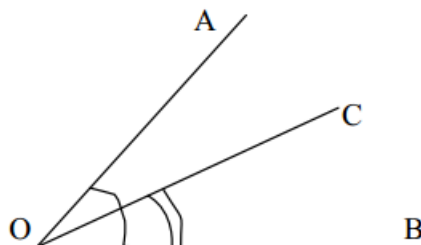


Рисунок 14 – Контрпример к утверждению 2.2

У углов АОВ и ВОС есть общая сторона ОВ, но угол АОС не является суммой двух указанных углов.

Пример 2.3 «Чтобы углы были смежными, достаточно, чтобы две их стороны были бы противоположными лучами» [20, с.12].

Контрпример (рисунок 15):

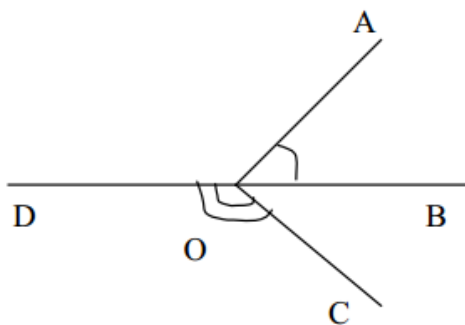


Рисунок 15 – Контрпример к высказыванию 2.3

У углов AOC и DOC две стороны OB и OD являются противоположными лучами, но сами углы смежными не являются.

Пример 2.4 «Ни один отрезок на координатной плоскости не состоит из точек, у которых абсциссы равны» [20, с.12].

Контрпример (рисунок 16):

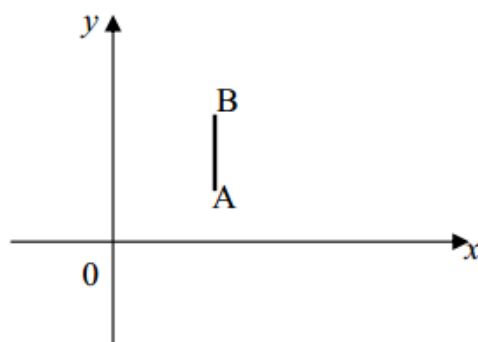


Рисунок 16 – Контрпример к утверждению 2.4

У отрезка AB все точки имеют одну и ту же абсциссу.

Контрпримеры, доказывающие или опровергающие суждения в стереометрии:

Пример 3.1 «Не существует четырехугольной пирамиды, у которой две противоположные грани, перпендикулярные основанию» [20, с.15].

Контрпример (рисунок 17):

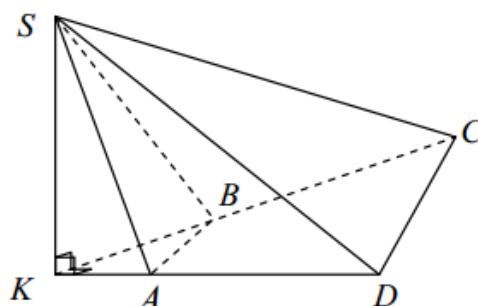


Рисунок 17 – Контрпример к утверждению 3.1

В пирамиде (рисунок 17) $SABCD$ грани SBC и SAD перпендикулярны основанию $ABCD$ (Искомая пирамида получена из треугольной пирамиды $SKCD$, у которой грани SCK и SDK перпендикулярны основанию KCD).

Контрпримеры, доказывающие ложность умозаключений в планиметрии

Пример 4.1 «Если две стороны и угол, противолежащий одной из них, одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу, противолежащему одной из них, другого треугольника, то такие треугольники равны» [20, с.16].

Контрпример (рисунок 18):

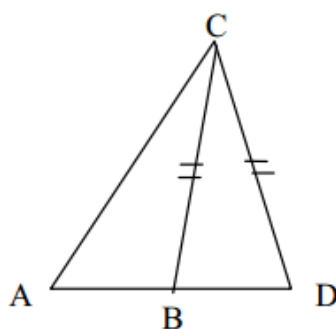


Рисунок 18 – Контрпример к утверждению 4.1

В треугольниках ABC и ACB сторона AC является общей, стороны CB и CD равны, угол A является общим, но треугольники не равны.

Пример 4.2. «Высоты треугольника пересекаются в одной точке» [20, с.17].

Контрпример (рисунок 19):

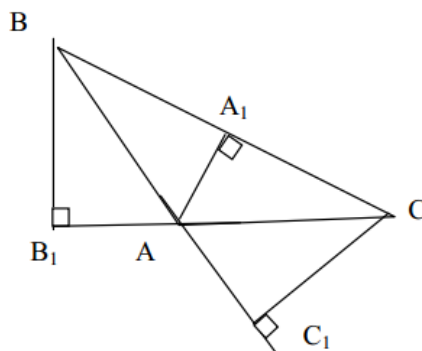


Рисунок 19 – Контрпример к утверждению 4.2

В тупоугольном треугольнике ABC , проведены высоты BB_1 , AA_1 , CC_1 , вообще не пересекаются. Если через высоты провести прямые, то последние пересекутся в одной точке. Теорема должна быть сформулирована так: «Прямые, содержащие высоты треугольника, пересекаются в одной точке».

Высказывания, утверждения, умозаключения с неопределенным значением истинности

Следующим важным этапом обучения учащихся работе с примерами и контрпримерами должен стать этап, на котором им предлагаются высказывания, утверждения, умозаключения, относительно которых неизвестно, ложны они или истинны, и требуется установить их значения истинности и привести примеры и контрпримеры, подтверждающие эти значения. Приведем соответствующие примеры.

Пример 5.1 При изучении понятия призмы полезно предложить учащимся ответить на вопрос: «Верно ли такое определение призмы: призмой называется многогранник, у которого две грани – равные многоугольники с соответственно параллельными сторонами, а все остальные грани параллелограммы?» [20, с.18].

«Ответ на поставленный вопрос отрицателен и подтверждением тому служит рисунок 20, на котором изображен многогранник, не являющийся призмой, но у которого: $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ – «основания», а все остальные грани параллелограммы» [20, с.19].

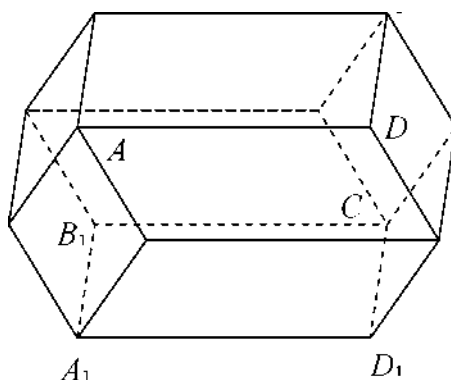


Рисунок 20 – Контрпример к утверждению 5.1

Заметим, что такое ошибочное определение призмы было дано ранее в учебнике А.П. Киселева.

Пример 5.2 Опровержение суждения требует умения строить его отрицание.

Как показал эксперимент, для развития критического мышления учащихся целесообразно предлагать им задания на нахождение ошибки в решениях задач и доказательствах теорем. Могут быть предложены задачи двух типов:

- а) задачи с противоречивой информацией в условии;
- б) задачи с противоречивой информацией в структуре решения.

Пример 5.2.1 Приведем пример задачи первого типа.

Задача. «Постройте треугольник ABC, в котором $AC = 5,7$ см, $\angle A = 135^\circ$, $\angle C = 60^\circ$ » [20, с.18].

Пример 5.2.2 Приведем примеры задач второго типа.

Задача 1 «В данной точке на прямой можно восстановить два перпендикуляра к этой прямой».

Дано: прямая MN и точка A на ней.

Доказать: в точке A к прямой MN можно восстановить два перпендикуляра.

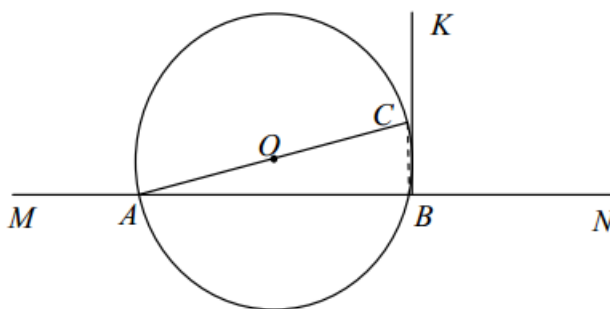


Рисунок 21 – Чертеж к Задаче 1

Доказательство

Шаг 1. Восстановим к прямой перпендикуляр АК известным способом из учебника.

Шаг 2. Начертим теперь окружность произвольного радиуса, проходящую через точку А (рисунок 21). Обозначим буквой В вторую точку пересечения окружности и прямой MN. Проведем диаметр ВС. Соединим точку С с точкой А. $\angle BAC$ вписанный, и он опирается на диаметр, а поэтому $\angle BAC = 90^\circ$. Следовательно, $AC \perp MN$. Таким образом, в точке А к прямой MN восстановлены два перпендикуляра: АК и АС» [20, с.19].

Задача 2 «Найти ошибку в таком способе построения касательной к окружности с данным центром О:

- а) беру произвольную точку А вне окружности;
- б) провожу отрезок ОА;
- в) провожу радиус ОВ перпендикулярно АО;
- г) провожу отрезок АВ, который пересекает окружность в точках В и С;
- д) отмечаю точку D – середину меньшей из дуг ВС;
- е) АВ – касательная» [20, с.20].

Задача 3 «Докажем, что сумма углов любого треугольника равна 180° .

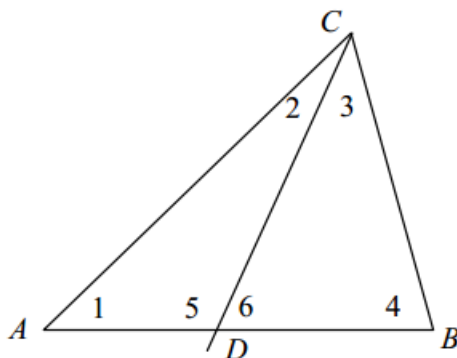


Рисунок 23 – Чертеж к Задаче 4

Доказательство (рисунок 23). В произвольном треугольнике ABC проведем из вершины С луч CD так, чтобы он пересек противоположную сторону АВ. Обозначим полученные углы цифрами так, как показано на рисунке 4. Пусть x – неизвестная нам пока сумма углов треугольника, тогда

$$\angle 1 + \angle 2 + \angle 6 = x, \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 = x.$$

Сложив полученные равенства, получим

$$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 + \angle 6 = 2x.$$

Но сумма $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4$ есть сумма углов $\triangle ABC$, то есть тоже x ; а $\angle 5 + \angle 6 = 180^\circ$ как сумма смежных углов. Таким образом, мы получим уравнение $x + 180^\circ = 2x$.

Откуда имеем: $x = 180^\circ$, то есть сумма углов любого треугольника равна 180° .

Заметим, что логическая ошибка в этом «доказательстве» порождена нашей привычкой, а именно: мы привыкли к тому, что сумма углов любого треугольника одна и та же, и поэтому кажется естественной фраза «обозначим через x сумму углов (любого) треугольника». Но в момент доказательства теоремы нам еще ничего не известно о сумме углов треугольника, и нет поэтому никаких оснований предполагать, что она одна и та же для всех треугольников.» [20, с.21].

Задача 4 «Докажем», что во всяком прямоугольном треугольнике катет больше гипотенузы».

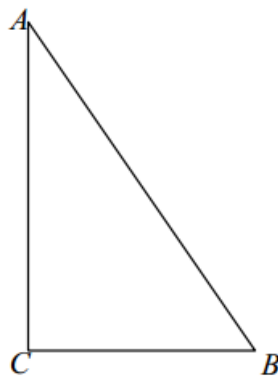


Рисунок 24 – Чертеж к Задаче 5

Доказательство (рисунок 24)

Преобразуем выражение

$$AB^2 - BC^2;$$

$$AB^2 - BC^2 = (AB - BC)(AB + BC) = -(AB + BC)(BC - AB).$$

Разделим обе части равенства

$$AB^2 - BC^2 = -(AB + BC)(BC - AB) \text{ на } -(AB + BC)(AB - BC),$$

Получим

$$\frac{AB+BC}{-(AB+BC)} = \frac{BC-AB}{AB-BC}$$

Так как положительная величина больше отрицательной величины, то $AB + BC > -(AB + BC)$.

Но тогда и

$$BC - AB > AB > BC,$$

а поэтому $2BC > 2AB$ или

$$BC > AB \text{» [20, с.23].}$$

2.4 Педагогический эксперимент и его результаты

В целях апробации рассматриваемой системы задач, был предварительно проведен с помощью анкетирования констатирующий этап экспериментальной работы в целях выявления степени понимания школьниками основных теоретических знаний по недопущению типовых ошибок при решения математических задач.

Апробация системы задач проводилась в период педагогической практики.

Программа и соответствующая технология проведения занятий была рассчитана на 17 часов (1 час в неделю) для учащихся старших классов (в данном случае, 10 класс) в рамках внеурочной деятельности, а также некоторые системы задач были включены в урок.

Апробация системы задач (примеры и контрпримеры) осуществлялась на базе ГБОУ СОШ №635 г. Санкт-Петербурга, Приморского района.

В апробации были задействованы учащиеся:

- для экспериментального класса – 10 «А» (31 обучающийся)
- для контрольного класса – 10 «Б» (33 обучающихся).

В ходе беседы с учителем математики было выявлено: оба класса имеют примерно одинаковый уровень знаний по математике; не все учащиеся имеют

мотивацию к изучению данного предмета; учащимся трудно дается запоминание теоретического материала.

Цель констатирующего эксперимента состояла в проверке того, что разработанные нами системы задач будут способствовать уменьшению ошибок учащихся при решении самостоятельных и контрольных работ.

Методика проведения эксперимента предполагала:

- применение системы задач (примеров и контрпримеров) как средства обучения работе над математическими ошибками;
- сравнение полученных результатов, в частности, количество ошибок при решении задач экспериментального класса с количеством ошибок, которые были допущены контрольным классом.

Задачи эксперимента:

- внедрение систем задач (примеров и контрпримеров), направленных на работу с математическими ошибками старшеклассников;
- сравнение исследовательских итоговых данных в разрезе «экспериментальные–контрольные» классы.

Методы исследования:

- метод беседы с обучающимися;
- метод анкетирования среди педагогов и обучающихся;
- наблюдение за процессом решения учащихся системы задач (примеров и контрпримеров) по математике;
- итоговая контрольная работа;
- обработка результатов контрольной работы.

Раскроем особенности проведения констатирующего эксперимента и дадим анализ его результатов.

Во время констатирующего эксперимента работы были проведены беседы с учителями, им было предложено анкетирование с целью выяснения отношения учителей к ошибкам школьников, знаний о способах их

предупреждений на уроках математике. Структуру, содержание вопросов анкеты отражает таблица 3.

Таблица 3 – Анкета для опроса учителей

№	Вопрос	Ответ
1	При обнаружении ошибки в ходе решение задания у учащихся, Вы сами указываете на ошибку или ждете, когда ее обнаружит сам ученик (класс)?	
2	Какой Вы используете метод работы над математическими ошибками?	
3	Какой прием Вы используете для предупреждения ошибок у школьников?	
4	Используете ли Вы на уроках приведение примеров и контрпримеров?	

Анкетирование продемонстрировало следующие результаты: чаще всего на уроках ошибка исправляется учителем. Большинство педагогов проводят фронтальную работу с ошибками учащихся. Учителя используют метод констатации ошибки: ее обнаружение и исправление. Для предупреждения ошибок учащихся проводится работа по формированию среди учащихся необходимости аргументации на каждого действия при решении задачи.

Также анкетирование показало, что задачи на приведение примеров и контрпримеров не используются среди учителей, участвовавших в опросе.

В основу курса внеурочной деятельности, который посещал экспериментальный класс, было взято несколько учебников для профильных общеобразовательных учреждений для 10 класса [3], [4], [5], [39], [42]. В этих учебниках рассмотрены все основные разделы математики и достаточно большое количество задач базовой и повышенной трудности в рамках курса математики для учащихся как базовой, так и профильной школы. В нижеследующей таблице 4 представлен фактический план занятий в рамках системы задач (примеры и контрпримеры). Было проведено 17 занятий по 1 академическому часу каждое.

Таблица 4 – Тематический план занятий в рамках системы задач

№ занятия	Тема	Дата
1	Ошибки определений в алгебре и началах анализа. Контрпримеры, доказывающие ложность высказываний в алгебре и началах анализа.	10.01.2022 17.01.22
2	Контрпримеры, доказывающие или опровергающие суждения в алгебре и началах анализа	24.01.2022 31.01.2022
3	Высказывания, утверждения, умозаключения с неопределенным значением истинности в алгебре и началах анализа	07.02.2022 14.02.2022
4	Контрпримеры в планиметрии: геометрические определения	21.02.2022 28.02.2022
5	Контрпримеры, доказывающие ложность высказываний в планиметрии. Контрпримеры, доказывающие или опровергающие суждения в стереометрии	5.03.2022 14.03.2022
6	Контрпримеры, доказывающие ложность умозаключений в планиметрии.	21.03.2022 04.04.2022
7	Высказывания, утверждения, умозаключения с неопределенным значением истинности.	11.04.2022 15.04.2022
8	Зачетное занятие. Контрольная в письменной форме.	18.04.2022 22.04.2022
9	Завершающее занятие, обобщение изученного материала.	25.04.22

Первый урок по теме был посвящен теоретическому материалу и проводился в лекционной форме. Второй урок по той же теме проводится в форме практического занятия и посвящен анализу предыдущего домашнего задания.

На констатирующем этапе экспериментальной работы преподавателям по завершении курса занятий с помощью анкетирования были заданы следующие вопросы (таблица 5):

Таблица 5 – Анкета для опроса учителей по завершении курса

№	Вопрос	Ответ
1	Какие разделы из рассматриваемой системы задач темы Вам представляются наиболее сложными для восприятия учащимися?	
2	Считаете ли Вы удачным использованное разделение задач с учетом уровневой дифференциации учащихся?	

Продолжение таблицы 5

№	Вопрос	Ответ
3	Как следует перераспределить темы между занятиями для лучшей успеваемости?	
4	Наблюдается ли повышение интереса у обучающихся к решению задач по ходу проведения занятий?	
5	Насколько правильно составлен комплекс задач для домашних заданий?	
6	Какие общие рекомендации по улучшению предлагаемых примеров и контрпримеров Вы можете дать?	
7	Достигается ли в среднем цель повышения мотивации у учащихся к учебно-познавательной деятельности	

В целом, преподаватели отметили очень живой интерес учащихся (около 85%) к занятиям в рамках данного курса. Наиболее сложными оказались темы №6 и №7, уровень правильного решения задач по эти темам оказался не очень высоким (примерно 55%). В целом, преподаватели, по итогам оценки домашних и самостоятельных работ посчитали целесообразным учет уровневой дифференциации при составлении заданий и изложении материала.

Учащимся, по завершении обучения на констатирующем этапе экспериментальной работы были заданы следующие вопросы (таблица 6).

В целом, учащиеся посчитали курс интересным и познавательным для себя (около 85%). Как и преподаватели, учащиеся испытывали затруднения в изучении тем №6 и №7 (примерно 60%).

Таблица 6 – Анкета для опроса учащихся по завершении эксперимента

№	Вопрос	Ответ
1	Были ли занятия в лекционной форме интересны для Вас?	
2	Что на практических занятиях Вам давалось более легко?	
3	Какой материал вызвал у Вас наибольшее затруднения?	
4	Какой материал оказался наиболее интересным? Что было для Вас более «скучным»? По какой причине?	

Продолжение таблицы 6

№	Вопрос	Ответ
5	При решении какого типа задач из других разделов математики можно применить полученные во время курса знания?	
6	Считаете ли Вы полезным для себя полезными умения и навыки, полученные во время посещения занятий?	

Целью поискового этапа проведенного исследования состояла в апробации конкретного материала к обучению старшеклассников работе над ошибками с помощью примеров и контрпримеров.

В результате данного этапа экспериментального исследования была скорректирована система задач и домашних заданий по программе курса в рамках проведенных занятий.

Учащимся в ходе эксперимента была предложена контрольная работа по алгебре и началам анализа.

Контрольная работа

Пример 1 Верны ли высказывания, если нет, приведите контрпримеры:

а) Большее из двух чисел имеет больше делителей.

Ответ: не верно, например, 6 и 7: 6 имеет делители 1,2,3,6, а 7 только 1 и 7)

б) Невозможно построить график функции $f(x)$, непрерывной на отрезке $[0; 3]$, у которого нет горизонтальной хорды длины 2 и $f(0) = f(3)$.

Ответ: неверно, например, (рисунок25):

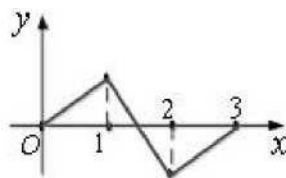


Рисунок 25 – Контпример к заданию б

в) Если целые числа a и b взаимно просты, то не существует такого натурального числа k , для которого $a^k - 1$ делится на b .

Решение: Рассмотрим числа $1, a, a^2, \dots, a^k$ и выпишем их остатки при делении на b . Так как этих чисел $b+1$, а различных остатков при делении на b существует только b (а, именно $0, 1, \dots, b-1$), то среди этих чисел найдутся два числа, дающие одинаковые остатки при делении на b . Пусть эти числа a^{n_1} и a^{n_2} ($n_1 < n_2$). Тогда их разность $(a^{n_2-n_1}-1)a^{n_1}$ делится на b , а поскольку a и b взаимно просты, то и $a^{n_2-n_1}-1$ делится на b .

Пример 2 Приведите примеры, доказывающие или опровергающие следующие суждения.

а) При любых значениях переменной x выражение $\sqrt{\frac{-(x-1)^2}{x^2+1}}$ не имеет смысла.

б) Возможны такие значения a, b, c , при которых парабола $y=ax^2+bx+c$ пересекает прямую $y=2$ в двух точках?

Пример 3 Сумма трех натуральных чисел равна 520. На какое наибольшее число нулей может оканчиваться произведение?

Пример 4 Докажите справедливость утверждения или приведите контрпример, опровергающий его справедливость.

Является ли функция $y = x^2 + x^4$, заданная на отрезке $[-2; 4]$ четной?

Результаты количественного анализа контрольной работы.

Критерии оценивания. Всего: 7 баллов.

Задание 1–2 оценивалось в 1 балл при правильном, полностью выполненном задании, в 0,5 баллов, если ответ на вопрос был дан верно, но не привели контрпример (пример), в 0 баллов, если задание выполнено неверно.

Задание 3–4 оценивалось в 1 балла при правильном, полностью выполненном задании, в 0 баллов, если задание выполнено неверно.

Оценка «5» ставится учащемуся, если он набрал 6,5–7 баллов.

Оценка «4» ставится учащемуся, если он набрал 5,5–6 баллов.

Оценка «3» ставится учащемуся, если он набрал 4,5–5 баллов.

Оценка «2» ставится учащемуся, если он набрал 4 балла и меньше.

Приведем результаты количественного анализа в таблице 7.

Таблица 7 – Анкета качества обучения

Класс	Всего учащихся	Кол-во учащихся не выполнявших работу	Кол-во учащихся, получивших отметку 5	Кол-во учащихся, получивших отметку 4	Кол-во учащихся, получивших отметку 3	Кол-во учащихся, получивших отметку 2
10 «А»	31	4	5	10	7	5
10 «Б»	33	7	1	7	8	10

Для наглядности полученные данные представим графически на рисунке 26.

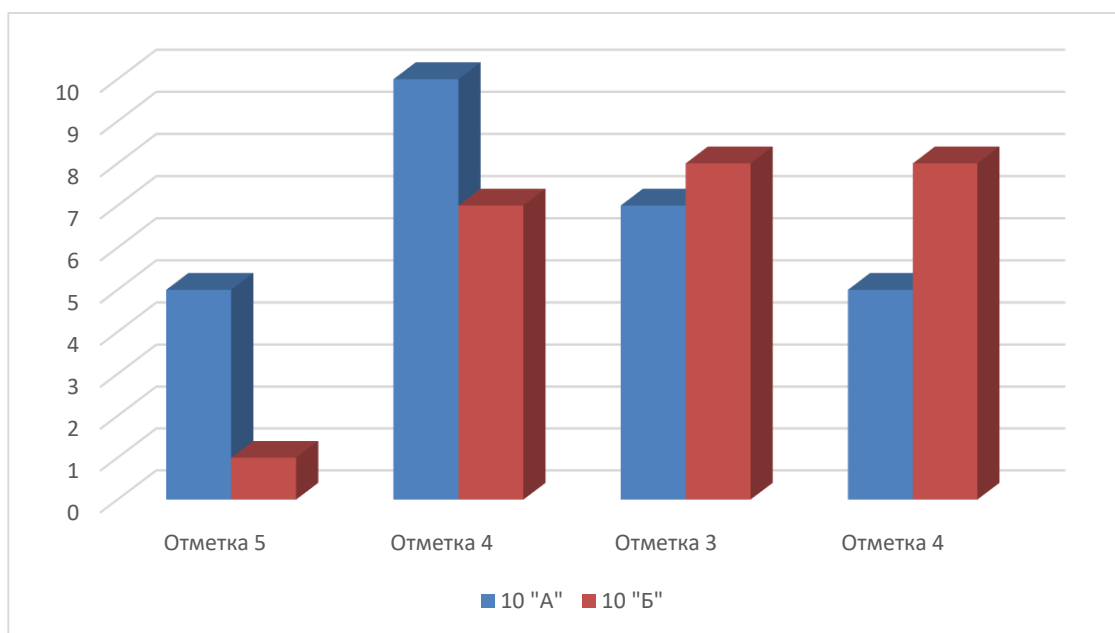


Рисунок 26 – Диаграмма результатов качества обучения

Таблица 8 – Анкета качества обучения по результатам контрольной

Номер задания (задачи)	Правильно и полностью выполнили задание		Ответили верно, но не привели контрпример (пример)		Неправильно выполнили задание		Не приступали к выполнению задания	
	10 А	10 Б	10 А	10 Б	10 А	10 Б	10 А	10 Б
1а	27	26	0	0	0	1	0	0
1б	25	20	2	3	0	3	0	0
1в	26	19	1	4	0	3	0	0
2а	20	17	3	2	4	7	0	0
2б	15	10	2	1	10	13	0	3
3	17	9	0	0	10	6	5	12
4	7	1	0	0	15	13	5	12

Рассчитаем успеваемость, качество знаний, и обученность по результатам контрольной работы для двух классов.

$$\text{Успеваемость} = \frac{\text{кол-во "5"} + \text{кол-во "4"} + \text{кол-во "3"}}{\text{общее количество учащихся}}$$

$$\text{Качество знаний} = \frac{\text{кол-во "5"} + \text{кол-во "4"}}{\text{общее количество учащихся}}$$

$$\text{Обученность} = \frac{\text{кол-во 5} + \text{кол-во 4} \cdot 0,64 + \text{кол-во 3} \cdot 0,36 + \text{кол-во "2"} \cdot 0,16}{\text{общее количество учащихся}}$$

В нашем случае получились следующие результаты (таблица 9):

Таблица 9 – Анкета успеваемости и качества знаний

	Успеваемость	Качество знаний	Обученность
10 «А»	81%	56%	55%
10 «Б»	61%	31%	38%

Для наглядности полученные данные представим графически на рисунке 27.

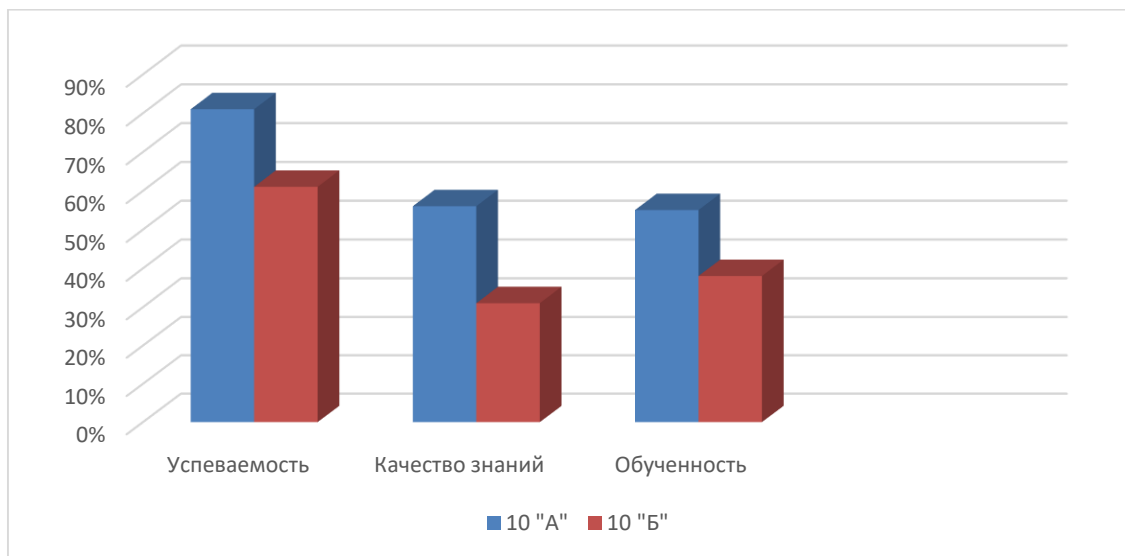


Рисунок 27 – Диаграмма результатов контрольной работы

Таким образом, анализ приведенных результатов позволяет сделать вывод о том, что работа над математическими ошибками проводится в основном только в фронтальной форме работы. Примеры и контрпримеры используют редко в качестве отработки ошибок учащихся на уроках математики. Поэтому использование учителями примеров и контрпримеров

необходимо для обучения старшеклассников работе над математическими ошибками, что подтверждает проведенный нами эксперимент.

Выводы по второй главе

В главе отмечена важная роль отбора самих ключевых задач в процессе реализации технологии работы над ошибками посредством примеров и контрпримеров. Оптимальный набор ключевых задач является наиболее важным для достижения положительных результатов в повышении предметных компетенций обучающихся. В работе приведены примеры ключевых задач, которые являются полезными при изучении работы над собственными математическими задачами.

Предложена система задач (примеров и контрпримеров) по алгебре и началам анализа, а также по геометрии, как средство обучения и самоконтроля над ошибками. Был учтен факт, что наибольший эффект контрпримеров достигается в том случае, когда формулируются два утверждения, в которых условие и заключение переставлены местами, причем больший эффект достигается в том случае, если истинность утверждений неизвестна учащимся.

В целях апробации рассматриваемой системы задач, был предварительно проведен с помощью анкетирования констатирующий этап экспериментальной работы в целях выявления степени понимания школьниками основных теоретических знаний в области понимания типовых ошибок при решения математических задач. Цель констатирующего эксперимента состояла в проверке того, что разработанные нами системы задач будут способствовать уменьшению ошибок учащихся при решении самостоятельных и контрольных работ.

В результате проведения анкетирования учителей были сделаны выводы, что чаще всего на уроках ошибка исправляется учителем. Большинство педагогов проводят фронтальную работу с ошибками учащихся. Учителя используют метод констатации ошибки: ее обнаружение и

исправление. Для предупреждения ошибок учащихся проводится работа по формированию среди учащихся необходимости аргументации на каждого действия при решении задачи.

Также анкетирование показало, что задачи на приведение примеров и контрпримеров не пользуются спросом среди учителей, участвовавших в опросе.

На констатирующем этапе экспериментальной работы преподавателям по завершении курса занятий с помощью анкетирования был задан ряд вопросов. В целом, преподаватели, по итогам оценки домашних и самостоятельных работ посчитали целесообразным учет уровневой дифференциации при составлении заданий и изложении материала.

Была предложена контрольная работа по алгебре и началам анализа учащимся в ходе эксперимента. Анализ приведенных результатов позволяет сделать вывод о том, что работа над математическими ошибками проводится в основном только в фронтальной форме работы. Примеры и контрпримеры используют редко в качестве отработки ошибок учащихся на уроках математики. Поэтому использование учителями примеров и контрпримеров необходимо для обучения старшеклассников работе над математическими ошибками, что подтверждает проведенный нами эксперимент.

Заключение

Анализ научно-методической литературы и проведенное исследование в рамках магистерской диссертации позволили сделать ряд выводов.

1. Формирование перечня математических ошибок и применение его в учебных целях оказывается одним из важных факторов улучшения качества эффективности обучения. В то же время до сих пор не выработано единой классификации математических ошибок. Данный вопрос, не смотря на его обширную изученность в научной литературе, представляется дискуссионным.

2. Реализация проблемного обучения на уроках математики, а именно включение учащихся в процесс разрешения проблемных ситуаций в рамках работы над ошибками в полной мере способствует достижению таких требований к результатам обучения, заявленным в ФГОС ООО и СОО, как формирование познавательных универсальных учебных действий.

Базовыми методами работы над математическими ошибками являются контроль и самоконтроль. Метод контроля допустим, но менее эффективен: педагог занимается, как правило, личным исправлением ошибок, что является крайне неверным решением. Более важным и эффективным является формирование у обучающихся навыков самоконтроля, которое включает способность самостоятельно обнаруживать ошибки, а также умение самостоятельного объяснения ошибки и ее исправления.

3. Важным средством работы над математическими ошибками является объяснение и предупреждение ошибок.

При этом:

– процесс отыскания и исправления ошибок самими учащимися под руководством учителя можно сделать поучительным для учащихся, в результате чего изучение и анализ ошибок становится эффективным средством в развитии познавательного интереса к изучению математики;

– вопрос о математических ошибках в процессе решения заданий из ЕГЭ также требует дополнительной проработки, как на уровне работы с учащимися, так и на уровне методики решения от создателей.

4. В процессе реализации технологии работы над ошибками посредством примеров и контрпримеров важную роль играет отбор самих ключевых задач. Оптимальный набор ключевых задач является наиболее важным для достижения положительных результатов в повышении предметных компетенций обучающихся. В работе приведены примеры ключевых задач, которые являются полезными при изучении работы над собственными математическими задачами.

5. Нами предложена система задач (примеров и контрпримеров) по алгебре и началам анализа, а также по геометрии, как средство обучения и самоконтроля над ошибками. Был учтен факт, что наибольший эффект контрпримеров достигается в том случае, когда формулируются два утверждения, в которых условие и заключение переставлены местами, причем больший эффект достигается в том случае, если истинность утверждений неизвестна учащимся.

6. В целях апробации рассматриваемой системы задач, был предварительно проведен с помощью анкетирования констатирующий этап экспериментальной работы в целях выявления степени понимания школьниками основных теоретических знаний в области понимания типовых ошибок при решения математических задач. Цель констатирующего эксперимента состояла в проверке того, что разработанные нами системы задач будут способствовать уменьшению ошибок учащихся при решении самостоятельных и контрольных работ.

В результате проведения анкетирования учителей были сделаны выводы, что чаще всего на уроках ошибка исправляется учителем. Большинство педагогов проводят фронтальную работу с ошибками учащихся. Учителя используют метод констатации ошибки: ее обнаружение и исправление.

Также анкетирование показало, что задачи на приведение примеров и контрпримеров используются среди учителей, участвовавших в опросе.

7. На констатирующем этапе экспериментальной работы преподавателям по завершении курса занятий с помощью анкетирования был задан ряд вопросов. В целом, преподаватели, по итогам оценки домашних и самостоятельных работ посчитали целесообразным учет уровневой дифференциации при составлении заданий и изложении материала.

8. Учащимся в ходе эксперимента была предложена контрольная работа по алгебре и началам анализа. Анализ приведенных результатов позволяет сделать вывод о том, что работа над математическими ошибками проводится в основном только в фронтальной форме работы. Примеры и контрпримеры используют редко в качестве отработки ошибок учащихся на уроках математики. Поэтому использование учителями примеров и контрпримеров необходимо для обучения старшеклассников работе над математическими ошибками, что подтверждает проведенный нами эксперимент.

Список используемой литературы и используемых источников

1. Азиев И.К. Индивидуальные задания для устранения ошибок// Математика в школе. 1993.№5.С.9-12.
2. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы: учеб. для общеобразоват. учреждений: базовый уровень / [Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин, М.В. Ткачев и др.].М.: Просвещение. 2018.464с.
3. Алгебра и начала анализа: Учеб. для 10–11 кл. общеобразоват. учреждений. /А.Н. Колмогоров, А.М. Абрамов, Ю.П. Дудницын и др.; Под. ред. А.Н. Колмогорова. М.: Просвещение, 2001. 384 с.
4. Алгебра и начала математического анализа.11 класс.: учеб. для общеобразоват. учреждений: базовый и профил. уровни / [Ю.М. Колягин, М.И. Шабунин]; под ред. А.Б. Жижченко.2-е изд.-М.: Просвещение, 2010.336 с.
5. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс: учеб.для общеобразоват. учреждений: базовый и профил. уровни / [С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин].8-е изд.М: Просвещение, 2009.430 с.
6. Ангелов Д.С. Анализ ошибок по алгебре в знаниях учащихся и пути их устранения и предупреждения: дис. ... канд. пед. наук: 13.00.02 / М., 1980. 271 с.
7. Арутюнян Е.Б. Упражнения для предупреждения ошибок // Математика в школе. 1983. №4. С. 24-28.
8. Асанов Р.А. Работа над ошибками при обучении математике // Из опыта преподавания математики в школе:Пособие для учителей./ Сост.: А.Д. Семушин, С. Б. Суворова. М.: Просвещение, 1978. 365 с.
9. Блинова Т.Л. Задачи как средство формирования познавательных универсальных учебных действий учащихся основной школы в процессе обучения математике / Т.Л. Блинова, Н.А. Макарова// Актуальные научные проблемы. Рассмотрение, решение, практика. Вроцлав, 2014. С. 168.

10. Брадис В.М. Ошибки в математических рассуждениях / В.М. Брадис, В.Л. Минковский, А.К. Харчена. М.: Учпедгиз, 1959. 176с.
11. Бронникова Л.М. Типичные ошибки при решении задачи 16 участниками ЕГЭ по математике профильного уровня в Алтайском крае и пути их преодоления / Л. М. Бронникова, И. В. Кисельников, О. А. Тыщенко // Современные проблемы науки и образования. 2015. № 5. URL: <http://www.scienceeducation.ru> (дата обращения: 19.03.2022)
12. Валиев С. Индивидуальные задания по устранению ошибок / С. Валиев // Математика в школе. 1989. № 5. С. 42-46.
13. Валиева Н.Е. Примеры и контрпримеры как средство обучения старшеклассников работе над математическими ошибками// Вестник магистратуры. 2022. № 5(3). С. 84-86.
14. Валиева Н.Е. Принципы проектирования системы задач (примеров и контрпримеров) как средство обучения работе над ошибками// Вестник магистратуры. 2022. № 5(3). С. 87-89.
15. Векслер С.И. Найти и преодолеть ошибку / С.И. Векслер // Математика в школе. 1989. №5. С. 40.
16. Гелбаум Б. Контрпримеры в анализе / Б. Гелбаум, Дж. Олмстед. М.: Мир, 1967. 784 с.
17. Григорян Г.В. Исследование причин возникновения и методика предупреждения ошибок учащихся: Автореф. дис. .канд. пед наук. Баку, 1981. 16с.
18. Груденов Я.И. Психологический анализ причин некоторых массовых ошибок учащихся /Я.И. Груденов// Математика в школе. 1981. №3. С. 46-48.
19. Груденов Я.И. Совершенствование методики работы учителя математики: Кн. Для учителя / Я.И. Груденов. М.: Просвещение, 1990. 224 с.
20. Далингер В.А. Критическое мышление учащихся и его развитие средствами примеров и контрпримеров по математике/ В.А. Далингер. URL: <http://lib.omgpu.ru/FullText/Далингер8.pdf> (дата обращения: 12.06.2022)

21. Далингер В.А. Типичные ошибки по математике на вступительных экзаменах и как их не допускать/ В.А. Далингер // Упр. нар. образования Омского облсполкома, Обл. ин-т усоверш. учителей. Омск: Омский обл. ИУУ, 1991.129с.

22. Дука Н.И. Ошибки учащихся при изучении математики, их предупреждение и объяснение / В.А. Далингер. URL:<https://nsportal.ru/shkola/algebra/library/2013/08/20/oshibki-uchashchikhsya-pri-izuchenii-matematiki-ikh>(дата обращения: 12.06.2022)

23. Зайцева С.Е. Деятельность учителя математики по предупреждению ошибок / С.Е. Зайцева. URL:<https://megatalant.com/biblioteka/doklad-deyatelnost-uchitelya-matematiki-po-preduprezhdeniyu-oshibok-85008.html>(дата обращения: 12.06.2022)

24. Зайкин М.И. Провоцирующие задачи / М.И. Зайкин, В.А. Колосова // Математика в школе. 1997. №6. С. 32.

25. Карнацевич В.С. Система текущего учета знаний, умений и навыков по геометрии в средней школе / В.С. Карнацевич// Ученые записки. Том 4.Выпуск 2. Тюмень.1958.183 с.

26. Колосова В.А. Совершенствование системы методической работы с математическими ошибками школьников / В.А. Колосова. Арзамас, 1997. 192 с.

27. Концепция развития математического образования.URL: <https://docs.edu.gov.ru/document/b18bcc453a2a1f7e855416b198e5e276/>(дата обращения: 12.06.2022).

28. Кузнецов В.А. О некоторых типичных ошибках учащихся, связанных с вопросами алгебраической пропедевтики / В.А. Кузнецов // Начальная школа. 1974.№2.С.31

29. Куприянова М.А. Составление математических задач как инструмент развития универсальных учебных действий на уроках математики основной школы / М.А. Куприянова // Известия Российского

государственного педагогического университета имени А.И. Герцена. СПб., 2012. N 150.С. 207-212.

30. Кучумова Р.Г. Проблемная ситуация как фактор развития всех видов модальности восприятия / Р.Г. Кучумова, Л.С. Чечулина // Педагогическое образование в России. 2013.№ 6. С.65-67.

31. Лабораторные и практические работы по методике преподавания математики / Е.И. Лященко, К.В. Зобкова, Т.Ф. Кириченко и др.; под ред. Е.И. Лященко.М.: Просвещение, 1988.223 с.

32. Ларина Л.Н. О работе над ошибками при обучении математике / Л.Н. Ларина.URL: <https://urok.1sept.ru/articles/569401>(дата обращения: 12.06.2022)

33. Линцман В. Где ошибка? / В. Линцман. Пер. с нем. Б.С. Виленской. Под. ред. В.Г. Болтянского. М., Физматгиз, 1962.192с.

34. Майкова Н.С. Виды ошибок учащихся при обучении решению геометрических задач, их причины и способы предупреждения / Н.С. Майкова// Известия Российского государственного педагогического университета им. А.И. Герцена. 2008. № 73-2. С.118-120.

35. Майкова Н.С. Провоцирующие задачи как средство предупреждения ошибок учащихся в обучении математике / Н.С. Майкова // Известия Российского государственного педагогического университета имени А.И.Герцена. Аспирантские тетради. СПб., 2007. N 17(43), ч.2: Педагогика и психология, теория и методика обучения. С.152–157.

36. Майорова Н.Л. Математическая составляющая единого государственного экзамена / Н.Л. Майорова, Г.В. Шабаршина// Проблемы теории и практики обучения математике: Сборник научных работ, представленных на Международную научную конференцию «69 Герценовские чтения». СПб.: Изд-во РГПУ им. А.И. Герцена, 2016. С. 75-78.

37. Марковская Н.В. Выявление и устранение пробелов в знаниях, умениях и навыках обучающихся – одно из основных условий повышения качества обучения / Н.В. Марковская. С.п. Покур, 2016. 23 с.

38. Майергойз Д.М. К изучению математических ошибок учащихся / Д.М. Майергойз // Математика в школе. 1950. №1. С. 15-24.

39. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. Углубленный уровень. 10 класс.: учебник / Г.К. Муравин, О.В. Муравина. М.: Дрофа, 2018. 318 с.

40. Метельский Н.В. Психолого-педагогические основы дидактики математики / Н.В. Метельский. Минск. Высшая школа, 1997. 176с.

41. Методика развивающего обучения математике : учеб. пособие для СПО / В.А. Далингер, Н.Д. Шатова, Е.А. Кальт, Л.А. Филоненко ; под общ. ред. В. А. Далингера. 2-е изд., испр. и доп. М. : Издательство Юрайт, 2019. 297 с.

42. Мордкович А.Г. Алгебра и начала математического анализа. 10 – 11 классы. В 2 ч. Ч. 1 Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений (базовый уровень) / А.Г. Мордкович. 10-е изд., стер. М.: Мнемозина, 2009. 399 с.

43. Мугаллимов С.Р. О типичных ошибках обучающихся по математике.

URL:http://abiturient.surgpu.ru/media/medialibrary/2015/03/Статья_Мугаллимов_a.pdf(дата обращения: 12.06.2022)

44. Невмержицкая Т.А. Проблемное обучение как средство формирования познавательных универсальных учебных действий обучающихся основной школы в предметной области «математика» /Т.А. Невмержицкая, Т.Л. Блинова// Актуальные вопросы преподавания математики, информатики и информационных технологий. 2017. № 2. С. 237-240.

45. Общая психология: учеб.-метод. пособие / М.В. Гамезо, В.С. Герасимова, Д.А. Машурцева, Л.М. Орлова. М., 2018. С. 40-51.

46. Очередыко О.А. Предупреждение и устранение типичных ошибок и познавательных затруднений учащихся при обучении математике /

О.А. Очерedyкo.

URL:<https://nsportal.ru/shkola/matematika/library/2016/08/18/preduprezhdenie-i-ustranenie-tipichnyh-oshibok-i-poznavatelnyh>(дата обращения: 12.06.2022)

47. Пидкасистый П.И. Педагогика: учебник и практикум для СПО / П.И. Пидкасистый ; под ред. П.И. Пидкасистого. 4-е изд., перераб. и доп. М. : Издательство Юрайт, 2019. 408 с.

48. Психология обучения без огорчения: Книга для начинающего учителя. Р.В.Майнер. Глазов, 2010. 354 с.

49. Пучков Н.П. Роль контрпримеров в обеспечении качества предвузовской математической подготовки / Н.П. Пучков, Е.А. Петрова URL: http://www.naukapro.ru/konf2006/2_018.htm(дата обращения: 12.06.2022)

50. Рубинштейн С.Л. Основы общей психологии / С.Л. Рубинштейн.СПб.: Питер, 2002. 720 с.

51. Рыжик В.И. 25000 уроков по математики: Кн. для учителя / В.И. Рыжик. М.: Просвещение, 1993.238 с.

52. Скрыпник Д.С. Математические ошибки в рассуждениях, их предупреждение и методика исправления: Дис. . канд. пед. наук / Д.С. Скрыпник.Киев,1971.180с.

53. Саранцев Г.И. Методика обучения математике в средней школе [Текст]: Учеб пособие для студентов мат. спец. пед. вузов и ун-тов / Г.И. Саранцев. М.: Просвещение, 2017. 224 с.

54. Свиридова И.Ю. Организационно-педагогические условия предупреждения математических ошибок / И.Ю. Свиридова // Фундаментальные науки и образование : Материалы II международной научно-практической конференции, Бийск, 02–05 марта 2014 года / Ответственный редактор И.В. Старовикова. Бийск: Алтайская государственная академия образования имени В.М. Шукшина, 2014. С. 452-456.

55. Смирнов А.А. Произвольное и произвольное запоминание / А.А. Смирнов. URL: <http://www.psychology-online.net/articles/doc-1298.html>(дата обращения: 12.06.2022)
56. Тарасова О.А. Предупреждение типичных ошибок учащихся в процессе обучения алгебре посредством формирования и использования рефлексивной деятельности / О.А.Тарасова. Новосибирск, 2004.189 с.
57. Толковый словарь русского языка / Под ред. Д.Н. Ушакова. М.: Гос. ин-т «Сов. энцикл.»; ОГИЗ; Гос. изд-во иностр. и нац. слов., 1935–1940. (4 т.)
58. Тупиков В.А. Ошибки в решении конкурсных задач на вступительных экзаменах по математике / В.А. Тупиков.3-е изд.Минск:Выш. шк., 1972.88с.
59. Федеральные государственные общеобразовательные стандарты среднего общего образования (10-11 класс). URL: <https://fgos.ru/>(дата обращения: 12.06.2022)
60. Фридман Л.М. Психолого-педагогические основы обучения математике в школе: Учителю математики о педагогическое психологии / Л.М. Фридман. М.: Просвещение, 1983.160с.
61. ХаламайзерА.Я. Из опыта работы Хазанкина Р.Г. / А.Я. Халамайзер// Математика в школе. 1987. № 4. С. 16-21.
62. Халперн Д. Психология критического мышления / ДайанаХалперн; [Пер. с англ. Н. Мальгина и др.]. 4-е междунар. изд. СПб: Питер, 2000.503с.
63. Чошанов М. В поисках новой методики или на ошибках учимся / М. Чошанов// Народное образование. 1989.№4. С.70-74.
64. Чукотаев М.Н. Устойчивые ошибки учащихся по алгебре и началам анализа и способы их устранения: дис. канд. пед. наук / М.Н. Чукотаев.Усть-Каменогорск, 1992. 387 с.

65. Шибинский В.М. Примеры и контрпримеры в курсе математического анализа / В.М. Шибинский. М.: Высшая школа, 2007. Серия «Для высших учебных заведений». Математика. 367 с.
66. Штейнмец А.Э. Общая психология : учебное пособие / под общ.ред. Н.П. Ансимовой / А.Э. Штейнмец. Ярославль : Изд-во ЯГПУ, 2013. 587 с.
67. Щетников А.И. Роль контрпримеров в развитии основных понятий математического анализа / А.И. Щетников, А.В. Щетникова. Новосибирск: АНТ, 1999. 465 с.
68. Ярский А.С. Что делать с ошибками / А.С. Ярский// Математика в школе. 1998. №2. С. 8-14.
69. Ященко И.В. Методические рекомендации для учителей, подготовленные на основе анализа типичных ошибок участников ЕГЭ 2019 года по математике / И.В. Ященко, И.П. Высоцкий, А.В. Семенов. – URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/metodicheskie-rekomendatsii-dlya-uchiteley-podgotovlennye-na-osnove-analiza-tipichnyh-oshibok-uchastnikov-ege-2019-goda-po-matematike>(дата обращения: 12.06.2022)
70. Romano J. P., Siegel A. F. Counterexamples in probability and statistics. Chapman & Hall, NY, 1986.
71. Wise G. L., Hall E. B. Counterexamples in probability and real analysis. Oxford UP, 1993.
72. Bernard R. Gelbaum, John M.H. Olmsted. Theorems and Counterexamples in Mathematics. Springer-Verlag, 1993.
73. Jordan M. Stoyanov. Counterexamples in Probability. Dover Publications, 2014
74. Richard Shedenhelm. The Real Logarithm: Theorems and Counterexamples. CreateSpace, 2015.

Приложение А

Соотнесение видов деятельности обучающихся на этапах проблемного урока и результатов формирования навыков работы над ошибками



Рисунок А.1 - Соотнесение видов деятельности обучающихся на этапах проблемного урока и результатов формирования навыков работы над ошибками