Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Тольяттинский государственный университет
Институт математики, физики и информационных технологий

Н.А. Сосина

ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

Электронное учебное пособие

В двух частях

Часть 1

ISBN 978-5-8259-1045-1

УДК 519.8(075.8)
ББК 22.185я73

Рецензенты:
канд. физ.-мат. наук, доцент, зав. кафедрой «Высшая математика» Тольяттинской академии управления *А.А. Кельин*;
канд. физ.-мат. наук, доцент, доцент кафедры «Прикладная математика и информатика» Тольяттинского государственного университета *О.В. Лелонд*.

Сосина, Н.А. Исследование операций : электронное учебное пособие : в 2 ч. / Н.А. Сосина. – Тольятти : Изд-во ТГУ, 2022. – Ч. 1. – 1 оптический диск. – ISBN 978-5-8259-1045-1.

В учебном пособии рассматривается раздел дисциплины «Исследование операций» – «Линейное программирование». Приводятся методы решения задач линейного программирования, элементы теории двойственности, методы решения задач транспортного типа. Отдельно излагаются основы теории матричных игр и целочисленного программирования.

Учебное пособие не содержит строгих доказательств излагаемого материала. Целью автора при создании учебного пособия было сформировать навыки применения теоретического материала дисциплины для решения профессиональных задач.

Предназначено для студентов направлений подготовки бакалавров 01.03.02 «Прикладная математика и информатика», 02.03.03 «Математическое обеспечение и администрирование информационных систем» очной и заочной форм обучения.

Текстовое электронное издание.

Рекомендовано к изданию научно-методическим советом Тольяттинского государственного университета.

Минимальные системные требования: IBM PC-совместимый компьютер: Windows XP/Vista/7/8; PIII 500 МГц или эквивалент; 128 Мб ОЗУ; SVGA; CD-ROM; Adobe Acrobat Reader.

Редактор *Е.В. Пилясова*
Технический редактор *Н.П. Крюкова*
Компьютерная верстка: *Л.В. Сызганцева*
Художественное оформление,
компьютерное проектирование: *Г.В. Карасева*

Дата подписания
к использованию 26.01.2022.
Объем издания 3,6 Мб.
Комплектация издания:
компакт-диск,
первичная упаковка.
Заказ № 1-39-20.

Издательство Тольяттинского государственного университета
445020, г. Тольятти, ул. Белорусская, 14,
тел. 8 (8482) 53-91-47, www.tltsu.ru

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ

Одно из главных направлений деятельности специалиста в любой сфере – совершенствование существующих и разработка новых изделий, систем, технологий при уменьшении издержек и сокращении сроков.

Обычно та или иная цель может быть достигнута разными путями, но специалист пытается найти лучший путь, считаясь с ограниченностью ресурсов и времени. Методы анализа сложных систем, их математическое моделирование и нахождение на этой основе оптимальных решений в общем виде изучается дисциплиной «Исследование операций». Исследование операций начинается тогда, когда для обоснования применяется тот или иной математический аппарат. Для принятия оптимального решения необходим строгий расчет.

Исследование операций – это наука о количественном обосновании оптимальных решений на основе построения и анализа математической модели.

Термин «исследование операций» появился, когда были образованы группы по исследованию военных операций в армии США и Англии во время Второй мировой войны. К этому времени был накоплен опыт применения математических методов для моделирования и решения некоторых задач экономики (В.В. Леонтьев, Л.В. Канторович), была теоретически обоснована возможность решения задач большой размерности на ЭВМ. Методология, сформулированная тогда и вобравшая в себя все научные достижения в области изучения сложных систем, оказалась применимой не только к боевым операциям, но и к другим сферам. Но термин «исследование операций» остался.

Дисциплина «Исследование операций» формирует определенную технологию совершенствования существующих и создания новых систем, как технических, так и организационных. Обучение применению методов и моделей исследования операций предоставляет современный инструментальный аппарат для формирования и анализа вариантов управленческих решений в организационно-экономических и производственных системах.

Глава 1. ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

§ 1.1. Общая постановка задачи линейного программирования

На практике постоянно встречаются такие ситуации, когда достичь какого-то результата можно не одним, а многими различными способами. Естественно, что при большом числе решений выбирается наилучшее.

Математически это обычно сводится к нахождению наибольшего или наименьшего значения некоторой функции, т. е. к задаче: «Найти max (min) $F(x)$ при условии, что переменная пробегает некоторое заданное множество X».

Задача нахождения оптимального решения на заданном множестве может быть сформулирована следующим образом:

$$F(x) \to \max\ (\min)$$

при условии, что $x \in X$, где $F(x)$ – целевая функция (показатель эффективности); X – допустимое множество значений x.

Чаще всего $x(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – это n-мерный вектор, а $X \subset R^n$.

Точку x^*, в которой $F(x)$ достигает max (min), и при этом $x^* \in X$, называют *оптимальным решением*, таких точек может быть множество.

Если целевая функция и ограничения заданы при помощи линейных функций, то задача называется задачей *линейного программирования (ЛП)*.

В общем виде задача линейного программирования формулируется следующим образом: задана линейная функция

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j \Rightarrow \max\ (\min) \tag{1.1}$$

и система m линейных уравнений и неравенств с n переменными:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j < b_i & (i = 1, 2, \ldots, k), \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j = b_i & (i = k+1, \ldots, m), \end{cases} \tag{1.2}$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, n}). \tag{1.3}$$

Необходимо найти такое решение системы ограничений (1.2) при условии неотрицательности переменных (1.3), при котором линейная функция $F(x_1, x_2, ..., x_n)$ принимает оптимальное (т. е. максимальное или минимальное) значение.

Задача линейного программирования, в которой система ограничений (1.2) состоит только из неравенств, называется *стандартной задачей ЛП*. Если же задача ЛП содержит ограничения (1.2) только в виде равенств, то ее называют *канонической задачей*.

§ 1.2. Примеры построения экономико-математических моделей

Согласно экономической теории, в экономике действуют устойчивые количественные связи, поэтому возможно их строгое формализованное изложение путем создания математических моделей.

Модель – это объект, который замещает оригинал и отражает наиболее важные для данного исследования черты и свойства оригинала. Модель, представляющая собой совокупность математических соотношений, называется математической. Построение экономико-математической модели происходит поэтапно:

1) формулируются предмет и цели исследования;
2) выявляются основные элементы модели;
3) словесно описывается взаимосвязь между элементами модели;
4) модель формализуется с помощью математических символов;
5) проводятся расчеты по построенной математической модели с привлечением математических методов;
6) анализируются полученные результаты.

Экономико-математические модели позволяют выявлять особенности функционирования экономического объекта и на основе этого прогнозировать будущее изменение объекта при изменении каких-либо параметров.

Рассмотрим четвертый этап построения моделей: формализацию с помощью математических символов. Остановимся на построении модели задачи линейного программирования.

Задача 1.2.1. *Задача о наилучшем использовании ресурсов*

Для изготовления двух видов продукции P_1 и P_2 используют четыре вида ресурсов: S_1, S_2, S_3, S_4, которые имеются в количестве 22, 26, 16, 12 усл. ед. соответственно. На изготовление одной единицы продукции P_1 требуется 1 усл. ед. ресурса S_1, 2 усл. ед. ресурса S_2 и 1 усл. ед. ресурса S_4. Для изготовления одной единицы P_2 необходимо 2 усл. ед. ресурса S_1, 1 усл. ед. ресурса S_2 и 2 усл. ед. ресурса S_3. Прибыль, получаемая при реализации одной единицы продукции P_1 и одной единицы продукции P_2, составляет 4 д. е. и 3 д. е. соответственно. Необходимо составить такой план производства продукции, при котором прибыль при ее реализации была бы максимальной. Построить экономико-математическую модель задачи.

Решение. Запишем условие задачи в виде таблицы.

Ресурсы	Продукция		Запасы ресурсов (усл. ед.)
	P_1	P_2	
S_1	1	2	22
S_2	2	1	26
S_3	0	2	16
S_4	1	0	12
Прибыль (д. е.)	4	3	–

Построим экономико-математическую модель задачи.

Введем переменные x_1, x_2 (усл. ед.) – запланированные объемы производства продукции P_1 и P_2 соответственно.

В принятых обозначениях:

1) $4x_1 + 3x_2$ д. е. – прибыль, получаемая при реализации всей продукции P_1 и P_2;
2) $x_1 + 2x_2$ усл. ед. – затраты ресурса S_1 на изготовление всей запланированной к производству продукции;
3) $2x_1 + x_2$ усл. ед. – затраты ресурса S_2 на изготовление всей запланированной к производству продукции;
4) $2x_2$ усл. ед. – затраты ресурса S_3 на изготовление всей запланированной к производству продукции;

5) x_1 усл. ед. – затраты ресурса S_4 на изготовление всей запланированной к производству продукции;
6) переменные x_1, x_2 – по смыслу задачи неотрицательны.

Учитывая то, что прибыль необходимо максимизировать, а также ограничения на ресурсы, построим математическую модель задачи:

$$F = 4x_1 + 3x_2 \to \max, \tag{1.4}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 22, \\ 2x_1 + x_2 \le 26, \\ \quad\;\; 2x_2 \le 16, \\ x_1 \qquad\; \le 12, \end{cases} \tag{1.5}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \tag{1.6}$$

Экономико-математическая модель задачи: найти план выпуска продукции $x^*(x_1^*, x_2^*)$, удовлетворяющий условиям (1.4)–(1.6).

Задача 1.2.2. *Задача о составлении рациона питания*

При откорме каждое животное в дневном рационе должно получить не менее 9 ед. белков, 8 ед. углеводов и 11 ед. протеина. Для составления рациона используют два вида корма, представленных в таблице.

Питательные вещества	Количество единиц питательных веществ на 1 кг	
	корма *A*	корма *B*
Белки	3	1
Углеводы	1	2
Протеин	1	6

Стоимость 1 кг корма первого вида составляет 4 д. е., второго – 6 д. е. Составить дневной рацион питания, имеющий минимальную стоимость. Построить экономико-математическую модель задачи.

Решение. Введем переменные x_1, x_2 кг – количество корма вида *A* и количество корма вида *B* соответственно, входящие в состав дневного рациона.

В принятых обозначениях дневной рацион корма должен содержать:
1) $3x_1 + x_2$ единиц белка;
2) $x_1 + 2x_2$ единиц углеводов;
3) $x_1 + 6x_2$ единиц протеина.

Стоимость дневного рациона составляет $4x_1 + 6x_2$ д. е.

Переменные x_1, x_2 – по смыслу задачи неотрицательны.

Минимизируя стоимость дневного рациона, а также учитывая, что при откорме каждое животное должно получить не менее 9 ед. белков, 8 ед. углеводов и 11 ед. протеина, строим математическую модель задачи:

$$F = 4x_1 + 6x_2 \to \min, \tag{1.7}$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \geq 9, \\ x_1 + 2x_2 \geq 8, \\ x_1 + 6x_2 \geq 11, \end{cases} \tag{1.8}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \tag{1.9}$$

Экономико-математическая модель задачи: составить дневной рацион откорма животных $x^*(x_1^*, x_2^*)$, удовлетворяющий условиям (1.7)–(1.9).

Задача 1.2.3. *Задача о смесях*

Предприниматель собирается производить сплав, содержащий 30 % свинца, 30 % цинка и 40 % олова.

На рынке имеются сплавы *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *G*, *H*, *I*. Процентное содержание свинца, цинка, олова, а также стоимость одного кг сплава указаны в таблице.

Сплав	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	*H*	*I*	Необх.
№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	–
% свинца	10	10	40	60	30	30	30	50	20	30
% цинка	10	30	50	30	30	40	20	40	30	30
% олова	80	60	10	10	40	30	50	10	50	40
Стоим. за 1 кг в д. е.	4,1	4,3	5,8	6,0	7,6	7,5	7,3	6,9	7,3	–

Какое количество сплава каждого типа стоит закупить на каждый кг производимого комбинированного сплава для минимизации затрат? Построить экономико-математическую модель задачи.

Решение. Введем обозначения: x_i кг – объем закупки i-го из имеющихся на рынке сплавов (i = 1, 2, ..., 9) на 1 кг производимого комбинированного сплава. Отсюда сразу же получаем ограничение на объем закупки каждого из имеющихся на рынке сплавов на 1 кг производимого комбинированного сплава:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 = 1.$$

Равенства

$$0,1x_1 + 0,1x_2 + 0,4x_3 + 0,6x_4 + 0,3x_5 + 0,3x_6 + 0,3x_7 + 0,5x_8 + 0,2x_9 = 0,3;$$
$$0,1x_1 + 0,3x_2 + 0,5x_3 + 0,3x_4 + 0,3x_5 + 0,4x_6 + 0,2x_7 + 0,4x_8 + 0,3x_9 = 0,3;$$
$$0,8x_1 + 0,6x_2 + 0,1x_3 + 0,1x_4 + 0,4x_5 + 0,3x_6 + 0,5x_7 + 0,1x_8 + 0,5x_9 = 0,4$$

отражают тот факт, что в 1 кг производимого комбинированного сплава доля свинца составляет ровно 30 %, цинка – 30 %, олова – 40 % соответственно.

$4,1x_1 + 4,3x_2 + 5,8x_3 + 6,0x_4 + 7,6x_5 + 7,5x_6 + 7,3x_7 + 6,9x_8 + 7,3x_9$ д. е. – затраты на 1 кг производимого комбинированного сплава.

Экономико-математическая модель задачи:

$$F(x) = 4,1x_1 + 4,3x_2 + 5,8x_3 + 6,0x_4 + 7,6x_5\ 7,5x_6 + 7,3x_7 + 6,9x_8 + 7,3x_9 \to \min, \quad (1.10)$$

$$\begin{cases} 0,1x_1 + 0,1x_2 + 0,4x_3 + 0,6x_4 + 0,3x_5 + 0,3x_6 + 0,3x_7 + 0,5x_8 + 0,2x_9 = 0,3, \\ 0,1x_1 + 0,3x_2 + 0,5x_3 + 0,3x_4 + 0,3x_5 + 0,4x_6 + 0,2x_7 + 0,4x_8 + 0,3x_9 = 0,3, \\ 0,8x_1 + 0,6x_2 + 0,1x_3 + 0,1x_4 + 0,4x_5 + 0,3x_6 + 0,5x_7 + 0,1x_8 + 0,5x_9 = 0,4, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 = 1, \end{cases} \quad (1.11)$$

$$x_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, ..., 9). \quad (1.12)$$

Найти объемы закупок $x^*(x_1^*, ..., x_9^*)$ каждого вида из имеющихся сплавов на 1 кг производимого комбинированного сплава, удовлетворяющие условиям (1.10), (1.11) и (1.12).

Задача 1.2.4. *Задача о раскрое материалов*

Для изготовления брусьев длиной 1,2 м, 3 м и 5 м в соотношении 2:1:3 на распил поступают 195 бревен длиной 6 м. Определить план распила, обеспечивающий максимальное число комплектов. Построить экономико-математическую модель задачи.

Решение. Определим всевозможные способы распила бревен, указав соответствующее число получаемых при этом брусьев (табл.).

Способ распила i	Число получаемых брусьев		
	1,2 м	3,0 м	5,0 м
1	5	–	–
2	2	1	–
3	–	2	–
4	–	–	1

Обозначим через x_i число бревен, распиленных i-м способом ($i = 1, 2, 3, 4$); y – число комплектов брусьев.

Учитывая, что все бревна должны быть распилены, а число брусьев каждого размера должно удовлетворять условию комплектности, экономико-математическая модель задачи примет вид:

$$F = y \to \max, \tag{1.13}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 195, \\ 5x_1 + 2x_2 = 2y, \\ x_2 + 2x_3 = y, \\ x_4 = 3y, \\ x_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4). \end{cases} \tag{1.14}$$

Определить оптимальный план распила бревен $x^*(x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*)$, максимизирующий общее число комплектов y и удовлетворяющий ограничениям (1.14).

§ 1.3. Элементы линейной алгебры и геометрии выпуклых множеств

Приведем ряд определений и теорем, хорошо известных в алгебре и необходимых для понимания теоретического материала, изложенного ниже.

Определение 1. Множество $X \subset R^n$ называется выпуклым, если вместе с любыми двумя точками $x^1, x^2 \in X$ содержит и отрезок, соединяющий эти точки, т. е. $x = \lambda x^1 + (1 - \lambda)x^2$ для всех $\lambda \in [0; 1]$, где x – координаты отрезка, соединяющего точки x^1 и x^2 (рис. 1).

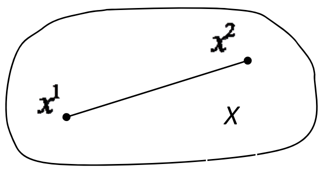

Рис. 1

В одномерном случае x^1 и x^2 являются числами. В n-мерном случае x^1 и x^2 будут n-мерными векторами: $x^1 = \left(x_1^1, x_2^1, \ldots, x_n^1\right)$,

$x^2 = \left(x_1^2, x_2^2, \ldots, x_n^2\right)$. Координаты отрезка в этом случае можно представить как линейную комбинацию концов отрезка:

$$x_i = \lambda x_i^1 + (1-\lambda)x_i^2,\ i = 1, 2, \ldots, n.$$

Примером выпуклого множества в R^n является множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b,$$

где a_1, a_2, ..., a_n, b – заданные числа. Это множество называется гиперплоскостью.

Выпуклым множеством является и полуплоскость. Множество точек, удовлетворяющих неравенству

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n \le b,$$

называется полуплоскостью.

Теорема 1. Пересечение любого числа выпуклых множеств – выпуклое множество.

Определение 2. Точка множества называется *внутренней*, если существует окрестность этой точки, состоящая только из точек данного множества.

Определение 3. Точка множества называется *граничной*, если любая окрестность этой точки содержит как точки, принадлежащие данному множеству, так и не принадлежащие ему.

Определение 4. Точка множества называется *угловой* или крайней, если она не является внутренней ни для какого отрезка, целиком принадлежащего данному множеству.

Для выпуклого многоугольника угловые точки совпадают с вершинами многоугольника, для невыпуклого многоугольника не всякая вершина будет угловой точкой (рис. 3). На рис. 2 все вершины многоугольника *ABCDE* являются угловыми точками. На рис. 3 вершина *D* не является угловой точкой.

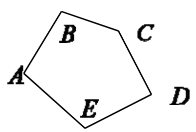

Рис. 2

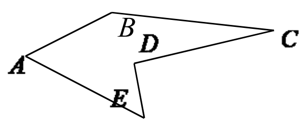

Рис. 3

Определение 5. Множество точек называется замкнутым, если оно включает в себя все свои граничные точки.

Примеры замкнутых множеств:

1) любой отрезок на числовой прямой;
2) числовая прямая, так как она включает в себя пустое множество своих граничных точек;
3) пространство R^n.

Если же удалить одну или более точек числовой прямой, то получим незамкнутое множество.

Определение 6. Множество точек называется ограниченным, если существует шар (круг) с радиусом конечной длины с центром в любой точке множества, который полностью содержит в себе данное множество. В противном случае множество называется неограниченным.

Определение 7. Выпуклое замкнутое множество точек пространства (плоскости), имеющее конечное число угловых точек, называется выпуклым многогранником (многоугольником), если оно ограничено, и выпуклой многогранной (многоугольной) областью, если оно не ограничено.

Замечание. Условие замкнутости области D эквивалентно тому, что D содержит свою границу; условие ограниченности области D означает, что D содержится в некотором шаре.

Теорема 2. Множество решений совместной системы

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

является выпуклым многогранником или выпуклой многогранной областью в n-мерном пространстве.

Определение 8. Любые m переменных системы n линейных уравнений

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m, \quad m \le n) \qquad (1.15)$$

называются *базисными*, если определитель матрицы коэффициентов при этих неизвестных отличен от нуля, остальные переменные называются свободными.

Определение 9. *Базисным решением системы* (1.15) называется решение, в котором все свободные переменные равны нулю.

Определение 10. Решение системы (1.15) называется *допустимым*, если оно содержит только неотрицательные компоненты.

Теорема 3. Множество всех допустимых решений системы (1.15) является выпуклым многогранником (выпуклой многогранной областью) в n-мерном пространстве.

Рассмотрим графическое решение системы m неравенств.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le b_m \end{cases} \tag{1.16}$$

при условии неотрицательности переменных: $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$.

Согласно теореме 2 множество решений системы (1.16) является выпуклым многогранником или выпуклой многогранной областью в n-мерном пространстве при условии, что система совместна.

Для того чтобы изобразить графически множество неотрицательных решений системы неравенств, строятся прямые l_i:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i \quad (i = 1, \dots, m).$$

Каждая построенная прямая l_i делит всю плоскость на две полуплоскости. При этом координаты точек только одной полуплоскости удовлетворяют соответствующему неравенству $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \le b_i$. Для того чтобы найти, какую полуплоскость определяет неравенство, можно взять любую точку, не принадлежащую прямой l_i, и подставить ее координаты в неравенство. Если неравенство выполняется, то искомая полуплоскость та, которая содержит рассматриваемую точку; если неравенство не выполняется, то искомая полуплоскость та, которая не содержит рассматриваемую точку.

Задача 1.3.1. Изобразить графически множество неотрицательных решений системы неравенств и определить координаты угловых точек области допустимых решений:

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 \le 24, & (1.17) \\ x_1 - x_2 \ge -5, & (1.18) \\ 3x_1 + 4x_2 \le 69, & (1.19) \\ 2x_1 + x_2 \ge 11, & (1.20) \\ x_2 \ge 3. & (1.21) \end{cases}$$

Решение. В системе координат OX_1X_2 построим граничные прямые l_1: $3x_1 - x_2 = 24$; l_2: $x_1 - x_2 = -5$; l_3: $3x_1 + 4x_2 = 69$; l_4: $2x_1 + x_2 = 11$; l_5: $x_2 = 3$ (рис. 4).

Каждая построенная прямая l_i ($i = 1, 2, 3, 4$) делит всю плоскость на две полуплоскости. Определим полуплоскости, координаты точек которых удовлетворяют соответствующему неравенству. Так как ни одна из прямых не проходит через начало координат, то для определения нужной полуплоскости возьмем точку $O(0, 0)$.

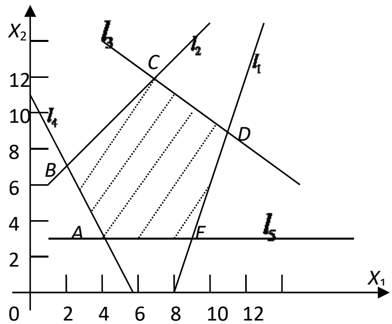

Рис. 4

Например, координаты точки $O(0, 0)$ удовлетворяют неравенству (1.17), так как $3 \cdot 0 - 0 \le 24$. Следовательно, относительно прямой l_1 искомая полуплоскость та, которая содержит точку $O(0, 0)$. Координаты точки $O(0, 0)$ не удовлетворяют неравенству (1.20), так как $2 \cdot 0 - 0 < 11$. Следовательно, относительно прямой l_4 искомая полуплоскость та, которая не содержит точку $O(0, 0)$.

Отметив для каждого неравенства область решений, найдем пересечение всех отмеченных областей, получим выпуклый пятиугольник $ABCDE$. Область $ABCDE$ лежит в первой четверти, следовательно, найдена область неотрицательных решений системы неравенств (1.17)–(1.21).

Решив соответствующие системы уравнений, определим координаты угловых точек выпуклого пятиугольника $ABCDE$.

A: $A = l_4 \cap l_5$. Решим систему $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 11, \\ x_2 = 3, \end{cases} \Rightarrow A(4, 3).$

D: $D = l_1 \cap l_3$. Решим систему $\begin{cases} 3x_1 - x_2 = 24, \\ 3x_1 + 4x_2 = 69, \end{cases} \Rightarrow D(11, 9).$

Аналогично вычислим координаты оставшихся трех вершин: $B(2, 7)$; $C(7, 12)$; $E(3, 9)$.

Задача 1.3.2. Найти область неотрицательных решений системы неравенств.

$$\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 \geq -12, \\ x_2 \qquad\quad \geq 6, \\ x_1 \qquad\quad \leq 4; \end{cases} \tag{1.22}$$

$$\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 \geq -12, \\ x_2 \qquad\quad \geq 10, \\ x_1 \qquad\quad \leq 2. \end{cases} \tag{1.23}$$

Решение

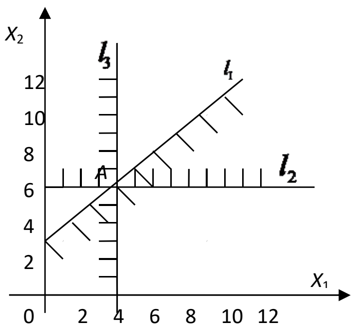

Рис. 5

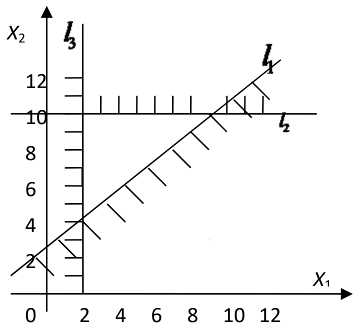

Рис. 6

Найдем область неотрицательных решений систем (1.22) и (1.23):
а) решением системы неравенств (1.22) является точка $A(4, 6)$ (рис. 5);
в) система неравенств (1.23) не имеет решения (рис. 6).

§ 1.4. Теоретические основы линейного программирования

Рассмотрим задачу линейного программирования (ЛП): найти

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j \to \max \quad (\min)$$

при условии выполнения ограничений

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

$$x_j \ge 0 \quad (j = \overline{1, n}).$$

Определение 1. Решение задачи ЛП называется *допустимым*, если оно содержится в области допустимых решений системы ограничений.

Определение 2. Допустимое базисное решение задачи ЛП называется *опорным планом*.

Определение 3. Целевая функция в задаче ЛП называется *ограниченной*, если в задаче на максимум целевая функция ограничена на допустимом множестве сверху, а в задаче на минимум – снизу.

Теорема 1. Если в задаче ЛП допустимое множество не пусто и целевая функция ограничена, то существует хотя бы одно оптимальное решение.

Теорема 2. Между множествами опорных решений задачи ЛП и угловых точек области допустимых решений существует взаимно однозначное соответствие.

Теорема 3. Если в задаче ЛП все переменные имеют условие неотрицательности и целевая функция ограничена сверху (снизу) на допустимом множестве, то угловая точка, в которой целевая функция принимает наибольшее (наименьшее) значение среди всех угловых точек множества допустимых решений, является оптимальным решением.

§ 1.5. Графический метод решения задачи линейного программирования

Графический метод решения задачи линейного программирования целесообразно использовать для решения задач с двумя переменными или с несколькими переменными при условии, что в канонической записи системы ограничений содержится не более двух свободных переменных.

Запишем задачу ЛП с двумя переменными в канонической форме:

$$F(x) = c_1x_1 + c_2x_2 \to \max \tag{1.24}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le b_m, \end{cases} \tag{1.25}$$

при условии:

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \tag{1.26}$$

Предположим, что множество допустимых решений системы (1.25) при условии (1.26) не пусто. Предположим также, что целевая функция $F(x)$ ограничена на множестве допустимых решений системы (1.25) в задаче на максимум сверху (в задаче на минимум – снизу). В этом случае задача ЛП на максимум (минимум) имеет по крайней мере одно решение.

Для нахождения оптимального решения задачи ЛП графически построим нулевую линию уровня q_0, уравнение которой $c_1x_1 + c_2x_2 = 0$ ($F(x) = 0$). Нулевая линия уровня q_0 – это прямая, проходящая через начало координат перпендикулярно вектору нормали $\overline{n}(c_1, c_2)$. Другие линии уровня q_s, заданные уравнениями $c_1x_1 + c_2x_2 = s$ ($s \in R$), построим параллельно q_0. Вдоль каждой линии q_s значение целевой функции $F(x)$ постоянно и равно s.

Определение. Вектор, координаты которого являются частными производными функции $F(x)$ по соответствующим переменным, называется его градиентом и обозначается $\overline{\mathrm{grad}}F$ или ∇F.

В двухмерном случае вектор градиент записывается в виде

$$\overline{\mathrm{grad}}F = \frac{\partial F}{\partial x_1}\bar{i} + \frac{\partial F}{\partial x_2}\bar{j} = c_1\bar{i} + c_2\bar{j}.$$

Градиент указывает направление наискорейшего возрастания целевой функции $F(x)$. Для линейной целевой функции вектор $\overline{\mathrm{grad}F}$ расположен перпендикулярно линиям уровня. Если переходить от одной линии уровня к другой в направлении вектора-градиента, то значение целевой функции $F(x)$ будет возрастать и достигнет максимума в последней точке x^* соприкосновения линии уровня q^* с областью допустимых решений системы неравенств (1.25).

Заметим, что задача ЛП может иметь и бесчисленное множество решений. Это возможно, когда целевая функция достигает наибольшего значения в двух соседних вершинах области допустимых решений системы (1.25), а значит, и вдоль всего отрезка, соединяющего эти вершины. В этом случае говорят, что задача ЛП имеет альтернативное решение. Например, пусть целевая функция в задаче ЛП достигает максимального значения в области допустимых решений на всем отрезке AB: $\dfrac{x_1 - x_{1A}}{x_{1B} - x_{1A}} = \dfrac{x_2 - x_{2A}}{x_{2B} - x_{2A}} = \lambda$ $(0 \le \lambda \le 1)$, где $A(x_{1A},\ x_{2A})$ и $B(x_{1B},\ x_{2B})$, в этом случае оптимальное решение задачи можно записать в виде:

$$\begin{cases} x_1^* = \lambda(x_{1B} - x_{1A}) + x_{1A}, \\ x_2^* = \lambda(x_{2B} - x_{2A}) + x_{2A}, \end{cases} \quad (0 \le \lambda \le 1).$$

Задача 1.5.1. На множестве неотрицательных решений системы неравенств

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 \le 24, \\ x_1 - x_2 \ge -5, \\ 3x_1 + 4x_2 \le 69, \\ 2x_1 + x_2 \ge 11, \\ x_2 \ge 3 \end{cases} \tag{1.27}$$

найти решение задачи линейного программирования:

1) $F(x) = 6x_1 + 3x_2 \to \max$;

2) $F(x) = 2x_1 + 3x_2 \to \min$;

3) $F(x) = 3x_1 + 4x_2 \to \max$.

Решение. Областью неотрицательных решений системы неравенств (1.27) является выпуклый пятиугольник $ABCDE$ (см. задачу 1.3.1).

1. Построим нулевую линию уровня q_0:

$$6x_1 + 3x_2 = 0 \ (F(x) = 0).$$

Прямая q_0 проходит через начало координат перпендикулярно вектору нормали $\bar{n} = 6\bar{i} + 3\bar{j}$.

Построим вектор-градиент:

$$\overline{\mathrm{grad}} F = \frac{\partial F}{\partial x_1}\bar{i} + \frac{\partial F}{\partial x_2}\bar{j} = 6\bar{i} + 3\bar{j} = \bar{n}.$$

В направлении вектора значение целевой функции $F(x)$ будет расти и достигнет максимума в последней точке соприкосновения линии уровня q_s с областью допустимых решений в точке $x^* = D$ (рис. 7). Линию уровня, проходящую через x^*, обозначим $\hat{q}$.

Определим координаты точки D: $D = l_1 \cap l_3$. Решим систему $\begin{cases} 3x_1 - x_2 = 24, \\ 3x_1 + 4x_2 = 69. \end{cases} \Rightarrow D(11, 9)$. Отсюда оптимальное решение $x^*(11,\ 9)$, при этом $F_{\max} = F(x^*) = 6 \cdot 11 + 3 \cdot 9 = 93$.

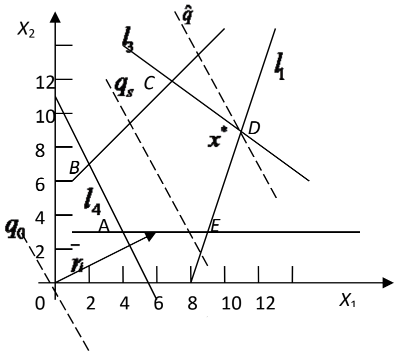

Рис. 7

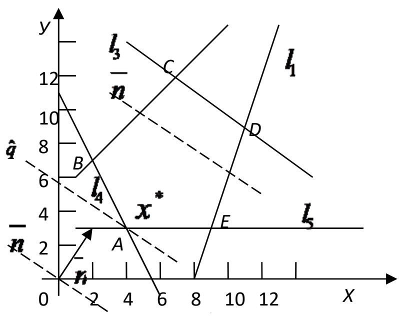

Рис. 8

2. Построим нулевую линию уровня q_0: $2x_1 + 3x_2 = 0$ ($F(x) = 0$). Прямая q_0 проходит через начало координат перпендикулярно вектору нормали $\bar{n} = 2\bar{i} + 3\bar{j}$. Направлением наискорейшего убывания функции $F(x)$ будет направление, обратное вектору:

$$\overline{\mathrm{grad}} F = \frac{\partial F}{\partial x_1}\bar{i} + \frac{\partial F}{\partial x_2}\bar{j} = 2\bar{i} + 3\bar{j} = \bar{n}.$$

Поэтому оптимальным решением задачи будет первая точка соприкосновения линии уровня q_s с областью допустимых решений, т. е. точка $x^* = A$ (рис. 8).

Координаты точки A найдем из условия $A = l_4 \cap l_5$. Решим систему $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 11, \\ x_2 = 3. \end{cases} \Rightarrow A(4, 3)$. Следовательно, оптимальное решение $x^*(4, 3)$, при этом $F_{\min} = F(x^*) = 2 \cdot 4 + 3 \cdot 3 = 17$.

3. Построим нулевую линию уровня q_0: $3x_1 + 4x_2 = 0$ ($F(x) = 0$). Прямая q_0 проходит через начало координат перпендикулярно вектору нормали $\bar{n} = 3\bar{i} + 4\bar{j}$.

Направление наискорейшего возрастания функции $F(x)$ будет определять вектор $\overline{\text{grad}F} = \frac{\partial F}{\partial x_1}\bar{i} + \frac{\partial F}{\partial x_2}\bar{j} = 3\bar{i} + \overline{4\bar{j}} = \bar{n}$. Передвигая линию уровня от нулевой линии уровня q_0 в направлении вектора $\overline{\text{grad}F}$, заметим, что решением задачи будет весь отрезок CD (рис. 9), так как нулевая линия уровня q_0 параллельна отрезку CD. Следовательно, решением задачи будет множество точек $x^*(x_1^*, x_2^*)$, где $x_1^* = (x_{1C} - x_{1D})t + x_{1D}$; $x_2^* = (x_{2C} - x_{2D})t + x_{2D}$ $(0 \le t \le 1)$.

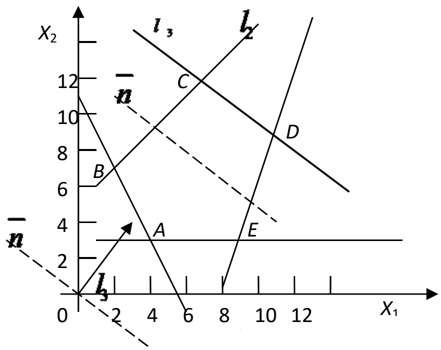

Рис. 9

Координаты точки $D(x_{1D}, x_{2D})$ известны: $D(11, 9)$. Определим координаты точки $C(x_{1C}, x_{2C})$: $C = l_2 \cap l_3$. Решим систему $\begin{cases} x_1 - x_2 = -5, \\ 3x_1 + 4x_2 = 69. \end{cases} \Rightarrow$ $C(7, 2)$. Отсюда $x^*(-4t + 11; 3t + 9)$. Для того чтобы найти $F(x^*)$, достаточно вычислить значение целевой функции в одной из точек C или D, получим одно и то же значение: $F_{\max} = F(x^*) = 69$.

Стандартная и каноническая форма записи задачи ЛП

Задача 1.5.2. Задачу ЛП:

$$F(x) = 6x_1 + 3x_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 \le 24, \\ x_1 - x_2 \ge -5, \\ 3x_1 + 4x_2 \le 69, \\ 2x_1 + x_2 \ge 11, \\ x_2 \ge 3, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$$

представить в стандартной и канонической формах. Показать, что каждой угловой точке области допустимых решений задачи, записанной в стандартной форме, соответствует допустимое базисное решение задачи, записанной в канонической форме.

Для представления задачи в стандартной форме второе, четвертое и пятое неравенства умножим на -1. Для представления задачи в канонической форме введем дополнительные (балансовые) неотрицательные переменные: x_3, x_4, x_5, x_6, x_7.

Стандартная форма записи задачи ЛП	Каноническая форма записи задачи ЛП
$F(x) = 6x_1 + 3x_2 \to \max,$ $\begin{cases} 3x_1 - x_2 \le 24, \\ -x_1 + x_2 \le 5, \\ 3x_1 + 4x_2 \le 69, \\ -2x_1 - x_2 \le -11, \\ -x_2 \le -3, \end{cases}$ (1.28) $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$	$F(x) = 6x_1 + 3x_2 \to \max,$ $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 24, \\ x_1 - x_2 - x_4 = -5, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_5 = 69, \\ 2x_1 + x_2 - x_6 = 11, \\ x_2 - x_7 = 3, \end{cases}$ (1.29) $x_i \ge 0,\ (i = \overline{1,7})$

Исследуем систему (1.29). Составим расширенную матрицу коэффициентов системы

$$A \setminus B = \left(\begin{array}{ccccccc|c} 3 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 24 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -5 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -69 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -3 \end{array}\right).$$

Ранг расширенной матрицы $A\backslash B$ равен рангу матрицы A и равен 5, следовательно, система уравнений (1.29) совместна. Неизвестных ($n = 7$) больше, чем ранг, следовательно, по теореме Кронекера – Капелли система (1.29) имеет бесчисленное множество решений.

Базисных переменных ровно столько, каков ранг, т. е. 5. Остальные переменные свободные. Базисными переменными могут быть только те пять переменных, определитель матрицы коэффициентов которых не равен нулю. Например, переменные x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 можно взять в качестве базисных, так как определитель матрицы коэффициентов $\Delta_{3,4,5,6,7}$ системы (1.29) не равен нулю:

$$\Delta_{3,4,5,6,7} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

Напомним, базисным решением задачи ЛП называется решение, в котором свободные переменные равны нулю. Система (1.29) имеет $C_7^5 = \dfrac{7!}{2! \cdot 5!} = 21$ базисное решение. Обнулим свободные переменные x_1, x_2, получим первое базисное решение системы (1.29): $x^I(0;\ 0;\ 24;\ 5;\ 69;\ -11;\ -3)$. Полученное решение не является допустимым решением задачи ЛП, так как содержит отрицательные компоненты.

Согласно теореме 2 между угловыми точками области допустимых решений задачи, записанной в канонической форме, и опорными решениями задачи, записанной в стандартной форме, существует взаимно однозначное соответствие. Областью допустимых решений исходной задачи, записанной в стандартной форме с системой ограничений (1.5.5), является выпуклый пятиугольник $ABCDE$: $A(4, 3)$; $B(2, 7)$ $C(7, 12)$; $D(11, 9)$; $E(9, 3)$ (см. задачу 1.3.1). Следовательно, число опорных решений исходной задачи будет равно пяти и эти решения можно найти, воспользовавшись канонической формой записи (1.29) *исходной задачи*.

Если в систему (1.29) подставить координаты угловой точки области допустимых решений системы (1.28), то получим опорное решение системы (1.29). Например, подставив координаты угловой точки $A(4, 3)$ области допустимых решений системы (1.28) в систему (1.29), получим второе опорное решение задачи (1.29) $x^{II}(4; 3; 15; 6; 45; 0; 0)$.

Аналогично для вершины $B(2, 7)$, являющейся угловой точкой области допустимых решений задачи с системой ограничений (1.28), получим третье опорное решение $x^{III}(2; 7; 23; 0; 35; 0; 4)$ и т. д.

Таким образом, устанавливаем соответствие между угловыми точками области допустимых решений и неотрицательными базисными решениями.

Самостоятельно найти опорные решения исходной задачи, соответствующие угловым точкам $C(7, 12)$; $D(11, 9)$; $E(9, 3)$ области допустимых решений.

Задача 1.5.3. Решить задачу 1.2.1 графически.

Решение. В задаче 1.2.1 построена модель задачи ЛП:

$$F = 4x_1 + 3x_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 22, \\ 2x_1 + x_2 \le 26, \\ \qquad 2x_2 \le 16, \\ x_1 \qquad \le 12, \end{cases} \tag{1.30}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

Необходимо спланировать объемы производства $x^*(x_1^*, x_2^*)$ продукции вида P_1 и вида P_2 таким образом, чтобы максимизировать прибыль F, не выходя за рамки производственных возможностей, заданных системой (1.30).

1. Построим систему координат OX_1X_2. По оси OX_1 будем откладывать объемы производства продукции P_1, по оси OX_2 – объемы производства продукции P_2.

В системе координат OX_1X_2 построим граничные прямые:

$$l_1: x_1 + 2x_2 = 22;\ l_2: 2x_1 + x_2 = 26;\ l_3: 2x_2 = 16;\ l_4: x_1 = 12.$$

Областью допустимых решений системы ограничений (1.30) при условии неотрицательности переменных ($x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$) будет шестиугольник $OABCDE$.

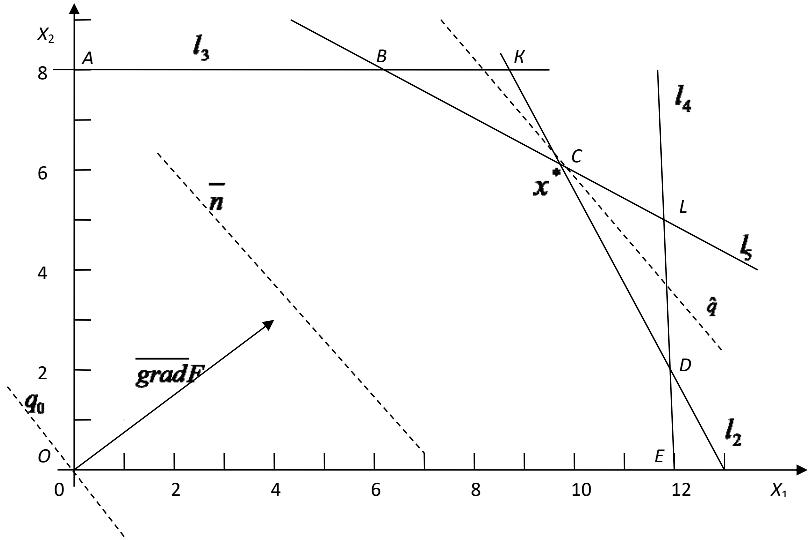

Рис. 10

Шестиугольник *OABCDE* – это область *производственных возможностей*. Любая точка шестиугольника *OABCDE* соответствует объемам производства продукции P_1 и P_2, для которых имеющихся в наличии ресурсов будет достаточно. Необходимо из всех точек, принадлежащих множеству производственных возможностей, выбрать ту, которая соответствует наибольшему значению прибыли, получаемой при реализации всей произведенной продукции.

2. Построим вектор-градиент $\overline{\text{grad}F} = \frac{\partial F}{\partial x_1}\bar{i} + \frac{\partial F}{\partial x_2}\bar{j} = 4\bar{i} + 3\bar{j}$. Через начало координат перпендикулярно вектору $\overline{\text{grad}F} = 4\bar{i} + 3\bar{j}$ проведем нулевую линию уровня q_0: $4x_1 + 3x_2 = 0$ ($F(x) = 0$). Прямая q_0 с областью производственных возможностей имеет только одну общую точку $O(0, 0)$, которая соответствует нулевым объемам производства.

В направлении вектора $\overline{\text{grad}F}$ значение целевой функции $F(x)$ будет расти.

Строя линии уровня q_s в направлении $\overline{\text{grad}F}$, будем получать линии равных производственных возможностей. Таким образом, при разных объемах производства значение прибыли вдоль каждой линии q_s будет постоянно. Чем северо-восточней расположена линия уровня, тем большему значению прибыли она соответствует.

Целевая функция $F(x)$ достигнет максимума в последней точке соприкосновения линии уровня q_s с областью допустимых решений, в точке $x^* = C$ (рис. 8). Линию уровня, проходящую через x^*, обозначим $\hat{q}$.

3. Определим координаты точки C: $C = l_1 \cap l_3$. Решим систему

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 22, \\ 2x_1 + x_2 = 26. \end{cases} \Rightarrow C(10, 6).$$

Отсюда оптимальное решение $x^*(10; 6)$, при этом $F_{\max} = F(x^*) =$ $= 4 \cdot 10 + 3 \cdot 6 = 58$.

Ответ. Оптимальные объемы производства продукции P_1 – 10 единиц; продукции P_2 – 6 единиц. Прибыль, получаемая при реализации всей изготовленной продукции, составит 58 д. е.

Анализ моделей на чувствительность

На основе геометрического метода проведем анализ модели (1.30) на чувствительность. Анализ моделей на чувствительность – это процесс, реализуемый после получения оптимального решения. В рамках такого анализа выявляется чувствительность оптимального решения к определенным изменениям исходной модели. В предыдущей задаче о планировании производства продукции может представлять интерес вопрос о том, как повлияет на оптимальное решение увеличение (уменьшение) запасов исходного сырья. Может также потребоваться анализ влияния изменения прибыли при реализации единицы продукции на оптимальное решение.

Для анализа модели (1.30) примем, что неравенства системы ограничений могут быть активными или пассивными. Если прямая проходит через точку, в которой находится оптимальное решение, то соответствующее ограничение будем считать *активным*, соответствующий ресурс – *дефицитным*, так как он используется полностью. Если ограничение *пассивное*, то соответствующий ресурс является *недефицитным* и имеется в избытке.

При анализе модели на чувствительность к правым частям ограничений определяются:

а) предельно допустимое увеличение запаса дефицитного ресурса, позволяющее улучшить найденное оптимальное решение;

б) предельно допустимое снижение запаса недефицитного ресурса, не изменяющее найденное ранее оптимальное значение целевой функции.

Проанализируем, как влияет увеличение правой части активных ограничений на оптимальное решение.

Точка C, соответствующая оптимальному решению, лежит на пересечении прямых l_1 и l_2, т. е. первое и второе ограничения являются активными, остальные ограничения пассивные. Дефицитными ресурсами являются ресурсы первого S_1 и второго S_2 видов, ресурсы третьего S_3 и четвертого S_4 видов – недефицитные. Увеличение запасов дефицитного ресурса S_1 имеет смысл только до определенного значения. Из графических соображений (см. рис. 10) легко заметить, что прямую l_1 имеет смысл перемещать в сторону увеличения сырья только до точки $K = l_2 \cap l_3$.

Решим соответствующую систему:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 26 \\ \quad\;\; 2x_2 = 16 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 9 \\ x_2 = 8 \end{cases}.$$

Подставляя координаты $K(9,\ 8)$ в левую часть первого ограничения модели (1.30), получим новое значение S_1, равное 25 усл. ед.

Таким образом, если увеличить значение ресурса первого вида S_1 с 22 до 25 усл. ед., то оптимальное решение изменится: из точки $C(10,\ 6)$ оптимальное решение сместится в точку $K(9,\ 8)$. Значение прибыли при реализации всей продукции в этом случае увеличится с 58 до 60 д. е. Дальнейшее увеличение ресурса первого вида при неизменных значениях остальных ресурсов не вызовет увеличения прибыли.

Аналогично можно проанализировать влияние на оптимальное решение увеличения ресурса второго вида S_2.

Проанализируем, как влияет уменьшение правой части пассивных ограничений.

Третье ограничение модели (1.30) отражает возможный уровень расхода ресурса третьего вида. Из рис. 10 видно, что прямую l_3 можно опустить параллельно себе вниз до точки $C(10,\ 6)$ и при этом оптимальное решение не изменится. Таким образом, ресурс третьего вида S_3 мы можем уменьшить с 16 до 12 усл. ед., и в этом случае он перейдет из разряда недефицитных в дефицитные.

Вариация коэффициентов целевой функции может также изменить статус того или иного ресурса: дефицитный ресурс сделать недефицитным и наоборот. Изменения коэффициентов целевой функции оказывают влияние на наклон прямой, изображающей эту функцию. При анализе модели на чувствительность к изменениям коэффициента целевой функции исследуются следующие вопросы:

а) каков диапазон изменения каждого из коэффициентов функции, при котором не происходит изменения оптимального решения;

б) на сколько следует изменить тот или иной коэффициент, чтобы недефицитный ресурс сделать дефицитным и наоборот.

§ 1.6. Симплексный метод

Решить задачу ЛП можно методом перебора конечного числа опорных решений и выбора среди них того, при котором линейная функция цели достигает своего наибольшего (наименьшего) значения.

Но на практике число опорных решений может быть достаточно велико. Существует алгоритм, позволяющий на каждом шаге получать решения по крайней мере не хуже, чем на предыдущем шаге. Такой перебор позволяет сократить число шагов. Данный метод называется симплексным методом.

Геометрический смысл симплексного метода состоит в последовательном переходе от одной вершины многогранника допустимых решений к соседней, в которой целевая функция принимает значение по крайней мере не худшее, до тех пор, пока не будет найдено оптимальное.

Симплексный метод предусматривает три основных элемента:

1) способ определения какого-либо первоначального базисного решения задачи;
2) правило перехода к лучшему (по крайней мере, к не худшему) решению;
3) критерий проверки оптимальности найденного решения.

Если ранг системы уравнений равен m, то в качестве базисных переменных на первом шаге рекомендуется выбрать (если это возможно) такие m переменных, каждая из которых входит только в одно из m уравнений системы ограничений, и нет таких уравнений, в которые бы не входила ни одна из этих переменных.

Критерий оптимальности решения при отыскании максимума (минимума) целевой функции в задаче ЛП: если в выражении целевой функции через свободные переменные отсутствуют положительные (отрицательные) коэффициенты при свободных переменных, то решение оптимально.

Задача на нахождение максимума

Задача 1.6.1. Решить симплексным методом задачу 1.2.1.

Решение. В задаче 1.2.1 построена модель задачи ЛП:

$$F = 4x_1 + 3x_2 \to \max, \tag{1.31}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 22, \\ 2x_1 + x_2 \le 26, \\ \qquad 2x_2 \le 16, \\ x_1 \qquad\quad \le 12, \end{cases} \tag{1.32}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

В задаче 1.5.3 приводится графическое решение данной задачи.

Для решения поставленной задачи симплексным методом от стандартной формы записи задачи ЛП перейдем к канонической. Введем балансовые переменные x_3, x_4, x_5, x_6. Переменные x_3, x_4, x_5, x_6 имеют экономический смысл: это остатки ресурсов s_1, s_2, s_3, s_4 соответственно. Следовательно, $x_i \ge 0$ (i = 3, 4, 5, 6).

Каноническая форма записи системы (1.32):

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 22, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 26, \\ \qquad 2x_2 + x_5 = 16, \\ x_1 \qquad\quad + x_6 = 12. \end{cases} \tag{1.33}$$

Составим расширенную матрицу системы (1.33):

$$(A \setminus B) = \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 22 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 26 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 16 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 12 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} r = rang(A \setminus B) = rang(A) = 4 \\ n = 6 \\ n > r \end{array}$$

По теореме Кронекера – Капелли система (1.33) совместна и имеет бесчисленное множество решений.

Если задача 1.6.1 имеет оптимальное решение, то оно совпадает по крайней мере с одним из опорных (допустимых базисных) решений системы (1.33). Так как ранг системы (1.33) равен четырем, то базисных переменных будет ровно четыре. На первом шаге в качестве базисных переменных удобно взять балансовые переменные x_3, x_4, x_5, x_6, так как система (1.33) легкоразрешима относительно этих переменных.

I. x_3, x_4, x_5, x_6 – базисные переменные; x_1, x_2 – свободные переменные.

Систему (1.33) решим относительно базисных переменных:

$$\begin{cases} x_3 = 22 - x_1 - 2x_2, \\ x_4 = 26 - 2x_1 - x_2, \\ x_5 = 16 \quad\quad - 2x_2, \\ x_6 = 12 - x_1. \end{cases} \tag{1.34}$$

$$F(x) = 4x_1 + 3x_2. \tag{1.35}$$

Приравняв к нулю свободные переменные, получим первое базисное решение x^I (0; 0; 22; 26; 16; 12). Все компоненты полученного решения неотрицательны, следовательно, x^I является опорным решением, при котором $F(x^I) = 0$. По виду целевой функции (1.35) на данном шаге легко определить, что решение x^I не является оптимальным, так как возможно дальнейшее увеличение целевой функции за счет введения в базис свободных переменных x_1, x_2. При решении симплексным методом в базис свободные переменные вводятся поочередно. На данном шаге введем в базис переменную x_1. Так как базисных переменных в системе (1.34) должно быть ровно четыре, то одну из переменных необходимо вывести из базиса.

Предположим, что в системе (1.34) переменная x_2 равна 0. Из первого уравнения системы (1.34) следует, что, вводя x_1 в базис, мы можем увеличить x_1 только до 22. При увеличении x_1 на значение большее, чем 22, переменная x_3 становится равной отрицательному числу, что противоречит смыслу задачи. Аналогично рассуждая, получим, что во втором уравнении системы (1.34) x_1 можно увеличить только до 13 единиц. В третьем уравнении увеличение x_1 не повлияет на знак x_5. В четвертом уравнении x_1 можно увеличить до 12 ед. Следовательно, при введении в базис x_1 мы можем увеличить x_1 до значения $x_1 = \min(22;\ 13;\ +\infty;\ 12) = 12$. Четвертое уравнение системы (1.34) на данном шаге является разрешающим. Разрешающее уравнение решим относительно x_1, тем самым введем x_1 в базис, увеличив до 12 ед., а переменную x_6 выведем из базиса. Получим $x_1 = 12 - x_6$.

II. x_1, x_3, x_4, x_5 – базисные переменные; x_2, x_6 – свободные переменные.

Систему (1.34) перепишем, заменив в каждом из уравнений x_1 на выражение x_1 через свободные переменные: $x_1 = 12 - x_6$. Для контроля выполнимости критерия оптимальности целевую функцию (1.35) также выразим через свободные переменные x_2, x_6:

$$\begin{cases} x_1 = 12 - x_6, \\ x_3 = 22 - (12 - x_6) - 2x_2, \\ x_4 = 26 - 2(12 - x_6) - x_2, \\ x_5 = 16 \qquad\qquad\qquad - 2x_2. \end{cases}$$

$$F(x) = 4(12 - x_6) + 3x_2 .$$

Приведя подобные члены в системе ограничений и в выражении целевой функции через свободные переменные, получим:

$$\begin{cases} x_1 = 12 \qquad\quad - x_6, \\ x_3 = 10 - 2x_2 + x_6, \\ \underleftrightarrow{x_4 = 2 \quad - x_2 + 2x_6,} \\ x_5 = 16 - 2x_2. \end{cases} \tag{1.36}$$

$$F(x) = 48 + 3x_2 - 4x_6 . \tag{1.37}$$

Приравняв к нулю свободные переменные, получим второе базисное решение $x^{II}(12;\ 0;\ 10;\ 2;\ 16;\ 0)$, которое также является опорным решением. Значение целевой функции увеличилось: $F(x^{II}) = 48$. Но решение x^{II} не является оптимальным, так как из (1.37) видно, что возможно дальнейшее увеличение $F(x)$ за счет увеличения свободной переменной x_2 (введения x_2 в базис).

Увеличить x_2 можно до значения $x_2 = \min(+\infty;\ 5;\ 2;\ 8) = 2$. Следовательно, третье уравнение системы (1.36) на данном шаге является разрешающим. Разрешающее уравнение решим относительно x_2, тем самым введем x_2 в базис, увеличив до 2 ед., при этом одновременно выведем из базиса x_4: $x_2 = 2 - x_4 + 2x_6$.

III. x_1, x_2, x_3, x_5 – базисные переменные; x_4, x_6 – свободные переменные.

Систему (1.36) перепишем, заменив в каждом из уравнений x_2 на выражение x_2 через свободные переменные: $x_2 = 2 - x_4 + 2x_6$. Целевую функцию (1.37) также выразим через свободные переменные x_4, x_6:

$$\begin{cases} x_2 = 2 - x_4 + 2x_6, \\ x_1 = 12 - x_6, \\ x_3 = 10 - 2(2 - x_4 + 2x_6) + x_6, \\ x_5 = 16 - 2(2 - x_4 + 2x_6). \end{cases}$$

$$F(x) = 48 + 3(2 - x_4 + 2x_6) - 4x_6.$$

Приведя подобные члены в системе ограничений и в выражении целевой функции через свободные переменные, получим:

$$\begin{cases} x_1 = 12 - \quad\quad x_6, \\ x_2 = 2 - x_4 + 2x_6, \\ \underleftrightarrow{x_3 = 6 + 2x_4 - 3x_6,} \\ x_5 = 12 + 2x_4 - 4x_6. \end{cases} \tag{1.38}$$

$$F(x) = 54 - 3x_4 + 2x_6. \tag{1.39}$$

$x^{III}(12; 2; 6; 0; 12; 0)$ – третье опорное решение. Значение целевой функции увеличилось: $F(x^{II(}) = 54$. Но решение x^{III} не является оптимальным, так как из (1.39) видно, что возможно дальнейшее увеличение $F(x)$ за счет увеличения свободной переменной x_6. Введем x_6 в базис, увеличив до значения $x_6 = \min(+12; +\infty; 2; 3) = 2$, при этом x_3 выведем из базиса.

IV. x_1, x_2, x_5, x_6 – базисные переменные; x_3, x_4 – свободные переменные.

$$\begin{cases} x_6 = 2 - \frac{1}{3}x_3 + \frac{2}{3}x_4, \\ x_1 = 12 - (2 - \frac{1}{3}x_3 + \frac{2}{3}x_4), \\ x_2 = 2 - x_4 + 2(2 - \frac{1}{3}x_3 + \frac{2}{3}x_4), \\ x_5 = 12 + 2x_4 - 4(2 - \frac{1}{3}x_3 + \frac{2}{3}x_4). \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 10 + \frac{1}{3}x_3 - \frac{2}{3}x_4, \\ x_2 = \ 6 - \frac{2}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4, \\ x_5 = \ 4 + \frac{4}{3}x_3 - \frac{2}{3}x_4, \\ x_6 = \ 2 - \frac{1}{3}x_3 + \frac{2}{3}x_4. \end{cases} \tag{1.40}$$

$$F(x) = 54 - 3x_4 + 2(2 - \frac{1}{3}x_3 + \frac{2}{3}x_4); \; F(x) = 58 - \frac{2}{3}x_3 - \frac{5}{3}x_4. \qquad (1.41)$$

$x^{IV}(10; 6; 0; 0; 4; 2)$ – четвертое опорное решение.

Полученное опорное решение будет оптимальным, так как все коэффициенты перед свободными переменными в выражении целевой функции (1.41) отрицательны и, следовательно, дальнейшее увеличение целевой функции невозможно. Отсюда x^* (10; 6; 0; 0; 4; 2), $F(x^*) = 58$.

Ответ. Оптимальные объемы производства продукции P_1 – 10 единиц; продукции P_2 – 6 единиц. Ресурсы S_1, S_2 израсходованы при оптимальном производстве полностью; ресурсы S_3, S_4 остались в количестве 4 и 2 усл. ед. соответственно. Прибыль, получаемая при реализации продукции, составила 58 д. е.

Задача на нахождение минимума

Задача 1.6.2. Решить симплексным методом задачу ЛП:

$$Z(y) = 22y_1 + 26y_2 + 16y_3 + 12y_4 \quad \Rightarrow \quad \min, \qquad (1.42)$$

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 + 0y_3 + y_4 \ge 4, \\ 2y_1 + y_2 + 2y_3 + 0y_4 \ge 3, \end{cases} \qquad (1.43)$$

$$y_i \ge 0 \qquad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Решение. Для решения поставленной задачи симплексным методом от стандартной формы записи задачи ЛП перейдем к канонической. Введем балансовые переменные y_5, y_6 ($y_5 \ge 0$, $y_6 \ge 0$):

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 + 0y_3 + y_4 - y_5 = 4, \\ 2y_1 + y_2 + 2y_3 + 0y_4 - y_6 = 3, \end{cases} \qquad (1.44)$$

$$y_i \ge 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, 6).$$

Составим расширенную матрицу системы (1.44):

$$(A \setminus B) = \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & -1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} r = rang(A \setminus B) = rang(A) = 2 \\ n = 6 \\ n > r \end{array}$$

По теореме Кронекера – Капелли система (1.44) совместна и имеет бесчисленное множество решений. Так как ранг системы (1.44) равен двум, то базисных переменных будет ровно две. Если в качестве базисных переменных, как и в предыдущей задаче, взять балансовые переменные y_5, y_6, то первое базисное решение не будет опорным, так как будет содержать отрицательные компоненты. Заметим, что система (1.44) также легкоразрешима относительно переменных y_3, y_4. Возьмем их в качестве базисных.

I. y_3, y_4 – базисные переменные; y_1, y_2, y_5, y_6 – свободные переменные.

Систему (1.44) решим относительно базисных переменных:

$$\begin{cases} y_3 = \dfrac{3}{2} - y_1 - \dfrac{1}{2}y_2 + \dfrac{1}{2}y_6, \\ y_4 = 4 - y_1 - 2y_2 + y_5. \end{cases} \tag{1.45}$$

Для контроля выполнимости критерия оптимальности выразим целевую функцию (1.42) через свободные переменные:

$$Z(y) = 22y_1 + 26y_2 + 16y_3 + 12y_4 =$$
$$= 22y_1 + 26y_2 + 16(\frac{3}{2} - y_1 - \frac{1}{2}y_2 + \frac{1}{2}y_6) + 12(4 - y_1 - 2y_2 + y_5).$$

После приведения подобных членов получим

$$Z(y) = 72 - 6y_1 - 6y_2 + 12y_5 + 8y_6. \tag{1.46}$$

В системе (1.45) обнулим свободные переменные, получим первое базисное решение: $y^I(0, 0, \frac{3}{2}, 4, 0, 0)$. Все компоненты первого базисного решения неотрицательны, следовательно, y^I является опорным решением, при котором $Z(y^I) = 72$.

По виду целевой функции (1.46) на данном шаге легко определить, что решение y^I не является оптимальным, так как возможно дальнейшее уменьшение целевой функции за счет введения в базис свободных переменных y_1, y_2, присутствующих в выражении целевой функции (1.46) с отрицательными коэффициентами. На данном шаге введем в базис переменную y_1. Следовательно, одну из переменных необходимо вывести из базиса. Предположим, что в системе (1.45) все свободные переменные, кроме y_1, равны 0. Тогда для y_1 первое уравнение системы (1.45) будет разрешающим, так как увеличить y_1 в первом уравнении можно только до 3/2, а во втором до 4 ($y_1 = \min(3/2; 4) = 3/2$). Разрешающее уравнение решим относительно y_1, тем самым введем y_1 в базис, увеличив до 3/2 ед., а переменную y_3 выведем из базиса. Получим $y_1 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}y_2 - y_3 + \frac{1}{2}y_6$.

II. y_1, y_4 – базисные переменные; y_2, y_3, y_5, y_6 – свободные переменные.

Систему (1.45) перепишем, заменив во втором уравнении y_1 на выражение y_1 через свободные переменные. Целевую функцию (1.46) также выразим через свободные переменные:

$$\begin{cases} y_1 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} y_2 - y_3 + \frac{1}{2} y_6, \\ y_4 = 4 - (\frac{3}{2} - \frac{1}{2} y_2 - y_3 + \frac{1}{2} y_6) - 2y_2 + y_5. \end{cases}$$

$$Z(y) = 72 - 6(\frac{3}{2} - \frac{1}{2} y_2 - y_3 + \frac{1}{2} y_6) - 6y_2 + 12y_5 + 8y_6.$$

После приведения подобных членов в системе ограничений и в выражении целевой функции через свободные переменные получим:

$$\begin{cases} y_1 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} y_2 - y_3 + \frac{1}{2} y_6, \\ y_4 = \frac{5}{2} - \frac{3}{2} y_2 + y_3 + y_5 - \frac{1}{2} y_6. \end{cases} \tag{1.47}$$

$$Z(y) = 63 - 3y_2 + 6y_3 + 12y_5 + 5y_6. \tag{1.48}$$

Приравняв к нулю свободные переменные, получим опорное решение: $y^{II} = (3/2;\ 0;\ 0;\ 5/2;\ 0;\ 0)$. Значение целевой функции уменьшилось: $Z(y^{II}) = 63$. Но решение y^{II} не является оптимальным, так как из (1.48) видно, что возможно дальнейшее уменьшение $Z(y)$ за счет введения свободной переменной y_2 в базис.

Увеличить y_2, вводя в базис, можно только до значения $y_2 = \min(3;\ 5/3) = 5/3$. Следовательно, второе уравнение системы (1.47) на данном шаге является разрешающим. Разрешающее уравнение решим относительно y_2, тем самым введем y_2 в базис, увеличив до 5/3 ед., при этом одновременно выведем из базиса y_4:

$$y_2 = \frac{5}{3} + \frac{2}{3} y_3 - 2y_4 + \frac{2}{3} y_5 - \frac{1}{3} y_6.$$

III. y_1, y_2 – базисные переменные; y_3, y_4, y_5, y_6 – свободные переменные.

Систему (1.47) перепишем, заменив в каждом из уравнений y_2 на выражение y_2 через свободные переменные. Целевую функцию (1.48) также выразим через свободные переменные y_3, y_4, y_5, y_6:

$$\begin{cases} y_2 = \frac{5}{3} + \frac{2}{3}y_3 - 2y_4 + \frac{2}{3}y_5 - \frac{1}{3}y_6, \\ y_1 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}(\frac{5}{3} + \frac{2}{3}y_3 - 2y_4 + \frac{2}{3}y_5 - \frac{1}{6}y_6) - y_3 + \frac{1}{2}y_6. \end{cases}$$

$$Z(y) = 63 - 3(\frac{5}{3} + \frac{2}{3}y_3 - 2y_4 + \frac{2}{3}y_5 - \frac{1}{3}y_6) + 6y_3 + 12y_5 + 5y_6.$$

После приведения подобных членов получим:

$$\begin{cases} y_1 = \frac{2}{3} - \frac{4}{3}y_3 + y_4 - \frac{1}{3}y_5 + \frac{7}{12}y_6, \\ y_2 = \frac{5}{3} + \frac{2}{3}y_3 - 2y_4 + \frac{2}{3}y_5 - \frac{1}{3}y_6. \end{cases} \tag{1.49}$$

$$Z(y) = 58 + 4y_3 + 2y_4 + 10y_5 + 6y_6. \tag{1.50}$$

$y^{III}(\frac{2}{3}, \frac{5}{3}, 0, 0, 0, 0)$ – третье опорное решение.

Полученное опорное решение будет оптимальным, так как все коэффициенты перед свободными переменными в выражении целевой функции (1.50) положительны и, следовательно, дальнейшее уменьшение целевой функции невозможно.

Ответ. Оптимальное решение: $y^*(\frac{2}{3}, \frac{5}{3}, 0, 0, 0, 0)$; значение целевой функции в точке оптимума: $Z(y^*) = 58$.

Задача на нахождение альтернативного оптимума

Задача 1.6.3. Решить симплексным методом задачу:

$$F = 2x_1 + x_2 \to \max, \tag{1.51}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 18, \\ 2x_1 + x_2 \le 10, \end{cases} \tag{1.52}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

Решение. Для решения поставленной задачи симплексным методом от стандартной формы записи задачи ЛП перейдем к канонической. Введем балансовые переменные x_3, x_4:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 18, \\ 2x_1 + \ \ x_2 + x_4 = 10. \end{cases} \tag{1.53}$$

Составим расширенную матрицу системы:

$$(A \setminus B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 1 & 0 & 18 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 10 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} r = rang(A \setminus B) = rang(A) = 2 \\ n = 2 \\ n > r \end{array}$$

По теореме Кронекера – Капелли система (1.53) совместна и имеет бесчисленное множество решений. Так как ранг системы (1.53) равен двум, то базисных переменных будет ровно две. На первом шаге в качестве базисных переменных удобно взять балансовые переменные x_3, x_4, так как система (1.53) легкоразрешима относительно этих переменных.

I. x_3, x_4 – базисные переменные; x_1, x_2 – свободные переменные.

Систему (1.53) решим относительно базисных переменных:

$$\begin{cases} x_3 = 18 - 2x_1 - 3x_2, \\ x_4 = 10 - 2x_1 - \ \ x_2, \end{cases} \tag{1.54}$$

$$F(x) = 2x_1 + x_2. \tag{1.55}$$

Приравняв к нулю свободные переменные, получим опорное решение $x^I(0;\ 0;\ 18;\ 10)$; $F(x^I) = 0$. Решение x^I на данном шаге не является оптимальным, так как возможно дальнейшее увеличение целевой функции за счет введения в базис свободных переменных x_1, x_2. Введем в базис переменную x_1. Так как $x_1 = \min(9;\ 5) = 5$, то второе уравнение в системе (1.54) будет разрешающим. Выведем из базиса переменную x_4.

II. x_1, x_3 – базисные переменные; x_2, x_4 – свободные переменные.

Запишем выражения для базисных переменных и целевой функции через свободные переменные:

$$\begin{cases} x_1 = 5 - \dfrac{1}{2}x_2 - \dfrac{1}{2}x_4, \\ x_3 = 8 - 2\,x_2 + \ \ x_4, \end{cases} \tag{1.56}$$

$$F(x) = 10 - x_4. \tag{1.57}$$

$x^{II}(5; 0; 8; 0)$ – опорное решение; $F(x^{II}) = 10$. Дальнейшее увеличение целевой функции невозможно, так как в выражении целевой функции через свободные переменные (1.57) отсутствуют положительные коэффициенты при свободных переменных. Следовательно, критерий оптимальности выполнен, $x^* = x^{II}$ – оптимальное решение исходной задачи.

Заметим, что в последнем выражении целевой функции через свободные переменные (1.57) отсутствует свободная переменная x_2 (можно сказать, что входит с нулевым коэффициентом). В связи с чем изменение переменной x_2 не повлечет за собой изменения значения целевой функции. Например, переменную x_2 введем в базисные переменные. В системе (1.56) разрешающим для переменной x_2 является второе уравнение $x_2 = \min(10; 4) = 4$. Выведем переменную x_3 из базиса, получим:

$$\begin{cases} x_1 = 3 + \frac{1}{4}x_3 - \frac{1}{2}x_4, \\ x_2 = 4 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4, \end{cases} \tag{1.58}$$

$$F(x) = 10 - x_4.$$

Приравняв к нулю свободные переменные, получим опорное решение:

$$x^{III}(3; 4; 0; 0); \;\; F(x^{III}) = 10.$$

В двух соседних вершинах области допустимых решений при изменении $0 \le x_2 \le 4$ мы получили одно и то же значение целевой функции – $F = 10$, которое невозможно в данной задаче увеличить.

Для того чтобы записать оптимальное решение, воспользуемся системой (1.56). Положим, $x_2 = t$, где $t \in [0; 4]$. В системе (1.56) переменная x_4 является свободной и в базисном решении $x_4 = 0$. Отсюда $x_1 = 5 - \frac{1}{2}t$; $x_3 = 8 - 2t$.

Ответ. $x^*(5 - \frac{1}{2}t, t, 8 - 2t, 0)$; $F(x^*) = 10$.

§ 1.7. Понятие о двойственных задачах линейного программирования

С каждой задачей линейного программирования тесно связана другая линейная задача, называемая *двойственной*. При этом первоначальная задача называется *исходной*. В табл. 1 внесем математические модели двух взаимно двойственных задач в стандартной и канонической формах.

Таблица 1

Исходная задача	Двойственная задача
Стандартная форма записи	
$F(x)=\sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j \to \max,$ $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \quad (i = 1, 2, ..., m); \quad (1.59)$ $x_j \ge 0 \quad (j = 1, ..., n)$	$Z(y)=\sum_{i=1}^{m} b_i \cdot y_i \to \min,$ $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge c_j \; (j = 1, 2, ..., n); \; (1.60)$ $y_i \ge 0 \; (i = 1, 2, ..., m)$
Каноническая форма записи	
$F(x)=\sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j \to \max,$ $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i \; (i = 1, 2, ..., m); \; (1.61)$ $x_j \ge 0; \; x_{n+i} \ge 0 \; (j = 1, ..., n; \; i = 1, ..., m)$	$Z(y)=\sum_{i=1}^{m} b_i \cdot y_i \to \min,$ $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i - y_{m+j} = c_j \; (j = 1, 2, ..., n); \; (1.62)$ $y_i \ge 0; \; y_{m+j} \ge 0 \; (i = 1, ..., m; \; j = 1, ..., n)$
Оптимальное решение	
$x^*(x_1^*, ..., x_j^*, ..., x_n^*, ... x_{n+i}^*, ..., x_{n+m}^*)$	$y^*(y_1^*, ..., y_i^*, ..., y_m^*, ..., y_{m+j}^*, ..., y_{m+n}^*)$

Для исходной и двойственной задач выполняются следующие условия:

1) если одна из взаимно двойственных задач на максимум, то другая – на минимум;
2) в задаче на максимум ограничения-неравенства имеют смысловое значение при условии, что правая часть ≤ свободного члена; в задаче на минимум – правая часть ≤ свободного члена;
3) коэффициенты c_j целевой функции исходной задачи являются свободными членами системы ограничений двойственной задачи;
4) свободные члены b_i системы ограничений исходной задачи служат коэффициентами целевой функции двойственной задачи;

5) матрица коэффициентов системы ограничений двойственной задачи является транспонированной матрицей коэффициентов системы ограничений исходной задачи.

Между оптимальными решениями взаимно двойственных задач существует определенная связь, которая может быть установлена с помощью теорем двойственности и следствий к ним. Приведем некоторые из них.

Первая теорема двойственности. Если одна из взаимно двойственных задач ЛП имеет оптимальное решение, то его имеет и другая, причем оптимальные значения их целевых функций равны: $F(x^*) = Z(y^*)$ ($F_{\max} = Z_{\min}$). Если целевая функция одной из задач не ограничена, то условия другой задачи противоречивы.

Установим взаимно однозначное соответствие между переменными взаимно двойственных задач в виде схемы в табл. 2.

Таблица 2

<table>
<tr><td colspan="2">Переменные исходной задачи</td></tr>
<tr><td>Первоначальные переменные</td><td>Балансовые переменные</td></tr>
<tr><td>x_1^* ... x_j^* ... x_n^*
$\Updownarrow$ $\Updownarrow$ $\Updownarrow$
y_{m+1}^* ... y_{m+j}^* ... y_{m+n}^*</td><td>x_{n+1}^* ... x_{n+i}^* ... x_{n+m}^*
$\Updownarrow$ $\Updownarrow$ $\Updownarrow$
y_1^* ... y_i^* ... y_m^*</td></tr>
<tr><td>Балансовые переменные</td><td>Первоначальные переменные</td></tr>
<tr><td colspan="2">Переменные двойственной задачи</td></tr>
</table>

Вторая теорема двойственности. Компоненты оптимального решения двойственной задачи равны абсолютным значениям коэффициентов при соответствующих переменных целевой функции исходной задачи, выраженной через свободные переменные ее оптимального решения.

Следствие ко второй теореме двойственности. Положительным (ненулевым) компонентам оптимального решения одной из взаимно двойственных задач соответствуют нулевые компоненты оптимального решения другой задачи:

1) если $x_j^* > 0 \quad \Rightarrow \quad y_{m+j}^* = 0$ или $x_{n+i}^* > 0 \quad \Rightarrow \quad y_i^* = 0$;

2) если $y_i^* > 0 \quad \Rightarrow \quad x_{n+i}^* = 0$ или $y_{m+j}^* > 0 \quad \Rightarrow \quad x_j^* = 0$.

Следствие к третьей теореме двойственности. i-ю компоненту оптимального решения двойственной задачи y_i^* можно найти из равенства $y_i^* = \dfrac{\Delta_i F(x^*)}{\Delta b_i}$, где $\Delta F_i(x^*)$ – это изменение оптимального значения целевой функции исходной задачи, вычисленное в предположении, что правая часть i-го ограничения изменилась на Δb_i единиц. Равенство справедливо только для достаточно малых значений Δb_i.

Задача 1.7.1. Построить и решить с использованием теории двойственности задачу, двойственную задаче 1.2.1.

Решение. Построение экономико-математической модели рассматриваемой задачи приводится в задаче 1.2.1; графическое решение приводится в задаче 1.5.3; в задаче 1.6.1 приводится решение симплексным методом. Для удобства построения модели двойственной задачи еще раз воспользуемся данными из задачи 1.2.1.

Ресурсы	Продукция		Запасы ресурсов (усл. ед.)
	P_1	P_2	
S_1	1	2	22
S_2	2	1	26
S_3	0	2	16
S_4	1	0	12
Прибыль (д. е.)	4	3	–

В табл. 3 приведем модель исходной задачи и модель двойственной задачи.

Таблица 3

Исходная задача	Двойственная задача
Стандартная форма записи	
$F = 4x_1 + 3x_2 \Rightarrow \max,$ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 22, \\ 2x_1 + x_2 \le 26, \\ \quad 2x_2 \le 16, \\ x_1 \quad \le 12, \end{cases}$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$ (1.63)	$Z(y) = 22y_1 + 26y_2 + 16y_3 + 12y_4 \Rightarrow \min,$ $\begin{cases} y_1 + 2y_2 + 0y_3 + y_4 \ge 4, \\ 2y_1 + y_2 + 2y_3 + 0y_4 \ge 3, \end{cases}$ (1.64) $y_i \ge 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4)$

Окончание табл. 3

Исходная задача	Двойственная задача
Каноническая форма записи	
$F = 4x_1 + 3x_2 \Rightarrow \max,$ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 22, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 26, \\ \quad 2x_2 + x_5 = 16, \\ x_1 \quad + x_6 = 12, \end{cases}$ $x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, 6)$	$Z(y) = 22y_1 + 26y_2 + 16y_3 + 12y_4 \Rightarrow \min,$ $\begin{cases} y_1 + 2y_2 + 0y_3 + y_4 - y_5 = 4, \\ 2y_1 + y_2 + 2y_3 + 0y_4 - y_6 = 3, \end{cases} \quad (1.65)$ $y_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, 6)$

Согласно первой теореме двойственности $Z(y^*) = F(x^*)$, так как $F(x^*) = 58$, то $Z(y^*) = 58$.

Установим взаимно однозначное соответствие между переменными взаимно двойственных задач в виде схемы в табл. 4.

Таблица 4

Переменные исходной задачи					
Первоначальные переменные		Балансовые переменные			
x_1^*	x_2^*	x_3^*	x_4^*	x_5^*	x_6^*
$\Updownarrow$	$\Updownarrow$	$\Updownarrow$	$\Updownarrow$	$\Updownarrow$	$\Updownarrow$
y_5^*	y_6^*	y_1^*	y_2^*	y_3^*	y_4^*
Балансовые переменные		Первоначальные переменные			
Переменные двойственной задачи					

Для нахождения компонент оптимального решения двойственной задачи воспользуемся решением исходной задачи $\boldsymbol{x}^*(10, 6, 0, 0, 4, 2)$, полученным в задаче 1.6.1.

Так как

$$x_1^* = 10 > 0 \Rightarrow y_5^* = 0;$$
$$x_2^* = 6 > 0 \Rightarrow y_6^* = 0;$$
$$x_5^* = 4 > 0 \Rightarrow y_3^* = 0;$$
$$x_6^* = 2 > 0 \Rightarrow y_4^* = 0.$$

Подставляя в систему ограничений (1.65) нулевые значения переменных y_3, y_4, y_5, y_6, получим систему

$$\begin{cases} y_1^* + 2y_2^* = 4, \\ 2y_1^* + y_2^* = 3, \end{cases}$$

решив которую найдем недостающие компоненты оптимального решения двойственной задачи:

$$y_1^* = \frac{2}{3};\ y_2^* = \frac{5}{3}.$$

Оптимальное решение двойственной задачи имеет вид $y^*(\frac{2}{3}, \frac{5}{3}, 0, 0, 0, 0)$.

Замечание. Двойственная задача к задаче 1.2.1 была решена симплексным методом в задаче 1.6.2. Для того чтобы убедиться в справедливости второй теоремы двойственности, выпишем выражения целевых функций через свободные переменные и решения исходной двойственной задачи на последнем шаге (табл. 5).

Таблица 5

Исходная задача	Двойственная задача
Целевая функция на последнем шаге	
$F(x) = 58 + 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 - \frac{2}{3}x_3 - \frac{5}{3}x_4 +$ $+ 0 \cdot x_5 + 0 \cdot x_6.$	$Z(y) = 58 + 0 \cdot y_1 + 0 \cdot y_2 + 4y_3 + 2y_4 +$ $+ 10y_5 + 6y_6$
Оптимальное решение	
$x^*(10, 6, 0, 0, 4, 2)$	$y^*(\frac{2}{3}, \frac{5}{3}, 0, 0, 0, 0)$

Компоненты оптимального решения двойственной задачи $y_1^* = \frac{2}{3},\ y_2^* = \frac{5}{3},\ y_3^* = 0,\ y_4^* = 0,\ y_5^* = 0,\ y_6^* = 0$ равны коэффициентам при соответствующих переменных целевой функции прямой задачи, взятым по абсолютной величине. Аналогично компоненты оптимального решения прямой задачи $x_1^* = 10$, $x_2^* = 6$, $x_3^* = 0$, $x_4^* = 0$, $x_5^* = 4$, $x_6^* = 2$ равны коэффициентам при соответствующих переменных целевой функции двойственной задачи, взятым по абсолютной величине.

Экономический смысл теории двойственности

Данную задачу можно интерпретировать с экономической точки зрения.

Согласно следствию к третьей теореме двойственности, при увеличении ресурса S_1 на одну единицу оптимальное значение прибыли при реализации готовой продукции возрастет на $y_1^* = \frac{2}{3}$ д. е., при увеличении ресурса S_2 на одну единицу оптимальное значение прибыли возрастет на $y_2^* = \frac{5}{3}$ д. е. Увеличение же недефицитных ресурсов не увеличит прибыль, это видно из того, что $y_3^* = 0$, $y_4^* = 0$. То есть компоненты оптимального решения двойственной задачи являются оценками степени дефицитности имеющихся ресурсов для производства запланированной продукции и могут служить мерой дефицитности ресурсов. Дефицитный ресурс (полностью используемый по оптимальному плану производства) имеет положительную оценку, а ресурс избыточный (используемый не полностью) имеет нулевую оценку.

Предположим, что существует некоторая организация, желающая выкупить ресурсы S_1, S_2, S_3, S_4, имеющиеся в наличии у предприятия. Естественно, организация хотела бы выкупить у предприятия ресурсы, неся при этом как можно меньшие денежные затраты. Поэтому перед администрацией предприятия возникает новая задача: найти оптимальные оценки y_1, y_2, y_3, y_4 на единицу каждого вида ресурса S_1, S_2, S_3, S_4 соответственно, такие, что продажа ресурсов по этим оценкам была бы не менее выгодна, чем продажа готовой продукции, которую могло бы произвести предприятие из имеющихся ресурсов.

Оценим ресурсы в зависимости от степени их дефицитности. В качестве оценки единицы ресурса каждого вида возьмем оценки оптимального решения двойственной задачи.

В этом случае:

1) $22y_1 + 26y_2 + 16y_3 + 12y_4$ д. е. – стоимостная оценка всех имеющихся ресурсов, которая с учетом интересов покупающей организации минимизируется;

2) $y_1 + 2y_2 + 0y_3 + y_4$ д. е. – стоимостная оценка на прибыль, получаемую при продаже ресурсов, необходимых для производства одной

единицы продукции P_1, которая в соответствии с интересами продающего ресурсы предприятия должна быть не меньше, чем прибыль (4 д. е.), получаемая при реализации единицы готовой продукции P_1;

3) $2y_1 + y_2 + 2y_3 + 0y_4$ д. е. – стоимостная оценка на прибыль, получаемую при продаже ресурсов, необходимых для производства одной единицы продукции P_2, должна быть не меньше 3 д. е.

Учитывая то, что стоимостные оценки y_1, y_2, y_3, y_4 не могут быть отрицательными, строим модель задачи, получим модель (1.64).

§ 1.8. Транспортная задача

Транспортная задача – это задача о минимизации транспортных расходов, связанных с обеспечением пунктов потребления определенным количеством однородной продукции (груза), производимой (хранимой) в нескольких пунктах производства (хранения).

В общем виде задача может быть сформулирована следующим образом. Однородный груз, сосредоточенный в m пунктах u_i $(i = 1, 2, ..., m)$ производства (хранения), необходимо распределить между n пунктами v_j $(j = 1, 2, ..., n)$ потребления. Стоимость перевозки единицы груза известна для всех маршрутов. Необходимо составить такой план перевозок, при котором выполнялись бы следующие условия:

1) запросы всех пунктов потребления должны быть удовлетворены;
2) имеющиеся мощности поставщиков реализованы;
3) общие транспортные расходы по доставке груза были бы минимальными.

Примем следующие обозначения:

i – номер пункта производства (хранения) $(i = 1, 2, ..., m)$;

j – номер пункта потребления $(j = 1, 2, ..., n)$;

a_i – количество груза, имеющегося в i-м пункте производства (мощность поставщика);

b_j – количество груза, необходимое для j-го пункта потребления;

c_{ij} – стоимость перевозки единицы груза из i-го пункта отправления в j-й пункт назначения (коэффициент затрат);

x_{ij} – количество груза, планируемого к перевозке от i-го пункта отправления в j-й пункт назначения.

Исходные данные описанной задачи удобно записать в табл. 6, которую называют распределительной таблицей транспортной задачи.

Таблица 6

Поставщики	Потребители					Запасы
	v_1	…	v_j	…	v_n	
u_1	c_{11} x_{11}	…	c_{1j} x_{1j}	…	c_{1n} x_{1n}	a_1
…	…	…	…	…	…	…
u_i	c_{i1} x_{i1}	…	c_{ij} x_{ij}	…	c_{in} x_{in}	a_i
…	…	…	…	…	…	…
u_m	c_{m1} x_{m1}	…	c_{mj} x_{mj}	…	c_{mn} x_{mn}	a_m
Потребности	b_1	…	b_j	…	b_n	

Транспортная задача закрытого типа

Если суммарные мощности поставщиков равны суммарным потребностям потребителей:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \,, \tag{1.66}$$

то задача называется *транспортной задачей закрытого типа*.

Построим математическую модель транспортной задачи закрытого типа:

$$L = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \Rightarrow \min\,; \tag{1.67}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \qquad (i = 1, \ldots, m)\,; \tag{1.68}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \qquad (j = 1, \ldots, n)\,; \tag{1.69}$$

$$x_{ij} \geq 0 \qquad (i = 1, \ldots, m; \quad j = 1, \ldots, n)\,. \tag{1.70}$$

Задачу можно сформулировать следующим образом: построить план $X = (x_{ij})$ транспортировки груза, удовлетворяющий условиям (1.67)–(1.70).

Под знаком суммы (1.67) каждое из произведений $c_{ij} \cdot x_{ij}$ – это затраты на перевозку груза от поставщика u_i потребителю v_j. Условие (1.67) означает, что суммарные транспортные затраты должны быть минимальны. Уравнения (1.68) устанавливают баланс между суммой всех грузов, вывозимых от каждого поставщика, и имеющимися у него запасами. Уравнения (1.69) устанавливают баланс между суммой всех грузов, доставляемых каждому потребителю, и потребностями этого потребителя. Неравенства (1.70) отражают тот факт, что количество перевозимого груза не может быть отрицательным.

Математическая модель транспортной задачи является математической моделью задачи линейного программирования. Среди множества решений системы ограничений необходимо найти такое неотрицательное решение, при котором целевая функция L принимала бы минимальное значение. Транспортная задача относится к классу широко распространенных на практике задач ЛП. Однако специфическая форма системы ограничений данной задачи позволяет существенно упростить обычный симплексный метод. Модификация симплексного метода применительно к транспортной задаче называется *распределительным методом*.

Решение распределительным методом осуществляется по шагам, и каждому шагу соответствует разбиение переменных на базисные и свободные. Число базисных переменных на каждом шаге равно рангу системы уравнений (1.68), (1.69). Доказано, что ранг системы уравнений (1.68), (1.69) равен $m + n - 1$. Поэтому в закрытой транспортной задаче базисных переменных $m + n - 1$. Так как общее количество переменных в закрытой транспортной задаче равно $m \cdot n$, то свободных переменных будет $m \cdot n - (m + n - 1)$.

При решении транспортной задачи распределительным методом переходят от одного базисного распределения поставок к другому в сторону невозрастания целевой функции L вплоть до оптимального решения. Для начала такого движения требуется исходное базисное распределение поставок – *«опорный план»*.

§ 1.9. Нахождение первоначального базисного распределения поставок

Задача 1.9.1. Рассмотрим пример транспортной задачи, условие которой задано в распределительной табл. 7.

Таблица 7

Поставщики	Потребители				Запасы
	v_1	v_2	v_3	v_4	
u_1	4	6	5	7	350
u_2	8	5	3	4	250
u_3	5	6	7	8	400
Потребности	160	290	320	230	1000 / 1000

Данная задача является задачей закрытого типа.

Те клетки, где будут записываться соответствующие значения базисных переменных (объемы поставок), назовем *занятыми*. Клетки, соответствующие свободным переменным, равным в базисном решении нулю, назовем *свободными*.

Одним из возможных методов нахождения первоначального базисного распределения поставок является метод северо-западного угла.

Метод северо-западного угла

Найдем методом северо-западного угла первоначальное распределение поставок груза задачи 1.9.1. Дадим в самую северо-западную клетку табл. 7, в клетку (1,1), максимально возможную поставку $x_{11} = \min(160; 350) = 160$.

Поставщики	Потребители				Запасы
	v_1	v_2	v_3	v_4	
u_1	4 / 160	6	5	7	350
u_2	8	5	3	4	250
u_3	5	6	7	8	400
Потребности	160	290	320	230	1000 / 1000

Спрос первого потребителя полностью удовлетворен, в результате чего первый столбец табл. 7 полностью выпадает из последующего рассмотрения. Клетку поставок, в данном случае (1,1), перечеркнем сплошной линией. Клетки, выпадающие из последующего рассмотрения, перечеркнем пунктиром. В дальнейшем занятые клетки будем перечеркивать сплошной линией, а свободные – пунктиром.

Следующую поставку дадим в самую северо-западную клетку из оставшихся в табл. 7 – в клетку (1,2). При этом $x_{12} = \min(290; 350 - 160) = 190$. На данном шаге из дальнейшего рассмотрения выпадает первая строка, так как мощности первого поставщика полностью реализованы.

Поставщики	Потребители				Запасы
	v_1	v_2	v_3	v_4	
u_1	4 / 160	6 / 190	5	7	350
u_2	8	5	3	4	250
u_3	5	6	7	8	400
Потребности	160	290	320	230	1000 / 1000

Следующая самая северо-западная клетка – это клетка (2,2). Дадим в нее поставку $x_{22} = \min(290 - 190; 250) = 100$, и т. д.

Поставщики	Потребители				Запасы
	v_1	v_2	v_3	v_4	
u_1	4 / 160	6 / 190	5	7	350
u_2	8	5 / 100	3 / 150	4	250
u_3	5	6	7 / 170	8	400
Потребности	160	290	320	230	1000 / 1000

Общие суммарные затраты на перевозку всего груза будут равны

$$L = 4 \cdot 160 + 6 \cdot 190 + 5 \cdot 100 + 3 \cdot 150 + 7 \cdot 170 + 8 \cdot 230 = 5760.$$

Число заполненных клеток в данном распределении оказалось равным $m + n - 1 = 3 + 4 - 1 = 6$.

Существенный недостаток метода северо-западного угла состоит в том, что он построен без учета значений коэффициентов затрат. Метод северо-западного угла допускает модификацию, лишенную этого недостатка: на каждом шаге максимально возможную поставку следует давать не в северо-западную клетку из оставшихся в таблице, а в ту, которой соответствует наименьший коэффициент затрат.

Метод наименьших затрат

Найдем методом наименьших затрат первоначальное распределение поставок задачи 1.9.1. В распределительной табл. 7 выберем клетку с наименьшим коэффициентом затрат – клетку (2,3). Клетке (2,3) соответствует коэффициент затрат $c_{23} = 3$. В эту клетку дадим максимально возможную поставку: $x_{23} = \min(320;\ 250) = 250$, тем самым мощности поставщика u_2 будут полностью реализованы, поэтому в табл. 7 вычеркнем вторую строку.

Поставщики	Потребители				Запасы
	v_1	v_2	v_3	v_4	
u_1	4	6	5	7	350
u_2	8	5	3 / 250	4	250
u_3	5	6	7	8	400
Потребности	160	290	320	230	1000 / 1000

Клетка (1,1) из оставшихся клеток имеет наименьший коэффициент затрат $c_{11} = 4$. Дадим в клетку (1,1) максимально возможную поставку $x_{11} = \min(160;\ 350) = 160$. В результате потребности первого потребителя v_1 полностью удовлетворены. Вычеркнем из последующего рассмотрения первый столбец. Следующую поставку дадим в клетку (1,3): $x_{13} = \min(320 - 250; 350 - 160) = 70$, и вычеркнем третий столбец.

Поставщики	Потребители				Запасы
	v_1	v_2	v_3	v_4	
u_1	4 / 160	6	5 / 70	7	350
u_2	8	5	3 / 250	4	250
u_3	5	6	7	8	400
Потребности	160	290	320	230	1000 / 1000

Клетки (1,2) и (3,2) имеют равные коэффициенты затрат: $c_{12} = c_{32} = 6$. Выберем для поставки третьего поставщика u_3, так как за счет него можно полностью удовлетворить запросы второго потребителя. В клетку (3,2) дадим поставку $x_{13} = 290$. Потребности потребителя v_2 полностью удовлетворены.

Дадим поставку в клетку (1,4): $x_{14} = \min(230; 350 - 160 - 70) = 120$. На этом шаге выпадает из рассмотрения первая строка, мощности первого поставщика реализованы. Заполним последнюю клетку табл. 7 – клетку (3,4): $x_{34} = \min(230 - 120; 400 - 290) = 110$. Получим табл. 8.

Таблица 8

Поставщики	Потребители				Запасы
	v_1	v_2	v_3	v_4	
u_1	4 / 160	6	5 / 70	7 / 120	350
u_2	8	5	3 / 250	4	250
u_3	5	6 / 290	7	8 / 110	400
Потребности	160	290	320	230	1000 / 1000

Число заполненных клеток в данном распределении оказалось равным $m + n - 1 = 3 + 4 - 1 = 6$.

Общие суммарные затраты на перевозку всего груза методом наименьших затрат будут равны

$$L = 4 \cdot 160 + 5 \cdot 70 + 7 \cdot 120 + 3 \cdot 250 + 6 \cdot 290 + 8 \cdot 110 = 5200.$$

Таким образом, опорное решение, построенное методом наименьших затрат, дало лучший результат по сравнению с решением, построенным методом северо-западного угла (5200 < 5760). Но нельзя с уверенностью сказать, что полученное методом наименьших затрат решение будет оптимальным, то есть общая стоимость перевозок, равная 5200, будет наименьшей. Для проверки оптимальности полученного решения воспользуемся методом потенциалов.

§ 1.10. Метод потенциалов

Чтобы установить, является ли найденное опорное решение оптимальным, необходимо по определенному правилу каждому поставщику и каждому потребителю поставить в соответствие числа, которые должны удовлетворять определенным условиям. Назовем эти условия критерием оптимальности.

Критерий оптимальности. Для того чтобы решение транспортной задачи было оптимальным, необходимо и достаточно, чтобы существовала система из $m + n$ чисел u_i и v_j, которые удовлетворяли бы следующим условиям:

1) для занятых клеток

$$u_i + v_j = c_{ij}; \tag{1.71}$$

2) для свободных клеток

$$u_i + v_j \le c_{ij}. \tag{1.72}$$

Числа u_i ($i = 1, ..., m$) называются *потенциалами пунктов отправления*, числа v_j ($j = 1, ..., n$) называются *потенциалами пунктов назначения*. Сумму потенциалов для свободных клеток называют *косвенными затратами*.

Вышеизложенный критерий оптимальности основан на следующих рассуждениях. Затраты для маршрутов, по которым не осуществляются перевозки в рассматриваемом решении (плане), называются косвенными затратами. Вычисленные косвенные затраты сравниваются с реальными затратами, которые имели бы место, если бы перевозки по данным маршрутам осуществлялись. Если для всех невыбранных маршрутов косвенные затраты не больше реальных, то данный план перевозок является оптимальным. Если хотя бы для одного маршрута косвенные затраты больше реальных, то план перевозок может быть улучшен путем введения в него данного маршрута. Ввод нового маршрута в план перевозок соответствует вводу в состав базисных переменных переменной транспортной задачи, соответствующей этому маршруту.

Замечание. Пункты отправления (пункты назначения) и соответствующие им потенциалы обозначили одними и теми же буквами u_i (v_j), чтобы не вводить новые обозначения.

Из критерия оптимальности следует, что если хотя бы в одной из свободных клеток сумма соответствующих потенциалов превосходит коэффициент затрат, соответствующий этой клетке, то опорное решение является неоптимальным и его можно улучшить за счет загрузки этой клетки. Если таких клеток несколько, то наиболее перспективной для загрузки является клетка, для которой разность s_{ij} (оценка) между коэффициентом затрат и суммой потенциалов наименьшая, т. е. $s_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_i) < 0$.

Разность между коэффициентом затрат и суммой потенциалов имеет экономический смысл. Оценка s_{ij} показывает, на сколько условных денежных единиц уменьшатся транспортные издержки от загрузки клетки (i, j) единицей груза.

Потенциалы u_i и v_j находим, решая систему уравнений (1.71). Эта система содержит $m + n - 1$ уравнений, ровно столько занятых клеток будет в опорном решении, а переменных u_i и v_j эта система содержит $m + n$. Доказано, что система уравнений (1.71) является совместной неопределенной, ранг системы (1.71) равен $m + n - 1$. Найдем любое решение системы (1.71), зафиксировав значение одной из переменных (обычно потенциалу u_1 придают нулевое значение). После этого все остальные переменные определяются однозначно, причем решение имеет интересную особенность: зная значение одной переменной, сразу можно получить значение другой.

Вернемся к решению исходной транспортной задачи. Проверим опорное решение, полученное методом наименьших затрат, на оптимальность. Обнулим потенциал u_1 ($u_1 = 0$). По заданному u_1 легко найдем потенциалы v_1, v_3 и v_4:

$$u_1 + v_1 = c_{11} \Rightarrow 0 + v_1 = 4 \Rightarrow v_1 = 4;$$
$$u_1 + v_3 = c_{13} \Rightarrow 0 + v_3 = 5 \Rightarrow v_3 = 5;$$
$$u_1 + v_4 = c_{14} \Rightarrow 0 + v_4 = 7 \Rightarrow v_1 = 7.$$

Зная, что $v_3 = 5$, найдем потенциал u_2:

$$u_2 + v_3 = c_{23} \Rightarrow u_2 + 5 = 3 \Rightarrow u_2 = -2.$$

Зная, что $v_4 = 7$, а $u_3 = 1$, найдем потенциалы u_3 и v_2:

$$u_3 + v_4 = c_{34} \Rightarrow u_3 + 7 = 8 \Rightarrow u_3 = 1;$$
$$u_3 + v_2 = c_{32} \Rightarrow 1 + v_2 = 6 \Rightarrow v_2 = 5.$$

Значения потенциалов по мере их нахождения будем заносить в табл. 8.

Поставщики	Потребители				Запасы
	$v_1 = 4$	$v_2 = 5$	$v_3 = 5$	$v_4 = 7$	
$u_1 = 0$	4 / 160	6 / 5	5 + / 70	7 − / 120	350
$u_2 = -2$	8 / 2	5 / 3	3 − / 250	4 + / 5	250
$u_3 = 1$	5 / 5	6 / 290	7 / 6	8 / 110	400
Потребности	160	290	320	230	1000 / 1000

После того как все потенциалы найдены, вычислим суммы соответствующих потенциалов для свободных клеток:

$$u_1 + v_2 = 0 + 5 = 5 < c_{12} = 6;$$
$$u_2 + v_1 = -2 + 4 = 2 < c_{21} = 8;$$
$$u_2 + v_2 = -2 + 5 = 3 < c_{22} = 5;$$
$$u_2 + v_4 = -2 + 7 = 5 > c_{24} = 4;$$
$$u_3 + v_1 = 1 + 4 = 5 = c_{34} = 5;$$
$$u_3 + v_3 = 1 + 5 = 6 < c_{33} = 7.$$

Полученные суммы потенциалов запишем в правых нижних углах соответствующих свободных клеток. Чтобы не перепутать с поставками, суммы потенциалов в свободных клетках обведем.

В клетке (2,4) сумма потенциалов больше соответствующего коэффициента затрат, следовательно, построенный опорный план не является оптимальным.

Для того чтобы улучшить план, составим цикл перераспределения поставок. Возьмем ту клетку, где сумма потенциалов больше коэффициента затрат. Если таких клеток несколько, то рациональнее выбрать ту клетку, в которой сумма потенциалов превосходит стоимость поставок на большую величину. В нашей задаче это будет клетка (2,4). Из клетки (2,4) необходимо «прошагать шахматной ладьей» по занятым клеткам так, чтобы снова вернуться в исходную клетку, причем после каждого шага надо поворачивать «с горизонтали на вертикаль» или наоборот. Для каждой свободной клетки цикл по приведенному правилу составляется единственным образом.

Построим для клетки (2,4) цикл перераспределения поставок. В клетке (2,4) поставим знак «+» и из этой клетки перейдем либо в занятую клетку (2,3), либо в одну из занятых клеток (1,4) или (3,4), то есть в клетку, расположенную либо в той же строке, либо в том же столбце, что и клетка (2,4).

Если пойти в клетку (3,4), то из нее затем необходимо будет перейти в клетку (3,2), из которой в занятую клетку уже не попадешь, так как во втором столбце занятых клеток больше нет. Поэтому пойдем в клетку (2,3), поставим в ней знак «–». Из клетки (2,3) можно перейти только в занятую клетку (1,3). Перейдем в клетку (1,3), поставим в ней знак «+». Из этой клетки можно перейти либо в занятую клетку (1,1), либо в занятую клетку (1,4). Если пойти в клетку (1,1), то из нее затем в занятую клетку перейти нельзя, так как в первом столбце занятых клеток больше нет, поэтому из клетки (1,3) перейдем в клетку (1,4), поставим в ней знак «–» (после каждого шага знаки чередуются). Из клетки (1,4) вернемся в исходную клетку (2,4). Цикл замкнулся, обозначим полученный цикл пунктирной линией.

Среди отрицательных вершин цикла (в клетках, где стоят знаки «–») выберем клетку с наименьшей по величине поставкой $\min(120, 150) = 120$. Перераспределим 120 единиц груза по построенному циклу. В клетки, в которых стоит знак «+», добавим 120 единиц груза; в клетках, где стоит знак «–», уберем 120 единиц груза. В результате выполненных операций общее количество груза, ввозимое каждому потребителю и вывозимое от каждого поставщика, не изменится.

В новом опорном плане клетка (1,4) стала свободной, а клетка (2,4) занятой, таким образом, переменную x_{24} мы ввели в базис, а переменную x_{14} вывели из базиса. Число занятых клеток осталось прежним: $m + n - 1$.

Поставщики	Потребители				Запасы
	$v_1 = 4$	$v_2 = 4$	$v_3 = 5$	$v_4 = 6$	
$u_1 = 0$	4 − 160	6 (4)	5 + 190	7 (6)	350
$u_2 = -2$	8 (2)	5 (2)	3 − 130	4 + 120	250
$u_3 = 2$	5 + (6)	6 290	7 (7)	8 − 110	400
Потребности	160	290	320	230	1000 / 1000

Для полученного опорного решения, положив $u_1 = 0$, снова найдем потенциалы из системы (1.71). Значения потенциалов по мере вычисления будем заносить в таблицу поставок. Затем вычислим суммы потенциалов для свободных клеток и проверим с помощью системы неравенств (1.72), является ли полученное решение оптимальным. В клетке (3,1) критерий оптимальности не выполнен: $u_1 + v_3 = 2 + 4 = 6 > c_{31} = 5$.

Для клетки (3,1) построим замкнутый цикл перераспределения поставок. «Означим» цикл, начиная с клетки (3,1), присвоив ей знак «+», клетке (3,4) присвоим знак «–» и т. д.

Среди отрицательных вершин цикла выберем клетку с наименьшей по величине поставкой min(110; 130; 160) = 110.

Перераспределим 110 единиц груза по построенному циклу. В те клетки, где стоит знак «+», добавим 110 единиц груза, в клетках, где стоит знак «–», вычтем этот груз.

Поставщики	Потребители				Запасы
	$v_1 = 4$	$v_2 = 5$	$v_3 = 5$	$v_4 = 6$	
$u_1 = 0$	4 50	6 (5)	5 300	7 (6)	350
$u_2 = -2$	8 (2)	5 (3)	3 20	4 230	250
$u_3 = 1$	5 110	6 290	7 (6)	8 (7)	400
Потребности	160	290	320	230	1000 / 1000

В новом опорном плане клетка (3,4) стала свободной, а клетка (3,1) занятой, то есть переменную x_{31} мы ввели в базис, а переменную x_{34} вывели из базиса. Проверим на оптимальность полученное опорное решение: положив $u_1 = 0$, вычислим значения остальных потенциалов. Как видно из последней таблицы поставок, неравенство $u_i + v_j \le c_{ij}$ выполнено для всех свободных клеток. Следовательно, полученное опорное решение является оптимальным. Общая стоимость всех перевозок для данного плана будет наименьшей из всех возможных: $L = 4 \cdot 50 + 5 \cdot 300 + 3 \cdot 20 + 4 \cdot 230 + 5 \cdot 110 + 6 \cdot 290 = 4970$.

Ответ. Оптимальный план транспортировки груза:

$$X^* = \begin{pmatrix} 50 & 0 & 300 & 0 \\ 0 & 0 & 20 & 230 \\ 110 & 290 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

при котором транспортные расходы по обеспечению продуктом всех четырех пуктов потребления будут равны 4970.

§ 1.11. Транспортная задача открытого типа

Если суммарные мощности поставщиков $\sum\limits_{i=1}^{m} a_i$ не равны суммарным потребностям потребителей $\sum\limits_{j=1}^{n} b_j$, то транспортная задача называется *транспортной задачей открытого типа*.

Транспортную задачу открытого типа нетрудно преобразовать в задачу закрытого типа. Пусть, например, в транспортной задаче открытого типа суммарный объем запасов превышает суммарный объем потребностей, то есть $\sum\limits_{i=1}^{m} a_i > \sum\limits_{j=1}^{n} b_j$.

Введем фиктивного потребителя v_{n+1} и его потребности определим следующим образом:

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j .$$

Коэффициенты затрат в столбце, соответствующем фиктивному потребителю, возьмем равными нулю. Таким образом, получается транспортная задача закрытого типа, которая решается обычным методом.

Если же в транспортной задаче суммарный объем потребностей превышает суммарный объем запасов: $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$, в этом случае вводится аналогично фиктивный поставщик и задача открытого типа сводится к задаче закрытого типа.

Замечание. Метод потенциалов можно применить лишь в том случае, если при нахождении первого опорного решения на каждом шаге заполнения таблицы поставок из рассмотрения выпадает либо строка (мощности соответствующего поставщика реализованы), либо столбец (запросы соответствующего потребителя удовлетворены), и только на последнем шаге одновременно выпадают из рассмотрения и строка, и столбец одновременно. В этом случае число заполненных клеток (базисных переменных) на каждом шаге равно $m + n - 1$. Если же при нахождении первого опорного решения на каком-либо шаге, отличном от последнего, выпали одновременно строка и столбец, то для того, чтобы в дальнейшем можно было применить метод потенциалов, рекомендуется дать нулевую поставку в любую пустую клетку выпадающей строки или выпадающего столбца.

Задача 1.11.1. Условие транспортной задачи задано распределительной табл. 9.

Таблица 9

Поставщики	Потребители			Запасы
	v_1	v_2	v_3	
u_1	5	3	1	70
u_2	2	1	4	30
u_3	3	6	3	50
Потребности	20	60	40	120 / 150

Найти оптимальное распределение поставок и минимальные затраты на перевозку груза, выполнив первоначальное распределение методом наименьших затрат.

Решение. Данная задача является задачей открытого типа: суммарные мощности поставщиков превышают на 30 единиц суммарные потребности потребителей. Введем фиктивного потребителя v_4, присвоив соответствующим клеткам распределительной табл. 9 нулевые коэффициенты затрат.

Первое опорное решение найдем методом наименьших затрат. В одну из трех клеток с нулевым коэффициентом затрат дадим максимально возможную поставку. Например, в клетку (2,4) дадим 30 единиц груза. Мощности второго поставщика будут реализованы полностью, потребность четвертого потребителя полностью удовлетворена. Из рассмотрения одновременно выпадают вторая строка и четвертый столбец. Для того чтобы в дальнейшем можно было воспользоваться критерием оптимальности, необходимо заполнить нулевой поставкой одну из клеток либо второй строки, либо четвертого столбца. Например, в клетку (2,2) дадим нулевую поставку $x_{22} = 0$.

Поставщики	Потребители				Запасы
	v_1	v_2	v_3	v_4	
u_1	5	3	1	0	70
u_2	2	1 / 0	4	0 / 30	30
u_3	3	6	3	0	50
Потребности	20	60	40	30	150 / 150

Следующую поставку дадим в клетку (1,3): $x_{13} = \min(40; 70) = 40$; затем в клетку (1,2): $x_{12} = \min(60; 70 - 40) = 30$; в клетку (3,1): $x_{31} = \min(20; 50) = 20$; в клетку (3,2): $x_{32} = \min(60 - 30; 50 - 20) = 30$.

Полученный опорный план проверим на оптимальность. Обнулив u_1, вычислим остальные потенциалы. В свободные клетки внесем сумму потенциалов.

В клетках (3,1), (3,3) и (3,4) сумма потенциалов больше соответствующего коэффициента затрат, следовательно, построенный опорный план не является оптимальным.

Для клетки (3,4) построим замкнутый цикл перераспределения поставок. Среди отрицательных вершин цикла выберем клетку с наименьшей по величине поставкой min(30;30) = 30. Заметим, что при перераспределении 30 единиц груза по циклу одновременно обнулятся поставки в клетках (3,2) и (2,4): $x_{32} = 0$ и $x_{24} = 0$. Одну из переменных x_{32} или x_{24} выведем из базиса, вводя в базис свободную переменную $x_{34} = 0$, а другую оставим в качестве базисной переменной. Например, оставим в базисе переменную x_{24}, заполнив клетку (2,4) нулевой поставкой.

Поставщики	Потребители				Запасы
	$v_1 = 0$	$v_2 = 3$	$v_3 = 1$	$v_4 = 2$	
$u_1 = 0$	5 0	3 30	1 40	0 2	70
$u_2 = -2$	2 −2	1 + 0	4 −1	0 − 30	30
$u_3 = 3$	3 20	6 − 30	3 4	0 + 5	50
Потребности	20	60	40	30	150 150

Полученный опорный план не будет оптимальным, так как в клетке (3,3) не выполняется критерий $u_3 + v_3 = 4 > 3 = c_{33}$.

Поставщики	Потребители				Запасы
	$v_1 = 0$	$v_2 = 3$	$v_3 = 1$	$v_4 = -3$	
$u_1 = 0$	5 0	3 + 30	1 − 40	0 −3	70
$u_2 = -2$	2 −2	1 30	4 −1	0 0	30
$u_3 = 3$	3 20	6 − 0	3 + 4	0 30	50
Потребности	20	60	40	30	150 150

Выполним еще раз перераспределение груза по построенному циклу. Получим новое опорное решение, убедимся в выполнимости критерия оптимальности.

Поставщики	Потребители				Запасы
	$v_1 = 1$	$v_2 = 3$	$v_3 = 1$	$v_4 = -2$	
$u_1 = 0$	5 1	3 30	1 40	0 −2	70
$u_2 = -2$	2 −1	1 30	4 −1	0 −4	30
$u_3 = 2$	3 20	6 5	3 0	0 30	50
Потребности	20	60	40	30	150 150

Общая стоимость всех перевозок для данного плана будет наименьшей из всех возможных:

$$L = 3 \cdot 30 + 1 \cdot 40 + 1 \cdot 30 + 3 \cdot 20 + 3 \cdot 0 + 0 \cdot 30 = 220.$$

Ответ. Оптимальный план транспортировки груза:

$$X^* = \begin{pmatrix} 0 & 30 & 40 \\ 0 & 30 & 0 \\ 20 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

при котором транспортные расходы по доставке груза во все три пункта потребления будут равны 220. У третьего поставщика после оптимального распределения поставок останутся нереализоваными 30 единиц груза.

Замечание. Задача 1.11.1 имеет не единственное решение. Признаком наличия альтернативного оптимума в транспортной задаче является наличие в оптимальном решении X_1^* хотя бы одной свободной клетки, для которой косвенные затраты равны реальным затратам ($u_i + v_j = c_{ij}$). Сделав перераспределение относительно свободной клетки, для которой $u_i + v_j = c_{ij}$, получим новое оптимальное решение X_2^*. Значение транспортных расходов не изменится: $L(X_1^*) = L(X_2^*)$. Наличие в оптимальном решении X_1^* хотя бы одной свободной клетки, для которой косвенные затраты равны реальным затратам, соответствует бесчисленному множеству решений:

$$X^* = tX_1^* + (1-t)X_2^* \quad (0 \le t \le 1).$$

§ 1.12. Некоторые экономические задачи, сводящиеся к транспортным моделям

Задача 1.12.1. Оптимальное распределение оборудования

Между n участками необходимо распределить m различных видов оборудования. Производительность одной единицы оборудования i-го вида на j-м рабочем участке равна p_{ij}.

Таблица 10

Оборудование	Рабочие участки					Запасы оборудования
	v_1	…	v_j	…	v_n	
u_1	p_{11} x_{11}	…	p_{1j} x_{1j}	…	p_{1n} x_{1n}	a_1
…	…	…	…	…	…	…
u_i	p_{i1} x_{i1}	…	p_{ij} x_{ij}	…	p_{in} x_{in}	a_i
…	…	…	…	…	…	…
u_m	p_{m1} x_{m1}	…	p_{mj} x_{mj}	…	p_{mn} x_{mn}	a_m
Потребности	b_1	…	b_j	…	b_n	

На основании табл. 10 найти распределение оборудования на рабочие участки, при котором суммарная производительность максимальна.

Данная задача относится к классу транспортных задач при условии, что производительность линейно зависит от количества используемого оборудования. Поставщиками в задаче являются различные виды оборудования, потребителями – рабочие участки. Предложение определяется запасом оборудования каждого вида, спрос – потребностью в нем на рабочем участке.

Пусть x_{ij} – число единиц оборудования i-го вида, выделенное на j-й рабочий участок. С учетом обозначений задачу можно сформулировать следующим образом: требуется максимизировать суммарную производительность P (1.73) при условии выполнения ограничений (1.74)–(1.76) и условии неотрицательности переменных (1.77):

$$P = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_{ij} x_{ij} \to \max; \qquad (1.73)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \qquad (i = \overline{1, m}); \qquad (1.74)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \qquad (j = \overline{1, n}); \qquad (1.75)$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j; \qquad (1.76)$$

$$x_{ij} \ge 0 \qquad (i = \overline{1, m}; \quad j = \overline{1, n}). \qquad (1.77)$$

В данной задаче для перехода к стандартной транспортной модели необходимо функцию P заменить на функцию $P' = -P$, которую нужно минимизировать: $P' = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (-p_{ij} x_{ij}) \to \min$. При решении задачи 1.12.1 методом потенциалов в табл. 12 значения производительности p_{ij} взять со знаком минус.

Задача 1.12.2. Задача о загрузке оборудования (об использовании мощностей)

Предприятию задан план выпуска продукции по времени и номенклатуре. Необходимо за время T произвести n_j единиц продукции $P_j (j = \overline{1, k})$. Продукцию производят m станков $S_i (i = \overline{1, m})$. При этом известны: a_{ij} – производительность станков (число единиц продукции P_j, которое можно произвести на станке S_i в единицу времени); b_{ij} – затраты на изготовление единицы продукции P_j на станке S_i в единицу времени.

Необходимо распределить выпуск продукции между станками так, чтобы затраты на производство всей продукции были минимальны при условии, что время работы каждого из станков не должно превышать значения T.

Введем переменные x_{ij} – время работы станка S_i, затраченное на изготовление продукции P_j.

С учетом обозначений задачу можно сформулировать следующим образом: требуется минимизировать суммарные затраты P на производство всей продукции (1.78) при условии выполнения ограничений (1.79)–(1.80) и условии неотрицательности переменных (1.81):

$$P=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{k}b_{ij}x_{ij}\to\min; \qquad (1.78)$$

$$\sum_{j=1}^{k}x_{ij}\le T \qquad (i=\overline{1,m}); \qquad (1.79)$$

$$\sum_{i=1}^{m}a_{ij}x_{ij}\le n_j \qquad (j=\overline{1,k}); \qquad (1.80)$$

$$x_{ij}\ge 0 \qquad (i=\overline{1,m};\quad j=\overline{1,k}). \qquad (1.81)$$

Задача 1.12.3. Задача о назначениях

Имеется n работ и n кандидатов для выполнения этих работ. Затраты i-го кандидата на выполнение j-й работы равны $c_{ij}\,(i=\overline{1,n};$ $j=\overline{1,n})$. Каждый кандидат может быть назначен только на одну работу, каждая работа может быть выполнена только одним кандидатом. Требуется найти назначение кандидатов на работы, при котором суммарные затраты на выполнение работ минимальны.

Введем переменную x_{ij}:

$$x_{ij}=\begin{cases}1, & i\text{-й кандидат выполняет } j\text{-ю работу;}\\ 0, & i\text{-й кандидат выполняет работу, отличную от } j\text{-й.}\end{cases}$$

В этом случае экономико-математическая модель задачи может быть представлена в виде:

$$P=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}\to\min; \qquad (1.82)$$

$$\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=1 \qquad (i=\overline{1,n}); \qquad (1.83)$$

$$\sum_{i=1}^{n}x_{ij} \qquad (j=\overline{1,n}); \qquad (1.84)$$

$$x_{ij}\in\{0;1\} \qquad (i=\overline{1,n};\quad j=\overline{1,n}). \qquad (1.85)$$

Система уравнений (1.83) означает, что каждый кандидат выполняет только одну работу; система уравнений (1.84) означает, что каждая работа выполняется только одним кандидатом. В целевую функцию (1.82) входят только те значения c_{ij}, для которых x_{ij} отличны от нуля.

Задачу можно сформулировать следующим образом: требуется минимизировать общие затраты на выполнение работ P (1.82) при условии выполнения ограничений (1.83)–(1.85).

§ 1.13. Решение оптимизационных задач в рамках MS Excel

В качестве программного средства для решения оптимизационных задач можно использовать табличный процессор Excel, входящий в состав интегрированного пакета Microsoft Office. Решение осуществляется с помощью надстройки *«Поиск решения»*. Для установления надстройки в меню выбирается пункт *«Сервис/Надстройки»*, затем в диалоговом окне в списке надстроек с помощью флажка означивается элемент *«Поиск решения»*. Происходит загрузка. В дальнейшем при запуске Excel *«Поиск решения»* загружается автоматически.

Процесс вычисления целесообразно представить в виде четырех этапов:

1) подготовка данных для процедуры поиска решения;
2) ввод данных в процедуру;
3) процесс вычисления;
4) анализ результатов.

Рассмотрим решение конкретной задачи с помощью надстройки *«Поиск решения»*.

Задача 1.13.1. Решить задачу 1.2.1 с помощью надстройки «*Поиск решения*».

В задаче 1.2.1 требуется найти план выпуска продукции $x^*(x_1^*, x_2^*)$, удовлетворяющий условиям:

$$F = 4x_1 + 3x_2 \to \max, \tag{1.86}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 22, \\ 2x_1 + x_2 \le 26, \\ \qquad 2x_2 \le 16, \\ x_1 \qquad \le 12, \end{cases} \tag{1.87}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \tag{1.88}$$

Решение. Задача решается в Microsoft Excel.

На первом этапе свободным ячейкам $B2$ и $B3$ электронной таблицы, выбранным в качестве управляющих переменных, присваиваются нулевые значения. В процессе решения эти ячейки будут заполняться соответствующими значениями переменных.

Выбирается свободная ячейка *B*5 в качестве целевой ячейки, в нее помещается формула (1.86) функции цели $F(x_1, x_2)$. Левые части ограничений на переменные (1.87) помещаются также в виде формул в свободные ячейки *B*7–*B*10 (рис. 11).

На этапе ввода данных следует выделить целевую ячейку *B*5 и вызвать «*Сервис/Поиск решения*». После чего следует ответить на предлагаемые вопросы.

	A	B
1	Переменные	
2	x_1	0
3	x_2	0
4	Целевая функция	
5	$4x_1 + 3x_2$	$= 4 \cdot B2 + 3 \cdot B3$
6	Ограничения	
7	$x_1 + 2x_2$	$= B2 + 2 \cdot B3$
8	$2x_1 + x_2$	$= 2 \cdot B2 + B3$
9	$2x_2$	$= 2 \cdot B3$
10	x_1	$= B2$

Рис. 11

В поле «*Установить целевую ячейку*» будет указан адрес целевой ячейки: $*B*$5.

В поле «*Равной*»: «*Максимальному значению*», или «*Минимальному значению*», или «Значению» устанавливается флажок в виде точки в соответствии с решаемой задачей. Флажок в поле «*Значению*» ставится, если задача решается для конкретного значения целевой функции, которое записывается в поле, расположенном правее соответствующего флажка. В рассматриваемой задаче флажок установим в поле «*Максимальному значению*».

В поле «*Изменяя ячейки*» указываются ячейки *B*2 и *B*3, заполненные значениями переменных x_1 и x_2.

В поле «*Ограничения*» вводятся ограничения задачи. Для этого используются команды «*Добавить*», «*Изменить*» и «*Удалить*». По команде «*Добавить*» появляется диалоговое окно «*Добавление* *ограничения*». В этом окне в поле «Ссылка на ячейку» указывается адрес ячейки, содержащей функциональную (левую) часть ограничения на переменные. В поле «*Ограничения*» записывается величина ограничения (может указываться ссылка на ячейку, содержащую величину ограничения). В поле между «*Ссылка на ячейку*» и «*Ограничения*» выбирается знак отношения между левой и правой частью ограничения. Например, вводя ограничение $x_1 + 2x_2 \le 22$, введем ссылку на ячейку *B* (рис. 12).

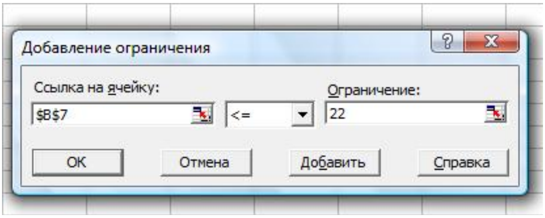

Рис. 12

Если необходимо добавить еще одно ограничение, то выполняется команда «*Добавить*», в противном случае – «*OK*». Если требуется изменить ограничение, уже вставленное в процедуру поиска решения, то следует выделить это ограничение при помощи курсора и выполнить команду «*Изменить*». Так как решение задачи будем искать в области неотрицательных значений переменных, добавим ограничение на переменные x_1 и x_2. Выделив курсором *B*2 и *B*3, выберем знак отношения ≥. В поле ограничения поставим 0.

Замечание. В диалоговом окне «*Параметры*» может присутствовать поле «*Неотрицательные значения*». В этом случае ограничение на переменные x_1 и x_2 в диалоговом окне «*Поиск решения*» не вводится, а ставится флажок в диалоговом окне «*Параметры*» в поле «*Неотрицательные значения*».

Для установки или изменения параметров вычислительного процесса необходимо выполнить команду «*Параметры*». Группа полей ввода «*Максимальное время*», «*Предельное число итераций*», «*Относительная погрешность*» и «*Допустимое отклонение*» в диалоговом окне «*Параметры поиска решения*» задают критерии, в соответствии с которыми останавливается процесс вычисления. Чтобы узнать назначение полей ввода, нужно выполнить команду «*Справка*».

В диалоговом окне «*Параметры*» для решения исходной задачи достаточно установить флажок в поле «*Линейная модель*».

Задача оптимизации полностью подготовлена (рис. 13).

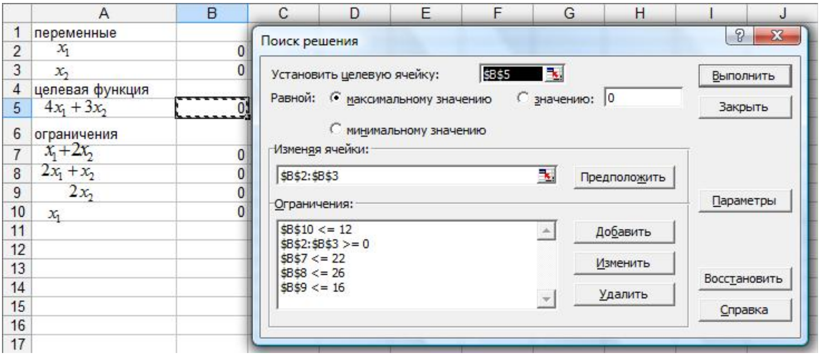

Рис. 13

На третьем этапе необходимо исполнить команду «*Выполнить*», которая приведет к запуску процедуры. После прекращения вычислений откроется диалоговое окно «*Результаты поиска решений*» (рис. 14), в котором появится сообщение о том, найдено решение или нет.

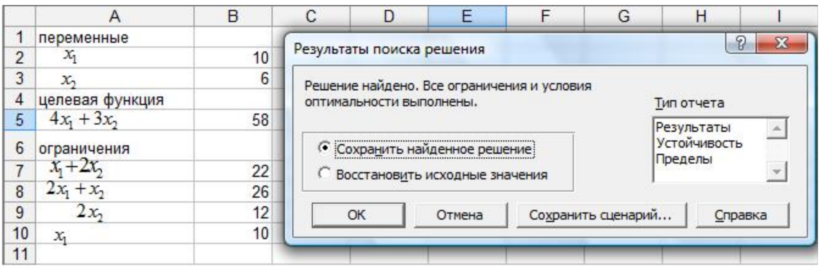

Рис. 14

По команде «*OK*» в ячейки-переменные *B*2 и *B*3, в целевую ячейку *B*5 и в ячейки, соответствующие функциональным частям ограничений *B*7–*B*10, будут записаны результаты вычислений.

На четвертом этапе нужно проанализировать полученные результаты. В поле ввода «*Тип отчета*» можно отметить мышью одну или все три команды: «*Результаты*», «*Устойчивость*», «*Пределы*», выполнение которых создает соответствующие дополнительные листы отчета. По команде «*Результаты*» создается лист отчета, состоящий из целевой ячейки и ячеек-переменных модели, их начальных и конечных значений, а также вида ограничений и сведений о выполнении ограничений в виде равенства или строгого неравенства.

По команде «*Устойчивость*» формируется лист отчета, содержащий сведения о чувствительности решения к малым изменениям в функции цели или в формулах ограничений. По команде «*Пределы*» создается лист отчета, содержащий целевую ячейку и ячейки-переменные, их значения, а также диапазон возможных допустимых значений переменных и соответствующие границы диапазона значений целевой функции.

Листы отчета помогут осуществить анализ полученных результатов.

Выводы

Существует класс оптимизационных задач, сводимых к задаче ЛП. Это задачи оптимизации, в которых функция цели и ограничения на переменные линейны при условии неотрицательности последних – (1.1)–(1.3). Двумерную задачу ЛП (1.24)–(1.26) можно решить графически, для решения задач больших размерностей применяют аналитические методы. В методическом пособии рассматривается симплексный метод (см. § 1.6). Для решения симплексным методом задачу ЛП приводят к каноническому виду, все ограничения записываются в виде равенств. Решение осуществляется переходом от одного опорного решения к другому по особому алгоритму до тех пор, пока целевая функция не будет удовлетворять критерию оптимальности (см. § 1.6).

Для каждой задачи ЛП может быть построена двойственная задача (1.59)–(1.60). Двойственная задача имеет определенный экономический смысл. Для того чтобы найти решение прямой и двойственной задач, достаточно найти решение одной из них. Решение другой можно получить, воспользовавшись теоремами двойственности (см. § 1.7).

Одна из задач логистики получила название «транспортная задача». Транспортная задача (1.67)–(1.70) является задачей ЛП и может быть решена симплексным методом, но ввиду особой формулировки для ее решения может быть применен более эффективный метод – метод потенциалов. При решении методом потенциалов строится первое опорное решение (см. § 1.9) и по особому алгоритму (см. § 1.10) осуществляется переход от одного опорного решения к другому до тех пор, пока целевая функция не будет удовлетворять критерию оптимальности (1.71)–(1.72).

Контрольные вопросы и задания

1. Сформулировать задачу линейного программирования (ЛП).
2. Чем различаются понятия «решение задачи ЛП» и «оптимальное решение задачи ЛП»?
3. Записать задачу ЛП в стандартном виде.
4. Записать задачу ЛП в канонической форме.
5. В мастерской обшивают мягкую мебель двух видов. Для обивки мебели используют велюр и лен. На складе имеется велюра 3000 м, льняной ткани 18 000 м. На один комплект мебели первого вида расходуется 5 м велюра и 3 м льняной ткани, а на один комплект мебели второго вида расходуется 3 м велюра и 2 м льняной ткани. За каждый реализованный комплект мебели первого вида мастерская получает прибыль 3 д. е., второго – 4 д. е. Составить план обивки мебели, обеспечивающий мастерской максимальную прибыль. Построить экономико-математическую модель задачи.
6. Сформулировать понятия «внутренняя точка множества»; «граничная точка множества»; «угловая точка множества».
7. Сформулировать понятие «выпуклое множество».
8. Чем отличаются понятия «замкнутое множество» и «ограниченное множество»?
9. Сформулировать понятия «выпуклый многогранник» и «выпуклая многогранная область».
10. Сформулировать понятия базисного и допустимого решения системы линейных уравнений.
11. Будет ли пересечение любого числа выпуклых множеств выпуклым множеством?

12. Будет ли множество решений совместной системы $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i \le b_i$ ($i = 1, 2, ..., m$) выпуклым многогранником или выпуклой многогранной областью в n-мерном пространстве?
13. Определить понятия «допустимое решение задачи ЛП», «опорный план задачи ЛП».
14. Сформулировать достаточное условие существования оптимального решения задачи ЛП.
15. Сформулировать понятия «вектор-градиент», «нулевая линия уровня», «область производственных возможностей».
16. В чем заключается геометрический метод решения задачи ЛП?
17. Как можно реализовать геометрически анализ модели задачи ЛП на чувствительность?
18. На чем основан симплексный метод? Сформулировать алгоритм и критерий оптимальности.
19. В чем заключается геометрическая интерпретация решения задачи ЛП симплексным методом?
20. Привести пример записи моделей двух взаимно двойственных задач.
21. Сформулировать первую теорему двойственности.
22. Объяснить, как с помощью второй теоремы двойственности можно найти решение двойственной задачи, если известно решение исходной задачи.
23. С помощью третьей теоремы двойственности обосновать экономический смысл компонент оптимального решения двойственной задачи.
24. Сформулировать транспортную задачу в общем виде.
25. Какая транспортная задача называется задачей закрытого типа?
26. Чем отличается метод северо-западного угла от метода наименьших затрат при нахождении первого опорного решения?
27. Сформулировать критерий оптимальности для решения транспортной задачи методом потенциалов.
28. Какая транспортная задача называется задачей открытого типа?
29. Как перейти от задачи открытого типа к задаче закрытого типа?
30. Привести примеры экономических задач, сводящихся к транспортной задаче.

Глава 2. ЦЕЛОЧИСЛЕННОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

§ 2.1. Постановка линейной задачи целочисленного программирования

Задачи целочисленного программирования – это прежде всего задачи на производство и распределение неделимой продукции (загрузка оборудования, строительство турбин, распределение по рейсам поездов, самолетов и т. д.). Математическая модель линейной задачи целочисленного программирования в общем виде имеет вид:

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j \to \max(\min); \tag{2.1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j = b_i, \quad x_j \geq 0 \quad (i = \overline{1, m}; \quad j = \overline{1, n}); \tag{2.2}$$

$$x_j \text{ – целое число.} \tag{2.3}$$

Для целочисленного программирования существуют свои, особые методы решения. Связано это с тем, что при решении задачи (2.1)–(2.2) решение чаще всего получается не целое, а при округлении до ближайших целых чисел можно выйти за область допустимых решений или получить решение, которое не является оптимальным.

Можно выделить три основных метода для решения задач целочисленного программирования: метод отсечения, комбинаторный метод и приближенный метод.

§ 2.2. Метод отсечения. Метод Го́мори

Решение задачи целочисленного программирования (2.1)–(2.2) можно осуществить с помощью алгоритма метода отсечения.

На первом шаге необходимо решить задачу (2.1)–(2.2) без учета ограничения (2.3) на целочисленность. Если все компоненты оптимального решения целые, то задача считается решенной. Если хотя бы одна из компонент оптимального решения не будет целым, то переходим к шагу 2.

На втором шаге к ограничениям задачи (2.1)–(2.1.2) добавляется ограничение на целочисленность (2.3), обладающее следующими свойствами:

- ограничение линейно;
- ограничение отсекает полученный оптимальный нецелочисленный план;
- ограничение не отсекает ни одно целочисленное решение.

Построенное согласно перечисленным требованиям ограничение называется правильным отсечением.

Далее решение задачи осуществляется с учетом построенного правильного отсечения. Ограничения по целочисленности продолжаются до тех пор, пока не будет получено целочисленное решение, если оно существует. Возможно, что целочисленного решения просто нет.

С геометрической точки зрения метод отсечения на плоскости можно интерпретировать следующим образом. Имеются область допустимых решений задачи (2.1)–(2.2) в виде многоугольника и вершина многоугольника, координаты которой являются оптимальным решением этой задачи. Если все координаты этой вершины целые, то задача (2.1)–(2.3) решена, если хотя бы одна из координат не целая, строится прямая, отсекающая часть многоугольника вместе с оптимальным решением, при этом не отсекается ни одна точка области допустимых решений с целыми координатами.

Продемонстрируем алгоритм решения задачи (2.1)–(2.3) на основе симплексного метода, предложенный Гомори. В алгоритме заложен довольно несложный способ построения правильного отсечения.

Алгоритм решения задачи целочисленного линейного программирования методом Гомори

1. Решается задача (2.1)–(2.3) симплексным методом, при этом условия целочисленности (2.3) не учитываются. Задача считается решенной, если все компоненты оптимального решения $x^*(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ будут целочисленными. Может оказаться, что задача (2.1)–(2.2) неразрешима. В этом случае исходная задача с условиями целочисленности не имеет конечного оптимума или условия рассматриваемой задачи противоречивы.

2. Если же оптимальное решение $x^*(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ содержит нецелые компоненты, то выбирается та из компонент, которая имеет наибольшую целую часть, пусть таковой будет $x_i^* = \beta$. Базисную переменную x_i представим в виде линейной комбинации свободных переменных на последнем шаге:

$$x_i = \beta_i - \alpha_{i\,m+1}x_{m+1} - \ldots - \alpha_{i\,n}x_n \,. \tag{2.4}$$

Правильное отсечение можно записать в виде

$$\{\beta_i\} - \{\alpha_{i\,m+1}\}x_{m+1} - \ldots \{\alpha_{i\,n}\}x_n \le 0 \,, \tag{2.5}$$

где $[\beta_i] = \beta_i - \{\beta_i\}$.

3. Неравенство (2.5) представим в виде равносильного уравнения:

$$\{\beta_i\} - \{\alpha_{i\,m+1}\}x_{m+1} - \ldots \{\alpha_{i\,n}\}x_n + x_{n+1} = 0 \,, \tag{2.6}$$

где x_{n+1} – дополнительная переменная ($x_{n+1} \ge 0$).

4. Составим расширенную задачу, для чего введем в систему ограничений (2.2)–(2.3) уравнение (2.6). Решим полученную задачу симплексным методом и перейдем к пункту 1.

Следует заметить, что для задачи (2.2)–(2.3) не существует целочисленного оптимального решения, если на каком-то шаге базисная переменная представляет собой линейную комбинацию свободных переменных с целыми коэффициентами и с нецелым свободным членом.

Задача 2.2.1. Имеется большое количество досок длиной 3 м. Из имеющихся досок требуется изготовить заготовки двух видов: длиной 0,9 м в количестве не менее 81 штуки и длиной 1,2 м в количестве не менее 50 штук. Необходимо определить оптимальное число досок, распиливаемых каждым способом, так, чтобы заготовок любого вида было получено из наименьшего числа досок.

Решение. Существует три способа распила досок. Для каждого способа укажем соответствующее количество получаемых заготовок (табл.).

Способ распила i		1	2	3
Число получаемых заготовок	0,9 м	–	2	3
	1,2 м	2	1	–

Обозначим через x_i количество досок, распиленных i-м способом ($i = 1, 2, 3$). Через Z обозначим общее количество досок, подлежащих распилу.

Согласно условию математическая модель задачи примет вид:

$$Z = x_1 + x_2 + x_3 \to \min,$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \ge 50, \\ 2x_2 + 3x_3 \ge 81, \end{cases}$$

$$x_i \ge 0 \quad (i = \overline{1,3}),\ x_i \text{ – целые числа.}$$

От стандартной формы записи задачи ЛП перейдем к канонической форме, введем балансовые переменные x_4, x_5 в систему ограничений:

$$Z = x_1 + x_2 + x_3 \to \min, \tag{2.7}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_4 = 50, \\ 2x_2 + 3x_3 - x_5 = 81, \end{cases} \tag{2.8}$$

$$x_i \ge 0 \quad (i = \overline{1,3}),\ x_i \text{ – целые числа.} \tag{2.9}$$

Решим задачу ЛП симплексным методом, отбросив условие целочисленности. На последнем шаге получим:

$$\begin{cases} x_1 = 4\frac{3}{4} + \frac{3}{4}x_3 + \frac{1}{2}x_4 - \frac{1}{4}x_5, \\ x_2 = 40\frac{1}{2} - \frac{3}{2}x_3 \qquad + \frac{1}{2}x_5, \end{cases} \tag{2.10}$$

$$Z = 45\frac{1}{4} + \frac{1}{4}x_3 + \frac{1}{2}x_4 + \frac{1}{4}x_5. \tag{2.11}$$

$x^*(4\frac{3}{4}, 40\frac{1}{2}, 0, 0, 0)$ – оптимальный план задачи без условия целочисленности, $Z_{\min} = 45\frac{1}{4}$.

В (2.11) первые две компоненты оптимального решения не являются целочисленными, поэтому перейдем к следующему шагу. Большую целую часть имеет компонента x_2. В соответствии с алгоритмом выберем для построения правильного отсечения вторую компоненту $x_2 = 40\frac{1}{2}$. Построим правильное отсечение, модифицируя второе равенство ограничений (2.10):

$$\left\{40\frac{1}{2}\right\}-\left\{\frac{3}{2}\right\}x_3-\left\{-\frac{1}{2}\right\}x_5 \le 0 .$$

С учетом $\left\{40\frac{1}{2}\right\}=\left\{40+\frac{1}{2}\right\}=\frac{1}{2}$; $\left\{\frac{3}{2}\right\}=\left\{1+\frac{1}{2}\right\}=\frac{1}{2}$; $\left\{-\frac{1}{2}\right\}=\left\{-1+\frac{1}{2}\right\}=\frac{1}{2}$ последнее неравенство запишется в виде

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x_3-\frac{1}{2}x_5 \le 0. \tag{2.12}$$

В неравенство (2.12) введем балансовую переменную $x_6 \ge 0$ и получим равносильное неравенству (2.12) уравнение

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x_3-\frac{1}{2}x_5+x_6=0. \tag{2.13}$$

Выразив из (2.13) переменную x_6, систему ограничений (2.10) дополним еще одним ограничением. Расширенная задача примет вид:

$$\begin{cases} x_1 = 4\frac{3}{4}+\frac{3}{4}x_3+\frac{1}{2}x_4-\frac{1}{4}x_5, \\ x_2 = 40\frac{1}{2}-\frac{3}{2}x_3 \qquad +\frac{1}{2}x_5, \\ x_6 = -\frac{1}{2} \quad +\frac{1}{2}x_3 \qquad +\frac{1}{2}x_5, \end{cases}$$

$$Z = 45\frac{1}{4}+\frac{1}{4}x_3+\frac{1}{2}x_4+\frac{1}{4}x_5 .$$

Решим расширенную задачу ЛП симплексным методом, отбросив условие целочисленности, получим:

$$\begin{cases} x_1 = 5\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x_4-x_5+\frac{3}{2}x_6, \\ x_2 = 39 \qquad +2x_5-3x_6, \\ x_3 = 1 \qquad -x_5+2x_6, \end{cases} \tag{2.14}$$

$$Z = 45\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x_4+\frac{1}{2}x_6 . \tag{2.15}$$

$x^*(5\frac{1}{2}, 39, 1, 0, 0, 0)$ – оптимальный план задачи без условия целочисленности, $Z_{\min} = 45\frac{1}{2}$.

Полученное решение вновь не удовлетворяет условию целочисленности.

Построим правильное отсечение, модифицируя первое равенство ограничений (2.14):

$$\left\{5\frac{1}{2}\right\}-\left\{-\frac{1}{2}\right\}x_4-\{1\}x_5-\left\{-\frac{3}{2}\right\}x_6\le 0,$$

которое преобразуем в неравенство

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x_3-\frac{1}{2}x_5\le 0.$$

Введем новую переменную $x_7 \ge 0$. Расширенная задача примет вид:

$$\begin{cases} x_1=5\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x_4-x_5+\frac{3}{2}x_6, \\ x_2=39 \qquad\quad +2x_5-3x_6, \\ x_3=1 \qquad\qquad -x_5+2x_6, \\ x_7=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x_4 \qquad +\frac{1}{2}x_6, \end{cases}$$

$$Z=45\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x_4+\frac{1}{2}x_6.$$

Решим расширенную задачу ЛП симплексным методом, отбросив условие целочисленности, получим:

$$\begin{cases} x_1=6 \quad -x_5 \quad -x_6-x_7, \\ x_2=39+2x_5-3x_6, \\ x_3=1 \quad -x_5+2x_6, \\ x_4=1 \qquad\quad -x_6+2x_7, \end{cases}$$

$$Z=46+x_7.$$

$x^*(6,\ 39,\ 1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0)$ – оптимальный план исходной задачи, $Z_{\min}=46$.

Замечание. Решенная выше задача имеет альтернативный оптимум. Следует это из того, что в выражении целевой функции на последнем шаге отсутствуют свободные переменные x_5 и x_6. Альтернативные решения получим при $x_7 = 0$ и при изменении x_5 и x_6 внутри промежутков $0 \le x_5 \le \min\{6; +\infty; 1; +\infty\} = 1$, $0 \le x_6 \le \min\{6; 13; +\infty; 1\} = 1$.

Так как по условию задачи переменные x_5 и x_6 могут принимать только целые значения, то для каждой из переменных x_5 и x_6 может принимать только одно из двух значений – 0 или 1. При фиксированном значении $x_7 = 0$ возможны четыре комбинации из двух пар значений для x_5 и x_6, то есть возможны четыре различных целочисленных решения исходной задачи. Таким образом, целочисленные оптимальные решения на последнем шаге будут иметь вид: $x_1^*(6, 39, 1, 1, 0, 0, 0)$, $x_2^*(7, 36, 3, 0, 0, 1, 0)$, $x_3^*(5, 41, 0, 1, 1, 0, 0)$, $x_4^*(6, 38, 2, 0, 1, 1, 0)$.

Альтернативные оптимальные целочисленные решения позволяют из нескольких возможных решений, приводящих к одному и тому же результату, выбрать то решение, которое имеет преимущества перед остальными решениями по какому-то дополнительному критерию. Так, например, если в исходной задаче рассмотреть дополнительно критерий уменьшения отходов при производстве заготовок, то выбор будет за вторым способом распила. При втором способе распила отходов вообще не будет. Поэтому в качестве решения лучше выбрать третье решение $x_3^*(5, 41, 0, 1, 1, 0, 0)$, так как максимальное число бревен (41) в этом случае будет подлежать распилу вторым способом.

Ответ для исходной задачи 2.2.1 будет $Z_{\min} = 46$ при оптимальных целочисленных решениях (6, 39, 1), (7, 36, 3), (5, 41, 0), (6, 38, 2).

К недостаткам метода Гомори можно отнести требование целочисленности для всех переменных, в том числе и для дополнительных переменных. В рассмотренной выше задаче дополнительные переменные представляли собой неиспользованные ресурсы, для которых допустимы нецелочисленные значения.

§ 2.3. Комбинаторные методы. Метод ветвей и границ

Метод ветвей и границ, один из возможных методов решения задачи целочисленного программирования, предполагает упорядоченный перебор вариантов, при котором в дальнейшем рассмотрении участвуют только те из них, которые по каким-либо признакам оказываются перспективными, а бесперспективные варианты отбрасываются. При решении методом ветвей и границ множество допустимых решений разбивается на подмножества, каждое из которых снова разбивается на подмножества до тех пор, пока не будет получено оптимальное целочисленное решение исходной задачи.

Алгоритм решения задачи целочисленного программирования методом ветвей и границ

Обозначим задачу (2.1)–(2.3) – задача 1. Предположим, что в задаче 1 значения каждой из целочисленных переменных x_j ограничены: $v_j \le x_j \le w_j$ $(j=\overline{1,n})$, а значение линейной функции $Z(x)$ ограничено снизу числом $Z_0(Z(x) \ge Z_0)$.

1. Задача 1 решается симплексным методом без учета условия целочисленности. Считается, что исходная задача целочисленного программирования решена, если полученное оптимальное решение $x^*(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ содержит только целочисленные компоненты. Если задача 1 без учета условия целочисленности окажется неразрешима (не имеет конечного оптимума или условия задачи противоречивы), то и задача целочисленного программирования неразрешима.

2. Если хотя бы одна из компонент оптимального решения $x^*(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ будет иметь нецелое значение, например, предположим, что j-я компонента x_j^* оптимального решения задачи 1 не удовлетворяет условию целочисленности, в этом случае исключается область $[x_j] \le x_j \le [x_j] + 1$ ($[x_j]$ – целая часть числа x_j) из области допустимых решений задачи 1.

В результате задача 1 разбивается на две задачи: задачу 2 и задачу 3, отличающиеся друг от друга тем, что в задаче 2 кроме ограничений (2.2)–(2.3) задачи 1 добавлено ограничение $v_j \le x_j \le [X_j]$, а в задаче 3 кроме тех же ограничений (2.2)–(2.3) добавлено ограничение $[X_j] + 1 \le x_j \le w_j$. Получим список из двух задач: задачу 2 и задачу 3.

3. Задачи 2 и 3 решаются в любом порядке. Список задач в зависимости от полученного решения расширяется либо уменьшается.

4. Если при решении одной из задач: задачи 2 или задачи 3 – получено нецелочисленное оптимальное решение, для которого $Z(x^*) \le Z_0$, то данная задача исключается из списка.

Если $Z(x^*) > Z_0$, то из данной задачи формируются новые две задачи. Если полученное решение x^* удовлетворяет условию целочисленности и условию $Z(x^*) > Z_0$, то значение Z_0 исправляется и за величину Z_0 принимается оптимум линейной функции полученного оптимального целочисленного решения. Пока все задачи из списка не будут решены, процесс ветвления должен быть продолжен.

Выводы

Для решения задач целочисленного программирования разработан целый ряд методов. Один из простейших подходов к решению линейной задачи целочисленного программирования (2.1)–(2.3), метод Гомори, заключается в поэтапной модификации задачи ЛП путем введения дополнительных ограничений, направленных на получение целочисленного решения с использованием симплексного метода (см. § 2.2).

Контрольные вопросы

1. Определение понятия «правильное отсечение».
2. Алгоритм решения задачи целочисленного программирования методом Гомори.
3. Алгоритм решения задачи целочисленного программирования методом ветвей и границ.

Глава 3. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ИГР

§ 3.1. Основные определения

Ряд ситуаций в области экономики (особенно при наличии свободной конкуренции) принадлежат разряду конфликтных.

Конфликтная ситуация – ситуация, в которой две (или более) стороны преследуют различные цели, а результаты любого действия каждой из сторон зависят от действий партнера.

Для анализа подобных ситуаций был создан специальный математический аппарат – *теория игр*.

Целью теории игр является выработка рекомендаций по рациональному образу действий каждого из противников в ходе конфликтной ситуации.

Приведем основные понятия теории игр.

Игра – математическая модель конфликтной ситуации.

Степень удовлетворения своих интересов игроком может быть выражена числом, которое называется *выигрышем*.

Развитие игры во времени происходит с помощью последовательных этапов, или «ходов». Ходом называется выбор одного из предусмотренных правилами игры вариантов. Ходы делятся на личные и случайные.

Личным ходом называется сознательный выбор одним из игроков одного из возможных в данной ситуации ходов. Любой из ходов в шахматы является личным ходом.

Случайным ходом называется выбор из ряда возможностей, осуществляемый не решением игрока, а каким-либо механизмом случайного выбора (бросание монеты, игральной кости, тасовка и сдача карт и т. д.).

Стратегия игрока – совокупность правил, определяющих выбор действий игрока при каждом личном ходе в зависимости от сложившейся ситуации.

В зависимости от числа возможных стратегий игры делятся на «конечные» и «бесконечные». *Конечной* называется игра, в которой у каждого игрока имеется только конечное число стратегий. Конечная игра, в которой игрок A имеет m стратегий, а игрок B имеет n стратегий, называется игрой $m \times n$.

Парная игра, в которой выигрыш одного из игроков равен проигрышу другого, называется *игрой с нулевой суммой*, или антагонистической игрой.

Рассмотрим парную игру $m \times n$ с нулевой суммой двух игроков A и B («мы» и «противник»). Обозначим наши стратегии A_i ($i = 1, ..., m$); стратегии противника обозначим B_j ($j = 1, ..., n$).

Таблица, в которой заданы стратегии игроков и платежи, называется *платежной матрицей*. Если игра состоит только из личных ходов, то элементом платежной матрицы при применении игроками пары стратегий A_i и B_j будет платеж a_{ij}, равный выигрышу игрока A. Если в игре присутствуют случайные ходы, то a_{ij} – это *оценка* ожидаемого выигрыша (математическое ожидание).

Платежная матрица $m \times n$ имеет вид (табл. 11).

Таблица 11

A / B	B_1	…	B_j	…	B_n	α_j
A_1	a_{11}	…	a_{1j}	…	a_{1n}	α_1
…	…	…	…	…	…	…
A_i	a_{i1}	…	a_{ij}	…	a_{in}	α_i
…	…	…	…		…	…
A_m	a_{m1}	…	a_{mj}	…	a_{mn}	α_m
β_i	β_1	…	β_j	…	β_n	α / β

§ 3.2. Нижняя, верхняя цена игры

Определим стратегию игрока A, которая обеспечила бы ему наибольший из возможных выигрышей вне зависимости от того, как поведет себя игрок B. Выбирая стратегию, мы должны руководствоваться тем, что наш противник действует разумно и на любую нашу стратегию отвечает той стратегией из числа имеющихся у него, которая обеспечивает нам минимальный выигрыш.

То есть если мы воспользуемся стратегией A_i, то при разумных действиях противника наш выигрыш будет равен $\min_j \alpha_{ij}$. Обозначим через α наибольшее значение из всех $\min_j \alpha_{ij}$ ($\alpha = \max_i \min_j \alpha_{ij}$). Величина α называется *нижней ценой* игры, или максиминным выигрышем (максимином). Число α лежит в определенной строке матрицы; та стратегия игрока A, которая соответствует этой строке, называется *максиминной стратегией*. Очевидно, если игрок A будет придерживаться максиминной стратегии, то ему при любом поведении противника гарантирован выигрыш, во всяком случае не меньший α.

Нижняя цена игры α – это *гарантированный выигрыш игрока А при любой стратегии противника* (тот минимум, который игрок A может себе обеспечить, действуя наиболее осторожно).

Очевидно, аналогичные рассуждения можно провести и за противника B. Выдвигая стратегию B_j, противник понимает, что мы ответим на эту стратегию той стратегией из всех возможных, которая даст нам максимальный выигрыш, равный $\max_i \alpha_{ij}$. Обозначим через β наименьшее значение из всех $\max_i \alpha_{ij}$: $\beta = \min_i \max_j \alpha_{ij}$. Величина β называется *верхней ценой игры* (минимаксом). Соответствующая минимаксному выигрышу стратегия противника называется его *минимаксной стратегией*. Придерживаясь своей наиболее осторожной минимаксной стратегии, игрок B может гарантировать себе проигрыш не более β, вне зависимости от того, как поступит игрок A.

Верхняя цена игры – *гарантированный проигрыш игрока В при любой стратегии противника* (это тот минимальный проигрыш, который может себе обеспечить игрок B, действуя наиболее осторожно).

Принцип осторожности, диктующий игрокам выбор соответствующих стратегий в теории игр, часто называют *принципом минимакса*.

Задача 3.2.1. Игроки A и B одновременно и независимо друг от друга пишут одно из трех чисел: 1, 2 или 3. Если сумма написанных чисел четная, то B платит A эту сумму в рублях; если она нечетная, то, наоборот, A платит B эту сумму. Требуется проанализировать игру; составить ее матрицу; найти нижнюю и верхнюю цены игры.

Решение. Игра состоит из двух ходов (ход игрока A и ход игрока B), оба хода личные. У игрока A три стратегии: A_1 – написать число 1; A_2 – написать число 2; A_3 – написать число 3. У противника (игрока B) тоже три стратегии. Игра представляет собой игру 3×3 с матрицей, приведенной в табл. 12.

Таблица 12

A \ B	B_1	B_2	B_3	α
A_1	2	–3	4	–3
A_2	–3	4	–5	–5
A_3	4	–5	6	–5
β	4	4	6	–3 / 4

Нижняя цена игры $\alpha = -3$; верхняя цена игры $\beta = 4$. Максиминная стратегия игрока A – это стратегия A_1; применяя ее систематически, игрок A может твердо рассчитывать на выигрыш не менее чем –3, т. е. его проигрыш не составит более чем 3 рубля в каждой игре. Аналогично, применяя стратегии B_1, B_2, игрок B обеспечит себе этим проигрыш не более чем в 4 рубля. Если же игрок A отступит от своей минимаксной стратегии (например, выберет стратегию A_2), противник может, выбрав стратегию B_3, свести выигрыш игрока A к –5. Отступление же игрока B от своей минимаксной стратегии может свести его проигрыш к 6 рублям.

Задача 3.2.2. В распоряжении игрока A имеются три вида вооружения: A_1, A_2, A_3. У противника B имеется три вида самолетов: B_1, B_2, B_3. Задача игрока A – поразить самолет; задача противника (игрока B) – сохранить его. При применении вооружения A_1 самолеты B_1, B_2, B_3 поражаются соответственно с вероятностями 0,9; 0,4; 0,2. При применении вооружения A_2 самолеты поражаются с вероятностями 0,3; 0,6; 0,8, а при применении вооружения A_3 – 0,5; 0,7; 0,2. Сформулировать ситуацию в терминах теории игры. Определить верхнюю и нижнюю цены игры.

Решение. Ситуация может рассматриваться как игра 3×3 с двумя личными ходами и одним случайным. Личный ход игрока A – выбор типа вооружения. Личный ход игрока B – выбор вида самолета. Случайный ход – действие вооружения; этот ход может окончиться поражением или непоражением самолета. Выигрыш игрока A

равен единице, если самолет поражен, и равен нулю в противном случае. Стратегиями игрока *A* являются три варианта вооружения; стратегиями игрока *B* являются три варианта самолетов. Среднее значение выигрыша при каждой заданной паре стратегий есть не что иное, как вероятность поражения данного самолета данным оружием. Составим матрицу игры (табл. 13).

Таблица 13

A \ B	B_1	B_2	B_3	α
A_1	0,9	0,4	0,2	0,2
A_2	0,3	0,6	0,8	0,3
A_3	0,5	0,7	0,2	0,2
β	0,9	0,7	0,8	0,3 / 0,7

Нижняя цена игры $\alpha = 0,3$; верхняя цена игры $\beta = 0,7$. Наиболее осторожная (максиминная) стратегия игрока *A* – это стратегия A_2; пользуясь вооружением A_2, игрок *A* гарантирует себе, что будет поражать самолеты в среднем не менее чем с частотой 0,3. Наиболее осторожной (минимаксной) стратегией игрока *B* будет стратегия B_2. Выбирая второй вид самолетов, игрок *B* может быть уверен, что он будет поражаться не более чем с частотой 0,7.

Продемонстрируем на данном примере *свойство неустойчивости минимаксных стратегий*. До тех пор пока оба игрока придерживаются своих наиболее осторожных стратегий, средний выигрыш игрока *A* равен 0,6. Это число больше, чем нижняя цена игры $\alpha = 0,3$, но меньше, чем верхняя цена игры $\beta = 0,7$. Теперь допустим, что игроку *B* стало известно, что игрок *A* применяет стратегию A_2, он немедленно применит стратегию B_1, чем сведет выигрыш игрока *A* к 0,3. В свою очередь, на стратегию B_1 игрок *A* может ответить стратегией A_1, дающей выигрыш 0,9, и т. д.

Таким образом, положение, при котором оба игрока пользуются своими минимаксными стратегиями, является неустойчивым и может быть нарушено поступившими сведениями о стратегии противоположной стороны.

§ 3.3. Решение игры в чистых стратегиях

Существуют некоторые игры, для которых минимаксные стратегии являются устойчивыми. Это те игры, для которых нижняя цена игры равна верхней: $\alpha = \beta$.

Если нижняя цена игры равна верхней, то их общее значение называется *чистой ценой игры* или просто ценой игры. В этом случае говорят, что игра имеет решение в чистых стратегиях.

Задача 3.3.1. Пусть игра задана платежной матрицей 4×4 (табл. 14).

Таблица 14

$A \backslash B$	B_1	B_2	B_3	B_4	α
A_1	0,4	0,5	0,9	0,3	0,3
A_2	0,8	0,4	0,3	0,7	0,3
A_3	0,7	0,6	0,8	0,9	0,6
A_4	0,7	0,2	0,4	0,6	0,2
β	0,8	0,6	0,9	0,9	0,6 / 0,6

Определить верхнюю и нижнюю цены игры.

Решение. Найдем нижнюю цену игры: $\alpha = 0{,}6$. Найдем верхнюю цену игры: $\beta = 0{,}6$. Они оказались равными. Следовательно, у игры есть чистая цена v, равная $v = \alpha = \beta = 0{,}6$.

Элемент 0,6, выделенный в платежной матрице, является одновременно минимальным в своей строке и максимальным в своем столбце. В геометрии точку на поверхности, обладающую аналогичным свойством, называют седловой точкой; по аналогии этот термин применяется и в теории игр. Элемент матрицы, обладающий свойством одновременно быть минимальным в своей строке и максимальным в своем столбце, называется седловой точкой матрицы, а про игру говорят, что она имеет седловую точку.

Седловая точка – платеж, который одновременно является наибольшим в своем столбце и наименьшим в своей строке.

Стратегии, соответствующие седловой точке, называют *оптимальными стратегиями* (в данном примере A_3, B_3), а их совокупность называют *решением игры*.

Решение игры обладает замечательным свойством. *Если один из игроков придерживается своей оптимальной стратегии, а другой игрок будет любым способом отклоняться от своей оптимальной стратегии, то для игрока, допустившего отклонение, это никогда не может оказаться выгодным: в лучшем случае выигрыш его останется неизменным, в худшем случае его выигрыш уменьшится (проигрыш увеличится).*

Это утверждение легко проверить на примере рассматриваемой игры с седловой точкой. Мы видим, что в случае игры с седловой точкой минимаксные стратегии обладают своеобразной «устойчивостью»: если одна сторона придерживается своей минимаксной стратегии, то для другой невыгодно отклоняться от своей минимаксной стратегии. В данном случае, даже если у игроков имеются сведения о том, что противник избрал свою оптимальную стратегию, это не изменит поведения игроков. Пара оптимальных стратегий в игре с седловой точкой является как бы «положением равновесия»: любое отклонение от оптимальной стратегии приводит отклоняющегося игрока к невыгодным последствиям, вынуждающим его вернуться в исходное положение.

§ 3.4. Решение игры в смешанных стратегиях

Среди конечных игр, имеющих практическое значение, сравнительно редко встречаются игры с седловой точкой; более типичным является случай, когда нижняя и верхняя цена игры различны. Если каждому игроку предоставлен выбор одной-единственной стратегии, то в расчете на разумно действующего противника этот выбор должен определяться принципом минимакса. Придерживаясь своей минимаксной стратегии, мы при любом поведении противника заведомо гарантируем себе выигрыш, равный нижней цене игры α. Возникает вопрос: нельзя ли гарантировать себе средний выигрыш, больший α, если применять не одну «чистую» стратегию, а чередовать случайным образом несколько стратегий? Такие комбинированные стратегии, состоящие в применении нескольких чистых стратегий, чередующихся по случайному закону с определенным соотношением частот, в теории игр называют *смешанными стратегиями*.

Очевидно, каждая чистая стратегия является частным случаем смешанной, в которой все стратегии, кроме одной, применяются с нулевыми частотами, а данная – с частотой, равной 1.

Теорема Фон Неймана. Каждая конечная игра имеет по крайней мере одно решение (возможно, в области смешанных стратегий).

Выигрыш, получаемый в результате решения, называется ценой игры. Очевидно, что цена игры ν всегда лежит между нижней ценой α и верхней ценой β: $\alpha \le \nu \le \beta$. Введем специальное обозначение для смешанных стратегий. Если, например, наша смешанная стратегия состоит в применении стратегий $A_1, ..., A_m$ с частотами $p_1, ..., p_m$, причем $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$, будем обозначать эту стратегию $S_A = \begin{pmatrix} A_1 \dots & A_i \dots & A_m \\ p_1 \dots & p_i \dots & p_m \end{pmatrix}$.

Аналогично смешанную стратегию противника будем обозначать $S_B = \begin{pmatrix} B_1 \dots & B_j \dots & B_n \\ q_1 \dots & q_j \dots & q_n \end{pmatrix}$, где $q_1, ..., q_n$ – частоты, в которых смешиваются стратегии $B_1, ..., B_n$; $\sum_{j=1}^{n} q_j = 1$.

Предположим, что нами найдено решение игры, состоящее из двух оптимальных смешенных стратегий S_A^*, S_B^*.

В общем случае не все чистые стратегии, доступные данному игроку, входят в его оптимальную смешанную стратегию, а только некоторые. Чистая стратегия, входящая в оптимальную смешанную стратегию с отличной от нуля вероятностью, называется *активной*.

Решение игры обладает еще одним замечательным свойством. *Если один из игроков придерживается своей оптимальной смешанной стратегии $S_A^*(S_B^*)$, то выигрыш остается неизменным и равным цене игры ν независимо от того, что делает другой игрок, если только он не выходит за пределы своих активных стратегий.* Второй игрок может, например, воспользоваться только одной из активных стратегий в чистом виде или смешивать несколько активных стратегий в любых пропорциях.

§ 3.5. Процедура вычеркивания дублирующих и заведомо невыгодных стратегий

Если игра $m \times n$ не имеет седловой точки, то нахождение решения – довольно трудоемкая задача, особенно при больших значениях m и n. Иногда эту задачу удается упростить, если предварительно уменьшить число стратегий путем вычеркивания дублирующих и заведомо невыгодных стратегий. Процедура вычеркивания дублирующих и заведомо невыгодных стратегий всегда должна предшествовать решению игры.

Задача 3.5.1. Пусть игра задана платежной матрицей (табл. 15).

Таблица 15

A \ B	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	7	6	5	4	2
A_2	5	4	3	2	3
A_3	5	6	6	3	5
A_4	5	4	3	2	3

Упростить платежную матрицу.

Решение. Стратегия A_4 в точности повторяет (дублирует) стратегию A_2, поэтому любую из этих двух стратегий можно вычеркнуть. Вычеркнем A_4. Стратегия A_1 является заведомо более выгодной по сравнению со стратегией A_2, поэтому стратегию A_2 также вычеркнем. После преобразований у игрока A осталось две стратегии: A_1, A_3. Для игрока B стратегия B_3 заведомо более выгодна, чем стратегия B_2 (как бы ни повел себя игрок A, проигрыш игрока B будет не больше, если он воспользуется стратегией B_3 вместо B_2). Вычеркнем стратегию B_2. Сравнивая проигрыш игрока B при применении стратегии B_1 с проигрышем при применении стратегии B_5, придем к выводу о необходимости вычеркнуть стратегию B_1. Сравнивая проигрыш игрока B при применении стратегии B_3 с проигрышем при применении стратегии B_4, приходим к выводу о необходимости вычеркнуть стратегию B_3. В результате преобразований получим матрицу 2×2 (табл. 16).

Таблица 16

$A \backslash B$	B_4	B_5
A_1	4	2
A_3	3	5

§ 3.6. Решение игровых задач размерности 2 × 2

Наиболее простыми случаями конечных игр, которые всегда можно решить элементарными способами, является игра 2 × 2. Рассмотрим игру 2 × 2 с платежной матрицей в табл. 17.

Таблица 17

$A \backslash B$	B_1	B_2
A_1	a_{11}	a_{12}
A_2	a_{21}	a_{22}

Возможны два случая: 1) игра имеет седловую точку; 2) у игры нет седловой точки. В первом случае решение очевидно: это пара стратегий, пересекающихся в седловой точке. Заметим, что в игре 2 × 2 наличие седловой точки всегда соответствует существованию заведомо невыгодных стратегий, которые должны быть вычеркнуты при предварительном анализе.

Предположим, что седловой точки нет и, следовательно, нижняя цена игры не равна верхней цене игры $\alpha \neq \beta$. Требуется найти оптимальную смешанную стратегию S_A^* игрока A:

$$S_A^* = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ p_1 & p_2 \end{pmatrix}.$$

В игре 2 × 2 при отсутствии седловой точки обе стратегии противника являются активными, иначе игра имела бы решение в области чистых стратегий (седловую точку). Значит, если мы придерживаемся своей оптимальной стратегии S_A^*, то противник в любых пропорциях может смешивать свои чистые стратегии B_1 и B_2, не изменяя среднего выигрыша.

Предположим, что игрок A воспользовался своей оптимальной стратегией S_A^*, смешивая стратегии A_1 и A_2 в оптимальных пропорциях, а игрок B при этом каждый раз использует стратегию B_1. В этом случае средний выигрыш игрока A будет равен $\alpha_{11} p_1 + \alpha_{21} p_2$, в то же время он будет равен цене игры ν. Аналогично, пусть игрок A воспользуется своей оптимальной стратегией S_A^*, а игрок B при этом каждый раз будет использовать стратегию B_2. В этом случае средний выигрыш игрок A будет равен $\alpha_{21} p_1 + \alpha_{22} p_2 = \nu$ и в то же время он будет равен цене игры ν.

Принимая во внимание, что $p_1 + p_2 = 1$, составим систему уравнений:

$$\begin{cases} \alpha_{11}p_1 + \alpha_{21}p_2 = \nu, \\ \alpha_{21}p_1 + \alpha_{22}p_2 = \nu, \\ p_1 + p_2 = 1. \end{cases} \tag{3.1}$$

Решив систему (3.1), найдем искомые частоты p_1, p_2 и чистую цену игры ν.

Если цена игры известна, то для определения оптимальной стратегии противника $S_B^* = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ q_1 & q_2 \end{pmatrix}$, зная, что $q_1 + q_2 = 1$, достаточно составить одно уравнение. Предположим, что игрок B воспользовался своей оптимальной стратегией, а игрок A воспользовался стратегией A_1. Выигрыш игрока A в этом случае будет равен $\alpha_{11} q_1 + \alpha_{12} q_2 = \nu$.

Задача 3.6.1. Найдем решение игры 2×2, заданной платежной матрицей (см. задачу 3.5.1):

A \ B	B_4	B_5
A_1	4	2
A_3	3	5

Решение. Игра не имеет седловой точки: $\alpha = 3$, $\beta = 4$. Следовательно, решение должно лежать в области смешанных стратегий:

$$S_A^* = \begin{pmatrix} A_1 & A_3 \\ p_1 & p_3 \end{pmatrix}, \; S_B^* = \begin{pmatrix} B_4 & B_5 \\ q_4 & q_5 \end{pmatrix}.$$

Найдем неизвестные частоты применения активных стратегий для обоих игроков, а также чистую цену игры. Составим системы уравнений:

$$\begin{cases} 4p_1 + 3p_3 = \nu, \\ 2p_1 + 5p_3 = \nu, \\ p_1 + p_3 = 1, \end{cases} \qquad \begin{cases} 4q_4 + 2q_5 = \nu, \\ q_4 + q_5 = 1. \end{cases}$$

Решив системы, получим $p_1 = p_3 = \frac{1}{2}$, $\nu = \frac{7}{2}$, $q_4 = \frac{3}{4}$, $q_5 = \frac{1}{4}$.

Следовательно, если игрок A воспользуется своей оптимальной стратегией $S_A^* = \begin{pmatrix} A_1 & A_3 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$, то, как бы ни повел себя игрок B, выигрыш, равный чистой цене игры $\nu = \frac{7}{2}$, будет всегда у игрока A. Если игрок B воспользуется своей оптимальной стратегией $S_B^* = \begin{pmatrix} B_4 & B_5 \\ 3/4 & 1/4 \end{pmatrix}$, то, как бы ни повел себя игрок A, увеличить свой выигрыш, равный чистой цене игры $\nu = \frac{7}{2}$, он не сможет.

§ 3.7. Приведение матричной игры к задаче линейного программирования

Каждая конечная игра двух лиц с нулевой суммой может быть представлена как задача линейного программирования, и наоборот, каждая задача линейного программирования может быть представлена как игра. Рассмотрим способ нахождения решения игры методом линейного программирования, который особенно эффективен для игр, описываемых матрицей большой размерности.

Пусть игра $m \times n$ задана платежной матрицей (табл. 18).

Таблица 18

A \ B	B_1	...	B_j	...	B_n
A_1	a_{11}	...	a_{1j}	...	a_{1n}
...	...	...	...	...	...
A_i	a_{i1}	...	a_{ij}	...	a_{in}
...	...	...	...		...
A_n	a_{m1}	...	a_{mj}	...	a_{mn}

Игрок A обладает стратегиями A_1, ..., A_m, игрок B – стратегиями B_1, ..., B_n. Необходимо определить оптимальные стратегии

$S_A^* = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \dots & A_m \\ p_1^* & p_2^* \dots & p_m^* \end{pmatrix}$, $S_B^* = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \dots & B_n \\ q_1^* & q_2^* \dots & q_n^* \end{pmatrix}$, где p_i^*, q_j^* – относительные частоты применения соответствующих чистых стратегий соответственно:

$$p_1^* + p_2^* + \ldots + p_m^* = 1,\ q_1^* + q_2^* + \ldots + q_m^* = 1.$$

Замечание. Если в платежной матрице присутствуют нулевые или отрицательные значения «выигрышей» игрока A, то к каждому элементу платежной матрицы необходимо прибавить одно и то же положительное число $c \geq \max(|a_{ij}|)$ $(a_{ij} \leq 0)$, чтобы все элементы платежной матрицы стали положительными. Эта операция не изменит искомых оптимальных стратегий.

Предположим, что в данной задаче все элементы положительны: $a_{ij} > 0$.

Оптимальная стратегия S_A^* удовлетворяет следующему требованию: она обеспечивает игроку A средний выигрыш, не меньший, чем цена игры ν, при любой стратегии игрока B и выигрыш, равный цене игры ν, при оптимальной стратегии игрока B. Так как, согласно нашему предположению, все $a_{ij} > 0$, то цена игры $\nu > 0$. Если игрок A применит смешанную стратегию S_A^* против любой чистой стратегии B_j игрока B, то он получит средний выигрыш, или математическое ожидание выигрыша: $a_j = a_{1j}p_1^* + a_{2j}p_2^* + \ldots + a_{mj}p_m^*$ $(j = \overline{1, n})$.

Для оптимальной стратегии S_A^* все средние выигрыши не меньше цены игры ν, поэтому можно составить систему неравенств:

$$\begin{cases} a_{11}p_1^* + a_{21}p_2^* + \ldots + a_{m1}p_m^* \geq \nu, \\ a_{12}p_1^* + a_{22}p_2^* + \ldots + a_{m2}p_m^* \geq \nu, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{1n}p_1^* + a_{2n}p_2^* + \ldots + a_{mn}p_m^* \geq \nu. \end{cases} \tag{3.2}$$

Каждое из неравенств системы (3.2) разделим на число $\nu > 0$. Введем новые переменные: $y_i = p_i^*/\nu$ $\left(i = \overline{1, m}\right)$, получим

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{m1}y_m \geq 1, \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{m2}y_m \geq 1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + \ldots + a_{mn}y_n \geq 1. \end{cases} \tag{3.3}$$

Цель игрока A – максимизировать свой гарантированный выигрыш, т. е. цену игры ν.

Разделим на $\nu \neq 0$ равенство $p_1^* + p_2^* + \ldots + p_m^* = 1$, получим, что переменные $y_i \left(i = \overline{1, m}\right)$ удовлетворяют условию: $y_1 + y_2 + \ldots + y_m = 1/\nu$. Максимизация цены игры ν эквивалентна минимизации величины $1/\nu$, поэтому задача может быть сформулирована следующим образом: определить значения переменных $y_i \geq 0 \left(i = \overline{1, m}\right)$, минимизирующие линейную функцию $Z = y_1 + y_2 + \ldots + y_m$ и удовлетворяющие линейным ограничениям (3.3).

Это задача линейного программирования, решая которую получим оптимальное решение $(p_1^* + p_2^* + \ldots + p_m^*)$ и оптимальную стратегию S_A^*.

Для определения оптимальной стратегии S_B^* следует учесть, что игрок B стремится минимизировать гарантированный выигрыш ν, т. е. в этом случае находится $\max(1/\nu)$. При этом переменные $q_1^* + q_2^* + \ldots + q_n^*$ должны будут удовлетворять неравенствам

$$\begin{cases} a_{11}q_1^* + a_{21}q_2^* + \ldots + a_{1n}q_n^* \leq \nu, \\ a_{21}q_1^* + a_{22}q_2^* + \ldots + a_{2n}q_n^* \leq \nu, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}q_1^* + a_{m2}q_2^* + \ldots + a_{mn}q_n^* \leq \nu, \end{cases} \tag{3.4}$$

которые следуют из того, что средний проигрыш игрока B не будет превосходить цены игры ν, какую бы чистую стратегию ни применял игрок A.

Если обозначить $x_j = q_j^*/\nu$ $(j = \overline{1, n})$, то получим систему неравенств:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leq 1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \leq 1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leq 1, \end{cases} \tag{3.5}$$

переменные которой удовлетворяют условию $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1/\nu$. Задачу можно сформулировать следующим образом: определить значения переменных x_j $(j = \overline{1, n})$, удовлетворяющие системе неравенств (3.5) и максимизирующие линейную функцию $F = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$.

Решение сформулированной задачи определяет оптимальную стратегию S_B^*.

Нетрудно заметить, что сформулированные выше две задачи являются взаимно двойственными задачами линейного программирования. Решив задачи ЛП, вычислим

$$\nu = \frac{1}{Z(y^*)},\ \ p_i^* = y_i^* \cdot \nu,\ \ q_j^* = x_j^* \cdot \nu.$$

Задача 3.7.1. Найти решение игры, заданной платежной матрицей (табл. 19).

Таблица 19

A \ B	B_1	B_2	B_3	B_4	α
A_1	4	3	2	–5	–5
A_2	–2	5	–1	4	–2
A_3	–3	2	–3	6	–3
β	4	5	2	6	2 \ –2

Решение. Игра не имеет седловой точки $\alpha = -2$, $\beta = 2$. Так как $\alpha \neq \beta$, то решение должно лежать в области смешанных стратегий. Нижняя цена игры – число отрицательное ($\alpha = -2$), поэтому, возможно, значение цены игры ν не будет положительным. Число c, которое необходимо прибавить ко всем элементам матрицы, должно быть не меньше 2. Пусть $c = 6$, в этом случае все элементы матрицы становятся положительными. Платежная матрица примет вид

A \ B	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	10	9	8	1
A_2	4	11	5	10
A_3	3	8	3	12

Задача ЛП для игрока A формулируется следующим образом: найти минимальное значение функции (3.6) при условии выполнения ограничений (3.7):

$$Z(y) = y_1 + y_2 + y_3 \to \min, \tag{3.6}$$

$$\begin{cases} 10y_1 + 4y_2 + 3y_3 \ge 1, \\ 9y_1 + 11y_2 + 8y_3 \ge 1, \\ 8y_1 + \ 5y_2 + 3y_3 \ge 1, \\ y_1 + 10y_2 + 12y_3 \ge 1, \end{cases} \tag{3.7}$$

$$y_i \ge 0 \left(i = \overline{1,3}\right).$$

Для игрока *B* – найти максимальное значение функции (3.8) при условии выполнения ограничений (3.9):

$$F(x) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \to \max, \tag{3.8}$$

$$\begin{cases} 10x_1 + 9x_2 + 8x_3 + x_4 \le 1, \\ 4x_1 + 11x_2 + 5x_3 + 10x_4 \le 1, \\ 3x_1 + 8x_2 + \ 3x_3 + 12x_4 \le 1, \end{cases} \tag{3.9}$$

$$x_j \ge 0 \quad \left(j = \overline{1,4}\right).$$

Получили пару задач линейного программирования.

Решив задачи с помощью надстройки «*Поиск решения*», получим оптимальные решения: y^* (0,07; 0,09; 0); x^* (0; 0; 0,12; 0,04).

При этом $F(x^*) = Z(y^*) = 0{,}16$.

Вычислим цену игры и вероятности для оптимальных смешанных стратегий игроков *A* и *B*:

$$\nu = \frac{1}{F(x)} - c = \frac{1}{0{,}16} - 6 = 0{,}25;$$

$$p_1^* = 0{,}07 \cdot 6{,}25 = 0{,}42;$$
$$p_2^* = 0{,}09 \cdot 6{,}25 = 0{,}58;$$
$$p_3^* = 0 \cdot 6{,}25 = 0.$$

$$q_1^* = x_1^* \cdot \nu = 0 \cdot 6{,}25 = 0;$$
$$q_2^* = x_2^* \cdot \nu = 0 \cdot 6{,}25 = 0;$$
$$q_3^* = x_3^* \cdot \nu = 0{,}12 \cdot 6{,}25 = 0{,}75;$$
$$q_4^* = x_4^* \cdot \nu = 0{,}04 \cdot 6{,}25 = 0{,}25.$$

Следовательно, если игрок *A* будет применять стратегии A_1 и A_2 с частотой $p_1^* = 0{,}4$ и $p_2^* = 0{,}6$, то он гарантирует себе выигрыш не меньше чем цена игры $\nu = 0{,}25$, как бы ни вел себя противник. При этом, если игрок *B* в трех случаях из четырех будет применять стратегию B_3, в остальных случаях – стратегию B_4, то он гарантирует себе проигрыш не более чем цена игры $\nu = 0{,}25$. Если же игрок *A* воспользуется своей оптимальной стратегией, а игрок *B* воспользуется хотя бы раз одной из своих пассивных стратегий B_1 или B_2, то выигрыш игрока A может оказаться и больше цены игры. Аналогично если игрок B воспользуется своей оптимальной стратегией, а игрок A воспользуется хотя бы раз своей пассивной стратегией A_3, то проигрыш игрока B может оказаться меньше, чем цена игры.

§ 3.8. Моделирование экономических ситуаций в терминах игры с природой

Выше рассматривались игровые модели, в которых в качестве оппонента выступал противник, принимающий решения и выбирающий стратегии по определенным правилам. В экономической практике нередко приходится принимать решения (выбирать стратегии), не имея информации о возможном сопернике в условиях неопределенности и риска. Для описания таких ситуаций разработан математический аппарат игр с природой. «Природа» в теории игр – объективная действительность, некая незаинтересованная сторона, «поведение» которой неизвестно, но, во всяком случае, не содержит элемента сознательного противодействия нашим планам.

Формально изучение игр с природой, так же как и стратегических, должно начинаться с построения платежной матрицы.

Рассмотрим пример игры с природой.

Задача 3.8.1. Предприятие может выпускать три вида продукции: A_1, A_2, A_3, получая при этом прибыль, зависящую от спроса, который может быть в одном из трех состояний: B_1, B_2, B_3. Дана матрица $\begin{bmatrix} 50 & 15 & 20 \\ 25 & 40 & 30 \\ 10 & 30 & 60 \end{bmatrix}$, ее элементы a_{ij} характеризуют прибыль, которую получит предприятие при выпуске i-й продукции с j-м состоянием спроса.

Определить оптимальные пропорции в выпускаемой продукции, гарантирующие среднюю величину прибыли при любом состоянии спроса, считая его неопределенным.

Решение. Задача сводится к игровой модели, в которой игра предприятия A против спроса B задана платежной матрицей. Проверим игру на наличие седловой точки:

$$\alpha = \max_i\left(\min_j a_{ij}\right) = 25,\ \beta = \min_j\left(\max_i a_{ij}\right) = 40,\ \alpha \neq \beta .$$

Решение игры надо искать в смешанных стратегиях. Цена игры лежит между нижней и верхней ценами: $25 \le \nu \le 40$.

Нас интересует стратегия игрока *А*. Задача ЛП для игрока *А* формулируется следующим образом: найти минимальное значение функции (3.10) при условии выполнения ограничений (3.11):

$$Z(y) = y_1 + y_2 + y_3, \tag{3.10}$$

$$\begin{cases} 50y_1 + 25y_2 + 10y_3 \ge 1, \\ 15y_1 + 40y_2 + 30y_3 \ge 1, \\ 20y_1 + 30y_2 + 60y_3 \ge 1, \end{cases} \tag{3.11}$$

$$y_i \ge 0 \quad \left(i = \overline{1,3}\right).$$

Решив задачу с помощью надстройки «*Поиск решения*», получим оптимальный план $y^* = (y_1^*, y_2^*, y_3^*, y_4^*, y_5^*, y_6^*) = (0{,}010;\ 0{,}018;\ 0{,}004;\ 0;\ 0;\ 0)$. При этом $Z(y^*) = 0{,}032$. Вычислим цену игры и вероятности для оптимальных смешанных стратегий предприятия *А*:

$$\nu = 1/0{,}032 = 30{,}84, \qquad \begin{aligned} p_1^* &= 0{,}010 \cdot 30{,}84 = 0{,}313, \\ p_2^* &= 0{,}018 \cdot 30{,}84 = 0{,}554, \\ p_3^* &= 0{,}004 \cdot 30{,}84 = 0{,}133. \end{aligned}$$

Данное решение показывает, что предприятие *А* должно выпускать 31,3 % продукции A_1, 55,4 % продукции A_2 и 13,2 % – A_3; при этом гарантированная величина средней прибыли равна 30,84 д. е.

Задача 3.8.2. Сельскохозяйственное предприятие имеет возможность выращивать две культуры – A_1 и A_2.

В результате многолетних наблюдений составлена матрица дохода от реализации урожаев сельскохозяйственного предприятия (в млн руб.) в зависимости от состояния погоды: засушливое лето (B_1), нормальное лето (B_2), влажное лето (B_3). Матрица дохода в зависимости от состояния погоды имеет вид: $\begin{pmatrix} 8 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$.

Необходимо определить, как сеять культуры, если при прочих равных условиях урожаи зависят от погоды, а план посева должен обеспечить наибольший доход (доход от реализации выращенной культуры определяется полученным объемом).

Решение. В зоне рискованного земледелия, а таковой является большая часть России, планирование посева должно осуществляться с учетом наименее благоприятного состояния погоды.

Таким образом, одной из сторон выступает сельскохозяйственное предприятие (игрок *A*), заинтересованное в том, чтобы получить наибольший доход, а другой стороной – «природа» (игрок *B*), способная навредить сельскохозяйственному предприятию в максимальной степени (от нее зависят погодные условия), хотя и не преследующая прямо противоположные цели.

Принятие природы за противника равносильно планированию посева с учетом наиболее неблагоприятных условий; если же погодные условия окажутся благоприятными, то выбранный план дает возможность увеличить доход.

Налицо антагонистический конфликт, в котором у игрока *A* две стратегии, а у игрока *B* – три.

Нетрудно заметить, что седловой точки у этой матрицы нет. Поэтому оптимальная стратегия игрока *A* будет смешанной. Построим модель задачи ЛП:

$$Z(y) = y_1 + y_2 \to \min,$$

$$\begin{cases} 8y_1 + 2y_2 \geq 1, \\ 5y_1 + 3y_2 \geq 1, \\ 3y_1 + 6y_2 \geq 1, \end{cases}$$

$$y_i \geq 0 \quad \left(i = \overline{1,3}\right).$$

Решив задачу с помощью надстройки «*Поиск решения*», получим оптимальный план $y^* = (y_1^*, y_2^*) = (0{,}143;\ 0{,}095)$; $Z(y^*) = 0{,}238$. Вычислим цену игры и вероятности для оптимальных смешанных стратегий сельскохозяйственного предприятия:

$$\nu = \frac{1}{0{,}238} = 4{,}20, \qquad p_1^* = 0{,}143 \cdot 4{,}20 = 0{,}60,$$
$$p_2^* = 0{,}095 \cdot 4{,}20 = 0{,}40.$$

Полученное решение сельскохозяйственное предприятие может использовать так:

– на 3/5 всех площадей выращивать культуру A_1;
– на 2/5 всех площадей выращивать культуру A_2 и получать прибыль в размере не меньше 4,2 млн руб.

§ 3.9. Биматричные игры

Гораздо чаще встречается ситуация, когда интересы игроков A и B не являются противоположными. В этом случае у каждого игрока будет своя платежная матрица. Поэтому игра называется биматричной. Для рассмотрения ограничимся биматричными играми 2×2. Будем считать, что у каждого игрока имеется ровно две стратегии: A_1, A_2 и B_1, B_2 соответственно. Платежные матрицы будут иметь вид:

$$\begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} B_1 & B_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \end{array} = A, \qquad \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} B_1 & B_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \end{array} = B.$$

Теорема Нэша. Любая биматричная игра имеет одну равновесную ситуацию (точку равновесия) в смешанных стратегиях.

Припишем стратегиям A_1, A_2 (B_1, B_2) вероятности p, $1-p$ (q, $1-q$) соответственно.

$$\begin{array}{c} \\ p \\ 1-p \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} q & 1-q \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \end{array}, \qquad \begin{array}{c} \\ p \\ 1-p \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} q & 1-q \end{array} \\ \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \end{array}.$$

Средний выигрыш игрока A будет равен:

$$H_A(p,q) = a_{11}pq + a_{12}p\cdot(1-q) + a_{21}q\cdot(1-p) + a_{22}\cdot(1-p)\cdot(1-q).$$

Средний выигрыш игрока B равен:

$$H_B(p,q) = b_{11}pq + b_{12}p\cdot(1-q) + b_{21}q(1-p) + b_{22}\cdot(1-p)\cdot(1-q).$$

Запишем средние выигрыши игроков A и B в более удобной форме:

$$H_A(p,q) = (a_{11}-a_{12}-a_{21}+a_{22})pq + (a_{12}-a_{22})p + (a_{21}-a_{22})q + a_{22}; \tag{3.12}$$

$$H_B(p,q) = (b_{11}-b_{12}-b_{21}+b_{22})pq + (b_{12}-b_{22})p + (b_{21}-b_{22})q + b_{22}. \tag{3.13}$$

В формуле (3.12) положим $p = 1$:

$$H_A(1,q) = (a_{11}-a_{12}-a_{21}+a_{22})q + a_{12} + (a_{21}-a_{22})q.$$

В формуле (3.12) положим $p = 0$:

$$H_A(0,q) = (a_{21}-a_{22})q + a_{22}.$$

Рассмотрим разности

$$H_A(p,q) - H_A(1,q) = (p-1)(Cq-\alpha);$$

$$H_A(p,q) - H_A(0,q) = p(Cq-\alpha).$$

$$C = a_{11} + a_{22} - (a_{21} + a_{12}),\ \alpha = a_{22} - a_{12}.$$

В случае если пара (p, q) определяет точку разности, эти разности неотрицательны:

$$H_A(p,q) - H_A(1,q) \geq 0;$$

$$H_A(p,q) - H_A(0,q) \geq 0.$$

Пара чисел $(p_0,\ q_0)$ определяет равновесную ситуацию, если $H_A(p,\ q_0) \leq H_A(p_0,\ q_0)$ для всех $0 \leq p \leq 1$, то есть отклонение от оптимальной стратегии одного из игроков при условии, что другой игрок придерживается своей оптимальной стратегии, уменьшает средний выигрыш игрока, отклонившегося от оптимальной стратегии. Поэтому

$$\begin{cases}(p-1)(Cq-\alpha) \geq 0,\\ p(Cq-\alpha) \geq 0.\end{cases}$$

Из формулы (3.13) имеем:

$$H_B(p,1) = (b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22})p + (b_{12} - b_{22})p + b_{21} = (q-1)(Dp-\beta);$$

$$H_A(p,0) = (a_{21} - a_{22})p + b_{22} = q(Dp-\beta),$$

где $D = b_{11} + b_{22} - (b_{21} + b_{12}),\ \beta = b_{22} - b_{21}$.

Пара чисел $(p_0,\ q_0)$ определяет равновесную ситуацию, если $H_B(p_0,\ q) \leq H_B(p_0,\ q_0)$ для всех $0 \leq q \leq 1$, то есть отклонение от оптимальной стратегии одного из игроков при условии, что другой игрок придерживается своей оптимальной стратегии, уменьшает средний выигрыш игрока, отклонившегося от оптимальной стратегии. Поэтому

$$\begin{cases}(q-1)(Dp-\beta) \geq 0,\\ q(Dp-\beta) \geq 0.\end{cases}$$

Алгоритм нахождения равновесной ситуации

По матрице A находим числа $C = a_{11} + a_{22} - (a_{21} + a_{12})$, $\alpha = a_{22} - a_{12}$ и решаем систему

$$\begin{cases}(p-1)(Cq-\alpha) \geq 0,\\ p(Cq-\alpha) \geq 0.\end{cases}$$

По матрице В находим числа $D = b_{11} + b_{22} - (b_{21} + b_{12})$, $\beta = b_{22} - b_{21}$ и решаем систему

$$\begin{cases}(q-1)(Dp-\beta) \geq 0,\\ q(Dp-\beta) \geq 0.\end{cases}$$

Изобразим полученные кривые в координатах $(p,\ q)$. Точки пересечения этих кривых, лежащие в квадрате $0 \leq p \leq 1,\ 0 \leq q \leq 1$, определяют равновесные ситуации. Для каждой равновесной ситуации находят средние выигрыши $H_A(p, q)$ и $H_B(p, q)$.

Задача 3.9.1. Решим 2×2 биматричную игру:

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = A, \qquad \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 8 & 2 \end{pmatrix} = B.$$

Воспользуемся алгоритмом нахождения равновесной ситуации: $C = 6 + 4 - (2 + 2) = 6$, $\alpha = 4 - 2 = 2$.

Решаем систему:

$$\begin{cases} (p-1)(6q-2) \ge 0, \\ p(6q-2) \ge 0. \end{cases}$$

Случай 1. $p = 1$. Тогда $q \ge 1/3$.

Случай 2. $p = 0$. Тогда $q \le 1/3$.

Случай 3. $0 < p < 1$. Тогда $q = 1/3$.

Наглядно это решение представлено на рис. 15.

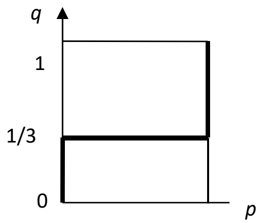

Рис. 15

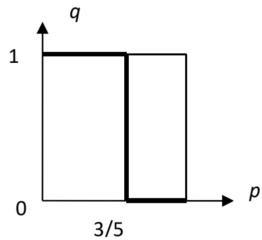

Рис. 16

$D = 2 + 2 - (8 + 6) = -10$, $\beta = 2 - 8 = -6$.

Решаем систему

$$\begin{cases} (q-1)(-10p+6) \ge 0, \\ q(-10p+6) \ge 0. \end{cases}$$

Случай *1.* $q = 1$. Тогда $p \le 3/5$.

Случай *2.* $q = 0$. Тогда $p \ge 3/5$.

Случай *3.* $0 < q < 1$. Тогда $p = 3/5$.

Это решение представлено на рис. 16.

Совместим оба графика для того, чтобы получить решение всей задачи (рис. 17).

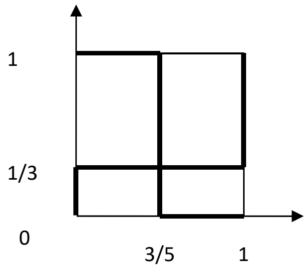

Рис. 17

Получилась одна точка пересечения: $p = 3/5$, $q = 1/3$, то есть одна равновесная ситуация. $1 - p = 2/5$, $1 - q = 2/3$.

$$\begin{array}{c} \\ 3/5 \\ 2/5 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \scriptstyle 1/3 & \scriptstyle 2/3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \end{array}, \qquad \begin{array}{c} \\ 3/5 \\ 2/5 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \scriptstyle 1/3 & \scriptstyle 2/3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 8 & 2 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Средний выигрыш игрока A равен

$$H_A = (3/5,\ 1/3) = 6 \cdot (3/5) \cdot (1/3) + 2 \cdot (3/5) \cdot (2/3) + \\ + 2 \cdot (2/5) \cdot (1/3) + 4 \cdot (2/5) \cdot (2/3) = 10/3.$$

Средний выигрыш игрока B равен

$$H_B = (3/5,\ 1/3) = 2 \cdot (3/5) \cdot (1/3) + 6 \cdot (3/5) \cdot (2/3) + \\ + 8 \cdot (2/5) \cdot (1/3) + 2 \cdot (2/5) \cdot (2/3) = 66/15.$$

Задача 3.9.2. Дилемма узника. Два узника находятся в предварительном заключении по подозрению в совершении преступления. При отсутствии прямых улик возможность их осуждения в большей степени зависит от того, заговорят они или будут молчать. Если оба будут молчать, то наказанием будет лишь срок предварительного заключения 1 год. Если оба сознаются, то получат срок по 6 лет, учитывающий признание как смягчающее обстоятельство. Если заговорит только один из узников, а другой будет молчать, то заговоривший будет выпущен на свободу, а сохранивший молчание получит максимальный срок – 9 лет.

Конфликтная ситуация приводит к биматричной игре, в которой каждый из игроков имеет по две стратегии – молчать и говорить.

Построим модель задачи:

	$B_М$	$B_Г$
$A_М$	–1	–9
$A_Г$	0	–6

	$B_М$	$B_Г$
$A_М$	–1	0
$A_Г$	–9	–6

Воспользуемся алгоритмом нахождения равновесной ситуации:

$$C = 2, D = 2, \alpha = 3, \beta = 3,$$

$$\begin{cases} (p-1)(2q-3) \ge 0, \\ p(2q-3) \ge 0. \end{cases} \qquad \begin{cases} (q-1)(2p-3) \ge 0, \\ q(2p-3) \ge 0. \end{cases}$$

Получим:

$$p = 1, q \ge 3/2;\ \ p = 0, q \le 3/2;\ \ 0 \le p \le 1, q = 3/2.$$

$$q = 1, p \ge 3/2;\ \ q = 0, p \le 3/2;\ \ 0 \le q \le 1, p = 3/2.$$

График, соответствующий решению, изображен на рис. 18.

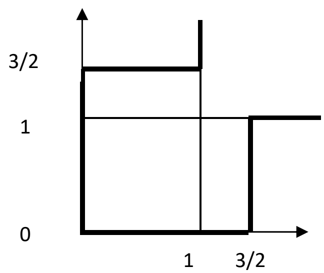

Рис. 18

Единственная равновесная ситуация – (0, 0). Это ситуация, в которой каждый из игроков выбирает вторую чистую стратегию – сознаться, и его потери при этом составят 6 лет.

Эта задача еще раз демонстрирует, что отклонение от ситуации равновесия одного из игроков не дает ему никаких преимуществ. Но при одновременном отклонении обоих каждый из игроков может получить больший выигрыш, нежели в равновесной ситуации. В данной задаче в ситуации, когда оба игрока молчат, выигрыш у каждого из игроков выше, чем в равновесной ситуации, – потерять один год. Ситуация, когда оба игрока молчат, неустойчива.

По условию задачи сговор (создание коалиций) недопустим и любой из узников, изменяя стратегию молчать при условии, что другой молчит, может избежать наказания.

§ 3.10. Основные критерии выбора лучшей стратегии

Любую хозяйственную деятельность человека можно рассматривать как игру с природой. Под природой понимают совокупность неопределенных факторов, влияющих на эффективность принимаемых решений. Задачей экономиста или лица, принимающего решения, является принятие наилучшего управленческого решения в каждой конкретной ситуации.

Методы принятия решений в играх с природой зависят от характера неопределенности, точнее от того, известны или нет вероятности состояний (стратегий) природы, т. е. имеет ли место ситуация риска или неопределенности.

Рассмотрим игру с природой. У стороны A имеется m различных стратегий: $A_1, A_2, \ldots, A_m$; о конкретной экономической ситуации можно сделать n предположений: $П_1, П_2, \ldots, П_n$, которые будем рассматривать как стратегии природы. Наш выигрыш задается матрицей (табл. 20).

Таблица 20

А \ П	$П_1$	...	$П_j$	...	$П_n$
A_1	a_{11}	...	a_{1j}	...	a_{1n}
...	...	...	...	...	...
A_i	a_{i1}	...	a_{ij}	...	a_{in}
...	...	...	...		...
A_m	a_{m1}	...	a_{mj}	...	a_{mn}

Требуется выбрать такую стратегию (чистую или смешанную), которая для стороны A являлась бы выгодной по сравнению с другими.

Возможен и другой способ задания матрицы игры с природой: не в виде матрицы выигрышей, а в виде так называемой матрицы рисков.

Риск $\boldsymbol{r_{ij}}$ стороны A при использовании стратегии в условиях $П_j$ показывает разность между выигрышем, который игрок A получил бы, если бы знал условия $П_j$, и выигрышем, который он получит, не зная их и выбирая стратегию A_i: $r_{ij} = \beta_j - \alpha_{ij}$, где β_j – максимально возможный выигрыш при условиях $П_j$.

Например, по матрице выигрышей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 9 \\ 3 & 8 & 4 & 3 \\ 4 & 6 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

можно составить соответствующую ей матрицу рисков

$$R_A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

В матрице выигрышей A во второй строке 1-й и 4-й элементы равны, и, казалось бы, игроку A все равно, какие сложатся условия – $П_1$ или $П_4$. Но при условиях $П_1$ игрок A может выиграть самое большое 4 и стратегия A_2 почти хороша. Но при условии $П_4$ можно было выиграть 9 и стратегия A_2 будет уже плохой. Естественно, стороне A целесообразно минимизировать свой риск, сопровождающий выбор решения.

Итак, возможны две постановки задачи о выборе решения:
1) обеспечить максимально возможный выигрыш;
2) минимизировать риск.

Непосредственный анализ матрицы выигрышей или матрицы рисков не позволяет в общем случае принять решение по выбору оптимальной стратегии, за исключением тривиального случая, когда выигрыши при одной стратегии выше, чем при любой другой для каждого состояния «природы» (другими словами, имеется в наличии «доминирующая» стратегия).

Гораздо чаще встречаются случаи, когда вероятности состояния природы либо вообще не существуют, либо не поддаются оценке даже приближенно. Хорошее решение в такой ситуации найти трудно, но нужно попытаться найти хотя бы не самое худшее. Для выбора решения в этом случае используется ряд критериев. Рассмотрим некоторые из них.

Максиминный критерий Вальда. Игра с природой ведется как с разумным, причем агрессивным, противником, делающим все для того, чтобы помешать стороне A добиться успеха. Оптимальной в этом случае считается стратегия, при которой гарантируется выигрыш игрока в любом случае не меньший, чем нижняя цена игры с природой $\alpha = \max_i \left(\min_j a_{ij} \right)$. Если

Если руководствоваться этим критерием, то значит ориентироваться на самые худшие условия. Это перестраховочный подход, «позиция крайнего пессимизма».

Критерий минимального риска Севиджа. Он тоже крайне пессимистический. При выборе оптимальной стратегии в соответствии с данным критерием следует ориентироваться не на выигрыш, а на риск. Выбирается та стратегия, при которой величина риска в наихудших условиях минимальна: $\beta = \min_i \left(\max_j r_{ij} \right)$.

В этом случае пессимизм понимается несколько иначе, чем в критерии Вальда.

Критерий пессимизма-оптимизма Гурвица рекомендует при выборе решения не руководствоваться ни крайним пессимизмом, ни крайним оптимизмом. Стратегия выбирается из условия

$$H = \max_i \left(x \min_j a_{ij} + (1 - x) \max_j a_{ij} \right),$$

где x – коэффициент пессимизма, выбираемый между 0 и 1. При $x = 0$ критерий Гурвица превращается в критерий крайнего оптимизма, при $x = 1$ – в критерий Вальда. Значение x выбирается из субъективных соображений: чем меньше сторона A хочет рисковать, тем ближе к единице выберет x.

В случае, когда вероятности состояния природы правдоподобны, для их оценки используют *принцип недостаточного основания Лапласа*. Согласно этому принципу все состояния природы полагаются равновероятными, то есть $q_1 = q_2 = ... = q_n = 1/n$. Оптимальной считается стратегия, обеспечивающая максимум среднего выигрыша.

Выбор решения в условиях неопределенности всегда условен, субъективен. Но и в этом случае математические методы полезны, ибо рекомендуют не просто принимать любое решение, а анализировать варианты, прогнозировать результаты и обосновывать свой выбор.

Рассмотрим применение критериев в игре с заданной платежной матрицей.

Задана матрица выигрышей:

A_i \ $П_j$	$П_1$	$П_2$	$П_3$	min j	max i	Н
A_1	20	22	41	20	41	28,4
A_2	45	24	16	16	45	27,6
A_3	35	50	14	14	50	28,4
A_4	26	15	48	15	48	28,2

Построим матрицу рисков:

A_i \ $П_j$	$П_1$	$П_2$	$П_3$	max j
A_1	25	28	7	28
A_2	0	26	32	32
A_3	10	0	34	34
A_4	19	35	0	35

По критерию Вальда целесообразна стратегия A_1, по критерию Севиджа – также A_1. Если принять $x = 0{,}6$, то максимальному значению H соответствуют A_1 и A_3. Поскольку стратегия A_1 встречается в качестве оптимальной по трем критериям, то степень ее надежности можно признать достаточно высокой для того, чтобы рекомендовать эту стратегию к практическому применению.

Таким образом, в случае отсутствия информации о вероятностях состояний среды теория не дает однозначных и математически строгих рекомендаций по выбору критериев принятия решения. Это объясняется в большей мере не слабостью теории, а неопределенностью самой ситуации. Единственно разумный выход в подобных случаях – попытаться получить дополнительную информацию, например, путем дополнительных исследований или эксперимента. Хотя применение математических методов в играх с природой не дает абсолютно достоверного результата и последний в определенной степени является субъективным, тем не менее в процессе анализа с применением теории игр создается некоторое упорядочение представлений о проблеме для исследователя, что способствует повышению качества принимаемых решений.

Целый ряд экономических задач приводится к матричным играм, поэтому знания основ теории игр необходимы экономисту, работающему в современных условиях. Качество принимаемого решения зависит от информированности исследователя о ситуации, в которой принимается решение. Необходимо уметь использовать даже неполную информацию для обоснования принимаемых решений.

Выводы

Существует ряд задач в экономике и социологии, анализ решения которых можно провести на основе теории игр. Любая конечная игра имеет по крайней мере одно решение (теорема Фон Неймана). Существование седловой точки в платежной матрице с нулевой суммой означает наличие решения игры в чистых стратегиях (см. § 3.3). Если решения конечной игры с нулевой суммой в чистых стратегиях не существует, решение находится в смешанных стратегиях. Предварительно осуществляется анализ платежной матрицы на наличие дублирующих и заведомо невыгодных стратегий (см. § 3.5), после чего модель игровой задачи с нулевой суммой сводится к задаче ЛП (см. § 3.7).

Контрольные вопросы и задания

1. Сформулировать определения основных понятий теории игр.
2. Сформулировать цель теории игр как математической науки.
3. Сформулировать понятия: нижняя цена игры, верхняя цена игры.
4. Сформулировать понятия: чистая цена игры, седловая точка, оптимальные стратегии, решение игры.
5. Если один из игроков придерживается своей оптимальной стратегии, то может ли выигрыш другого игрока быть больше (меньше), чем цена игры?
6. Сформулировать понятия: смешанные, активные, пассивные стратегии.
7. Сформулировать теорему Фон Неймана.

8. В каком случае выигрыш игрока, придерживающегося своей оптимальной смешанной стратегии, будет больше (меньше), чем цена игры?
9. В чем заключается процедура вычеркивания дублирующих и заведомо невыгодных стратегий?
10. В каких случаях игра размерности 2×2 имеет решение в чистых стратегиях?
11. Решить игру размерности 2×2 в общем виде.
12. Парную игру $m \times n$ с нулевой суммой двух игроков A и B записать в виде задачи ЛП.
13. Что понимается под термином «природа» в теории игр?
14. Какая игра называется биматричной?
15. Сформулировать теорему Нэша.
16. Сформулировать понятие «равновесная ситуация».
17. Каков алгоритм нахождения равновесной ситуации?
18. Сформулировать основные критерии выбора лучшей стратегии.
19. Дают ли критерии однозначный ответ на вопрос, какая из стратегий является лучшей.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследование операций охватывает разнообразные области деятельности человека. Применение исследования операций для технического развития вооруженных сил в конце 40-х годов в настоящее время получило развитие и способствовало решению экономических, социальных и разнообразных научных задач. Рост возможностей исследования операций не исчерпан, и связано это в первую очередь с прогрессом вычислительной техники.

Существующие программные комплексы на основе симплекс-метода и его модификаций не справляются с решением задач ЛП большой размерности. Поэтому возникает необходимость в создании методов и программных продуктов нового поколения для решения задач ЛП, позволяющих учесть «нерегулярные свойства» входных данных, присущие задачам большой размерности, такие как неполнота, противоречивость и изменчивость.

В ситуациях, требующих обоснованного выбора, крайне полезна и необходима теория игр. Теория игр позволяет анализировать ситуацию, осуществлять прогноз при решении большого спектра задач из различных областей науки и техники. В 2012 г. была присуждена Нобелевская премия за решение экономических задач на основе теории игр Элвину Роту из Гарвардского университета и профессору Ллойду Шепли из Университета Калифорнии. Сочетание базовых теоретических исследований Шепли с практическими исследованиями Рота улучшило работу многих рынков и породило огромное поле для исследований.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Исследование операций : учеб. пособие (практикум) / сост. А.С. Адамчук, С.Р. Амироков, А.М. Кравцов. – Ставрополь : Изд-во СКФУ, 2015. – 178 с.
2. Методы принятия решений : лаб. практикум / Н.В. Акамсина, Д.К. Проскурин, Ю.С. Сербулов, Е.А. Шипилова. – Воронеж : ВГАСУ, 2013. – 103 с.
3. Горлач, Б.А. Исследование операций : учеб. пособие / Б.А. Горлач. – Санкт-Петербург : Лань, 2013. – 448 с. – (Учебники для вузов. Специальная литература).
4. Есипов, Б.А. Методы исследования операций : учеб. пособие / Б.А. Есипов. – 2-е изд., испр. и доп. – Санкт-Петербург : Лань, 2013. – 304 с. – (Учебники для вузов. Специальная литература).
5. Жидкова, Н.В. Методы оптимизации систем : учеб. пособие / Н.В. Жидкова, О.Ю. Мельникова. – Саратов : Ай Пи Эр Медиа, 2018. – 149 с.
6. Кузнецов, А.В. Высшая математика: Математическое программирование : учебник / А.В. Кузнецов, В.А. Сакович, Н.И. Холод ; под общ. ред. А.В. Кузнецова. – 4-е изд., стер. – Санкт-Петербург : Лань, 2013. – 352 с. – (Учебники для вузов. Специальная литература).
7. Минько, Э.В. Методы прогнозирования и исследования операций : учеб. пособие / Э.В. Минько, А.Э. Минько. – Саратов : Ай Пи Эр Медиа, 2017. – 316 с.
8. Ржевский, С.В. Исследование операций : учеб. пособие / С.В. Ржевский. – Санкт-Петербург : Лань, 2013. – 480 с. – (Учебники для вузов. Специальная литература).
9. Сдвижков, О.А. Практикум по методам оптимизации : учеб. пособие / О.А. Сдвижков. – Москва : Вузовский учебник : ИНФРА-М, 2015. – 200 с.
10. Сосина, Н.А. Методические указания по выполнению контрольной работы по дисциплине «Математика», раздел «Линейное и динамическое программирование» : для всех экон. специальностей и направлений ВПО заоч. формы обучения / Н.А. Сосина. – Тольятти : ПВГУС, 2015. – 132 с. – URL: http://elib.tolgas.ru (дата обращения: 10.10.2020).

11. Сосина, Н.А. Учебно-методическое пособие по дисциплине «Математика», раздел «ЭММ и модели» : для студентов экон. специальностей и направлений / Н.А. Сосина. – Тольятти : ПВГУС, 2012. – 46 с. – URL: http://elib.tolgas.ru (дата обращения: 10.10.2020).
12. Сосина, Н.А. Учебно-методическое пособие для проведения практических занятий по дисциплине «Математика», раздел «Экономико-математические методы и модели» : «Основы теории графов. Сетевые методы решения задач» : для студентов экон. специальностей и направлений. Ч. 2 / Н.А. Сосина. – Тольятти : ПВГУС, 2009. – 67 с. – URL: http://elib.tolgas.ru (дата обращения: 10.10.2020).
13. Сосина, Н.А. Учебно-методическое пособие по дисциплине «Экономико-математические методы и модели» : для студентов экон. специальностей / Н.А. Сосина. – Тольятти : ПВГУС, 2008. – 89 с. – URL: http://elib.tolgas.ru (дата обращения: 10.10.2020).
14. Стронгин, Р.Г. Исследование операций и модели экономического поведения : учеб. пособие / Р.Г. Стронгин. – 2-е изд., испр. – Москва : ИНТУИТ, 2016. – 246 с. – (Основы информационных технологий).
15. Шелехова, Л.В. Методы оптимальных решений : учеб. пособие / Л.В. Шелехова. – Санкт-Петербург : Лань, 2016. – 304 с. – (Учебники для вузов. Специальная литература).

ГЛОССАРИЙ

Адекватность модели – соответствие модели моделируемому объекту или процессу.

Алгоритм – формализованная последовательность действий по решению задачи.

Антагонистические игры – игры, в которых интересы игроков строго противоположны, т. е. выигрыш одного игрока – это одновременно проигрыш другого.

Базисное решение – решение, в котором все свободные переменные равны нулю.

Двойственные оценки – оценки, которые определяют степень дефицитности используемых ресурсов и показывают, насколько возрастает максимальное значение целевой функции прямой задачи при увеличении количества соответствующего ресурса на единицу.

Допустимый план (допустимое решение) – решение, содержащее только неотрицательные компоненты, удовлетворяющее системе ограничений, но не обязательно оптимальное.

Вектор градиент функции $F(x_1, x_2, ..., x_n)$ – это вектор $\overline{grad F} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_j} \cdot \bar{e}_j$ ($\bar{e}_j$ – орт базиса), указывающий направление наискорейшего возрастания функции $F(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Задача линейного программирования (ЛП) – задача, в которой целевая функция и ограничения заданы при помощи линейных функций.

Задача оптимизации – задача, решение которой сводится к нахождению максимума или минимума целевой функции при заданных ограничениях на переменные.

Игра – формализованная модель конфликтной ситуации.

Игра двух лиц с ненулевой суммой – игра, в которой сумма выигрышей двух игроков после каждой партии не равна нулю.

Игра двух лиц с нулевой суммой – игра, в которой интересы двух игроков строго противоположны, т. е. выигрыш одного есть проигрыш другого.

Игра против природы – игра, где одним из определяющих факторов является внешняя среда, или природа, которая может находиться в одном из состояний, которые неизвестны лицу, принимающему решение.

Игрок – участник игровой модели.

Исследование операций – это наука о количественном обосновании оптимальных решений на основе построения и анализа математической модели.

Каноническая форма задачи ЛП – это задача ЛП, в которой система ограничений состоит только из равенств.

Коалиции игроков – объединение m игроков в игре n лиц ($m \leq n$) с целью получения максимального выигрыша и выработки соответствующих стратегий.

Косвенные затраты – это затраты, получаемые для маршрутов, по которым не осуществляются перевозки в рассматриваемом решении, вычисляются как сумма потенциалов для свободных клеток.

Линейное программирование – методы решения задач математического программирования, в которых ограничения и целевая функция линейны.

Модель – это объект, который замещает оригинал и отражает наиболее важные для данного исследования черты и свойства оригинала.

Математическая модель – это совокупность математических соотношений, определяющих модель.

Метод наименьших затрат – метод нахождения первоначального базисного решения транспортной задачи с учетом затрат на перевозку единицы груза.

Метод северо-западного угла – это метод нахождения первоначального базисного решения транспортной задачи без учета затрат на перевозку единицы груза.

Метод потенциалов – это один из алгоритмов решения транспортной задачи, осуществляемый по шагам от одного опорного плана к другому, по крайней мере не к худшему.

Оптимальное решение – решение x^*, для которого принятый критерий с учетом наложенных ограничений достигает наибольшего (наименьшего) значения.

Парная игра – игровая модель с двумя участниками.

Переменная – величина, принимающая различные значения.

Платежная матрица – прямоугольная таблица размерности m на n, элемент которой a_{ij} является оценкой ожидаемого выигрыша (проигрыша) игроков в случае применения стратегии A_i первым игроком и стратегии B_j вторым игроком.

Потенциалы – это параметры, принимающие числовые значения, которые приписываются пунктам отправления и пунктам назначения, вычисляются по определенному правилу и позволяют судить о выполнении или невыполнении на данном шаге критерия оптимальности.

Симплексный метод – метод решения задач линейного программирования, позволяющий осуществлять переход от одного допустимого базисного решения к другому и получать при этом значение целевой функции на каждом шаге по крайней мере не хуже, чем на предыдущем шаге.

Случайный ход – результат, получаемый не решением игрока, а каким-либо механизмом случайного выбора (покупательский спрос, задержка с поставкой материалов и т. п.).

Сознательный ход – выбор игроком одного из возможных вариантов действия.

Стандартная форма задачи ЛП – это задача ЛП, в которой система ограничений состоит только из неравенств.

Стратегия – правило действий в каждой ситуации процесса принятия решения.

Транспортная задача закрытого типа – это транспортная задача, в которой суммарные мощности поставщиков равны суммарным потребностям потребителей.

Теория игр – математический аппарат, созданный для анализа конфликтных ситуаций и обоснования решений в условиях неопределенности и риска.

Целевая функция – критерий оптимизации, признак, характеризующий качество принимаемого решения (максимум прибыли, минимум затрат).