

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Тольяттинский государственный университет»

Институт Математики, физики и информационных технологий
(наименование института полностью)

Кафедра «Прикладная математика и информатика»
(наименование)

01.03.02 Прикладная математика и информатика

(код и наименование направления подготовки, специальности)

Компьютерные технологии и математическое моделирование
(направленность (профиль)/специализация)

**ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
(БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА)**

на тему Реализация алгоритмов построения фрактальных объектов

Обучающийся

А.А Негодин

(Инициалы Фамилия)

(личная подпись)

Руководитель

к.ф.-м.н., Г.А. Тырыгина

(ученая степень (при наличии), ученое звание (при наличии), Инициалы Фамилия)

Консультант

к.п.н., Т.С. Якушева

(ученая степень (при наличии), ученое звание (при наличии), Инициалы Фамилия)

Аннотация

Тема бакалаврской работы: «Реализация алгоритмов построения фрактальных объектов».

Работа выполнена студентом Тольяттинского государственного университета, института математики, физики и информационных технологий, группы ПМИб-1802а, Негодиным Алексеем Андреевичем.

Выпускная квалификационная работа посвящена исследованию методов генерации и анализа фрактальных объектов и разработке программного кода, реализующего их.

В данной работе реализованы методы: метод Фурье для генерации фрактального ряда, и метод R/S анализа для анализа фрактальной размерности.

Объект исследования – фрактальные объекты.

Предмет исследования – компьютерное моделирование фрактальных объектов.

Цель бакалаврской работы – разработать программную реализацию задачи моделирования фрактального объекта.

Для достижения цели работы необходимо решить следующие задачи:

1. Выявить алгоритмы генерации фрактальных временных объектов;
2. Разработать и протестировать программу для моделирования и анализа фрактального временного ряда;

Бакалаврская работа представлена на 47 страницах, включает 10 иллюстраций, 30 формулы, список используемой литературы, состоящий из 20 источников.

ABSTRACT

The title of the graduation work is « Implementation of algorithms for constructing fractal objects».

The senior paper consists of an introduction, three parts, a conclusion, list of references including foreign sources.

We start with the statement of the problem, then follow through with its possible solutions, and give full coverage to generation of a fractal time series by the Fourier method and analysis of the fractal coefficient by R/S analysis.

The key issue of the graduation work is the creation of a fractal object

The aim of the work is to development of a fractal object modeling algorithm.

The graduation work may be divided into several logically connected parts which are: Theoretical foundations for the construction of fractal objects; Algorithms for the construction of fractal time series; Software implementation and testing.

The first part describes fractal dimension determination problem, its history

The second part describes algorithms for the solution fractal dimension determination problem, all existing solutions.

The third part of the work considers the development of the application that solves the fractal dimension determination problem and modeling fractal curve. It contains the implementation of the algorithm, and test results.

At the end of the study, as a result, a program code was developed, described and tested to solve the problem of constructing a fractal object by the Fourier method.

The graduation work consists of an explanatory note on 40 pages, an introduction on 2 pages, including 10 figures, a list of 20 references, including 5 foreign sources and one appendices

Оглавление

Введение	5
Глава 1 Теоретические основы фрактальных объектов.....	7
1.1 Свойства фрактальных Объектов	7
1.2 Фрактальная размерность	9
1.3 Показатель Хёрста	15
1.4 Фрактальные временные ряды.....	17
Глава 2 Алгоритмы представления фрактальных временных рядов	20
2.1 Методы модельного представления фрактальных временных рядов...	20
2.2 Метод смещения средней точки	20
2.3 Метод Фурье	21
2.4 Метод обобщённого броуновского движения.....	22
2.5 Методы анализа размерности	23
2.6 Метод Ричардсона	24
2.7 Метод Минковского	25
2.8 Метод нормированного размаха	27
Глава 3 Программная реализация и тестирование	30
3.1 Описание структуры программы	30
3.2 Реализация метода генерации фрактального временного ряда.....	30
3.3 Реализация метода анализа фрактальной размерности	34
Заключение	37
Список используемой литературы	38

Введение

С незапамятных времен сама идея о том, что какие-то объекты природы, или процессы, протекающие в ней, могут быть подобны изнутри, и с того времени она не покидала людей. Сама по себе мысль о том, что нечто несоизмеримо крупное может быть вложено в нечто малое, требовало от ученых изменения уже давно устоявшихся представлений в геометрии. При описании различных геометрических свойств объектов как правило обходятся простыми фигурами: линией, плоскостью, многоугольником, кругом, сферой, квадратной поверхностью и коническим сечением, или их комбинациями. Также существуют различные системы, в которых предсказание поведения не представляется возможным, так как в них имеют место быть различные хаотические скачки, во всех возможных направлениях, из-за этого данные системы никогда не упорядочиваются в какую-либо логическую последовательность. Системы имеющие такие свойства обычно именуются хаотичными. Как примером для таких систем можно выделить системы прогнозирования погоды, системы поведения различных характеристик финансовых рынков, ритм сердца или мозга, представление на кардиограмме и многие прочие.

Фрактал - это такое множество, в котором его части совпадают, т. е. имеют похожую или одинаковую структуру. Само название «фрактал» в переводе с латинского «fractus» значит деленый, сломанный, разбитый на куски, а термин же впервые был использован Б. Б. Мандельбротом ещё в 1975 году. Математически точное понятие фрактала отделяет объекты, которые имеют структуры разнообразных масштабов (от малых до крупных), таким образом отражают принцип организации. Благодаря тому, что развитие фрактальной геометрии происходит довольно интенсивно, возникновение новых определений фракталов, от строго математических, до метафорических абсолютно закономерно. Для обработки сигналов и изображений численным признаком зачастую применяется фрактальная размерность, как коэффициент нерегулярности графика.

Динамические процессы так же обладают фрактальной природой. Это все указывает на важность темы исследования.

Объект исследования: фрактальные объекты.

Предмет исследования: компьютерное моделирование фрактальных объектов с использованием метода Фурье и анализ фрактальной размерности.

Цель данной работы — разработать и протестировать программную реализацию генерации фрактального объекта.

Для реализации поставленной цели, необходимо выполнить следующие задачи:

Задачи:

- 1) Выявить алгоритмы генерации фрактальных объектов.
- 2) Разработать и протестировать программу для моделирования и анализа фрактального объекта.

Глава 1 Теоретические основы фрактальных объектов

1.1 Свойства фрактальных Объектов

«Понятие фрактала впервые было использовано Бенуа Мандельбротом в 1975 году, но известность он получил лишь в 1977 году с выходом его книги «Фрактальная геометрия природы». Именно поэтому самого Мандельброта считают отцом фрактальной геометрии.

Сущность фрактальной геометрии, как говорил сам Мандельброт, — представление геометрии объектов, которые, не имеют своей геометрии.

Фрактал — это сложное математическое понятие, базирующееся на «размерности» естественного объекта. Однако в природе имеется множество объектов, имеющие данные особенности — снежинки, облака, корни деревьев и растений, горный рельеф, река, береговая линия и прочие.

Как писал сам Мандельброт: «Фракталы — это математические, природные или созданные человеком объекты, которые мы называем неправильными, шероховатыми, пористыми или раздробленными, причём этими свойствами обладают фракталы в одинаковой степени в любом масштабе. Можно сказать, что форма этих объектов не изменятся от того, смотрим ли мы на них вблизи или издали». Достаточно просто понять, что одним из ключевых свойств фрактала Мандельброт акцентировал внимание на масштабную инвариантность.»[23]

Объекты, которые возможно образовать, используя только изменённые части более крупного объекта являются простым примером инвариативности, причем преобразования над объектами могут быть произведены практически любые, например, перенос, поворот, разные осевые симметрии, так же допускается наложение объектов друг на друга «Самым популярным объектом в математике, имеющим свойство инвариантности является снежинка Коха. На рисунке 1.1 представлены начальные шаги построения снежинки Коха: берётся равнобедренный треугольник, каждая его грань разделяется на три равные части и центральная часть заменяется подобным

треугольником меньшего размера. Представленный алгоритм может повторяться бесконечное количество раз. На рисунке 1.1 продемонстрированы первые четыре шага алгоритма. »[3]

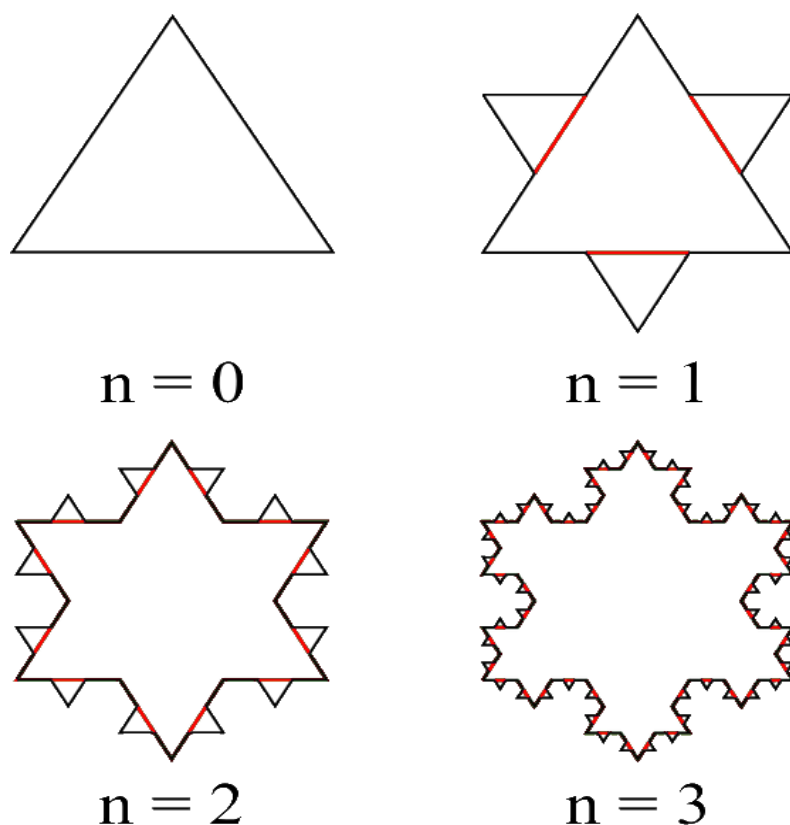


Рисунок 1.1 — Первые четыре шага построения снежинки Коха
 «Обычно самоподобные (регулярные) фрактальные объекты являются искусственными, из-за того, что в природе они не встречаются.

Настоящие фрактальные объекты имеют более сложные признаки само подобия — самоаффиность» [10]. «Отличием от ненастоящих в них является то, что они не являются строго самоподобными, а также не имеют свойства бесконечной делимости, то есть не обладают бесконечно большими и бесконечно малыми частями. Фрактал имеет признак самоаффиности в том случае, если при «разложении» его на части по пространственным осям, построение происходит с различными коэффициентами. Это значит, что оси между собой не эквивалентны, а значит и отвечают различным физическим величинам. Обычным примером самоаффинных фракталов является

временная зависимость броуновской частицы, фрактальные временные ряды и так далее.»[9]

«Так же фракталы имеют свойство дробной размерности, которая должна быть больше топологической» [1]. Это свойство причисляется к фрактальной размерности.

Одним из самых важных свойств фрактала можно считать его способ построения, ведь любой фрактал можно построить благодаря рекурсивным процедурами

«Для количественного описания фракталов достаточно только одной величины — размерности Хаусдорфа. Этот коэффициент описывает неизменяемость геометрии или статистических характеристик при изменении масштаба. Впрочем, в биологии, химии, физике и даже в телекоммуникационных отраслях зачастую встречаются явления, требующие распространения понятия фрактала для описания более сложных структур, которые имеют более одного показателя Хаусдорфа. Эти структуры, обычно характеризуются сразу спектром показателей, где размерность Хаусдорфа всего лишь одна из многих величин. Для таких фракталов был придуман термин «мультифракталы»» [3][19].

1.2 Фрактальная размерность

Для того что бы начать описание фрактальной размерности следует обратиться к такому понятию как топологическая размерность.

«Топологическая размерность геометрической фигуры — это число координат, требуемых для нахождения положения, лежащей на этой фигуре точке. Можно просто определить, что для определения размерности точки необходимо только одна координата, для плоскости две, а для объёмной фигуры три. Из этого можно сделать вывод: размерность некой n - мерной фигуры всегда выражена целым числом.

Метрической размерностью является число, выражающее отношение между измеряемым размером фигуры и единицей, лежащей в основе $N(\delta)$ измерения. Фактически, метрическая размерность некой фигуры будет равна количеству вмещающихся в неё объектов δ . Например, возьмём прямую: для расчёта её метрической размерности определяют количество сантиметров, метров, миллиметров и т.д, содержащихся в ней. Для расчёта площади измеряется количество единичных квадратов, помещающихся в фигуру. Но при уменьшении единиц измерения, метрическая размерность всегда увеличивается, и наоборот: при увеличении единиц измерения, метрическая размерность уменьшается для простейшего случая можно вывести формулу расчёта размера фигуры

$$N \delta = (1/\delta)^D, \quad (1)$$

где δ — количество покрывающих фигуру метрических объектов;

D — метрическая размерность.» [19]

«То есть если, начать измерять плоскую фигуру, в метрах ($\delta = 1$), а затем последовательно заменять метры меньшими частями, то и δ будет менять значения на $\delta = 1/10, \delta = 1/100$ и так далее. При этом, для линии всегда будет выполняться равенство $N(\delta) = (1/\delta)^1$, для плоскости $N(\delta) = (1/\delta)^2$ и так далее. Таким образом, можно легко выделить метрическую размерность для разных объектов: для линии размерность будет равна единице, для плоскости двойке, для объёмных же фигур трём и так далее» [18].

«Если размерность некого объекта выражается целым числом в одном масштабе, то при переходе к меньшим или более крупным значениям δ , размер объекта не меняется, тогда как для фракталов данное правило не действует.

Примером данного явления может послужить береговая линия, так как она имеет огромное количество разного рода выступов и впадин, поэтому она имеет фрактальную природу. Если мы попытаемся замерить длину всех её извилин, то это значение будет изменяться при увеличении масштаба, так

как проявятся новые, более мелкие, извилины. Например, если мы измерим длину некой береговой линии, то изменение масштаба приведёт к тому, что это значение изменится, а значит, длина береговой линии в различных масштабах всегда будет отличаться.

Этот эффект возникает из-за того, что при изменении масштаба мы можем учитывать лишь те извилины, которые больше или равны единице измерения. Это значит, что длина некоторой береговой линии в метрах, к примеру, будет равняться 126 метрам, при этом же при увеличении масштаба (уменьшении единицы измерения) длина этой же линии будет равна, например, 134213 миллиметрам.»[11]

«Линии, меняющиеся при изменении масштаба, являются промежуточным элементом между математической линией и плоскостью, при том что их размерность лежит в промежутке $1 < n < 2$. Когда единица измерения δ устремляется к нулю, то размер фигуры $N(\delta)$ асимптотически приближается к величине n^{-D} , что может быть записано следующим образом:

$$N(\delta) \sim (1/\delta)^D \quad (2)$$

Размерность D обладает следующим математическим смыслом: она указывает на то, как равномерно элементы множества размещаются во всей области пространства, и заполняют его. Например, для некоторой линии на плоскости значение фрактальной размерности D будет стремиться к единице, что будет означать «гладкость» множества, а при ярко выраженной извилистости и изрезанности некоторого множества в различных масштабах указывает на то, что значение D стремиться к двойке.» [15]

Таким образом, возможно утверждать, что размерность D является методом определения размерности фрактального множества в пространстве.

«Существует множество подходов для расчёта размерности фрактальных множеств, но все они тем или иным образом опираются на размерность Хаусдорфа, которая может быть рассчитана по формуле

$$D = -\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln N(\delta)}{\ln 1/\delta} \quad (3)$$

где $N(\delta)$ — минимальное количество n -мерных условных единиц полностью покрывающих множество;

δ — размер отдельно взятой условной единицы.

Эту зависимость Феликс Хаусдорф вывел в 1919 году» [6].

Пример вычисления размерности Хаусдорфа на двумерном множестве представлен на рисунке 1.2.

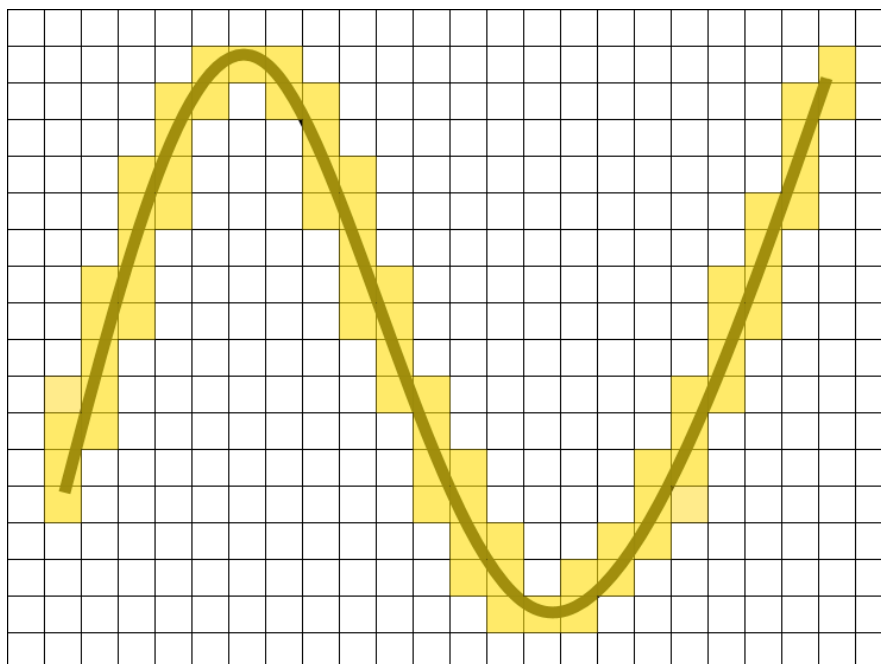


Рисунок 1.2 — Пример вычисления размерности Хаусдорфа

«При изменении масштаба меняется и сетка построения, а значит, меняется и количество единичных кубов, находящихся в множестве. Следовательно, для нахождения наиболее точного значения размерности требуется иметь минимально возможный масштаб сетки.

Существуют и иные виды размерности, например, такая как размерность Минковского. Эта размерность иногда обозначается как «грубая размерность» ограниченного множества в метрическом пространстве. Расчёт данной размерности происходит по формуле

$$D = -\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln N_\delta}{\ln \delta} \quad (4)$$

где N_δ — минимальное число множеств диаметра δ , которыми может быть покрыто множество.

Если предел не существует, то в этом случае необходимо рассматривать верхний и нижний пределы и говорить соответственно о верхней и нижней размерности Минковского.

Эта размерность тесно связана с размерностью Хаусдорфа, хоть и существуют некоторые множества, для которых они различаются, но во многих случаях эти размерности совпадают, поэтому говоря о размерностях, обычно не имеет значение, какая размерность имеется в виду» [7].

«Иногда размерность Минковского называют размерностью дробной, впрочем, дробность D не является единственным требуемым условием фрактальности. Имеются фрактальные объекты, размерность которых может быть выражена целым числом. Как было сказано ранее, Мандельброт выделял ключевое условие фрактала: что размерность D должна быть строго больше топологической размерности» [9].

Минковский предложил теорию с обобщением размерности для компактного множества $A \subset R^n$. Данная теория может быть показана наглядно с помощью аппроксимации A через объединение шаров и суммированием их объёмов и мер (рисунок 1.3)

«Пусть $N(\varepsilon)$ — минимальное число шаров радиуса ε , требуемых для

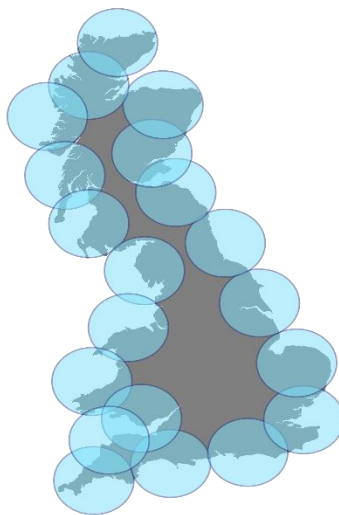


Рисунок 1.3 — Аппроксимация A через объединение шаров размерностью Минковского

покрытия множества A . Тогда мера D множества A , которую мы обозначим через $B_d(A)$, должна приближённо удовлетворять условию

$$B_d A \propto N \varepsilon \varepsilon^D \quad (5)$$

Предполагая, что $B_d A > 0$ есть возможность догадаться, что для некоторого $C > 0$ будет верно равенство

$$N \varepsilon \approx \frac{C}{\varepsilon^D} \quad (6)$$

Прологарифмировав левую и правую части, получаем следующее выражение

$$\log N \varepsilon \approx \log C - D \log \varepsilon \quad (7)$$

которое записывается как

$$D = -\frac{\log N \varepsilon}{\log \varepsilon} + \frac{\log C}{\log \varepsilon} \quad (8)$$

Так как $\log \varepsilon \rightarrow -\infty$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, то размерность Минковского для множества A должна удовлетворять равенству (9).

$$D = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N \varepsilon}{\log \varepsilon} \quad (9)$$

Если предел существуют, то можно сказать, что выражение (9) определяет размерность Минковского для множества A » [11].

«Для примера измерим размерность Хаусдорфа для снежинки Коха, представленной на рисунке 1.1, для которой n — это шаг построения снежинки. За единицу измерения возьмём сторону квадрата, который будет получаться на каждом шаге построения.

На рисунке 1.4 изображена пятая итерация кривой Коха. При расчете размерности было использовано три масштаба.

Для верхней сетки на картинке 1.4 длина отрезка равна единицы (так как вся кривая была взята как единичный отрезок), а разбита она на девять равных частей, поэтому $\delta = 1/9$. Всего закрашено 12 квадратов, поэтому после подстановки $D \approx 1.1410$.

На средней сетке рисунка 1.4 разбиение выполнено на 18 частей. Теперь значение $\delta = 1/18$, а количество «закрашенных» квадратов равно 30. Отсюда получаем значение $D \approx 1.1806$.

На нижней сетке рисунка 1.4 разбиение выполнено на 36 частей. Значение $\delta = 1/36$, количество занятых фракталом клеток равно 72. Итого получаем значение $D \approx 1.2033$.»[12]

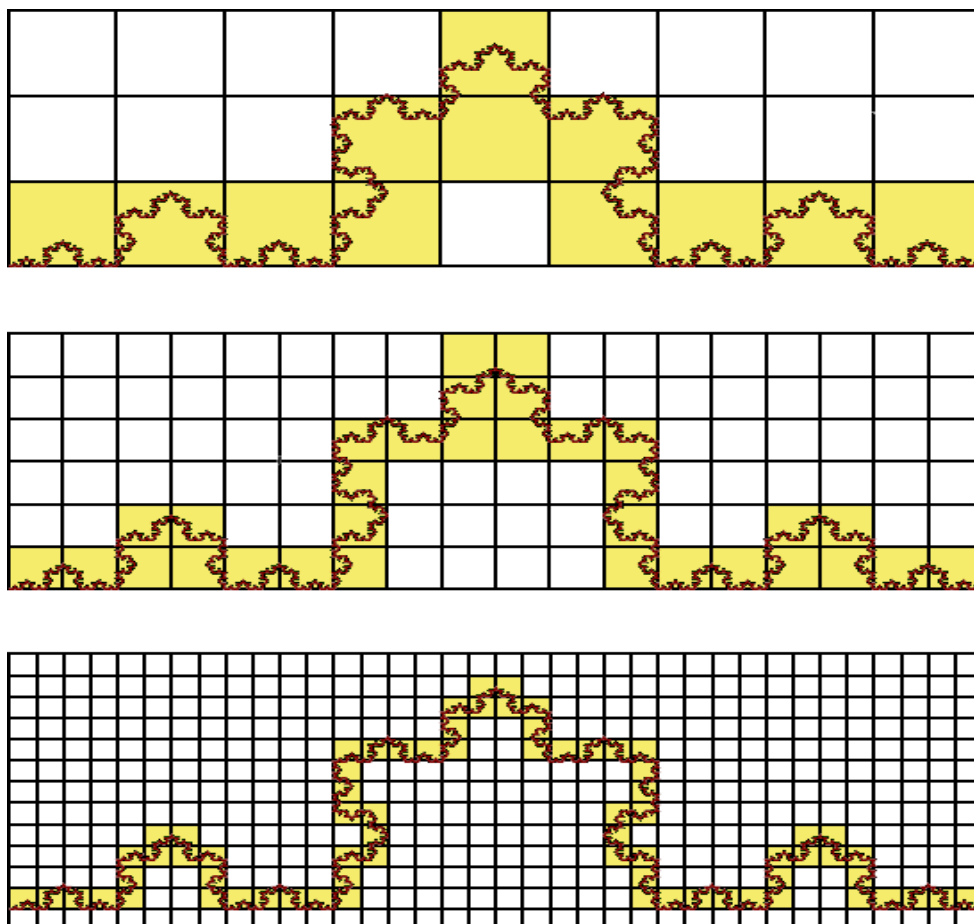


Рисунок 1.4 — Пятая итерация построения снежинки Коха в трёх масштабах

1.3 Показатель Хёрста

«Показатель Хёрста, или показатель степени Хёрста, или коэффициент Хёрста — это мера, используемая в анализе временных рядов. Этот показатель был открыт Гарольдом Эдвином Хёрстом, когда он решил проверить свое предположение о том, что неуправляемая часть системы следует случайным блужданиям.

Коэффициент Хёрста является очень устойчивым, благодаря чему он и получил свою популярность. Коэффициент содержит малое число предположений о изучаемой системе, а также позволяет выполнить

классификацию временного ряда — случайные фрактальные временные ряды или неслучайные.

Показатель Хёрста определяется в терминологии асимптотического поведения некоего диапазона как функция отрезка времени некоего временного ряда отношением

$$E \frac{R(n)}{S(n)} = C n^H, n \rightarrow \infty \quad (10)$$

где $R(n)$ — размах накопленных отклонений первых значений от среднего значения ряда;

$S(n)$ — стандартное отклонение;

$E [x]$ — математическое ожидание;

n — величина промежутка времени;

C — константа.

Точность коэффициента Хёрста напрямую зависит от длины временного ряда: чем ряд длиннее, тем точнее будет рассчитан коэффициент.

Показатель Хёрста напрямую связан с фрактальной размерностью D формулой

$$D = 2 - H \quad (11)$$

где D — оценка степени изломанности ряда (фрактальная размерность);

H — показатель Хёрста.

Мандельброт в своей книге доказал, что с помощью коэффициента Хёрста так же можно вывести размерность пространства вероятностей, которую он обозначил как A и предложил формулу для ее расчета

$$A = 1/H \quad (12)$$

Из этих данных возможно предположить вариацию фрактальной размерности:

- Если $H \approx 0, D \approx 2$ и $A \rightarrow \infty$, то это прямая линия;
- Если $H = 0.5, D = 1.5$ и $A = 2$, то это случайный ряд;
- Если $H = 0.5, D = 1$ и $A = 1$, то это бесконечный линейный тренд.

Каждое наблюдение хранит в себе память о всех предыдущих событиях, всё что происходило во все моменты времени до события, напрямую отражено в самом событии, и повлияет на последующие события. Здесь время является важнейшим фактором, а так как время итеративно, то мы можем вывести корреляционное соотношение по формуле» [12]

$$C = 2^{2H-1} - 1, \quad (13)$$

где C — мера коллекции;

H — коэффициент Хёрста.

Показатель Хёрста может быть определён на отрезке $[0.1]$ и рассчитан в пределах:

- «Если $0 \leq H < 0.5$, то это означает, что система подвержена переменам. Такую систему ещё называют как «возврат к среднему», что значит обратную зависимость текущего состояния от времени: если в системе произошёл рост, то в следующем периоде скорее всего начнётся спад и наоборот. Устойчивость всей системы зависит от близости показателя Хёрста к нулю: так же чем ближе значение C из уравнения (12) к значению -0.5 (отрицательной корреляции), тем устойчивее система;
- Если $H = 0.5$ — ряд является случайным. Это значит, что все события случайны и некоррелированные так же текущие значения никак не влияют на будущие, и на них не влияли прошлые, то есть происходит нормальное распределение;
- Если $0.5 < H \leq 1$, то это значит, что работа идёт с трендоустойчивым рядом. То есть, если временной ряд убывал на промежутке, то и дальше он скорее всего будет убывать» [5][12][13].

1.4 Фрактальные временные ряды

«Фрактальность времени и пространства имеет физические причины. Связь между фрактальными структурами пространства и времени образуют «стрелу пространство-время», которая определяет изменения самоорганизующейся системы.

Фрактальность времени возможно изучать при помощи различных «фрактальных» подходов.»[1]

Ряд из измеренных величин, которые были выставлены друг за другом это временной ряд. Значения для такого ряда обычно получаются по равным временным интервалам, зачастую они равны. Изменения в рядах обычно регистрируют относительно оси времени, к таким данным можно отнести, например, изменение содержания различных веществ в воде и воздухе, изменение стоимости акций, или, например, сердечный ритм.

«Классические разделы вероятностного анализа временных рядов основан на предположении, что некоторая изучаемая система является случайной (процесс, порождающий временной ряд, состоит из множества составных частей и степеней свободы). Но многие временные ряды обладают инвариантностью сравнительно масштабных преобразований, что делает статические методы анализа несостоятельными, а вопрос анализа перекладывается на изучения фрактального множества, который и описывает временной ряд» [2].

«Фрактальные временные ряды бывают случайными (при значении показателя Хёрста $H=0.5$). В этом случае временной ряд состоит из несвязанных между собой событий: настоящее никак не может влиять на будущее. Но степенной показатель H , обычно, больше 0.5, а вероятностные распределения не являются нормальными.

Фрактальные временные ряды могут являться персистентными (трендоустойчивыми), когда показатель Хёрста находится на промежутке $0.5 < H < 1$. В этом случае временной ряд склонен удерживать своё состояние в течении некоторого времени в будущем. Чем ближе значение H к единице, тем явней трендоустойчивость ряда, а если коэффициент близится к 0.5, то говорят, что ряд зашумлён (присутствует белый шум).

Персистентный ряд — это обобщённое броуновское движение или смещённые случайные блуждания.»[4]

Для персистентного фрактального ряда есть и обратный ряд антиперсистентный, так же известный как эргодический ряд. Для такого ряда справедливо свойство «возврат к среднему», то есть состояние системы пытается как можно скорее измениться на противоположное для возвращения к среднему. Для определения устойчивости такого ряда применяется коэффициент Херста, при приближении которого к нулю устойчивость системы повышается.

При рассмотрении на практике можно заметить, что антиперсистентные ряды встречаются сильно реже чем персистентные

Выводы по главе 1

Приведем выводы по первой главе бакалаврской работы:

- Были рассмотрены теоретические основы фрактальных объектов, так же различные свойства присущие как фрактальным объектам так и обычным.
- Была установлена разница между фрактальным объектом и не фрактальным.

Глава 2 Алгоритмы представления фрактальных временных рядов

2.1 Методы модельного представления фрактальных временных рядов

Прежде чем приступать к анализу фрактального временного ряда, для начала надо этот самый ряд смоделировать, сейчас эта задача является очень простой так как для генерации фрактального временного ряда уже разработано множество методов, обладающих своими особенностями.

Все эти методы обладают относительно простой компьютерной реализацией, достаточно высокой скоростью работы, и высокой точностью итогового фрактального множества.

Также стоит отметить, что все фрактальные ряды, которые были смоделированы методами, описанными далее, являются однозначными и не самоаффинными.

Здесь будут рассмотрено 3 самых простых в реализации, но при этом эффективных метода:

- метод смещения средней точки, основанный на разделении отрезка
- метод Фурье, основанный на разложении Фурье
- метода обобщённого броуновского движения, основанный на модели движения гипотетической частицы

Далее мы рассмотрим эти методы подробнее

2.2 Метод смещения средней точки

В первую очередь будет рассмотрен метод который по праву считается первопроходцем среди методов генерации рядов, так же он эффективен при работе на ЭВМ так как его компьютерная реализация очень проста, но за простотой скрывается огромный рост числа вычислений при росте количества элементов ряда

«Сам алгоритм заключается в разделении единичного отрезка X по оси абсцисс на $N = 2^m$ частей, где m —положительное число. Реализация данного алгоритма проходит по следующим шагам:

1. Выбирается единичный отрезок по оси X случайной длины;
2. Для данного отрезка определяются начальные значения y_{left} и y_{right} ;
3. На последующем шагу происходит деление выбранного единичного отрезка на равные части, рассчитав середину x_{middle} как среднее значение между двумя границами отрезка x_{left} и x_{right} .»[13]

Значение по оси ординат считается по значениям y_{left} и y_{right} с использованием следующей формулы:

$$y_{middle} = \frac{y_{left} + y_{right}}{2} + h \quad (14)$$

Где h — случайная величина, распределённая по нормальному гауссову закону с нулевым средним и дисперсией σ_h , которая определяется соотношением:

$$\sigma_h = r^H \quad (15)$$

Где r — расстояние от средней точки исследуемого отрезка x_{middle} , которое определяется выражением:

$$r = \frac{x_{right} - x_{left}}{2} \quad (16)$$

2.3 Метод Фурье

Вторым будет рассмотрен Метод Фурье. Исторически первым и наиболее распространенным базисом для разложения функций является базис Фурье. Однако данный метод не был лишен недостатков, одним из недостатков, по совместительству главный недостаток, заключался в том, что данный метод рассчитан только на периодические функции, однако при работе с конечными функциями это не является проблемой, так как любую функцию можно представить, как часть более крупной периодической функции.

«Другим немного менее популярным методом генерации фрактальных временных рядов является метод Фурье. Этот метод получил широкое признание благодаря тому, что в его основе, заложено разложение функции в ряд Фурье.

Исходная фрактальная временная кривая записана в виде:

$$y(t) = \int_{f=f_{min}}^{f_{max}} c(f) * \sin(2\pi ft) + \varphi(f) \quad (17)$$

Где $f \in [f_{min}, f_{max}]$ — набор частот, входящих в разложение Фурье;

$C(f)$ и $\varphi(f)$ — амплитуда и фаза соответствующих гармоник.

Для каждой гармоники f определена фаза φ выбранная случайным образом из диапазона $0, 2\pi$.

Зависимость амплитуды c от частоты f задаётся следующим скейлинговым соотношением:

$$c(f) = kf^{-B} \quad (18)$$

где k — общий амплитудный коэффициент;

β — по смыслу и значению полностью совпадает с показателем Херста H . Поэтому с помощью этой величины можно задать фрактальную размерность как и с помощью показателя Херста по формуле $D = 2 - \beta$.»[17]

2.4 Метод обобщённого броуновского движения

Третьим будет рассмотрен Метод обобщённого броуновского, основанием которого является модель теоретического описания частицы, движущейся в произвольных направлениях на произвольные расстояния в пространстве. В отличие от общего случая, когда нету зависимости прошлых состояний от будущих состояний частицы, и являются полностью хаотическими, однако это не так, отличием от классической модели как раз таки является то что в данной модели частица полностью зависит от всех предыдущих перемещений.

Одним из замечательных свойств обобщённого броуновского является сохранение тенденции (персистентности) и его противоположности антиперсистентности при огромных значениях промежутка времени.

«Для зависимости перемещения обобщённой броуновской частицы вдоль одной из пространственных координат от времени можно использовать соотношение:

$$B_H(t) = \frac{1}{\Gamma(H+1/2)} \int_{-\infty}^t K(t-t') dB(t') \quad (19)$$

Где $\Gamma(z)$ — это гамма функция;

H — показатель Хёрста, определяющий фрактальную размерность, по соотношению $D = 2 - H$ и отвечающее условию $0 \leq H \leq 1$;

$dB(t')$ — независимые случайные перемещения, обычной броуновской частицы в момент времени t' ;»[33]

$K(t-t')$ — функция, отвечающая за память системы и определяющаяся соотношением:

$$K(t-t') = \begin{cases} (t-t')^{H-1/2}, & 0 \leq t' \leq t \\ (t-t')^{H-1/2} - (-t')^{H-1/2}, & t < 0 \end{cases} \quad (20)$$

2.5 Методы анализа размерности

При анализе различных временных рядов важной задачей является выделение периодов, когда динамика системы разная по-другому это называется сегментация. При решении такой задачи анализ Херста дает возможность обнаружить периодические циклы, даже при условии, что они накладываются друг на друга, но также для такой задачи есть и другие методы. При взгляде на систему редко, когда сразу видно, является она фрактальной или нет, именно поэтому, важным вопросом при изучении фракталов является вычисление и оценка фрактальных свойств. Эта проблема может быть решена огромным множеством способов, так как существует достаточно много различных методов определения природы

фрактала, но эти методы не идеальны, они имеют свои ограничения для использования, например, некоторым методам требуется что бы фрактал был самоподобным, когда как некоторые методы могут работать только с самоаффинным, а для самоподобных их применять нельзя. Так же не стоит забывать, что метод применяемый для определения фрактальной размерности так же зависит и от природы фрактала, именно поэтому, для разных видов фракталов точность расчётов может меняться в различных направлениях. «Например, в некоторых случаях, как, например, при анализе рядов солнечной активности, при попытке выделить периоды будут получены завышенные значения. Это может быть связано, например, с тем, что в естественных рядах обычно имеется дело с квазипериодами, то есть с некоторыми усредненными значениями. Однако, одна и та же компонента может иметь достаточно широкий диапазон изменчивости, что приводит к получению ошибки. Из-за чего не редко на практике стоит вопрос о лучшем методе, для решения задачи, либо используются сразу несколько способов, для более точной оценки фрактальной размерности.»[13]

Здесь будут рассмотрено 3 достаточно эффективных метода:

- метод Ричардсона, основанный на последовательном наложении малого отрезка на прямую

- метод Минковского, основанный на покрытии объекта квадратами и их подсчете

- метода R/S анализа, основанного на вычислении нормированного размаха

Далее мы рассмотрим эти методы подробнее

2.6 Метод Ричардсона

Первым алгоритмом будет рассмотрен один из основоположников определения фрактальной размерности, но одним из его минусов является то что его можно применить только к фрактальным множествам обладающих

свойствами самоподобия, этот алгоритм называется методом Ричардсона. Суть данного алгоритма очень проста, так для определения фрактальности некоторой кривой требуется просто многократное наложение некоторого отрезка эталонной длины вдоль данной кривой, из-за такой простой реализации алгоритма он имеет достаточно высокую точность решения, так как размер эталонного отрезка может быть очень мал.

«Алгоритм данного метода очень простой: берётся первая точка фрактальной кривой, представленной в виде последовательностей координат (x, y) с наибольшей точностью, и рассчитывается расстояние пересечения кривой и заданным набором отрезков с окружностями заранее заданного радиуса r . Для точки пересечения кривой и окружности действия повторяются: так же рассчитывается новое пересечение окружности и ранее отобранной точкой. Данный алгоритм повторяется для всего фрактального множества.

Длина фрактальной кривой L рассчитывается как суммарная длинна всех N полученных отрезков длины r и неполного отрезка r' от последней найденной точки пересечения до конечной точки кривой:

$$L(r) = N(r) * r + r' \quad (21)$$

Для определения фрактальной размерности D исследуемого временного ряда строится зависимость $\log L(\log r)$ и проводится линейная аппроксимация.

Тангенс угла наклона β линейной аппроксимации связан с размерностью отношением $D = 1 - \beta$. » [17]

2.7 Метод Минковского

Вторым будет рассмотрен метод Минковского данный метод отличается своей высокой точностью при анализе фрактальной размерности для кривых обладающих свойством самоаффинности. Принцип данного метода заключен в том, что некоторую фрактальную фигуру можно покрыть

окружностями некоторого радиуса и рассчитать отношение покрытия к радиусу исходных окружностей.

«Частным случаем расчёта фрактальной размерности Минковского является в покрытие фрактального временного ряда не кругами, а квадратами, что облегчает реализацию компьютерного алгоритма. В таком случае поиск фрактальной размерности сводится к поиску отношения количества квадратов $N(\varepsilon)$ размером ε , покрывающих всю фрактальную кривую, к размеру одной ячейки ε .

Вычисление размерности Минковского обычно приводит к следующему выражению:

$$\log N(\varepsilon) = \log c - d \log \varepsilon \quad (23)$$

где ε — сторона единичного квадрата;

$N(\varepsilon)$ — наименьшее число клеток стороной ε , необходимых для покрытия фрактальной кривой.

Не трудно заметить, что график зависимости (23) от $\log N(\varepsilon)$ и является прямой, где c — константа, а d — угловой коэффициент.»[4]

При использовании клеток размеров ε_1 и ε_2 , то неизвестные переменные c и d можно вычислить из системы уравнений:

$$\begin{cases} \log N(\varepsilon_1) = \log c - d \log \varepsilon_1 \\ \log N(\varepsilon_2) = \log c - d \log \varepsilon_2 \end{cases} \quad (24)$$

«При этом, из-за того, что величины $N(\varepsilon)$ могут быть найдены лишь приближённо, имеет смысл оценить $N(\varepsilon)$ для большего числа различных значений ε . В таком случае мы получаем систему большего числа уравнений чем имеющихся неизвестных которая, скорее всего, иметь точного решения не будет. В таких случаях стандартным решением является найти значения $\log c$ и d минимизирующие сумму квадратов отклонений (метод наименьших квадратов)» [20].

2.8 Метод нормированного размаха

«R/S анализ по праву считается одним из самых популярных методов расчёта фрактальной размерности. Данный метод был предложен Хёрстом для анализа зависимости стока воды из различных озёр и рек. Но как позже оказалось, данный метод так же можно использовать для расчёта фрактальной размерности D фрактальных временных рядов, а также самоаффинных и однозначных кривых.» [7] Зачастую применение методов на практике сталкивается с проблемой того что данные не являются нормально распределёнными, из-за этого Херст предложил метод нормированного размаха, получившего так же название RS анализ. Этот метод способен работать над различными случайными системами (от солнечных пятен, среднегодовых значений выпадения осадков и до финансовых рынков, временных рядов экономических показателей), так же этот метод был приспособлен к определению того каким является исследуемый ряд. Фрактальным, или же случайным, так же этот метод позволяет обнаружить наличие долговременной памяти у ряда, или неперiodических циклов. Именно возможность определения неперiodических циклов является одним из преимуществ RS анализа.

Теперь можно рассмотреть алгоритм данного метода:

«Сначала фрактальный временной ряд преобразуется в дискретный набор данных M длиной $|M|$. Затем ряд преобразуется во временной ряд N длины $N = M - 1$ исходя из логарифмических отношений:

$$N_i = \ln\left(\frac{M_{i+1}}{M_i}\right), i = 1, 2, 3, \dots, M - 1 \quad (25)$$

Следующим шагом рассматриваем период времени, разделённый на A смежных под периодов длины n , так что $A * n = N$. Каждый такой период помечен как $I_a, a = 1, 2, 3, \dots, A$. Каждый из элементов в I_a помечен как N_k , при этом $k = 1, 2, 3, \dots, n$. Для каждого I_a длины n определяется среднее значение по соотношению:

$$e_a = (1/n) * \sum_{k=1}^n N_k \quad (26)$$

Где e_a — среднее значение N_k , содержащееся в подпериоде I_a длины n .

Теперь требуется рассчитать временной ряд накопленных отклонений X_k от среднего значения для каждого подпериода I_a :

$$X_{k,a} = \sum_{k=1}^n (N_{k,a} - e_a), k = 1, 2, 3, \dots, n \quad (27)$$

В дальнейшем диапазон определяется как максимальное значение за вычетом минимального значения $X_{k,a}$ в пределах каждого подпериода I_a :

$$R_{I_a} = \max(X_{k,a}) - \min(X_{k,a}), 1 \leq k \leq n \quad (28)$$

Определяется выборочное стандартное отклонение, рассчитываемое для каждого под периода I_a :

$$S_{I_a} = ((1/n) \sum_{k=1}^n (N_{k,a} - e_a^2))^{0.5} \quad (29)$$

Далее каждый диапазон R_{I_a} нормализуется путём деления на соответствующие значения S_{I_a} , поэтому повторно нормированный размах в течении каждого I_a под периода равен R_{I_a}/S_{I_a} . При помощи двух смежных под периодов длины n вычисляется среднее значение R/S для длины n :

$$(R/S)_n = (1/A) \sum_{a=1}^A (R_{I_a}/S_{I_a}) \quad (30)$$

Длина n увеличивается до следующего, более высокого значения, а $\frac{(M-1)}{n}$ является целочисленным значением. Описанная ранее процедура подсчёта повторяется пока не получится равенство $n = \frac{(M-1)}{2}$. Затем выполняется линейная регрессия методом наименьших квадратов на $\ln(n)$ как независимой переменной, и $\ln(R/S)_n$ — как зависимой переменной. Отрезок, отсекаемый на координатной оси, является оценкой $\ln(c)$ и константой. Показатель Хёрста H является наклоном прямой, и он связан с фрактальной размерностью D фрактальной кривой соотношением $D = 2 - H$.»[2][4][8]

Выводы по главе 2

Приведем выводы по второй главе бакалаврской работы:

- Были рассмотрены методы генерации фрактальных рядов основанные на разных методах, и выполнено их математическое описание.
- Были рассмотрены и описаны методы анализа размерности.

Глава 3 Программная реализация и тестирование

3.1 Описание структуры программы

Для генерации временного ряда был выбран метод Фурье, математически алгоритм был описан в главе 1.5.2. Программная реализация выполнена на языке python поскольку данный язык предоставляет огромное количество модулей и пакетов, что позволит при реализации алгоритма опустить часть кода, реализованного в библиотеках и хорошо оптимизирован профессиональными программистами. Более того в данном языке реализовано множество математических инструментов. В качестве среды разработки была выбрана бесплатная среда Colaboratory с которой у меня уже имеется неплохой опыт работы. Она позволяет выполнять код Python в браузере, который исполняется на облачных серверах Google, независимо от мощности вашего устройства.

Входные данные представлены в виде таблицы, в качестве данных представлена заработная плата в России в промежутке 1992-2021 года.

3.2 Реализация метода генерации фрактального временного ряда

Рассмотрим программную реализацию алгоритма.

```
import math
import pandas as pd
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import seaborn as sns
from sklearn.metrics import mean_absolute_error, mean_absolute_percentage_error
```

Рисунок 2.2.1– Библиотеки программы

Рассмотрим их более подробно далее. Библиотека numpy добавляет поддержку больших матриц и многомерных массивов, включая высокоуровневые математические функции для работы с ними. Пакет matplotlib.pyplot понадобится для вывода графиков. Пакет pandas предназначен для обработки данных из таблиц. Пакет seaborn является

надстройкой над пакетом pandas и предназначен для визуализации данных. Пакет sklearn.metrics используется для подсчета погрешности.

```
from google.colab import drive
drive.mount('/content/gdrive')
data = pd.read_excel('/content/gdrive/MyDrive/lbgkjb/tab1_zpl.xlsx')
```

Рисунок 2.2.2– импорт табличных данных

Далее мы загружаем внешнюю таблице содержащую требующиеся данные. Сами данные имеют вид представленный на рисунке 2.2.3

	year	january	february	march	april	may	june	july	august	september	october	november	december
0	1991.0	0.308	0.294	0.337	0.373	0.438	0.493	0.541	0.548	0.613	0.703	0.839	1.195
1	1992.0	1.400	2.000	2.700	3.100	3.700	5.100	5.500	5.900	7.400	8.900	10.600	16.100
2	1993.0	15.300	19.100	23.600	30.600	37.500	47.400	56.000	65.400	80.900	93.000	101.500	141.200
3	1994.0	134.200	144.700	164.800	171.500	183.500	207.500	221.000	232.800	253.200	265.000	281.600	354.200
4	1995.0	302.600	321.000	361.500	386.200	429.900	480.600	499.500	520.600	564.500	594.500	615.700	735.500
5	1996.0	654.800	684.400	745.000	746.500	779.300	837.200	842.800	831.000	848.100	843.300	835.000	1017.100
6	1997.0	812.200	821.200	902.900	901.100	919.700	993.200	999.100	982.300	1026.200	1006.100	997.800	1214.800
7	1998.0	988.000	1000.000	1059.000	1040.000	1047.000	1122.000	1110.000	1052.000	1112.000	1123.000	1164.000	1482.000

Рисунок 2.2.3– таблица с данными

Данные хранятся в виде таблицы 1 столбец содержит год за который собраны данные в строке, каждый последующий столбец отвечает за месяцы в соответствующем году. Все полученные данные хранятся в переменной data.

```
salary_series = pd.Series()
for _, row in data.drop('year', axis=1).iterrows():
    salary_series = salary_series.append(pd.Series(row.values))

salary_series.index = pd.date_range('1991-01-01', freq='M', periods=31*12)

salary_series.plot(figsize=(12, 7), linewidth=2, fontsize=13)
plt.title('Среднемесячная ЗП в России', fontsize=15)
plt.xlabel('Дата', fontsize=14)
plt.ylabel('Среднемесячная ЗП, руб.', fontsize=14)
plt.show()
```

Рисунок 2.2.4– Обработка входных данных

Следующим шагом является обработка входной таблицы для представления ее в виде, который можно обработать программно. Методом drop('year', axis=1) мы убираем из исходной таблицы столбец дат и методом salary_series.append добавляем оставшуюся строку в серию строк по которой

далее мы проведем фрактальный анализ. Далее серией методов plt мы строим график изначальных данных представленный на рисунке 2.2.5



Рисунок 2.2.5– График начальных значений

Далее начинается работа с методом фурье.

```
m = 30
l = 12
p = 1

matrix = get_matrix_from_series(train_series, m, l)
new_coefs = get_new_fourier_coefs(matrix, p)
test_pred = predict_next_period(new_coefs, l)
test_pred = pd.Series(test_pred, index=test_series.index)
```

Рисунок 2.2.6– работа с методом фурье

В данном блоке происходит работа с методом фурье, на 1 шаге с помощью метода `get_matrix_from_series` преобразуем изначальную серию в матрицу, с периодом равным переменной `l`, состоящей из `m` элементов матрицы `train_series`, далее методом `get_new_fourier_coefs` находятся коэффициенты фурье для каждого шага.

```

def get_new_fourier_coefs(periods: np.ndarray,
                          p: int = 1) -> list:

    new_coefs = []
    coefs_for_all_periods = []

    for period in periods:

        X, y = get_matrix_and_vector(period)

        fourier_coef_for_period = solve_system(X, y)
        coefs_for_all_periods.append(fourier_coef_for_period)

    coefs_for_all_periods = np.array(coefs_for_all_periods)

    for i in range(coefs_for_all_periods.shape[1]):
        coef_for_next_period = predict_by_one_step(coefs_for_all_periods[:, i], p=p)
        new_coefs.append(coef_for_next_period)

    return new_coefs

```

Рисунок 2.2.7– нахождение коэффициентов

В данном блоке происходит нахождение коэффициентов Фурье. Сначала создается 2 листа, `new_coefs` который будет содержать текущие элементы и `coefs_for_all_periods` который будет содержать коэффициенты за предыдущие периоды. В первом цикле метод `get_matrix_and_vector` создает матрицу системы уравнений и коэффициентов которые требуется найти, далее решается система, находятся коэффициенты Фурье и сохраняются в `coefs_for_all_periods`. Далее прогнозируем для каждого последующего блока на основе предыдущего значения Фурье.

Дальше с использованием метода `predict_next_period` на основе ранее полученных коэффициентов Фурье находим значения следующего интервала, не представленного в изначальном наборе, и мы можем сравнить их с реальными данными на рисунке 2.2.8 представлены графики.



Рисунок 2.2.7– Сравнение графиков реальных значений, и значений по методу фурье.

3.3 Реализация метода анализа фрактальной размерности

Методом расчета фрактальной размерности был выбран метод R/S анализа так как при использовании на таких данных он дает высокую точность и скорость работы, так же этот алгоритм обширно применяется в других областях. Описание алгоритма приведено в главе 1.6.3

```

def compute_Hc(series, min_window=10):

    ndarray_likes = [np.ndarray]

    ndarray_likes.append(pd.core.series.Series)

    if type(series) not in ndarray_likes:
        series = np.array(series)

    series = series.values

    max_window = len(series)-1
    window_sizes = list(map(
        lambda x: int(10**x),
        np.arange(math.log10(min_window), math.log10(max_window), 0.25)))
    window_sizes.append(len(series))

    RS = []
    for w in window_sizes:
        rs = []
        for start in range(0, len(series), w):
            if (start+w)>len(series):
                break
            _ = RS_func(series[start:start+w])
            if _ != 0:
                rs.append(_)
        RS.append(np.mean(rs))

    A = np.vstack([np.log10(window_sizes), np.ones(len(RS))]).T
    H, c = np.linalg.lstsq(A, np.log10(RS), rcond=-1)[0]

    c = 10**c
    return H, c, [window_sizes, RS]

```

Рисунок 2.3.1– Сравнение графиков реальных значений, и значений по методу фурье.

Данный алгоритм рассчитывает количество подпериодов, рассчитывает диапазоны значений и стандартное отклонение, возвращает коэффициент Херста и результирующий график.

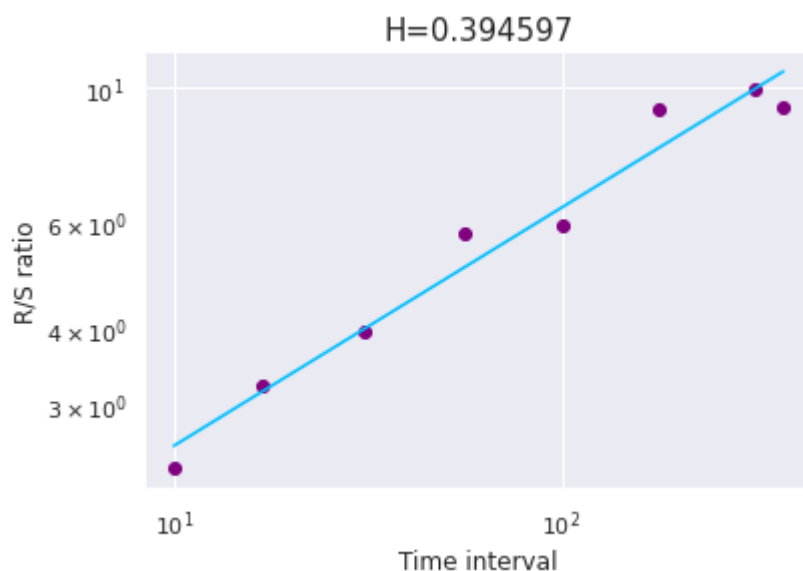


Рисунок 2.3.2– Сравнение графиков реальных значений, и значений по методу фурье.

Выводы по главе 3

Приведем выводы по третьей главе бакалаврской работы:

На языке программирования python разработано приложение которое на основе метода фурье строит фрактальный временной ряд, и на основе метода нормированного размаха определяет фрактальную размерность

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе выполнения бакалаврской работы были получены следующие результаты:

- При анализе литературных источников были установлены основные требуемые свойства фрактальных объектов, такие как показатель Херста, и фрактальная размерность.
- Для генерации фрактальных объектов, на основе литературы, были рассмотрены методы генерации, такие как метод средней точки, метод Фурье, и метод броуновского движения.
- На основе различных плюсов и минусов методов из этих 3 методов был выбран метод Фурье как подходящий, но относительно малоиспользуемый в данной области.
- Были рассмотрены методы анализа размерности такие как метод Ричардсона, Минковского, и метод нормированного размаха.
- Были пошагово реализованы метод генерации фрактального объекта из табличных значений для ряда методом Фурье, а также метод анализа фрактальной размерности методом R/S анализа на языке python.
- С помощью полученной программы был построен фрактальный временной ряд на основе реальных статистических данных, так же было произведено прогнозирование ряда на дальнейший промежуток времени.
- Проведены вычислительные эксперименты, состоящие из вычисления фрактальной размерности реально существующих временных рядов с целью определения свойств фрактальности временного ряда и анализа фрактальной размерности.

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Научная и методическая литература

1. Андриенко В.М. Фрактальные свойства фондовых рынков / В.М. Андриенко, О.В. Варчук // Одесский национальный политехнический университет. – Одесса, Украина. – 2010, 4 с.
2. Барабаш Т.К. Компьютерное моделирование фрактальных временных рядов / Т.К. Барабаш, А.Г. Масловская // Вестник Амурского государственного университета, Благовещенск. – 2010. – №49. – с. 37 – 38.
3. Белолипец И.И., Фархиева С.А. Предсказание финансовых временных рядов на основе индекса фрактальности [Текст]// Мир науки. - 2014. - №3.
4. Божокин, С.В. Фракталы и мультифракталы / С.В. Божокин, Д.А. Паршин. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. – 126 128 с.
5. Борисов, В.Д. Метод фрактального анализа временных рядов. / В.Д. Борисов, Г.С. Садовой//Автометрия, 2000, т.6, С. 1019.
6. Боровской И.Г. Исследование прогнозной способности показателя Херста применительно к российскому фондовому рынку / И.Г. Боровской А.О. Жучков // Доклады ТУСУР. – 2017, №2. – 3 с.
7. Зельдович Я.Б. Фракталы. Подобие, промежуточная асимптотика / Я.Б. Зельдович, Д.Д. Соколов // УФН, 1985, т.146, вып.3, стр. 493-506.
8. Кривоносова Е.К. Первадчук В.П. Кривоносова Е.А. Сравнение фрактальных характеристик временных рядов экономических показателей [Текст]// Современные проблемы науки и образования.. - 2014. - №6
9. Кроновер Р.М. Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории / Р.М. Кроновер // М.: Постмаркет, 2000. — 123 – 142 с.
10. Куликова Н.В., Хмелевская В.С., Бондаренко В.В. Компьютерный анализ процессов самоорганизации в металлических материалах. [Текст]// Матем. моделирование. - 2006. - №1, 88 98

11. Курдюков В.И., Остапчук А.К., Овсянников В.Е., Рогов Е.Ю. Анализ методов определения фрактальной размерности [Текст]// Вестник КузГТУ. - 2008. - №5.
12. Мандельброт Б. Фракталы, случай и финансы // М.: Регулярная и хаотическая динамика, 2004.
13. Мандельброт, Бенуа. Фрактальная геометрия природы / Б. Мандельброт; Пер. с англ. Логунова А.Р., Науч. ред. Морозова А.Д. - Москва: Институт компьютер. исслед., 2002. - С20,655 : ил. - (Компьютинг в математике, физике, биологии). - Пер. изд. : The fractal geometry of nature / B B Mandelbrot. - 1 экз. - ISBN 5-93972-108-7
14. Мандельброт Б. Самоаффинные фрактальные множества, «Фракталы в физике». – М.: Мир, 1988, 672 с.
15. Масловская А.Г. Применение фрактальных методов для анализа динамических данных / А.Г. Масловская, Т.Р. Осокина, Т.К. Барабаш // Вестник Амурского государственного университета, Благовещенск. – 2010. – №51. – с. 13 – 20.
16. Моисеев К.Г., Бойцова Л.В., Гончаров В.Д. Анализ динамики гумусного состояния почв фрактальными методами [Текст]// Агрофизика. - 2014. - №1(13).
17. Некрасова И.В. Показатель Херста как мера фрактальной структуры и долгосрочной памяти финансовых рынков // Международный научноисследовательский журнал. - №7(38). – 2015, с. 87 – 91.
18. Олемской А.И., Борисюк В.Н., Шуда И.А., Багдасарян А.А. Мультифрактальный анализ временных рядов экономических систем. [Текст]// журнал нано- и электронной физики. - 2009. - №3.
19. Остапчук А.К, Овсянников В.Е. Применение теории фракталов в математическом моделировании и технике. - Курган: Курганский гос. ун-т, 2009

20. Петерс Э. Фрактальный анализ финансовых рынков. Применение теории хаоса в инвестициях и экономике // М.: Интернет-трейдинг, 2004. — 304 с.

21. Старченко Н.В. Локальный анализ хаотических временных рядов с помощью индекса фрактальности // Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, Москва, 2005.

22. Федер Е. Фракталы // М.: Мир, 1991. – 262 с

23. Шайдук А.М. Влияние фрактальной размерности сигнала на распределение энергии в его спектре / А.М. Шайдук, С.А. Останин // Журнал радиоэлектроники. - 2016. - №2.

24. Шишкин Е.И. Моделирование и анализ пространственных и временных фрактальных объектов. Екатеринбург: Уральский государственный университет, 2004. 88с

25. Фракталы и мультифракталы [Электронный ресурс] : учеб. пособие / С.В. Божокин, Д.А. Паршин. - Ижевск : РХД, 2001. - 128 с. - Доступ к полному тексту возможен в отделе электронной информации Научной библиотеки. - Библиогр.: с. 126-128. - ISBN 5-93972-060-9

Иностранная литература

26. Alessandro Chiaudani, Diego Di Curzio, William Palmucci, Antonio Pasculli, Maurizio Polemio, Sergio Rusi Statistical and Fractal Approaches on Long TimeSeries to Surface-Water/Groundwater Relationship Assessment: A Central Italy Alluvial Plain Case Study // Water. - 2017. - №9(11).

27. Chand A.K.B.,Vijender N. Monotonicity Preserving Rational Quadratic Fractal Interpolation Functions // Advances in Numerical Analysis. – 2014

28. Chicharro F.I., Cordero A, Torregrosa J.R. Dynamics and Fractal Dimension of Steffensen-Type Methods // Algorithms. - 2015. - №8 (2).

29. Deng Y., Liu X., Zhang Y. Fractal Dimension Analysis of the Julia Sets of Controlled Brusselator Model // Discrete Dynamics in Nature and Society. - 2016.

30. Feder J. Fractals. // New York: Plenum Press, 1988.

31. Nicolae Apostolescu, Daniela Baran Algorithm and code for analyzing hyperspectral images using the Hurst exponent // INCAS Bulletin. - 2014. - №6(3).
32. Provata A. Abstract Phase-space Networks Describing Reactive Dynamics / A. Provata, E.Panagakou // National Center for Scientific Research «Demokritos». – Greece. – 2018, 10 с.
33. Theiler J. Estimation fractal dimension // LiLincoln Laboratory, Massachusetts Institute of Technology, Lexington, Massachusetts. – Vol. 7. - №6. – 1990, 19 с. Электронные ресурсы