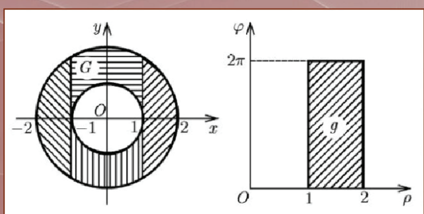
Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Тольяттинский государственный университет
Институт математики, физики и информационных технологий

О.В. Лелонд

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ АНАЛИЗА

Электронное учебное пособие



ISBN 978-5-8259-1072-7

УДК 517(075.8)
ББК 22.161я73

Рецензенты:
канд. физ.-мат. наук, доцент, зав. кафедрой «Высшая математика» Тольяттинской академии управления *А.А. Кельин*;
канд. физ.-мат. наук, доцент, доцент кафедры «Прикладная математика и информатика» Тольяттинского государственного университета *Г.А. Тырыгина*.

Лелонд, О.В. Дополнительные главы анализа: электронное учебное пособие / О.В. Лелонд. – Тольятти : Изд-во ТГУ, 2022. – 1 оптический диск. – ISBN 978-5-8259-1072-7.

В учебном пособии излагаются основы теории кратных и криволинейных интегралов, теории поля, теории рядов и интегралов Фурье. Изложение теоретических сведений по каждому разделу сопровождается рассмотрением примеров решения типовых задач. В конце каждой главы приводятся вопросы и задания для самоконтроля.

Пособие предназначено для студентов, обучающихся по направлениям подготовки 01.03.02 «Прикладная математика и информатика» и 02.03.03 «Математическое обеспечение и администрирование информационных систем» всех форм обучения высшего образования.

Текстовое электронное издание.

Рекомендовано к изданию научно-методическим советом Тольяттинского государственного университета.

Минимальные системные требования: IBM PC-совместимый компьютер: Windows XP/Vista/7/8; PIII 500 МГц или эквивалент; 128 Мб ОЗУ; SVGA; CD-ROM; Adobe Acrobat Reader.

Редактор *Т.М. Воропанова*
Технический редактор *Н.П. Крюкова*
Компьютерная верстка: *Л.В. Сызганцева*
Художественное оформление,
компьютерное проектирование: *И.И. Шишкина*

Дата подписания к использованию 21.03.2022.
Объем издания 11,8 Мб.
Комплектация издания: компакт-диск,
первичная упаковка.
Заказ № 1-07-21.

Издательство Тольяттинского государственного университета
445020, г. Тольятти, ул. Белорусская, 14,
тел. 8 (8482) 53-91-47, www.tltsu.ru

Оглавление

ПРЕДИСЛОВИЕ

Данное учебное пособие предназначено для изучения дисциплины «Дополнительные главы анализа» студентами направлений подготовки 01.03.02 «Прикладная математика и информатика» и 02.03.03 «Математическое обеспечение и администрирование информационных систем».

Цель изучения данной дисциплины – формирование у студентов представлений об основных понятиях и методах математического анализа.

При изучении дисциплины «Дополнительные главы анализа» перед обучающимися ставятся следующие задачи:

1) познакомиться с понятиями кратных и криволинейных интегралов, овладеть способами их вычисления;
2) познакомиться с основными понятиями теории поля;
3) познакомиться с понятиями ряда и интеграла Фурье, овладеть методами разложения функций в ряд и интеграл Фурье.

В результате изучения дисциплины студент должен:

– знать определения и свойства кратных и криволинейных интегралов, способы их вычисления; основные понятия и формулы теории поля; определения рядов и интегралов Фурье, признаки их сходимости;

– уметь применять на практике свойства кратных, криволинейных интегралов и формулы для их вычисления; формулы для вычисления основных характеристик скалярных и векторных полей; формулы для разложения функций в ряд и интеграл Фурье;

– владеть навыками вычисления кратных и криволинейных интегралов; вычисления производной по направлению и градиента скалярного поля, производной по направлению, дивергенции и ротора векторного поля; разложения функций в ряд и интеграл Фурье.

Дисциплина «Дополнительные главы анализа» базируется на дисциплинах «Математический анализ», «Линейная алгебра и аналитическая геометрия». Знания, полученные учащимися в рамках данной дисциплины, могут быть использованы при изучении дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика».

Достоинством данной разработки является целостность содержащегося в ней материала: все приводимые теоретические сведения сопровождаются подробно разобранными примерами.

Учебное пособие имеет четкую структуру: весь материал разбит на главы, которые в свою очередь разделяются на параграфы. Каждая глава завершается выводами и контрольными вопросами. В заключительной части пособия размещен глоссарий. Излагаемый материал сопровождается поясняющими текст рисунками.

ВВЕДЕНИЕ

Предлагаемое учебное пособие включает в себя разделы «Кратные интегралы», «Криволинейные интегралы», «Скалярные и векторные поля», «Ряды и интегралы Фурье».

Первая глава пособия посвящена двойным и тройным интегралам. Здесь вводятся основные определения, формулируются свойства интегралов, описываются способы их вычисления.

Важнейшими свойствами кратных интегралов являются свойства линейности и аддитивности. При вычислении кратных интегралов наряду с повторным интегрированием в прямоугольных координатах широко используется метод замены переменных. В некоторых случаях вычисление двойного интеграла значительно упрощается при переходе к полярным координатам. Точно так же использование цилиндрических и сферических координат во многих случаях позволяет избежать громоздких вычислений при нахождении тройных интегралов. Кратные интегралы используются для нахождения площадей плоских фигур и объемов пространственных тел. Кроме того, двойные и тройные интегралы применяются для вычисления массы материальной плоской пластины или материального тела, координат их центров тяжести и моментов инерции.

Во второй главе учебного пособия рассматриваются криволинейные интегралы первого и второго рода, их свойства и способы вычисления.

Так же, как и кратные интегралы, криволинейные интегралы обладают свойствами линейности и аддитивности. При вычислении криволинейных интегралов немалое значение имеет выбор способа задания пути интегрирования. Следует использовать такое представление кривой, при котором вычисление интеграла становится наиболее простым. Криволинейные интегралы первого рода применяются для нахождения массы плоской или пространственной материальной кривой, координат их центров тяжести и моментов инерции. Криволинейные интегралы второго рода используются для вычисления работы силы при перемещении материальной точки вдоль плоской или пространственной кривой. Важное значение в интегральном исчислении функций двух переменных имеет формула Грина. Она позволяет сводить вычисление двойного интеграла по замкнутой области к вычислению криволинейного интеграла второго рода по ее границе. В частности, формула Грина может быть использована для нахождения площадей плоских областей с помощью криволинейных интегралов.

Третья глава данного пособия посвящена скалярным и векторным полям. Здесь рассматриваются применяемые к ним дифференциальные операции, описываются свойства этих операций.

В каждой точке дифференцируемого скалярного поля может быть вычислен градиент и производная по любому направлению. Дифференцируемое векторное поле также обладает производной по любому направлению в каждой своей точке. Кроме того, важными характеристиками векторного поля являются дивергенция и ротор. В случае двукратной дифференцируемости к скалярным и векторным полям применимы дифференциальные операции второго порядка. В частности, для градиента скалярного поля и ротора векторного поля можно вычислить дивергенцию и ротор, а для дивергенции векторного поля – градиент. Отдельное внимание в данной главе уделяется нестационарным, то есть изменяющимся с течением времени скалярным и векторным полям, а также соленоидальным и потенциальным полям. Потенциальное векторное поле представляет собой градиент некоторого скалярного поля, а соленоидальное векторное поле обладает нулевой дивергенцией. Важное значение в теории поля имеет теорема о представимости всякого непрерывно дифференцируемого векторного поля в виде суммы потенциального и соленоидального полей.

В четвертой главе учебного пособия рассматриваются понятия ряда и интеграла Фурье, описываются их свойства, формулируются условия разложимости функции в ряд или интеграл Фурье.

Ряд Фурье элемента f бесконечномерного евклидова пространства Е строится на основе некоторой ортонормированной системы $\{\psi_n\}$ элементов этого пространства. Он сходится к элементу f по норме рассматриваемого пространства, если система $\{\psi_n\}$ является замкнутой в Е. Частным случаем ряда Фурье является тригонометрический ряд Фурье. Он строится по тригонометрической системе специального вида, рассматриваемой в пространстве кусочно непрерывных на отрезке $[-\pi; \pi]$ функций. Данная система является замкнутой в указанном пространстве. Это ее свойство позволяет обосновать, что тригонометрический ряд Фурье любой кусочно непрерывной на отрезке $[-\pi; \pi]$ функции $f(x)$ сходится к этой функции в среднем и допускает почленное интегрирование на этом отрезке. Особое внимание уделяется условиям абсолютной и равномерной сходимости тригонометрического ряда Фурье, а также условиям, обеспечивающим возможность его почленного дифференцирования. Важное практическое значение имеет теорема Дирихле, согласно которой тригонометрический ряд Фурье любой кусочно непрерывной и кусочно монотонной на отрезке $[-\pi; \pi]$ функции $f(x)$ сходится в каждой точке этого отрезка. При этом сумма ряда совпадает с функцией $f(x)$ всюду на отрезке, за исключением, быть может, конечного множества точек.

Для всякой абсолютно интегрируемой на числовой прямой функции $f(x)$ определено прямое преобразование Фурье $\hat{f}(y)$, представляющее собой непрерывную функцию от y. Наряду с прямым рассматривают и обратное преобразование Фурье. Оно строится по функции $\hat{f}(y)$ и при некоторых ограничениях на функцию $f(x)$ дает ее интегральное представление.

Глава 1. КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

§ 1.1. Двойные интегралы

1.1.1. Понятие двойного интеграла

Пусть E – измеримое по Жордану (квадрируемое) множество на плоскости. Предположим, что оно представлено в виде $E = \bigcup_{i=1}^{n} E_i$, где $E_i, i = \overline{1,n}$, – такие измеримые по Жордану непустые множества, что для каждого i и любого $j \neq i$ мера множества $E_i \cap E_j$ равна нулю. В этом случае говорят, что множества $E_i, i = \overline{1,n}$, образуют *разбиение множества E*. Пусть на множестве E задана функция $f(x, y)$.

В каждом множестве E_i выберем произвольным образом точку $M_i(s_i, t_i)$ и составим *интегральную сумму*

$$I(E_i, M_i) = \sum_{i=1}^{n} f(s_i, t_i) m(E_i),$$

где $m(E_i)$ – мера Жордана (площадь) множества E_i.

Для всякого ограниченного множества G на плоскости *диаметром множества G* будем называть величину

$$d(G) = \sup_{P,Q \in G} \rho(P, Q),$$

где через $\rho(P, Q)$ обозначено расстояние между точками $P(x_P, y_P)$ и $Q(x_Q, y_Q)$, вычисляемое по формуле

$$\rho(P, Q) = \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2}.$$

Пусть $d_i = d(E_i), d = \max\limits_{1 \le i \le n} d_i$. Число d называется *диаметром разбиения* $\{E_i\}_{i=1}^{n}$.

Определение. Число I называется *пределом интегральных сумм* $I(E_i, M_i)$ при $d \to 0$, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что для любого разбиения множества E, удовлетворяющего условию $d < \delta(\varepsilon)$, при любом выборе промежуточных точек M_i выполняется неравенство $|I(E_i, M_i) - I| < \varepsilon$.

В этом случае используют запись $\lim\limits_{d \to 0} I(E_i, M_i) = I$.

Определение. Если существует $\lim\limits_{d\to 0} I(E_i, M_i) = I$, то он называется *двойным интегралом от функции* $f(x, y)$ по множеству E и обозначается $\iint_E f(x,y)dxdy$. Функция $f(x, y)$ называется при этом *интегрируемой на множестве E*.

1.1.2. Свойства двойного интеграла

Перечислим основные свойства двойного интеграла. Для краткости измеримые по Жордану множества будем называть измеримыми.

1. Если $mE = 0$, то всякая определенная на E функция f интегрируема на E и $\iint_E f(x,y)dxdy = 0$.

2. Если функция f непрерывна на измеримом компакте, то она интегрируема на нем.

3. Если функция f ограничена на измеримом компакте E и множество точек разрыва имеет меру ноль, то f интегрируема на E.

4. Если E – измеримое множество, то $\iint_E dxdy = mE$.

5. Если E и G – измеримые множества, $E \subset G$, f ограничена и интегрируема на G, то f интегрируема и на E.

6. Если E – измеримое множество, $\{E_i\}_{i=1}^n$ – его разбиение, f определена и ограничена на E и для каждого $i = \overline{1,n}$ сужение f на E_i интегрируемо на E_i, то f интегрируема на E. При этом

$$\iint_E f(x,y)dxdy = \sum_{i=1}^{n} \iint_{E_i} f(x,y)dxdy.$$

7. Если функции $f_i, i = \overline{1,m}$, интегрируемы на множестве E, то для любых действительных чисел $\alpha_i, i = \overline{1,m}$, функция $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i f_i$ интегрируема на E и

$$\iint_E \left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i f_i(x,y)\right)dxdy = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \iint_E f_i(x,y)dxdy.$$

8. Если функции f и g интегрируемы и ограничены на множестве E, то функция $f \cdot g$, а если $\inf\limits_E |g(x,y)| > 0$, то и частное $f\,/\,g$ интегрируемы на E.

9. Если функции f и g интегрируемы на множестве E и для каждой точки $M \in E$ $f(M) \le g(M)$, то $\iint_E f(x,y)dxdy \le \iint_E g(x,y)dxdy$.

10. Если функция f интегрируема и ограничена на множестве E, то функция $|f|$ интегрируема на E, причем

$$\left|\iint_E f(x,y)dxdy\right| \le \iint_E |f(x,y)|dxdy.$$

11. Если E и G – измеримые множества, $E \subset G$, f неотрицательна, ограничена и интегрируема на G, то f интегрируема на E и

$$\iint_E f(x,y)dxdy \le \iint_G f(x,y)dxdy.$$

12. Если f неотрицательна и интегрируема на открытом множестве G, $M^0(x^0, y^0) \in G$, f непрерывна в точке M^0 и $f(M^0) > 0$, то

$$\iint_G f(x,y)dxdy > 0.$$

Следствие. Если f непрерывна и интегрируема на открытом множестве G и $\iint_G |f(x,y)|dxdy = 0$, то $f \equiv 0$ на G.

13. Если f ограничена и интегрируема на E, $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ – семейство измеримых множеств, причем для каждого $k = \overline{1,\infty}$ $E_k \subset E$, $\lim\limits_{k\to\infty} mE_k = mE$, то $\lim\limits_{k\to\infty} \iint_{E_k} f(x,y)dxdy = \iint_E f(x,y)dxdy$.

14. Пусть функции f и g ограничены и интегрируемы на множестве E. Если g неотрицательна или неположительна на E и существуют такие числа α и β, что всюду на E $\alpha \le f(x, y) \le \beta$, то найдется такое число $\lambda \in [\alpha, \beta]$, что $\iint_E f(x,y)g(x,y)dxdy = \lambda \iint_E g(x,y)dxdy$.

Следствие. Пусть E – измеримое множество, которое либо связно, либо является замыканием связного множества (под связным мы понимаем множество, любые две точки которого можно соединить непрерывной кривой, целиком лежащей в данном множестве). Если функция f ограничена, непрерывна и интегрируема на E, то существует такая точка $P \in E$, что $\iint_E f(x,y)dxdy = f(P)mE$.

15. Если E – измеримое множество, то ограниченная на замыкании $\bar{E}$ множества E функция f интегрируема на E тогда и только тогда, когда она интегрируема на его замыкании; при этом если f интегрируема на E, то $\iint_{\bar{E}} f(x,y)dxdy = \iint_E f(x,y)dxdy$.

1.1.3. Сведение двойного интеграла к повторному

Пусть функция $f(x, y)$ определена в области

$$G = \{(x, y): a \le x \le b, y_1(x) \le y \le y_2(x)\},$$

где функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$. Область такого вида называется *y-трапецевидной* (рис. 1).

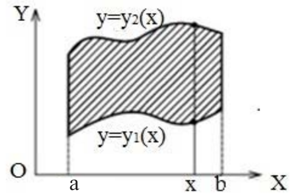


Рис. 1. *y*-трапецевидная область

Теорема 1. Предположим, что существует интеграл $\iint_G f(x,y)dxdy$ и для каждого $x \in [a, b]$ существует интеграл $I(x) = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$. Тогда существует интеграл $\int_a^b I(x)dx = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$, называемый повторным, и справедливо равенство

$$\iint_G f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy. \tag{1}$$

Если область G является *x-трапецевидной* (см. рис. 2), то при соответствующих условиях справедлива формула

$$\iint_G f(x,y)dxdy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx. \tag{2}$$

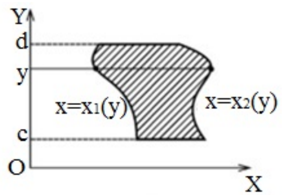


Рис. 2. *x*-трапецевидная область

Рассмотрим примеры вычисления двойных интегралов с использованием формул (1) и (2).

Пример 1. Вычислить двойной интеграл от функции $f(x, y) = x^2y + y^3$ по области G, ограниченной кривыми $y = x$, $y = x^2$.

Решение.

Первый способ. Воспользуемся формулой (1). Из рис. 3 видно, что в пределах области G переменная x принимает значения от 0 до 1, а y при каждом фиксированном x изменяется от x^2 до x.

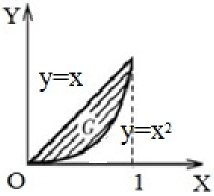


Рис. 3. Область G

Согласно формуле (1) имеем

$$\iint_G (x^2y + y^3)dxdy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} (x^2y + y^3)dy.$$

Вычислим внутренний интеграл с помощью формулы Ньютона – Лейбница.

$$\int_{x^2}^{x} (x^2y + y^3)dy = \left(\frac{x^2y^2}{2} + \frac{y^4}{4}\right)\Bigg|_{x^2}^{x} = \frac{x^4}{2} + \frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{2} - \frac{x^8}{4} -= \frac{3x^4}{4} - \frac{x^6}{2} - \frac{x^8}{4}.$$

Теперь вычислим повторный интеграл.

$$\int_0^1 \left(\frac{3x^4}{4} - \frac{x^6}{2} - \frac{x^8}{4}\right)dx = \left(\frac{3x^5}{20} - \frac{x^7}{14} - \frac{x^9}{36}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{3}{20} - \frac{1}{14} - \frac{1}{36} = \frac{16}{315}.$$

Таким образом,

$$\iint_G (x^2y + y^3)dxdy = \frac{16}{315}.$$

Второй способ. Воспользуемся формулой (2). Из рис. 4 видно, что в пределах области G переменная y принимает значения от 0 до 1, а x при каждом фиксированном y изменяется от y до $y^{1/2}$.

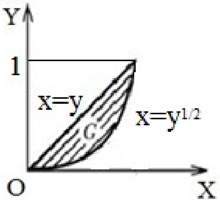


Рис. 4. Область G

Согласно формуле (2) имеем

$$\iint_G (x^2y+y^3)dxdy = \int_0^1 dy \int_y^{y^{1/2}} (x^2y+y^3)dx.$$

Для записи дальнейших вычислений наряду с формой записи, использованной в первом способе, применяют также следующую форму записи:

$$\int_0^1 dy \int_y^{y^{\frac{1}{2}}} (x^2y+y^3)dx = \int_0^1 \left(\frac{x^3y}{3}+y^3x\right)\Bigg|_y^{y^{\frac{1}{2}}} dy =$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{y^{\frac{5}{2}}}{3}+y^{\frac{7}{2}}-\frac{y^4}{3}-y^4\right)dy = \int_0^1 \left(\frac{y^{\frac{5}{2}}}{3}+y^{\frac{7}{2}}-\frac{4y^4}{3}\right)dy =$$

$$= \left(\frac{2y^{7/2}}{21}+\frac{2y^{9/2}}{9}-\frac{4y^5}{15}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{2}{21}+\frac{2}{9}-\frac{4}{15}=\frac{16}{315}.$$

Пример 2. Вычислить двойной интеграл $\iint_G 2|x|dxdy$, где G – трапеция с вершинами (–1; 4), (1; 1), (4; 1), (5; 4).

Решение. Разделим область интегрирования на три части так, как показано на рис. 5.

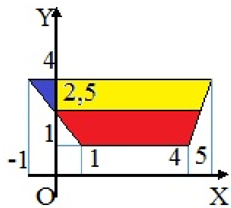


Рис. 5. Область *G*

В силу свойства аддитивности (свойство 6 двойного интеграла) интеграл по области *G* будет складываться из трех интегралов по указанным областям.

Для вычислений нам понадобятся уравнения боковых сторон трапеции. Найдем их.

Прямая, содержащая левую сторону трапеции, проходит через точки (–1; 4) и (1; 1). Записывая уравнение прямой в виде $x = ky + b$ и решая систему

$$\begin{cases} -1 = 4k+b \\ 1 = k+b \end{cases},$$

получаем, что $k = -\frac{2}{3}, b = \frac{5}{3}$. Значит, уравнение прямой имеет вид

$$x = -\frac{2}{3}y + \frac{5}{3}.$$

Подставляя в полученное уравнение $x = 0$, находим ординату точки пересечения данной прямой с осью Oy. Она равна 2,5.

Найдем уравнение прямой, содержащей правую сторону трапеции. Эта прямая проходит через точки (4; 1) и (5; 4). Записывая уравнение прямой в виде $x = ky + b$ и решая систему

$$\begin{cases} 4 = k + b \\ 5 = 4k + b \end{cases},$$

получаем, что $k = \frac{1}{3}, b = \frac{11}{3}$. Значит, уравнение прямой имеет вид

$$x = \frac{1}{3}y + \frac{11}{3}.$$

Для вычисления двойных интегралов по отмеченным на рис. 5 областям воспользуемся формулой (2).

Интеграл по области, закрашенной синим цветом, равен

$$\int_{2,5}^{4} dy \int_{-\frac{2}{3}y+\frac{5}{3}}^{0} 2|x|dx = -2\int_{2,5}^{4} dy \int_{-\frac{2}{3}y+\frac{5}{3}}^{0} xdx = -2\int_{2,5}^{4} \left(\frac{x^2}{2}\Bigg|_{-\frac{2}{3}y+\frac{5}{3}}^{0} \right) dy =$$

$$-2\int_{2,5}^{4} \frac{1}{2}\left(-\left(-\frac{2}{3}y + \frac{5}{3} \right)^2 \right) dy = \int_{2,5}^{4} \left(-\frac{2}{3}y + \frac{5}{3} \right)^2 dy = -\frac{3}{2} \cdot \frac{\left(-\frac{2}{3}y + \frac{5}{3} \right)^3}{3}\Bigg|_{2,5}^{4} =$$

$$= -\frac{1}{2}(-1 - 0) = \frac{1}{2}.$$

Вычислим интеграл по области, закрашенной красным цветом.

$$\int_{1}^{2,5} dy \int_{-\frac{2}{3}y+\frac{5}{3}}^{\frac{1}{3}y+\frac{11}{3}} 2|x|dx = 2\int_{1}^{2,5} dy \int_{-\frac{2}{3}y+\frac{5}{3}}^{\frac{1}{3}y+\frac{11}{3}} xdx = 2\int_{1}^{2,5} \left(\frac{x^2}{2}\Bigg|_{-\frac{2}{3}y+\frac{5}{3}}^{\frac{1}{3}y+\frac{11}{3}} \right) dy =$$

$$= \int_{1}^{2,5} \left(\left(\frac{1}{3}y + \frac{11}{3} \right)^2 - \left(-\frac{2}{3}y + \frac{5}{3} \right)^2 \right) dy =$$

$$= \int_{1}^{2,5} \left(\frac{y^2}{9} + \frac{22y}{9} + \frac{121}{9} - \frac{4y^2}{9} + \frac{20y}{9} - \frac{25}{9} \right) dy =$$

$$= \frac{1}{9}\int_{1}^{2,5} (42y - 3y^2 + 96)dy = \frac{1}{3}\int_{1}^{2,5} (14y - y^2 + 32)dy =$$

$$= \frac{1}{3}\left(7y^2 - \frac{y^3}{3} + 32y\right)\Bigg|_1^{2,5} = \frac{1}{3}\left(7 \cdot \frac{25}{4} - \frac{1}{3} \cdot \frac{125}{8} + 80 - 7 + \frac{1}{3} - 32\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(41 + \frac{175}{4} - \frac{117}{24}\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{984 + 1050 - 117}{24} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1917}{24} = \frac{213}{8}.$$

Интеграл по области, закрашенной желтым цветом, равен

$$\int_{2,5}^{4} dy \int_0^{\frac{1}{3}y+\frac{11}{3}} 2|x|dx = 2\int_{2,5}^{4} dy \int_0^{\frac{1}{3}y+\frac{11}{3}} xdx = 2\int_{2,5}^{4} \left(\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^{\frac{1}{3}y+\frac{11}{3}}\right) dy =$$

$$= \int_{2,5}^{4} \left(\left(\frac{1}{3}y + \frac{11}{3}\right)^2 - 0\right) dy = \frac{1}{27}(y+11)^3\Big|_{2,5}^{4} = \frac{1}{27}\left(15^3 - \left(\frac{27}{2}\right)^3\right) =$$

$$= 5^3 - \frac{27^2}{8} = 125 - \frac{729}{8} = \frac{1000 - 729}{8} = \frac{271}{8}.$$

Складывая найденные значения, получаем

$$\iint_G 2|x|dxdy = \frac{1}{2} + \frac{213}{8} + \frac{271}{8} = \frac{4 + 213 + 271}{8} = \frac{488}{8} = 61.$$

1.1.4. Замена переменных в двойном интеграле

Пусть G – замкнутая измеримая область на плоскости переменных x и y, g – замкнутая измеримая область на плоскости переменных u и v. Предположим, что отображение

$$\begin{cases} x = \varphi(u, v) \\ y = \psi(u, v) \end{cases} \qquad (3)$$

взаимно однозначно отображает область g на область G.

Теорема 2. Если функция $f(x, y)$ ограничена в области G и непрерывна всюду в G, кроме, быть может, некоторого множества точек меры ноль, функции $\varphi(u, v)$ и $\Psi(u, v)$ имеют в области g непрерывные частные производные первого порядка, якобиан отображения

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \varphi_u & \varphi_v \\ \psi_u & \psi_v \end{vmatrix}$$

отличен от нуля в области g, то справедлива формула

$$\iint_G f(x,y)dxdy = \iint_g f(\varphi(u,v), \psi(u,v)) \left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right| dudv. \qquad (4)$$

Формула (4) называется *формулой замены переменных в двойном интеграле*.

Замечание. Теорема сохраняет свою силу и при более слабых предположениях. А именно, взаимная однозначность отображения и требование отличия от нуля якобиана могут нарушаться на множестве нулевой меры.

Частным случаем замены переменных в двойном интеграле является переход к полярным координатам.

Полярные координаты с полюсом в точке $O(0;\ 0)$ и полярной осью, совпадающей с положительной полуосью абсцисс (ρ – полярный радиус, φ – полярный угол), связаны с декартовыми координатами x и y формулами

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases}. \qquad (5)$$

При изменении переменных x и y от $-\infty$ до $+\infty$ переменные ρ и φ принимают значения в следующих диапазонах:

$$0 \le \rho < +\infty, 0 \le \ \varphi < 2\pi.$$

Иногда удобно считать, что $-\pi < \varphi \le \pi$. Якобиан отображения (5) равен

$$\begin{vmatrix} x_\rho & x_\varphi \\ y_\rho & y_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix} = \rho\cos^2\varphi + \rho\sin^2\varphi = \rho.$$

Формула (4) в этом случае принимает вид

$$\iint_G f(x,y)dxdy = \iint_g f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\rho d\varphi. \qquad (6)$$

Рассмотрим примеры вычисления двойных интегралов с помощью полярных координат.

Пример 3. Используя полярные координаты, вычислить интеграл $\iint_G (2x^2 + 3y^2)dxdy$, где G – круг, ограниченный окружностью $x^2 + y^2 = 2x$.

Решение. Уравнение $x^2 + y^2 = 2x$ может быть записано в виде $(x - 1)^2 + y^2 = 1$. Оно задает окружность радиуса 1 с центром в точке (1; 0). Область интегрирования G изображена на рис. 6, *а*.

Введем полярные координаты (ρ, φ) по формулам (5). Из рис. 6, *а* видно, что полярный угол φ принимает все значения из отрезка $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Подставляя выражения (5) в уравнение окружности $x^2 + y^2 = 2x$, получаем $\rho^2 = 2\rho\cos\varphi$ откуда $\rho = 0$ или $\rho = 2\cos\varphi$. Эти две линии на плоскости переменных ρ и φ при $-\pi / 2 \le \varphi \le \pi / 2$

ограничивают область g, являющуюся прообразом области G при отображении (5). Область g изображена на рис. 6, *б*. Якобиан отображения $\frac{D(x,y)}{D(\rho,\varphi)} = \rho$ обращается в ноль на части границы области g, задаваемой уравнением $\rho = 0$. На этой части границы нарушается взаимная однозначность отображения (всем точкам отрезка $\{(\rho,\varphi)\colon \rho = 0, -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}\}$ соответствует одна и та же точка $(x, y) = (0; 0)$). Но в силу замечания после теоремы 2 формула замены переменных применима. Подынтегральная функция $2x^2 + 3y^2$ в новых переменных равна $2\rho^2 + \rho^2 \sin^2 \varphi$. Применяя формулу (6), получаем

$$\iint_G (2x^2 + 3y^2)dxdy = \iint_g (2\rho^3 + \rho^3 \sin^2 \varphi)d\rho d\varphi.$$

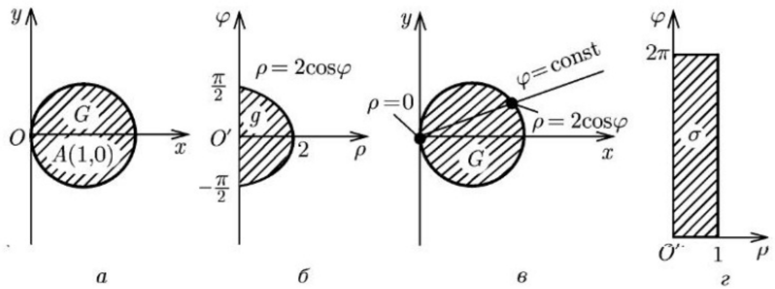


Рис. 6. Области G, g, σ

Двойной интеграл по области g сводим к повторному и вычисляем с помощью формулы Ньютона – Лейбница:

$$\iint_g (2\rho^3 + \rho^3 \sin^2 \varphi)d\rho d\varphi = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} (2\rho^3 + \rho^3 \sin^2 \varphi)d\rho =$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{\rho^4}{2} + \frac{\rho^4}{4}\sin^2 \varphi\right)\Bigg|_0^{2\cos\varphi} d\varphi = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (8\cos^4 \varphi + 4\cos^4 \varphi \sin^2 \varphi)d\varphi =$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(2(2\cos^2 \varphi)^2 + (2\cos^2 \varphi)^2 \frac{1 - \cos 2\varphi}{2}\right) d\varphi =$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(2(1 + \cos 2\varphi)^2 + (1 + \cos 2\varphi)^2 \frac{1 - \cos 2\varphi}{2}\right) d\varphi =$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(2 + 4\cos 2\varphi + 2\cos^2 2\varphi + (1 + 2\cos 2\varphi + \cos^2 2\varphi)\frac{1 - \cos 2\varphi}{2}\right) d\varphi =$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(2 + 4\cos 2\varphi + 2\cos^2 2\varphi + \frac{1}{2}(1 + \cos 2\varphi - \cos^2 2\varphi - \cos^3 2\varphi)\right) d\varphi =$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (2{,}5 + 4{,}5\ \cos 2\varphi + 1{,}5\cos^2 2\varphi - 0{,}5\cos^3 2\varphi) d\varphi =$$

$$= (2{,}5\varphi + 2{,}25\sin 2\varphi)\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} + 0{,}75\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 + \cos 4\varphi) d\varphi -$$

$$-0{,}25\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 2\varphi) d(\sin 2\varphi) = 2{,}5\pi + 0{,}75\varphi\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + 0{,}1875\sin 4\varphi\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} -$$

$$-0{,}25\sin 2\varphi\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + 0{,}25\left.\frac{\sin^3 2\varphi}{3}\right|_{-\pi/2}^{\pi/2} = 2{,}5\pi + 0{,}75\pi = 3{,}25\pi.$$

Замечание 1. Расстановку пределов интегрирования в рассмотренном выше повторном интеграле можно произвести, рассматривая не область g, а область G. Из рис. 6, *в* видно, что при каждом фиксированном значении φ из отрезка $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ переменная ρ изменяется от 0 (значение ρ в полюсе) до значения $2\cos\varphi$ (значение ρ на окружности, уравнение которой в полярных координатах имеет вид $\rho = 2\cos\varphi$). Следовательно, по φ нужно интегрировать от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$, а по ρ – от 0 до $2\cos\varphi$.

Замечание 2. Область интегрирования в последней задаче станет более простой, если ввести полярные координаты с полюсом не в точке $O(0; 0)$, а в точке $A(1; 0)$ (центре круга). Соответствующее отображение задается формулами

$$\begin{cases} x - 1 = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases}. \qquad (7)$$

Переменная φ изменяется теперь от 0 до 2π. Переменная ρ при каждом фиксированном значении φ принимает все значения от 0 до 1. Якобиан отображения, как и раньше, равен ρ. Прообразом области G при отображении (7) является прямоугольник $\sigma = \{(\rho, \varphi)\colon 0 \le \rho \le 1,\ 0 \le \varphi \le 2\pi\}$, изображенный на рис. 6, *г*. Подынтегральная функция принимает вид

$$2(1 + \rho\cos\varphi)^2 + 3\rho^2\sin^2\varphi = 2 + 4\rho\cos\varphi + 2\rho^2 + \rho^2\sin^2\varphi.$$

Применяя формулу (6), сводя двойной интеграл к повторному и используя формулу Ньютона – Лейбница, получаем

$$\iint_G (2x^2+3y^2)dxdy = \iint_\sigma (2\rho + 4\rho^2\cos\varphi + 2\rho^3 + \rho^3\sin^2\varphi)d\rho d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (2\rho + 4\rho^2\cos\varphi + 2\rho^3 + \rho^3\sin^2\varphi)d\rho =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\rho^2 + \frac{4\rho^3\cos\varphi}{3} + \frac{\rho^4}{2} + \frac{\rho^4\sin^2\varphi}{4}\right)\Bigg|_0^1 d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{2} + \frac{4\cos\varphi}{3} + \frac{\sin^2\varphi}{4}\right)d\varphi = \left(\frac{3}{2}\varphi + \frac{4\sin\varphi}{3}\right)\Bigg|_0^{2\pi} +$$

$$+\frac{1}{8}\int_0^{2\pi}(1-\cos 2\varphi)d\varphi = 3\pi + \frac{\varphi}{8}\Bigg|_0^{2\pi} - \frac{\sin 2\varphi}{16}\Bigg|_0^{2\pi} = 3{,}25\pi.$$

Пример 4. Вычислить интеграл $\iint_G xy^3dxdy$, где G – кольцевая область $\{(x, y): 1 \le x^2 + y^2 \le 4\}$.

Решение. Область интегрирования G изображена на рис. 7, *а*. Ее можно разбить на трапецевидные части, к которым применима формула сведения двойного интеграла к повторному, например так, как показано на рис. 7, *а*. Однако удобнее перейти к полярным координатам.

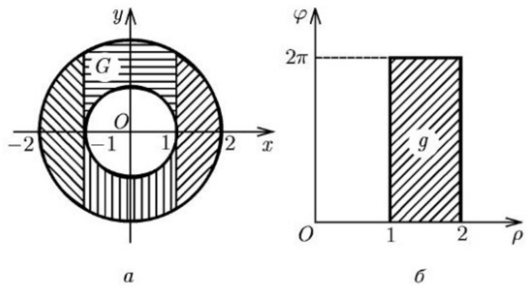


Рис. 7. Области G и g

Сделаем замену переменных по формулам

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases}. \tag{8}$$

В данном случае полярный угол φ изменяется от 0 до 2π, а полярный радиус ρ при каждом фиксированном значении φ изменяется от 1 до 2. Область g, являющаяся прообразом области G при отображении (8), изображена на рис. 7, *б*. Применяя формулу (6) и сводя двойной интеграл к повторному, получаем

$$\iint_G xy^3dxdy = \iint_g \rho^5\cos\varphi\sin^3\varphi\, d\rho d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_1^2 \rho^5\cos\varphi\sin^3\varphi\, d\rho = \int_0^{2\pi}\cos\varphi\sin^3\varphi\, d\varphi \int_1^2 \rho^5 d\rho =$$

$$= \frac{\rho^6}{6}\Bigg|_1^2 \cdot \int_0^{2\pi}\sin^3\varphi d\sin\varphi = \frac{21}{2}\cdot\frac{\sin^4\varphi}{4}\Bigg|_0^{2\pi} = 0.$$

1.1.5. Вычисление объемов с помощью двойных интегралов

Рассмотрим пространственное тело

$$T = \{(x,y,z): (x,y)\in G, 0 \le z \le f(x,y)\},$$

где G – замкнутая измеримая область; $f(x, y)$ – непрерывная в области G функция (рис. 8).

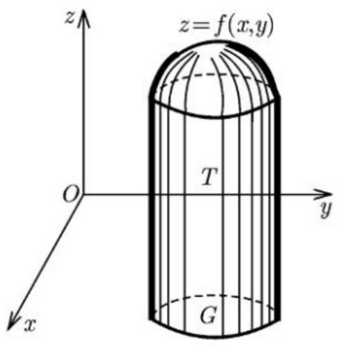


Рис. 8. Тело *T*

Объем тела T может быть вычислен по формуле

$$V(T) = \iint_G f(x,y)dxdy. \quad (9)$$

Приведем пример вычисления объема тела с использованием формулы (9).

Пример 5. Найти объем тела T, ограниченного поверхностями $z = 0$, $z = x^2 + y^2$, $y = x^2$, $y = 1$.

Решение. Тело T можно представить в виде

$$T = \{(x, y, z): (x, y) \in G, 0 \le z \le x^2 + y^2\},$$

где G – область на плоскости Oxy, ограниченная линиями $y = x^2$ и $y = 1$, то есть $G = \{(x, y): -1 \le x \le 1, x^2 \le y \le 1\}$. Применяя формулу (9) и сводя двойной интеграл к повторному, получаем

$$V(T) = \iint_G (x^2 + y^2)dxdy = \int_{-1}^{1} dx \int_{x^2}^{1} (x^2 + y^2)\, dy =$$

$$= \int_{-1}^{1} \left(x^2 y + \frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{x^2}^{1} dx = \int_{-1}^{1} \left(x^2 + \frac{1}{3} - x^4 - \frac{x^6}{3}\right) dx =$$

$$= 2\int_{0}^{1} \left(x^2 + \frac{1}{3} - x^4 - \frac{x^6}{3}\right) dx = 2\left(\frac{x^3}{3} + \frac{x}{3} - \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{21}\right)\Bigg|_{0}^{1} =$$

$$= 2\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{21}\right) = 2 \cdot \frac{70 - 21 - 5}{105} = \frac{88}{105}.$$

1.1.6. Физические приложения двойных интегралов

Пусть G – материальная бесконечно тонкая пластинка (замкнутая измеримая область на плоскости Oxy) с непрерывной плотностью $\mu(x, y)$. Тогда

$m = \iint_G \mu(x, y)dxdy$ – масса пластинки;

$M_x = \iint_G y\mu(x, y)dxdy$, $M_y = \iint_G x\mu(x, y)dxdy$ – статические моменты пластинки относительно осей Ox и Oy соответственно;

$x_0 = \frac{M_y}{m}$, $y_0 = \frac{M_x}{m}$ – координаты центра тяжести пластинки;

$I_x = \iint_G y^2\mu(x, y)dxdy$, $I_y = \iint_G x^2\mu(x, y)dxdy$ – моменты инерции пластинки относительно осей Ox и Oy соответственно;

$I_0 = I_x + I_y = \iint_G (x^2 + y^2)\mu(x, y)dxdy$ – момент инерции пластинки относительно начала координат.

Рассмотрим примеры решения задач с использованием приведенных выше формул.

Пример 6. Найти координаты центра тяжести круглой пластинки $G = \{(x, y): x^2 + y^2 \le a^2\}$, если ее плотность в точке $M(x, y)$ пропорциональна расстоянию от точки M до точки $A(a, 0)$.

Решение. Пластинка G изображена на рис. 9.

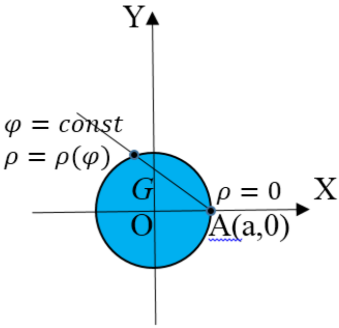


Рис. 9. Область G

Расстояние между точками M и A выражается формулой

$$\rho(M, A) = \sqrt{(x-a)^2 + y^2}.$$

Следовательно, плотность пластинки $\mu(x, y)$ равна

$$k\sqrt{(x-a)^2 + y^2},$$

где k – коэффициент пропорциональности. Масса пластинки m выражается интегралом

$$\iint_G k\sqrt{(x-a)^2 + y^2}dxdy. \qquad (10)$$

Для упрощения подынтегральной функции перейдем к полярным координатам с полюсом в точке A по формулам

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi + a \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases}. \qquad (11)$$

В данном случае φ принимает значения от $\pi / 2$ до $3\pi / 2$, а ρ при каждом фиксированном φ изменяется от 0 (значение ρ в полюсе) до $\rho(\varphi)$ (значение ρ на окружности). Выразим плотность пластинки через переменные ρ и φ:

$$\mu(x, y) = k\sqrt{(x-a)^2 + y^2} = k\sqrt{\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi} = k\rho.$$

Для нахождения функции $\rho(\varphi)$ получим уравнение окружности в полярных координатах. Для этого подставим в уравнение $x^2 + y^2 = a^2$ выражения (11). В результате получим

$$(\rho\cos\varphi + a)^2 + (\rho\sin\varphi)^2 = a^2, \rho^2 + 2a\rho\cos\varphi + a^2 = a^2,$$

$$\rho(\rho + 2a\cos\varphi) = 0, \text{ откуда } \rho = 0 \text{ или } \rho = -2a\cos\varphi.$$

Последнее уравнение – уравнение окружности в полярных координатах, то есть $\rho(\varphi) = -2a\cos\varphi$. Переходя в интеграле (10) к полярным координатам и сводя двойной интеграл к повторному, получаем

$$m=\int_{\pi/2}^{3\pi/2}d\varphi\int_0^{-2a\cos\varphi}k\rho^2d\rho=k\int_{\pi/2}^{3\pi/2}\left(\frac{\rho^3}{3}\right)\Bigg|_0^{-2a\cos\varphi}d\varphi=$$

$$=\frac{-8ka^3}{3}\int_{\pi/2}^{3\pi/2}\cos^3\varphi\ d\varphi=\frac{-8ka^3}{3}\int_{\pi/2}^{3\pi/2}(1-\sin^2\varphi)d\sin\varphi=$$

$$\frac{-8ka^3}{3}\left(\sin\varphi-\frac{\sin^3\varphi}{3}\right)\Bigg|_{\pi/2}^{3\pi/2}=\frac{-8ka^3}{3}\left(-1+\frac{1}{3}-1+\frac{1}{3}\right)=\frac{32ka^3}{9}.$$

Теперь найдем статические моменты пластинки относительно осей *Ox* и *Oy* по формулам

$$M_x=\iint_G\ yk\sqrt{(x-a)^2+y^2}dxdy\,,M_y=\iint_G\ xk\sqrt{(x-a)^2+y^2}dxdy.$$

Переходя в данных интегралах к полярным координатам и сводя двойные интегралы к повторным, получаем

$$M_x=\int_{\pi/2}^{3\pi/2}d\varphi\int_0^{-2a\cos\varphi}k\rho^3\sin\varphi\,d\rho,$$

$$M_y=\int_{\pi/2}^{3\pi/2}d\varphi\int_0^{-2a\cos\varphi}k\rho^2(\rho\cos\varphi+a)d\rho.$$

Последовательно вычисляем интегралы:

$$M_x=k\int_{\pi/2}^{3\pi/2}\sin\varphi\left(\frac{\rho^4}{4}\right)\Bigg|_0^{-2a\cos\varphi}d\varphi=4a^4k\int_{\pi/2}^{3\pi/2}\sin\varphi\cos^4\varphi\,d\varphi=$$

$$=-4a^4k\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\cos^4\varphi\ d\cos\varphi=-4a^4k\frac{\cos^5\varphi}{5}\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}=0,$$

$$M_y=k\int_{\pi/2}^{3\pi/2}d\varphi\int_0^{-2a\cos\varphi}(\rho^3\cos\varphi+\rho^2a)d\rho=$$

$$=k\int_{\pi/2}^{3\pi/2}\left(\frac{\rho^4}{4}\cos\varphi+\frac{\rho^3}{3}a\right)\Bigg|_0^{-2a\cos\varphi}d\varphi=$$

$$=k\int_{\pi/2}^{3\pi/2}\left(4a^4\cos^5\varphi-\frac{8a^4}{3}\cos^3\varphi\right)d\varphi=$$

$$=4a^4k\int_{\pi/2}^{3\pi/2}\left((1-\sin^2\varphi)^2-\frac{2}{3}(1-\sin^2\varphi)\right)d\sin\varphi=$$

$$=4a^4k\int_{\pi/2}^{3\pi/2}\left((1-2\sin^2\varphi+\sin^4\varphi)-\frac{2}{3}(1-\sin^2\varphi)\right)d\sin\varphi=$$

$$= 4a^4k\left(\frac{1}{3}\sin\varphi - \frac{4}{3}\cdot\frac{\sin^3\varphi}{3} + \frac{\sin^5\varphi}{5}\right)\Bigg|_{\pi/2}^{3\pi/2} =$$

$$= 8a^4k\left(-\frac{1}{3} + \frac{4}{9} - \frac{1}{5}\right) = 8a^4k\cdot\left(-\frac{4}{45}\right) = -\frac{32a^4k}{45}.$$

Окончательно получаем

$$x_0 = \frac{M_y}{m} = -\frac{32a^4k}{45}\cdot\frac{9}{32ka^3} = -\frac{a}{5}, y_0 = \frac{M_x}{m} = 0.$$

Пример 7. Найти моменты инерции относительно осей Ox и Oy однородной пластинки G с плотностью $\rho = 1$, если она ограничена кривыми $xy = 1$, $xy = 2$, $y = 2x$, $x = 2y$ и расположена в первом квадранте.

Решение. Пластинка G изображена на рис. 10.

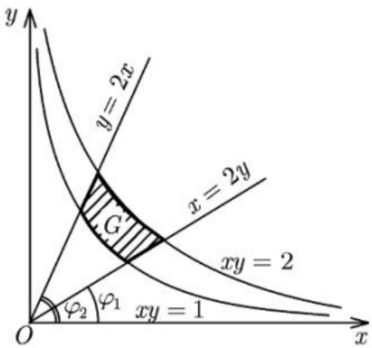


Рис. 10. Область G

В соответствии с формулами для I_x и I_y имеем

$$I_x = \iint_G y^2\,dxdy, I_y = \iint_G x^2\,dxdy. \tag{12}$$

При вычислении интегралов в декартовых координатах x и y область G пришлось бы делить на три части. В данной задаче удобнее воспользоваться полярными координатами.

Пусть

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases}. \tag{13}$$

В нашем случае переменная φ изменяется от $\varphi_1 = \operatorname{arctg}\frac{1}{2}$ до $\varphi_2 = \operatorname{arctg}2$ (см. рис. 10). Для нахождения границ изменения переменной ρ необходимо получить уравнения гипербол $xy = 1$, $xy = 2$ в полярных координатах. В соответствии с формулами (13) имеем

$$xy = \rho^2 \cos\varphi \sin\varphi.$$

Следовательно, уравнения гипербол примут вид

$$\rho^2 \cos\varphi \sin\varphi = 1, \rho^2 \cos\varphi \sin\varphi = 2.$$

Таким образом, на кривой $xy = 1$ зависимость ρ от φ выражается равенством $\rho = \frac{1}{\sqrt{\cos\varphi \sin\varphi}}$, а на кривой $xy = 2$ – равенством $\rho = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\cos\varphi \sin\varphi}}$. Отсюда мы заключаем, что при каждом фиксированном значении φ переменная ρ изменяется от $\rho_1(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{\cos\varphi \sin\varphi}}$ до $\rho_2(\varphi) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\cos\varphi \sin\varphi}}$.. Переходя в интегралах (12) к полярным координатам и сводя двойные интегралы к повторным, получаем

$$I_x = \int_{\operatorname{arctg}\frac{1}{2}}^{\operatorname{arctg} 2} d\varphi \int_{\frac{1}{\sqrt{\cos\varphi \sin\varphi}}}^{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\cos\varphi \sin\varphi}}} \rho^3 \sin^2\varphi \, d\rho,$$

$$I_y = \int_{\operatorname{arctg}\frac{1}{2}}^{\operatorname{arctg} 2} d\varphi \int_{\frac{1}{\sqrt{\cos\varphi \sin\varphi}}}^{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\cos\varphi \sin\varphi}}} \rho^3 \cos^2\varphi \, d\rho.$$

Последовательно вычисляем интегралы:

$$I_x = \int_{\operatorname{arctg}\frac{1}{2}}^{\operatorname{arctg} 2} \sin^2\varphi \left(\frac{\rho^4}{4} \Bigg|_{\frac{1}{\sqrt{\cos\varphi \sin\varphi}}}^{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\cos\varphi \sin\varphi}}} \right) d\varphi =$$

$$= \frac{1}{4} \int_{\operatorname{arctg}\frac{1}{2}}^{\operatorname{arctg} 2} \sin^2\varphi \left(\frac{4}{\cos^2\varphi \sin^2\varphi} - \frac{1}{\cos^2\varphi \sin^2\varphi} \right) d\varphi = \frac{3}{4} \int_{\operatorname{arctg}\frac{1}{2}}^{\operatorname{arctg} 2} \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi} =$$

$$= \frac{3}{4}\left((\operatorname{tg}\varphi)\Big|_{\operatorname{arctg}\frac{1}{2}}^{\operatorname{arctg} 2} \right) = \frac{3}{4}\left(2 - \frac{1}{2}\right) = \frac{9}{8}.$$

$$I_y = \int_{\operatorname{arctg}\frac{1}{2}}^{\operatorname{arctg} 2} \cos^2\varphi \left(\frac{\rho^4}{4} \Bigg|_{\frac{1}{\sqrt{\cos\varphi \sin\varphi}}}^{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\cos\varphi \sin\varphi}}} \right) d\varphi =$$

$$= \frac{1}{4} \int_{\operatorname{arctg}\frac{1}{2}}^{\operatorname{arctg} 2} \cos^2\varphi \left(\frac{4}{\cos^2\varphi \sin^2\varphi} - \frac{1}{\cos^2\varphi \sin^2\varphi} \right) d\varphi = \frac{3}{4} \int_{\operatorname{arctg}\frac{1}{2}}^{\operatorname{arctg} 2} \frac{d\varphi}{\sin^2\varphi} =$$

$$= -\frac{3}{4}\left((\operatorname{ctg}\varphi)\Big|_{\operatorname{arctg}\frac{1}{2}}^{\operatorname{arctg} 2} \right) = -\frac{3}{4}\left(\frac{1}{2} - 2\right) = \frac{9}{8}.$$

§ 1.2. Тройные интегралы

1.2.1. Определение и свойства тройного интеграла

Основные понятия для тройных интегралов аналогичны соответствующим понятиям для двойных интегралов. Пусть E – измеримое по Жордану (кубируемое) множество в трехмерном евклидовом пространстве. Предположим, что оно представлено в виде $E = \bigcup_{i=1}^{n} E_i$, где $E_i, i = \overline{1,n}$, – такие измеримые по Жордану непустые множества, что для каждого i и любого $j \neq i$ мера множества $E_i \cap E_j$ равна нулю. В этом случае говорят, что множества $E_i, i = \overline{1,n}$, образуют *разбиение множества E*. Пусть на множестве E задана функция $f(x, y, z)$.

В каждом множестве E_i выберем произвольным образом точку $M_i(s_i, t_i, u_i)$ и составим *интегральную сумму*

$$I(E_i, M_i) = \sum_{i=1}^{n} f(s_i, t_i, u_i) m(E_i),$$

где $m(E_i)$ – мера Жордана (объем) множества E_i.

Диаметр ограниченного множества G в трехмерном евклидовом пространстве определяется равенством

$$d(G) = \sup_{P,Q \in G} \rho(P, Q),$$

где $\rho(P, Q)$ – расстояние между точками $P(x_P, y_P, z_P)$ и $Q(x_Q, y_Q, z_Q)$, вычисляемое по формуле

$$\rho(P, Q) = \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2 + (z_P - z_Q)^2}.$$

Пусть $d_i = d(E_i), d = \max\limits_{1 \le i \le n} d_i$. Число d называется диаметром разбиения $\{E_i\}_{i=1}^{n}$.

Определение. Число I называется пределом интегральных сумм $I(E_i, M_i)$ при $d \to 0$, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что для любого разбиения множества E, удовлетворяющего условию $d < \delta(\varepsilon)$, при любом выборе промежуточных точек M_i выполняется неравенство $|I(E_i, M_i) - I| < \varepsilon$.

В этом случае используют запись $\lim\limits_{d \to 0} I(E_i, M_i) = I$.

Определение. Если существует $\lim\limits_{d \to 0} I(E_i, M_i) = I$, то он называется *тройным интегралом от функции $f(x, y, z)$ по множеству E* и обозначается $\iiint_E f(x,y,z)dxdydz$. Функция $f(x, y, z)$ называется при этом *интегрируемой на множестве E*.

Свойства 1–15, сформулированные ранее для двойных интегралов (см. пункт 1.1.2), остаются справедливыми и для тройных интегралов.

1.2.2. Вычисление тройных интегралов с помощью повторного интегрирования

Пусть функция $f(x, y, z)$ определена и ограничена в области

$$T = \{(x,y,z): (x,y) \in G, z_1(x,y) \leq z \leq z_2(x,y)\},$$

где $z_1(x, y)$ и $z_2(x, y)$ – непрерывные в замкнутой квадрируемой области G функции (рис. 11).

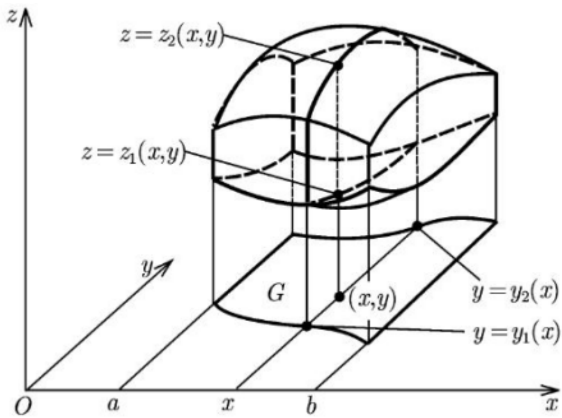


Рис. 11. Область T

Теорема 3. Если существует тройной интеграл $\iiint_T f(x,y,z)dxdydz$ и для каждой точки $(x, y) \in G$ существует интеграл $I(x,y) = \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$, то существует интеграл

$$\iint_G I(x,y)dxdy = \iint_G dxdy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz,$$

называемый *повторным*, и справедливо равенство

$$\iiint_T f(x,y,z)dxdydz = \iint_G dxdy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz. \tag{14}$$

Замечание. Если область G является y-трапецевидной, то есть

$$G = \{(x, y): a \le x \le b, y_1(x) \le y \le y_2(x)\}$$

(см. рис. 11), то двойной интеграл $\iint_G I(x, y)dxdy$ в свою очередь может быть сведен к повторному:

$$\iint_G I(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} I(x,y)dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz.$$

В этом случае равенство (14) примет вид

$$\iiint_T f(x,y,z)dxdydz = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz. \quad (15)$$

Пусть функция $f(x, y, z)$ определена и ограничена в замкнутой кубируемой области T, которая заключена между плоскостями $x = a$ и $x = b$, причем каждое сечение области T плоскостью $x = \mathrm{const}(a \le x \le b)$ представляет собой квадрируемую фигуру $G(x)$, при этом выполняются условия $T \cap \{(x,y,z): x = a\} \ne \ne \emptyset, T \cap \{(x,y,z): x = b\} \ne \emptyset$ (рис. 12).

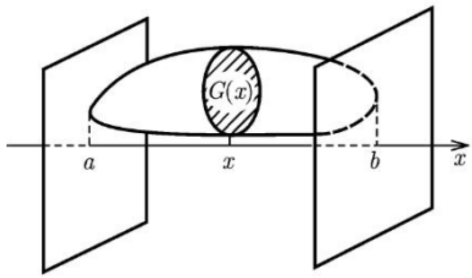


Рис. 12. Область T

Теорема 4. Если существует тройной интеграл $\iiint_T f(x,y,z)dxdydz$ и при каждом фиксированном $x \in [a, b]$ существует интеграл

$$I(x) = \iint_{G^*(x)} f(x,y,z)dydz,$$

где $G^*(x)$ – проекция $G(x)$ на плоскость Oyz, то существует интеграл

$$\int_a^b I(x)dx = \int_a^b dx \iint_{G^*(x)} f(x,y,z)dydz,$$

называемый повторным, и справедливо равенство

$$\iiint_T f(x,y,z)dxdydz = \int_a^b dx \iint_{G^*(x)} f(x,y,z)dydz. \qquad (16)$$

Приведем примеры вычисления тройных интегралов с использованием формул (14) и (16).

Пример 8. Вычислить тройной интеграл $I = \iiint_T (x+y)\sqrt{z}dxdydz$, где T – область, ограниченная поверхностями $z = 0$, $z = y$, $y = x^2$, $y = 1$.

Решение. Область T изображена на рис. 13.

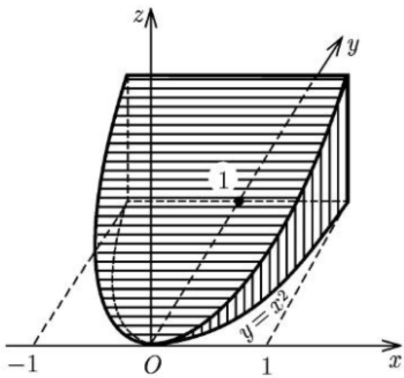


Рис. 13. Область T

Для каждой точки (x, y) области $G = \{(x, y): -1 \le x \le 1, x^2 \le y \le 1\}$ переменная z изменяется от 0 (значение z в области G) до y (значение z на поверхности $z = y$). Таким образом, область T можно представить в виде

$$T = \{(x,y,z): (x,y) \in G, 0 \le z \le y\}.$$

Применяя формулу (14), получаем

$$I = \iiint_T (x+y)\sqrt{z}dxdydz = \iint_G dxdy \int_0^y (x+y)\sqrt{z}dz.$$

Сведем двойной интеграл по области G к повторному. В соответствии с формулой (15) имеем

$$I = \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 dy \int_0^y (x+y)\sqrt{z}dz = \frac{2}{3}\int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 \left((x+y)z^{3/2}\Big|_0^y\right) dy =$$

$$= \frac{2}{3}\int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 (x+y)y^{3/2}dy = \frac{2}{3}\int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 (xy^{3/2} + y^{5/2})dy =$$

$$= \frac{2}{3}\int_{-1}^{1}\left(\left(\frac{2}{5}xy^{5/2} + \frac{2}{7}y^{7/2}\right)\Big|_{x^2}^{1}\right)dx = \frac{2}{3}\int_{-1}^{1}\left(\frac{2}{5}x + \frac{2}{7} - \frac{2}{5}x|x|^5 - \frac{2}{7}|x|^7\right)dx =$$

$$= \frac{2}{3}\left(\frac{2}{5}\int_{-1}^{1}x(1-|x|^5)dx + \frac{2}{7}\int_{-1}^{1}(1-|x|^7)dx\right).$$

Первый интеграл в полученной сумме обращается в ноль ввиду нечетности подынтегральной функции. Поскольку во втором интеграле подынтегральная функция является четной, имеем

$$I = \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{7}\cdot 2\int_{0}^{1}(1-|x|^7)dx = \frac{8}{3\cdot 7}\int_{0}^{1}(1-x^7)dx = \frac{8}{3\cdot 7}\left(x - \frac{x^8}{8}\right)\Big|_{0}^{1} =$$

$$= \frac{8}{3\cdot 7}\left(1 - \frac{1}{8}\right) = \frac{8}{3\cdot 7}\cdot\frac{7}{8} = \frac{1}{3}.$$

Пример 9. Вычислить интеграл $I = \iiint_T xy\sqrt{z}dxdydz$, где T – область, ограниченная поверхностями $z = 0$, $z = xy$, $y = x$, $x = 1$.

Решение. Область T изображена на рис. 14, *а*. Она заключена между плоскостями $x = 0$ и $x = 1$. Сечение области T плоскостью $x = \text{const}$ представляет собой треугольник $G(x)$. Его проекция $G^*(x)$ на плоскость Oyz изображена на рис. 14, *б*. В соответствии с формулой (16) имеем

$$\iiint_T xy\sqrt{z}dxdydz = \int_0^1 dx\iint_{G^*(x)} xy\sqrt{z}dydz.$$

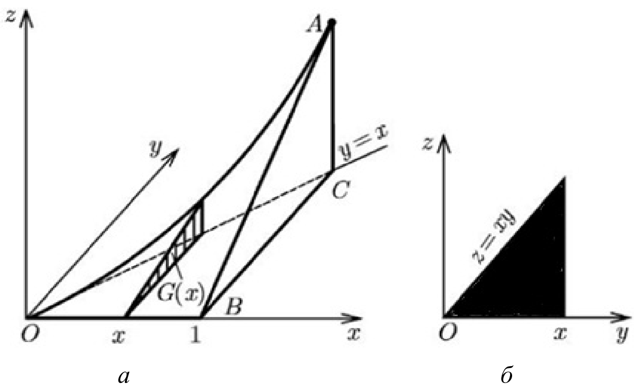


Рис. 14. *а* – область T; *б* – проекция $G^*(x)$ сечения $G(x)$ на плоскость Oyz

Сводя двойной интеграл по области $G^*(x)$ к повторному, получаем

$$I = \int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^{xy} xy\sqrt{z}\,dz = \frac{2}{3}\int_0^1 dx \int_0^x \left(xyz^{3/2}\Big|_0^{xy}\right) dy =$$

$$= \frac{2}{3}\int_0^1 dx \int_0^x x^{5/2}y^{5/2}dy = \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{7}\int_0^1 \left(x^{\frac{5}{2}}y^{\frac{7}{2}}\Big|_0^x\right) dx =$$

$$= \frac{4}{21}\int_0^1 x^6 dx = \frac{4}{147}x^7\big|_0^1 = \frac{4}{147}.$$

1.2.3. Замена переменных в тройном интеграле

Пусть G – замкнутая кубируемая область в пространстве переменных x, y, z, g – замкнутая кубируемая область в пространстве переменных u, v, w. Предположим, что отображение

$$\begin{cases} x = \varphi(u,v,w) \\ y = \psi(u,v,w) \\ z = \chi(u,v,w) \end{cases} \qquad (17)$$

взаимно однозначно отображает область g на область G.

Теорема 5. Если функция $f(x, y, z)$ ограничена в области G и непрерывна всюду в G, кроме, быть может, некоторого множества точек меры ноль, функции $\varphi(u, v, w)$, $\psi(u, v, w)$, и $\chi(u, v, w)$ имеют в области g непрерывные частные производные первого порядка, якобиан отображения

$$\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)} = \begin{vmatrix} \varphi_u & \varphi_v & \varphi_w \\ \psi_u & \psi_v & \psi_w \\ \chi_u & \chi_v & \chi_w \end{vmatrix}$$

отличен от нуля в области g, то справедлива формула

$$\iiint_G f(x,y,z)dxdydz =$$
$$= \iiint_g f\big(\varphi(u,v,w),\psi(u,v,w),\chi(u,v,w)\big)\left|\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}\right| dudvdw. \qquad (18)$$

Формула (18) называется формулой замены переменных в тройном интеграле.

Замечание. Теорема сохраняет свою силу и при более слабых предположениях. А именно, взаимная однозначность отображения и требование отличия от нуля якобиана могут нарушаться на множестве нулевой меры.

При вычислении тройных интегралов иногда бывает удобно перейти к цилиндрическим или сферическим координатам.

Цилиндрические координаты. Пусть $M(x, y, z)$ – произвольная точка в пространстве переменных x, y, z, M' – проекция точки M на плоскость Oxy (рис. 15).

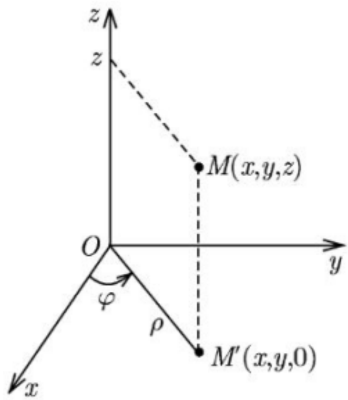


Рис. 15. Цилиндрические координаты

Точка M однозначно задается тройкой чисел (ρ, φ, z), где (ρ, φ) – полярные координаты точки M' на плоскости Oxy, z – аппликата точки M. Тройка чисел (ρ, φ, z) называется цилиндрическими координатами точки M. Прямоугольные координаты (x, y, z) связаны с цилиндрическими координатами (ρ, φ, z) формулами

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi, \\ z = z \end{cases} \tag{19}$$

где $0 \le \rho < +\infty$, $0 \le \varphi < 2\pi$, $-\infty < z < +\infty$. Иногда удобно считать, что $-\pi < \varphi \le \pi$. Якобиан отображения (19) равен

$$\begin{vmatrix} x_\rho & x_\varphi & x_z \\ y_\rho & y_\varphi & y_z \\ z_\rho & z_\varphi & z_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho\cos^2\varphi + \rho\sin^2\varphi = \rho.$$

Поверхность $\rho = \text{const}$ представляет собой цилиндрическую поверхность. Этим объясняется название «цилиндрические координаты».

Сферические координаты. Пусть $M(x, y, z)$ – произвольная точка в пространстве переменных x, y, z, M' – проекция точки M на плоскость Oxy (рис. 16).

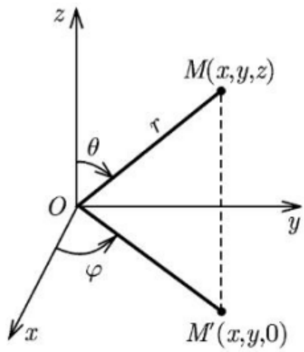


Рис. 16. Сферические координаты

Точка M однозначно задается тройкой чисел (r, θ, φ) где r – расстояние от точки O (начала координат) до точки M; θ – угол между лучами OM и Oz; φ – полярный угол точки M' на плоскости Oxy. Тройка чисел (r, θ, φ) называется *сферическими координатами точки M*. Прямоугольные координаты (x, y, z) связаны со сферическими координатами (r, θ, φ) формулами

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta, \\ z = r\cos\theta \end{cases} \tag{20}$$

где $0 \le r < +\infty$, $0 \le \theta \le \pi$, $0 \le \varphi < 2\pi$. Якобиан отображения (20) равен

$$\begin{vmatrix} x_r & x_\theta & x_\varphi \\ y_r & y_\theta & y_\varphi \\ z_r & z_\theta & z_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\cos\theta & -r\sin\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & r\sin\varphi\cos\theta & r\cos\varphi\sin\theta \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= r^2\cos^2\varphi\ \cos^2\theta\sin\theta + r^2\sin^3\theta\sin^2\varphi + r^2\sin^2\varphi\cos^2\theta\sin\theta +$$

$$+ r^2\sin^3\theta\cos^2\varphi = r^2\cos^2\theta\sin\theta + r^2\sin^3\theta = r^2\sin\theta.$$

Иногда в качестве θ берется угол между лучами OM и OM' со знаком плюс, если $z > 0$, и со знаком минус, если $z > 0$. В этом случае $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$, а в формулах (20) нужно заменить $\sin\theta$ на $\cos\theta$, а $\cos\theta$ на $\sin\theta$. Якобиан отображения будет равен $r^2\cos\theta$.

Поверхность $r = \text{const}$ представляет собой сферическую поверхность. Этим объясняется название «сферические координаты».

Рассмотрим примеры вычисления тройных интегралов с использованием цилиндрических и сферических координат.

Пример 10. Вычислить интеграл $I = \iiint_T ((x+y)^2 - z)dxdydz$, если область T ограничена поверхностями $z = 0$, $(z-1)^2 = x^2 + y^2$.

Решение. Область T представляет собой конус (рис. 17, *а*).

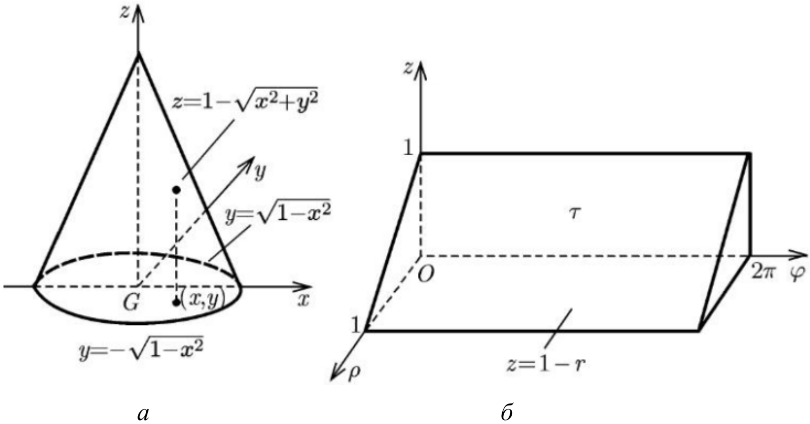


Рис. 17. *а* – область T; *б* – область τ

Уравнение конической поверхности, ограничивающей область T, можно записать в виде $z = 1 - \sqrt{x^2+y^2}$, а саму область T представить следующим образом:

$$T = \left\{(x, y, z): (x, y) \in G, 0 \le z \le 1 - \sqrt{x^2+y^2}\right\},$$

где G – круг радиуса 1 с центром в начале координат. Поэтому вычисление данного тройного интеграла можно свести к последовательному вычислению трех определенных интегралов в прямоугольных координатах:

$$I = \int_{-1}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{0}^{1-\sqrt{x^2+y^2}} ((x+y)^2 - z)\, dz.$$

Однако удобнее перейти к цилиндрическим координатам (ρ, φ, z) по формулам

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi. \\ z = z \end{cases}$$

Тогда прообразом круга G будет прямоугольник

$$\{(\rho, \varphi): 0 \le \rho \le 1, 0 \le \varphi \le 2\pi\},$$

прообразом конической поверхности — плоскость $z = 1 - \rho$, а прообразом области T — область τ, изображенная на рис. 17, *б*. Якобиан перехода к цилиндрическим координатам равен ρ, подынтегральная функция в цилиндрических координатах имеет вид $\rho^2(1 + \sin 2\varphi) - z$. Сводя тройной интеграл по области τ к трем последовательно вычисляемым определенным интегралам, получаем

$$I = \iiint_{\tau} (\rho^2(1+\sin 2\varphi) - z)\rho d\rho d\varphi dz =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 d\rho \int_0^{1-\rho} (\rho^2(1+\sin 2\varphi) - z)\rho dz =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \left(\rho^3(1+\sin 2\varphi)z - \frac{\rho z^2}{2}\right)\Bigg|_0^{1-\rho} d\rho =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \left(\rho^3(1-\rho)(1+\sin 2\varphi) - \frac{\rho(1-\rho)^2}{2}\right) d\rho =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\left(\frac{\rho^4}{4} - \frac{\rho^5}{5}\right)(1+\sin 2\varphi) - \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\rho^2}{2} - \frac{2\rho^3}{3} + \frac{\rho^4}{4}\right)\right)\Bigg|_0^1 d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{20}(1+\sin 2\varphi) - \frac{1}{24}\right) d\varphi = \frac{1}{20}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{6} + \sin 2\varphi\right) d\varphi =$$

$$= \frac{1}{20}\cdot\left(\frac{\varphi}{6} - \frac{\cos 2\varphi}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{1}{20}\cdot\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{60}.$$

Замечание. Расстановку пределов интегрирования в цилиндрических координатах можно произвести, рассматривая не область τ, а изменение цилиндрических координат в области T. На рис. 17, *а* наглядно видно, что в области G переменная φ изменяется от 0 до 2π, при каждом фиксированном значении φ переменная ρ изменяется от 0 до 1, а для каждой точки (ρ, φ) области G переменная z изменяется в области T от 0 (значение z в области G) до $1 - \sqrt{x^2+y^2} = 1 - \rho$ (значение z на конической поверхности).

Пример 11. Вычислить интеграл $I = \iiint_T \sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz$, где T — область, ограниченная поверхностью $x^2 + y^2 + z^2 = z$.

Решение. Область T представляет собой шар, ограниченный сферой, уравнение которой можно записать в виде $x^2 + y^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ (рис. 18, *а*).

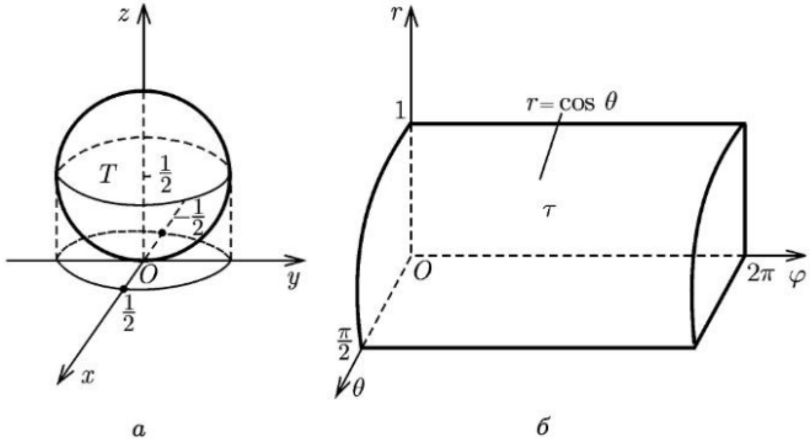


Рис. 18. *а* – область *T*; *б* – область τ

Данный интеграл можно вычислить с помощью повторного интегрирования в прямоугольных координатах:

$$I = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dx \int_{-\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}}^{\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}} dy \int_{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{2}-x^2-y^2}}^{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}-x^2-y^2}} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dz.$$

Однако удобнее перейти к сферическим координатам (r, θ, φ) по формулам

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta. \\ z = r\cos\theta \end{cases} \tag{21}$$

При этом переменная φ изменяется от 0 до 2π, переменная θ при каждом фиксированном значении φ изменяется от 0 до $\frac{\pi}{2}$. Подставляя выражения (21) в уравнение сферы, получаем $r^2 = r\cos\theta$, откуда $r = 0$ или $r = \cos\theta$. Эти две поверхности в пространстве переменных r, θ, φ при $0 \le \varphi \le 2\pi, 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ ограничивают снизу и сверху область τ (см. рис. 18, *б*), являющуюся прообразом области *T* при отображении (21). Якобиан отображения (21) равен $r^2\sin\theta$, подынтегральная функция в сферических координатах равна r. Вычисляя тройной интеграл по области τ с помощью повторного интегрирования, получаем

$$I=\iiint_{\tau} r^3\sin\theta\,drd\theta d\varphi=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi/2}d\theta\int_0^{\cos\theta}r^3\sin\theta\,dr=$$

$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi/2}\left(\frac{r^4}{4}\sin\theta\Big|_0^{\cos\theta}\right)d\theta=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi/2}\frac{\cos^4\theta\sin\theta}{4}d\theta=$$

$$=-\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta d(\cos\theta)=-\frac{1}{4}(\varphi|_0^{2\pi})\left(\frac{\cos^5\theta}{5}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right)=-\frac{\pi}{2}\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)=\frac{\pi}{10}.$$

Замечание. Расстановку пределов интегрирования для переменной r можно произвести, рассматривая не область τ, а изменение r при фиксированных значениях φ и θ в области T. На рис. 18, *а* наглядно видно, что на каждом луче $\varphi = \text{const}$, $\theta = \text{const}$ переменная r изменяется в шаре T от 0 (значение r в начале координат) до $\cos\theta$ (значение r на сфере).

1.2.4. Физические приложения тройных интегралов

Пусть T – материальное тело (замкнутая кубируемая область в пространстве $Oxyz$) с непрерывной плотностью $\mu(x, y, z)$. Тогда

$m=\iiint_T \mu(x,y,z)dxdydz$ – масса тела;

$M_{yz}=\iiint_T x\mu(x,y,z)dxdydz\,, M_{zx}=\iiint_T y\mu(x,y,z)dxdydz,$

$M_{xy}=\iiint_T z\mu(x,y,z)dxdydz$ – статические моменты тела относительно плоскостей Oyz, Ozx и Oxy соответственно;

$x_0=\frac{M_{yz}}{m}, y_0=\frac{M_{zx}}{m}, z_0=\frac{M_{xy}}{m}$ – координаты центра тяжести тела;

$I_{yz}=\iiint_T x^2\mu(x,y,z)dxdydz\,, I_{zx}=\iiint_T y^2\mu(x,y,z)dxdydz,$

$I_{xy}=\iiint_T z^2\mu(x,y,z)dxdydz$ – моменты инерции тела относительно плоскостей Oyz, Ozx и Oxy соответственно;

$I_x=I_{zx}+I_{xy}=\iiint_T (y^2+z^2)\mu(x,y,z)dxdydz,$

$I_y=I_{xy}+I_{yz}=\iiint_T (z^2+x^2)\mu(x,y,z)dxdydz,$

$I_z=I_{yz}+I_{zx}=\iiint_T (x^2+y^2)\mu(x,y,z)dxdydz$ – моменты инерции тела относительно осей Ox, Oy и Oz соответственно;

$I_0=I_{yz}+I_{zx}+I_{xy}=\iiint_T (x^2+y^2+z^2)\mu(x,y,z)dxdydz$ – момент инерции тела относительно начала координат.

Рассмотрим примеры решения задач с использованием приведенных выше формул.

Пример 12. Найти массу однородного тела T с плотностью $\mu = 1$, если оно ограничено поверхностями $x^2 = 2pz, y^2 = 2px, x = \frac{p}{2}$, $z = 0$ $(p > 0)$.

Решение. Тело T изображено на рис. 19.

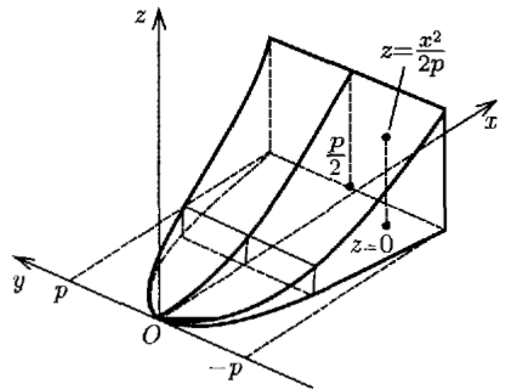


Рис. 19. Тело T

Его можно представить в виде

$$T = \left\{(x, y, z){:}\ -p \le y \le p, \frac{y^2}{2p} \le x \le \frac{p}{2}, 0 \le z \le \frac{x^2}{2p}\right\}.$$

Используя формулу для массы тела, с помощью повторного интегрирования получаем

$$m = \iiint_T dxdydz = \int_{-p}^{p} dy \int_{\frac{y^2}{2p}}^{\frac{p}{2}} dx \int_0^{\frac{x^2}{2p}} dz = \int_{-p}^{p} dy \int_{\frac{y^2}{2p}}^{\frac{p}{2}} \frac{x^2}{2p} dx =$$

$$= \frac{1}{6p} \int_{-p}^{p} \left(x^3 \Big|_{\frac{y^2}{2p}}^{\frac{p}{2}} \right) dy = \frac{1}{48p} \int_{-p}^{p} \left(p^3 - \frac{y^6}{p^3} \right) dy = \frac{1}{48p} \left(p^3 y - \frac{y^7}{7p^3} \right) \Bigg|_{-p}^{p} =$$

$$= \frac{1}{48p} \left(p^4 - \frac{p^4}{7} + p^4 - \frac{p^4}{7} \right) = \frac{1}{24p} \left(p^4 - \frac{p^4}{7} \right) = \frac{p^3}{28}.$$

Пример 13. Найти моменты инерции относительно координатных плоскостей тела из примера 12.

Решение. Применяя формулу для момента инерции относительно плоскости Oxy и повторное интегрирование, получаем

$$I_{xy}=\iiint_T z^2dxdydz=\int_{-p}^{p}dy\int_{\frac{y^2}{2p}}^{\frac{p}{2}}dx\int_0^{\frac{x^2}{2p}}z^2dz=\frac{1}{3}\int_{-p}^{p}dy\int_{\frac{y^2}{2p}}^{\frac{p}{2}}\left(z^3\Big|_0^{\frac{x^2}{2p}}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{3}\int_{-p}^{p}dy\int_{\frac{y^2}{2p}}^{\frac{p}{2}}\frac{x^6}{8p^3}dx=\frac{1}{24p^3}\int_{-p}^{p}\left(\frac{x^7}{7}\Bigg|_{\frac{y^2}{2p}}^{\frac{p}{2}}\right)dy=\frac{1}{168p^3}\int_{-p}^{p}\left(\frac{p^7}{2^7}-\frac{y^{14}}{2^7p^7}\right)dy=$$

$$=\frac{1}{168\cdot 128p^3}\left(yp^7-\frac{y^{15}}{15p^7}\right)\Bigg|_{-p}^{p}=\frac{1}{168\cdot 128p^3}\left(2p^8-2\frac{p^8}{15}\right)=$$

$$=\frac{p^5}{168\cdot 64}\left(1-\frac{1}{15}\right)=\frac{14p^5}{168\cdot 64\cdot 15}=\frac{p^5}{12\cdot 64\cdot 15}=\frac{p^5}{64\cdot 180}=\frac{p^5}{11520}.$$

Аналогичным образом находим моменты инерции тела относительно плоскостей *Ozx* и *Oyz*:

$$I_{zx}=\iiint_T y^2dxdydz=\int_{-p}^{p}dy\int_{\frac{y^2}{2p}}^{\frac{p}{2}}dx\int_0^{\frac{x^2}{2p}}y^2dz=\int_{-p}^{p}dy\int_{\frac{y^2}{2p}}^{\frac{p}{2}}\left(y^2z\Big|_0^{\frac{x^2}{2p}}\right)dx=$$

$$=\int_{-p}^{p}dy\int_{\frac{y^2}{2p}}^{\frac{p}{2}}y^2\frac{x^2}{2p}dx=\frac{1}{6p}\int_{-p}^{p}\left(y^2x^3\Big|_{\frac{y^2}{2p}}^{\frac{p}{2}}\right)dy=\frac{1}{48p}\int_{-p}^{p}\left(y^2p^3-\frac{y^8}{p^3}\right)dy=$$

$$=\frac{1}{48p}\left(\frac{y^3p^3}{3}-\frac{y^9}{9p^3}\right)\Bigg|_{-p}^{p}=\frac{1}{144p}\left(2p^6-2\frac{p^6}{3}\right)=\frac{p^5}{72}\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{p^5}{108},$$

$$I_{yz}=\iiint_T x^2dxdydz=\int_{-p}^{p}dy\int_{\frac{y^2}{2p}}^{\frac{p}{2}}dx\int_0^{\frac{x^2}{2p}}x^2dz=\int_{-p}^{p}dy\int_{\frac{y^2}{2p}}^{\frac{p}{2}}\left(x^2z\Big|_0^{\frac{x^2}{2p}}\right)dx=$$

$$=\int_{-p}^{p}dy\int_{\frac{y^2}{2p}}^{\frac{p}{2}}\frac{x^4}{2p}dx=\frac{1}{10p}\int_{-p}^{p}\left(x^5\Big|_{\frac{y^2}{2p}}^{\frac{p}{2}}\right)dy=\frac{1}{320p}\int_{-p}^{p}\left(p^5-\frac{y^{10}}{p^5}\right)dy=$$

$$=\frac{1}{320p}\left(p^5y-\frac{y^{11}}{11p^5}\right)\Bigg|_{-p}^{p}=\frac{1}{320p}\left(2p^6-2\frac{p^6}{11}\right)=\frac{p^5}{160}\left(1-\frac{1}{11}\right)=\frac{p^5}{176}.$$

Выводы по главе

В данной главе были рассмотрены понятия двойного и тройного интегралов, их свойства и способы вычисления.

Важнейшими свойствами кратных интегралов являются свойства линейности и аддитивности. При вычислении кратных интегралов наряду с повторным интегрированием в прямоугольных координатах широко используется метод замены переменных. В некоторых случаях вычисление двойного интеграла значительно упрощается при переходе к полярным координатам. Точно так же использование цилиндрических и сферических координат во многих случаях позволяет избежать громоздких вычислений при нахождении тройных интегралов. Кратные интегралы используются для нахождения площадей плоских фигур и объемов пространственных тел. Кроме того, двойные и тройные интегралы применяются для вычисления массы материальной плоской пластины или материального тела, координат их центров тяжести и моментов инерции.

Контрольные вопросы и задания

1. Дайте определение предела интегральных сумм и двойного (тройного) интеграла.

2. Верно ли, что для всякой непрерывной на измеримом множестве функции существует двойной (тройной) интеграл по этому множеству?

3. Может ли существовать двойной (тройной) интеграл по некоторому множеству от разрывной функции?

4. Запишите формулы, выражающие свойства линейности и аддитивности кратных интегралов.

5. Сформулируйте теорему о среднем для кратных интегралов.

6. Сформулируйте теорему о сведении двойного интеграла к повторному для y-трапецевидной области и аналогичную ей теорему для x-трапецевидной области.

7. Сведите двойной интеграл $\iint_G f(x,y)dxdy$ к повторному двумя способами, если G – круг, задаваемый неравенством $(x-1)^2+(y-2)^2 \le 25$.

8. Сформулируйте теорему о замене переменных в двойном интеграле.

9. Изобразите на плоскости Oxy образ прямоугольника $\{(\rho, \varphi)\colon 0 \le \rho \le 1,\ 0 \le \varphi < 2\pi\}$ при отображении $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$. Является ли это отображение взаимно однозначным?

10. Запишите формулу для вычисления площади плоской фигуры с помощью двойного интеграла.

11. Запишите формулу для вычисления объема тела с помощью двойного интеграла.

12. Запишите формулы для вычисления координат центра тяжести и моментов инерции материальной плоской пластины.

13. Сформулируйте теорему о сведении тройного интеграла к повторному, в котором внутренний интеграл является определенным интегралом.

14. Сформулируйте теорему о сведении тройного интеграла к повторному, в котором внутренний интеграл является двойным.

15. Тройной интеграл $\iiint_T f(x,y,z)dxdydz$, где T — шар, ограниченный сферой $(x+1)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=9$, сведите к повторному двумя способами: а) так, чтобы внутренний интеграл в повторном был определенным интегралом; б) так, чтобы внутренний интеграл в повторном был двойным интегралом.

16. Сведите тройной интеграл из предыдущего задания к трем последовательно вычисляемым определенным интегралам.

17. Сформулируйте теорему о замене переменных в тройном интеграле.

18. Что представляет собой образ параллелепипеда $\{(\rho, \varphi, z)\colon 0 \le \rho \le 1,\ 0 \le \varphi < 2\pi,\ 0 \le z \le 1\}$ при отображении $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, $z = z$? Является ли это отображение взаимно однозначным?

19. Что представляет собой образ параллелепипеда $\{(r, \theta, \varphi)\colon 0 \le r \le 2,\ 0 \le \theta \le \pi/2,\ 0 \le \varphi = \pi\}$ при отображении $x = r \sin \theta \cos \varphi$, $y = r \sin \theta \sin \varphi$, $z = r \cos \theta$? Является ли это отображение взаимно однозначным?

20. Запишите формулы перехода от прямоугольных координат x, y, z к цилиндрическим координатам ρ, φ, z. Вычислите якобиан перехода.

21. Запишите формулы перехода от прямоугольных координат x, y, z к сферическим координатам r, θ, φ. Вычислите якобиан перехода.

22. Запишите формулу для вычисления объема тела с помощью тройного интеграла.

23. Запишите формулы для вычисления координат центра тяжести и моментов инерции материального тела.

Глава 2. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

§ 2.1. Криволинейные интегралы первого рода

2.1.1. Понятие криволинейного интеграла первого рода

Пусть кривая L на плоскости Oxy задана с помощью параметра t:

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, \alpha \le t \le \beta. \tag{22}$$

Вспомним, что кривая L называется *простой незамкнутой кривой*, если функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ непрерывны на отрезке $[\alpha, \beta]$ и различным значениям параметра t из этого отрезка соответствуют различные точки $M(\varphi(t), \psi(t))$ на кривой. Если точка $A(\varphi(\alpha), \psi(\alpha))$ совпадает с точкой $B(\varphi(\beta), \psi(\beta))$, а остальные точки кривой не являются кратными, то L называется *простой замкнутой кривой*. Точка $A(\varphi(\alpha), \psi(\alpha))$ называется *началом*, а точка $B(\varphi(\beta), \psi(\beta))$ – *концом кривой* L. Простая кривая L называется *спрямляемой*, если существует предел длин ломаных, вписанных в кривую, вычисленный при условии, что диаметр определяющего ломаную разбиения отрезка $[\alpha, \beta]$ стремится к нулю. Этот предел называется *длиной кривой* L.

Пусть L – простая спрямляемая (замкнутая или незамкнутая) кривая, заданная уравнениями (22). Предположим, что на кривой L определена функция $f(x, y)$. Разобьём отрезок $[\alpha, \beta]$ на n частей точками $\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = \beta$. При этом кривая L разобьётся на n дуг точками $A = M_0, M_1, \ldots, M_n = B$. Обозначим через Δl_k длину дуги $M_{k-1}M_k$, выберем на каждой дуге точку $N_k(\xi_k, \eta_k)$ и составим *интегральную сумму*

$$I(M_k, N_k) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)\,\Delta l_k.$$

Пусть $\Delta l = \max\limits_{1 \le k \le n} \Delta l_k$.

Определение. Число I называется *пределом интегральных сумм* $I(M_k, N_k)$ при $\Delta l \to 0$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что для всякого разбиения кривой L, у которого $\Delta l < \delta(\varepsilon)$, при любом выборе промежуточных точек N_k выполняется неравенство $|I(M_k, N_k) - I| < \varepsilon$. В этом случае используют запись $\lim\limits_{\Delta l \to 0} I(M_k, N_k) = I$.

Определение. Если $\lim\limits_{\Delta l \to 0} I(M_k, N_k) = I$, то число I называется *криволинейным интегралом первого рода от функции $f(x, y)$* по кривой L и обозначается

$$\int_L f(x,y)\,dl. \tag{23}$$

Если L – незамкнутая кривая с началом в точке A и концом в точке B, то криволинейный интеграл первого рода обозначается также

$$\int_{AB} f(x,y)\,dl.$$

Аналогичным образом определяется *простая спрямляемая пространственная кривая L*, задаваемая уравнениями

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t), \alpha \le t \le \beta, \\ z = \chi(t) \end{cases} \tag{24}$$

и вводится понятие криволинейного интеграла первого рода по этой кривой от заданной на ней функции $f(x, y, z)$.

Пусть кривая L (плоская или пространственная) образована из конечного числа последовательно примыкающих друг к другу простых спрямляемых кривых, то есть $L = \bigcup_{i=1}^{s} L_i$, причем конец L_i совпадает с началом L_{i+1} для всех $i = \overline{1, s-1}$. Тогда по определению L спрямляема и её длина равна сумме длин кривых L_i. Для заданной на L функции f криволинейный интеграл первого рода по L определяется как сумма криволинейных интегралов первого рода по кривым $L_i, \overline{1, s}$, если они существуют.

2.1.2. Вычисление криволинейного интеграла первого рода

Простая кривая L, заданная уравнениями (22), называется *гладкой* (*кусочно гладкой*), если функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ имеют непрерывные (кусочно непрерывные) производные, одновременно не обращающиеся в нуль на отрезке $[\alpha, \beta]$ (на отрезке $[\alpha, \beta]$, за исключением конечного числа точек).

Аналогично дается определение *гладкой* (*кусочно гладкой*) *пространственной кривой*, задаваемой уравнениями (24).

Отметим, что гладкая (кусочно гладкая) кривая является спрямляемой кривой. Гладкую кривую будем рассматривать как частный случай кусочно гладкой кривой.

Функция $f(M)$, определенная на кривой L, называется *непрерывной вдоль кривой* L, если для любой точки $M_0 \in L$ справедливо равенство $\lim\limits_{\substack{M\to M_0\\ M\in L}} f(M) = f(M_0)$. Если это условие выполнено в каждой точке кривой, за исключением конечного числа точек, в которых функция имеет разрывы первого рода, то функция $f(M)$ называется *кусочно непрерывной вдоль кривой* L.

Теорема 5. Если L – кусочно гладкая кривая, заданная уравнениями (22), и функция $f(x, y)$ кусочно непрерывна вдоль кривой L, то существует криволинейный интеграл (23) и справедливо равенство

$$\int_L f(x,y)\,dl = \int_\alpha^\beta f\big(\varphi(t),\psi(t)\big)\sqrt{\big(\varphi'(t)\big)^2+\big(\psi'(t)\big)^2}\,dt. \qquad (25)$$

Теорема 6. Пусть кривая L задана уравнением $y = y(x)$, $a \le x \le b$, функция $y(x)$ имеет на отрезке $[a, b]$ непрерывную производную (в этом случае L спрямляема), функция $f(x, y)$ непрерывна вдоль кривой L. Тогда существует криволинейный интеграл (23) и справедливо равенство

$$\int_L f(x,y)\,dl = \int_a^b f\big(x,y(x)\big)\sqrt{1+\big(y'(x)\big)^2}\,dx. \qquad (26)$$

Теорема 7. Пусть кривая L задана в полярных координатах уравнением $r = r(\varphi)$, $\varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2$, функция $r(\varphi)$ имеет на отрезке $[\varphi_1, \varphi_2]$ непрерывную производную (в этом случае L спрямляема), функция $f(x, y)$ непрерывна вдоль кривой L. Тогда существует криволинейный интеграл первого рода от функции f по кривой L и справедливо равенство

$$\int_L f(x,y)\,dl = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f(r(\varphi)\cos\varphi, r(\varphi)\sin\varphi)\sqrt{\big(r(\varphi)\big)^2+\big(r'(\varphi)\big)^2}\,d\varphi. \qquad (27)$$

Для кусочно гладкой пространственной кривой L, заданной уравнениями (24), и кусочно непрерывной вдоль L функции $f(x, y, z)$ справедлива формула

$$\int_L f(x,y,z)\,dl = \\ = \int_\alpha^\beta f\big(\varphi(t),\psi(t),\chi(t)\big)\sqrt{\big(\varphi'(t)\big)^2+\big(\psi'(t)\big)^2+\big(\chi'(t)\big)^2}\,dt. \qquad (28)$$

Теорема 8. Если L – спрямляемая кривая, f – непрерывная вдоль L функция, то существует криволинейный интеграл $\int_L f\,dl$.

2.1.3. Свойства криволинейного интеграла первого рода

1. Пусть L – спрямляемая кривая, f – интегрируемая на L функция, L^- – кривая, отличающаяся от L только направлением обхода. Тогда

$$\int_{L^-} f\,dl = \int_L f\,dl.$$

2. Если L – спрямляемая кривая, то $\int_L dl = |L|$, где $|L|$ – длина кривой L.

3. Свойство линейности. Если для каждой из функций f и g существует криволинейный интеграл первого рода по кривой L, α и β – произвольные действительные числа, то для функции $\alpha f + \beta g$ также существует криволинейный интеграл первого рода по кривой L, причем

$$\int_L (\alpha f + \beta g)dl = \alpha\int_L f\,dl + \beta\int_L g\,dl.$$

4. Свойство аддитивности. Если кривая $L = AB$ образована из кривых $L_1 = AC$ и $L_2 = CB$, то существование криволинейного интеграла первого рода от функции f по кривой L равносильно существованию криволинейных интегралов первого рода от функции f по кривым L_1 и L_2, причем

$$\int_L f\,dl = \int_{L_1} f\,dl + \int_{L_2} f\,dl.$$

5. Оценка модуля интеграла. Если существует криволинейный интеграл первого рода от функции f по кривой L, то существует и криволинейный интеграл первого рода от функции $|f|$ по кривой L, причем

$$\left|\int_L f\,dl\right| \le \int_L |f|\,dl.$$

6. Формула среднего значения. Если L – гладкая кривая, функция f непрерывна вдоль L, то найдется такая точка $M^* \in L$, что

$$\int_L f\,dl = f(M^*)|L|.$$

2.1.4. Физические приложения криволинейного интеграла первого рода

Пусть L – материальная плоская кривая (спрямляемая кривая на плоскости Oxy) с непрерывной линейной плотностью $\mu(x, y)$. Тогда

$m = \int_L \mu(x,y)\,dl$ – масса кривой L;

$M_x = \int_L y\mu(x,y)\,dl, M_y = \int_L x\mu(x,y)\,dl$ – статические моменты кривой L относительно осей Ox и Oy соответственно;

$x_0 = \frac{M_y}{m}, y_0 = \frac{M_x}{m}$ – координаты центра тяжести кривой L;

$I_x = \int_L y^2\mu(x,y)\,dl, I_y = \int_L x^2\mu(x,y)\,dl$ – моменты инерции кривой L относительно осей Ox и Oy соответственно;

$I_0 = \int_L (x^2+y^2)\mu(x,y)\,dl$ – момент инерции кривой L относительно начала координат.

Пусть теперь L – материальная пространственная кривая (спрямляемая кривая в пространстве $Oxyz$) с непрерывной линейной плотностью $\mu(x, y, z)$. Тогда

$m = \int_L \mu(x,y,z)\,dl$ – масса кривой L;

$M_{xy} = \int_L z\mu(x,y,z)\,dl, M_{yz} = \int_L x\mu(x,y,z)\,dl, M_{zx} = \int_L y\mu(x,y,z)\,dl$ – статические моменты кривой L относительно плоскостей Oxy, Oyz и Ozx соответственно;

$x_0 = \frac{M_{yz}}{m}, y_0 = \frac{M_{zx}}{m}, z_0 = \frac{M_{xy}}{m}$ – координаты центра тяжести кривой L;

$I_{xy} = \int_L z^2\mu(x,y,z)\,dl, I_{yz} = \int_L x^2\mu(x,y,z)\,dl, I_{zx} = \int_L y^2\mu(x,y,z)\,dl$ – моменты инерции кривой L относительно плоскостей Oxy, Oyz и Ozx соответственно;

$I_x = I_{xy} + I_{zx} = \int_L (z^2+y^2)\mu(x,y,z)dl,$

$I_y = I_{xy} + I_{yz} = \int_L (z^2+x^2)\mu(x,y,z)dl,$

$I_z = I_{yz} + I_{zx} = \int_L (x^2+y^2)\mu(x,y,z)dl$ – моменты инерции кривой L относительно осей Ox, Oy и Oz соответственно;

$I_0 = I_{yz} + I_{zx} + I_{xy} = \int_L (x^2+y^2+z^2)\mu(x,y,z)dl$ – момент инерции кривой L относительно начала координат.

2.1.5. Примеры вычисления криволинейных интегралов первого рода

Пример 14. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int_L \left(x^{4/3}+y^{4/3}\right)dl,$$

где L – астроида $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$.

Решение. Запишем параметрические уравнения астроиды:

$$x=a\cos^3 t, y=a\sin^3 t, 0\le t\le 2\pi.$$

Поскольку $x'=-3a\cos^2 t\ \sin t\,, y'=3a\sin^2 t\ \cos t$, то

$$(x')^2+(y')^2=9a^2\cos^2 t\sin^2 t.$$

Заметим, что $(x')^2+(y')^2=0$ при t равном $0,\frac{\pi}{2},\pi,\frac{3\pi}{2}$, то есть астроида является кусочно гладкой кривой.

Применяя формулу (25), получаем

$$\int_L \left(x^{4/3}+y^{4/3}\right)dl=\int_0^{2\pi}3aa^{4/3}(\cos^4 t+\sin^4 t)|\sin t\cos t|dt=$$

$$=12a^{7/3}\int_0^{\pi/2}(\cos^4 t+\sin^4 t)\sin t\cos t\,dt=$$

$$=12a^{7/3}\int_0^{\pi/2}(\cos^5 t\sin t+\sin^5 t\cos t)\,dt=$$

$$=12a^{7/3}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5 t\,d(\sin t)-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5 t\,d(\cos t)\right)=$$

$$=12a^{7/3}\left(\frac{\sin^6 t}{6}\Big|_0^{\pi/2}-\frac{\cos^6 t}{6}\Big|_0^{\pi/2}\right)=4a^{7/3}.$$

Пример 15. Вычислить криволинейный интеграл $\int_L \sqrt{x^2+y^2}dl$, где L – кривая, заданная уравнением $(x^2+y^2)^{3/2}=a^2(x^2-y^2)$.

Решение. Перейдем к полярным координатам по формулам

$$x=\rho\cos\varphi\,, y=\rho\sin\varphi.$$

Тогда уравнение кривой L примет вид

$$\rho=a^2\cos 2\varphi,$$

где $\varphi\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]\cup\left[\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right]$.

Для вычисления интеграла воспользуемся формулой (27). Так как $\sqrt{x^2+y^2}=\rho=a^2\cos 2\varphi\,,\sqrt{\rho^2+(\rho')^2}=\sqrt{(a^2\cos 2\varphi)^2+(2a^2\sin 2\varphi)^2}=$

$$=\sqrt{a^4\cos^2 2\varphi+4a^4\sin^2 2\varphi}=a^2\sqrt{1+3\sin^2 2\varphi},$$

то

$$\int_L \sqrt{x^2+y^2}dl = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} a^4 \cos 2\varphi \sqrt{1+3\sin^2 2\varphi}\, d\varphi +$$

$$+\int_{3\pi/4}^{5\pi/4} a^4 \cos 2\varphi \sqrt{1+3\sin^2 2\varphi}\, d\varphi = 2a^4 \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos 2\varphi \sqrt{1+3\sin^2 2\varphi}\, d\varphi =$$

$$= \frac{2a^4}{2\sqrt{3}} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1+3\sin^2 2\varphi}\, d\left(\sqrt{3}\ \sin 2\varphi\right).$$

Вычислим интеграл $I = \int \sqrt{1+x^2}dx$ с помощью формулы интегрирования по частям. Имеем

$$u = \sqrt{1+x^2}, du = \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}, dv = dx, v = x, I = x\sqrt{1+x^2} - \int \frac{x^2dx}{\sqrt{1+x^2}} =$$

$$= x\sqrt{1+x^2} - \int \frac{((1+x^2)-1)dx}{\sqrt{1+x^2}} = x\sqrt{1+x^2} - I + \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} =$$

$$= x\sqrt{1+x^2} - I + \ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right|, I = 0{,}5\left(x\sqrt{1+x^2} + \ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right|\right) + C.$$

Тогда

$$\int_L \sqrt{x^2+y^2}dl = \frac{a^4}{\sqrt{3}} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1+3\sin^2 2\varphi}\, d\left(\sqrt{3}\sin 2\varphi\right) =$$

$$= \frac{a^4}{2\sqrt{3}} \left(\sqrt{3}\sin 2\varphi \sqrt{1+3\sin^2 2\varphi} + \ln\left|\sqrt{3}\sin 2\varphi + \sqrt{1+3\sin^2 2\varphi}\right|\right)\Big|_{-\pi/4}^{\pi/4} =$$

$$= \frac{a^4}{2\sqrt{3}}\left(4\sqrt{3} + \ln\left|\sqrt{3}+2\right| - \ln\left|\sqrt{3}-2\right|\right) = \frac{a^4}{2\sqrt{3}}\left(4\sqrt{3} + \ln\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}\right) =$$

$$= \frac{a^4}{2\sqrt{3}}\left(4\sqrt{3} + 2\ln\left(2+\sqrt{3}\right)\right) = 2a^4 + \frac{a^4}{\sqrt{3}}\ln\left(2+\sqrt{3}\right).$$

Пример 16. Найти массу m материальной кривой L, заданной уравнением $y = \ln x$, где $1 \le x \le e$, если линейная плотность ее в каждой точке пропорциональна квадрату абсциссы, то есть $\mu(x, y) = kx^2$.

Решение. По формуле для массы имеем

$$m = \int_L kx^2 dl.$$

Для вычисления криволинейного интеграла воспользуемся равенством (26). Так как

$$\sqrt{1+(y')^2} = \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x},$$

то

$$m=\int_1^e kx^2\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}dx=k\int_1^e x\sqrt{1+x^2}dx=\frac{k}{2}\int_1^e\sqrt{1+x^2}\,d(1+x^2)=$$

$$=\frac{k}{3}(1+x^2)^{3/2}\Big|_1^e=\frac{k}{3}((1+e^2)^{3/2}-2\sqrt{2}).$$

Пример 17. Вычислить криволинейный интеграл $\int_L zdl$, где L – коническая винтовая линия, заданная параметрическими уравнениями $x = t\cos t$, $y = t\sin t$, $z = t$, $0 \le t \le t_0$.

Решение. Так как $x' = \cos t - t\sin t$, $y' = \sin t + t\cos t$, $z' = 1$, то

$$\sqrt{(x')^2+(y')^2+(z')^2}=\sqrt{2+t^2}.$$

Используя формулу (28), получаем

$$\int_L zdl=\int_0^{t_0}t\sqrt{2+t^2}\,dt=0{,}5\int_0^{t_0}\sqrt{2+t^2}\,d(2+t^2)=\frac{(2+t^2)^{3/2}}{3}\Bigg|_0^{t_0}=$$

$$=\frac{(2+{t_0}^2)^{3/2}-2^{3/2}}{3}.$$

Пример 18. Найти моменты инерции относительно осей координат однородной винтовой линии L, заданной параметрическими уравнениями $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z=\frac{t}{2\pi}, 0\le t\le 2\pi$, если ее плотность равна μ_0.

Решение. Поскольку $x'=-\sin t\,, y'=\cos t\,, z'=1/(2\pi)$, то

$$\sqrt{(x')^2+(y')^2+(z')^2}=\sqrt{1+1/(4\pi^2)}=\frac{\sqrt{1+4\pi^2}}{2\pi}.$$

Применяя формулы для моментов инерции и равенство (28), получаем

$$I_x=\mu_0\int_L(y^2+z^2)\,dl=\mu_0\frac{\sqrt{1+4\pi^2}}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\sin^2t+t^2/(4\pi^2))\,dt=$$

$$=\mu_0\frac{\sqrt{1+4\pi^2}}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1-\cos 2t}{2}+t^2/(4\pi^2)\right)dt=$$

$$=\mu_0\frac{\sqrt{1+4\pi^2}}{2\pi}\left(\frac{t}{2}-\frac{\sin 2t}{4}+\frac{t^3}{12\pi^2}\right)\Bigg|_0^{2\pi}=\mu_0\frac{\sqrt{1+4\pi^2}}{2\pi}\left(\pi+\frac{2\pi}{3}\right)=$$

$$=\mu_0\frac{\sqrt{1+4\pi^2}}{2\pi}\cdot\frac{5\pi}{3}=\frac{5\mu_0\sqrt{1+4\pi^2}}{6};$$

$$I_y=\mu_0\int_L(x^2+z^2)\,dl=\mu_0\frac{\sqrt{1+4\pi^2}}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\cos^2t+t^2/(4\pi^2))\,dt=$$

$$= \mu_0 \frac{\sqrt{1+4\pi^2}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1+\cos 2t}{2} + t^2/(4\pi^2) \right) dt =$$

$$= \mu_0 \frac{\sqrt{1+4\pi^2}}{2\pi} \left(\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} + \frac{t^3}{12\pi^2} \right) \Bigg|_0^{2\pi} = \mu_0 \frac{\sqrt{1+4\pi^2}}{2\pi} \left(\pi + \frac{2\pi}{3} \right) =$$

$$= \mu_0 \frac{\sqrt{1+4\pi^2}}{2\pi} \cdot \frac{5\pi}{3} = \frac{5\mu_0 \sqrt{1+4\pi^2}}{6};$$

$$I_z = \mu_0 \int_L (x^2+y^2)\, dl = \mu_0 \frac{\sqrt{1+4\pi^2}}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\cos^2 t + \sin^2 t)\, dt =$$

$$= \mu_0 \frac{\sqrt{1+4\pi^2}}{2\pi} \int_0^{2\pi} dt = \mu_0 \frac{\sqrt{1+4\pi^2}}{2\pi} t|_0^{2\pi} = \mu_0 \sqrt{1+4\pi^2}.$$

§ 2.2. Криволинейные интегралы второго рода

2.2.1. Понятие криволинейного интеграла второго рода

Пусть $L = AB$ – простая спрямляемая кривая, заданная уравнениями

$$x = \varphi(t), y = \psi(t), \alpha \le t \le \beta, \tag{29}$$

$A = (\varphi(\alpha), \psi(\alpha))$, $B = (\varphi(\beta), \psi(\beta))$. Предположим, что на кривой L заданы функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ Разобьём отрезок $[\alpha, \beta]$ на n частей точками

$$\alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = \beta.$$

При этом кривая L разобьётся на n дуг точками $A = M_0$, M_1, ..., $M_n = B$, где $M_k = (x_k, y_k) = (\varphi(t_k), \psi(t_k)), k = \overline{0, n}$.

Положим $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}, \Delta y_k = y_k - y_{k-1}, k = \overline{1, n}$. Обозначим через Δl_k длину дуги $M_{k-1}M_k$. Пусть $\Delta l = \max\limits_{1 \le k \le n} \Delta l_k$. На каждой дуге $M_{k-1}M_k$ выберем некоторую точку $N_k(\xi_k, \eta_k)$ и составим *интегральные суммы*

$$I_1(M_k, N_k) = \sum_{k=1}^{n} P(\xi_k, \eta_k)\, \Delta x_k,\ I_2(M_k, N_k) = \sum_{k=1}^{n} Q(\xi_k, \eta_k)\, \Delta y_k.$$

Определение. Число $I_m (m = 1, 2)$ называется *пределом интегральных сумм* $I_m(M_k, N_k)$ при $\Delta l \to 0$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что для всякого разбиения кривой L, у которого $\Delta l < \delta(\varepsilon)$, при любом выборе промежуточных точек N_k выполняется неравенство $|I_m(M_k, N_k) - I_m| < \varepsilon$. В этом случае используют запись $\lim\limits_{\Delta l\to 0} I_m(M_k, N_k) = I_m$.

Определение. Если $\lim\limits_{\Delta l\to 0} I_1(M_k, N_k) = I_1$ ($\lim\limits_{\Delta l\to 0} I_2(M_k, N_k) = I_2$), то число $I_1(I_2)$ называется *криволинейным интегралом второго рода от функции* $P(x, y)$ ($Q(x, y)$) по кривой L и обозначается

$$\int_L P(x,y)\,dx \left(\int_L Q(x,y)\,dy\right).$$

Сумма $I_1 + I_2$ называется *общим криволинейным интегралом второго рода* и обозначается

$$\int_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)dy. \tag{30}$$

В случае незамкнутой кривой $L = AB$ используются также обозначения

$$\int_{AB} P(x,y)\,dx, \int_{AB} Q(x,y)\,dy, \int_{AB} P(x,y)\,dx + Q(x,y)dy.$$

Если $L = AB$ – простая спрямляемая замкнутая кривая (замкнутый контур), то для нее можно указать два направления обхода от A к B. Если область, лежащая внутри контура, остается слева по отношению к движущейся по контуру точке, то такое направление обхода кривой L называется *положительным*, а противоположное ему – *отрицательным*.

Интеграл (30) по замкнутому контуру L в положительном направлении обозначается также

$$\oint_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

Аналогично определяется криволинейный интеграл второго рода

$$\int_L P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz \tag{31}$$

для простой спрямляемой пространственной кривой $L = AB$, заданной параметрическими уравнениями

$$x = \varphi(t), y = \psi(t), z = \chi(t), \alpha \le t \le \beta, \tag{32}$$

где $A = \big(\varphi(\alpha), \psi(\alpha), \chi(\alpha)\big)$, $B = \big(\varphi(\beta), \psi(\beta), \chi(\beta)\big)$.

Пусть кривая L образована из конечного числа последовательно примыкающих друг к другу простых спрямляемых кривых, то есть $L = \bigcup_{i=1}^{s} L_i$, причем конец L_i совпадает с началом L_{i+1} для всех $i = \overline{1, s-1}$. В этом случае криволинейный интеграл второго рода по кривой L определяется как сумма соответствующих криволинейных интегралов второго рода по кривым $L_i, \overline{1, s}$, если они существуют.

2.2.2. Вычисление криволинейного интеграла второго рода

Теорема 9. Если $L = AB$ – кусочно гладкая кривая, заданная уравнениями (29), а функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ кусочно непрерывны вдоль кривой L, то существует интеграл (30) и справедливо равенство

$$\int_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)dy = \\ = \int_\alpha^\beta \Big(P\big(\varphi(t),\psi(t)\big)\varphi'(t) + Q\big(\varphi(t),\psi(t)\big)\psi'(t)\Big)\,dt. \tag{33}$$

Для пространственной кривой $L = AB$, заданной уравнениями (32), справедлива аналогичная теорема, а интеграл (31) вычисляется в этом случае по формуле

$$\int_L P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = \\ = \int_\alpha^\beta (P(\varphi(t),\psi(t),\chi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t),\psi(t),\chi(t))\psi'(t) + \\ + R(\varphi(t),\psi(t),\chi(t))\chi'(t))dt. \tag{34}$$

Если кривая $L = AB$ задана уравнением $y = y(x)$, $a \le x \le b$, причем функция $y(x)$ имеет кусочно непрерывную производную, а функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ кусочно непрерывны вдоль кривой L, то существует интеграл (30) и справедливо равенство

$$\int_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)dy = \int_a^b \Big(P\big(x,y(x)\big) + Q\big(x,y(x)\big)y'(x)\Big)\,dx. \tag{35}$$

2.2.3. Свойства криволинейного интеграла второго рода. Связь криволинейных интегралов первого и второго рода

При изменении направления обхода кривой L изменяется и знак криволинейного интеграла второго рода, то есть имеют место равенства

$$\int_{L^-} P(x,y)\,dx = -\int_L P(x,y)\,dx, \int_{L^-} Q(x,y)\,dy = -\int_L Q(x,y)\,dy$$

для плоской кривой L;

$$\int_{L^-} P(x,y,z)\,dx = -\int_L P(x,y,z)\,dx, \int_{L^-} Q(x,y,z)\,dy = -\int_L Q(x,y,z)\,dy,$$

$$\int_{L^-} R(x,y,z)\,dz = -\int_L R(x,y,z)\,dz$$

для пространственной кривой L.

Криволинейные интегралы второго рода обладают свойствами линейности и аддитивности.

Теорема 10. Пусть $L = AB$ – кусочно гладкая кривая, заданная уравнениями (29), функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ кусочно непрерывны вдоль кривой L и $\vec{\tau} = \{\cos\alpha, \sin\alpha\}$ – единичный касательный вектор к кривой L в точке $M(x, y)$, причем направление $\vec{\tau}$ соответствует направлению движения от A к B (α – угол между вектором $\vec{\tau}$ в точке $M(x, y)$ и осью Ox). Тогда справедливо равенство

$$\int_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)dy = \int_L (P\cos\alpha + Q\sin\alpha)\,dl = \int_L (\vec{a},\vec{\tau})dl, \quad (36)$$

где $\vec{a} = P(x,y)\vec{\imath} + Q(x,y)\vec{\jmath}$, $(\vec{a},\vec{\tau})$ – скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{\tau}$.

Для пространственной кривой L, заданной уравнениями (32), справедлива аналогичная теорема, а связь между криволинейными интегралами первого и второго рода выражается в этом случае равенством

$$\int_L P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz =$$
$$= \int_L (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,dl = \int_L (\vec{a},\vec{\tau})dl, \quad (37)$$

где $\vec{a} = P(x,y,z)\vec{\imath} + Q(x,y,z)\vec{\jmath} + R(x,y,z)\vec{k}$, $\vec{\tau} = (\cos\alpha)\vec{\imath} + (\cos\beta)\vec{\jmath} + (\cos\gamma)\vec{k}$; α, β, γ – углы между касательным вектором $\vec{\tau}$ к кривой L в точке $M(x, y, z)$ и осями Ox, Oy, Oz.

2.2.4. Физический смысл криволинейного интеграла второго рода

Пусть $L = AB$ – кусочно гладкая кривая, заданная уравнениями (29), функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывны вдоль кривой L. Работа силы $\vec{F}(x,y) = P(x,y)\vec{\imath} + Q(x,y)\vec{\jmath}$ при перемещении точки единичной массы из точки A в точку B вдоль кривой L выражается интегралом

$$\int_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)dy. \qquad (38)$$

Если $L = AB$ – пространственная кривая, заданная уравнениями (32), то работа силы $\vec{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{\imath} + Q(x,y,z)\vec{\jmath} + R(x,y,z)\vec{k}$ при перемещении точки единичной массы из точки A в точку B вдоль кривой L равна интегралу

$$\int_L P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz. \qquad (39)$$

2.2.5. Формула Грина

Теорема 11. Пусть функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ и их частные производные $\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$ непрерывны в замкнутой ограниченной области G, граница которой состоит из одного или нескольких замкнутых кусочно гладких контуров (см. рис. 20). Тогда справедливо равенство

$$\oint_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_G \left(\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\right) dxdy, \qquad (40)$$

где криволинейный интеграл берется по границе L области G в положительном направлении (то есть при обходе границы область остается слева по отношению к движущейся по контуру точке).

Отметим, что если граница L состоит из нескольких замкнутых контуров, то интеграл в левой части равенства (40) понимается как сумма интегралов по этим контурам.

Формула (40) называется *формулой Грина*.

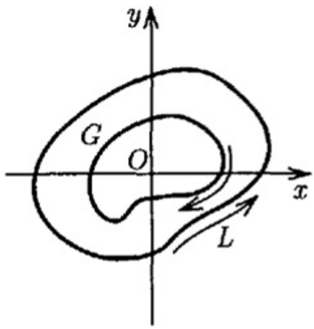


Рис. 20. Область G

Полагая в формуле Грина $Q = x$, $P = 0$, а затем $Q = 0$, $P = -y$ и учитывая, что интеграл $\iint_G dxdy$ равен площади S области G, получаем равенства, связывающие площадь фигуры с криволинейными интегралами по ее границе:

$$S = \oint_L xdy, \; S = -\oint_L ydx. \tag{41}$$

Рассмотрим такие действительные числа α и β, что α + β = 1. Умножая первое из равенств (41) на α, второе — на β и складывая получившиеся равенства, приходим к еще одной формуле для площади области G:

$$S = \oint_L \alpha xdy - \beta ydx \; (\alpha + \beta = 1).$$

Чаще всего последняя формула используется при α = β = 1/2. В этом случае она принимает вид

$$S = \frac{1}{2}\oint_L xdy - ydx. \tag{42}$$

2.2.6. Условия независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования

Область G на плоскости называется *односвязной*, если для любого замкнутого контура, лежащего в этой области, ограниченная им часть плоскости целиком содержится в области G.

Примерами односвязных областей являются круг, треугольник, прямоугольник. Кольцо представляет собой пример области, не являющейся односвязной.

Теорема 12. Пусть функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывны в области G. Тогда следующие три условия эквивалентны.

1. Для любого замкнутого кусочно гладкого контура L, расположенного в области G, справедливо равенство

$$\oint_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0.$$

2. Для любых двух различных точек A и B в области G криволинейный интеграл $\int_{AB} P(x,y)\,dx + Q(x,y)dy$ не зависит от пути интегрирования (кусочно гладкой кривой), лежащего в области G.

3. Выражение $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ является полным дифференциалом, то есть существует такая функция $u(M) = u(x, y)$, опреде-

ленная в области G, что $du = Pdx + Qdy$. При этом для любой кусочно гладкой кривой AB, лежащей в области G, имеет место равенство

$$\int_{AB} P(x,y)\,dx + Q(x,y)dy = u(B) - u(A). \tag{43}$$

Если G – односвязная область, функции $P(x, y)$, $Q(x, y)$, $\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$, $\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}$ непрерывны в области G, то каждое из условий 1–3 эквивалентно следующему условию:

4. В области G выполняется равенство

$$\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}. \tag{44}$$

Замечание. Функция $u(x, y)$ из условия 3 может быть найдена по формуле

$$u(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} Pdx + Qdy + C,$$

где интеграл в правой части представляет собой криволинейный интеграл второго рода по произвольной кусочно гладкой кривой L, лежащей в области G и соединяющей какую-нибудь фиксированную точку (x_0, y_0) с точкой (x, y), а C – произвольная постоянная. В качестве кривой L часто бывает удобно брать ломаную, состоящую из двух отрезков, параллельных осям координат (см. рис. 21). Тогда

$$u(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y_0)} Pdx + \int_{(x,y_0)}^{(x,y)} Qdy + C = \int_{x_0}^{x} P(x,y_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x,y)dy + C. \tag{45}$$

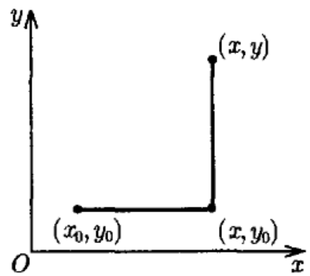


Рис. 21. Ломаная L

2.2.7. Примеры вычисления криволинейных интегралов второго рода

Пример 19. Вычислить криволинейный интеграл второго рода

$$I = \int_{AB} 2xydx + 3x^2dy$$

по трем кривым, соединяющим точки $A(0;0)$ и $B(1;1)$ (рис. 22).

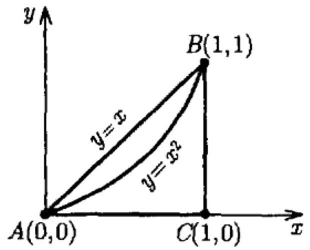


Рис. 22. Различные пути интегрирования

Решение.

1. Пусть кривая AB задана уравнением $y = x$, $0 \le x \le 1$. Учитывая, что $y' = 1$, по формуле (35) получаем

$$I = \int_{AB} 2xydx + 3x^2dy = \int_0^1 (2x^2 + 3x^2)dx = \int_0^1 5x^2\,dx = \frac{5x^3}{3}\bigg|_0^1 = \frac{5}{3}.$$

2. Рассмотрим кривую AB, заданную уравнением $y = x^2$, $0 \le x \le 1$. В этом случае $y' = 2x$. Следовательно,

$$I = \int_{AB} 2xydx + 3x^2dy = \int_0^1 (2x^3 + 3x^2 \cdot 2x)dx = \int_0^1 8x^3\,dx = 2x^4|_0^1 = 2.$$

3. При интегрировании по ломаной ACB воспользуемся свойством аддитивности интеграла. Представим интеграл I как сумму интегралов по отрезкам AC и CB. Так как для отрезка AC $y = 0$, $y' = 0$, $0 \le x \le 1$, то по формуле (35) получаем

$$I_1 = \int_{AC} 2xydx + 3x^2dy = \int_0^1 (2x \cdot 0 + 3x^2 \cdot 0)dx = 0.$$

Для отрезка CB имеем $x = x(y) = 1$, $x' = 0$, $0 \le y \le 1$. Поэтому

$$I_2 = \int_{CB} 2xydx + 3x^2dy = \int_0^1 (2y \cdot 0 + 3)dy = \int_0^1 3\,dy = 3y|_0^1 = 3.$$

Окончательно получаем $I = I_1 + I_2 = 3$.

Пример 20. Вычислить криволинейный интеграл

$$I = \int_{AB} (2x + y)dx + (x + 2y)dy,$$

если кривая AB задана уравнением $y = x^4$, $A = (1; 1)$, $B = (-1; 1)$.

Решение. Для вычисления интеграла воспользуемся формулой (35). Учитывая, что $y = x^4$, $y' = 4x^3$ и x изменяется от 1 до –1, получаем

$$I = \int_{AB} (2x + y)dx + (x + 2y)dy = -\int_{-1}^{1} (2x + x^4 + (x + 2x^4) \cdot 4x^3)dx =$$

$$= -\int_{-1}^{1} (2x + 5x^4 + 8x^7)dx = -10\int_{0}^{1} x^4 dx = -2x^5|_0^1 = -2.$$

Пример 21. Вычислить криволинейный интеграл

$$I = \oint_L (x + y)dx + (x - y)dy,$$

где L – окружность, задаваемая уравнением $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 4$.

Решение. Запишем параметрические уравнения окружности L:

$$x = 1 + 2\cos t\,, y = 1 + 2\sin t\,, 0 \le t \le 2\pi.$$

Воспользуемся формулой (33). Поскольку $x' = -2\sin t$, $y' = -2\cos t$, то

$$I = \oint_L (x + y)dx + (x - y)dy =$$

$$= 4\int_0^{2\pi} ((1 + \cos t + \sin t) \cdot (-\sin t) + (\cos t - \sin t) \cdot \cos t)dt =$$

$$= 4\int_0^{2\pi} (\cos^2 t - \sin^2 t - 2\sin t\cos t - \sin t)dt =$$

$$= 4\int_0^{2\pi} (\cos 2t - \sin 2t - \sin t)dt = 4(0{,}5\sin 2t + 0{,}5\cos 2t + \cos t)|_0^{2\pi} = 0.$$

Пример 22. Вычислить криволинейный интеграл

$$I = \int_L (y^2 - z^2)dx + 2yzdy - x^2dz,$$

где L – кривая, определяемая параметрическими уравнениями $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$, $0 \le t \le 1$ и пробегаемая в направлении возрастания параметра t.

Решение. Для вычисления интеграла применим формулу (34). Так как $x' = 1, y' = 2t, z' = 3t^2$,то

$$I=\int_L (y^2-z^2)dx+2yzdy-x^2dz=\int_0^1(t^4-t^6+2t^5\cdot 2t-t^2\cdot 3t^2)dt=$$

$$=\int_0^1(3t^6-2t^4)dt=\left(\frac{3t^7}{7}-\frac{2t^5}{5}\right)\Big|_0^1=\frac{3}{7}-\frac{2}{5}=\frac{1}{35}.$$

Пример 23. Применяя формулу Грина, вычислить криволинейный интеграл

$$I=\oint_L xy^2dy-x^2dx,$$

где L – окружность, задаваемая уравнением $x^2+y^2=a^2$.

Решение. Положим $P=-x^2$, $Q=xy^2$, тогда $\frac{\partial P}{\partial y}=0, \frac{\partial Q}{\partial x}=y^2$. Используя формулу Грина, получаем

$$I=\oint_L xy^2dy-x^2dx=\iint_G (y^2-0)dxdy,$$

где G – круг, определяемый неравенством $x^2+y^2\le a^2$.

Для вычисления двойного интеграла по области G перейдем к полярным координатам по формулам $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, $0\le\varphi\le 2\pi$, $0\le\rho\le a$. Учитывая, что якобиан отображения равен ρ, и применяя повторное интегрирование, имеем

$$I=\iint_G y^2\,dxdy=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^a\rho^3\sin^2\varphi\,d\rho=\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos 2\varphi}{2}d\varphi\int_0^a\rho^3\,d\rho=$$

$$=\left(\frac{\varphi}{2}-\frac{\sin 2\varphi}{4}\right)\Big|_0^{2\pi}\cdot\frac{\rho^4}{4}\Big|_0^a=\frac{\pi a^4}{4}.$$

Пример 24. Вычислить площадь S фигуры, ограниченной астроидой, заданной параметрическими уравнениями $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$, $0\le t\le 2\pi$.

Решение. Согласно формуле (42) имеем

$$S=\frac{1}{2}\oint_L xdy-ydx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(a\cos^3 t\cdot 3a\sin^2 t\,\cos t-a\sin^3 t\cdot(-3a\cos^2 t\,\sin t))dt=$$

$$=\frac{3a^2}{2}\int_0^{2\pi}(\cos^4 t\sin^2 t+\sin^4 t\cos^2 t)dt=\frac{3a^2}{2}\int_0^{2\pi}\cos^2 t\sin^2 t\,dt=$$

$$= \frac{3a^2}{8}\int_0^{2\pi}\sin^2 2t\,dt = \frac{3a^2}{16}\int_0^{2\pi}(1-\cos 4t)\,dt = \frac{3a^2}{16}\left(t-\frac{\sin 4t}{4}\right)\Big|_0^{2\pi} =$$

$$= \frac{3a^2}{16}\cdot 2\pi = \frac{3\pi a^2}{8}.$$

Пример 25. Доказать, что подынтегральное выражение является полным дифференциалом, и вычислить криволинейный интеграл:

а) $\int_{AB} xdx - ydy$, где $A = (0; 1)$, $B = (3; -4)$;

б) $\int_{AB}(x^4+4xy^3)dx+(6x^2y^2-5y^4)dy$, где $A = (-2; -1)$, $B = (3; 0)$.

Решение.

а) Нетрудно заметить, что выражение $xdx - ydy$ является дифференциалом функции $u = \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2}$. По формуле (43) получаем

$$\int_{AB} xdx - ydy = u(B) - u(A) = -3{,}5 + 0{,}5 = -3.$$

б) Проверим выполнение условия 4 теоремы 12. Имеем

$$P = x^4 + 4xy^3, Q = 6x^2y^2 - 5y^4, \frac{\partial P}{\partial y} = 12xy^2, \frac{\partial Q}{\partial x} = 12xy^2.$$

Таким образом, $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$, то есть требуемое условие выполняется. Следовательно, выражение $(x^4 + 4xy^3)dx + (6x^2y^2 - 5y^4)$ является полным дифференциалом, а криволинейный интеграл $\int_{AB}(x^4+4xy^3)dx+(6x^2y^2-5y^4)dy$ не зависит от пути интегрирования. Возьмем в качестве пути интегрирования ломаную AMB, где $M = (-2; 0)$ Тогда

$$AM = \{(x,y): x = -2, -1 \le y \le 0\}, MB = \{(x,y): y = 0, -2 \le x \le 3\}.$$

Последовательно интегрируя по отрезкам AM и MB, получаем

$$\int_{AM}(x^4+4xy^3)dx+(6x^2y^2-5y^4)dy = \int_{-1}^{0}(24y^2-5y^4)\,dy =$$

$$= (8y^3 - y^5)|_{-1}^{0} = 7;$$

$$\int_{MB}(x^4+4xy^3)dx+(6x^2y^2-5y^4)dy = \int_{-2}^{3}x^4\,dx = \frac{x^5}{5}\Big|_{-2}^{3} = 55.$$

Искомый интеграл по ломаной AMB равен сумме вычисленных интегралов, то есть 62.

Пример 26. Найти функцию $u(x, y)$ если

$$du = (y\cos xy - 2x\sin(x^2-y^2))dx + (x\cos xy + 2y\sin(x^2-y^2))dy.$$

Решение. Непосредственной проверкой убеждаемся в том, что для дифференциального выражения справедливо равенство (44):

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial(y\cos xy-2x\sin(x^2-y^2))}{\partial y}=\cos xy-xy\sin xy+4xy\cos(x^2-y^2);$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial(x\cos xy+2y\sin(x^2-y^2))}{\partial x}=\cos xy-xy\sin xy+4xy\cos(x^2-y^2).$$

Для нахождения функции $u(x, y)$ воспользуемся формулой (45). Согласно этой формуле имеем

$$u(x,y)=\int_{x_0}^{x}(y_0\cos xy_0-2x\sin(x^2-{y_0}^2))dx+$$

$$+\int_{y_0}^{y}(x\cos xy+2y\sin(x^2-y^2))dy+C=(\sin xy_0+\cos(x^2-{y_0}^2))|_{x_0}^{x}+$$

$$+(\sin xy+\cos(x^2-y^2))|_{y_0}^{y}+C=\sin xy_0+\cos(x^2-{y_0}^2)-$$

$$-\sin x_0y_0-\cos({x_0}^2-{y_0}^2)+\sin xy+\cos(x^2-y^2)-$$

$$-\sin xy_0-\cos(x^2-{y_0}^2)+C=\sin xy+\cos(x^2-y^2)+C_1,$$

где C_1 — произвольная постоянная.

Выводы по главе

В данной главе были рассмотрены понятия криволинейных интегралов первого и второго рода, их свойства и способы вычисления.

Важнейшими свойствами криволинейных интегралов являются свойства линейности и аддитивности. При вычислении криволинейных интегралов немалое значение имеет выбор способа задания пути интегрирования. Следует использовать такое представление кривой, при котором вычисление интеграла становится наиболее простым. Криволинейные интегралы первого рода применяются для нахождения массы плоской или пространственной материальной кривой, координат их центров тяжести и моментов инерции. Криволинейные интегралы второго рода используются для вычисления работы силы при перемещении материальной точки вдоль плоской или пространственной кривой. Важное значение в интегральном исчислении функций двух переменных имеет формула Грина. Она позволяет сводить вычисление двойного интеграла по замкнутой области к вычислению криволинейного интеграла второго рода по ее границе. В частности, формула Грина может быть использована для нахождения площадей плоских областей с помощью криволинейных интегралов.

Контрольные вопросы и задания

1. Какая плоская (пространственная) кривая называется: а) простой незамкнутой (замкнутой); б) спрямляемой; в) гладкой; г) кусочно гладкой?

2. Является ли кривая, заданная уравнениями $x = \cos t$, $y = \sin t$, $0 \leq t \leq 3\pi$, простой? Является ли кривая, заданная уравнениями $x = 2t - t^2$, $y = 3t - t^3$, $-1 \leq t \leq 1$: а) гладкой; б) кусочно гладкой?

3. Дайте определение функции: а) непрерывной вдоль кривой; б) кусочно непрерывной вдоль кривой.

4. Сформулируйте определение криволинейного интеграла первого рода.

5. Зависит ли криволинейный интеграл первого рода от направления обхода кривой?

6. Запишите формулу для вычисления криволинейного интеграла первого рода в случае, когда плоская кривая задана: а) параметрическими уравнениями; б) явным уравнением; в) уравнением в полярных координатах.

7. Запишите формулу для вычисления криволинейного интеграла первого рода по пространственной кривой, заданной параметрическими уравнениями.

8. Вычислите интеграл $\int_L (x + y)dl$, где L – отрезок прямой $y = x$ от точки (0; 0) до точки (1; 1).

9. Какие физические приложения криволинейного интеграла первого рода вы знаете?

10. Запишите формулы для вычисления координат центра тяжести и моментов инерции относительно осей координат плоской (пространственной) кривой.

11. Для криволинейного интеграла первого рода сформулируйте: а) свойства линейности и аддитивности; б) теорему об оценке модуля интеграла; в) теорему о среднем.

12. Сформулируйте определение криволинейного интеграла второго рода.

13. Зависит ли криволинейный интеграл второго рода от направления обхода кривой?

14. Запишите формулу для вычисления криволинейного интеграла второго рода в случае, когда плоская кривая задана: а) параметрическими уравнениями; б) явным уравнением.

15. Запишите формулу для вычисления криволинейного интеграла второго рода по пространственной кривой, заданной параметрическими уравнениями.

16. Какое направление обхода замкнутой кривой принимают за положительное?

17. Каков смысл обозначения $\oint_L Pdx + Qdy$?

18. Сформулируйте теорему о связи между криволинейными интегралами первого и второго рода.

19. Каков физический смысл криволинейного интеграла второго рода?

20. Сформулируйте свойства линейности и аддитивности криволинейных интегралов второго рода.

21. Запишите формулу Грина и сформулируйте условия, при которых она верна.

22. Запишите формулу для вычисления площади области с помощью криволинейного интеграла по ее границе.

23. Какая область на плоскости называется односвязной? Приведите примеры односвязных областей.

24. Что означает утверждение «Криволинейный интеграл $\int_{AB} Pdx + Qdy$ не зависит от пути интегрирования»?

25. Что означает утверждение «Выражение $Pdx + Qdy$ является полным дифференциалом в области G»?

26. Пусть функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывны в области G. Сформулируйте два необходимых и достаточных условия независимости интеграла $\int_{AB} Pdx + Qdy$ от пути интегрирования в области G.

27. Пусть функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ и их частные производные $\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$ непрерывны в односвязной области G. Используя указанные производные, сформулируйте необходимое и достаточное условие независимости интеграла $\int_{AB} Pdx + Qdy$ от пути интегрирования в области G.

28. Пусть $P = xy, Q = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2-y}, G = \{(x, y): x^2 + y^2 < 4\}$. Докажите, что выражение $Pdx + Qdy$ является полным дифференциалом некоторой функции $u(x, y)$ в круге G, и найдите эту функцию. Чему равен интеграл $\oint_L \; Pdx + Qdy$ для любого кусочно гладкого контура L, расположенного в области G? Вычислите интеграл $\int_{AB} Pdx + Qdy$, если $A = (-1; 1)$, $B = (1; 1)$.

Глава 3. СКАЛЯРНЫЕ И ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ

§ 3.1. Дифференциальные операции в скалярных и векторных полях

3.1.1. Понятия скалярного и векторного полей

Пусть G – область в трехмерном пространстве (или на плоскости).

Говорят, что в области G задано *скалярное поле*, если каждой точке $M \in G$ поставлено в соответствие некоторое число $u(M)$.

Поверхность (линия), на которой функция $u(M)$ принимает постоянное значение, называется *поверхностью* (*линией*) *уровня скалярного поля*.

Поверхность (линия) уровня задается уравнением $u(M) = C$, где C – константа.

Если в пространстве введена прямоугольная система координат $Oxyz$, то скалярное поле описывается функцией трех переменных: $u = u(x, y, z)$, $(x, y, z) \in G$.

Говорят, что в области G задано *векторное поле*, если каждой точке $M \in G$ поставлен в соответствие некоторый вектор $\vec{a}(M)$.

Векторная линия – это кривая, в каждой точке M которой вектор $\vec{a}(M)$ направлен по касательной к кривой.

Если в пространстве введена прямоугольная система координат Oxyz, то векторное поле описывается вектор-функцией трех переменных $\vec{a}(x, y, z)$ или тремя скалярными функциями – ее координатами:

$$\vec{a}(x, y, z) = \{P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)\}, (x, y, z) \in G.$$

3.1.2. Производная по направлению

Определение. Скалярное и векторное поля $u(M) = u(x, y, z)$ и $\vec{a}(M) = \vec{a}(x, y, z) = \{P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)\}$ называются *n раз дифференцируемыми*, если функции $u(x, y, z)$, $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ n раз дифференцируемы.

Пусть $u(M)$ – скалярное поле, заданное в области G; $\vec{l}$ – фиксированный вектор единичной длины; M – фиксированная точка в G; M' – любая точка из G, отличная от M и такая, что $\overrightarrow{MM'} \parallel \vec{l}$. Обозначим через MM' величину направленного отрезка, соединяющего точку M с точкой M', то есть

$$MM' = \begin{cases} \left|\overrightarrow{MM'}\right|, & \text{если } \overrightarrow{MM'} \upuparrows \vec{l} \\ -\left|\overrightarrow{MM'}\right|, & \text{если } \overrightarrow{MM'} \uparrow\downarrow \vec{l} \end{cases}$$

(здесь $\left|\overrightarrow{MM'}\right|$ – длина вектора $\overrightarrow{MM'}$).

Определение. Число $\lim\limits_{M'\to M} \frac{u(M')-u(M)}{MM'}$ называется *производной скалярного поля $u(M)$ в точке M по направлению* $\vec{l}$ и обозначается $\frac{\partial u}{\partial l}(M)$.

Производная по направлению $\frac{\partial u}{\partial l}(M)$ является скоростью изменения функции $u(M)$ по направлению $\vec{l}$ в точке M.

Если в прямоугольной системе координат $Oxyz$

$$\vec{l} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\},$$

где $\alpha = \angle(Ox, \vec{l}), \beta = \angle(Oy, \vec{l}), \gamma = \angle(Oz, \vec{l})$, и поле $u(M)$ дифференцируемо в точке $M = (x, y, z)$, то в этой точке существует производная поля u по направлению $\vec{l}$, причем справедливо равенство

$$\frac{\partial u}{\partial l}(M) = \frac{\partial u}{\partial x}(M)\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}(M)\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}(M)\cos\gamma. \qquad (46)$$

Определение. Вектор $\lim\limits_{M'\to M} \frac{\vec{a}(M')-\vec{a}(M)}{MM'}$ называется *производной векторного поля $\vec{a}(M)$ в точке M по направлению* $\vec{l}$ и обозначается $\frac{\partial \vec{a}}{\partial l}(M)$.

Если в прямоугольной системе координат $Oxyz$ $\vec{a}(M) = \{P, Q, R\}$, то

$$\frac{\partial \vec{a}}{\partial l} = \left\{\frac{\partial P}{\partial l}, \frac{\partial Q}{\partial l}, \frac{\partial R}{\partial l}\right\}.$$

3.1.3. Понятие градиента

Определение. *Градиентом скалярного поля* $u(x, y, z)$ называется вектор-функция

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k} = \left\{\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right\}.$$

Из равенства (46) вытекает, что $\frac{\partial u}{\partial l} = (\operatorname{grad} u, \vec{l})$, где $(\operatorname{grad} u, \vec{l})$ – скалярное произведение векторов $\operatorname{grad} u$ и $\vec{l}$. Следовательно,

$$\frac{\partial u}{\partial l}(M) = |\mathrm{grad}\, u| \cdot |\vec{l}| \cdot \cos\varphi,$$

где φ – угол между векторами grad *u* и $\vec{l}$ в точке *M*. Так как $|\vec{l}| = 1$, то

$$\frac{\partial u}{\partial l}(M) = |\mathrm{grad}\, u| \cdot \cos\varphi.$$

Производная $\frac{\partial u}{\partial l}$ принимает наибольшее значение при φ = 0, то есть в направлении градиента *u* в данной точке. Иначе говоря, вектор grad *u* в заданной точке указывает направление наибольшего роста поля *u* в этой точке, а |grad *u*| есть скорость роста функции *u* в этом направлении.

Определение. Векторное поле $\vec{a}(M)$ называется *потенциальным* в области *G*, если его можно представить в этой области как градиент некоторого скалярного поля *u*(*M*):

$$\vec{a} = \mathrm{grad}\, u. \tag{47}$$

Функция *u*(*M*) в этом случае называется *скалярным потенциалом векторного поля* $\vec{a}(M)$.

Если $\vec{a} = \{P, Q, R\}$, то из равенства (47) следует, что

$$P = \frac{\partial u}{\partial x}, Q = \frac{\partial u}{\partial y}, R = \frac{\partial u}{\partial z}.$$

Поверхности уровня потенциала *u*(*M*) называются *эквипотенциальными поверхностями*.

3.1.4. Дивергенция и ротор

Определение. *Дивергенцией векторного поля* $\vec{a} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$ называется скалярная функция

$$\mathrm{div}\, \vec{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

Определение. *Ротором*, или *вихрем*, векторного поля

$$\vec{a} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$$

называется вектор-функция

$$\mathrm{rot}\, \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \vec{i}\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) + \vec{j}\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right).$$

Векторное поле $\vec{a}(M)$ называется *соленоидальным* в области *G*, если в этой области $\mathrm{div}\, \vec{a} = 0$.

Если векторное поле $\vec{a}(M)$ можно представить как ротор некоторого векторного поля $\vec{b}(M)$, то есть $\vec{a} = \operatorname{rot}\vec{b}$, то вектор-функция $\vec{b}(M)$ называется *векторным потенциалом поля* $\vec{a}(M)$.

3.1.5. Оператор Гамильтона

Введем векторный оператор «набла», или оператор Гамильтона:

$$\nabla = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z} = \left\{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right\}.$$

С помощью этого символического «вектора» удобно записывать и выполнять операции векторного анализа.

В результате умножения вектора ∇ на скалярную функцию $u(x, y, z)$ получается grad u:

$$\nabla u = \left(\vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)u = \vec{i}\frac{\partial u}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial u}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial u}{\partial z} = \operatorname{grad} u.$$

Скалярное произведение вектора ∇ и вектор-функции $\vec{a}(x, y, z) = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ представляет собой дивергенцию $\vec{a}$:

$$(\nabla\vec{a}) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \operatorname{div}\vec{a}.$$

Вычисляя векторное произведение вектора ∇ и вектор-функции $\vec{a}(x, y, z) = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$, мы получаем $\operatorname{rot}\vec{a}$::

$$[\nabla\vec{a}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \operatorname{rot}\vec{a}.$$

Если оператор ∇ действует на линейную комбинацию $\sum_i a_i F_i$, где F_i – скалярные или векторные функции, a_i – действительные числа, то

$$\nabla\left(\sum_i a_i F_i\right) = \sum_i a_i \nabla F_i.$$

Если оператор ∇ действует на произведение нескольких функций (скалярных или векторных), например F, G, H, то результат этого действия аналогичен результату дифференцирования произведения в том смысле, что оператор ∇ последовательно применяют к каждому сомножителю (будем отмечать это знаком $\smile$), а другие сомножители при этом считают фиксированными. Затем полученные результаты складывают. Таким образом,

$$\nabla(FGH) = \nabla(\check{F}GH) + \nabla(F\check{G}H) + \nabla(FG\check{H}). \qquad (48)$$

При этом следует иметь в виду, что слагаемые в правой части равенства (48) преобразуют по правилам векторной алгебры так, чтобы за оператором ∇ стоял тот множитель, который отмечен знаком $\smile$. После вычислений знаки $\smile$ опускают.

Пользуясь этим правилом, докажем, что

$$\operatorname{div}[\vec{a}, \vec{b}] = (\vec{b}, \operatorname{rot}\vec{a}) - (\vec{a}, \operatorname{rot}\vec{b}). \qquad (49)$$

Учитывая, что $\operatorname{div}[\vec{a}, \vec{b}] = (\nabla[\vec{a}, \vec{b}])$, в соответствии с формулой (48) имеем

$$(\nabla[\vec{a}, \vec{b}]) = (\nabla[\check{\vec{a}}, \vec{b}]) + \left(\nabla\left[\vec{a}, \check{\vec{b}}\right]\right). \qquad (50)$$

Чтобы в первом из двух смешанных произведений в правой части равенства (50) оператор ∇ действовал на вектор $\vec{a}$, воспользуемся свойством смешанного произведения $(\nabla[\check{\vec{a}}, \vec{b}]) = ([\nabla\check{\vec{a}}], \vec{b})$. Переставляя сомножители $[\nabla\vec{a}]$ и $\vec{b}$ в скалярном произведении и учитывая, что $[\nabla\vec{a}] = \operatorname{rot}\vec{a}$, получаем

$$(\nabla[\check{\vec{a}}, \vec{b}]) = (\vec{b}, \operatorname{rot}\vec{a}). \qquad (51)$$

Во втором слагаемом в правой части равенства (50) поменяем местами сомножители в векторном произведении:

$$\left(\nabla\left[\vec{a}, \check{\vec{b}}\right]\right) = -\left(\nabla\left[\check{\vec{b}}, \vec{a}\right]\right).$$

С учетом последнего соотношения и (51) имеем

$$\left(\nabla\left[\vec{a}, \check{\vec{b}}\right]\right) = -\left(\nabla\left[\check{\vec{b}}, \vec{a}\right]\right) = -(\vec{a}, \operatorname{rot}\vec{b}). \qquad (52)$$

Складывая равенства (51) и (52), получаем формулу (49).

3.1.6. Нестационарные поля

Пусть в области G определено *нестационарное поле* $u(x, y, z, t)$, то есть величина u является функцией точки $M(x, y, z) \in G$ и времени t. Координаты точки изменяются по известному закону, определяемому формулами

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t).$$

Таким образом, величина u является сложной функцией от t:

$$u = u(x(t), y(t), z(t), t).$$

Используя правило дифференцирования сложной функции, найдем производную функции u по переменной t (она называется *полной производной*):

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt}.$$

Вводя в точке M вектор скорости $\vec{v} = \{v_x, v_y, v_z\} = \{\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\}$, получаем

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + v_x \frac{\partial u}{\partial x} + v_y \frac{\partial u}{\partial y} + v_z \frac{\partial u}{\partial z},$$

или

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + (\vec{v}, \operatorname{grad} u) = \frac{\partial u}{\partial t} + (\vec{v}, \nabla u) = \frac{\partial u}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)u. \qquad (53)$$

Аналогично, если в области G задано *нестационарное векторное поле* $\vec{a}(x, y, z, t)$, то для движущейся точки $M(x(t), y(t), z(t), t)$ векторная величина $\vec{a}$ является сложной функцией от t: $\vec{a} = \vec{a}(x(t), y(t), z(t), t)$. Полную производную по t для каждой координаты вектор-функции $\vec{a}$ можно вычислить по формуле (53). Умножая результаты на базисные векторы $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ и складывая, получаем

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \frac{\partial \vec{a}}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)\vec{a}.$$

§ 3.2. Повторные дифференциальные операции в скалярных и векторных полях

Пусть в области G заданы скалярное поле $u(M)$ и векторное поле $\vec{a}(M) = \{P, Q, R\}$, причем функции u, P, Q, R имеют в области G непрерывные частные производные второго порядка. Тогда $\operatorname{grad} u(M)$ и $\operatorname{rot} \vec{a}(M)$ являются дифференцируемыми векторными полями, а $\operatorname{div} \vec{a}(M)$ – дифференцируемым скалярным полем.

К векторным полям $\operatorname{grad} u(M)$ и $\operatorname{rot} \vec{a}(M)$ можно применить операции вычисления дивергенции и ротора, а к скалярному полю $\operatorname{div} \vec{a}(M)$ – операцию вычисления градиента. Результатами применения указанных операций будут

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} u, \operatorname{rot} \operatorname{grad} u, \operatorname{div} \operatorname{rot} \overrightarrow{a}, \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{a}, \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{a}.$$

Операцию divgrad называют *оператором Лапласа* и обозначают символом Δ:

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} u = \Delta u. \qquad (54)$$

С помощью оператора Гамильтона равенство (54) можно записать в виде

$$\Delta u = \operatorname{div} \operatorname{grad} u = \big(\nabla(\nabla u)\big) = \nabla^2 u,$$

где

$$\nabla^2 = \left(\vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Отсюда получаем

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Функция u, имеющая в некоторой области непрерывные частные производные второго порядка и удовлетворяющая в этой области уравнению Лапласа $\Delta u = 0$, называется *гармонической* в данной области.

Непосредственными вычислениями доказываются равенства

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} u = \vec{0}, \operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{a} = 0, \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{a} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{a} - \Delta\vec{a},$$

где $\Delta\vec{a} = \Delta\big(P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}\big) = \Delta P\vec{i} + \Delta Q\vec{j} + \Delta R\vec{k}$ – вектор-функция, координатами которой являются результаты применения оператора Лапласа к функциям P, Q, R.

Произвольное непрерывно дифференцируемое векторное поле $\vec{a}(M)$ может быть представлено в виде

$$\vec{a}(M) = \overrightarrow{a_1}(M) + \overrightarrow{a_2}(M), \tag{55}$$

где $\overrightarrow{a_1}(M)$ – потенциальное поле, $\overrightarrow{a_2}(M)$ – соленоидальное поле.

Действительно, по определению потенциальное векторное поле $\overrightarrow{a_1}(M)$ является градиентом некоторого скалярного поля $u(M)$:

$$\overrightarrow{a_1}(M) = \operatorname{grad} u(M).$$

Поэтому для векторного поля $\overrightarrow{a_2}(M)$ из равенства (55) имеем

$$\overrightarrow{a_2}(M) = \vec{a}(M) - \operatorname{grad} u(M).$$

Из условия соленоидальности поля $\overrightarrow{a_2}(M)$ выводим

$$\operatorname{div} \overrightarrow{a_2}(M) = \operatorname{div} \vec{a}(M) - \operatorname{div} \operatorname{grad} u(M) = \operatorname{div} \vec{a}(M) - \Delta u(M) = 0.$$

Таким образом, скалярный потенциал поля $\overrightarrow{a_1}(M)$ должен удовлетворять уравнению

$$\Delta u = \operatorname{div} \vec{a}, \tag{56}$$

где $\operatorname{div} \vec{a}$ – известная функция поля $\vec{a}(M)$.

Итак, если функция u является решением уравнения (56), то, полагая

$$\overrightarrow{a_1}(M) = \operatorname{grad} u(M), \overrightarrow{a_2}(M) = \vec{a}(M) - \operatorname{grad} u(M),$$

получаем требуемое представление поля $\vec{a}(M)$.

Уравнение (56) представляет собой неоднородное уравнение в частных производных второго порядка. Оно может быть записано в виде

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f,$$

где $f = \operatorname{div} \vec{a}$, и называется *уравнением Пуассона*.

Отметим, что уравнение Пуассона имеет бесконечное множество решений, поэтому представление поля $\vec{a}(M)$ в виде суммы потенциального и соленоидального полей не единственно.

§ 3.3. Примеры решения задач

Пример 27. Найти градиент скалярного поля $u = x^2y + zy^3$ в точке $M(-1; 3; 5)$. Вычислить в этой точке производную поля u по направлению вектора $\vec{a}\{2; 4; 1\}$.

Решение. Согласно определению градиента имеем

$$\operatorname{grad} u(M) = \left\{\frac{\partial u}{\partial x}(M), \frac{\partial u}{\partial y}(M), \frac{\partial u}{\partial z}(M)\right\} =$$

$$= \{2xy, x^2 + 3zy^2, y^3\}|_{(-1;3;5)} = \{-6; 136; 27\}.$$

Единичным вектором, сонаправленным с $\vec{a}$, является вектор

$$\vec{l} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{1}{\sqrt{21}}\{2; 4; 1\} = \left\{\frac{2}{\sqrt{21}}; \frac{4}{\sqrt{21}}; \frac{1}{\sqrt{21}}\right\}.$$

По формуле (46) получаем

$$\frac{\partial u}{\partial l}(M) = -6 \cdot \frac{2}{\sqrt{21}} + 136 \cdot \frac{4}{\sqrt{21}} + 27 \cdot \frac{1}{\sqrt{21}} = \frac{559}{\sqrt{21}}.$$

Пример 28. Найти дивергенцию векторного поля $\vec{a} = xyz\vec{i} + x^2\vec{j} + xz^3\vec{k}$ в точке $M(-3; 2; -1)$.

Решение. Согласно формуле для дивергенции векторного поля $\vec{a} = \{P, Q, R\}$ имеем

$$\operatorname{div} \vec{a}(M) = \frac{\partial P}{\partial x}(M) + \frac{\partial Q}{\partial y}(M) + \frac{\partial R}{\partial z}(M) = (yz + 0 + 3xz^2)|_{(-3;2;-1)} = -11.$$

Пример 29. Найти ротор векторного поля $\vec{a} = x^2y\vec{i} + y^3z^2\vec{j} + x^4z\vec{k}$ в точке $M(4; 0; -2)$.

Решение. Используя определение ротора, получаем

$$\operatorname{rot}\vec{a}(M) = \left.\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x^2y & y^3z^2 & x^4z \end{vmatrix}\right|_M = \vec{i}\left(\frac{\partial(x^4z)}{\partial y} - \frac{\partial(y^3z^2)}{\partial z}\right)\Bigg|_M +$$

$$+\vec{j}\left(\frac{\partial(x^2y)}{\partial z} - \frac{\partial(x^4z)}{\partial x}\right)\Bigg|_M + \vec{k}\left(\frac{\partial(y^3z^2)}{\partial x} - \frac{\partial(x^2y)}{\partial y}\right)\Bigg|_M = \vec{i}(0 - 2zy^3)|_{(4;0;-2)} +$$

$$= +\vec{j}(0 - 4zx^3)|_{(4;0;-2)} + \vec{k}(0 - x^2)|_{(4;0;-2)} = 512\vec{j} - 16\vec{k}.$$

Пример 30. Найти дивергенцию и ротор сферического векторного поля $\vec{a} = f(r)\vec{r}$, где $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, $r = |\vec{r}|$.

Решение. Запишем поле $\vec{a}$ в координатах:

$$\vec{a} = f(r)\vec{r} = \{xf(r), yf(r), zf(r)\}.$$

Согласно определению дивергенции имеем

$$\operatorname{div}(f(r)\vec{r}) = \frac{\partial}{\partial x}\big(xf(r)\big) + \frac{\partial}{\partial y}\big(yf(r)\big) + \frac{\partial}{\partial z}\big(zf(r)\big) =$$

$$= f(r) + xf'(r)r'_x + f(r) + yf'(r)r'_y + f(r) + zf'(r)r'_z =$$

$$= 3f(r) + f'(r)\big(xr'_x + yr'_y + zr'_z\big).$$

Учитывая, что $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, получаем

$$\operatorname{div}(f(r)\vec{r}) = 3f(r) + f'(r)\left(\frac{x^2}{r} + \frac{y^2}{r} + \frac{z^2}{r}\right) = 3f(r) + rf'(r).$$

По определению ротора имеем

$$\operatorname{rot}\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ xf(r) & yf(r) & zf(r) \end{vmatrix} = \vec{i}\left(\frac{\partial(zf(r))}{\partial y} - \frac{\partial(yf(r))}{\partial z}\right) +$$

$$+\vec{j}\left(\frac{\partial(xf(r))}{\partial z} - \frac{\partial(zf(r))}{\partial x}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial(yf(r))}{\partial x} - \frac{\partial(xf(r))}{\partial y}\right) =$$

$$= \vec{i}\big(zf'(r)r'_y - yf'(r)r'_z\big) + \vec{j}(xf'(r)r'_z - zf'(r)r'_x) +$$

$$+\vec{k}\big(yf'(r)r'_x - xf'(r)r'_y\big) = \vec{i}\left(\frac{zy}{r}f'(r) - \frac{yz}{r}f'(r)\right) +$$

$$+\vec{j}\left(\frac{xz}{r}f'(r) - \frac{zx}{r}f'(r)\right) + \vec{k}\left(\frac{yx}{r}f'(r) - \frac{xy}{r}f'(r)\right) = \vec{0}.$$

Пример 31. Доказать справедливость формулы
$$\operatorname{div}(u \operatorname{grad} v) = (\operatorname{grad} u, \operatorname{grad} v) + u\Delta v,$$
где u и v – скалярные поля.

Решение. Пользуясь определением градиента, получаем
$$u \operatorname{grad} v = u\left\{\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial z}\right\} = \left\{u\frac{\partial v}{\partial x}, u\frac{\partial v}{\partial y}, u\frac{\partial v}{\partial z}\right\}.$$
Согласно формуле для дивергенции имеем
$$\operatorname{div}(u \operatorname{grad} v) = \frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(u\frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(u\frac{\partial v}{\partial z}\right) =$$
$$= \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} + u\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} + u\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial v}{\partial z} + u\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} =$$
$$= (\operatorname{grad} u, \operatorname{grad} v) + u\Delta v.$$
Запись доказательства формулы значительно сократится, если воспользоваться оператором Гамильтона:
$$\operatorname{div}(u \operatorname{grad} v) = \big(\nabla(u\nabla v)\big) = (\nabla u, \nabla v) + u\nabla^2 v = (\operatorname{grad} u, \operatorname{grad} v) + u\Delta v.$$

Пример 32. Векторное поле $\vec{a} = (x-y)\vec{\imath} + (x+y)\vec{\jmath} + (z+2)\vec{k}$ представить в виде суммы потенциального и соленоидального полей.

Решение. Как отмечалось ранее, непрерывно дифференцируемое векторное поле $\vec{a}$ представимо в виде $\vec{a} = \overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2}$, где $\overrightarrow{a_1} = \operatorname{grad} u$ – потенциальное поле, $\overrightarrow{a_2} = \vec{a} - \operatorname{grad} u$ – соленоидальное поле, причем u – решение уравнения Пуассона $\Delta u = \operatorname{div} \vec{a}$.

Для заданного поля $\vec{a}$
$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{\partial}{\partial x}(x-y) + \frac{\partial}{\partial y}(x+y) + \frac{\partial}{\partial z}(z+2) = 3.$$
Соответствующее уравнение Пуассона имеет вид
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 3.$$
Частным решением этого уравнения является, например, функция
$$u = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2).$$
Для указанной функции u
$$\operatorname{grad} u = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}.$$

Следовательно, данное поле $\vec{a}$ представимо в виде суммы потенциального поля

$$\overrightarrow{a_1} = \operatorname{grad} u = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

и соленоидального поля

$$\overrightarrow{a_2} = \vec{a} - \operatorname{grad} u = \big((x-y)-x\big)\vec{i} + \big((x+y)-y\big)\vec{j} + \big((z+2)-z\big)\vec{k} =$$

$$= -y\vec{i} + x\vec{j} + 2\vec{k}.$$

Тот факт, что поле $\overrightarrow{a_2}$ является соленоидальным, подтверждают непосредственные вычисления:

$$\operatorname{div} \overrightarrow{a_2} = \frac{\partial}{\partial x}(-y) + \frac{\partial}{\partial y}(x) + \frac{\partial}{\partial z}(z) = 0.$$

Выводы по главе

В данной главе были рассмотрены скалярные и векторные поля и применяемые к ним дифференциальные операции, описаны свойства этих операций.

В каждой точке дифференцируемого скалярного поля может быть вычислен градиент и производная по любому направлению. Дифференцируемое векторное поле также обладает производной по любому направлению в каждой своей точке. Кроме того, важными характеристиками векторного поля являются дивергенция и ротор. В случае двукратной дифференцируемости к скалярным и векторным полям применимы дифференциальные операции второго порядка. В частности, для градиента скалярного поля и ротора векторного поля можно вычислить дивергенцию и ротор, а для дивергенции векторного поля – градиент. Отдельное внимание в данной главе уделяется нестационарным, то есть изменяющимся с течением времени скалярным и векторным полям, а также соленоидальным и потенциальным полям. Потенциальное векторное поле представляет собой градиент некоторого скалярного поля, а соленоидальное векторное поле обладает нулевой дивергенцией. Важное значение в теории поля имеет теорема о представимости всякого непрерывно дифференцируемого векторного поля в виде суммы потенциального и соленоидального полей.

Контрольные вопросы и задания

1. Сформулируйте определения скалярного и векторного полей.

2. Что такое поверхности уровня?

3. Что такое векторные линии?

4. Дайте определение производной по направлению для скалярного и векторного полей. Как связана производная по направлению с частными производными?

5. Найдите производную скалярного поля $u = x^2 + yz$ в точке (1; 1; 2) по направлению: а) оси абсцисс; б) оси ординат; в) вектора $\vec{l} = \{1; 1; 1\}$.

6. Дайте определение градиента скалярного поля.

7. Найдите градиент скалярного поля $u = x^2 + yz$ в точке (0; 1; 3).

8. Какое векторное поле называется потенциальным?

9. Дайте определение дивергенции векторного поля.

10. Дайте определение ротора векторного поля.

11. Какое векторное поле называется соленоидальным?

12. Что называют скалярным потенциалом?

13. Что такое векторный потенциал?

14. Что такое оператор Гамильтона?

15. Запишите с помощью оператора Гамильтона: а) градиент скалярного поля; б) дивергенцию векторного поля; в) ротор векторного поля.

16. Вычислите дивергенцию и ротор векторного поля $\vec{a} = \{xy; yz; zx\}$ в точке (1; 2; 3).

17. Какое поле называется нестационарным? Что такое полная производная?

18. Перечислите повторные дифференциальные операции в скалярных и векторных полях.

19. Результатом каких повторных дифференциальных операций является тождественный ноль?

20. Что такое оператор Лапласа и как он связан с оператором Гамильтона?

21. Какая функция называется гармонической? Приведите примеры гармонических функций.

22. Объясните, как представить произвольное непрерывно дифференцируемое векторное поле в виде суммы потенциального и соленоидального полей.

23. Единственно ли представление векторного поля в виде суммы потенциального и соленоидального полей?

24. Вычислите $\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{r}$ и $\operatorname{div}\operatorname{grad} r$, где $\vec{r} = \{x, y, z\}, r = |\vec{r}|$.

Глава 4. РЯДЫ И ИНТЕГРАЛЫ ФУРЬЕ

§ 4.1. Ряды Фурье

4.1.1. Понятия ортонормированной системы и общего ряда Фурье

Определение. Вещественное линейное пространство X называется *евклидовым*, если

1) известно правило, посредством которого любым двум элементам f и g из X ставится в соответствие число, называемое *скалярным произведением* этих элементов и обозначаемое (f, g);

2) введенное скалярное произведение удовлетворяет следующим аксиомам:

I. $(f, g) = (g, f)\ \forall f, g \in X$;

II. $(f + g, h) = (f, h) + (g, h)\ \forall f, g, h \in X$;

III. $(\lambda f, g) = \lambda(f, g)\ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall f, g \in X$;

IV. $(f, f) \geq 0\ \forall f \in X$; $(f, f) = 0 \Leftrightarrow f = 0$.

Линейное пространство X называется *бесконечномерным*, если в нем для любого натурального n можно найти n линейно независимых векторов.

Примером бесконечномерного евклидова пространства является пространство всех кусочно непрерывных на некотором отрезке $[a, b]$ функций. Говоря о данном пространстве, под кусочно непрерывной функцией мы понимаем такую функцию $f(x)$, которая непрерывна всюду на $[a, b]$, за исключением, быть может, конечного числа лежащих внутри отрезка точек x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, в которых она имеет разрывы первого рода, причем в каждой точке разрыва x_i выполняется условие

$$f(x_i) = \frac{f(x_i - 0) + f(x_i + 0)}{2}. \tag{57}$$

Заметим, что если x –точка непрерывности функции f, то условие (57) автоматически выполняется.

Скалярное произведение любых двух элементов $f(x)$ и $g(x)$ пространства всех кусочно непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций определяется формулой

$$(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)dx. \tag{58}$$

Теорема 13. Во всяком евклидовом пространстве для любых двух элементов f и g справедливо неравенство

$$(f, g)^2 \leq (f, f) \cdot (g, g), \tag{59}$$

называемое неравенством *Коши – Буняковского*.

Определение. Вещественное линейное пространство X называется *нормированным*, если

1) известно правило, посредством которого каждому элементу f из X ставится в соответствие число, называемое *нормой* указанного элемента и обозначаемое $||f||$;

2) введенная норма удовлетворяет следующим аксиомам:

I. $||f|| \geq 0\ \forall f \in X;\ ||f|| = 0 \Leftrightarrow f = 0;$

II. $||\lambda f|| = |\lambda| \cdot ||f||\ \forall f \in X, \forall \lambda \in \mathbb{R};$

III. $||f + g|| \leq ||f|| + ||g||\ \forall f, g \in X.$

Последнее неравенство называется *неравенством треугольника* (или *неравенством Минковского*).

Теорема 14. Всякое евклидово пространство становится нормированным, если в нем норму любого элемента f определить равенством

$$||f|| = \sqrt{(f, f)}. \tag{60}$$

В пространстве кусочно непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций норма задается формулой

$$||f|| = \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx}, \tag{61}$$

а неравенство треугольника принимает вид

$$\sqrt{\int_a^b \left(f(x) + g(x)\right)^2 dx} \leq \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx} + \sqrt{\int_a^b g^2(x)dx}. \tag{62}$$

Два элемента f и g евклидова пространства X называются *ортогональными*, если $(f, g) = 0$.

Рассмотрим в бесконечномерном евклидовом пространстве X последовательность элементов

$$\psi_1, \psi_2, \psi_3, \dots, \psi_n, \dots \tag{63}$$

Последовательность (63) называется ортонормированной системой (ОНС), если входящие в нее элементы попарно *ортогональны* и имеют норму, равную единице.

Примером ОНС в пространстве кусочно непрерывных на отрезке $[-\pi; \pi]$ функций является тригонометрическая система

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \dots, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \dots \tag{64}$$

Пусть в произвольном бесконечномерном евклидовом пространстве X задана ОНС $\{\psi_k\}$. Выберем любой элемент $f \in X$.

Определение. *Рядом Фурье элемента f по* ОНС $\{\psi_k\}$ называется ряд вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k \psi_k, \tag{65}$$

где f_k – числа, называемые *коэффициентами Фурье элемента f* и определяемые равенствами $f_k = (f, \psi_k)$, $k = 1, 2, 3, \dots$

Конечная сумма

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f_k \psi_k \tag{66}$$

называется n-й *частичной суммой ряда Фурье элемента f по* ОНС $\{\psi_k\}$.

Рассмотрим наряду с n-й частичной суммой (66) произвольную линейную комбинацию первых n элементов ОНС $\{\psi_k\}$

$$\sum_{k=1}^{n} C_k \psi_k, \tag{67}$$

где $C_1, C_2, \dots, C_n$ – некоторые постоянные числа.

Будем называть величину $\|f - g\|$ *отклонением элемента g от элемента f по норме данного евклидова пространства*.

Теорема 15. Среди всех сумм вида (67) наименьшее отклонение от элемента f по норме рассматриваемого евклидова пространства имеет сумма (66).

Доказательство.

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} C_k\psi_k - f\right\|^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} C_k\psi_k - f, \sum_{k=1}^{n} C_k\psi_k - f\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} C_k^2(\psi_k, \psi_k) - 2\sum_{k=1}^{n} C_k(f, \psi_k) + (f, f) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} C_k^2 - 2\sum_{k=1}^{n} C_k f_k + \left||f|\right|^2 = \sum_{k=1}^{n}(C_k - f_k)^2 + \left||f|\right|^2 - \sum_{k=1}^{n} f_k^2.$$

Из приведенных равенств видно, что наименьшее значение величины $\|\sum_{k=1}^{n} C_k\psi_k - f\|^2$ достигается при $C_k = f_k$.

Следствие 1. Для произвольного элемента f данного евклидова пространства и любой ОНС $\{\psi_k\}$ при произвольном выборе постоянных C_k для любого номера n справедливо неравенство

$$\left||f|\right|^2 - \sum_{k=1}^{n} f_k^2 \leq \left\|\sum_{k=1}^{n} C_k\psi_k - f\right\|^2. \tag{68}$$

Следствие 2. Для произвольного элемента f данного евклидова пространства, любой ОНС $\{\psi_k\}$ и любого номера n справедливо равенство

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} f_k\psi_k - f\right\|^2 = \left||f|\right|^2 - \sum_{k=1}^{n} f_k^2, \tag{69}$$

называемое *тождеством Бесселя*.

Теорема 16. Для любого элемента f данного евклидова пространства и любой ОНС $\{\psi_k\}$ справедливо неравенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 \leq \left||f|\right|^2, \tag{70}$$

называемое неравенством Бесселя.

Доказательство. Из неотрицательности левой части равенства (69) следует, что для любого n

$$\sum_{k=1}^{n} f_k^2 \leq \left||f|\right|^2. \tag{71}$$

Переходя в неравенстве (71) к пределу при $n \to \infty$, получаем неравенство (70).

В качестве примера рассмотрим пространство всех кусочно непрерывных на отрезке [–π; π] функций и ряд Фурье по тригонометрической системе (64) (этот ряд принято называть тригонометрическим рядом Фурье (ТРФ)). Для любой кусочно непрерывной на отрезке [–π; π] функции $f(x)$ указанный ряд Фурье имеет вид

$$\bar{f}_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\bar{f}_k \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}} + \tilde{f}_k \frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}}\right), \tag{72}$$

где

$$\bar{f}_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx\,, \bar{f}_k = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx,$$

$$\tilde{f}_k = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx, k = 1, 2, \ldots$$

Неравенство Бесселя примет вид

$$\left(\bar{f}_0\right)^2 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\left(\bar{f}_k\right)^2 + \left(\tilde{f}_k\right)^2\right) \le \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx. \tag{73}$$

Отклонение $g(x)$ от $f(x)$ по норме в этом случае равно так называемому *среднему квадратичному отклонению*

$$\left||f - g|\right| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(x) - g(x)\right)^2 dx}. \tag{74}$$

Замечание. В теории тригонометрических рядов Фурье принята несколько иная форма записи как самого ряда Фурье (72), так и неравенства Бесселя (73). Тригонометрический ряд Фурье обычно записывают в виде

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx), \tag{75}$$

где $a_0 = \dfrac{2\bar{f}_0}{\sqrt{2\pi}} = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx\,, a_k = \dfrac{\bar{f}_k}{\sqrt{\pi}} = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx,$

$$b_k = \frac{\tilde{f}_k}{\sqrt{\pi}} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx\,, k = 1, 2, \ldots \tag{76}$$

При такой форме записи неравенство Бесселя принимает вид

$$\frac{{a_0}^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2) \le \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx. \tag{77}$$

Из (77) вытекает, что для любой кусочно непрерывной на отрезке $[-\pi; \pi]$ функции $f(x)$ величины a_k и b_k (называемые *тригонометрическими коэффициентами Фурье функции* $f(x)$) стремятся к нулю при $k \to \infty$.

4.1.2. Замкнутые и полные ортонормированные системы

Пусть $\{\psi_k\}$ – ОНС в бесконечномерном евклидовом пространстве (ЕП) X.

Определение. ОНС $\{\psi_k\}$ называется замкнутой, если для любого элемента f данного ЕП и для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая линейная комбинация $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \psi_k$, что

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \psi_k \right\| < \varepsilon.$$

Теорема 17. Если ОНС $\{\psi_k\}$ замкнута, то для любого элемента $f \in X$ справедливо равенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 = \|f\|^2,$$

называемое *уравнением замкнутости или равенством Парсеваля.*

Теорема 18. Если ОНС $\{\psi_k\}$ замкнута, то для любого элемента $f \in X$

$$\lim_{n\to\infty} \left\| f - \sum_{k=1}^{n} f_k \psi_k \right\| = 0.$$

Определение. ОНС $\{\psi_k\}$ называется *полной*, если кроме нулевого элемента не существует никакого другого элемента данного ЕП, ортогонального всем элементам $\{\psi_k\}$.

Теорема 19. Всякая замкнутая ОНС $\{\psi_k\}$ является полной.

Замечание. Из полноты ОНС, вообще говоря, не следует замкнутость этой системы.

Теорема 20. Для всякой полной ОНС $\{\psi_k\}$ два различных элемента f и g данного ЕП не могут иметь одинаковые ряды Фурье.

4.1.3. Замкнутость тригонометрической системы и следствия из нее

Теорема 21. Тригонометрическая система

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \dots, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \dots \qquad (78)$$

замкнута в пространстве кусочно непрерывных на отрезке $[-\pi;\ \pi]$ функций.

Следствие 1. Тригонометрическая система (78) является полной в пространстве всех кусочно непрерывных на отрезке $[-\pi;\ \pi]$ функций.

Следствие 2. Для любой кусочно непрерывной на отрезке $[-\pi;\ \pi]$ функции $f(x)$ справедливо равенство Парсеваля.

Следствие 3. ТРФ любой кусочно непрерывной на отрезке $[-\pi;\ \pi]$ функции $f(x)$ сходится к этой функции в среднем, то есть

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f(x)-\left(\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)\right)\right|^2 dx=0.$$

Следствие 4. ТРФ любой кусочно непрерывной на отрезке $[-\pi;\ \pi]$ функции можно интегрировать почленно на этом отрезке.

Следствие 5. Если две кусочно непрерывные на отрезке $[-\pi;\ \pi]$ функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют одинаковые ТРФ, то эти функции совпадают всюду на данном отрезке.

Следствие 6. Если ТРФ кусочно непрерывной на отрезке $[-\pi;\ \pi]$ функции f(x) сходится равномерно на некотором содержащемся в $[-\pi;\ \pi]$ отрезке $[a, b]$, то он сходится на $[a, b]$ именно к функции $f(x)$.

4.1.4. Простейшие условия абсолютной и равномерной сходимости тригонометрического ряда Фурье

Будем говорить, что функция $f(x)$ имеет на отрезке $[a,\ b]$ *кусочно непрерывную производную*, если производная $f'(x)$ существует и непрерывна всюду на $[a,\ b]$, за исключением, быть может, конечного числа точек, в каждой из которых функция $f'(x)$ имеет конечные левое и правое предельные значения.

Говорят, что функция $f(x)$ имеет на отрезке $[a, b]$ *кусочно непрерывную производную порядка* $n \geq 1$, если функция $f^{(n-1)}(x)$ имеет на $[a, b]$ кусочно непрерывную производную.

Теорема 22. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[-\pi; \pi]$, имеет на этом отрезке кусочно непрерывную производную и удовлетворяет условию $f(-\pi) = f(\pi)$, то ТРФ функции $f(x)$ сходится к этой функции равномерно на отрезке $[-\pi; \pi]$. Более того, ряд, составленный из модулей членов ТРФ функции $f(x)$, сходится равномерно на указанном отрезке.

4.1.5. Простейшие условия почленного дифференцирования тригонометрического ряда Фурье

Теорема 23. Пусть функция $f(x)$ и все ее производные до порядка m включительно непрерывны на отрезке $[-\pi; \pi]$ и удовлетворяют условиям

$$f(-\pi) = f(\pi), f'(-\pi) = f'(\pi), \dots, f^{(m)}(-\pi) = f^{(m)}(\pi).$$

Пусть, кроме того, функция $f(x)$ имеет на отрезке $[-\pi; \pi]$ кусочно непрерывную производную порядка $(m + 1)$. Тогда ТРФ функции $f(x)$ можно m раз почленно дифференцировать на отрезке $[-\pi; \pi]$, то есть для любого $s = 1, 2, \dots, m$

$$f^{(s)}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k (\cos kx)^{(s)} + b_k (\sin kx)^{(s)} \right) \ \forall x \in [-\pi; \pi].$$

4.1.6. Теорема Дирихле

Теорема 24. Пусть функция $f(x)$ на отрезке $[-\pi; \pi]$ непрерывна или кусочно непрерывна (то есть имеет лишь конечное число точек разрыва, причем первого рода) и монотонна или кусочно монотонна (то есть отрезок можно разделить на конечное число отрезков, внутри каждого из которых функция либо только возрастает, либо только убывает, либо постоянна). Тогда ТРФ этой функции сходится на отрезке $[-\pi; \pi]$, причем справедливы равенства:

1) $$f(x_0) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x_0 + b_1 \sin x_0 + a_2 \cos 2x_0 + b_2 \sin 2x_0 + \dots +$$
$$+ a_n \cos nx_0 + b_n \sin nx_0 + \dots,$$

где x_0 – точка непрерывности функции $f(x)$ из интервала $(-\pi; \pi)$;

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx\ (n = 0, 1, 2, \dots), b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx\ \ (n = 1, 2, \dots);$$

2) $S(x_0) = \frac{1}{2}(f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0))$,

где x_0 – точка разрыва функции $f(x)$ из интервала $(-\pi;\ \pi)$; $S(x_0)$ – значение суммы ТРФ в точке x_0;

3) $S(-\pi) = S(\pi) = \frac{1}{2}(f(-\pi + 0) + f(\pi - 0))$,

где $S(-\pi)$ и $S(\pi)$ значения суммы ТРФ в точках $-\pi$ и π соответственно.

4.1.7. Тригонометрический ряд Фурье на отрезке [–*l*; *l*]

При решении ряда задач приходится раскладывать функцию в ТРФ не на отрезке $[-\pi;\ \pi]$, а на отрезке $[-l;\ l]$, где l – произвольное положительное число. Для перехода к этому случаю нужно всюду заменить переменную x на $\frac{\pi x}{l}$. При такой замене останутся справедливыми все перечисленные выше результаты. Они будут относиться к ТРФ

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos\frac{\pi k x}{l} + b_k \sin\frac{\pi k x}{l}\right),$$

где

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx,$$

$$a_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi k x}{l}dx\,, b_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi k x}{l}dx\,, k = 1, 2, \cdots$$

Если $f(x)$ – четная функция, то ее ТРФ имеет вид

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\frac{\pi k x}{l},$$

то есть все коэффициенты b_k обращаются в ноль.

В случае нечетной функции $f(x)$ соответствующий ей ТРФ принимает вид

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\frac{\pi k x}{l},$$

то есть теперь зануляются все коэффициенты a_k.

4.1.8. Пример разложения функции в тригонометрический ряд Фурье

Пусть

$$f(x)=\begin{cases}-2, x\in[-3;0)\\ 1, x=0\\ x+3, x\in(0;3]\end{cases}.$$

Получим разложение данной функции в тригонометрический ряд Фурье на отрезке [–3; 3].

Вычислим коэффициент a_0:

$$a_0=\frac{1}{3}\int_{-3}^{3}f(x)dx=\frac{1}{3}\left(\int_{-3}^{0}(-2)dx+\int_{0}^{3}(x+3)dx\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\left(-2x|_{-3}^{0}+\frac{(x+3)^2}{2}\bigg|_0^3\right)=\frac{1}{3}(-6+18-4{,}5)=\frac{1}{3}\cdot\frac{15}{2}=2{,}5.$$

Теперь найдем коэффициенты a_k и b_k для $k\geq 1$:

$$a_k=\frac{1}{3}\int_{-3}^{3}f(x)\cos\frac{\pi kx}{3}dx=\frac{1}{3}\left(\int_{-3}^{0}\left(-2\cos\frac{\pi kx}{3}\right)dx+\int_{0}^{3}(x+3)\cos\frac{\pi kx}{3}dx\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\left(-2\frac{3}{\pi k}\sin\frac{\pi kx}{3}\bigg|_{-3}^{0}+\frac{3}{\pi k}\int_{0}^{3}(x+3)d\left(\sin\frac{\pi kx}{3}\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi k}\left((x+3)\sin\frac{\pi kx}{3}\bigg|_0^3-\int_0^3\sin\frac{\pi kx}{3}dx\right)=\frac{3}{\pi^2k^2}\cos\frac{\pi kx}{3}\bigg|_0^3=$$

$$=\frac{3}{\pi^2k^2}(\cos\pi k-1)=\frac{3}{\pi^2k^2}((-1)^k-1);$$

$$b_k=\frac{1}{3}\int_{-3}^{3}f(x)\sin\frac{\pi kx}{3}dx=\frac{1}{3}\left(\int_{-3}^{0}\left(-2\sin\frac{\pi kx}{3}\right)dx+\int_{0}^{3}(x+3)\sin\frac{\pi kx}{3}dx\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\left(2\frac{3}{\pi k}\cos\frac{\pi kx}{3}\bigg|_{-3}^{0}-\frac{3}{\pi k}\int_{0}^{3}(x+3)d\left(\cos\frac{\pi kx}{3}\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{6}{\pi k}(1-\cos\pi k)-\frac{3}{\pi k}\left((x+3)\cos\frac{\pi kx}{3}\bigg|_0^3-\int_0^3\cos\frac{\pi kx}{3}dx\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{6}{\pi k}(1-(-1)^k)-\frac{3}{\pi k}(6(-1)^k-3)\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi k}(1-(-1)^k)-\frac{3}{\pi k}(2(-1)^k-1)=\frac{5-8(-1)^k}{\pi k}.$$

Таким образом, тригонометрический ряд Фурье функции $f(x)$ на отрезке [–3; 3] имеет вид

$$\frac{2{,}5}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{3}{\pi^2k^2}((-1)^k-1)\cos\frac{\pi kx}{3}+\frac{5-8(-1)^k}{\pi k}\sin\frac{\pi kx}{3}\right). \qquad (79)$$

Пусть $S(x)$ – сумма ряда (79). В соответствии с теоремой Дирихле

$S(x) = f(x)$, если $x \in (-3; 0) \cup (0; 3)$;

$S(0) = 0{,}5\big(f(0-0) + f(0+0)\big) = 0{,}5(-2+3) = 0{,}5;$

$S(-3) = S(3) = 0{,}5\big(f(-3+0) + f(3-0)\big) = 0{,}5(-2+6) = 2.$

Учитывая, что $f(0) = 1$, $f(-3) = -2$, а $f(3) = 6$, делаем вывод, что в точках 0, –3 и 3 значения функции $f(x)$ и суммы ее ряда Фурье (79) различаются.

§ 4.2. Интеграл Фурье

Говорят, что функция $f(x)$ принадлежит классу $L_1(-\infty, \infty)$, если $f(x)$ интегрируема на любом отрезке и сходится несобственный интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx$.

Теорема 25. Если $f(x) \in L_1(-\infty, \infty)$, то для любой точки $y \in (-\infty, \infty)$ существует несобственный интеграл

$$\hat{f}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} (\cos xy + i \sin xy) f(x)dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos xy \, dx + i \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin xy \, dx,$$

называемый *образом* (или *преобразованием*) *Фурье функции* $f(x)$. Более того, функция $\hat{f}(y)$ непрерывна по y в каждой точке $y \in (-\infty, \infty)$ и $\lim\limits_{|y|\to\infty} |\hat{f}(y)| = 0$.

Следствие. Если $f(x) \in L_1(-\infty, \infty)$, то

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \lambda x \, dx = 0, \ \lim_{\lambda\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin \lambda x \, dx = 0.$$

Для каждой функции $f(x) \in L_1(-\infty, \infty)$ будем называть предел

$$\lim_{\lambda\to\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\lambda}^{\lambda} e^{-ixy} \hat{f}(y) dy \right) = \lim_{\lambda\to\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\lambda}^{\lambda} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{iy(u-x)} f(u) du \right) dy \right)$$

(при условии, что он существует) *разложением этой функции в интеграл Фурье.*

Теорема 26. Если функция $f(x)$ принадлежит пространству $L_1(-\infty, \infty)$ и имеет в данной точке x правую и левую производные, понимаемые как $\lim\limits_{t\to 0+0} \frac{f(x+t)-f(x+0)}{t}$ и $\lim\limits_{t\to 0-0} \frac{f(x+t)-f(x-0)}{t}$ соответственно, то в этой точке x справедливо равенство

$$\lim_{\lambda\to\infty}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\lambda}^{\lambda}e^{-ixy}\hat{f}(y)dy\right)=\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}.$$

Левую часть последнего равенства можно записать в виде

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ixy}\hat{f}(y)dy,$$

если понимать несобственный интеграл как интеграл в смысле главного значения.

Если функция $f(x)$ такова, что $f(x)=0{,}5(f(x+0)+f(x-0))$, то справедливо равенство

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ixy}\hat{f}(y)dy. \tag{80}$$

Правую часть равенства (80) называют *обратным преобразованием Фурье*. Интеграл $\int_{-\infty}^{\infty}e^{ixy}f(x)dx$ принято называть прямым преобразованием Фурье.

Пусть $f(x)$ – четная функция. Тогда

$$\hat{f}(y)=\int_{-\infty}^{\infty}(\cos xy+i\sin xy)f(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\cos xy\,dx=$$

$$=2\int_{0}^{\infty}f(x)\cos xy\,dx.$$

Эту функцию называют *прямым косинус-преобразованием Фурье*.

Из последней формулы видно, что $\hat{f}(y)$ также является четной функцией. Поэтому

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ixy}\hat{f}(y)dy=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(\cos xy-i\sin xy)\hat{f}(y)dy=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(y)\cos xy\,dy=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\hat{f}(y)\cos xy\,dy.$$

Полученная функция называется *обратным косинус-преобразованием Фурье*.

Пусть теперь $f(x)$ – нечетная функция. Тогда

$$\hat{f}(y)=\int_{-\infty}^{\infty}(\cos xy+i\sin xy)f(x)dx=i\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\sin xy\,dx=$$

$$=2i\int_{0}^{\infty}f(x)\sin xy\,dx.$$

Эту функцию называют *прямым синус-преобразованием Фурье*.

Ввиду нечетности последней функции имеем

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixy}\hat{f}(y)dy = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(\cos xy - i\sin xy)\hat{f}(y)dy =$$

$$= -\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(y)\sin xy\,dy = -\frac{i}{\pi}\int_{0}^{\infty}\hat{f}(y)\sin xy\,dy.$$

Полученная функция называется *обратным синус-преобразованием Фурье*.

Приведем пример нахождения прямого и обратного преобразований Фурье для заданной функции.

Пусть $f(x) = e^{-ax}(a > 0)$, $0 \le x < \infty$. Продолжим эту функцию на полупрямую $-\infty < x < 0$ четным образом. Найдем для получившейся функции прямое преобразование Фурье. В соответствии с формулой для косинус-преобразования имеем

$$\hat{f}(y) = 2\int_{0}^{\infty} e^{-ax}\cos xy\,dx.$$

Найдем первообразную для функции e^{-ax} cos xy. С помощью интегрирования по частям получаем

$$\int e^{-ax}\cos xy\,dx = -\frac{1}{a}\int \cos xy\,d(e^{-ax}) =$$

$$= -\frac{1}{a}\left(e^{-ax}\cos xy + \int ye^{-ax}\sin xy\,dx\right) =$$

$$= -\frac{1}{a}\left(e^{-ax}\cos xy - \frac{1}{a}y\int \sin xy\,d(e^{-ax})\right) =$$

$$= -\frac{1}{a}\left(e^{-ax}\cos xy - \frac{y}{a}\left(e^{-ax}\sin xy - y\int e^{-ax}\cos xy\,dx\right)\right).$$

Следовательно,

$$\left(1 + \frac{y^2}{a^2}\right)\int e^{-ax}\cos xy\,dx = \frac{y}{a^2}e^{-ax}\sin xy - \frac{1}{a}e^{-ax}\cos xy.$$

Отсюда заключаем, что

$$\int e^{-ax}\cos xy\,dx = \frac{e^{-ax}(y\sin xy - a\cos xy)}{a^2 + y^2}.$$

Используя найденную первообразную, получаем

$$\hat{f}(y) = 2\int_0^{\infty} e^{-ax}\cos xy\,dx = 2\lim_{R\to\infty}\int_0^{R} e^{-ax}\cos xy\,dx =$$

$$= 2\lim_{R\to\infty}\left(\frac{e^{-ax}(y\sin xy - a\cos xy)}{a^2+y^2}\bigg|_0^R\right) =$$

$$= 2\lim_{R\to\infty}\left(\frac{e^{-aR}(y\sin Ry - a\cos Ry) + a}{a^2+y^2}\right) = \frac{2a}{a^2+y^2}.$$

Обратное преобразование Фурье запишется в виде

$$f(x) = \frac{2a}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\cos xy\,dy}{a^2+y^2}.$$

Эта формула задает функцию, являющуюся четным продолжением исходной функции $f(x)$ на отрицательную полуось.

Вновь обратимся к функции $f(x) = e^{-ax}$, $0 \le x < \infty$. На этот раз построим ее нечетное продолжение, то есть рассмотрим функцию

$$f(x) = \begin{cases} e^{-ax}, x > 0 \\ 0, x = 0 \\ -e^{ax}, x < 0 \end{cases}.$$

По формуле для прямого синус-преобразования Фурье получаем

$$\hat{f}(y) = 2i\int_0^{\infty} f(x)\sin xy\,dx = 2i\int_0^{\infty} e^{-ax}\sin xy\,dx.$$

Для нахождения первообразной функции $e^{-ax}\sin xy$ воспользуемся формулой интегрирования по частям. Имеем

$$\int e^{-ax}\sin xy\,dx = -\frac{1}{a}\int \sin xy\,d(e^{-ax}) =$$

$$= -\frac{1}{a}\left(e^{-ax}\sin xy - \int ye^{-ax}\cos xy\,dx\right) =$$

$$= -\frac{1}{a}\left(e^{-ax}\sin xy + \frac{1}{a}y\int \cos xy\,d(e^{-ax})\right) =$$

$$= -\frac{1}{a}\left(e^{-ax}\sin xy + \frac{y}{a}\left(e^{-ax}\cos xy + y\int e^{-ax}\sin xy\,dx\right)\right).$$

Следовательно,

$$\left(1+\frac{y^2}{a^2}\right)\int e^{-ax}\sin xy\,dx = -\frac{y}{a^2}e^{-ax}\cos xy - \frac{1}{a}e^{-ax}\sin xy.$$

Отсюда заключаем, что

$$\int e^{-ax} \sin xy \, dx = -\frac{e^{-ax}(y \cos xy + a \sin xy)}{a^2 + y^2}.$$

Используя найденную первообразную, получаем

$$\hat{f}(y) = 2i \int_0^\infty e^{-ax} \sin xy \, dx = 2i \lim_{R \to \infty} \int_0^R e^{-ax} \sin xy \, dx =$$

$$= 2i \lim_{R \to \infty} \left(-\frac{e^{-ax}(y \cos xy + a \sin xy)}{a^2 + y^2} \bigg|_0^R \right) =$$

$$= 2i \lim_{R \to \infty} \left(-\frac{e^{-aR}(y \cos Ry + a \sin Ry) - y}{a^2 + y^2} \right) = \frac{2iy}{a^2 + y^2}.$$

Обратное преобразование Фурье запишется в виде

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{y \sin xy \, dy}{a^2 + y^2}.$$

Эта формула задает функцию, являющуюся нечетным продолжением исходной функции на отрицательную полуось. Функция, определяемая последним равенством, совпадает с первоначальной функцией $f(x)$ всюду на промежутке $[0; \infty)$, кроме точки 0.

Выводы по главе

В данной главе были рассмотрены понятия ряда и интеграла Фурье, описаны их свойства, сформулированы условия разложимости функции в ряд или интеграл Фурье.

Ряд Фурье элемента f бесконечномерного евклидова пространства E строится на основе некоторой ортонормированной системы $\{\psi_n\}$ элементов этого пространства. Он сходится к элементу f по норме рассматриваемого пространства, если система $\{\psi_n\}$ является замкнутой в E. Частным случаем ряда Фурье является тригонометрический ряд Фурье. Он строится по тригонометрической системе специального вида, рассматриваемой в пространстве кусочно непрерывных на отрезке $[-\pi; \pi]$ функций. Данная система является замкнутой в указанном пространстве. Это ее свойство позволяет обосновать, что тригонометрический ряд Фурье любой кусочно непрерывной на отрезке $[-\pi; \pi]$ функции $f(x)$ сходится к этой функции в среднем и допускает почленное интегрирование на этом отрезке.

Особое внимание уделяется условиям абсолютной и равномерной сходимости тригонометрического ряда Фурье, а также условиям, обеспечивающим возможность его почленного дифференцирования. Важное практическое значение имеет теорема Дирихле, согласно которой тригонометрический ряд Фурье любой кусочно непрерывной и кусочно монотонной на отрезке $[-\pi; \pi]$ функции $f(x)$ сходится в каждой точке этого отрезка. При этом сумма ряда совпадает с функцией $f(x)$ всюду на отрезке, за исключением, быть может, конечного множества точек.

Для всякой абсолютно интегрируемой на числовой прямой функции $f(x)$ определено прямое преобразование Фурье $\hat{f}(y)$, представляющее собой непрерывную функцию от y. Наряду с прямым рассматривают и обратное преобразование Фурье. Оно строится по функции $\hat{f}(y)$ и при некоторых ограничениях на функцию $f(x)$ дает ее интегральное представление.

Контрольные вопросы и задания

1. Дайте определение евклидова пространства.

2. Дайте определение нормированного пространства.

3. Сформулируйте определение ортонормированной системы элементов в евклидовом пространстве.

4. Дайте определение ряда Фурье элемента евклидова пространства по произвольной ортонормированной системе.

5. Запишите неравенство Бесселя для произвольного евклидова пространства.

6. Дайте определение замкнутой ортонормированной системы в евклидовом пространстве.

7. Запишите равенство Парсеваля для произвольного евклидова пространства.

8. Дайте определение полной ортонормированной системы в евклидовом пространстве.

9. Какой ряд принято называть тригонометрическим рядом Фурье?

10. Является ли тригонометрическая система

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \ldots, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \ldots$$

замкнутой в пространстве кусочно непрерывных на отрезке [–π; π] функций? Является ли эта система полной в указанном пространстве?

11. Как запишется равенство Парсеваля для пространства кусочно непрерывных на отрезке [–π; π] функций?

12. Сформулируйте достаточные условия абсолютной и равномерной сходимости тригонометрического ряда Фурье.

13. Сформулируйте достаточные условия почленного дифференцирования тригонометрического ряда Фурье.

14. Сформулируйте теорему Дирихле для кусочно непрерывной и кусочно монотонной на отрезке [–π; π] функции.

15. Разложите в тригонометрический ряд Фурье на отрезке [–π; π] функцию

$$f(x) = \begin{cases} 2, x \in [-\pi; 0] \\ -3, x \in (0; \pi] \end{cases}.$$

В каких точках отрезка значения суммы ряда отличаются от значений функции $f(x)$?

16. В каком случае говорят, что функция $f(x)$ принадлежит классу $L_1(-\infty, \infty)$?

17. Как определяется образ Фурье функции $f(x) \in L_1(-\infty, \infty)$?

18. Как записывается обратное преобразование Фурье?

19. Запишите прямое и обратное косинус-преобразования Фурье.

20. Запишите прямое и обратное синус-преобразования Фурье.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данном учебном пособии были рассмотрены основы теории кратных и криволинейных интегралов, теории поля, теории рядов и интегралов Фурье. Изложение теоретических сведений по каждому разделу сопровождалось рассмотрением примеров решения типовых задач.

Анализируя представленный в пособии учебный материал, можно сделать вывод, что для успешного овладения техникой вычисления кратных и криволинейных интегралов необходимы навыки вычисления определенного интеграла Римана, поскольку именно к нему сводятся в конечном итоге и кратные, и криволинейные интегралы. То же самое касается рядов и интегралов Фурье. Для того чтобы разложить функцию в ряд или интеграл Фурье, необходимо вычислить определенные интегралы от функций, представляющих собой произведения исходной функции и тригонометрических функций.

Для умения выполнять дифференциальные операции над скалярными и векторными полями необходимы навыки вычисления частных производных функций нескольких переменных.

Успешное овладение материалом данного учебного курса предполагает внимательное изучение изложенных в пособии теоретических сведений, подробный анализ рассмотренных примеров и самостоятельное решение задач по всем разделам дисциплины.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Кудрявцев, Л. Д. Курс математического анализа. Том 1 : учебник для бакалавров / Л. Д. Кудрявцев. – 6-е изд., перераб. и доп. – Москва : Юрайт, 2019. – 703 с. – (Бакалавр. Базовый курс). – ISBN 978-5-9916-3701-5.
2. Кудрявцев, Л. Д. Курс математического анализа. Том 2. Книга 2 : учебник для вузов / Л. Д. Кудрявцев. – 6-е изд., перераб. и доп. – Москва : Юрайт, 2020. – 323 с. – (Высшее образование). – ISBN 978-5-534-10723-4.
3. Кудрявцев, Л. Д. Курс математического анализа. Том 3 : учебник для бакалавров / Л. Д. Кудрявцев. – 6-е изд., перераб. и доп. – Москва : Юрайт, 2020. – 351 с. – (Высшее образование). – ISBN 978-5-534-02795-2.
4. Демидович, Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу : учеб. пособие / Б. П. Демидович. – Изд. 21-е, стер. – Санкт-Петербург [и др.] : Лань, 2019. – 623 с. – URL: e.lanbook.com/book/113942 (дата обращения: 20.01.2022). – ISBN 978-5-8114-3985-0.

ГЛОССАРИЙ

Разбиением измеримого по Жордану **множества** E (на плоскости или в пространстве) называется такая конечная совокупность непустых измеримых множеств $\{E_i\}_{i=1}^n$, что $E = \bigcup_{i=1}^n E_i$ и для каждого i и любого $j \neq i$ мера множества $E_i \cap E_j$ равна нулю.

Интегральной суммой заданной на множестве E (на плоскости или в пространстве) функции $f(M)$, соответствующей данному разбиению $\{E_i\}_{i=1}^n$ множества E, называется сумма $I(E_i, M_i) = \sum_{i=1}^n f(M_i)m(E_i)$, где M_i – произвольная точка множества E_i, а $m(E_i)$ – мера множества E_i.

Диаметром ограниченного **множества** G на плоскости (в пространстве) будем называть величину

$$d(G) = \sup_{P,Q \in G} \rho(P, Q),$$

где через $\rho(P, Q)$ обозначено расстояние между точками $P(x_P, y_P)$ и $Q(x_Q, y_Q)$ ($P(x_P, y_P, z_P)$ и $Q(x_Q, y_Q, z_Q)$), вычисляемое по формуле

$$\rho(P, Q) = \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2} \Big(\rho(P, Q) =$$

$$= \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2 + (z_P - z_Q)^2}\Big).$$

Диаметром разбиения $\{E_i\}_{i=1}^n$ множества E называется число $d = \max\limits_{1 \leq i \leq n} d_i$, где $d_i = d(E_i)$.

Предел интегральных сумм $I(E_i, M_i)$ при $d \to 0$ равен числу I, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что для любого разбиения множества E, удовлетворяющего условию $d < \delta(\varepsilon)$, при любом выборе промежуточных точек M_i выполняется неравенство $|I(E_i, M_i) - I| < \varepsilon$.

Двойным (тройным) интегралом от функции f(x, y)(f(x, y, z)) по множеству E называется $\lim\limits_{d \to 0} I(E_i, M_i) = I$, если он существует.

y-трапецевидной областью на плоскости называется область

$$G = \{(x, y): a \leq x \leq b, y_1(x) \leq y \leq y_2(x)\},$$

где функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$.

x-трапецевидной областью на плоскости называется область

$$G = \{(x, y): c \leq y \leq d, x_1(y) \leq x \leq x_2(y)\},$$

где функции $x_1(y)$ и $x_2(y)$ непрерывны на отрезке $[c, d]$.

Цилиндрическими координатами точки $M(x, y, z)$ называется тройка чисел (ρ, φ, z), где (ρ, φ) – полярные координаты проекции точки M на плоскость Oxy, z – аппликата точки M.

Сферическими координатами точки $M(x, y, z)$ называется тройка чисел (r, θ, φ), где r – расстояние от точки O (начала координат) до точки M, θ – угол между лучами OM и Oz, φ – полярный угол проекции точки M на плоскость Oxy.

Разбиение простой спрямляемой **кривой** L, заданной уравнениями

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, \alpha \le t \le \beta \quad \left(\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \\ z = \chi(t) \end{cases}, \alpha \le t \le \beta \right),$$

порождается разбиением отрезка $[\alpha, \beta]$ точками $\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = \beta$. Точки $(M_k(\varphi(t_k), \psi(t_k))$ $(M_k(\varphi(t_k), \psi(t_k), \chi(t_k)))$ разбивают кривую L на дуги $M_{k-1}M_k, 1 \le k \le n$.

Интегральной суммой заданной на кривой L (на плоскости или в пространстве) функции $f(M)$, соответствующей данному разбиению $\{M_{k-1}M_k\}_{k=1}^{n}$ кривой L, называется сумма $I(M_k, N_k) = \sum_{k=1}^{n} f(N_k)\Delta l_k$, где N_k – произвольная точка дуги $M_{k-1}M_k$, а Δl_k – длина дуги $M_{k-1}M_k$.

Предел интегральных сумм $I(M_k, N_k)$ при $\max\limits_{1 \le k \le n} \Delta l_k = \Delta l \to 0$ равен числу I, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что для всякого разбиения кривой L, у которого $\Delta l < \delta(\varepsilon)$, при любом выборе промежуточных точек N_k выполняется неравенство $|I(M_k, N_k) - I| < \varepsilon$.

Криволинейным интегралом первого рода от функции $f(x, y)$ $(f(x, y, z))$ **по кривой** L называется $\lim\limits_{\Delta l \to 0} I(M_k, N_k) = I$, если он существует.

Криволинейный интеграл первого рода от функции $f(x, y)$ $(f(x, y, z))$, заданной на кривой $L = \bigcup_{i=1}^{s} L_i$, где L_i – простые спрямляемые кривые и конец L_i совпадает с началом L_{i+1} для всех $i = \overline{1, s-1}$, определяется как сумма криволинейных интегралов первого рода по кривым $L_i, \overline{1, s}$, если они существуют.

Непрерывной вдоль кривой L называется такая определенная на кривой L функция $f(M)$, что для любой точки $M_0 \in L$ справедливо равенство $\lim\limits_{\substack{M \to M_0 \\ M \in L}} f(M) = f(M_0)$. Если это условие выполнено в каждой точке кривой, за исключением конечного числа точек, в которых функция имеет разрывы первого рода, то функция $f(M)$ называется *кусочно непрерывной вдоль кривой L*.

Интегральными суммами заданных на простой спрямляемой плоской кривой L функций $P(M)$ и $Q(M)$, соответствующими данному разбиению $\{M_{k-1}M_k\}_{k=1}^{n}$ кривой L, называются суммы $I_1(M_k, N_k) = \sum_{k=1}^{n} P(N_k)\Delta x_k$ и $I_2(M_k, N_k) = \sum_{k=1}^{n} Q(N_k)\Delta y_k$, где N_k – произвольная точка дуги $M_{k-1}M_k$, $M_k = (x_k, y_k)$, $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $\Delta y_k = y_k - y_{k-1}$.

Интегральными суммами заданных на простой спрямляемой пространственной кривой L функций $P(M)$, $Q(M)$ и $R(M)$, соответствующими данному разбиению $\{M_{k-1}M_k\}_{k=1}^{n}$ кривой L, называются суммы $I_1(M_k, N_k) = \sum_{k=1}^{n} P(N_k)\Delta x_k$, $I_2(M_k, N_k) = \sum_{k=1}^{n} Q(N_k)\Delta y_k$ и $I_3(M_k, N_k) = \sum_{k=1}^{n} R(N_k)\Delta z_k$, где N_k – произвольная точка дуги $M_{k-1}M_k$, $M_k = (x_k, y_k, z_k)$, $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $\Delta y_k = y_k - y_{k-1}$, $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$.

Предел интегральных сумм $I_m(M_k, N_k)$ ($m = 1, 2$ или $m = 1, 2, 3$) при $\max\limits_{1 \le k \le n} \Delta l_k = \Delta l \to 0$ равен числу I_m, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что для всякого разбиения кривой L, у которого $\Delta l < \delta(\varepsilon)$, при любом выборе промежуточных точек N_k выполняется неравенство $|I_m(M_k, N_k) - I_m| < \varepsilon$.

Криволинейным интегралом второго рода от функции $P(Q, R)$ **по кривой** L называется

$$\lim_{\Delta l \to 0} I_1(M_k, N_k) = I_1 \ \left(\lim_{\Delta l \to 0} I_2(M_k, N_k) = I_2, \lim_{\Delta l \to 0} I_3(M_k, N_k) = I_3\right),$$

если он существует. Сумма $I_1 + I_2$ ($I_1 + I_2 + I_3$) называется *общим криволинейным интегралом второго рода*.

Положительным направлением обхода простой плоской спрямляемой замкнутой кривой $L = AB$ (замкнутого контура) называется такое направление обхода от A к B, при котором область, лежащая внутри контура, остается слева по отношению к движущейся по контуру точке. Направление обхода, противоположное положительному, называется *отрицательным*.

Криволинейный интеграл второго рода по кривой $L = \bigcup_{i=1}^{s} L_i$, где L_i – простые спрямляемые кривые и конец L_i совпадает с началом L_{i+1} для всех $i = \overline{1, s-1}$, определяется как сумма соответствующих криволинейных интегралов второго рода по кривым $L_i, \overline{1, s}$, если они существуют.

Скалярное поле в области G (на плоскости или в трехмерном пространстве) определяется функцией u, которая каждой точке $M \in G$ ставит в соответствие некоторое число $u(M)$.

Поверхностью (линией) уровня скалярного поля $u(M)$ называется поверхность (линия), на которой функция $u(M)$ принимает постоянное значение.

Векторное поле в области G (на плоскости или в трехмерном пространстве) определяется векторной функцией $\vec{a}$, которая каждой точке $M \in G$ ставит в соответствие некоторый вектор $\vec{a}(M)$.

Векторная линия поля $\vec{a}(M)$ – это кривая, в каждой точке M которой вектор $\vec{a}(M)$ направлен по касательной к кривой.

n раз дифференцируемым скалярным полем называется поле $u(M) = u(x, y, z)$, определяемое n раз дифференцируемой функцией $u = (x, y, z)$.

n раз дифференцируемым векторным полем называется поле
$$\vec{a}(M) = \vec{a}(x, y, z) = \{P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)\},$$
определяемое n раз дифференцируемыми функциями $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$.

Производной заданного в области G **скалярного поля** $u(M)$ **в точке** M **по направлению** $\vec{l}$ называется число $\lim\limits_{M' \to M} \frac{u(M') - u(M)}{MM'}$, где M' – любая точка из G, отличная от M и такая, что $\overrightarrow{MM'} \parallel \vec{l}$,
$$MM' = \begin{cases} \left|\overrightarrow{MM'}\right|, \text{если } \overrightarrow{MM'} \uparrow\uparrow \vec{l} \\ -\left|\overrightarrow{MM'}\right|, \text{если } \overrightarrow{MM'} \uparrow\downarrow \vec{l} \end{cases},$$
где $\left|\overrightarrow{MM'}\right|$ – длина вектора $\overrightarrow{MM'}$.

Производной заданного в области G **векторного поля** $\vec{a}(M)$ **в точке** M **по направлению** $\vec{l}$ называется вектор $\lim\limits_{M' \to M} \frac{\vec{a}(M') - \vec{a}(M)}{MM'}$, где M' – любая точка из G, отличная от M и такая, что $\overrightarrow{MM'} \parallel \vec{l}$,
$$MM' = \begin{cases} \left|\overrightarrow{MM'}\right|, \text{если } \overrightarrow{MM'} \uparrow\uparrow \vec{l} \\ -\left|\overrightarrow{MM'}\right|, \text{если } \overrightarrow{MM'} \uparrow\downarrow \vec{l} \end{cases},$$
где $\left|\overrightarrow{MM'}\right|$ – длина вектора $\overrightarrow{MM'}$.

Градиентом скалярного поля $u(x, y, z)$ называется вектор-функция
$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k} = \left\{\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right\}.$$

Потенциальным в области G называется векторное поле $\vec{a}(M)$, представимое в этой области как градиент некоторого скалярного поля $u(M)$. Функция $u(M)$ в этом случае называется *скалярным потенциалом векторного поля* $\vec{a}(M)$. Поверхности уровня потенциала $u(M)$ называются *эквипотенциальными поверхностями*.

Дивергенцией векторного поля $\vec{a} = P(x,y,z)\vec{\imath} + Q(x,y,z)\vec{\jmath} + R(x,y,z)\vec{k}$ называется скалярная функция

$$\operatorname{div}\vec{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

Ротором, или **вихрем**, векторного поля $\vec{a} = P(x,y,z)\vec{\imath} + Q(x,y,z)\vec{\jmath} + R(x,y,z)\vec{k}$ называется вектор-функция

$$\operatorname{rot}\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \vec{\imath}\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) + \vec{\jmath}\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right).$$

Соленоидальным в области G называется векторное поле $\vec{a}(M)$, имеющее в данной области нулевую дивергенцию.

Векторным потенциалом поля $\vec{a}(M)$ называется такое векторное поле $\vec{b}(M)$, что $\vec{a} = \operatorname{rot}\vec{b}$.

Нестационарное скалярное поле в области G определяется функцией $u(x, y, z, t)$, зависящей от точки $M(x, y, z) \in G$ и времени t. Координаты точки изменяются по некоторому закону, определяемому формулами $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$.

Полная производная нестационарного скалярного поля $u(x, y, z, t)$ определяется равенством

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dt}.$$

Нестационарное векторное поле в области G определяется вектор-функцией $\vec{a}(x,y,z,t)$, зависящей от точки $M(x, y, z) \in G$ и времени t. Координаты точки изменяются по некоторому закону, определяемому формулами $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$.

Полная производная нестационарного векторного поля

$$\vec{a}(x,y,z,t) = \{P(x,y,z,t), Q(x,y,z,t), R(x,y,z,t)\}$$

определяется равенством

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \left\{\frac{dP}{dt}, \frac{dQ}{dt}, \frac{dR}{dt}\right\},$$

где $\frac{dP}{dt}, \frac{dQ}{dt}$ и $\frac{dR}{dt}$ – полные производные координат вектора $\vec{a}$.

Гармонической в области G называется функция $u(x, y, z)$, имеющая в данной области непрерывные частные производные второго порядка и удовлетворяющая в ней уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0.$$

Евклидовым пространством будем называть вещественное линейное пространство X, если:

1) известно правило, посредством которого любым двум элементам f и g из X ставится в соответствие число, называемое скалярным произведением этих элементов и обозначаемое (f, g);

2) введенное скалярное произведение удовлетворяет следующим аксиомам:

I. $(f,g)=(g,f)\ \forall f,g\in X$;

II. $(f+g,h)=(f,h)+(g,h)\ \forall f,g,h\in X$;

III. $(\lambda f,g)=\lambda(f,g)\ \forall\lambda\in\mathbb{R},\forall f,g\in X$;

IV. $(f,f)\geq 0\ \forall f\in X;\ (f,f)=0\Leftrightarrow f=0.$

Бесконечномерным будем называть линейное пространство X, если в нем для любого натурального n можно найти n линейно независимых векторов.

Пространство кусочно непрерывных на отрезке $[a, b]$ **функций** состоит из всех функций $f(x)$, удовлетворяющих следующим условиям:

1) $f(x)$ непрерывна всюду на $[a, b]$, за исключением, быть может, конечного числа лежащих внутри отрезка точек x_i ($i = 1, 2, \ldots, n$), в которых она имеет разрывы первого рода;

2) в каждой точке разрыва x_i выполняется равенство

$$f(x_i)=\frac{f(x_i-0)+f(x_i+0)}{2}.$$

Скалярное произведение любых двух элементов $f(x)$ **и** $g(x)$ **пространства всех кусочно непрерывных на отрезке** $[a, b]$ **функций** определяется формулой

$$(f,g)=\int_a^b f(x)g(x)dx.$$

Нормированным пространством будем называть вещественное линейное пространство X, если:

1) известно правило, посредством которого каждому элементу f из X ставится в соответствие число, называемое нормой указанного элемента и обозначаемое $\|f\|$;

2) введенная норма удовлетворяет следующим аксиомам:

I. $\|f\| \geq 0 \ \forall f \in X; \ \|f\| = 0 \Leftrightarrow f = 0;$

II. $\|\lambda f\| = |\lambda| \cdot \|f\| \ \forall f \in X, \forall \lambda \in \mathbb{R};$

III. $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\| \ \forall f, g \in X.$

Норма в евклидовом пространстве определяется равенством

$$\|f\| = \sqrt{(f, f)}.$$

Норма в пространстве кусочно непрерывных на отрезке $[a, b]$ **функций** задается формулой

$$\|f\| = \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx}.$$

Ортогональность двух элементов f и g евклидова пространства X означает, что $(f, g) = 0$.

Ортонормированной системой (ОНС) в бесконечномерном евклидовом пространстве X называется последовательность ψ_1, ψ_2, ψ_3, …, ψ_n, …, элементы которой попарно ортогональны и имеют норму, равную единице.

Рядом Фурье элемента f евклидова пространства по ОНС $\{\psi_k\}$ называется ряд вида $\sum_{k=1}^{\infty} f_k \psi_k$, где f_k – числа, называемые *коэффициентами Фурье элемента* f и определяемые равенствами $f_k = (f, \psi_k)$, $k = 1, 2, 3, \ldots$

Отклонением элемента g от элемента f по норме данного евклидова пространства называется величина $\|f - g\|$.

Тригонометрическим рядом Фурье (ТРФ) называют ряд Фурье, построенный по тригонометрической системе $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \ldots, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \ldots$ в пространстве кусочно непрерывных на отрезке $[-\pi; \pi]$ функций.

Тригонометрические коэффициенты Фурье кусочно непрерывной на отрезке $[-\pi; \pi]$ функции $f(x)$ определяются равенствами

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx\,, a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx\,, k = 1, 2, \ldots$$

Замкнутость ОНС $\{\psi_k\}$ в бесконечномерном евклидовом пространстве (ЕП) X означает, что для любого элемента f данного ЕП и для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая линейная комбинация $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \psi_k$, что

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \psi_k \right\| < \varepsilon.$$

Полнота ОНС $\{\psi_k\}$ в бесконечномерном ЕП означает, что кроме нулевого элемента не существует никакого другого элемента данного ЕП, ортогонального всем элементам ψ_k.

Класс $L_1(-\infty, \infty)$ включает в себя все функции $f(x)$, интегрируемые на любом отрезке и удовлетворяющие условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx < \infty.$$

Образом Фурье функции $f(x) \in L_1(-\infty, \infty)$ называется функция

$$\hat{f}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} (\cos xy + i\sin xy) f(x)dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos xy\,dx + i\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin xy\,dx,$$

где $y \in (-\infty, \infty)$. Интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy} f(x)dx$ называют также *прямым преобразованием Фурье.*

Разложением функции $f(x) \in L_1(-\infty, \infty)$ **в интеграл Фурье** называется предел

$$\lim_{\lambda\to\infty}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\lambda}^{\lambda} e^{-ixy}\hat{f}(y)dy\right) = \lim_{\lambda\to\infty}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\lambda}^{\lambda}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{iy(u-x)} f(u)du\right)dy\right)$$

(при условии, что он существует).

Обратным преобразованием Фурье называют интеграл $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixy}\hat{f}(y)dy$, понимаемый в смысле главного значения. Если функция $f(x)$ принадлежит пространству $L_1(-\infty, \infty)$, имеет в данной точке x правую и левую производные, понимаемые как

$\lim\limits_{t\to 0+0}\frac{f(x+t)-f(x+0)}{t}$ и $\lim\limits_{t\to 0-0}\frac{f(x+t)-f(x-0)}{t}$ соответственно, и удовлетворяет условию $f(x) = 0{,}5\big(f(x+0)+f(x-0)\big)$, то в этой точке справедливо равенство $f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixy}\hat{f}(y)dy$.

Прямое и обратное косинус-преобразования Фурье строятся по четной функции $f(x)$ и определяются соответственно формулами

$$\hat{f}(y) = 2\int_0^\infty f(x)\cos xy\,dx\,, f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \hat{f}(y)\cos xy\,dy.$$

Прямое и обратное синус-преобразования Фурье строятся по нечетной функции $f(x)$ и определяются соответственно формулами

$$\hat{f}(y) = 2i\int_0^\infty f(x)\sin xy\,dx\,, f(x) = -\frac{i}{\pi}\int_0^\infty \hat{f}(y)\sin xy\,dy.$$